لومړی څپرکی

د عددونو سیټونه او د هغوی الجبري عملیې

په دې فصل کې د حقیقي عددونو (د طبیعی عددونو، د کاملو عددونو، د تامو عددونو، د ناطقو عددونو، د غیر ناطقو عددونو) سیټونه د مختلطو عددونو په شمول معرفي شویدی. د حقیقي عددونو ځینی لومړني خاصیتونه لکه تساوی،ترتیب، تجزیه، توانونه او جذرونه په لنډه توګه تر بحث لاندې نیول شویدي. او د دوو، پنځو او دولسو په پایو (قاعدو) باندی د عددلیکنې سیستمونو ته کتنه شویده.

طبیعی عددونه *(Nutural Numbers)*

تر ټولو ساده عددونو ته لکه *1*، *2*، *3*، *4*،...... طبیعی عددونه وایې او د طبیعی عددونو ست عبارت دی

$$IN = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ...\}$$

طبیعی عددونه د تامو مثبتو عددونو په نامه هم یادوي.

د طبیعی عددونو ست تر دوو عملیو جمع او ضرب لاندی تړلئ دئ. په دی معني چه د هرو دوو طبیعی عددونو د جمع او ضرب حاصلونه بیاهم یو، یو طبیعی عدد دی. په بل عبارت:

$$\forall m, n \in IN \Rightarrow m + n \in IN \quad , \quad mn \in IN$$

کامل عددونه *(Whole Numbers)*

هغه ست چې د ټولو طبیعی عددونو څخه د صفر په شمول جوړ شوی وي د کاملو عددونو ست بلل کیږي

$$W = \{0, 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , \cdots\}$$

دکاملو عددونو ست هم د جمع او ضرب د عملو لاندې تړلی دی

تام عددونه *(Integer Numbers)*

هغه ست چې د ټولو کاملو عددونو او ټولو منفی طبیعی عددونو څخه جوړشوی وي د تامو عددونو د ست څخه عبارت دی. او په لاندې ډول ښودل کیږي

$$Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\} = \{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots\}$$

د تامو عددونو ست د دریو عملیو جمع، ضرب او تفریق لاندې تړلی دی. په دې معنی چې د هرو دوو تامو عددونو د جمع، ضرب، او تفریق حاصل بیا هم یو تام عدد دی.

$$\forall m,n \in Z \Rightarrow m+n \in Z \quad , m-n \in Z, \quad mn \in Z$$

ناطق (نسبتی) عددونه *(Rational Numbers)*

هغه عددونه چې د دوو تامو عددونو د نسبت په توګه ارایه کیدای شي د نسبتي عددونو په نامه یادیږي.

په نسبتي عددونو کې صفر د مخرج (مقسوم علیه) په توګه د راوړنې وړ نه دی . د ناطقو عددونو سیت عبارت دی له

$$Q = \left\{ x : x = \frac{m}{n} \ , \ m \ , \ n \ \in \ Z \, , n \neq 0 \right\}$$

هر تام عدد یو ناطق عدد دی. ځکه تام عدد هغه کسری عدد دی چې مخرج یې "1"وي.

د ناطقو عددونو سیټ تر دریو عملیه جمع، تفریق او ضرب لاندې تړلئ دئ او هم د صفر خلاف د ټولو ناطقو عددونو سیټ د تقسیم تر عملیې لاندې هم تړلی دی.

یعنی

$$\forall x, y \in Q \ \Rightarrow \ x + y \in Q$$

$$x - y \in Q \quad , \quad xy \in Q$$

$$\forall x, y \in Q \setminus \{ 0 \} \Rightarrow \frac{x}{y} \in Q$$

کسری عددونه: هغه ناطق عددونه چې تام نه وي (مخرج يې د 1 خلاف وي) کسري عددونه دي. او هغه کسرونه چې مخرجونه یې 10، 100، 1000، ....وی اعشاری کسرونه بلل کیږي.

د مثالونو په توګه

$$\frac{3}{10}=0.3 \quad , \quad \frac{27}{100}=0.27 \quad , \quad \frac{7}{1000}=0.007 \quad , \quad \frac{2371}{10000}=0.2371$$

اعشاري کسرونه دی. هغه اعشاری کسرونه چې په هغې کې د اعشاري نښې څخه وروسته یو یا څو رقمه بی نهایت ځلې تکراریږي د اعشاری متوالي کسرونو په نامه یادیږي.

د مثال په توګه

$$0.333\cdots := 0.\overline{3} \quad , \quad 0.4\ 356\ 356\ 356\ \cdots = 0.4\ \overline{356}$$

څرنګه چې په دوهم فصل کې د کسرونو ډولونو او د هغې خاصیتونه په تفصیل سره تر بحث لاندې نیول شویدی. نو ځکه په دې هکله د زیاتو توضیحاتو څخه ډډه کوو.

متوالي کسر د یو ناطق عدد په توګه

هر ناطق عدد د یو عادي یا متوالي کسر په شکل ارایه کیدای شي او بر عکس هر اعشاری محدود یا متوالی کسر په یو ناطق عدد بدلیدلی شي.

ثبوت: څرنګه چې نسبتي عدد یو عام کسر وي که چېرې د هغې صورت پر مخرج باندې تقسیم شي یو عادي یا متوالي اعشاري کسر په لاس راځي . او موږ دلته د څو مثالونو په راوړلو اکتفا کوو.

$$I. \quad \frac{1}{3} = 0,33333... = 0,\overline{3}$$

$$II. \quad \frac{3}{4} = 0,7500 \quad ...$$

$$III. \quad \frac{12}{7} = 1,714285\,714285... = 1,\overline{714285}$$

$$IV. \quad 6 = \frac{6}{1} = 6,0000 \; ...$$

بر عکس هر متوالي اعشاري کسر په عام کسر باندې بدليدلی شي. د مثال په توګه د $x = 0,13\overline{547}$ متوالي کسر په نظر کې نيسو.

دا عدد په وار سره د 100000 او 100 په عددونو ضربوو اوله يو بل څخه يې تفريق کوو.

$$\begin{array}{rcl} 100\,000x & = & 13547\,,\,547\;547\;547\;... \\ 100x & = & 13\,,\,547\;547\;547\;... \\ \hline 99900x & = & 13534 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{13534}{99900} = \frac{6767}{49950}$$

$$\Rightarrow \quad 0,13\,\overline{547} = \frac{6767}{49950}$$

د ناطقو عددونو په توګه ځينی جذرونه ؟

د $\sqrt{2}$ عدد يو ناطق عدد نه دی.

<u>ثبوت</u> که داسې فرض شي چې $\sqrt{2}$ يو ناطق عدد دی. نو هغه د يو عام کسر په توګه ارايه کيدای شي، که چېرې د اختصار څخه روسته هغه د $\frac{p}{q}$ په شکل وی (p او q شريک عامل نه لري)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

له دواړوخواو د مربع کولو څخه وروسته

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2.q^2$$

لیدل کیږي چې p^2 یو جفت عدد دی، بنا پر دې p هم جفت دی او $p = 2n$ وضع کولی شو په دې صورت کې

$$(2n)^2 = 2.q^2 \quad \Rightarrow \quad 4.n^2 = 2.q^2 \quad \Rightarrow \quad 2.n^2 = q^2$$

بنا پر دې q^2 هم جفت عدد دی او په نتیجه کې q یو جفت عدد دی یعنې د $\frac{p}{q}$ کسر یو مشترک عامل لري.

او دا د فرضیې خلاف دی. نو نتیجه اخلو چې $\frac{p}{q}$ نسبتي عدد نه دی .

په همدی ډول ښودلی شو چې $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ او داسې نور نسبتي عددونه، نه دی که چېرې نوموړي جذرونه استخراج شي نو اعشاري کسرونه په لاس راځي چې په هغې کې له اعشاری څخه وروسته رقمونه اخر نه لري او متناوب (دورانی) هم نه دي.

د مثال په توګه

$$I. \quad \sqrt{2} = 1.41421413...$$

$$II. \quad \sqrt{3} = 1.7320508....$$

$$III. \quad \sqrt{7} = 2.6457513.....$$

په همدې ډول د e، او π، عددونه هم نسبتي نه دي.

غیر ناطق عددونه *(Irrational Numbers)*

هغه عددونه چې ناطق (نسبتی) نه وی، د غیرو ناطقو عددونو په نامه یادیږي. که چېرې دا عددونه په اعشاری ډول ارایه شي، د هغوی د اعشاری څخه وروسته

رقمونه نا متناهی دی او دوره ئی هم نه وی. غیر ناطق عددونه (Q') لکه $\sqrt{2}$،
$\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$، π ، e او داسې نور دی.

حقيقي عددونه (Real Numbers)

هغه سېټ چې د ناطقو او غیر ناطقو عددونو څخه جوړ شوی وي د حقيقي عددونو سېټ دی. د حقيقي عددونو سېټ په IR سره ښيي :

$$IR = Q \cup Q'$$

حقيقي عددونه هم د دريو عمليو، جمع، تفريق او ضرب، لاندې تړلی دي او د صفر خلاف حقيقي عددونو سېټ بيا د تقسيم تر عمليې لاندې تړلی دی.

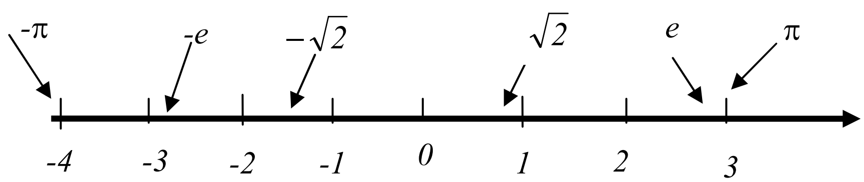
څرګنده ده چې

$$IN \subset Z \subset Q \subset R = Q \cup Q' \quad , \quad Q' \subset R$$

د حقيقي عددونو محور

يو جهت لرونکی مستقيم خط چې يوه نقطه ئې د مبدا په حيث (د صفر عدد ځای) قبلوو، په نظر کې نيول کيږي، د يو قياسی مناسب واحد په نظر کې نيولو سره مثبت عددونه د مبدا ښی خوا او منفی عددونه، بالعکس د خط پر مخ د هرې نقطې سره يو حقيقي عدد تقابل کوي. دغه مستقيم ته د حقيقي عددونو محور وايې.

د حقيقي عددونو الجبري خاصيتونه



شکل 1

حقيقي عددونه د جمع او ضرب د عمليو سره يو ځاى يوولس خاصيتونه لري او د حقيقي عددونو a ، b او c لپاره نوموړي خاصيتونه په لاندې ډول دي.

دجمع د تړلتوب خاصيت	$1.\ a+b \in R,$
د ضرب د ترړتوب خاصيت	$2.\ a.b \in R,$
دجمع بدلونه	$3.\ a+b = b+a,$
د ضرب بدلونه	$4.\ ab = ba,$
د جمع اتحادي خاصيت	$5.\ a+(b+c)=(a+b)$
د ضرب اتحادي خاصيت	$6.\ a(bc) = (ab)$
د جمع د عينيت عنصر (صفر عنصر)	$7.\ a+0 = a$
د ضرب د عينيت عنصر (واحد عنصر)	$8.\ a.1 = a$
د جمع په عمليه كې معكوس عنصر	$9.\ a+(-a) = 0$
د ضرب د عملې معكوس عنصر	$10.\ a.a^{-1} = 1$
په جمع كې د ضرب توزيع	$11.\ a(b+c) = ab+ac$

په حقيقي عددونو کې د ترتيب خاصيتونه

1. دری ګوني خاصيت

د حقيقي عددونو د هرې جوړې x او y لپاره يو له دې دريو خاصيتونو نه صدق کوي.

$$x < y \quad , \quad x = y \quad , \quad x > y$$

2. انتقالي خاصيت $\forall x, y, z \in R : x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$

3. جمعي خاصيت $\forall x, y, z \in R : x < y \Rightarrow x + z < y + z$

4. ضربي خاصيت $\forall x, y, z \in R : \begin{cases} x > 0, x < y \Rightarrow xz < yz \\ x < 0, x < y \Rightarrow xz > yz \end{cases}$

په حقيقي عددونو کې د برابرى (تساوى) خاصيتونه

1. انعکاسي خاصيت $\forall x \in \mathrm{R} \Rightarrow x = x$

2. تناظري خاصيت $\forall x, \mathrm{y} \in \mathrm{R}: x = y \Rightarrow y = x$

3. انتقالي خاصيت $\forall x, y, z \in R: x = y, y = x \Rightarrow x = z$

4. جمعي خاصيت $\forall x, y, z \in R: x = y \Rightarrow y + z = x + z$

5. ضربي خاصيت $\forall x, y, z \in R: x = y \Rightarrow yz = xz$

6. د جمع حذفي خاصيت $\forall x, y, z \in R: y + z = x + z \Rightarrow x = y$

7. دضرب اختصاري خاصيت $\forall x, y, z \in R, z \neq 0 : yz = xz \Rightarrow x = y$

په حقیقي عددونو کې مطلقه قیمت

د تعریف سره سم د یو حقیقي عدد x مطلقه قیمت عبارت دی له

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

مثالونه

$$(i) \quad |4| = 4 \quad , \quad (ii) \quad |-7| = -(-7) = 7$$

$$(iii) \quad |0| = 0 \quad , \quad (iv) \quad \left|1 - \sqrt{11}\right| = \sqrt{11} - 1$$

د مطلقه قیمت خاصیتونه

$$(i) \quad |-x| = |x| \quad , \quad (ii) \quad |xy| = |yx|$$

$$(iii) \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad , \quad (iv) \quad |x + y| \le |x| + |y|$$

مثالونه:

$$(i) \quad |-3+4| = |1| = 1 < |-3| + |4| = 7$$

$$(ii) |4+5| = |9| = 9 \quad , \quad (iii) \left|\frac{-3}{7}\right| = \frac{3}{7} = \frac{|-3|}{|7|}$$

$$(iii) \quad |(-5)6| = |-30| = 30 = 5 \times 6 = |-5| \cdot |6|$$

مختلط عددونه

د موهومي عدد $i = \sqrt{-1}$ په نظر کې نیولو سره، یو مختلط عدد د $z = a + bi$ شکل لري. په داسې حال کې چې a او b حقیقي عددونه دي. یعنی د مختلطو عددونو سېټ عبارت دی له

$$\mathbb{C} = \left\{ z : z = a + bi \ \ , i = \sqrt{-1} \, , a \, , b \in IR \right\}$$

که چېرې په مختلط عدد $z = a + bi$ کې $b = 0$ وي نوموړی عدد حقیقي دی. په بل عبارت د حقیقي عددونو سېټ د مختلطو عددونو د سېټ یو فرعی سېټ دی.

بنا پر دې

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

دلته د مختلطو عددونو سېټ فقط د عددونو د سېټونو په لړ کې معرفی شو. خو د الجبر په بحثونو کې د مختلطو عددونو سېټ په تفصیل سره تر بحث لاندې نیول کیږی.

په طبیعی عددونو کې ضربي عامل (*factor*)

د یو طبیعې عدد هر ضربې عامل په حقیقت کې دهغې عدد یو قاسم دی یعنې هغه عدد پر نوموړي ضربي عامل باندی پوره تقسیم کیږی. کیدای شي یو عدد څو ضربي عوامل ولري. د مثال په توګه د 2، 4، 5، او 10 عددونه هر یو د 20 یو یو ضربي عامل دی.

مضرب (*Multiple*)

هغه عددونه چې پر یو عدد پوره تقسیم کیدای شي ددې عدد مضربونه بلل کیږي. یعنې د یو عدد مضربونه د نوموړي عدد څو برابره (دوه برابره، درې برابره، څلور برابره ......) وي. دیو عدد مضربونه متناهي نه بلکه نا متناهي وی. د مثال په توګه 10، 15 ، 20 ، 25 ، 30، ..... او داسې نور د ۵ عدد مضربونه دی.

اولیه عددونه (*Prime Number*)

د صفر خلاف یو طبیعي عدد چې د یو او خپل ځان څخه بل کوم ضربي عامل ونه لري (پر هېڅ بل عدد باندی پوره نه شي تقسیم کیدلی) د اولیه عدد په نوم یادیږي.
هغه اولیه عددونه چې د دوه څخه زیات رقمونه ونه لري عبارت دي له

1	2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53	59
61	67	71	73	79	83	89	91	97

د یو طبیعي عدد ضربي عوامل که چیرې اولیه عددونه وي نو د اولیه عواملو په نوم یادیږي .
یو طبیعي عدد چې د یو او پخپله عدد څخه پرته د څو عددونو د حاصل ضرب په حیث ارایه کیدای شی د **مرکب عدد**$(composete\ number)$ په نوم یادیږي.
لکه د 12، 30 عددونه.

$$12 = 2\times 2\times 3 \quad , \quad 30 = 2\times 3\times 5$$

هغه عدد چې پر 2 پوره تقسیم شي جفت عدد $(even\ number)$ اوهغه عدد چې جفت نه وي تاق عدد $(odd\ number)$ ویل کیږی.

د طبیعی عددونو تجزیه *(factoring of Natural Numers)*

د یو عدد د ضربي عواملو پیدا کولو عملیه د هغې عدد د تجزیې په نوم یادیږي. د یو عدد ارایه د هغې د اولیه عواملو د حاصل ضرب په حیث د هغې عدد تجزیه شوي شکل دی. د مثال په توګه

$$a) \quad 150 = 2\times 3\times 5\times 5 \quad , \quad b) \quad 252 = 3\times 3\times 2\times 2\times 7$$

د عددونو تجزیه د پاره لازم دي چې پر ځېنو معمولي عددونو باندی د تقسیم قابلیت طرحه شي.

د عددونو د تقسیم قابلیت (Divisibility of numbers)

که چېرې یو طبیعي عدد پر بل باندې دا ډول تقسیم شي چې باقیمانده ئې صفر شي. نو وائي چې نوموړی عدد پر دوهم عدد باندې پوره د تقسیم وړ دی. لکه چې 12 پر 2، 3، 4 او 6 پوره د تقسیم وړدي.

پر دوو باندې د تقسیم قابلیت. که چېرې د یو عدد د یکاَ رقم صفر یا جفت عدد وي هغه پر دوو د تقسیم وړ دی. د مثال په توګه 1350 ، 124، 230 ، 118 او داسی نور.

پر 3 باندې د تقسیم قابلیت

که چېرې د یو عدد د رقمونو مجموعه پر 3 د تقسیم وړ وي، هغه عدد پر 3 د تقسیم وړ دی. لکه 123 ، 1455 ، 432000 و780012 . ددې هر یو عدد د رقمونو مجموعه پر 3 د تقسیم وړدی.

$$
\begin{aligned}
&123 :\Rightarrow 1+2+3=6 \quad , \quad 1455 :\Rightarrow 1+4+5+5=15 \\
&432000: \quad \Rightarrow \quad 4+3+2+0+0+0=9, \\
&780012: \quad \Rightarrow \quad 7+8+0+0+0+1+2=18
\end{aligned}
$$

پر 4 باندې د تقسیم قابلیت.

په هغه صورت کې چې د یو عدد یکاً او دهاً رقمونه صفر وي او یا د یو دوه رقمي عدد په توګه پر ۴ د تقسیم وړ وي . هغه عدد پر ۴ د تقسیم وړ دی. د مثال په توګه د1312، 10024 ، 1300 اړونده رقمونه 12 ، 24،... دی. او پر 4 د تقسیم وړ دي.

پر 5 باندې د تقسیم قابلیت.

که چیری د یو عدد اول رقم 5 یا صفر وی هغه عدد پر 5 د تقسیم وړ دی لکه

45، 240، 6000 او 105 پر 5 د تقسيم وړ دي.

پر 6 باندې د تقسيم قابليت

که چېرې يو عدد په عين وخت کې پر 2 او 3 د تقسيم وړ وي هغه عدد پر 6 د تقسيم وړ دی. لکه 12، 42، 345، 1200.

پر 7 باندې د تقسيم قابليت

که چېری د يو عدد د يکاً رقم دوه چنده د متباقی ارقامو څخه تفريق او هغه تفريق حاصل پر 7 د تقسيم وړ وي. نو هغه عدد پر 7 د تقسيم وړ دی. دمثال په توګه د 294، 315 او 350 عددونه پر 7 د تقسيم وړ دي ځکه چې

$$294 :\Rightarrow 29-2\times4=29-8=21$$

$$315 :\Rightarrow 31-2\times5=31-10=21$$

$$350 :\Rightarrow 35-2\times0=35-0=35$$

$$3164 :\Rightarrow 316-2\times4=316-8=308$$

$$\Rightarrow 30-2\times8=14$$

پر 8 باندې د تقسيم قابليت .

که چېرې د يو عدد لومړني درې رقمونه، د يو درې رقمي عدد په توګه پر 8 باندې د تقسيم وړ وي. نو هغه عدد پر 8 د تقسيم وړ دی. ځکه چې 008، 016، 824 او 032 هر يو پر 8 د تقسيم وړ دی.

پر 9 باندې د تقسيم قابليت .

که چېرې د يو عدد د ټولو رقمونو مجموعه پر 9 باندې د تقسيم وړ وي، نو هغه عدد پر 9 د تقسيم وړ دی. لکه 108 ، 324 ، 1629 او 32499 ،

چې د هغوی د هر يو د رقمونو مجموعه پر 9 د تقسيم وړ دی.

$$108 :\Rightarrow 1+0+8=9 \quad , \quad 324 :\Rightarrow 3+2+4=9$$

$$1629 :\Rightarrow 1+6+2+9=18 \quad , \quad 32499 :\Rightarrow 3+2+4+9+9=27$$

پر 10 باندې د تقسیم قابلیت.

که چېرې د یو عدد لومړی رقم صفر وي هغه عدد پر 10 تقسیم وړ دی . لکه 1230، 2000، 100، 680 او داسې نور.

پر 11 باندې د تقسیم قابلیت.

که چېرې د یو عدد د تاقو مرتبو د رقمونو مجموعه د جفت مرتبو د رقمونو دمجموعی څخه تفریق شي او د تفریق دا حاصل صفر یا پر 11 د تقسیم وړ وي نو هغه عدد پر 11 د تقسیم وړ دی لکه 66 ، 2970 ، 1353او 190829.

$$66 :\Rightarrow 6-6=0 \quad , \quad 2970 :\Rightarrow 2+7-(9+0)=9-9=0$$
$$1353: \quad \Rightarrow \quad 1+5-(3+3)=6-6=0$$
$$828091: \quad \Rightarrow \quad 8+8+9-(2+0+1)=25-3=22$$

هغه مطلوب تفاضلونه 0 او 22 دي. بنا پر دې دا هر یو راکړل شوی عدد پر 11 باندې د تقسیم وړ دي.

یادداشت

د 2 څخه تر 11 پورې عددونو باندې د تقسیم قابلیت په مرسته کولی شو د ریاضي عادي مسایل حل کړو. مګر ممکنه ده چې د ریاضی په اختصاصي مسایلو کې پر اولیه عددونو باندې د تقسیم قابلیت ته اړتیا پیدا شي.

د تقسیم قابلیت په 13، 17، 19 باندې هم شته، مګر دلته زیات تفصیل ته ځای نه لرو.

د تجزئې عملیه

د یو عدد د تجزئې لپاره نوموړی عدد په تدریج سره د هغې پر اولیه ضربی عواملو تقسیموو. کله چې په تقسیم کې باقیمانده نه وي موجود . په هر مرحله کې قاسمونه د عدد چپ خواته لیکو او خارجقسمت ښي خواته د خپل مربوطه مقسوم لاندې لیکل کیږي . دا عملیه تر هغه وخت دوام پیداکوی چې خارج قسمت 1 شي. په هغه وقت کې ټول قاسمونه په یو ستون کې لست کیږي.

1 مثال. د 120 عدد په لاندی ډول تجزیه کیږي:

$$\begin{array}{c|r} 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array} \Rightarrow \quad 120 = 2\times 2\times 2\times 3\times 5 = 2^3 \times 3\times 5$$

2 مثال. د 6300 عدد په لاندی ډول تجزیه کیږی:

$$\begin{array}{c|r} 2 & 6300 \\ \hline 2 & 3150 \\ \hline 3 & 1575 \\ \hline 3 & 525 \\ \hline 5 & 175 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array} \Rightarrow \quad 6300 = 2\times 2\times 3\times 3\times 5\times 5\times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

تر ټولو لوی مشترک قاسم *(Greatest Common Divisor)*

که چېرې د څو عددونو قاسمونه سره مقایسه شي ممکن ځینې قاسمونه ئې سره شریک وي. طبیعي ده چې په دی مشترکو قاسمونو کې به یو تر ټولو لوی وي چې هغې ته د هغوی تر ټولو لوی مشترک قاسم *(GCD)* وائي. د هر عدد تر ټولو کوچنی قاسم او د څو عددونو تر ټولو کوچنی مشترک قاسم په ټولوحالاتو کې د 1 (یو) عدد دی. چې په محاسبه د پام وړ نه دی.

3 مثال. د 12، 30، او 42 مشترک قاسمونه پیدا او د هغوی تر ټولو لوی مشترک قاسم معلوم کړئ.

$$D(12)=\{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,6\,,\,12\}$$

$$D(30)=\{1,2,3,5,6,10,15\}$$
$$D(42)=\{1,2,3\ ,6,7,14,42\}$$

د مشترکو قاسمونو ست $\{1\ ,2\ ,3\ ,6\}$ = $CD(12,30,42)$ او د 12 ، 30 42 تر ټولو لوی مشترک قاسم عبارت دی له $6 = (12,30,42)$ GCD دی.

د عددونو د تر ټولو لوی مشترک قاسم معلومول

<u>اول</u>. د تجزئې میتود. د څو عددونو د تر ټولو لوی مشترک قاسم د معلومولو لپاره ، لومړی دا هر عدد د اولیه عددونو په ضربی عواملو تجزیه کوو د هغوی څخه د هغو ضربی مشترکو عاملونه حاصل ضرب چه تر ټولو کم توانونه لري د مطلوبه تر ټولو لوی مشترک قاسم څخه عبارت دی.

***4* مثال**. د 108 او 420 تر ټولو لوی مشترک قاسم معلوم کړی.

$$\begin{aligned}108&=2\times2\times3\times3\times3\\420&=2\times2\times3\times5\times7\end{aligned}\Rightarrow GCD(108,420)=2\times2\times3=12$$

<u>دویم</u>. د مشترکو قاسمونو میتود. په دې میتود کې عددونه همزمان تر هغه وخته پورې په مشترک قاسم تقسیموو تر څو بل مشترک قاسم وجود ونه لري. ددی ټولو مشترکو قاسمونو د ضرب د حاصل څخه د دوی تر ټولو لوی مشترک قاسم په لاس راځي.

<u>*5* مثال</u>. د 60، 420، او 660 تر ټولو لوی مشترک قاسم پیدا کړئ
.

$$\begin{array}{c|ccc}10&60&420&660\\\hline 6&6&42&66\\\hline &1&7&11\end{array}\quad\Rightarrow\quad GCD(60,420,660)=10\times6=60$$

دریم. د اقلیدس میتود. په دې روش کې د دوعددونو د تر ټولو لوی مشترک قاسمد پیدا کولو لپاره، په لومړی قدم کې هغه لوی عدد پر کوچني عدد تقسیموي، په دوهمه مرحله کې هغه کوچنی عدد پر باقیمانده باندی تقسیموي، په دریمه مرحله کې د لومړی مرحلې باقیمانده د دوهمې مرحلې پر باقیمانده باندې تقسیموي دا عملیه په پرلپسی ډول ادامه پیدا کوي، داسی چې په هره مرحله کې مخکښینی باقیمانده پر وروستی باقیمانده باندې تقسیمیږي تر څو یو باقیمانده صفر شي، په دې حالت کې د صفر خلاف اخرین باقیمانده د نوموړي دوو عددونو تر ټولو لوی مشترک قاسم دی.

6 مثال: د 132 او 252 تر ټولو لوی مشترک قاسم پیدا کړئ.

$$\frac{252}{132}=1\frac{120}{132}\Rightarrow\frac{132}{120}=1\frac{12}{120}\Rightarrow\frac{120}{12}=10\Rightarrow GCD(132,252)=12$$

اویا

$$\begin{array}{r} 1 \\ 132\overline{)252} \\ \underline{132} \\ 120 \end{array}\Rightarrow\begin{array}{r} 1 \\ 120\overline{)132} \\ \underline{120} \\ 12 \end{array}\Rightarrow\begin{array}{r} 10 \\ 12\overline{)120} \\ \underline{120} \\ \times \end{array}\Rightarrow GCD(132,252)=12$$

تر ټولو کوچنی مشترک مضرب $(Least\ Common\ Multiple)$

دوه یا څو عددونه نا متناهي مشترک مضربونه لري چې د هغوی تر منځ تر ټولو لوی قیمت وجود نه لري مګر دا مضربونه تر ټولو کوچنی قیمت لري چې د هغوی تر ټولو کوچنی مشترک مضرب (LCM) بلل کیږی.

په بل عبارت سره د څو عددونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب په ټولو مضربونو کې هغه کوچنی عدد دی چی پر نوموړي عددونو هر یو باندې د تقسیم وړ وي.

د عددونو د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب معلومول

اول. د تجزئي میتود. د څو عددونو د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره، لومړی دا هر یو عدد په بیله توګه د اولیه عددونو په ضربی عواملو تجزیه کوو. او د هغوی د مشترکو هغه عواملو د ضرب حاصل چی تر تولو لوړ توان ولری د غیرو مشترکو عواملو سره د مطلوبه د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب څخه عبارت دی.

7 مثال: د 108 او 420 تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{matrix} 108 = 2\times 2\times 3\times 3\times 3 \\ 420 = 2\times 2\times 3\times 5\times 7 \end{matrix} \Rightarrow LCM(108,420) = 2^2\times 3^3\times 5\times 7 = 3780$$

دوهم . د مشترکو قاسمونو میتود. په دې روش کی نوموړی عددونه په مشترکو قاسمونو همزمان تقسیم کوو تر هغې چې د دو عددونو تر منځ لا اقل مشترک قاسم وجود ونه لري نو د مشترکو قاسمونه او منفرد مقسوم علیه د حاصل ضرب څخه تر ټولو کوچنی مشترک مضرب په لاس راځي.

8 مثال. د 60، 420، او 660 تر ټولو کوچنی مشترک مضرب معلوم کړی.

حل:

$$\begin{array}{c|ccc} 10 & 60 & 420 & 660 \\ \hline 6 & 6 & 42 & 66 \\ \hline & 1 & 7 & 11 \end{array} \Rightarrow LCM = 10\times 6\times 1\times 7\times 11 = 4620$$

9 مثال. د 8، 12، 30، او 48 تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړی

حل :

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 8 & 12 & 30 & 48 \\ 4 & 8 & 4 & 10 & 16 \\ 2 & 2 & 1 & 10 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 2 \end{array} \Rightarrow \quad LCM = 3\times 4\times 2\times 1\times 1\times 5\times 2 = 240$$

د تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د ضرب حاصل
د دوو عددونو د ضرب حاصل ددې عددونو د تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د حاصل ضرب سره مساوي دی. یعنې ددوو طبیعی عددونو m و n لپاره لرو چې

$$\left(LCM(m,n)\right)\times\left(GCD(m,n)\right) = m\times n$$

***__10 مثال__*. د 12 او 30 عددونو لپاره لرو چې**

$$LCM(12,30) = 60 \quad , \quad GCD(12,30) = 6$$

$$\Rightarrow \left(LCM(12,30)\right)\times\left(GCD(12,30)\right) = 60\times 6 = 360 = 12\times 30$$

د توانونو *(powers)* او جذرونو *(Radicals)* مفهوم

دا امکان نشته چې یو عدد د مساوي ضربي عاملونو د ضرب په توګه وښودل شي ، د مثال په توګه د 32 عدد لپاره لرو چې $32 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2$ یا $32 = 2^5$. دلته ویل کیږي چې د 32 عدد، 2 د پنځو په طاقت ښودل شویدی. د 2^5 عدد د 5 په طاقت *(power)* د 2 په اساس یا قاعده (*base*) باندې، د توان (*exponent*) په نامه یادیږي. د 2 عدد ته 32 عدد پنځم جذر وائي. په همدې توګه

$$81 = 3^4 ,\ 25 = 5^2 ,\ 1000,\ 10^3$$

لیکل کیدای شي چې دلته 10 د 1000 دریم جذر، 5 د 25 دوهم جذر او 3 د 81 څلورم جذر دی.
دا هر یو عبارت بیا په لاندی کې په دوو عبارتونو سره لیکو.

$$25 = 5^2 \Leftrightarrow \sqrt{25} = 5, \qquad 1000 = 10^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1000} = 10$$
$$81 = 3^4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{81} = 3, \qquad 32 = 2^5 \Leftrightarrow \sqrt[5]{32} = 2$$

د نمونې په توګه د $\sqrt[4]{\ }$ سمبول څلورم جذر، د $\sqrt{\ }$ سمبول دوم جذر رابښيي. په دې ځای کې د 4، 2 عددونه د جذرونو مرتبی بلل کيږي. په عمومي توګه کله چې د يو عدد جذر($root$) طرحه کيږي نو د هغې هدف به دوم جذر وي. د ټولو کاملو عددونو جذرونه په دقيقه توګه کامل عددونه، نه دي. د ځېنو عددونو دوم جذر، بيا کامل عددونه وي. د ځېنو عددونو او جذرونو نمونې په لاندې جدول کې ورکړل شوي دي.

اعدا د	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
جذراعداد	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

په عمومی توګه د عددونو جذرونه تقريبی معلوميږي.

د مربع جذر (جذر المربع) محاسبه

د يو عدد مربع (دوهم) جذر د پيدا کولو په عمليه کې نوموړی عدد د ښي خوا څخه دوه رقمی طبقه بندي کيږی په دې ترتيب چپ خواته اخرينی يو يا دوه عددونه پاته کيږي. په هغه صورت کې ددې اخرني عدد تقريبي جذر (تر ټولو لوی عدد چی مربع ئی د دې عدد څخه لوی نه وي) په دوؤ ځايو نو کې (پاس او چپ خواته) ليکو او مربع ئی د هغې عدد لاندی ليکو او سره تفريق کووئې. په دوهم قدم کې دوه بعدي رقمونه د باقيمانده ښی خواته راکوزوو. د هغې په مقابل کې چپ خواته د پورتني

عدد (مخکښيني تقريبي جذر) دوه چنده دا ډول ځای پر ځای کوو چی ښئي خواته يې د يو رقم ځای خالی وي.
اوس په دې خالي موقيعت د پورتنی عدد ښئی خواته (په دوه ځايونو) کې يو تر ټولو لوی يو رقمي عدد دا ډول معلوم او ليکل کيږي چې د همغې ضرب د همدی لاس ته راوړل شوي عدد سره، د اصل عدد (باقيمانده په ځای کې)، څخه لوی نه وي. د ا د ضرب حاصل د همغه عدد (باقيمانده په ځای کې) لاندې ليکو او ورڅخه تفريق کوو ئې. په دريم قدم کې بيا هم دوه بعدی رقمونه په خپل ستون کې لاندې راوړو او عمليه تکراريږي. دا امکان شته چې د عمليې د اجرا کولو په وخت په ځينو مرحلو کې مطلوبه رقم صفر وی، خو هغه کوم مشکل نه پيدا کوی. ددې پروسې په ختم کې مطلوبه جذر هغه عدد دی چې په پورتني برخه کې لاس ته راځي. يادونه کووچې د مربوطه رقم د لټولو په ټولو پړاوونو کې بهتره ده چې تر عملي لاندې عدد د يکا رقم حذف کړو او د هغې له تقسيم څخه پر هغه عدد باندې چې په مقابل کې ليکل شويدی، د لټولو وړ رقم تخمين کړو.ممکن د هغې عين خارج قسمت تعين نه کړی. مگر د هغې مطلوبه رقم څخه يو، دوه يا څو واحده کم په لاس راتلی شي

***11* مثال**. د *77284* جذر پيدا کيږی

$$
\begin{array}{r|lll}
 & 2 & 7 & 8 \\
\underline{\quad}2 & 7 & 72 & 84 \\
 & 4 & & \\ \hline
\underline{\quad}47 & 3 & 72 & \\
 & 3 & 29 & \\ \hline
\underline{\quad}548 & & 43 & 84 \\
 & & 43 & 84 \\ \hline
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \sqrt{27284} = 278
$$

د جذرونو ضربی خاصیتونه

د جذرونو ځینی خاصیتونه په لاندې په ساده مثالونو کې ښودل کیږي

$$I.\quad \sqrt[4]{3^4} = \sqrt[4]{81} = 3 \quad , \quad II.\quad \left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$III.\quad \sqrt{4\times 25} = \sqrt{100} = 10 = 2\times 5 = \sqrt{4}\times\sqrt{25}$$

د جذرنو معلومول د تجزئی په وسیله.

د تجزئی په مرسته کولی شو د هغو عددونو جذرونه کوم چې طبیعي عددونو وی، په لاس راوړو.

څو مثالونه ئې دا لاندې راوړل کیږي.

$$I.\quad \sqrt[3]{216} = \sqrt{8\times 27} = \sqrt[3]{2^3\times 3^3} = \sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{3^3} = 2\times 3 = 6$$

$$II.\quad \sqrt{400} = \sqrt{4\times 100} = \sqrt{4}\times\sqrt{100} = 2\times 10 = 20$$

$$II.\quad \sqrt{400} = \sqrt{4\times 100} = \sqrt{4}\times\sqrt{100} = 2\times 10 = 20$$

تمرینونه

لاندې عددونه په ضربی عواملو تجزیه کړئ.

(1). 42, (2). 192, (3). 770, (4). 1512, (5). 1260

(6). 1755 , (7). 4096 , (8). 6561 , (9). 15625

د لاندې عددونو تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ.

(10). 27 , 36, (11). 162 , 216 , (12). 16 , 64 ,96

(13). 24 , 80 , 10, (14). 125 , 550 , 1050, (15). 36 , 72 , 108 , 144

لاندی عددونه محاسبه کړئ.

$(16).\quad (2\times 3)^2,\quad (17).\quad 3^2\times 5^3\times 3,\quad (18).\quad 3\ 500\ 000\times 170\ 000$

د لاندی عددونو جزرونه حساب کړئ.

$(19).\quad 15625,\quad (20).\quad 291600,\quad (21).\quad 10404,\quad (22).\quad 9801$

۲۳. دا هر یو عدد د کسر اعشار په حیث ولیکئ

$$I.\quad \frac{1}{7}\quad ,\quad II.\quad \frac{7}{8}\quad ,\quad III.\quad \frac{3}{4}\quad ,\quad IV.\quad \frac{23}{99}\quad ,\quad V.\quad \frac{9}{7}$$

۲۴. لاندې اعشاری کسرونه په اختصار شوي عامو کسرونو بدل کړئ.

$$I.\quad 0,\overline{543}\quad ,\quad II.\quad 0.2\quad ,\quad III.\quad 1,002\quad ,\quad IV.\quad 0,\overline{37}$$

$$V.\quad 0,\overline{5}\quad ,\quad VI.\quad 474747...\quad ,\quad VII.\quad 2,7182818285$$

۲۵. په لاندې عددونو کې کوم یو نسبتي عدد دی.

$$I.\quad 3,333....\quad ,\quad II.\quad 1,6\quad ,\quad III.\quad 3\sqrt{7}$$

$$IV.\quad 3,\overline{0}\quad ,\quad V.\quad 0,125\overline{4}\quad ,\quad VI.\quad 0,12359108...$$

د حقیقي عددونو توانونه

د مخه د توانونو او جذرنو مفهوم د حساب په سطح طرح شویدی. دلته همغه مفاهیم په سمبولیک ډول عمومیت مومی او په نهایت کې د جذر مفهوم هم د عددونو د توان په حیث توسعه پیدا کوي.

که چېرې x یو حقیقي عدد او n یو طبیعی عدد وي.

n ځلی د x حاصل ضرب ''x د n په توان'' ویل کیږی او هغه په x^n ښئی یعنی

$$x^n := \underbrace{xxx\cdots x}_{n}$$

دلته x ته قاعده (اساس)، n ته توان او x^n ته د n په توان سره د x طاقت وایې.

د توانونو قاعدی (قوانین)

د یو حقیقی عدد x او طبیعی عددونو m او n لپاره لرو چې

1. $x^m x^n = x^{m+n}$
2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $x \neq 0, m > n$
3. $(xy)^n = x^n y^n$
4. $(x^m)^n = x^{mn}$
5. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$, $y \neq 0$

پورتنی قاعدی د مشخصو مثالونو په وسیله په لاندې ډول توضیح کیږی

مثالونه:

1. $x^3 x^2 = (xxx)(xx) = xxxxx = x^{3+2}$
2. $\frac{x^7}{x^4} = \frac{xxxxxxx}{xxxx} = xxx = x^3 = x^{7-4}$
3. $(xy)^3 = (xy)(xy)(xy) = (xxx)(yyy) = x^3 y^3$
4. $(x^2)^3 = (x^2)(x^2)(x^2) = x^6 = x^{2\times 3}$
5. $\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{xxxx}{yyyy} = \frac{x^4}{y^4}$, $y \neq 0$

د حقیقي عددونو جذرونه

که چېرې n یو طبیعي عدد x او y حقیقي عددونه وي داسې چې $x^n = y$.
په دې صورت کې x ته د y د n امې مرتبه جذر وایې. اولیکو چې:

$$\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n} = x$$

که چېرې n یو طاق عدد وي نو هر حقیقي عدد یو n–ام حقیقي جذر لري. مګر که n جفت عدد وي نو د $x^n = y$ په رابطه کې د y مثبت عدد لپاره دوه امکانه

موجود دي د مثال په توګه $(-3)^2 = 9 = 3^2$ يا $(-2)^6 = 64 = 2^6$. په دې حالت ۹ دوه دوم جذرونه يعنی (± 3) يا 64 دوه شپږم جذرونه (± 2) لری. ديو مثبت عدد د جفتې مرتبې مثبت جذر د اصلی جذر ($principle\ root$) په نامه ياد وي او ليکو چې.

$$\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n} = |x|\, ,\ n = 2k\ ,\ k \in IN$$

منفي عددونه د جفتې مرتبې جذر نه لري پورتنی عبارت لاندی خلاصه کيږی

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & \sqrt[n]{x^n} = x\ ,\ n = 2k-1\ ,\ k \in IN,\ x \in IR \\ 2. & \sqrt[n]{x^n} = |x|\ \ ,\ \ n = 2k\ \ ,\ \ k \in IN\ ,\ x \geq 0 \end{array}}$$

د جذرونو قاعدې

$$3.\quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} \quad , \quad 4.\quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\ ,\ y \neq 0$$

مثال

$$(i)\quad \sqrt[3]{64x^6} = \sqrt[3]{64}\sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{4^3}\sqrt[3]{\left(x^3\right)^3} = 4x^3$$

$$(ii)\quad \sqrt[5]{\frac{32a^{10}}{b^{15}x^5}} = \frac{\sqrt[5]{32a^{10}}}{\sqrt[5]{b^{15}x^5}} = \frac{\sqrt[5]{\left(2a^2\right)^5}}{\sqrt[5]{\left(b^3x\right)^5}} = \frac{2a^2}{b^3x}$$

د توانونو تعميم (صفری، کسری، او منفی) توانونه

$$(i)\quad 1 = \frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0$$

$$(ii)\quad \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = x^{1-2} = x^{-1}$$

$$(iii)\quad \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n$$

بنا پر دی په محاسبو کې لاندې درې تعریفونه مطرح کیږي

$$\boxed{4.\quad x^{0} := 1 \quad , \quad 5.\quad x^{-1} := \frac{1}{x} \quad , \quad 6.\quad x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}}$$

په نتیجه کې د هر تام عدد n لپاره په لاس راځي چې

$$\boxed{7.\quad x^{-n} = \left(x^{-1}\right)^{n} = \left(\frac{1}{x}\right)^{n} = \frac{1}{x^{n}}}$$

همدا رنګه

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m} \, , \, x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{m}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^{m}}$$

له دې څخه په لاس راځي چې

$$\boxed{(8)\quad x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m} = \sqrt[n]{x^{m}}}$$

بلاخره د حقیقي عددونو x و y لپاره تام عدد n لرو چې

$$\boxed{(9)\quad (xy)^{n} = x^{n}y^{n} \quad , \quad (10)\quad \left(\frac{x}{y}\right)^{n} = \frac{x^{n}}{y^{n}} \, , \, y \neq 0}$$

مثالونه:

$$(1)\quad \frac{a^{4}b^{-3}c^{2}}{a^{5}b^{-5}c^{2}} = a^{4-5}b^{-3-(-5)}c^{2-2} = a^{-1}b^{2}c^{0} = \frac{b^{2}}{a}$$

$$(2)\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{3^{-3}}{4^{-3}} = 3^{-3}\cdot\frac{1}{4^{-3}} = \frac{1}{3^3}\cdot 4^3 = \frac{64}{27}$$

$$(3)\quad 5^0 + 4^{-\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \sqrt[3]{8} = 1 + \frac{1}{2} + 2 = 3\frac{1}{2}$$

$$(4)\quad 27^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{1}{3}\cdot 2} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$(5)\quad \frac{20x^6y^{10}}{5x^4y^6} = \frac{20}{5}\cdot\frac{x^6}{x^4}\cdot\frac{y^{10}}{y^6} = 4x^{6-4}y^{10-6} = 4x^2y^4$$

$$(6)\quad \frac{(3m+4n)^8(1+p)^3}{(3m+4n)^3(1+p)^2} = (3m+4n)^{8-3}(1+p)^{3-2} = (3m+4n)^5(1+p)$$

$$(7)\quad \left(\frac{7x^2y^5z^6t^4}{u^4}\right)^5 = \frac{7\left(x^2y^5z^6t^4\right)^5}{\left(u^4\right)^5} = \frac{7^5x^{10}y^{25}z^{30}t^{20}}{u^{20}}$$

$$(8)\quad \left(27x^{\frac{-7}{8}}\right)^{\frac{8}{3}} = (27)^{\frac{8}{3}}\left(x^{\frac{-7}{8}}\right)^{\frac{8}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{8}{3}}x^{\frac{-7}{8}\cdot\frac{8}{3}} = 3^8x^{-\frac{7}{3}} = \frac{3^8}{x^{\frac{7}{3}}}$$

$$(9)\quad \sqrt[3]{\frac{x^a}{x^b}}\sqrt[3]{\frac{x^b}{x^c}}\sqrt[3]{\frac{x^c}{x^a}} = \sqrt[3]{\frac{x^a}{x^b}\cdot\frac{x^b}{x^c}\cdot\frac{x^c}{x^a}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

په مختلفو پایو (قاعدو) باندې د عددونو شمېرنه

***1*. د اعشاری عدد لیکنې سیستم. د عدد لیکنې په معمولی سیستم کې د *"10"* عدد معیارنیول شویدی. او هر عدد د لسو رقمونو *0*، *1*، *2*، *3*، *4*، *5*، *6*، *7*، *8*، *9* په استفاده د *"10"* د طا قتونو د مضربونو د مجموعی په توګه ارایه کیږي. د مثال په توګه**

$$(i) \quad 2943 = 2000 + 900 + 40 + 3 = 2 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$
$$\Rightarrow 2943 = 2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0$$
$$(ii) \quad 485.762 = 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$$

په دې سیستم کې د $''10''$ عدد ته پایه یا قاعده ($base$) ویل کیږي. او له دی سببه د عدد لیکنې دا معمولی سیستم داعشاری سیستم ($decimal\ system\ notation$) په نامه یادیږی.

2. د عدد لیکنې سیستمونه د دوو، پنځو او دولسو په قاعدو باندې.

د اعشاري عدد لیکنې سیستم ته ورته، کیدلی شي چې عددونه د هر اختیاری عدد په قاعده (پایه) باندې ارائه کړو.

په هر سیستم کې د ضرورت وړ رقمونو شمېر (تعداد) د هغې انتخابي قاعدې (پائې) سره مساوی وي، داسې چې له صفر څخه شروع کیږي بیا له قاعدې څخه تر یو واحد کم پوري دوام پیدا کوي. رقمونه په معموله توګه د یو رقمي عددونو څخه انتخاب کیږي. که چېرې د ضرورت وړ رقمونو له لسو څخه زیات وي. په هغه صورت کې د مثال په توګه د 10، 11، 12 او داسې نورو په شان عددونو لپاره د الفبا د حرفونو څخه سمبولونه خوښیږي.

د 2 په قاعده د عدد لیکنې په سیستم کې ($binary\ system\ notation$)، 2 د قاعدې په توګه طرح کیږی دوه رقمونه 0 او 1 ته اړتیا ده، لکه:

$$(i) \quad 10101_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 21$$
$$(ii) \quad 1000_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8$$
$$(iii) \quad 10000_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16$$

دا دوه رقمي عدد لیکنه د کمپیوتر د تخنیکي عملیې اصلی الګوی جوړ وي. څرنګه چې د برق د جریان موجودیت او یا د هغی نه موجودیت په یو هادي کې دوه امکانه

د 0 او1 څخه نمایندګي کوي. د موازی لینونو په یو ست کې جریان، چې هر یو یې د روښن کولو او مړه کولو امکان ولري، د 2 په قاعده د یو عدد معرف دی. کمپیوتر عددونه او دهغوی ډول ډول عملیې د همدغه دوه رقمی عددونو په سیستم بدلوي او پرې عمل کوي.

یادونه: هغه عددونه چې اندکس ورته نه وي لیکل شوی هغه د اعشاري سیستم عددونه دي لکه21، 8، 16.

د پنځو په قاعده د عدد لیکنې په سیستم کې (پنځه رقمي سیستم). پنځه رقمونو ته اړتیا ده چې عبارت له 0، 1، 2، 3 او4 څخه دي، د مثال په توګه

$$(iv)\quad 4030_5 = 4\cdot 5^3 + 0\cdot 5^2 + 3\cdot 5^1 + 0\cdot 5^0 = 515$$
$$(v)\quad 10000_5 = 1\cdot 5^4 + 0\cdot 5^3 + 0\cdot 5^2 + 0\cdot 5^1 + 0\cdot 5^0 = 625$$

البته د عدد لیکنې مختلف سیستمونه ارائه کیدلی شی خو دلته لازمه نه ده.

د یو سیستم څخه په بل سیستم باندې د عدد لیکنې بدلونه

یو عدد که په کوم یو سیستم لیکل شوی وي. کیدلی شي په اعشاري سیستم بدل شي، او بیا په لاس راغلی عدد پر هغه بل مورد نظر سیستم باندی بدلیږي. د معمولی عددونه بدلونه په یوله دې سیستمونو کې په دوه طریقو په لاس راځی.

اول. د خارجقسمت طریقه د قاعدې پر طاقتونو تقسیم.

په دې طریقه کې راکړل شوي معمولي عدد د قاعدې پر ممکنه نوي طاقت باندې تقسیموو، باقیمانده پر دا وروسته لوی طاقت تقسیموو. دا عملیه تر هغه ادامه پیدا کوي چې باقیمانده صفر شي. د خارجقسمت رقمونه د تقسیم د عملیې په ترتیب سره په مورد نظر سیستم کې اړول شوي عدد دی. تر هر څه دمخه د 2، 5، 10 او 13 قاعدو څو طاقتونه په لاندی جدول کې فهرست کوو.

a	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
2	1	2	4	8	16	32
5	1	5	25	125	625	3125
10	1	10	100	1000	10000	100000
12	1	12	144	1728	20736	248832

1. مثال د 47 عدد د 2 په قاعده سیستم کې ارائه کړئ.

حل: څرنګه چې $2^5 = 32 < 47 < 64 = 2^6$. دجدول د دوهمي لیکې څخه لرو چې

$$\frac{47}{32} = 1\frac{15}{32} \Rightarrow \frac{15}{16} = 0\frac{15}{16} \Rightarrow \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} \Rightarrow \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1} = 1\frac{0}{1}$$

دا پورتنی عملیه په لاندې جدول کې واضح کیږي.

مقسوم	مقسوم علیه	خارج قسمت	باقیمانده
47	32	1	15
15	16	0	15
15	8	1	7
7	4	1	3
3	2	1	2
1	1	1	0

$$\Rightarrow 47 = 101111_2$$

2 مثال. د 47 عدد د 5 په قاعده سیستم کې ارائه کړئ.

حل: څرنګه چې $5^2 = 25 < 47 < 5^3 = 125$. نو د توانونو د جدول د دریم سطر څخه لرو چې

$$\frac{47}{25} = 1\frac{22}{25} \Rightarrow \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{2}{1} = 2\frac{0}{8} \Rightarrow 47 = 142_5$$

داعمليه په لاندې جدول کې واضح شويده

مقسوم	مقسوم عليه	خارج قسمت	باقیمانده
47	25	1	22
22	5	4	2
2	1	2	0

$\Rightarrow 47 = 142_5$

دوم. پر قاعده باندې د تقسیم د با قیمانده قاعده: په دې روش کې معمول عدد په نظر کې نیولی قاعده باندی تقسیمیږي. خارج قسمت د دوهم ځل لپاره پر قاعده تقسیمږي دا عملیه تر هغه وخته پوری ادامه پیدا کوی چې خارجقسمت صفر شي. د باقیمانده برعکس په سیستم کې د عدد د ارقامو ترتیب مطلوب دی.

3 مثال. د 47 عدد د 2 په قاعده سیستم کې ارائه کړئ.

حل:

$$\frac{47}{2} = 23\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{23}{2} = 11\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{2} = 1\frac{0}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = 0\frac{1}{2}$$

لاندې جدول د کار نتیجې توضیح کوي.

مقسوم	مقسوم عليه	خارج قسمت	باقیمانده
47	2	23	1
23	2	11	1
11	2	5	1
5	2	2	1
2	2	1	0
1	2	0	1

مثال. د 47 عدد د 5 په قاعده سیستم کې ارائه کړئ.

حل

$$\frac{47}{5}=9\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{1}{5}=0\frac{1}{5}\Rightarrow 147=142_5$$

تمرینونه

لاندې افادې ساده کړئ

$$(1)\quad 2^3\cdot 3^2 \quad , \quad (2)\quad (-4x)^{-2} \quad (3)\quad (x-y)^0\left[(x-y)^4\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$(4)\ \left(\frac{3x}{4y}\right)^4 ,\ (5)\ \frac{3^{-1}x^2y^{-4}}{2^{-2}x^{-3}y^3}\ ,\ (6)\ \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^2}\sqrt[3]{b^3}}{c^{-2}d^2}}\ ,\ (7)\ \frac{(100)^2(0.01)^{-2}}{(0.0001)^{-4}}$$

$$(8)\quad (25)^0+(0.25)^{\frac{1}{2}}-8^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}+(0.027)^{\frac{1}{3}}-(0.000001)^{\frac{1}{3}}$$

$$(9)\quad \frac{x-25}{\sqrt{x}+5} \quad , \quad (10)\quad \frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad , \quad (11)\quad \frac{2x}{y}\sqrt[4]{\frac{2y}{x}}$$

لاندې په اعشاري سیستم کې عددونه د 2 دقاعدې په سیستم کې ارائه کړئ

$(12)\ 100\ ,\ (13)\ 1000\ ,\ (14)\ 1008\ ,\ (15)\ 999$

د 2 په پایه در کړل شوي عددونه په اعشاری سیستم کې ولیکئ

$(16)\ 1000_2\ ,\ (17)\ 11111_2\ ,\ (18)\ 111_2\ ,\ (19)\ 1001_2$

لاندې عددونه د 5 قاعدې په سیستم ولیکئ.

$(20)\ 10000\ ,\ (21)\ 98\ ,\ (22)\ 10001\ ,\ (23)\ 5678$

د 5 په قاعده درکړل شوی عددونه په اعشاری سیستم کې ولیکئ.

$(24)\ 100_5\ ,\ (25)\ 999_5\ ,\ (26)\ 8000_5\ ,\ (27)\ 9999_5$

لاندې درکړل شوي عددونه د 12 په قاعده ولیکئ

$(28)\ 1000\ ,\ (29)\ 987\ ,\ (30)\ 10001\ ,\ (31)\ 88888$

د 12 په قاعده درکړل شوي سوالونه په اعشاری سیستم کې ولیکئ

$(32)\ 100_{12}\ ,\ (33)\ 99_{12}\ ,\ (34)\ E00_{12}\ ,\ (35)\ RE01_{12}$

دوهم څپرکی

په عددونو کې د کسر مفهوم

کسر په لغت کې د ماتولو په معنی دی خو په رياضی اصطلاح کې هغه يو عدد دی چې په هغې کې د واحد څخه کم کميت شامل وي. په دقيقه توګه کسر يو کميت دی چی د يو واحد عدد د مساوي برخو څخه جوړ شويدی. د مثال په توګه نيمه ډوډي (د ډوډی يو بر دوهم)، د يو مترټوټی رخت درې څلورمې (ديو متر ټوټی رخت دری پر څلوورو). د يو ليتر اوبو څورلس دريمې. ليدل کيږي چې کسر په مشخص ډول د يو قياسی واحد په نظر کې نيولو سره طرحه کيږي او ددو کميتونو څخه جوړ شوی دی.

د کسر مخرج او صورت.

عام کسر *(common fraction)*

<u>د کسر مخرج *(denominator)*</u>. هغه کميت دی چې مربوطه واحد په همغه تعداد ويشل شوی وي.

(د کسرمنشا). د کسر مخرج صفر کيدلی نه شي.

<u>د کسر صورت (*numerator*)</u>. هغه کميت چې د هغه په تعداد د واحد دويشل شويو مقدارونو څخه اخيستل کيږي.

د دريو پورتنيو کسرونو واحدونه، صورتونه او مخرجونه په ترتيب سره په لاندې جدول کې ښودل کيږي.

مربوط واحد	دکسر مخرج	د کسر صورت
یوه ډوډی	2	1
ټوټه رخت په متر	4	3
لیتر اوبه	3	14

په عمومی توګه کله چې یو کسر د مجرد عدد په توګه مطرح کیږي. نو مربوطه واحد یې یوازی یو دی.

د کسر ښودنه. کسر د یو مستقیم خط په مرسته (د کسر د خط په نامه) دا ډول افاده کیږي چې مخرج یې لاندې او صورت یې د پاسه لیکل کیږي. لکه څرنګه چې پورتني دري کسرونه عبارت دي له

$$1.\quad \frac{1}{2} \qquad , \qquad 2.\quad \frac{3}{4} \qquad , \qquad 3.\quad \frac{14}{3}$$

د کسر قسمونه

کسر د صورت او مخرج په مقایسه په دوه ډوله دی:

اول. عادي کسر *(proper fraction)*. هغه کسر دی چې په هغې کې صورت د مخرج څخه کم وي عادي کسر د یو څخه کوچنی وي. د عادي کسرونو نمونې عبارت دی له : $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{13}{15}$ او $\frac{2}{17}$.

دوهم. غیر عادی کسر*(Improper fraction)* هغه کسر دی چې صورت یې له مخرج څخه کم نه وي.

لومړی حالت. هغه غیرعادې کسر چې صورت او مخرج ئې سره مساوي وي. د ,, یو‘‘ عدد سره مساوی دی، د مثال په توګه

$$\frac{2}{2} = \frac{5}{5} = \frac{10}{10} = \frac{25}{25} = \frac{38}{38} = 1$$

دویم حالت. که چېرې په یو غیر عادې کسر کې صورت له مخرج څخه زیات شي، هغه کسر له یو څخه لوی دی. د مثال په توګه

$\frac{14}{3}$ ، $\frac{7}{4}$ او $\frac{100}{31}$.

هر کامل عدد د یو مجازی کسر په توګه په نظر کې نیولئ شو چی مخرج ئې د 1 عدد وي. د مثال په توګه

$$5=\frac{5}{1} \quad , \quad 12=\frac{12}{1} \quad , \quad 100=\frac{100}{1}$$

مخلوط عددونه (***Mixed Numbers***). یو غیر عادي کسر د یو کامل عدد (د صحیح عدد په نامه) او یو کسر د مجموعی په توګه شودل کیدای شي چې مخلوط عدد (کسری عدد) نومیږي. د مثال په توګه

$$\frac{14}{3}=4+\frac{2}{3}=4\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{7}{2}=3+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{40}{11}=3+\frac{7}{11}=3\frac{7}{11}$$

د کسر خاصیتونه

اول. که چېرې د یو کسر صورت په یو عدد ضرب یا پر یو تقسیم شي نو هغه اصلي کسر په همغه عدد ضرب یا تقسیمږي. د مثال په توګه $\frac{3\times 2}{7}=\frac{6}{7}$ د کسر درې برابره دی او د $\frac{8\div 2}{11}=\frac{4}{11}$ د $\frac{8}{11}$ نیمه یې دی.

دوهم. که چېرې د یو کسر مخرج د صفر خلاف په یو عدد ضرب یا تقسیم شي نو اصلي کسر په همغه عدد په ترتیب سره تقسیم یا ضربیږي. مثلاً $\frac{2}{3\times 4}=\frac{2}{12}$ د $\frac{2}{12}$ کسر د څلورمې برخې سره مساوی او $\frac{4}{10:2}=\frac{4}{5}$ د $\frac{4}{10}$ کسر دوه برابره دی.

دریم. که چېرې د یو کسر صورت او مخرج په عین وخت کې د یو عدد سره ضرب یا پر هغې تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي.

مثلاً

$$\frac{12}{15}=\frac{12\div 4}{15\div 4}=\frac{3}{5} \quad \text{یا} \quad \frac{2}{3}=\frac{2\times 5}{3\times 5}=\frac{10}{15}$$

د کسرونو بسیط او مرکب حالات: هغه کسر چې په صورت او مخرج کې (دیو څخه بغیر) بل مشترک فکتور ونه لري د بسیط (اختصاری شوي) کسر په نامه یادیږی. او هغه کسر چې بسیط نه وي مرکب کسرونه ورته ویل کیږي. یو کسر بی نهایت مرکب حالات خو فقط یو بسیط حالت لری. مثلاً

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{7}{17}=\frac{8}{16}=\frac{9}{18}=\frac{10}{20}=\frac{11}{22}=\frac{12}{24}=\dots$$

د پورتنیو مساوی کسرونو $\frac{1}{2}$ تر ټولو مختصر (بسیط) حالت لري. په داسې حال کې چې دا نور ټول کسرونه یې مرکب دي. په بل عبارت د هغوی هر یو صورت او مخرج مشترک فکتور لري.

په محاسبه کې ښه داده چې هر کسر په بسیط حالت راوړل شي.

<u>متجانس کسرونه</u>. هغه کسرونه چې مخرجونه یې سره مساوی وي د متجانسو (همجنسو کسرونو) په نامه یادیږي. د مثال په توګه د، $\frac{3}{10}$، $\frac{4}{10}$، $\frac{5}{10}$ و $\frac{7}{10}$ کسرونه متجانس د ي.

د کسرونو د شکلونو اړونه (*Reduction of fraction*)

په کسرونو کې د محاسبی په حالت کې کله ضرورت شي چې د هغوی شکلونه د یو حالت څخه بل حالت ته واړول شي. د مثال په توګه د غیر عادي کسر اړونه په عادي کسر، د کسر تصحیح، دیو کسري عدد اړونه په غیر عادي کسر، د کسر اړونه په بسیط (اختصار شوي) شکل، د کسرونو متجانس کول یا د کسرونو تجنیس او داسې نور.

1. د یو مخلوط کسر اړونه په غیر عادی کسر باندی (غیر واجب کسر)

که چېرې وغواړو (د مثال په توګه) د $2\frac{3}{4}$ عدد د غیر عادي کسر په شکل واړوو، نو پوهیږو چې دا عدد د 2 او $\frac{3}{4}$ (دو احد درې څلورمې) عددونو د جمع حاصل دی. څرنګه چې 2 د $\frac{8}{4}$ (دواحد اته څلورمې) سره مساوی دي، بنا پر دې پورتنی مجموعه مساوی په $\frac{11}{4}$ (یولس څلورمې) کیږي. په نتیجه کې

$$2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{2\times 4}{4} + \frac{3}{4} \quad = \quad \frac{2\times 4+3}{4} \quad = \quad \frac{11}{4}$$

په دې ترتیب مخلوط عدد هغه کسر دی چې مخرج یې همغه اولنی مخرج او صورت یې هغه صحیح عدد د مخرج سره ضرب او د صورت سره د جمع حاصل دی.

2 . د غیر عادي کسر اړونه په مخلوط عدد (د کسر تصحیح)

که چېرې دیو کسر صورت د هغې مخرج څخه لوی وي، نو د مجازی کسر اړونې لپاره په مخلوط عدد باندې، لومړی د هغه صورت پر مخرج باندې په ساده ډول تقسیموو او مطلوب عدد په لاندې ډول جوړیږی.

خارجقسمت = صحیح عدد ↔ باقیماند = صورت ↔ مقسوم علیه = مخرج

دا دوې عملې یعنی تصحیح او غیر واجب کول د یو بل عکس دي.

***1* مثال**. د $\frac{23}{4}$ و $\frac{100}{25}$ کسرونه په مخلوطو شکلونو ولیکئ

$$I.\quad 4\overset{\displaystyle 5}{\overline{\smash{)}\,23}} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{23}{4} = 5\frac{3}{4} \qquad , \quad II.\quad 25\overset{\displaystyle 4}{\overline{\smash{)}\,100}} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{100}{25} = 4\frac{0}{25} = 4$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{20} \\ 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 100 \\ \underline{100} \\ 0 \end{array}$$

3. په بسیط (اختصار شوی) ډول دکسر بدلول (**Reduction to Lower Terms**)

هغه کسر چې صورت او مخرج یې یو فکتور او یا څو فکتورونه په ګډه سره ولري، کیدلی شي په مختصر ډول ارائه شي. داسې چې د هغې کسر صورت او مخرج په

يو وخت کې په مشترکو فکتورونو تقسيم شي. د اختصار عمليه په دريو يو تر بله سره معادلو طريقو اجرا کيږي.

2 مثال . د $\frac{30}{105}$ کسر په دريو طريقو اختصار کړئ.

$$2$$
$$6$$
$$I.\quad \frac{30}{105}=\frac{30\div 5}{105\div 5}=\frac{6}{21}=\frac{6\div 3}{21\div 3}=\frac{2}{7}\qquad or\qquad \frac{30}{105}=\frac{2}{7}$$
$$21$$
$$7$$

$$II.\quad \frac{30}{105}=\frac{30\div 15}{105\div 15}=\frac{2}{7}\qquad ,\quad III.\quad \frac{30}{105}=\frac{2\times 3\times 5}{7\times 3\times 5}=\frac{2}{7}$$

3 مثال. د $\frac{600}{18000}$ کسر په لاندې ډول اختصاريږي.

$$\frac{1\times 600}{30\times 600}=\frac{1}{30}\quad or\quad \frac{600}{18000}=\frac{6}{180}=\frac{6\div 6}{180\div 6}=\frac{1}{30}$$

نتيجه: که چېرې د صورت او مخرج څخه په مساوی تعداد صفرونه حذف شي د اختصار عمليه اسانه کيږي.

4 مثال

$$I.\quad \frac{70}{105}=\frac{2\times 5\times 7}{3\times 5\times 7}=\frac{2}{3}\quad ,\quad II.\quad \frac{60}{84}=\frac{2\times 2\times 3\times 5}{2\times 2\times 3\times 7}=\frac{5}{7}$$

د کسرونو استثنايي اختصار.

په ځينو وختونو کې کيدلی شي چې يو کسر د اختصار وړ وي، مګر د صورت او مخرج مشترک فکتور په ساده ګی سره د پيژندنې وړ نه وي. حتی د صورت او مخرج تجزيه په وضاحت سره نه ليدل کيږي. د مثال په توګه $\frac{1599}{6273}$ اختصار کيدلای شي مګر د صورت او مخرج مشترک فکتور يې 123 دی چې په معموله توګه وار دې واره د پيژندنې وړ نه دی. په دا ډول مواردو کې کوشش کيږی چې د تجزيې په طريقه د مسايلو پر حل باندې بريالی شو. خو په ځينو مواردو کې د کمپيوتر څخه پرته به ونه کړای شو چې اختصار وکړو. لاندې مثالونه ته پاملرنه وکړئ

$$I.\quad \frac{1599}{6273}=\frac{13\times 123}{17\times 123}=\frac{13}{17}\quad,\quad II.\quad \frac{247}{988}=\frac{247}{2\times 2\times 247}=\frac{1}{4}$$

$$III.\quad \frac{156621}{183039}=\frac{37\times 51\times 83}{37\times 51\times 97}=\frac{83}{97}$$

4. د يو کسر بدلونه په مرکب حالت باندې *(Reduction to Higher Terms)*

ممکن ضرورت پيدا شي چې يو کسر د يو بسيط حالت څخه و هغه حالت ته تغير ورکړل شي چې صورت او مخرج يې مشترک مناسب فکتور ولري. په دې منظور د کسر صورت او مخرج په يو وخت کې د اړونده عدد سره ضربيږي. دا عمليه د اختصار عکس عمليه ده.

5 مثال. د $\frac{3}{5}$ کسر په مساوی کسر دا ډول واړوئ چې مخرج يې 60 وی.

حل: د غوښتل شوي کسر د لاس ته راوړنی لپاره بايد د راکړل شوي کسر صورت او مخرج د 12 په عدد ضرب شي.

$$\frac{3}{5} = \frac{3\times 12}{5\times 12} = \frac{36}{60}$$

5. د کسرونو هم مخرج کول (د کسرونو تجنیس)

د محاسبو لپاره ډیر وخت داسي لازمیږي چې څو کسرونه همجنس شي. یعنی دا ډول وارول شي چې ټول یو مخرج ولري. ددي لپاره، لومړی د مخرجونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د ټولو کسرونو د مشترک مخرج په توګه نیسو. وروسته بیا دا مشترک مخرج د هر کسر پر مخرج تقسیموو او خارج قسمت یې د هغی په صورت کې ضربوو. او د یو معادل کسر صورت په لاس راوړو. د یا دونې وړ ده چې د مخرجونو هر مشترک مضرب د مشترک مخرج په توګه انتخاب کیدلی شي.. مګر ښه دا ده چې د هغوی تر ټولو کوچنی انتخاب شي.

6 مثال. د $\frac{1}{4}$، $\frac{5}{6}$، $\frac{4}{15}$ او $\frac{11}{24}$ کسرونه هم جنس کړئ.

حل: لومړی د4، 6، 15، او 24 تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کوو او د مطلوبه کسر د مشترک مخرج په توګه یې نیسو

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 4 & 6 & 15 & 24 \\ \hline 4 & 4 & 2 & 5 & 8 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array} \Rightarrow LCD(4,6,15,24) = 3\times 4\times 2\times 5 = 120$$

بنا پر دی

$$\frac{1}{4} = \frac{(120\div 4)\times 1}{120} = \frac{30}{120} \quad , \quad \frac{5}{6} = \frac{(120\div 6)\times 5}{120} = \frac{100}{120}$$

$$\frac{4}{15} = \frac{(120\div 15)\times 4}{120} = \frac{32}{120} \quad , \quad \frac{11}{24} = \frac{(120\div 24)\times 11}{120} = \frac{55}{120}$$

په نتيجه کې متجانس کسرونه $\frac{30}{120}$، $\frac{100}{120}$، $\frac{32}{120}$، $\frac{55}{120}$ په ترتيب سره د غير متجانسو کسرونو $\frac{1}{4}$، $\frac{5}{6}$، $\frac{4}{15}$، $\frac{11}{24}$ سره مساوي دي.

6.د کسرونو مقايسه

ددو کسرونو د مقايسې لپاره لاندې کسرونه په نظر کې نيسو.

لومړی حالت. که چيرې کسرونه مشترک صورتونه ولري، هر هغه کسر چې مخرج يې کوچنی وي هغه لوی دی. مثلاً

$$\frac{8}{9} < \frac{8}{7} < \frac{8}{5} < \frac{8}{4} < \frac{8}{3}$$

دوهم حالت. که چېرې د کسرونو مخرجونه سره مساوی د وی. نو هر هغه کسر چې صورت يې لوی وي، هغه لوی دی. مثلاً

$$\frac{2}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} < \frac{8}{12} < \frac{11}{12}$$

دريم حالت. په هغه حالتونو کې چې د کسرونو صورتونه او مخرجونه سره مختلف وی. لومړی کسرونه سره همجنس کوو او بيا د دوهم دستور څخه کار اخلو.

7 مثال. د $\frac{1}{3}$، $\frac{2}{5}$ ، $\frac{3}{7}$ او $\frac{5}{8}$ سره مقايسه کړئ.

حل : لومړی کسرونه سره هم جنس کوو

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8} = \frac{280}{840}, \frac{336}{840}, \frac{360}{840}, \frac{525}{840}$$

له دی ځايه ليدل کيږي چې

$$\frac{280}{840} < \frac{336}{840} < \frac{360}{840} < \frac{525}{840} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{5}{8}$$

د عامو کسرونو جمع

که چېرې د یو ختکی ددوو ځلورمو سره یوه بله ځلورمه یو ځای شي نو دهغې درې ځلورمې په لاس راځي. دا ساده مثال موږ ته د $\frac{5}{8} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}$ لاربښونه کوي. په دې ترتیب د کسرونو په جمع کولو کې باید لومړی دا کسرونه سره همجنس شي وروسته د صورتونه د جمع حاصل پر مشترک مخرج باندی موږ ته د نوموړو کسرونو د جمع حاصل راکوي. او په اخر کې د اختصار او تصحیح پروسې پر هغې باندې اجرا کیږی. یعنی د کسرونو په جمع کې لاندې مراحل په نظر کې نیول کیږی.

۱. د کسرونو تجنیس.

۲. دیو کسر جوړونه چې صورت یې د هغوی د صورتونو مجموعه او مخرج یې د هغوی مشترک مخرج وی.

۳ . دلزوم په صورت کې د جمع د حاصل اختصار او تصحیح.

مثالونه

$$8.\ \frac{2}{5}+\frac{5}{9}=\frac{7}{9}$$

$$9.\ \frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=\frac{5}{15}+\frac{2}{15}+\frac{6}{15}=\frac{5+2+6}{15}=\frac{13}{15}$$

$$10.\quad \frac{1}{6}+\frac{7}{20}+\frac{4}{25}=\frac{50}{300}+\frac{105}{300}+\frac{48}{300}=\frac{50+105+48}{300}=\frac{203}{300}$$

د مخلوطو عددونو په جمع کولو کې (هغه کسرونه چې صحیح عددونه ولري) کسرونه غیر واجب کیږي او د مخکښني تعامل سره سم جمع کیږي.

***11* مثال**. د $3\frac{3}{4}$ او $5\frac{5}{9}$ مجموعه په لاس راوړئ.

$$3\frac{3}{4}+5\frac{5}{9}=\frac{15}{4}+\frac{50}{9}=\frac{135}{36}+\frac{200}{36}=\frac{335}{36}=9\frac{11}{36}$$

12 مثال. پورتنۍ مثال په لاندې ډول هم حل کېدلی شي.

$$3\frac{3}{4}+5\frac{5}{9}=3+5+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}=8+\frac{27+20}{36}=8+\frac{47}{36}=8+1\frac{11}{36}=9\frac{11}{36}$$

مثال 13 . د $4+\frac{1}{6}+3\frac{3}{10}$ مجموعه حساب کړئ.

$$4+\frac{1}{6}+3\frac{3}{10}=\frac{4}{1}+\frac{1}{6}+\frac{33}{10}=\frac{120+5+99}{30}=\frac{224}{30}=\frac{112}{15}=7\frac{7}{15}$$

یا

$$4+3=7\,,\ \ \frac{1}{6}+\frac{3}{10}=\frac{5+9}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}\Rightarrow 4+\frac{1}{6}+\frac{3}{30}=7+\frac{7}{15}=7\frac{7}{15}$$

د عامو کسرونو تفریق

د تفریق حسابي شرط دادې چې مفروق څخه کوچنی وي. که چیری د یولسو، نیمو ډوډیو څخه شپږ، نیمې ډوډی وخوړل شي، پنځه نیمې نیمې ډوډی پاتې کیږی. یعنی

$$\frac{11}{2}-\frac{6}{2}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

بنا پر دې د کسرونو د تفریق لپاره د جمعې د عملیې په شان، د هم مخرج کولو څخه وروسته د صورتونو تفاضل پر مشترک مخرج باندې د نومړو کسرونو د تفریق حاصل دی. یعنی د کسرونو په تفریق کې لاندې مرحلې په نظر کې نیول کیږي.

1. د کسرونو تجنیس.
2. دیو کسر جوړول چې صورت یې د صورتونو تفاضل وي پر مشترک مخرج باندې.
3. د لزوم په صورت کې د تفریق د حاصل اختصار او تصحیح.

4. مثال د $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$ حاصل تفریق حساب کړئ.

حل .

$$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{6-5}{15}=\frac{1}{15}.$$

15 مثال $\frac{3}{4}$ *7* د $\frac{5}{9}$ *15* له عدد څخه تفریق کړئ.

$$15\frac{5}{9}-7\frac{3}{4}=\frac{140}{9}-\frac{31}{4}=\frac{560}{36}-\frac{279}{36}=\frac{281}{36}=7\frac{29}{36}$$

16 **مثال.** د $5-2\frac{13}{20}$ تفریق حساب کړئ.

$$5-2\frac{13}{20}=\frac{5}{1}-\frac{53}{20}=\frac{100}{20}-\frac{53}{20}=\frac{100-53}{20}=\frac{47}{20}=2\frac{7}{20}$$

17 مثال . د $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-\frac{5}{6}$ مربوط عملیې تر سره کړئ.

حل .

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-\frac{5}{6}=\frac{45}{60}+\frac{24}{60}-\frac{50}{60}=\frac{45+24-50}{60}=\frac{19}{60}.$$

د عام کسرونو ضرب

که چېرې د یوې هندوانې څلورمه درې برابره شي. د هندوانې درې څلورمې په لاس راځي. یعنې $\frac{1}{4}\times 3=\frac{1}{3}$ یا د یو متر د درې پر څلورمې نمائي د متر درې پر اتمه حصه کیږي. په بل عبارت $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$ بنا پر دې د دوو کسرونو ضرب د همغه دواړه کسرونو د مخرجونو د ضرب حاصل وي. که چیرې کسرونه صحیح عددونه ولري نو باید هغوی د ضرب کولو څخه د مخه غیر واجب شي. البته د ضرورت په وخت کې د ضرب حاصل اختصار او تصحیح کیږي.

18 **مثال:** د $\frac{2}{9}\times\frac{3}{4}$ د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل :

$$\frac{2}{9}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times 3}{9\times 4}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

بهتره ده د ضرب د عمليې په جريان کې د کسرونو صورتونه او مخرجونه سره اختصارشي.

***19* مثال** : د $\frac{5}{9}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{35}$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$1\times 1\times 1$$

$$\frac{5}{9}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{35}=\frac{5\times 3\times 2}{9\times 4\times 35}=\frac{1}{42}$$

$$3\times 2\times 7$$

***20* مثال.** د $5\times\frac{5}{34}\times 2\frac{3}{7}$ د ضرب محاسبه کړئ.

حل:

$$1$$

$$5\times\frac{5}{34}\times 2\frac{3}{7}=\frac{5}{1}\times\frac{5}{34}\times\frac{17}{7}=\frac{5\times 5\times 17}{1\times 34\times 7}=\frac{5\times 5\times 17}{1\times 34\times 7}=\frac{25}{14}=1\frac{11}{14}$$

$$2$$

***21* مثال.** د $\left(1-\frac{3}{8}\right)\times 1\frac{3}{5}$ عدد حساب کړئ.

حل :

$$\left(1-\frac{3}{8}\right)\times 1\frac{3}{5}=\left(\frac{1}{1}-\frac{3}{8}\right)\times\frac{8}{5}=\frac{8-3}{8}\times\frac{8}{5}=\frac{5\times 8}{8\times 5}=1$$

د عامو کسرونو تقسیم

که چېرې د يوې خربوزې دوه درېمې پر دوو نفرو تقسيم شي، هر يو نفر ته يوه درېمه رسيږي. په بل عبارت ديوې خربوزې د دوه دريمو نيمايې د خربوزې يوه دريمه کيږي. په حسابي مفهوم

$$\frac{2}{3}\div 2=\frac{2}{3}\div\frac{2}{1}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\times 1}{3\times 2}=\frac{1}{3}$$

بنا پر دې د دوو کسرونو په تقسیم کې. د تقسیم حاصل عبارت دی له: د مقسوم د ضرب حاصل د مقسوم علیه د معکوس سره.

22 مثال. د $2 \div \frac{4}{5}$ عدد حساب کړئ .

حل :

$$2 \div \frac{4}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{1 \times 4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\,\frac{1}{5}$$

23مثال. د $\frac{7}{10} \div 4$ عملیه سر ته ورسوئ.

حل :

$$\frac{7}{10} \div 4 = \frac{7}{10} \div \frac{4}{1} = \frac{7}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{7 \times 1}{10 \times 4} = \frac{7}{40}$$

24 مثال. د $\frac{2}{5} \div \frac{4}{15}$ په لاس راوړئ.

حل :

$$\frac{2}{5} \div \frac{4}{15} = \frac{2}{5} \times \frac{15}{4} = \frac{2 \times 15}{5 \times 4} = \frac{1 \times 3}{1 \times 2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

مثال 25. $6\frac{1}{4} \div 1\frac{3}{8}$ عدد حساب کړئ.

حل

$$6\frac{1}{4} \div 1\frac{3}{8} = \frac{25}{4} \div \frac{11}{8} = \frac{25}{4} \times \frac{8}{11} = \frac{25 \times 2}{1 \times 11} = \frac{50}{11} = 4\,\frac{6}{11}$$

26 مثال. د $\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4} + \frac{7}{20}\right) \div \left(2 - \frac{3}{5}\right)$ عدد محاسبه کړئ .

حل

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4} + \frac{7}{20}\right) \div \left(2 - \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{16}{20} - \frac{15}{20} + \frac{7}{20}\right) \div \left(\frac{10}{5} - \frac{3}{5}\right) = \frac{16 - 15 + 7}{20} \div \frac{10 - 3}{5}$$

$$= \frac{8}{20} \div \frac{7}{5} = \frac{8}{20} \times \frac{5}{7} = \frac{8 \times 5}{20 \times 7} = \frac{2 \times 1}{1 \times 7} = \frac{2}{7}.$$

کسر الکسر

هغه کسر چې صورت اومخرج يې کسرونه وي، د کسرالکسر په نامه ياديږي. په حقيقت کې کسرالکسر د دوو کسرونو د تقسيم حالت رابنئي. هر کسرالکسر ديو بسيط کسر او هر بسيط کسر د يو کسر الکسر په حيث ارائه کيداى شي.

مثلاً

$$i.\quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{2}{3}\div\frac{5}{6}=\frac{2}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{4}{5}\quad ,\quad ii.\quad \frac{7}{8}=\frac{7\div 9}{8\div 9}=\frac{\frac{7}{9}}{\frac{8}{9}}=\frac{7}{9}\div\frac{8}{9}$$

$$iii.\quad \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2+1}{2}}{\frac{2-1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\times\frac{2}{1}=3$$

$$iv.\quad \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2+3}{6}}{\frac{4+5}{10}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{9}{10}}=\frac{5}{6}\times\frac{10}{9}=\frac{50}{54}=\frac{25}{27}$$

تمرينونه

1. درې واحده، څو اتمې کيږي؟ اته واحده څو دريمې کيږي؟ پنځه واحده څو څلورمې کيږي.
2. يو طاق عدد د جفتو رقمونو په کارونه سره په لاس راوړئ.
3. په يونيم واحد کې. څو څلورمې، څو اتمې او څو لسمې بيلې، بيلې موجودې دي.
4. د $\frac{8}{15}$ ، $\frac{15}{9}$، $\frac{23}{23}$ ، $\frac{79}{78}$ ، $\frac{13}{28}$ او $\frac{3}{5}$ ، څخه لاندې کسرونه په ګوته کړئ

الف. هغه کسرونه چې له يو څخه لوی دي،

ب. هغه کسرونه چې له يو څخه کوچني دي.

ج. هغه کسرونه چې د يو سره مساوي دي.

د. تر ټولو لوی کسر او تر ټولو کوچنی کسر.

5. يو کوچنی ۵ بسکويت او بل کوچنی ۳ بسکويت لري. کله چې دريم طفل ويني نو دا بسکويتونه سره ويشي او په عوض کې دريم کوچنی ۸ افغانی دوی ته ورکوی، نو دا پيسی د دوو کوچنيانو تر منځ عادلانه وويشئ.
6. د هريو $\frac{5}{7}$ ، $\frac{7}{8}$ ، $\frac{12}{13}$ او $\frac{11}{20}$ ، کسرونو سره کوم کسرونه جمع شي چې د جمع حاصل يو شي.
7. که چېرې 2 عدد د $\frac{5}{7}$ او $\frac{3}{4}$ کسرونو د صورتونو سره جمع شي، نو د هغوی اندازه څومره فرق سره پيدا کوي.
8. که چېرې د 3 عدد د $\frac{5}{7}$ او $\frac{3}{4}$ کسرونو د صورتونو څخه تفريق شي نو دهغوی اندازه څومره فرق سره پيدا کوي.

9. که چېرې 2 عدد د $\frac{5}{7}$ او $\frac{3}{4}$ کسرونو د صورتونو سره ضرب شي نو دا کسرونه سره څومره فرق پیدا کوي.

10. که چېرې د 2 عدد د $\frac{5}{7}$ او $\frac{3}{4}$ کسرونو د مخرجونو سره جمع شي نو دا کسرونه څومره سره فرق پیدا کوي؟

11.دا هر یو کسر $2\frac{1}{3}$ ، $4\frac{3}{5}$ ، $10\frac{3}{7}$ او $20\frac{10}{11}$ په غیر عادی حالت ولیکئ؟

12. دا هر یو غیر عادی کسر $\frac{11}{3}$ ، $\frac{31}{5}$ ، $\frac{21}{7}$ او $\frac{11}{10}$ په عادی حالت ولیکئ.

13. دا هر یو کسر $\frac{6}{15}$ ، $\frac{14}{21}$ ، $\frac{343}{539}$ ، $\frac{121}{143}$ او $\frac{84}{126}$ اختصار کړئ.

14. دا هر یو کسر $\frac{3\times2\times5}{6\times4\times10}$ ، $\frac{21\times55}{13\times15\times77}$ ، $\frac{8\times9\times49\times33}{6\times11\times28\times21}$ او $\frac{2\times3\times5\times7}{7\times5\times3\times2\times11}$ اختصار کړئ.

15. د $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{24}$ کسرونه هم مخرج کړئ؟

16. د $\frac{3}{19}$ ، $\frac{2}{27}$ او $\frac{7}{30}$ کسرونه هم مخرج کړئ؟

17. د $\frac{3}{40}$ ، $\frac{7}{60}$ ، $\frac{5}{18}$ او $\frac{13}{180}$ کسرونه هم مخرجه کړئ.

لاندې عملیې تر سره کړئ.

$$18)\ \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{2}{7},\quad 19)\ \frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6},\quad 20)\ \frac{7}{9}+\frac{16}{25}-\frac{8}{15}$$

$$21)\ 2\frac{15}{36}+\frac{9}{60}+\frac{25}{72},\quad 22)\ 3\frac{3}{35}+1\frac{2}{105}+2\frac{11}{420},\quad 23)\ 4\frac{7}{9}+2\frac{8}{15}$$

$$24)\ \frac{7}{45}+\frac{5}{54}+\frac{15}{36}+\frac{11}{63},\quad 25)\ 5\frac{1}{5}-\frac{5}{8}-\frac{7}{40}-3$$

$$26)\ \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\ ,\quad 27)\ \frac{7}{10}\times\frac{5}{21}\times\frac{12}{13}\ ,\quad 28)\ 2\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}\times\frac{14}{17}$$

$$29)\ \left(\frac{2}{8}\times\frac{2}{9}\right)\times\left(\frac{2}{3}-\frac{50}{183}\right)\ ,\quad 30)\ 17\frac{3}{5}\times\left(4\frac{1}{6}-2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{176}$$

31.د څلویشتو دقیقو د پنځو برابرو (پنځو چندو) نیمایي څلو ثانیې کیږي.

32. د 250 کیلو ګرامه د لسمې د دریې، نیمایې، نیمایې څو ګرامه کیږئ.

33. که چېرې یو لاسي ساعت په هر دقیقه کې $\frac{3}{7}$ ثانیې وړاندې لاړشي. نو د 21 ساعتونو وروسته به دا ساعت څو دقیقې مخ ته تللی وي.

لاندی عملیې سر ته ورسوئ.

$34)\ \frac{2}{5} \div 6 \quad , \quad 35)\ 8 \div 3\frac{1}{4} \quad , \quad 36)\ 12\frac{9}{16} \div 3$

$37)\ \frac{12}{25} \div \frac{4}{5} \quad , \quad 38)\ 7\frac{1}{2} \div 2\frac{6}{7} \quad , \quad 39)\ \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \div \frac{19}{24}$

$40)\ \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) \div \left(2 - \frac{3}{5}\right) \quad , \quad 41)\ \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \div \left(4\frac{1}{5} \times \frac{5}{42} \times \frac{1}{6}\right)$

42. یو نل د 5 ساعتونو او بل نل د 8 ساعتونو په اوږدوکز یو ډنډ ډکوي داوړه نلونه به دا ډنډ په څو ساعتونو کې ډک کړي.

43. اقبال په ورځ کې د 8 ساعتونو په کار کولو سره یو کار په 6 ورځو کې او حمزه چې دورځې 10 ساعتونه کار کوي همغه کار په 8 ورځو کې تمامولی شي. که دواړه نفر سره یو ځائ شي او همغه کار وکړي هغه به په څومره موده کې تر سره کړي.

44. که چېرې دیو عدد د تقسیم حاصل پر بل عدد باندې چې د یو واحد په اندازه د هغې څخه لوی دی د $\frac{1}{4}$ سره مساوي او د ددوهم عدد د تقسیم حاصل پر یو بل عدد باندې چې د یو واحد په اندازه د هغې څخه لوی دی د خپل ځان څلورمه شي. د دواړو عددونه د ضرب حاصل پیدا کړئ.

45. که چېرې د یو چا پانګه په یوه معامله کې د کال $\frac{1}{3}$ برخې زیاته شي او د څلورو کالو وروسته د هغې پانګه $1000\$$ وي. د هغې لومړنی سرمایه به څو وي؟

اعشاري کسرونه

د اعشاري اصطلاح د عشر له کلمې څخه چې د لسو په معنی ده منشا اخلي او اعشاري کسرونه هغه دي چې مخرجونه يې د لسو طاقتونه لکه 10، 100، 1000 او داسې نور وي. په اعشاري قالب کې محاسبې، تر ټولو مناسب، مروج، او معمولی روش دی.

***1* مثال**. لاندې عددونه د اعشاري کسرونو نمونې دي.

$$\frac{4}{100}, \frac{37}{100}, \frac{23}{1000}, 9\frac{2}{100}, \frac{2358}{10}$$

په اعشاري سيستم کې عدد ليکنه

د اعشاري کسرونو ليکنه د طبيعي عدد ليکنې تعميم شوی شکل دی، داسې چې د يوويز رقم د مبدا په توګه په نظرکې نيول کيږي او په چپه خوا کې په ترتيب سره د لسيز، زريز، لس زريز، سل زريز.... او په ورته توګه ښئي خواته (د اعشاری څخه وروسته) د لسمې، سلمې، زرمې، لس زرمې.... موقيعت اخلي.

***2* مثال**.

$$74318\frac{5963}{10000} = 74318 + \frac{5000}{10000} + \frac{900}{10000} + \frac{60}{10000} + \frac{3}{10000}$$

$$= 74318 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{3}{10000} + = 74318.5963$$

$74318\frac{5963}{10000} = 74318.5963$ د لاندې جدول مطابق موقيعت اخلي.

ده هزارمها	هزارم ها	صدم ها	دهم ها	علا مت اعشاری	یک ها	ده ها	صد ها	هزار ها	ده هزارها
3	6	9	5	.	8	1	3	4	7

په نتیجه کې 74318.5963 دا ډول لوستل کیږي.

څلوور او یا زره درې سوه اتلس، اعشاریه، پنځه لسمې، نه سلمې، شپږ زرمې او درې لس زرمې.

یا په بل عبارت د هغې معادل څلووراویا زره درې سوه اتلس اعشاریه پنځه زره نه سوه دری شپیته.

3 مثال. د عام کسرونه په اعشاري توګه ولیکي.

حل :

$$\frac{23}{1000} = 0.023, \frac{2}{10} = 0.2, 6\frac{43}{100} = 6.43, \frac{987}{10} = 98\frac{7}{10} = 98.7$$

د اعشاری کسرونو خاصیتونه

اول. د صفرونو لیکل او یا له منځه وړل په هر تعداد چې وي، د کسر ښي خوا ته د کسر په قیمت کې تغیر نه راولي.

4 مثال.

$$0.45000 = \frac{45000}{100000} = \frac{45}{100} = 0.45 \quad , \quad 0.5 = \frac{5}{10} = \frac{5000}{10000} = 0.5000$$

دوم. که چېرې د ا عشاري علامه ښئی خواته د یو رقم، دوه رقمه، درې رقمه،.... انتقال شي، نوموړی عدد په ترتیب سره ، لس ځلی، سل ځلی، زرځلی،.... زیاتیږي (نوموړی عدد پر لسو، سلو، زرو .... ضربیږی)

5 مثال

$$100 \times (0.354) = 100 \times \frac{354}{1000} = \frac{35400}{1000} = \frac{354}{10} = 35\frac{4}{10} = 35.4$$

دریم. که چېرې د اعشاري علامه په ترتیب سره د یو رقم، دوه رقمونو، درې رقمونو ..... په تعداد چپ خواته یوړل شي، نوموړی عدد لس ځلې، سل ځلې، زر ځلې او.... کمیږي.

(هغه عدد پر لسو، سلو، زرو او..... تقسیمږي)

6. مثال

$$35.4 \div 100 = 35\frac{4}{10} \div 100 = \frac{354}{10} \div 100 = \frac{354}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{354}{1000} = 0.354$$

شلورم هر طبیعي عدد د یو کسري عدد په حیث چې کسري رقمونه یې صفرونه وي فرض کیدلی شي.

7 مثال هر د 25 عدد د د اعشاري کسر په توګه لاندې اریه کیږي.

$$25 = 25.0 = 25.00 = 25.000 = 25.0000 = \cdots$$

د اعشاري کسرونو جمع او تفریق

لومړی د اعشاري کسرونو جمع او تفریق په عام کسر کې د همدې دوو عملیو په مرسته په یو مثال کې تجربه کوو.

8 مثال

$$2.432 + 0.35 - 0.2037 = 2.4320 + 0.3500 - 0.2037$$
$$= \frac{24320}{10000} + \frac{3500}{10000} - \frac{2037}{10000} = \frac{24320 + 3500 - 2037}{10000}$$
$$= \frac{25783}{10000} = 2.5783$$

بنا پر دې د جمع يا تفريق په عمليو کې عددونه دا ډول د يو بل د لاندې ترتيب کيږی چې د اعشاري علامه په يو ستون او اړوند ترتيب شوي رقمونه په بيلو، بيلو ستونونو کې ځای ونيسي، بياد جمع يا تفريق عمليې، غير کسري عددونو ته ورته صورت نيسي او د جمع حاصل د اعشاري علامې د ښئ خوا څخه و چپ خوا وړل کيږي.

9 مثال. د $(2.432 + 0.35 - 0.2037)$ عدد محاسبه کړئ.

حل: د دستور سره سم عددونه منظم ليکو او عمليې سر ته رسوو.

$$\begin{array}{r} 2.432 \\ +0.35 \\ \hline 2.7820 \\ -0.2037 \\ \hline 2.5783 \end{array}$$

10 مثال. د $0.24367 + 17654.2 + 0.00002$ مجموعه او د $4.5 - 2.789$ تفريق پيدا کړئ.

حل :

$$\begin{array}{r} 0.24367 \\ 17654.2 \\ 0.00002 \\ \hline 17654.44369 \end{array} \quad \text{او} \quad \begin{array}{r} 4.500 \\ -2.789 \\ \hline 1.711 \end{array}$$

د اعشاري کسرونو ضرب

په لومړي قدم کې د عامو کسرونو د ضرب څخه د اعشاري کسرونو ضرب په يو مثال کې تجربه کوو.

$$0.12\times 0.453=\frac{12}{100}\times\frac{453}{1000}=\frac{12\times 453}{100000}=\frac{5436}{100000}=0.05436$$

بنا پر دې د اعشاري کسرونو ضرب د لاندې لارښود سره سرته رسوو.

اعشاري کسرونه د اعشاري علامې په نظر کې نه نيلو څخه پرته د طبيعي عددونو په حيث سره ضربوو بيا نو د اعشاري علامې څخه ښى خواته د مضروب او مضـــروب فيه په تعداد يې له ښي خوا څخه د ضرب د حاصل څخه يې جلا كـــوو او هغلتـــه د اعشاري علامه ځاى پر ځاى کوو. مخکښنۍ مثال يـــو ځـــل بيـــا حـــل كـــوو

$$\begin{array}{r} 0.453 \\ \underline{0.12} \\ 906 \\ \underline{453} \\ 0.05436 \end{array} \qquad \Rightarrow 0.453\times 0.12=0.05436$$

11 مثال. د 2.5×45.0123 ، 0.013×76 او 0.00089×1000 حاصل ضرب لاس ته راوړئ.

حل :

$$\begin{array}{r} 45.0123 \\ 2.5 \\ \hline 2250615 \\ 900246 \\ \hline 112.53075 \end{array} \quad ، \quad \begin{array}{r} 0.013 \\ 76 \\ \hline 78 \\ 91 \\ \hline 0.988 \end{array} \quad ، \quad \begin{array}{r} 0.00089 \\ 1000 \\ \hline 0.89 \end{array}$$

د اعشاري کسرونو تقسیم

بیا هم د نمونې په توګه $23\div0.8717$ د عامو کسرونو د تقسیم په مرسته پیدا کوو

$$0.8717 \div 23 = \frac{8717}{10000} \div 23 = \frac{8717}{10000} \times \frac{1}{23} = \frac{8717}{23} \times \frac{1}{10000}$$

$$= 379 \times \frac{1}{10000} \quad \Rightarrow 0.8717 \div 23 = \frac{379}{10000} = 0.0379$$

د اعشاري کسرونو تقسیم په داسې حال کې چې مقسوم علیه کسری نه وي، د ساده تقسیم په توګه سرته رسیږي، کله چې د تقسیم عملیه د اعشاري علامې څخه تیریږي، نومول شوي علامه د خارجقسمت نوبتي موقیعت ته نقل کیږي. مخکښنی مثال په همدې روش سره تکراریږي

$$\begin{array}{r} 0.0379 \\ 23\overline{)0.8717} \\ 69 \\ \hline 181 \\ 161 \\ \hline 207 \\ \underline{207} \end{array} \quad \Rightarrow \quad 0.8717 \div 23 = 0.0379$$

که چېرې مقسوم علیه کسري وي. مقسوم او مقسوم علیه د کسر د صورت او مخرج په توګه فرض کوو، صورت او مخرج (مقسوم او مقسوم علیه) په یو له *10*، *100*، *1000*، .... عددونو سره ضربوو تر څو د اعشاري علامه له مخرج څخه حذف شي، وروسته د تقسیم عملیه د مخکښنی لاربنود سره سم سرته رسوو.

$$45.05679 \div 5.4 = \frac{45.05679}{5.4} = \frac{45.05679 \times 10}{5.4 \times 10}$$

$$= \frac{450.5679}{54} = 450.5679 \div 54$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r} 8.34385 \\ 54\overline{)450.5679} \\ \underline{432} \\ 185 \\ \underline{162} \\ 236 \\ \underline{216} \\ 207 \\ \underline{162} \\ 459 \\ \underline{432} \\ 270 \\ \underline{270} \end{array} \quad \Rightarrow 450.5679 \div 54 = 8.34385$$

13 مثال. د $0.084 \div 0.7$ او $3.7 \div 0.08$ عمليې تر سره کړئ.

حل

$$0.084 \div 0.7 = \frac{0.084}{0.7} = \frac{0.084 \times 10}{0.7 \times 10} = \frac{0.84}{7} = 0.84 \div 7 = 0.12$$

$$3.7 \div 0.08 = \frac{3.7}{0.08} = \frac{3.7 \times 100}{0.08 \times 100} = \frac{370}{8} = 370 \div 8 = 46.25$$

په اعشاري کسرونو کې څلوورګوني عمليې په حقيقت کې په طبيعي عددونو کې د همدې عمليو تصميم دی.

له دې جملې څخه کولی شو چې عدد پر لوی عدد تقسيم کړو. دا ډول چې لومړی د مقسوم ښي خواته صفر ږدو او د هغې په عوض په خارجقسمت کې د اعشاري علامه د صفر څخه وروسته عوض کيږي او د تقسيم عمليه سرته رسيږي، که چېرې د باقيمانده عدد د مقسوم څخه کوچنی شي نو ښئ خواته يې صفر ځای پر ځای کيږي.

14 مثال: د $1 \div 4$ د تقسيم حاصل پيدا کړئ.

حل :

$$\begin{array}{r} 0.25 \\ 4\overline{)\,10} \\ 8 \\ \hline 20 \\ \underline{20} \end{array} \qquad \Rightarrow \quad 1 \div 4 = 0.25$$

د اعشاری کسر بدلونه په عام کسر باندې

د 0.75 کسر مفهوم، پنځه او يا د سلمې، څخه دی يعنی $\frac{75}{100}$بنا پر دې $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$، په دې ترتيب په عام کسر باندې د اعشاري کسر په بدلونه

کې د اعشاري علامې ښئ خواته رقمونه د کسر په صورت کې، ليکو او په مخرج کې د اعشاري علامې پر ځای يو او پر ښئ خوا يې د اعشاری علامې د ښئ خوا د رقمونو په تعداد صفرونه ږدو. صحيح عدد په اصلي موقيعت کې ځای نيسي.

15 مثال.

$$a)\quad 0.3406=\frac{3406}{10000}=\frac{1703}{5000}\quad ,\quad b)\quad 0.008=\frac{8}{1000}=\frac{1}{125}$$

$$c)\quad 6.0001=6\frac{1}{10000}=\frac{60001}{10000}\quad ,\quad d)\quad 0.5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

په اعشاری کسر باندې د عام کسر بدلونه

په اعشاري کسر باندې د عام کسر بدلونې هدف، د هغې کسر پيدا کول دي چې مخرج يې 10 يا 100 يا 1000 او يا.... وي او د راکړ شوي کسر سره مساوي وي. لکه څرنګه چې $\frac{1}{2}=\frac{1\times 5}{2\times 5}=\frac{5}{10}=0.5$ اويا $\frac{3}{4}=\frac{3\times 25}{4\times 25}=\frac{75}{100}=0.75$.

په هر حال په اعشاري کسر باندې د عام کسر د بدلونې لپاره بهتره ده چې د کسر صورت پر مخرج باندی تقسيم کړو. په دی برخه کې د تقسيم خارجقسمت، مطلوبه اعشاري کسر دی.

ددې عمليې په اجرا کولو کې د عام کسر صورت د مقسوم پر ځای د اعشاري کسر په توګه په نظر کې نيول کيږي چې د اعشاري علامې څخه وروسته صفرونه وي (په کومه اندازه چې يې غواړو)

16 مثال. د $\frac{3}{4}$ او $\frac{21}{8}$ کسرونه په معادلو اعشاري کسرونو واړوئ.

حل :

$$\begin{array}{r} 2.625 \\ 8\overline{)\,21.000} \\ \underline{16} \\ 50 \\ \underline{48} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \end{array} \quad \Rightarrow \frac{21}{8} = 2.625 \quad , \quad \begin{array}{r} 0.75 \\ 4\overline{)\,3.00} \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{20} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} = 0.75$$

متناوب اعشاری کسرونه (**Repeating Decimals**)

هغه اعشاري کسر چې یو یا څو رقمونه یې په نامتناهي توګه تکرارېږي، د متناوب کسر(دوره یې کسر یا تکراری کسر) په نامه یادیږي. ددې اعشاري کسر غیر متناوب رقمونو ته تام رقمونه وایې.

مثال 17

$$a)\quad 0.333\cdots \quad , \quad b)\quad 8.2\,34\,34\,34\cdots \quad , \quad c)\quad 19.34666666\cdots$$

د متناوب کسرونو په ارائه کولو کې معمولاً د متناوبو رقمونه پر سر یوه کرښه باسي او یا هغه په یو قوس کی نیسی. او ځېنې بیا د هر تکراري رقم پر سر یوه نقطه ږدي.

مثال 18

$$a)\quad 0.333...... \;=\; 0.(3) \;=\; 0.\overline{3} \;=\; 0.\dot{3}$$
$$b)\quad 8.2\,34\,34\,34... \;=\; 8.2(34) \;=\; 8.2\overline{34} \;=\; 8.2\dot{3}\dot{4}$$

$$c)\quad 19.34\,666\ldots = 19.34(6) = 19.34\,\overline{6} = 19.34\,\dot{6}$$

متناوب کسرونه په حقیقت کی د دوو طبیعی عددونو د تقسیم د حاصل (عام کسر) په توګه ارائه کیدای شی، هر غیر متناوب کسر په عین وخت کې یو متناوب کسر دی. داسی چی صفر د متناوب رقم په توګه فرض کړای شي.

19 مثال

$$d)\quad \frac{1}{3} = 0.\overline{3} \quad , \quad e)\quad \frac{3}{4} = 0.75\,\overline{0}$$

$$f)\quad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \quad , \quad g)\quad \frac{4}{13} = 0.\overline{307692}$$

د یو متناوب کسر بدلونه په عام کسر باندې

یو متناوب کسر د یو عام کسر په توګه ښودل کیدای شي داسې چې صورت یې د کسري رقمونو او تامو رقمونو تفاضل وي او په مخرج کې د هر متناوب پر ځای د 9 رقم پر ځای یو صفر ښي خواته ځای پر ځای شي.

20 مثال:

$$a)\quad 0.\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$b)\quad 0.\overline{142857} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$$

$$c)\quad 0.42\,\overline{658} = \frac{42658-42}{99900} = \frac{42616}{99900}$$

$$d)\quad 0.000\,\overline{54} = \frac{54}{99000} = \frac{3}{5500}$$

تمرين

لاندې عمليې سرته ورسوئ.

1. $0.7 + 0.21$
2. $2.9701 + 0.000356$
3. $0.649 - 0.368$
4. $8.45 - 0.0079$
5. $3.87 + 2.561 - 2.00089$
6. $8.0001 - 5.8889 + 230$
7. 0.8×0.87
8. 547.69832×54.0002
9. $(0.324 - 0.00021) \times 1.02.3$
10. $(3.005 - 1.456) \times 0.005$
11. $(5 + 2.008 - 1.0009) \times 4.005$
12. $0.0008 \times (8 - 6.9876884)$
13. 0.000006×0.000005
14. $20000000 \times 0.000000002$
15. $26789.45 \div 0.000002$
16. $45.668 \div 1000000$
17. $450 \div 100000$
18. $450 \div 0.0000001$

لاندې اعشاري کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

19. 0.2, 20. 0.025, 21. 0.4528, 22. 0.0001

23. $0.4\dot{5}\dot{6}$, 24. $0.32\dot{6}\dot{8}\dot{5}$, 25. $0.432\dot{6}\dot{5}$

لاندې عام کسرونه په اعشاري کسرونو واړوئ.

26. $6\frac{5}{9}$, 27. $78\frac{3}{4}$, 28. $10\frac{1}{2}$

دریم څپرکی

نسبت، تناسب او فیصد

د نسبت او تناسب مفاهیم د حسابونې له اساسي قدمونو څخه شمیرل کیږی. ډیرې حسابي مسئالې د دی دوو مفاهیمود قاعدو پر بنا حل کیدلی شي. په دې فصل کې، نسبت، تناسب، د نسبتونو او تناسبونو ډولونه په لنډه توګه مطرح کیږي.

نسبت (*Ratio*)

ددوو همجنسو کمیتونو تر منځ نسبت د دوی ترمنځ د عددي اندازه ګیرئ رابطه ده. د 5 او 15 عددونو تر منځ رابطه په دوه ډوله افاده کیږي. اول د 15 او 5 ترمنځ فرق 10 دئ. دوهم د 15 عدد د 5 درې برابره ده. په دې معنی چز د دوو همجنسو کمیتونو ترمنځ رابطه د هغوی د تفاضل او یا حاصل تقسیم په توګه افاده کیږي.

د تفاضل پــه وســیله عــددي انــدازه ګیــري $15÷5=3$ د هندســي نســبت (*geometric ratio*) په نامه یادیږی.

حسابی نسبت معمولاً د کوچنیو کمیتونو په مقایسه لکه عمر، د قد اوږد والی، د اشخاصو وزن د سپورتي ټیمونو نمبرې او داسې نورو لپاره کټور وي. حسابي نسبت اسان دی، فورمولبندي او مطالعې ته ضرورت نه لري.
کله چې په عمومي توګه د نسبت اصطلاح مطرح کیږي، له هغې څخه هدف همغه هندسي نسبت دی، د کمیتونو نسبت یو مجرد عدد دی چی د عامو یا اعشاري کسرونو په حیث ارائه کیدلی شي، مګر د هغې ارائه د عام کسر په

توګه مناسبه ده. د مثال په توګه د 3 مترو او 12 مترو تر منځ نسبت $\frac{1}{4}$ یا 0.25 دئ. یا

$$3\,m \div 12\ m = \frac{1}{4} \quad \vee \quad 3\,m \div 12\ m = 0,25$$

د نسبت په موضوع کې معمولاً درې کمیتونه مطرح کیږي: لومړی کمیت یا مقدم کمیت (*antecedent*) دوم کمیت یا مؤخر کمیت (*Consequent*) او ددوی تر منځ نسبت *(ratio)*. لومړی او دوهم کمیتونه په یو وخت کې د نسبت د حدونو (*terms*) په نامه یادیږي. د کمیتونو ترمنځ نسبت (د بنې څخه کینې خواته) عبارت دي له

نسبت = کمیت اول ÷ کمیت دوم

کمیت اول = کمیت دوم × نسبت

کمیت دوم = کمیت اول ÷ نسبت

که چیرې لومړی کمیت a، دوهم کمیت b او د هغې تر منځ نسبت r وي نو

$$\frac{a}{b} = r \quad \Leftrightarrow \quad a = b \times r \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{a}{r}$$

دا درې ګونی کمیتونه کیدلی شي کسری عددونه (عام کسرونه یا اعشاری کسرونه) هم وي.

1. مثال: په یو مکتب کې د لومړی ټولګي شاګردان 45 نفره او د دوهم ټولګی شاګردان 65 نفره دي، ددوی تر منځ نسبت پیدا کړئ.

حل: مطلوبه نسبت عبارت دی له

$$r = \frac{45}{65} = \frac{9}{13}$$

2 مثال. د کوم عدد شپږمه برخه 18 کیږي؟

حل :

$$a = 18 \, , \, r = \frac{1}{6} \Rightarrow b = a \div r = 18 \div \frac{1}{6} = 18 \times 6 = 108$$

3 مثال. د یو عدد درې څلورمې 21 دي، نوموړی عدد معلوم کړئ؟

حل:

$$a = 21 \, , \, r = \frac{3}{4} \Rightarrow b = a \div r = 21 \div \frac{3}{4} = 21 \times \frac{4}{3} = 28$$

4 مثال: د 60 عدد څلورپنځمې څو کیږي.

حل:

$$b = 60 \quad , \quad r = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad a = 60 \times \frac{4}{5} = 48$$

تناسب (Proportion)

د نسبتونو تساوی ته تناسب وايي، په بل عبارت تناسب د ددو عامو کسرونو تساوی ده. ویل کیږي چې د a او b عددونه د c او d عددونو سره متناسب دي که چیرې.

$$a : b = c : d \quad \vee \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

د a او d دوو عددونه د تناسب د طرفینو ($extremes$) او د b او c عددونه د هغې د وسطینو ($mean$) په نامه یادیږي.

$$\underbrace{a\quad \overbrace{b\quad c}^{means}\quad d}_{exttremes}$$

د تناسب خاصيتونه.

اول. په هر تناسب کې د طرفينو د ضرب حاصل د وسطينو د ضرب د حاصل سره مساوي دی. يعنې

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$$

دوم. د تناسب هر يو څلوورګونئ عنصر مساوی دی په: د معلومو طرفينو يا وسطينو د ضرب د حاصل نسبت د هغې هم رديف عدد سره يعنې

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b \times c}{d} \\ b = \frac{a \times d}{c} \\ c = \frac{a \times d}{b} \\ d = \frac{b \times c}{a} \end{cases}$$

دريم. هر تناسب په اتو شکلونو ارائه کيږي

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$
$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

شلورم. که چېرې په یو تناسب کې مخرجونه د هغوی پر صورتونو جمع او یا له هغې څخه تفریق شي، نوي تناسبونه په لاس راځي

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

پنځم. که چېرې په یو تناسب کې صورتونه د هغوی پر مخرجونه ور جمع یا د هغوی څخه تفریق شي نوي تناسبونه په لاس راځي

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$$

شپږم. که چېرې په یو تناسب کې صورتونه یې په خپل منځ او مخرجونه ئې په خپل منځ کې سره جمع شي (او یا سره تفریق شی) د تناسب ډول نه بدلیږي:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

اوم. که چېرې د یو تناسب طرفین یا وسطین سره مساوی وي، نوموړی عدد ته هندسی اوسط (د تناسب وسط) ویل کیږي. هندسی اوسط د طرفینو (یا وسطینو) د جذر سره مساوي دی

کوم چې سره مساوي نه دی.

$$\frac{a}{r} = \frac{r}{b} \Leftrightarrow r^2 = a \times b \Leftrightarrow r = \sqrt{a \times b}$$

اتم. که چېرې د یو تناسب درې عنصره د یو دوهم تناسب د دریو عناصر سره مخ پر مخ مساوی وي نو د هغوی څلورم عناصر هم ورسره مساوی دی

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = d$$

5 مثال.

$$I.\quad \frac{1}{3} = \frac{4}{12} \Rightarrow 1\times 12 = 4\times 3$$

$$II.\quad \frac{x}{18} = \frac{5}{15} \Rightarrow x = \frac{5\times 18}{15} = 6$$

$$III.\quad \frac{4}{5} = \frac{8}{10} \Rightarrow \frac{4+5}{5} = \frac{8+10}{10} \Rightarrow \frac{9}{5} = \frac{18}{10}$$

$$IV.\quad \frac{8}{7} = \frac{24}{21} \Rightarrow \frac{8-7}{7} = \frac{24-21}{21} \Rightarrow \frac{1}{7} = \frac{3}{21}$$

$$V.\quad \frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{5+10}{7+14} = \frac{10-5}{14-7} \Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

$$VI.\quad \frac{x}{25} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 4\times 25 \Rightarrow x = \sqrt{4\times 25} = \sqrt{100} = 10$$

6 مثال. که چېرې د 5 ټوکو کتابچو بیه 560 افغانی وي. نو په 10080 افغانی څو ټوکه کتابچې اخیستل کیدلی شي ؟

حل

$$\frac{5vol}{x} = \frac{560Af}{10080Af} \Rightarrow x = \frac{5vol\times 10080Af}{560Af} = 90vol$$

په نتیجه کې په 10080 افغانیو، 90 جلده کتابچې اخیستل کیدای شي.

7 مثال. د مالګی او اوبو نسبت د خوړو په یو مالګیز محلول کښې $\frac{1}{7}$ ده. که چېرې د اوبو دروندوالی 28 کیلو ګرامه وي نو د محلول دروندوالی څومره دی ؟

حل

$$\frac{NaCl}{28\ kg} = \frac{1}{7} \Rightarrow NaCl = \frac{1\times 28\ kg}{7} = 4\ kg$$

په دې ترتیب د محلول دروندوالی = د مالګې دروندوالی + د اوبو دروندوالی

= 4 کیکو ګرام + 28 کیلو ګرامه = 32 کیلو ګرامه

8 مثال. د یو شرکت د x ، y او z سوداګرو د سهمونو نسبت چې 1200000 دالره سرمایه لری په ترتیب سره $\frac{1}{6}$ ، $\frac{2}{6}$ ، $\frac{3}{6}$ دی. ددې سوداګرو د هر یو د سهمونو اندازه معلومه کړئ.

حل

$$\frac{x}{\$1200000} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1\times\$12000000}{6} = \$200000$$

$$\frac{y}{\$1200000} = \frac{2}{6} \Rightarrow y = \frac{2\times\$12000000}{6} = \$400000$$

$$\frac{z}{\$1200000} = \frac{3}{6} \Rightarrow x = \frac{3\times\$12000000}{6} = \$600000$$

ذکات (ذکوت)

ذکات په نقدی شتمنی کې تر معینو شرایط لاندې د هغې څلویښتمه کیږي. بنا پردې د ذکات او پانګې تر منځ نسبت $\frac{1}{40}$ دی. لکه څرنګه چې د 5000000 افغانیو پانګې ذکات په لاندی ډول حسابیږي.

$$\frac{z}{5\,000\,000} = \frac{1}{40} \Rightarrow z = \frac{5\,000\,000\times 1}{40} = 125\,000\ Af$$

پرله پسې (متمادي) نسبتونه (Continued Rations)

د معینو برخو په توګه د دوو څخه زیاتو کمیتونو مقایسه د هغوی د مجموعې په تناسب د متمادي نسبتونو په نامه یادوي. متمادي نسبتونه د مشارکت، سهم بندی، د میراث تقسیم، په ګډو مسایلو کې، د کیمیاوي مرکباتو په جوړونه او نورو کې طرحه کیږي. د مثال په توګه که اقبال $2000$$ مسعود$5000$$ او حمزه $7000$$ په یو شرکت کې ولري. نو د هغوی متمادي نسبتونه عبارت دي له

اقبال	مسعود	حمزه
2 :	5 :	7

د څو کمیتونو د متمادي نسبتونو لپاره، مربوطه کمیتونه د دوی پر ټولو لوی مشترک قاسم باندې تقسیموو، په لاس راغلي خارجقسمتونه د نومړو کمیتونو د متمادي نسبتونو څخه عبارت دی.

9 مثال. د 12، 15، 18، او 9 متمادي نسبتونه معلوم کړئ.

حل. د راکړل شویو کمیتونو د تقسیم څخه د هغوی په تر ټولو لوی مشترک قاسم یعنی 3 باندې غوښتل شوي متمادې نسبتونه په لاس راځي.

$$\begin{array}{ccccccc} 12 & : & 15 & : & 18 & : & 9 \\ 4 & : & 5 & : & 6 & : & 3 \end{array}$$

10 مثال. که چېرې $\frac{a}{b}=\frac{5}{6}$ او $\frac{b}{c}=\frac{3}{4}$ وی نو د a، b او c متمادي نسبتونه معلوم کړئ.

حل. په دې مسئاله کې د b کمیت په دوو نسبتونو کې شامل دی او غوښتل شوي نسبتونه په لاندې ډول په لاس راځي.

$$\left.\begin{array}{ccccc} a & : & b & : & c \\ 5 & : & 6 & & \\ & & 3 & : & 4 \\ \hline 5\times 3 & : & 6\times 3 & : & 6\times 4 \\ 15 & : & 18 & : & 24 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} a & : & b & : & c \\ 15 & : & 18 & : & 24 \\ 5 & : & 6 & : & 8 \end{array}$$

11 مثال. د میاشتې شعاع د لمر د شعاع $\frac{3}{11}$ ده او دځمکې شعاع 180ځلې نظر و لمر شعاع ته وړه ده. نو د میاشتې او لمر د شعاع ګانو نسبت معلوم کړئ.

حل. که د میاشتې شعاع m، د مځکې شعاع e او د لمر شعاع s وي. په هغه صورت کې

$$\left.\begin{array}{ccccc} m & : & e & : & s \\ 3 & : & 11 & & \\ & & 1 & : & 180 \\ \hline 3\times 1 & : & 1\times 11 & : & 11\times 180 \\ 3 & : & 11 & : & 11\times 180 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m}{s} = \frac{3}{11\times 180} = \frac{1}{660}$$

د مشارکت او په متمادي نسبتونو باندې ویش

د سهامي شرکتونو په شان مسئالو، بانګداري او نورو کې، لازم کیږي چې حسابي کمیتونه په څو برخو دا ډول وویشل شي چې ویشل شوي برخې د پخوانیو معینو کمیتونو (مربوطه سهمونه) سره تناسب ولري. د مثال په توګه که د x، y او z کمیتونه د اصلی کمیت (مجموعي کمیت)$U = x + y + z$ څخه ناشي وي. د سهمونو د تقسیم څخه د هغوی پر ترټولو لوی مشترک قاسم باندې، د سمونو نسبتونه په لاس راځي. که چیرې دا نسبتونه په ترتیب سره x، y او z وي، په دې صورت کې ددې نسبونو مجموعه $u = x + y + z$ ده نو د ویش لاربنود دلاندې رابطو څخه منشا اخلی.

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{U}{u} = k$$

دلته k د سهمونو د مجموعې يوه برخه ده په دې اخيره رابطه کې د نسبتونو هره جوړه يو تناسب جوړ وي، دا ډول چې له دې هر يو څلوور کميتونو نه د طرفينو او وسطينو د قاعدې په مرسته معلوميدی شي، په لاندې ډول.

$$\frac{X}{x}=\frac{U}{u}\Rightarrow X=\frac{U\times x}{u} \quad , \quad \frac{Y}{y}=\frac{U}{u}\Rightarrow Y=\frac{U\times y}{u}$$
$$\frac{Z}{z}=\frac{U}{u}\Rightarrow Z=\frac{U\times z}{u}$$

12 مثال. ددريو کسانو برخې په يو شرکت کې $300000$$، $400000$$ و $500000$$ دي. که چېرې ددې شرکت گټه $3600000$$ وي. د هر يو گټه معلومه کړئ.

حل. د برخو (سهامونو) د تقسيم څخه د دوی په تر ټولو لوی مشترک قاسم يعنی 100000 باندې د هغوی نسبتونه په لاس راځي.

سهام	300000	400000	500000
د نسبتونو سهام	3	4	5

د نسبتونو مجموعه

که چېرې د شريکانو گټه په ترتيب سره a، b او c وي په هغه صورت کې

$$a=\frac{\$3600000}{12}\times 3=\$900000 \quad , \quad b=\frac{\$3600000}{12}\times 4=\$1200000$$
$$c=\frac{\$36000000}{12}\times 5=\$1500000$$

***13* مثال**. په يو تجارتي شرکت کې لومړی شريک 200000\$ د پنځو مياشتو لپاره دوهم شريک 300000\$ د 4 مياشتو لپاره او دريم شريک 400000\$ د 2 مياشتو لپاره په دوران کې اچولي دي. که چېرې حاصل شوي ګټه 1800000\$ وي. نو د هر يو شريک ګټه معلومه کړئ.

حل. دلته د پانګې برسيره د دوران موده هم حسابيږي بنا پر دې

شريکان	اول	دوم	سوم	مجموعه
(برخی) سهمونه	200000×5	$300\,000\times 4$	$400\,000\times 2$	3000000
(دبرخو سهمونه) دسهمونو نسبتونه	5	6	4	15
(دبرخو ګټه) د سهمونو ګټه	60000	72000	48000	180000

حسابونه: که چېرې شريکان په ترتيب سره a، b و c او د سهمونو مفاد $s(a)$ ، $s(b)$ او $s(c)$ وي نو د سهمونو دتقسيم د دوئ پر تر ټولو لوی مشترک قاسم باندې د (5، 6، 4) نسبتونه په لاس راځي. په تنيجه کې

$$u = 5+6+4 = 15 \quad \Rightarrow \quad S(a) = \frac{\$180000}{15}\times 5 = \$60\ 000$$

$$S(b) = \frac{\$180000}{15}\times 6 = \$72000 \quad , \quad S(c) = \frac{\$180000}{15}\times 4 = \$48000$$

***14* مثال**. د 9000 عدد په 7 : 6: 4: 3 متناسبونه اجزاؤ (برخو) او تقسيم کړئ.

حل:

$$u = 3+4+6+7 = 20 \Rightarrow a = \frac{9000}{20}\times 3 = 1350, \quad b = \frac{9000}{20}\times 4 = 1800$$

$$c=\frac{9000}{20}\times 6=2700 \quad , \quad d=\frac{9000}{20}\times 7=3150$$

15 مثال. د $3400\$$ د a، b او c تر منځ دا ډول تقسیم کړی چی $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ او $\frac{b}{c}=\frac{3}{4}$ وی.

حل: لومړی باید د a، b او c کمیتونه متمادي نسبتونه پیدا شي.

$$\left.\begin{array}{ccccc} a & : & b & : & c \\ 1 & : & 2 & & \\ & & 3 & : & 4 \\ \hline 1\times 3 & : & 2\times 3 & : & 2\times 4 \\ 3 & : & 6 & : & 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a:b:c=3:6:8$$

مشترکه پانګه = $3400\$$ او د برخو د نسبتونو مجموعه=$3+6+8 = u=17$

$$S(a)=\frac{3}{17}\times 3400=\$600 \quad , \quad S(b)=\frac{6}{17}\times 3400=\$1200$$

$$S(c)=\frac{8}{17}\times 3400=\$1600$$

16 مثال. 225 افغانی د A، B، C او D تر منځ دا ډول تقسیم کړئ چې

$$\frac{A}{B}=\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{B}{C}=\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{C}{D}=\frac{3}{2}$$

حل د څلورو نفرو او دریو جوړو نسبتونو په حالت کې، لومړی د دریو نفرو تر منځ متمادي نسبتونه پیدا کوو او بیا د څلورم نفر متمادي نسبت د هغوی سره معلومیږي.

$$\left.\begin{array}{ccccc} A & : & B & : & C \\ 2 & : & 3 & & \\ & & 1 & : & 2 \\ \hline 2 & : & 3 & : & 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} A & : & B & : & C & : & D \\ 2 & : & 3 & : & 6 & & \\ & & & & 3 & : & 2 \\ \hline 2\times 3 & : & 3\times 3 & : & 3\times 6 & : & 6\times 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & A & : & B & : & C & : & D \\ \Rightarrow & 6 & : & 9 & : & 18 & : & 12 \\ & 2 & : & 3 & : & 6 & : & 4 \end{array}$$

د پانگی مجموعه = 225 افغانی او د برخو د نسبتونو مجموعه
$u = 2 + 3 + 6 + 4 = 15$ **ده.**

بناپر دې

$$A = \frac{2}{15}\times 225 = 30\ Af \quad , \quad B = \frac{3}{15}\times 225 = 45\ Af$$
$$C = \frac{6}{15}\times 225 = 90\ Af \quad , \quad D = \frac{4}{15}\times 225 = 60\ Af$$

میزان:

$$U = 33 + 45 + 90 + 60 = 225$$

د کميتونو تحول (*Variation*)

مسقيم او غير مستقيم تناسبونه

دx او y دوه متحول کميتونه په يو ډول يا هر ډول سره اړيکی لرلی شي. د يو زياتوالی او کموالی سره د بل زياتوالی يا کموالی راځي. کيدلی شي يو تر بله په دوه ډوله اړيکو کې سره وليدل شي.

لومړی مستقيم تناسب.

که چېرې د x متحول په زياتيدو سره د y متحول هم زيات شي. ويل کيږی چې د x اوy کميتونه يو تر بله سره مسقيم متناسب دي. د مسقيم تناسب تر ټولو ساده رابطه

$$\frac{y}{x} = c \Leftrightarrow y = cx$$

په داسې حال کې چې c يو ثابت عدد دی. بنا پر دې د هغو دوو کميتونود تقسيم حاصل ثابت وي د کومو تر منځ چې مسقيم تناسب وجود ولري. وهل شوی فاصل او وخت ، د جنسونو مقدارونه او د هغوی بيې، کار کوونکی او د هغوی مصارف، کار کوونکی او د هغوی د کار ورځې د هغو متحولينو مثالونه دی چې يو تر بله مستقيم تناسب لری.

***17* مثال**. که د يو قلم قيمت 5 افغانی وي نو د قلمونو د تعداد (x) او دهغوی د بيې (y) تر منځ مسقيم تناسب وجود لري په لاندې ډول

x :	$2p$	$4p$	$6p$	$7p$	$8p$	$9p$	$10p$
y :	$10Af$	$20Af$	$30Af$	$35Af$	$40Af$	$45Af$	$50Af$

ليدل کيږي چې

$$\frac{y}{x} = \frac{10Af}{2p} = \frac{20Af}{4p} = \frac{30Af}{6p} = \frac{35Af}{7p} = \frac{40Af}{8p} = \frac{45Af}{9p} = \frac{50A}{10p} = 5\,{}^{Af}\!/_{p}$$

دویم معکوس تناسب.

که چیرې د x د متحول په زیاتیدو سره باالمقابل د y متحول کم شي، ویل کیږی چې

د x او y کمیتونه یو تر بله معکوس متناسب دي (یو تر بله معکوس نسبت لري). تر ټولو ساده معکوسه رابطه عبارت ده له

$$x \times y = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{x}$$

دلته هم c یو ثابت عدد دی. بنا پر دې همغه دوه کمیته چې یو تر بله سره معکوس تناسب ولري د هغوی د ضرب حاصل ثابت وي. د کارګرانو شمیر او دیو ثابت حجم کار، د کار موده، د متجانسو نلونو شمېر او په یو ثابت حجم سره د اوبو څخه د یو ډنډ د ډکولو د جریان موده د کتابونو شمېر او د هر یو د ډوډی اندازه، په داسې حال کې چې تیاره شوي ډوډی ثابته وي. د هغو متحولینو جوړې دي چې یو تر بله سره معکوس تناسب لري.

<u>18 مثال</u>. که چیرې یو ډنډ په معین حجم سره یو جاری نل په 60 ساعتونو کې ډک کړي که د همغه نلونو شسپر (n) شي نو د ډنډ ډکولو موده (t) ته راټیټیږی. په لاندې ډول

$n:$	1	3	5	6	8	10	20
$t:$	$60h$	$20h$	$12h$	$10h$	$7{,}5h$	$6h$	$3h$

له دې ځایه

$$n \times t = 1 \times 60 = 3 \times 20 = 5 \times 12 = 6 \times 10 = 8 \times 7{,}5 = 10 \times 6 = 20 \times 3 = 60h$$

د معکوس والی تعبیر

د 5 او 12 کمیتونه د 6 او 10 سره معکوساً متناسب دي. یعنې

$$5\times 12 \;=\; 6\times 10$$

پورتنی رابطه دا ډول هم ليکلی شو.

$$\frac{5}{\frac{1}{12}} \;=\; \frac{6}{\frac{1}{10}}$$

ليدل کيږي چې 5 او $\frac{1}{12}$ عددونه د 6 او $\frac{1}{10}$ عددونو سره مسقيمه رابطه لري. همدا رنګه

$$5\times 12 \;=\; 6\times 10 \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{6} \;=\; \frac{10}{12}$$

بنا پر دې، ددې لپاره چې a او b د x او y سره معکوساً متناسب وي، لازمه او کافي ده چې a او x د دوو کميتونو y او b سره معکوس نسبت ولري. يعنې

$$a\times b \;=\; x\times y \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{x} \;=\; \frac{y}{b}$$

په بل عبارت د مسقيم تناسب طرفين د هغې د وسطينو سره معکوس نسبت لري.

<u>**19 مثال**</u>. که چېرې 4 په اوبو جاری نلونه يو ډنډ په 15 دقيقو کې ډک کړی، نو دولس نله به هغه ډنډ په څو ساعتونو کې ډکوي.

حل: که چېرې مطلوب وخت x وي. نو ددې په نظر کې نيولو سره چې د نلونوتعداد او د اوبو د جريان وخت سره معکوس نسبت لري نو

$$12\times x \;=\; 4\times 15 \;\Rightarrow\; \frac{x}{15} \;=\; \frac{4}{12} \;\Rightarrow\; x \;=\; \frac{4\times 15}{12} \;=\; 5h$$

اويا

$$\frac{4}{\frac{1}{15}}=\frac{12}{\frac{1}{x}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x}=\frac{12\times\frac{1}{15}}{4} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x}=\frac{\frac{4}{5}}{4} \;\Rightarrow\; x=\frac{1\times 4}{\frac{4}{5}}=4\times\frac{5}{4}=5h$$

<u>20 مثال</u> یو موټر چې سرعت یې په یو ساعت کې 30 کیلومتره دی. د دوو ښهرونو تر منځ فاصله په 20 ساعتونو کې تماموي. که چېرې د دې موټر سرعت 40 کیلومتره په ساعت کې شي نو نوموړی فاصله به په څو ساعتونو کې ووهي.

حل:

$$40 \times x = 30 \times 20 \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{30}{40} \Rightarrow x = \frac{20 \times 30}{40} = 15h$$

احدیت (Unitary)

په تجارتي معاملو او حسابي ډول ډول مسایلو کې، د یو واحد د بیې د معلومولو او یا د یو مشخص معیار نرخ ته ضرورت پیښیږی. د مثال په توګه که د 20 کیلوګرامه غواړو بیه، 500 افغ وي نو دیو کیلو ګرام غواړو د بیې پوهول مطلوب دي؟ یا څو نفره به هغه کار په یوه ورځ کې تمام کړئ؟

دا هر یو طرحه شوی سوال د احدیت مربوط دی. اګرچې دا ډول مسایل د مستقیم یا معکوس تناسب خصوصي حالات دي. مګر په محاسبوي مسایلو کې په نسبت باندی تقسیم، تناسب، ربح، د محاسبې لومړنی مرحله ده.

<u>21 مثال</u>. که چېرې د 50 مبایلونو بیه 75000 افغانی وي نو د 10 مبایلونو قیمت به څو وي؟

حل: دلته تر ټولو لومړی باید د یو مبایل $p(1m)$ بیه معلومه شي.

$$p(1m) = \frac{75\,000Af}{50} = 1\,500Af$$

بنا پر دې د 10 مبایلونو بیه عبارت دی له

$$p(10m) = (1500Af) \times 10 = 15\,000Af$$

22 مثال. 10 جاري نلونو يو ډنډ په 12 ساعتونو کې ډکوي.
الف. يو نل به نوموړی ډند په څو ساعتونو کې ډکوي.
ب. څو نلونه به هغه ډنډ په دوو ساعت کې ډک کړي.حل: که د هغه شمير ساعتونه چې په هغې کې يو جاری نل نوموړی ډنډ ډک کړای شي په H او د هغو نلونه شمير چې نوموړی ډنډ په يو ساعت کې ډک کړي په N سره ونيسو په هغه صورت کې لرو چې

$$H = 10 \times 12h = 120h \quad , \quad N = 12 \times 10n = 120n$$

23 مثال. يو جاري نل په يوه ورځ کې د يوډنډ لسمه برخه ډکوي. همغه يو ډنډ ډکولوته په يوه ورځ کې څو نلونه په کار دي؟

$$N = 1 \div \frac{1}{10} = 1 \times \frac{10}{1} = 10n$$

د کميتونو اوسط

د څو عددونو حسابي اوسط د هغوی پر شمېر باندې د همغه عددونو د مجموعې خارجقسمت دی. د مثال په توګه د 44 ، 56 ،51 ، 49 ، 101 او 50 عددونو حسابی اوسط عبارت دی له

$$a = \frac{44 + 56 + 51 + 49 + 100 + 50}{5} = \frac{350}{5} = 70$$

د حسابي اوسط د اصطلاح پر ځای ډير ځلې دعددونو اوسط هم ويل کيږي. مګر د دوو عددونو a او b لپاره درې ډوله اوسط حسابي، هندسي او هارمونيک په لاندې ډول تعريف کيږي.

حسابی اوسط : $$A = \frac{a+b}{2}$$

هندسی اوسط : $$G = \sqrt{a \times b}$$

هارمونیک اوسط: $$H = \frac{2ab}{a+b}$$

24 مثال. د 2 او 8 عددونو حسابي، هندسي، او هارمونیک اوسطونه عبارت دي له

$$A = \frac{2+8}{2} = 5 \quad , \quad G = \sqrt{2.8} = 4 \quad , \quad H = \frac{2(2.8)}{2+8} = 3{,}2$$

تمرين

د لاندې هر يو دوه ګوني کميتونو تر منځ نسبت معلوم کړئ؟

$1.\ \ 20\,,4 \quad , \quad 2.\ \ 7\,,8 \quad , \quad 3.\ \ 27\,,36$

$4.\ \ 35\,,15 \quad , \quad 5.\ \ 5\tfrac{5}{8}\,,7\tfrac{1}{2} \quad , \quad 6.\ \ 2{,}5\ ,\ 7{,}5$

په لاندې تناسبونو کې مجهول عددونه معلوم کړئ؟

$7.\ \ \frac{16}{8} = \frac{c}{5} \quad , \quad 8.\ \ \frac{25}{15} = \frac{10}{d} \quad , \quad 9.\ \ \frac{13}{b} = \frac{39}{96}$

$10.\ \ a:25 = 6:50 \quad , \quad 11.\ \ 1:2 = 3:d \quad , \quad 12.\ \ 3:8 = c:19$

13. د اوبو د سنجولو په يو ميتر کې د يو نل د اوبو ثابت جريان په 30 ورځو کې 450 مکعب متره ثبت شوی دی. که چیری همدا نل 210 ورځې جاري وي نو ميتر به څو مکعب متره جاری اوبه ثبت کړي.

14. که چېرې د 900000 افغانی شتمني ماليه 19800 افغانی حساب شي نو د 105000 افغانيو ماليه به څو وي؟

15. د جوړونې يو انجينير يو تعميراتي مصالحه، سمت، جغله او شګه په $1:3:6$ تناسب سره ګډوي. نو په 2500 ټنه مصالحی کې به دهر يو څخه څو ټنه مصالحه ګډه شوي وي.

16. په يوه تجارتي معامله کې څلوورو شريکانو سوداګرو $75840$$ ګټه پــــه لاس راوړي ده. که چېرې د دې سوداګرو اول سوداګر، دوم سوداګر، دريم سوداګر او

څلـــــوورم ســـــــوداګر د برخـــــو تناســـــب پـــــه ترتيــــب ســـــره $8:9:19:24$ وي. نوموړی ګټه د دوی تر منځ وويشئ.

17. يو پايپ $2\,010$ ليتره اوبو د $1,5$ ساعتونو په وخت کې يو ټانګر ته تويوي، نو 42230 ليتره اوبه به نوموړی پايپ په څو ساعتونو کې هغې ټانګر ته داخلی کړی؟

18. يو څرخ چې ۴ انچه قطر لري په يوه دقيقه کې ۲۲۵۰ ځلی څرخيږی، په همدې سرعت به يو بل څرخ چې قطر يې ۵ انچه وي په يوه دقيقه کې څو ځلې وڅرخيږي؟

19. که چېرې 20 نفره د 19 ورځوکار په کولو سره $6\,080\$$ مزدوري واخلي، نو د۳۳ کسانو د 7 ورځو مزدوري څومره کيږی؟

20 . که چېرې په يو بانک کې د $3\,850\$$ پانګې دوه کلنه ګټه $231\$$ وي، نو د $23\,100\$$ د 11 کالو ګټه به څو وي؟

21. که په يو هوټل کې د 1500 ميلمانودرې وخته ډوډی مصرف د 8 ورځو لپاره $16\,800\$$ شي نو د 3200 کسانو د دوه وخته ډوډی مصرف به څو ډالره وي؟

22. که چېرې د يو مثلث محيط $52cm$ وي او a، b، c د هغی ضلعی وي، داسې چې $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$ او $\frac{b}{c}=\frac{5}{4}$. نو په دې حالت کې ددې مثلث د هرې ضلعی اړدوالئ معلوم کړئ؟

23. 45000 افغانی د مسعود (M)، اقبال (I)، او حمزه (H) تر منځ داسې وويشئ چې $\frac{M}{I}=\frac{2}{3}$ ، $\frac{I}{H}=\frac{3}{5}$ وي.

24. د 100، 200، 300، 400 او500 عددونو اوسط معلوم کړئ.

25 . د 4 او 25 عددونوو حسابي اوسط، هندسي اوسط، او هارمونيک اوسط حساب کړئ.

26. که چېرې محمود25000 افغانی، مسعود15000 افغانی ، منصور40000 افغانی ، اقبال80000 افغانی اوحامد 100000 افغانی ولري د دوی د شتمنی اوسط څو دی؟

فیصد (Percent)

د فیصد(په صلو کی) اصطلاح د % سمبول په وسیله افاده کیږي د یو واحد عدد سلمه برخه ده. د مثال په توګه 25% مساوي دي په $\frac{25}{100}$ یا 0.25 یا $\frac{1}{4}$ دی. د فیصد کمیت د یو کسر (نسبت) خاص حالت دی داسې چې د هغي مخرج 100 وي.

د فیصد اړونه په عامو او اعشاري کسرونو باندې

د فیصد اړونې لپاره په عام کسر باندې، د فیصد عدد د کسر په توګه په صورت کې او د 100 عدد په مخرج کې لیکل کیږي وروسته که بیا لازم وو نو کسر اختصار او تصحیح کیږي.

$$8\% = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}, \quad 240\% = \frac{240}{100} = 2\frac{40}{100} = 2\frac{2}{5}, \quad 95\% = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$$

په فیصد باندې د عامو او اعشاري کسرونو اړونه.

په فیصد باندې د یو اعشاری کسر په اړونه کې د اعشاری علامې ځای دوه رقمونه ښی خواته خوځول کیږي او بیا د فیصد سمبول پرې علاوه کیږي. لکه

$$0{,}09 = 9\%, \quad 0.85 = 85\%, \quad 6 = 6{,}00 = 600\%, \quad 1{,}2 = 1{,}20 = 120\%$$

په فیصد باندی د عام کسر د اړونی لپاره – لومړی هغه په اعشاري کسر اړوو او بیایې په فیصد اړوو لکه

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}50 = 50\% \quad , \quad 2\frac{1}{4} = 2{,}25 = 225\% \quad , \quad \frac{3}{20} = 0{,}15 = 15\%$$

د فیصد اساسی کمیتونه

د فیصد په اړوند حسابونه کې درې اساسی کمیتونه مطرح کیږي.

اول. اساس$(base)$ **له هغې عدد څخه عبارت دی چې له هغې څخه فیصد منشا اخلي. دا کمیت ته اصلي کمیت یا سرمایه هم ویل کیږي. د مثال په توګه که چېرې د یوې ښوونځی د** 400 **شاګردانوڅخه** 20 **کسان ناکام شوي وي نو واضح ده چې د مکتب ناکامان** 5% **دي. دلته** 400 **اصلي کمیت دی.**

دوم . فیصدی $(percentage)-$ **هغه کمیت دی چې د هغې نسبت د اصلي کمیت سره د فیصد په حیث افاده کیږي. فیصدی ته فرعي کمیت یا نفع (نقص هم وائی). په پورتنی مثال کې د** 20 **عدد فرعي کمیت دئ.**

دریم . نرخ$(rate)$ **د فیصد او اصلی کمیت تر منځ نسبت دی چې د فیصد یا عام کسر او یا هم اعشاري کسر په توګه ارائه کیږی. په پورتنی مثال کې** 5% **نرخ دی. فیصدی کمیتونه او اصلی کمیتونه په هر حالت کی سره هم جنس وي. په داسی حال کی چی د دوی ترمنځ نسبت (نرخ) یو مجرد عدد دی.**

***1* مثال. که چېرې د سوداګیرئ په یوه معامله کې له** $\$1\ 000\ 000$ **سر مائې څخه** $\$100\ 000$ **ګټه حاصله شوي وي، دلته** $\$1\ 000\ 000$ **اساس (سرمایه)** $\$100\ 000$ **فیصد (ګټه) او** 10% **نرخ (فیصدی) دي.**

د فیصدی د کمیتونو معلومول

د فیصد په اړونده مسایلو کې څلوور کمیتونه: اصلی کمیت (b) فیصدی (p) نرخ (r) او 100 یو تناسب $\frac{p}{b}=\frac{r}{100}$ جوړوي. چې د طرفینو او وسطینو خاصیتونو ته په پاملرنه سره دا هر یو کمیت د یو بل له جنسه په لاس راتلی شي. یعنې

$$\boxed{\frac{p}{b}=\frac{r}{100} \Rightarrow p=\frac{b\times r}{100} \quad , \quad b=\frac{p\times 100}{r} \quad , \quad r=\frac{p\times 100}{b}}$$

او یا د ښي نه چپ خواته

اصلي کمیت = (فیصدي × 100)÷ نرخ

فیصدي = (اصلي کمیت × نرخ) ÷ 100

نرخ = (فیصدی × 100) ÷ کمیت اصلي

2 مثال. که چېرې د ډوډی مالګې په یو کیلو ګرام محلول کې 250 ګرامه خالصه مالګه منحل شوي وي، نوموړی محلول څو فیصده دی؟

حل:

$$\frac{250g}{1000g} = \frac{r}{100} \Rightarrow r = \frac{250\times 100}{1000} = 25\ \%$$

نو محلول 25 فیصده دی.

3 مثال. که چېرې د یو شهر نفوس 2000000 نفره وي او په یو کال کې 5% زیاتوالی پیدا کړي نو یو کال وروسته به د همغه شهر نفوس څومره وي.

حل :

$$\frac{p}{2\,000\,000}=\frac{5}{100} \Rightarrow p=\frac{2\,000\,000\times 5}{100}=100\,000$$

په دې ترتیب د شهر نفوس د یو کال په موده کې $100\,000$ نفر زیات شوی او مجموعي نفوس یې $1100\,000$ نفره دئ.

4 مثال . په یو شهر کې د اوبو د ذخیرې تانکی په یو ساعت کې $4,2\ \%$ فیصده تخلیه کیږی . که چیرې د شهر مصارف په یو ساعت کې $840\,000\,m^3$ براورد شوی وي. ددې ذخیرې ظرفیت معلوم کړئ؟

حل :

$$\frac{840\,000\,m^3}{b}=\frac{4,2}{100} \quad\Rightarrow\quad b=\frac{(840\,000\,m^3)\times 100}{4,2}=20\,000\,000\,m^3$$

بنا پر دې دا ذخیره شل میلیون متر مکعب ظرفیت لري.

ذکات او فیصد

لکه څرنګه چې پوهیږو. ذکات په یو سرمایه کې څلویشتمه (په هر څلویشتو افغانیو کې یوه افغانی) حسابیږي.

بنا پر دې په فیصد کې د ذکات اندازه دا ډول معلومیږی.

$$\frac{r}{100} = \frac{1}{40} \Rightarrow r = \frac{100\times 1}{40} = \frac{100}{40} = 2,5\ \%$$

نو د شتمنیو د ذکات اندازه $2,5\ \%$ حسابیږي.

5 مثال. د $5\,000\,000$ افغ شتمنی ذکات څومره کیږي؟

حل.

$$\frac{z}{5\,000000}=\frac{2.5}{100}\Rightarrow z=\frac{(5\,000000)\times(2.5)}{100}=\frac{12\,500000}{100}=125000Af$$

تخفیف (Discount)

په سوداګیری کې، د مشتریانو بیلولو او جنسونو د خرڅلاو د اسانتیا لپاره، ځینی وختونه اړونده کالي له اصلی قیمت څخه څو فیصده ارزان خرڅیږی. ددغه

سوداګیری کالو د اصلی بیې د ټیټوالی فیصدی د تخفیف په نامه یادیږی. په ساده حالاتوکې د تخفیف د مسایلو حل د فیصد موضوع ته راجع کیږی.

6 مثال. د یو کالا شوئی ماشین معین قیمت 275\$ دی، که چیری د هغی په خرڅلاو کې 40% تخفیف په نظر کې ونیول شي نو د خرڅلاو بیه به یې څو وي؟

حل: که چېرې د تخفیف اندازه x او د خرڅلاو بیه p فرض شي. نو

$$\frac{x}{275} = \frac{40}{100} \Rightarrow x = \frac{275 \times 40}{100} = \$110$$

$$\Rightarrow p = 275\$ - 110\$ = 165\$$$

بیمه (Insurance)

بیمه د هغو قرار دادونو څخه دی چې اشخاص یا موسسات، د ژوندانه د کارونو خطرات د مناسبو وجوهاتو په تادیه کولو سره، وقایه کوي، د بیمې د قرار داد دواړه خواوې د بیمه کوونکو شرکت او بیمه کیدونکی لوري څخه جوړیږی. بیمه شوی طرف د بیمې د شرکت سره قرار داد کوي چی که د مثال په توګه تر پنځو راتلوونکو کالونو پورې دده کور وسوزي باید $200\,000$ افغانی ده ته ورکړل شي. د هغی په مقابل کې دی د کال $0{,}2\%$ د بیمی حق$(premium)$ شرکت ته ووکوي. بیمه او داسې نور د بیمی د حق محاسبه د فیصد په مسائل پوری تړلی دي.

7 مثال. یوسړی خپل کور دارنګه بیمه کوي چې که وسوزی نو $1\,000\,000$ افغ به ده ته ورکول کیږي او دهغې په مقابل کې د کال $0{,}1\%$ وجه د بیمی حق ادا کوي. نو دا سړی باید څومره افغانی په کال کې د بیمې شرکت ته ورکړئ؟

حل: د یو کال د بیمی حق عبارت دی له

$$p = \frac{b \times r}{100} \Rightarrow p = \frac{(0.1) \times (1\,000\,000)}{100} = 1000\ Af$$

8 مثال. یو سړی خپل ژوند په $5\,000\,000$ افغانیو د یو کال لپاره د 0.2% د ورکولو په مقابل کې بیمه کوي. که چېرې 20 کاله وروسته مړ شي نو څومره د بیمې حق به یې ورکړی وي او د میراث خور پاتې شوني بې څومره ده.

$$P(20)=\frac{(0.2)\times(5\,000\,000)\times(20)}{100}=100\,000\,Af$$

او د میراث خور پاتې شوني

$$p=5\,000\,000-100\,000=4\,900\,000\,Af$$

ساده ربح (Simple Intrest)

ربح د هغو پولي زیرمو فیصدي ګټه ده چې په بانکونو یا د سوداګرۍ په مرکزونو کې د معلومو وختونو لپاره د امانت په توګه ایښودل کېږي. ددې سره سره چې ربح د فیصدی سره اړیکي لري، نو د فیصد د دریو کمیتونو برسیره څلورم کمیت وخت ته هم ضرورت لري.

که چېرې اصلي کمیت (سرمایه) b ، فیصدی کمیت (دوخت معلوم دور p)، نرخ – r او وقت t فرض شي، نو د t وخت د تیرولو وروسته ګټه $I=tp$ کیږي.

$$\frac{p}{b}=\frac{r}{100}\;\Rightarrow\;\frac{p\times t}{b}=\frac{r\times t}{100}\;\Rightarrow\;\frac{I}{b}=\frac{r\times t}{100}$$

$$\boxed{\Rightarrow\; I=\frac{b\times r\times t}{100}\;,\quad b=\frac{I\times 100}{r\times t}\;,\quad r=\frac{I\times 100}{b\times t}\;,\quad t=\frac{I\times 100}{b\times r}}$$

9 مثال. د $\$750$ ساده ربح چې نرخ يې 4% و د $\frac{1}{2}$ کال لپاره وښئ.

حل:

$$b = \$750 \quad , \quad r = 4\% \quad , \quad t = \frac{1}{2} = 0{,}5y \quad \Rightarrow \quad I = \frac{750 \times 4 \times 0{,}5}{100} = \$15$$

نو د پیسو مجموعه

$$S = p + I = 750 + 15 = \$765$$

تنزيل (Depreciation)

تنزيل د فزيکي موادو (لکه تعميرونو، ماشينونو او نورو) د استعمال په وجه د بيو ټيټوالی دئ. په معموله توګه ماشيني سامانونه د استهلاک معينه دوره وخت لري. دهغوی بيه د وخت دور په تيريدو څو فيصده ټيټيږی او د په کار وړل شويو سامانونو بيه د اصلی بيې په نسبت کمه وي.

يا د سوداګيری په محاسبو کې ممکنه ده اخيستوونکی خپل پوره وړي ته يو سند ورکړی چې په هغې کې به پيسې د يو معين وخت څخه وروسته ورکوي. که چېرې د سند څښتن پيسو ته اړوي نو د بانک څخه د سند له مخی پيسې اخلي.

په دې شرط چې د معاملې د تاريخ څخه او د سند له وجې څخه يې کمه کړي، هغه پاته شوي پيسې چې د سند څښتن يې اخلی د سند (حوالې) فعلی قيمت دی که د سند (حوالې) له اصلي قيمت څخه کم شي نو دغه حاصل تنزيل نوميږي.

تنزيل د ربح سره شباهت لري په دی توپير سره چې په ربح کې پانګه زياتيږی، په داسې حال کې چې په تنزيل کې اصلي وجه کميږی.

د تنزيل او ربح فورمولونه يو دي. د ربح (I) په ځای د تنزيل کميت (d) په فورمول کې په نظر کې نيول کيږي.

$$\boxed{\Rightarrow \quad d = \frac{b \times r \times t}{100} \quad , \quad b = \frac{d \times 100}{r \times t} \quad , \quad r = \frac{d \times 100}{b \times t} \quad , \quad t = \frac{d \times 100}{b \times r}}$$

***10* مثال**. د یو ماشین بیه $\$4000$ او د زړښت دورئې 6 کاله دی. د معین وخت د بشپړکیدو وروسته د ماشین بیه $\$400$ ته کمیږي. نو د ماشین کالنی تنزیل څو فیصده دی؟

حل: لیدل کیږي چې

$$b = 4000\$ \quad , \quad t = 6year \quad , \quad d = 4000 - 400 = \$3600$$
$$\Rightarrow r = \frac{d \times 100}{b \times t} = \frac{3600 \times 100}{4000 \times 6} = 15\%$$

مرکبه ربح *(Compound Intrest)*

په دې ډول ربح کې د معین وخت د هرې دورې په اخر کې ګټه پر سرمایه ورزیاتیږي، نو په بله دوره کې د نوي سرمایې ګټه هم حسابیږي. دا عملیه د وخت په څو دورو کې دوام پیدا کوي.

که چیرې اولنۍ پانګه $- p$ د یوې دورې ګټه i ، دوخت د دورو تعداد $- n$ او د n دورو د زیاتوالي څخه وروسته پانګه $- s$ وي نو ددې کمیتونو تر منځ اړیکي عبارت دي له:

$$S \;=\; P(1+i)^n \quad \Leftrightarrow \quad P \;=\; \frac{S}{(1+i)^n}$$

ددې سره سره چې وروستنی رابطې په مرکبه ربح پورې اړه لري، مګر د هغې څخه د طبیعې حادثو په مربوطه حسابونو کې لکه د نفوسو زیاتوالی، د میکروبونو زیاتوالی، د سرطانی غدو رشد او داسې نورو کې ورڅخه ګټه اخیستل کیږي.

***11* مثال**. $2\ 000\ 000$ پانګه په 10% ربح باندی په بانک کې ایښودل کیږی. نو پنځه کاله ورسته به د هغوی سرمایه څومره شي؟

حل:

$$P = 2\ 000\ 000 Af \quad , \quad i = 10\% = \frac{10}{100} = 0,1 \quad , \quad n = 5\ year$$

$$S = 2000000(1+0,1)^5 = 2000000(1,1)^5 = 20000000 \times 1,61051 = 20161052Af$$

12 مثال. که چېرې د افغانستان نفوس څلويښت کاله دمخه 15 مليونه احصايه اخيستل شوي وي. فرض کوو چې د ملک جمعيت د کال 2% زياتوالی کوي. نو ددی ملک نفوس به څو وی؟

حل:

$$p = 15000000 \quad , \quad r = 2\% = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$S = p(1+r)^{40} = 15000000\,(1+0.02)^{40} \approx 33000000\,.$$

تمرين

دا لاندې هره يوه فيصدی عامو او اعشاري کسرونو په توګه ارائه کړئ؟

$1.\quad 6\frac{1}{4}\% \quad , \quad 2.\quad 40\% \quad , \quad 3.\quad \frac{5}{15}\% \quad , \quad 4.\quad 16,25\% \quad , \quad 5.\quad 25\%$

دا لاندې هر يو عدد د فيصد په توګه ارائه کړئ

$6.\quad 0.45 \quad , \quad 7.\quad 0,125 \quad , \quad 8.\quad 0,00875 \quad , \quad 9.\quad \frac{11}{5} \quad , \quad 10.\quad \frac{43}{200}$

لاندې فيصدي حساب کړئ.

11. د 72 ديرش فيصده، **12**. د اوياوو زرو، څلوويشت او نيم فيصده

13. د اتو، شل فيصده ، **14**. د 7 پنځوس فيصده

په لاندې سوالونو نامعلوم کميتونه معلوم کړئ؟

د سوال شماره	اصلي کميت (اساس)	فرعي کميت (فيصدی)	فيصدی نرخ
11	72	x	%30
12	$350	x	%$12\frac{1}{2}$
13	$300	x	%3,75
14	250	50	x
15	310	93	x
16	900	80	x
17	x	45	%30
18	x	4	%80
19	x	735	$\frac{7}{8}$
20	x	89	%$2\frac{1}{2}$

21. د يو ست تيلويزيون چې 640 بيه لري په %$14\frac{2}{7}$ تخفيف سره خرڅيږي، نو د خرڅلا بيه به څو وی؟

22. په يو بانک کې د 750 څلوورمياشتنی ګټه کوم چې د کال په %6 ګټه ورکړل شوي ده پيدا کړئ.

23. ديو سړي کالنی معاش 9500$ دی، که چېرې له هغې څخه %20 د کور کرايه، %25 د ډوډۍ مصرف، %10 کالی، %5 دوائي، %2 روغتيائی بيمه، %9 د سوند موادو مصرف، %19 کډوډ مصرف او پاتې شوی معاش پس انداز کړي. نو د نوموړي کالنی پس انداز حساب کړئ؟

24. يو محلول د 800 ګرامه مالګې، 1500 ګرامه سوديم کاربونات او 700 ګرامه د نقرې کلورايدو څخه جوړ شوی وي. نو له دې موادو څخه د هر يو اندازه په دې محلول کې په ګوته کړئ؟

25. د يو نانوائي مشتريان د ورځې په اوږدو کې له 35 کسانو څخه 64 کسانو ته زياتوالی کړيدی. معلوم کړئ چې د نانوائی مشتريان څو فيصده زيات شويدي؟

26. مخکښی له دې چې د یو جنس تجارتی ارزش $3\frac{2}{5}\%$ زیات شي، قیمت یې 98230\$ وو. نو ددی جنس قیمت د زیاتوالی څخه وروسته معلوم کړئ؟

27. یو علاف 1500 منه غله، یو من په 97.9 افغ خرڅه کړه. که چېرې د هغی د وړولو کرایه 9390 افغ ، د ایښودلو اوجوره ئی 2015 افغ او کمیشن ئې $3\frac{1}{2}\%$ وي. نو دغلې له درکه خالص عاید څو دئ؟

28. د 15000 افغانیو ربح د کال په 4% د دوو کالو لپاره معلومه کړئ؟

29. د 24000 افغ ربح د کال په 3% د یو کال دوه میاشتو او پنځلسو ورځو څو کیږي؟

30 . کومه پانګه د کال په 4% ګټه په اتو میاشتو کې 2000 افغ کیږي؟

31. د ربح په کوم نرخ د 18000افغ ګټه په 3 میاشتو او لسو ورځو کې 400افغ کیږی؟

32 . په څومره وخت کې د 5000 افغانیو ربح د 5% له قراره 2500 کیږي؟

33. هغه حواله چې 72 ورځې یې وعدې ته پاتې دي او تنزیل یې د 5% له قراره کم کړئ دی. څښتن ته یې 1485افغ تادیه کیږی، نو د حوالې اصلی قیمت به څو وي؟

34. د یوې حوالې اوسنی بیه د 4% تنزیل د وضع کولو څخه وروسته $1711,4$ افغانی کیږي که چېرې د هغې اصلي قیمت 1720افغ وي نو د تنزیل موده مطلوب دی؟

ځلورم څپرکی

الجبری افادې *(Algebraic Expressions)*

یو فرضي کمیت چې له عددونو، ضریبونو او حرفونو (متحولینو) څخه د جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، او جذر په وسیله ترکیب شوی وي، د الجبري افادې څخه عبارت دی. د مثال په توګه

$$3x^2-5xy+2y^3 \quad \cdots \quad (I) \quad , \quad 25a^2bc^3 \quad \cdots \quad (II)$$

$$\frac{5xy+3z}{2a^3-c^2} \quad \cdots \quad (III) \quad , \quad \frac{a+b-c^2}{\sqrt{x^2+4yz}} \quad \cdots \quad (IV)$$

حد *(Term)*

د یوې الجبري افادې هغه برخه چې په هغې کې عددونه او حرفونه د جمع یا تفریق په وسیله یو تر بله نه وي سره جلا شوي د هغې افادې یو حد بلل کیږي. د مثال په توګه

$64x^2yz$ ، $\frac{xy}{\sqrt[3]{abc}}$ او ab

یو حده افادی *(Monomial)*

هغه افاده چې یوازې له یو حد نه جوړه شوي وي د یو حده په نوم یادیږي. د مثال په توګه $2a^2b^3c^4$ ، یو حده افادې دي.

دوه حده افادې *(Binomial)*

هغه افادې چې یوازې دوه حده ولري، ددوحده په نوم یادیږي. د مثال په توګه $a+b$ ، $5xy-8z^4$ او $axy+\frac{12}{\sqrt{xy}}$ او داسې نور

درې حده افادې (Trinomial)

هغه افادې چې د دريو حدونو څخه لاس ته راغلي وي، ددرې حده په نوم يادېږي. د مثال په توګه $\sqrt{3a}+\frac{xy}{z}-x^2$ ، $4x^2+5xy^2-78xyz$ او $a+b-c$.

څو حده افادې (Multinomial)

هغه افادې چې له يو حد څخه زيات حدونه ولرى د څو حده افادو په نوم يادېږي. لکه $7x+6y$ ، $3x^2+5xy^2-7xyz$ او $a+b+c$

ضريب (Co eficient)

په يوه الجبري افاده کې د يو حد هر فکتور د عددونو ضريب او د هغې حد د حرفونه ضريب وي. مثلاً د $-5xy^2$ په حد کې $5x$ د y^2 او y^2 د $5x$ ضريب او 5 د xy^2 ضريب دى.

عددي ضريب (Numerical coeficient)

که چېرې يو حد له عددونو او حرفونو څخه جوړ شوى وي نو هغه عدد، د عددي ضريب په نامه يادېږي. مثلاً د $-5xy$ په حد کې د -5 عدد د همدې حد عددي ضريب دى.

مشابه حدودنه

هغه الجبري حدونه چې عين حرفونه او عين توانونه ولري ضريبونه يې سره مختلف وي، يو تر بله سره مشابه يا هم جنس حدونه بلل کيږي. د مثال په توګه $6xy^3z^2$ ، $3xy^3z^2$ او $-18xy^3z^2$ مشابه حدونه دي.

متحول (Variable)

په الجبري افادى کې هغه حرفونه چې د عددونو په غير خالى سيټونو کې قيمتونه اخيستى شي متحولين نوميږى. مثلاً د $5x^2-\sqrt{y}$ په افاده کى x او y متحولين دى ځکه دلته x هر حقيقى عدد او y د صفر په شمول مثبت حقيقى عددونه،

قیمت اخیستلی شي، په ځینو افادوکې بیا حرفونه د ثابتو عددونو او یا د عددي ضریبونو په توګه فرض کیدلای شي. د مثال په توګه د $ax^2 + bx + c$ په افاده کې a ، b او c متحولین نه بلکه ثوابت په نظر کې نیول کیږي.

د الجبری افادو ډولونه

الجبري افادې په عمومی توګه په درې ډوله دي، پولینومونه، ناطقې افادې اوغیر ناطقی افادې.

پولینومونه

هغه الجبري افادې چې په هغې کې د متحولینو توانونه تام مثبت عددونه یا صفر وي، پولینوم بلل کیږي، هغه پولینومونه چې یوازی یو متحول ولري زیات استعمال لري.

***1* مثال.**

$$(i) \quad P(x) = 3x^5 - 8x^3 + 9 + 5x - 4x^2$$
$$(ii) \quad Q(x, y) = x^3 - 2x^2y^4 + y^2$$
$$(iii) \quad R(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

د یو پولینوم د یو حد درجه

د یو پولینوم په یو حد کې د یو حرف (متحول) تر ټولو لوړ طبیعي اویا صفری توان ، نظرو هغې متحول ته د دې حد درجه ویل کیږي. په یو حد کې د ټولو حرفونو د توانونو مجموعې ته د همغه حد درجه وایي. د مثال په توګه د$Q(x, y)$ په پولینوم کې د $-2x^2y^4$ درجه نظر x ته 2 نظر y ته 4 او په عمومي توګه ددې حد درجه 6 دی.

د پولینوم درجه

په یو پولینوم کی د هغه حد درجه چې د نورو حدونو تر درجو لوړه وي د پولینوم د درجې په نوم یادیږي په دې ترتیب سره د پولینوم درجه هم نظر یو متحول او یا نظر ټولو متحولینو ته تعریف کیږي.

په پورتنی مثال کې د $P(x)$ پولینوم درجه 5 د $Q(x, y)$ پولینوم درجه نظر x ته 3، نظر y ته 4 او نظر دواړه متحولینو x او y ته (په عمومی توګه) 6 ده. په داسې حال کې چې د $R(x)$ درجه 3 ده. د صفر عدد ته صفري پولینوم، ثابت عدد ته د صفر درجې پولینوم، او له درجه پولینوم ته خطی پولینوم وايې. او که د پولینوم، درجه 2 وي نو دوهمه درجه پولینوم او همدا رنګه دریمه درجه پولینوم بلل کیږي.

دوه متحوله پولینوم

دوه متحوله پولینوم هغه پولینوم دی چې په هغې کې $ax^m y^n$ ډوله حدونه موجود وي. دلته m او n تام مثبت عددونه او يا صفر دي، $a \neq 0$. د يو دوه متحوله پولینوم درجه د $m+n$ په قیمتونو کې د لوړ قیمت څخه عبارت دی.

<u>**2 مثال.**</u>

$$(i) \quad P(x, y) = x^3 y^2 - 8x^3 y - 8x + 9$$
$$(ii) \quad Q(x, y) = x - 2xy + y^2$$
$$(iii) \quad R(x, y) = 5x^3 - 3x^2 y - 4xy^2 + 1$$

دلته $P(x, y)$ درجه5 د $Q(x)$ درجه 2 او د $R(x)$ درجه 3 ده.

د يو متحوله پولینوم ترتیب

يو پولینوم کیدلای شي دا ډول مرتب شي چې د حدونه توانونه يې د چپ څخه وښي خواته ډیریږي (صعود کوي) يا کمیږي (نزول کوي). لومړی حالت ته صعودی ترتیب او دومی حالت ته يې نزولي ترتیب وايي په عمومی توګه د

$$P(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

پولینوم په نزولي توګه ترتیب شوی، په داسی حال کې چې د

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4$$

پولینوم به صعودي توګه ترتیب شوی دی.
څو متحوله پولینومونه نظر هر متحول ته بیل بیل ترتیب کیدلی شي.

د پولینومونو تساوی

دوه پولینومونه یو تر بله سره مساوی دي، که چیرې او یوازې که چیرې، لومړی دا چې د دواړو پولینومو درجې سره مساوي وي او دوهم دا چې د مساوی درجو پولینونو ضریبونه دوه په دوه سره مساوي وي.

د یو پولینوم عددی قیمت

که چیرې د $P(x)$ په پولینوم کې د x د متحول پر ځای د a ثابت عدد وضع شي. نو د $P(a)$ ثابت عدد په a کې د $P(x)$ پولینوم عددي قیمت دی.

<u>3 مثال</u>. د $P(x)=x^2-6x+8$ پولینوم عددي قیمتونه د 0، 2، 4 او 10 په عددونو کې عبارت دي له

$$P(0)=0^2-6\times 0+8=8$$
$$P(2)=2^2-6\times 2+8=0$$
$$P(4)=4^2-6\times 4+8=0$$
$$P(10)=10^2-6\times 10+8=48$$

د پولینومونو جمع

د پولینومونو په جمع کولو کې، هم جنس (مشابه) پولینومونه یو تر بله سره جمع کیږي. او دڅو پولینومونو د جمع حاصل د یو نوي پولینوم څخه عبارت دی. په یو پولینومونو کې د جمع عملیې د اتحادي او توزیعي قوانینو په نظر کې نیولو سره په افقي یا عمودي توګه سرته رسیږي.

***4* مثال.** د $P(x)=5x^2+x-8$ او $Q(x)=3x+2$ پولینومونو د جمع حاصل په لاس راوړئ؟

حل. افقي روش:

$$P(x)+Q(x)=\left(5x^2+x-8\right)+\left(3x+2\right)=5x^2+\left(x+3x\right)+\left(-8+2\right)$$

$$\Rightarrow P(x)+Q(x)=5x^2+4x-6$$

عمودی روش

$$\begin{array}{l} P(x)=5x^2+x-8 \\ \underline{Q(x)=\qquad 3x+2} \\ P+Q=5x^2+x-8 \end{array}$$

***5* مثال.** د $3x^3+5x^2-4x$ ، x^3+3x^2+8 او $-x^2-x-2$ پولینومونه سره جمع کړئ؟

حل:

$$\begin{array}{r} 3x^3+5x^2-4x \quad \\ x^3+3x^2 \qquad +8 \\ \underline{-\ x^2-\ x-2} \\ 3x^3+7x^2-6x+6 \end{array}$$

د پولینومونو تفریق

د $P(x)$ څخه د $Q(x)$ د تفریق کولو لپاره د $P(x)+[-Q(x)]$ مجموعه حسابیږي. یعنې په اوله مرحله کې د مفروق منه د پولینوم علامه بدلوو او بیا هغه د مفروق سره په الجبري توګه جمع کوو.

***6* مثال.** د $2x^3-4x^2+8-x$ د $5x^4+x-3x^2-9$ پولینوم څخه تفریق کړئ؟

حل:

$$\begin{array}{r} 5x^4+0x^3-3x^2+x-9 \\ \pm 2x^3 \mp 4x^2 \mp x \pm 8 \\ \hline 5x^4-2x^2+x^2+2x-17 \end{array}$$

7 مثال. د $A=2x+3y-4z$ ، $B=3x-2y+5z$ او $C=3y-5x-z$ په نظر کې ونیسئ د $3A-2B+C$ افاده حساب کړئ؟

حل:

$$3A-2B+C=3(2x+3y-4z)-2(3x-2y+5z)+(3y-5x-z)$$
$$=6x+9y-12z-6x+4y-10z+3y-5x-z$$
$$=6x-6x-5x+9y+4y+3y-12z-10z-z$$
$$\Rightarrow 3A-2B+C=-5x+16y-23z$$

8 مثال. $4x^3-x^2+2x-7$ پولینوم د $3x^3+8x^2+x$ او $2x^3-3x^2-6$ پولینومونو د مجموعه څخه تفریق کړئ؟

حل:

$$\begin{array}{r} 3x^3+8x^2+x \\ \underline{2x^3-3x^2+0x-6} \\ 5x^3+5x^2+x-6 \\ \underline{\pm 4x^3 \mp x^2 \pm 2x \mp 7} \\ x^3+6x^2-x+1 \end{array}$$

د پولینومونو ضرب

د پولینومونو په ضرب کې د توانونو ساده قاعدې اساس نیسي. بنا پر دې د توانونو د څو قاعدو یادونه کوو.

$$x^n=\underbrace{xxx\ \dots\ x}_{n\ \text{دفعه}}$$

دا (x په توان دې n ویل کیږي) دلته x ته قاعده (اساس) او n ته توان وایې.
د طبیعي عددونو m او n او حقیقي عددونو x او y لپاره دا لاندې قاعدې شته دي.

$$1.\quad x^m x^n = x^{m+n} \quad , \quad 2.\quad \left(x^m\right)^n = x^{mn} \quad , \quad 3.\quad (xy)^n = x^n y^n$$

$$4.\quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}\ , m > n \quad , \quad 5.\quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}\ ,\ m, n \in IN$$

دا هر یوه پورتنۍ رابطه په ترتیب سره د مشخصو مثالونو (نمونو) په وسیله په لاندې ډول واضح کیږي.

$$1.\quad x^3 x^5 = (xxx)(xxxxx) = xxxxxxxx = x^8 = x^{3+5}$$
$$2.\quad (x^2)^3 = x^2 x^2 x^2 = (xx)(xx)(xx) = xxxxxx = x^6 = x^{2.3}$$
$$3.\quad (xy)^3 = (xy)(xy)(xy) = (xxx)(yyy) = x^3 y^3$$

دلته د طبیعی عددونو د توانونو د قاعدو د معرفي کولو څخه هدف یوازې د پولینومونو د ضرب او تقسیم اسانتیاوې دي. د لوګارتم په بحث کې به دا موضوع لږ په پراخه توګه تر بحث لاندی نیول کیږي.
د دوو پولینومونو د الجبری قاعدې $x^m\ x^n = x^{m+n}$ په نظر کې نیولو سره د اول پولینوم هر حد د دوهم پولینوم د حدونو سره ضرب او بیا سره جمع کیږي.

9 مثال. د $P(x) = x^2 - 7x + 4$ او $Q(x) = 5x^3 + x^2 - 2x$ پولینومونه سره جمع کړئ.
حل:

$$P(x)\,Q(x) = \left(x^2 - 7x + 4\right)\left(5x^3 + x^2 - 2x\right)$$

$$= (5x^5 + x^4 - 2x^3) + (-35x^4 - 7x^3 + 14x^2) + (20x^3 + 4x^2 - 8x)$$
$$\Rightarrow P(x)Q(x) = 5x^5 - 34x^4 + 11x^3 + 18x^2 - 8x$$

په دوهمه طريقه

$$\begin{array}{r} 5x^3 + x^2 - 2x \\ \underline{x^2 - 7x + 4} \\ 5x^5 + x^4 - 2x^3 \qquad\qquad \\ -35x^4 - 7x^3 + 14x^2 \qquad \\ \underline{20x^3 + 4x^2 - 8x} \\ 5x^5 - 34x^4 + 11x^3 + 18x^2 - 8x \end{array}$$
$$\Rightarrow P(x)Q(x) = 5x^5 - 34x^4 + 11x^3 + 18x^2 - 8x$$

***10* مثال**. د $P(x) = 2x - 1$ او $Q(x) = 7x^2 - 10x + 4$ پولینومونو د ضرب حاصل په لاندې ډول په لاس راځي.

$$P(x)Q(x) = (2x - 1)(7x^2 - 10x + 4)$$
$$= (14x^3 - 20x^2 + 8x) + (-7x^2 + 10x - 4)$$
$$= 14x^3 - 27x^2 + 18x - 4$$

د پولینومونو د ضرب خاصیتونه

د $P(x)$ ، $Q(x)$ و $R(x)$ پولینومونو لپاره لرو چې

1. $P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$
2. $[P(x)Q(x)]R(x) = P(x)[Q(x)R(x)]$
3. $P(x)[Q(x) + R(x)] = P(x)Q(x) + P(x)Q(x)$
3. $P(x).1 = P(x)$

د پولینومونو تقسیم

د $P(x)$ پولینوم تقسیم د $D(x)$ پر پولینوم باندې، لکه د p حقیقی عدد تقسیم د d پر حقیقي عدد، په شان دی. که چېرې خارجقسمت په $Q(x)$ او باقیمانده په $R(x)$ سره فرض کړو نو د مقسوم $P(x)$، مقسوم علیه $D(x)$، خارجقسمت $Q(x)$ او باقیمانده $R(x)$ تر منځ رابطه د حقیقی عددونو په شان په لاندې ډول موجود ده.

$$P(x) = Q(x).D(x) + R(x)$$

یا

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

<u>11 مثال</u>. د $P(x) = 2x^4 + 3x^2 - x^2 - 1$ پولینوم پر $D(x) = x - 2$ تقسیم کړئ؟

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^3 \quad + \quad 7x^2 \quad + \quad 13x \quad + \quad 26 \\
\hline
x-2 & 2x^4 + 3x^3 - x^2 \qquad\qquad -1 \\
 & \underline{\pm 2x^4 \mp 4x^3 \qquad\qquad\qquad} \\
 & \qquad 7x^3 - \quad x^2 \qquad -1 \\
 & \qquad \underline{\pm 7x^3 \mp 14x^2 \qquad\quad} \\
 & \qquad\qquad 13x^2 \qquad -1 \\
 & \qquad\qquad \pm \underline{13x^2 \mp 26x \quad} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 26x - 1 \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad \underline{\pm 26x \mp 52} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 51
\end{array}
$$

بناپر دې

$$2x^4+3x^3-x^2-1=\left(2x^3+7x^2+13x+26\right)\left(x-2\right)+51$$

اویا

$$\frac{2x^4+3x^3-x^2-1}{x-2}=2x^3+7x^2+13x+26+\frac{51}{x-2}$$

<u>**12 مثال**</u>. د $P(x)=x^3-8$ پر $D(x)=x-2$ باندې تقسیم کړئ

$$\begin{array}{r|l} x-2 & \overline{x^3 \qquad\qquad -8} \quad (x^2+2x+4) \\ & \underline{\pm x^3 \mp 2x^2} \\ & 2x^2 \qquad -8 \\ & \underline{\pm 2x^2 \mp 4x} \\ & 4x-8 \\ & \pm\underline{4x \mp 8} \\ & \times \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-8=\left(x^2+2x+4\right)\left(x-2\right)\Leftrightarrow\frac{x^3-8}{x-2}=x^2+2x+4$$

<u>**د باقیمانده قضیه**</u>

که چېرې د $P(x)$ پولینوم د $x-a$ پر افاده تقسیم شي د تقسیم باقیمانده د $P(a)$ څخه عبارت دی.

<u>**ثبوت**</u>: **فرض کوو د $P(x)$ خارجقسمت د $x-a$ پر افاده باندې د $Q(x)$ پولینوم څخه عبارت وي او باقیمانده یې R وي نو**

$$P(x) = (x-a)\,Q(x) + R$$

په اخره رابطه کې $x = a$ ایږد ونو په لاس راځي چې

$$P(a) = (a-a)\,Q(x) + R \Rightarrow P(a) = 0.Q(x) + R \Rightarrow P(a) = R$$

<u>13 مثال</u>. که چېرې $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 7$ پر $x - 3$ تقسیم کړو باقیمانده عبارت دی له $P(3) = 3^2 - 3.3^2 + 2.3 + 7 = 13$

<u>14 مثال</u>. که چېرې $P(y) = y^3 - 125$ پر $y - 5$ تقسیم شي. باقیمانده عبارت دی له $P(5) = 5^3 - 125 = 0$

<u>عامله قضیه</u> که چېرې د $P(x)$ پولینوم په $x = a$ کې صفر شي $(P(a) = 0)$ نو $P(x)$ په x-a باندې پوره د تقسیم وړ دئ. (د $x - a$ افاده د $P(x)$ یو ضربي عامل دی)

$$P(x) = (x-a)\,Q(x) + P(a),\; P(a) = 0 \Rightarrow P(x) = (x-a)\,Q(x)$$

<u>15 مثال</u>. وښیی چې د $P(x) = x^2 - 5x + 6$ پولینوم د $x - 2$ او $x - 3$ په افادوباندی د تقسیم وړ دئ؟

حل.

$$P(2) = 2^2 - 5.2 + 6 = 0\,,\; P(3) = 3^2 - 5.3 + 6 = 0$$

بنا پر دې

$P(x) = x^2 - 5x + 6$ پر $x - 2$ او $x - 3$ د تقسیم وړ دی.

x

ترکيبي تقسيم (د هورنر[1] روش)

د $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$ پولينوم تقسيم په $x-a$ باندې د هغې د ضريبونو په مرسته ساده کيدلی شي. داسې چې د پولينوم ضريبونه، a ته مخامخ په يوه کرښه کې د لاندی جدول سره سم فهرست کوو. او بيا د ضريبونه د ضرب څخه د a سره د خارجقسمت پولينوم ضريبونه په لاس راوړو.

$$\begin{array}{ccccccc|l} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & \underline{a} \\ & a a_n & a\alpha_{n-1} & \dots & a\alpha_3 & a\alpha_2 & a\alpha_1 & \\ \hline a_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 = R = P(a) & \end{array}$$

په داسې حال کې چې

$$\alpha_0 = a_0 + a\alpha_1 \,,\, \alpha_1 = a_1 + a\alpha_2 \,,\, \dots \,,\, \alpha_{n-1} = a_{n-1} + a a_n$$

او $\alpha_n = a_n$، α_{n-1}، α_{n-2}، .....، او α_1 د خارجقسمت پولينوم ضريبونه دي، داسې چې د هغی درجه د $P(x)$ ددرجې څخه يو واحد کمه ده او α_0 باقيمانده عدد دی.

***16* مثال**. د $P(x)=2x^3+x^2-6x+9$ پولينوم پر $x-3$ باندې تقسيم کړئ، خارجقسمت او باقيمانده يې معلوم کړئ؟

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & 1 & -6 & 9 & \underline{3} \\ & 6 & 21 & 45 & \\ \hline 2 & 7 & 15 & 54 = P(3) & \end{array}$$

خارجقسمت : $Q(x) = 2x^2 + 7x + 15$

باقيمانده: $R = 54 = p(3)$

---

[1] Horner

17 مثال. د $p(x)=x^4-81$ پولینوم پر $x-3$ باندې تقسیم کړئ؟

حل. پورتنی پولینوم عبارت دی له $p(x)=x^4+0x^2+0x-81$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & 0 & 0 & -81 & \underline{3} \\ & 3 & 9 & 27 & 81 & \\ \hline 1 & 3 & 9 & 27 & 0 & =P(3) \end{array}$$

خارج قسمت $q(x)=x^3+3x^2+9x+27$ اوباقیمانده صفردی .

18 مثال. د $P(x)=2x^4+5x^3+4x+7$ پولینوم پر $x+3$ تقسیم کړئ؟

$$\begin{array}{rrrrrl} 2 & 5 & 0 & 4 & 7 & (\underline{-3} \\ & -6 & 3 & -9 & 15 & \\ \hline 2 & -1 & 3 & -5 & 22 & \end{array}$$

خارج قسمت $Q(x)=x^3-x^2+3x-5$

باقیمانده $R=22=P(-3)$

الجبري مطابقتونه

د ځینو مشخصو افاده د ضربي رابطو کارول په زیاتو عملیو، له هغې جملې څخه د الجبري افادو په تجزیه کې ګټور دي، الجبري مطابقتونه چې یوازې د ضرب په مرسته ثبوت کیږي لاندې طرحه کیږي

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3. $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

4. $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

5. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+abc$

6. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

7. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

8. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3+3ab(a-b)$

9. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

10. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

11. $(a+b)(a^2-a^2b+ab^2-b^3)=a^4+b^4$

12. $(a-b)(a^2+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$

13. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

14. $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

15. $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

16. $(x+a)(x+c)=x^2+(a+b)x+bd$

17. $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

18. $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$

19. $(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$

مثالونه

19 مثال. $(1005)^2$ او $(195)^2$ عددونه حساب کړئ؟

حل:

$$(1005)^2=(1000+5)^2=(1000)^2+2(1000)(5)+5^2$$
$$=1000\,000+10\,000+25=1\,010\,025$$
$$(195)^2=(200-5)^2=(200)^2-2(200)(5)+5^2$$
$$=40\,000-2\,000+25=38\,025$$

20 مثال. که چېرې $a+b=7$ او $ab=12$ وي نو د a^2+b^2 افاده حساب کړئ؟

حل:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$\Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=7^2-2\times 12=25$$

21 مثال. که چېرې $a+b=7$ او $a-b=1$ وي نو د a^2+b^2 ، $4ab$ او $8ab(a^2+b^2)$ افادې حساب کړئ.

حل:

$$2(a^2+b^2)=(a^2+b^2)+(a^2-b^2)=7^2+1^2=50$$
$$4ab=(a^2+b^2)-(a^2-b^2)=7^2-1^2=48$$
$$8ab(a^2+b^2)=(4ab)2(a^2+b^2)=(48)(50)=2400$$

22 مثال. د $(2a-3b+4c)^2$ افادې ته انکشاف ورکړئ؟

حل:

$$(2a-3b+4c)^2=[(2a)+(-3b)+(4c)]^2$$
$$=(2a)^2+(-3b)^2+(4c)^2+2(2a)(-3b)+2(2a)(4c)+2(-3b)(4c)$$
$$=4a^2+9b^2+16c^2-12ab+16ac-24bc$$

<u>مثال 23</u>. د $(5x+3y)^3$ او $(4x-3)^3$ افادی محا سبه کړی؟

حل:

$$(5x+3y)^3=(5x)^3+3(5x)^2(3y)+3(5x)(3y)^2+(3y)^2$$
$$=125x^3+225x^2y+135xy^2+27y^3$$
$$(4x-3)^3=(4x)^3-3(4x)^2(3)+3(4x)(3)^2-(3)^2$$
$$=64x^3-144x^2+108x-27$$

<u>مثال 24</u>. د $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$ افاده ساده کړئ؟

حل:

$$(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)=(3a+2b)\left[(3a)^2-(3a)(2b)+(2b)^2\right]$$
$$=(3a)^3+(2b)^3=27a^3+8b^3$$

<u>مثال 25</u>. د $(x+5)(x-5)(x^2-5x+25)(x^2+5x+25)$ افاده ساده کړئ؟

حل:

$$(x+5)(x-5)(x^2-5x+25)(x^2+5x+25)=$$
$$=(x+5)(x^2-5x+25)(x-5)(x^2+5x+25)$$
$$=(x^3+125)(x^3-125)=(x^3)^2-(125)^3=x^6-15625$$

د الجبری افادو تجزیه (Factoring)

ضربی عوامل:

که چېرې یوه الجبري افاده P پر D باندې د تقسیم وړ وي، نو p ته د D مضرب $Multiple$ او D ته د p ضربي عامل $(factor)$ یا قاسم $(Divisor)$ وايي. بنا پر دې

$$\frac{P}{Q} = M \Leftrightarrow P = MD \Leftrightarrow D = \frac{P}{M}$$

یعنې M هم د P یو قاسم دی.

د یوې الجبري افادې ارائه کول د هغې د قاسمونو د ضرب د حاصل په توګه د نومورې افادې تجزیه بلل کیږي. مثلاً

$$6x^2 - 5xy + 6y^2 = (2x - 3y)(3x - 2y)$$

دلته $2x - 3y$ او $3x - 2y$ د $6x^2 - 5xy + 6y^2$ افادی قاسمونه دی. او بالعکس وروستنی افاده د دوونورو افادو $2x$-$3y$ او $3x$-$2y$.

مضرب دئ.

د الجبري افادو په تجزیه کولو کې د عمومي مطابقتونو څخه ګټه اخیستل کیږي.

اول. د هغو افادو تجزیه چې مشترک عامل لری. په سر کې د $ab + ac = a(b + c)$ مطابقت د افادو په تجزیه کولو کې کاروو.

<u>26 مثال.</u>

$$(i) \quad 6x^2 - 2x^3 = 2x^2(y - 2x)$$

$$(ii) \quad 6a^2bx + 6a^2by = 6a^2b(x + y)$$

<u>دوهم</u>. د مربعاتو د تفاضل تجزیه. د $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ مطابقت د دا ډول تجزیو اساس دئ. او زیات استعمال لري.

27 مثال.

$$(i)\quad x^2-25=x^2-5^2=(x-5)(x+5)$$
$$(ii)\quad 4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2=(2x-3y)(2x+3y)$$

دریـــم. د کـــاملې مربـــع د افـــادې تجزیـــه. د دا ډول افـــادو تجزیـــه د $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ شکل لري.

28 مثال.

$$(i)\quad x^2+6x+9=(x+3)^2$$
$$(ii)\quad 9x^2-12xy+4y^2=(3x+2y)^2$$

څلورم. د ځینو دوهمه درجه افادو تجزیه . د ax^2+bx+c افادې د تجزئې لپاره کوشش کیږي چې د b ضریب ددو عددونو د مجموعې په توګه ارائه شي، داسې چې د هغوی د ضرب حاصل د ac سره مساوی شي. دا روش په ځینو ځانګړو حالاتو کې امکان لري.
د دې برسیره د لاندې مطابقتونو څخه هم ګټه اخیستلی شو.

$$(x+a)(x+c)=x^2+(a+b)x+bd$$
$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

29 مثال.

$$(i)\quad 3x^2+14x+8=3x^2+(12+2)x+8$$
$$=3x(x+4)+2(x+4)=(3x+2)(x+4)$$

$$=12x^2+5x-2=12x^2+(8-3)x-2$$
$$=12x^2+8x-3x-2=4x(3x+2)-(3x+2)$$
$$=(4x-1)(3x+2)$$

پنځم. د ګروپ بندی په روش تجزیه. ځینې افادې کیدلی شي د لاندې مطابقتونو په استفاده تجزیه شي

$$ac+bc+ad+bd=(a+b)c+(a+b)d=(a+b)(c+d)$$

30 مثال.

$$2ax-4bx+ay-2by=(a-2b)2x+(a-2b)y=(a-2b)(2x+y)$$

شپږم. د $a^n \pm b^n$ ډوله افادو تجزیه. دا افادې څو حالته لري.

31 مثال.

$$(i)\quad x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^3-3x+9)$$
$$(ii)\quad 8x^3y^3-1=(2xy)^3-1=(2xy-1)(4x^2y^2+2xy+1)$$
$$(iv)\quad x^4-81y^4=(x^2)^2-9^2=(x^2-9)(x^2+9)=(x-3)(x+3)(x^2+9)$$

اوم. د مناسبو حدونو د جمع کولو او تفریق کولو روش. په دې طریقه کې د مربع د تکمیل لپاره مناسب حدودونه د اصلي افادې سره جمع او تفریق کیږي.

32 مثال.

$$(i)\quad x^4+4=(x^2)^2+2^2=(x^2)^2+4x^2+2^2-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)=(x^2-2x+2)(x^2+2x-2)$$

$$(ii)\quad 4a^4+8a^2b^2+9b^4=\left(2a^2\right)^2+2\left(2a^2\right)\left(3b^2\right)+\left(3b^2\right)^2-4a^2b^2$$
$$=\left(2a^2+3b^2\right)^2-\left(2ab\right)^2=\left(2a^2+3b^2-2ab\right)\left(2a^2+3b^2+2ab\right)$$

اتم. د عاملې قضيې په کارولو سره تجزيه. که چېرې ديو پولينوم $P(x)$ قيمت په $x=a$ کې صفر وي $P(a)=0$، په دې صورت کې $x-a$ د $P(x)$ يو ضربی عامل دی. نو د $P(x)$ تقسيم پر $x-a$ باندې دوهم عامل د خارجقسمت په توگه په لاس راځي.

33 مثال.

$$P(x)=x^3+3x^2+4x-28\Rightarrow P(2)=2^3+3(2)^2+4(2)-28=0$$

نو $x-2$ د $P(x)$ يو ضربی عامل دی په دې ترتيب د هغی دوم عامل عبارت دی له

$$P(x)\div(x-2)=\frac{x^3+3x^2+4x-28}{x-2}=x^2+5x+14$$
$$\Rightarrow x^3+3x^2+4x-28=\left(x^2+5x+14\right)(x-2)$$

د پولينومونو تر ټولو لوی مشترک قاسم

Highest Common Factor (HCF)

د دوو يا څو پولينومونو تر ټولو لوی مشترک قاسم، د هغې مشترک ضربي عامل څخه عبارت دی چې تر ټولو لوړ توان ولري او ضريب يې تر ټولو لوی عددی قيمت ولري.

هغه پولينومونه چې تر ټولو لوی مشترک قاسم يې ± 1 وي. يو تر بله اوليه ويل کيږي.

ددوو يا څو پولينومونو د تر ټولو لوی مشترک قاسم د پيدا کولو لپاره هغه هر يو تجزيه کوو، د دوی د مشترکو هغه عاملونو، چې تر ټولو توان او تر ټولو لوی عددی قيمت ولري، د ضرب کولو څخه غوښتل شوی قاسم په لاس راځي.

34 مثال. د $9x^4y^2$ او $12x^3y^3$ افادو تر ټولو لوی مشترک قاسم پیدا کړئ؟

حل: دا راکړل شوي افادې تجزیه کوو

$$9x^4y^2 = 3^2x^4y^2 \quad , \quad 12x^3y^3 = 2^2 \cdot 3x^3y^3 \quad \Rightarrow \quad H.C.F. = 3x^3y^2$$

د پولینومونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب

$Lowest\ \ Common\ \ Multiple\,(L.C.M.)$

د دوو یا څو پولینومونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب هغه پولینوم دی. چې پر نوموړوهر یو پولینوم باندې د تقسیم وړ وي. او تر ټولو ممکنه درجه ولري. ددوو یا څو پولینومونو د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره دا هر یو پولینوم تجزیه کوو. ددې مشترکو مضربونو څخه هغه چې، تر ټولو ټیټ توان او په ضریب کې تر ټولو کوچنی عددي قیمت ولري، سره ضربوو او مطلوب مضرب په لاس راکوي.

35 مثال. د $9x^4y^2$ او $12x^3y^3$ تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

حل. راکړل شوی افادی تجزیه کوو

$$9x^4y^2 = 3^2x^4y^2\ , 12x^3y^3 = 2^2 \cdot 3x^3y^3 \Rightarrow L.C.M. = 2^2 \cdot 3^2x^4y^3 = 36x^4y^3$$

36 مثال. تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د $48r^3t^4$ او $54r^2t^6$ او $60r^4t^2$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned} 48r^3t^4 &= 2^4 \cdot 3r^3t^4 \\ 54r^2t^6 &= 2 \cdot 3^3r^2t^6 \\ 60r^4t^2 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5r^4t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &H.C.F. = 2 \cdot 3r^2t^2 = 6r^2t^2 \\ &L.C.M. = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5r^4t^6 = 2160r^4t^6 \end{aligned}$$

37 مثال. تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د y^4-16 ، y^2-4 او y^2-3y+2 لپاره پیدا کړئ؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l} y^4-16=(y^2+4)(y+2)(y-2) \\ y^2-4=(y+2)(y-2) \\ y^2-3y+2=(y-1)(y-2) \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} H.C.F.=y-2 \\ L.C.M.=(y^2+4)(y+2)(y-1)(y-2) \end{array}$$

38 مثال. د لاندې افادو لپاره تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ

$$3\cdot5^2(x+3y)^2(2x-y)^4 \text{ و } 2^2\cdot3\cdot5^2(x+3y)^4(2x-y)^5$$

$$2^3\cdot3^2\cdot5(x+3y)^3(2x-y)^2$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot5^2(x+3y)^2(2x-y)^4 \\ 2^3\cdot3^2\cdot5(x+3y)^3(2x-y)^2 \\ 2^2\cdot3\cdot5^2(x+3y)^4(2x-y)^5 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} H.C.F.=3\cdot5(x+3y)^2(2x-y)^2 \\ L.C.M.=2^3\cdot3^2\cdot5^2(x+3y)^4(2x-y)^4 \end{array}$$

د دوو افادو تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر تولو کوچنی مشترک مضرب تر منځ رابطه

که چېرې H د A او B تر ټولو لوی مشترک قاسم او L د هغوی تر ټولو کوچنی مشترک مضرب وي

$$\frac{A}{H}=X\Rightarrow A=HX \quad , \quad \frac{B}{H}=Y\Rightarrow B=HY$$

د تعریف له مخې د X او Y فکتورونه مشترک عامل نه لري. نو

$$L=HXY \Rightarrow HL=(HX)(HY)=AB$$

$$\Rightarrow HL = AB \vee (H.C.L.)\times(L.C.M.) = AB$$

بناپر دی **ددوو افادو د ضرب حاصل مساوی دی د تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د ضرب د حاصل سره.** په دی ترتیب ددوو افادو تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د پورتنی رابطې له مخې ددوی د ضرب له حاصل څخه په لاس راوړي. يعنې

$$\boxed{(H.C.L.)\times(L.C.M.) = A\times B \Leftrightarrow H.C.L. = \frac{A\times B}{L.C.M.} \Leftrightarrow L.C.M. = \frac{A\times B}{H.C.L.}}$$

***39* مثال.** د $A = 12x^3y^3$ او $B = 9x^4y^2$ لپاره لرو چې

$$A = 12x^3y^3\ ,\ B = 9x^4y^2 \Rightarrow AB = (12x^3y^3)(9x^4y^2) = 108x^7y^5$$

$$L = 36x^4y^3 \Rightarrow H = \frac{AB}{L} = \frac{108x^7y^5}{36x^4y^3} = 3x^3y^2$$

ناطقي افادې

که چېرې $P(x)$ او $Q(x)$ پولینومونه وی او $Q(x)\neq 0$ ، په دې صورت کې

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

د يوې ناطقی افادې يا الجبری کسر څخه عبارت دی، په ځانګړې حالت کې هر یو پولینوم هم یوه ناطقه افاده ده. الجبري کسرونه د عددي کسرونو تعمیم شوی شکل دی.

د الجبری کسرونو د جمع او تفریق عملئې

د الجبري کسرونو د جمع او تفریق عملئې د عددونو د جمع او تفریق د عملیو سره ورته والی لري. يعنی په اولني قدم کې کسرونه سره هم مخرجه کيږي او بیا مربوطه

عمليې ددوی پر صورتونو باندی اجرا کيږي د کسرونو په هم مخرج کولو کې، په طبيعی توګه مشترک مخرج د دوی د مخرجونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب انتخابيږي. وروسته دا مشترک مخرج پر هر مخرج تقسيمږي او په مربوطه صورت کې ضربيږی او بيا سره جمع کيږي چې په نتيجه کې د نوموړي کسر صورت په لاس راکوي.

مثالونه:

$$41.\quad \frac{7x}{8}+\frac{5x}{12}-\frac{2x}{3}=\frac{21x+10x-16x}{24}=\frac{15x}{24}=\frac{5x}{8}$$

$$42\quad 3x-\frac{a^2}{4y}+\frac{x^2y}{4xy^2}=\frac{12x^2y^2-a^2xy+x^2y}{4xy^2}=\frac{xy\left(12xy-a^2+x\right)}{4xy^2}=\frac{12xy-a^2+x}{4y}$$

$$43.\quad \frac{a^2-2a}{a^2-a-2}-\frac{3a}{6a-4}+\frac{5a}{6a^2+2a-4}=\frac{a(a-2)}{(a+1)(a-2)}-\frac{3a}{2(3a-2)}+\frac{5a}{2(3a^2+a-2)}$$

$$=\frac{a}{a+1}-\frac{3a}{3(a-2)}+\frac{5a}{2(3a-2)(a+1)}=\frac{2a(3a-2)-3a(a+1)+5a}{2(3a-2)(a+1)}=\frac{3a^2-2a}{2(3a-2)(a+1)}$$

$$=\frac{a(3a-2)}{2(3a-2)(a+1)}=\frac{a}{2(a+1)}$$

د الجبري کسرونو ضرب او تقسيم

په الجبري کسرونو کې د ضرب او تقسيم دوې عمليې هم، د عددي کسرونو د ضرب او تقسيم په شان دي. يعنې د څو کسرونو په ضرب کې صورتونه په خپل منځ

کې سره ضربیږي او دلازم اختصار څخه وروسته د ضرب د حاصل کسر په لاس راځي. او په تقسیم کې یوازې مقسوم علیه معکوس کیږي او د مقسوم سره ضربیږي.

مثالونه

$$44.\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\qquad , \qquad 45.\quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$46.\quad \frac{24x^3y^2z}{35ab^4c^3}\div\frac{6x^2yz^3}{7a^2b^2c}=\frac{24x^3y^2z}{35ab^4c^3}\cdot\frac{7a^2b^2c}{6x^2yz^3}=\frac{4axy}{5b^2c^2z^2}$$

کسرالکسر(مرکب کسر)

هغه کسرونه چې په هغې کې صورت او مخرج پخپله کسرونه وي، کسرالکسر بلل کیږي.

کسر الکسر په حقیقت کې د تقسیم ضمني حالت دی، داسې چې په هغې کې د تقسیم علامه همغه د کسر خط دی.

<u>47 مثال</u>. ددې کسر مثالونه په لاندې ډول دي؟

$$(i)\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\qquad , \qquad (ii)\quad \frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$$

$$(iii)\quad \frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$$

د $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ کسر د $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ او یا $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ ارایه کیدای شي.

مثالونه

$$48.\quad \frac{\frac{2}{a-b}}{a-b}=\frac{2}{a-b}\cdot\frac{1}{a-b}=\frac{2}{(a-b)^2}$$

$$49.\quad \frac{\frac{x+y}{3x^2}}{\frac{x-y}{x}}=\frac{x+y}{3x^2}\cdot\frac{x}{x-y}=\frac{x+y}{3x(x-y)}$$

$$50.\quad \frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}=\frac{1}{1-\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{\frac{x+1-x}{x+1}}=\frac{1}{\frac{1}{x+1}}=x+1$$

غيرناطقې افادی

لکه څرنګه چې د عددونو په مبحث کې وويل شول، هغه حقيقي عدد چې ددوو تامو عددونو د نسبت په توګه ارئه کيدلی نشي د غير ناطق عدد څخه عبارت دی. په همدې ډول هغه الجبری افاده چې ددوو پولينومونو د نسبت په توګه ارائه کيدلی نشي، د غير ناطقې افادې په نامه يادېږي. د نمونې په توګه دا ډول افادې په لاندې ډول دي.

51 مثال.

$$(i)\ \sqrt{xy+z^3-y^2}\quad,\quad(ii)\ \sqrt[3]{a+b-2c}\quad,\quad(iii)\ \frac{x^2-4x+6}{\sqrt{2x^3+x-8}}$$

$$(iv)\ \frac{\sqrt{8x-7}+x^2}{x^6-7x^3+45}\quad,\quad(v)\ \frac{x+\sqrt{y}-x}{x-\sqrt{y}+z}\quad,\quad(vi)\ \frac{a+b}{\sqrt[4]{a+b-2c}}$$

کیدلی شي د عددونو او الجبري افادو جذرونه ناطقې افادې یا غیر ناطقې افادې وي. لکه څرنګه چې $\sqrt{7}$، $\sqrt{a^2+b^2}$، $\sqrt[3]{x+y-z}$ غیر ناطقې افادې دي، په داسې حال کې $\sqrt[3]{8}$، $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ ناطقې افادی دي. دلته د یوې افادې د جذرڅخه مقصد، یوه دوهمه افاده د ه چې که چېرې د جذر د مرتبې په مطابق توان سره رفع شي نو لومړنی افاده په لاس راکوي. دا مفهوم دې د معادلې د جذر د مرتبې په، مطابق توان سره، رفع شي نو لومړنی افاده په لاس راکوي. دا مفهوم دې د معادلې د جذر سره مغالطه ونشي.

د غیر ناطقو افادو خاصیتونه

1. یوه غیر ناطقه جذر المربع، د یو ناطق عدد او د یوې غیر ناطقې جذر المربع د مجموعې یا تفاضل په توګه نه شي ارائه کیدلی. یعنی

$$\sqrt{a}\neq x\pm\sqrt{y}$$

ثبوت . فرض کوو چې $\sqrt{a}=x\pm\sqrt{y}$، پس

$$\sqrt{a}=x\pm\sqrt{y}\Rightarrow\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(x\pm\sqrt{y}\right)^2\Rightarrow a=x^2+y\pm2x\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow\pm2x\sqrt{y}=a-x^2-y\Rightarrow\pm\sqrt{y}=\frac{a-x^2-y}{2x}$$

په داسې حال کې چې اخرنی نتیجه غیر ممکنه ده.

2. د $a+\sqrt{b}$ او $x+\sqrt{y}$ غیر ناطقو افادو د تساویګانو څخه $a=x$ او $b=y$ په لاس راځي. یعنې

$$x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}\Leftrightarrow x=a\ ,\ y=b$$

ثبوت. فرض کوو چې x، a سره مساوی نه دي، په هغه صورت کې $x = a + m$ او دا نتیجه د (۱) مرحلې له مخې امکان نه لري.

$$x = a + m \Rightarrow a + m + \sqrt{y} = a + \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{b} = m + \sqrt{y}$$

3. که چېرې $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ وي نو $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ دی.

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

ثبوت .

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} a = x + y \,,\, \sqrt{b} = 2\sqrt{xy} \Rightarrow a - \sqrt{b} = x + y - 2\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow a - \sqrt{b} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \quad \bullet$$

4. که چېرې $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ وي، په هغه صورت کې $a = x + y$ او $b = xy$ یعنې

$$\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \Rightarrow a = x + y \,,\, b = xy \quad \bullet$$

ثبوت.

$$a \pm 2\sqrt{b} = \left(\sqrt{x} \pm \sqrt{y}\right)^2 = x + y \pm 2\sqrt{xy} \overset{(2)}{\Rightarrow} a = x + y \,,\, b = xy \quad \bullet$$

52 مثال . د $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}}$ جذرالمربع حساب کړئ؟

حل: که چېرې $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ فرض شي نو باید $12=X+Y$، $xy = 35$، $x = 7$ او $y = 5$ وي یعنې

$$\sqrt{12-2\sqrt{35}}=\sqrt{7+5-2\sqrt{7\cdot5}}=\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{7}-\sqrt{5}\ \bullet$$

<u>53 مثال</u>. د $18-8\sqrt{5}$ دوهم جذر پیدا کړئ؟

حل:

$$18-8\sqrt{5}=18-2\cdot4\sqrt{5}=18-2\sqrt{16\cdot5}=18-2\sqrt{80}$$

$$=10+8-2\sqrt{80}=\left(\sqrt{10}\right)^2-2\sqrt{10\cdot8}+\left(\sqrt{8}\right)^2=\left(\sqrt{10}-\sqrt{8}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{18-8\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{10}-\sqrt{8}\right)^2}=\sqrt{10}-\sqrt{8}\ \bullet$$

<u>54 مثال</u>. د $\sqrt{48}-\sqrt{45}$ دوهم جذر پیدا کړئ؟

حل:

$$\sqrt{48}-\sqrt{45}=\sqrt{3}\left(\sqrt{16}-\sqrt{15}\right)=\sqrt{3}\left(4-\sqrt{15}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{8}{2}-\frac{2\sqrt{15}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{3}\cdot\frac{5+3-2\sqrt{15}}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{5+3-2\sqrt{5\cdot3}}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\sqrt{48}-\sqrt{45}}=\sqrt{\sqrt{3}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{2}}=\sqrt[4]{2}\,\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\bullet$$

د کسرونو د مخرج ناطق کول

د کسرونو د مخرج د ناطق کولو څخه مقصد دا دی چی هغه کسر په لاس راشي کوم چې په مخرج کې جذر ونه لري او د اولنی کسر سره مساوي وي. په دی منظور لاندې حالتونه په نظر کې نیول کیږي.

اول. که چېرې د کسر مخرج د $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ حالت ولري. نو دهغې صورت او مخرج په $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ کې ضربوو.

دوهم. که چېرې د کسر مخرج $a\pm\sqrt{b}$ یا $a\mp\sqrt{b}$ سره ضربوو.

دريم. که چېرې د کسر مخرج د $a \pm \sqrt[3]{b}$ اويا $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ حالت ولري. نو اړونده مطابقتونه

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

کارول کېږي.

مثالونه:

$$55.\quad \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \quad , \quad 56.\quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$57.\quad \frac{4}{\sqrt[3]{5}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{4\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{4\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$58.\quad \frac{5}{x + 2\sqrt{y}} = \frac{5}{x + 2\sqrt{y}} \cdot \frac{x - 2\sqrt{y}}{x - 2\sqrt{y}} = \frac{5(x - 2\sqrt{y})}{x^2 - (2\sqrt{y})^2} = \frac{5x - 10\sqrt{y}}{x^2 - 4y}$$

$$59.\quad \frac{8}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{8(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 8(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$57.\quad \frac{2}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{2\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)}{x - y}$$

$$58\quad \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}} = \frac{1 \cdot (\sqrt[3]{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt[3]{2} - \sqrt{3})(\sqrt[3]{2} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}}{\sqrt[3]{4} - 3} = \frac{(\sqrt[3]{2} + \sqrt{3})(\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{4} + 9)}{(\sqrt[3]{4} - 3)(\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{4} + 9)}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{2} + \sqrt{3})(\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{4} + 9)}{4 - 27} = \frac{(\sqrt[3]{2} + \sqrt{3})(\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{4} + 9)}{-23}$$

تمرينونه

1. د لاندې افادو څخه کومې افادې ته پولینوم ویل کیږي.

$1.\quad y=x^3-x^2+6x^{-2}\quad,\quad 2.\quad z=1-x^8\quad,\quad 3.\quad u=abx^9-x+cx^2$

$4.\quad P=(1+2x)^3\quad,\quad 5.\quad Q=\dfrac{2x-8}{3x+6}\quad,\quad 6.\quad R=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

د لاندې پولینومونو درجه معلومه کړئ.

$7.\quad P=1+x^2+4x^3-x\quad,\quad 8.\quad Q=(1-x^2)^2\quad,\quad 9.\quad R=1386$

لاندې پولینومونه په صعودی، نزولی او کاملو شکلونو ولیکئ.

$10.\quad P=4x^4-3+2x^3-x,\quad 11.\quad Q=ax^2+c+bx,\quad 12.\quad R=x^5+x$

لاندې عملیې تر سره کړئ

$13.\quad 3x^2+(y^2-4z)-(2x-3y+4z)$

$14.\quad 2(4xy+3z)+3(x-2xy)-4(z-2xy)$

$15.\quad 4x^2-[3x^2-2\{y(x-y)\}+5xy-2y^2]$

16. د $x^2+y^2-z^2+2xy-2yz$ ، $y^2+z^2-x^2+2yz-2zx$ ، $z^2+x^2-y^2+2zx-2xy$ او $1-x^2-y^2-z^2$ افادې سره جمع کړئ؟

17. د $a+b+c-d$ افاده له $c-a+d-b$ افادې څخه تفریق کړئ؟

لاندې پولینومونه سره ضرب کړئ؟

$18.\quad (-2ab^3)(4a^2b^5)\quad,\quad 19.\quad (-3x^2y)(4xy^2)(-2x^3y^4)$

$20.\quad (x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x-y)\quad,\quad 21.\quad (1+x)^3$

د تقسیم عملیه په لاندې افادو کې تر سره کړئ؟

$22.\quad \dfrac{24x^2y^3z}{4xyz^2}\quad,\quad 23.\quad \dfrac{-16a^4b^6}{-8ab^2c}\quad,\quad 24.\quad \dfrac{4a^3b^2+16ab-4a^2}{-2a^2b}$

$$25.\quad \frac{2x^4+3x^3-x^2-1}{x-2} \quad , \quad 26.\quad \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x-1}$$

27. که چېرې د $P(x)=7x^{10}-3x^3+1$ پولینوم پر $x+1$ تقسیم شي. نو د هغې باقیمانده د تقسیم د عملیې څخه پرته په لاس راوړئ؟

28. که چېرې $P(x)=x^2-4x+9$ پر $x+c$ تقسیم شي او د هغې باقیمانده $R=14$ وي نو د c عدد به څو وي؟

د ترکیبی تقسیم په استفادې سره د تقسیم دا لاندې عملیې تر سره کړئ؟

29. $(x^4-5x^3+6x^2+4x-8)\div(x-2)$

30. $(6x^3-7x^2+1)\div(x-\frac{1}{3})$

31. $(x^5+32)\div(x-2)$

د الجبري مطابقتونو په استفاده لاندې د ضرب حاصلونه حساب کړئ؟

32. $(ax-by^2)^2$, 33. $\left(\frac{x}{3}+\frac{2y}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{2y}{5}\right)$, 34. $(x^2-4x+2)^2$

35. $(2x+y)^3$, 36. $(a^2-3b^2)^3$, 37. $(x+y-z)(x-y+z)$

د الجبری مطابقتونه په مرسته لاندې افادی تجزیه کړئ؟

39. $9x^2+24xy+16y^2$, 40. $-xy-2yz+2xy^2$

41. $2x(a+b)-3y(a+b)$, 42. $x^4-9y^2z^6$

43. $3x^5-48xy^4$, 44. $4x^2+4x+1$, 45. $a^2-8a+12$

46. $x^2+10x+16$, 47. x^3+1 , 48. $8x^3-1$, 49. $x^3y^3+z^3$

50. ax^2-x^2-5a+5 , 51. $15-x-2x^2$

52. $9x^2-145xy+16y^2$, 53. $12x^2+32x+21$

لاندې عملیې تر سره کړئ؟

$$54.\quad \frac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab} \quad , \quad 55.\quad \frac{2x^2}{x^2-y^2}+\frac{2x^2}{x^2+xy}$$

$$56.\quad \frac{x}{x+y}+\frac{x}{x-y}-\frac{2xy}{x^2-y^2} \quad , \quad 57.\quad \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)\div\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$58.\quad \left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right) \quad , \quad 59.\quad \frac{x^2-y^2}{x}:\frac{x+y}{x-y}$$

دا لاندې کسرونو مخرجونه ناطق کړئ؟

$$60.\quad \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad , \quad 61.\quad \frac{x+y}{\sqrt{x-y}} \quad , \quad 62\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{y}} \quad , \quad 63.\quad 2x(x+y)^{-\frac{1}{8}}$$

$$64.\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} \quad , \quad 65.\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}} \quad , \quad 66.\quad 4(a-b)^{-\frac{3}{2}}$$

مختلط عددونه

که هر څو تصور کیږي چې شاید حقیقی عددونه به د حسابونو اړتیاوې رفع کړای شي مګر د مختلطو عددونو سېت په حقیقت کې د حقیقي عددونو د ست تعمیم او (توسعه) دی.

نو د هغې سره سره چې په لومړي سرکې مبهم تصور کیږي خو د ریاضی او فزیک د مسایلو په شرح کولو، واضح کولو او ثبوت کولو کې زیات او څرګند

رول او ډېر اهميت لري. دلته د مختلطو عددونو د نظرئې لومړني مفاهيم په فشرده ډول طرح کيږي.

موهومي عددونه:

د ai ډوله عدد چې په هغې کې a يو حقيقی عدد او $i^2 = -1$ وي . په موهومی عدد سره نومول کيږي. د موهومي عدونو سېټ د تعريف سره سم په لاندې ډول واضح کيږي.

$$I = \{x : x = ai \,,\, a \in \mathbb{R} \,.\, i^2 = -1\}$$

د i عدد موهومي واحد نوميږي.

د مختلطو عددونو پيژندنه

د $z = x + yi$ عدد کوم چې x او y حقيقی عددونه او $i^2 = -1$ فرض شوی وي د مختلط عدد په نوم يادېږي. په دې ترتيب سره مختلط عددونه د موهومي او حقيقي عددونو د يوځای کولو څخه په لاس راځي، او د مختلطو عددونو سېټ عبارت دی له

$$\mathbb{C} = \{z : z = x + yi \,,\, x, y \in \mathbb{R} \,,\, i^2 = -1\}$$

x عدد ته حقيقي قسمت او y ته $z = x + yi$ موهومي قسمت وائي او ليکي چې

$$x := Re(z) \quad , \quad y := Im(z)$$

څرګنده ده چې د حقيقي عددونو او موهومي عددونو سېټونه د مختلطو عددونو د سېټ فرعي سيټونه دی. يعنې

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x + 0i \in \mathbb{C}$$

$$\forall yi \in I \Rightarrow yi = 0 + yi \in \mathbb{C}$$
$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad , \quad I \subset \mathbb{C}$$

د مختلطو عددونو تساوي.

دوه مختلط عددونه $z_1 = x_1 + y_1 i$ **او** $z_2 = x_2 + y_2 i$ **یو تر بله سره مساوي دي. کله که د هغوی حقیقي قسمتونه سره مساوي او موهومي قسمتونه يې سره مساوي وي.**

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ , \ y_1 = y_2$$

د مختلطو عددونو جمع او تفریق

د $z_1 = x_1 + y_1 i$ **او** $z_2 = x_2 + y_2 i$ **عددونو جمع او تفریق عبارت دي له**

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) i$$

***1* مثال. د** $z_1 = 4 + 5i$ **و** $z_2 = 2 + 3i$ **لپاره لرو چې**

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$$
$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 + 5i) = -2 - 2i$$

د مختلطو عددونو ضرب.

د $z_1 = x_1 + y_1 i$ **او** $z_2 = x_2 + y_2 i$ **عددونو ضرب د** $i^2 = -1$ **او الجبري قاعدو په نظر کې نیولو سره عبارت دی له**

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2$$
$$\Rightarrow z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$$

د مختلطو عددونو د ضرب په عمليه کې تبادلوي او اتحادي خاصيتونه صدق کوي چې ثبوت يې ګران نه دی.

د i عدد توانونه

$$i^0 = 1 \quad , \quad i^1 = i \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad i^3 = -i$$
$$i^4 = 1 \quad , \quad i^5 = i \quad , \quad i^6 = -1 \quad , \quad i^7 = -i$$
$$i^{4n+1} = i \ , \ i^{4n+2} = -1 \quad , \quad i^{4n+3} = -i \ , \ i^{4n} = 1$$

بنا پر دې د i هر طبيعي توان يوله i ، 1 ، $-i$ ، او -1 عددونو څخه دی.

د مختلط عدد مزدوج

د $z = x + yi$ عدد مزدوج د $\bar{z} = x - yi$. څخه عبارت دی. ليدل کيږي چې

$$z\bar{z} = (x + yi).(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$
$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x = 2\,Re(z)$$
$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi = 2\,Im(z)$$

2 مثال. د $z = 3 + 4i$ عدد مزدوج له $\bar{z} = 3 - 4i$ څخه عبارت دی.

$$z\bar{z} = (3 + 4i)\ (3 - 4i) = 9 + 16 = 25$$
$$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$$
$$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$$

د مختلطو عددونو تقسيم

د $z_1 = x_1 + y_1 i$ پر عدد $z_2 = x_2 + y_2 i$ باندې په لاندې ډول تقسيميږي.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 - x_1 y_2 i + y_1 x_2 i - y_1 y_2 i^2}{x_2^2 - y_2^2 . i^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}\, i$$

3 مثال. د $z_1=2-3i$ عدد پر $z_2=1+i$ عدد تقسیموو.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i).(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i \cdot$$

د یو مختلط عدد مطلقه قیمت.

د $x + yi$ عدد مطلقه قیمت د تعریف سره سم عبارت دی له

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

د مختلطو عددونو د مطلقه قیمت خاصیتونه

که چېرې z_1 او z_2 دوره حقیقي عددونه وي نو د لاندې رابطو صحت (سموالی) ارزیابی کړئ.

$$1.\quad |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| \ ، 2.\quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

$$3.\quad |z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2| \ ، \ 4.\quad |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

$$5.\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad , \quad z_2 \ne 0$$

4 مثال. د $z=3+4i$ عدد مطلقه قیمت پیدا کړی.

$$\sqrt{z} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

د مختلطو عددونو الجبري خاصيتونه

د ترلتوب خاصيت 1. $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1 + z_2 \in \mathbb{C}, z_1 z_2 \in \mathbb{C}$

تبديلي 2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1,\ z_1 z_2 = z_2 z_1$

اتحادي 3. $z_1 + (z_3 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3,\ z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

توزيعي 4. $z_1(z_3 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

عينيت 5. $z + 0 = 0 + z = z, 1.z = z.1$

معکوس عناصر 6. $z + (-z) = 0\ ,\quad z.z^{-1} = 1,\ z \neq 0$

د مختلطو عددونو ګرافيکي ښودنه (ارائه)

يو مختلط عدد $z = x + yi$ کيدلی شي په مستوي کې د قايمو مختصاتو په نظر کې نيولو سره د يوې نقطې په توګه په نظر کې ونيول شي. په داسې ډول چې په هغې کې حقيقي محور افقي او موهومي محور عمودې نومول کيږي. په دې توګه د هر مختلط عدد لپاره د مستوي پر مخ يو نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره يو $z = x + yi$ مختلط عدد تقابل کوي.

د حقيقي عددونو سېت د x پر محور او د موهومي عددونو سېت د y پر محور موقيعت اخلی.

اوس کولی شو د $z = x + yi$ عدد د یوې نقطې $P(x, y)$ په توګه په قطبي مختصاتو کې په نظر کې ونیسو. (شکل1).

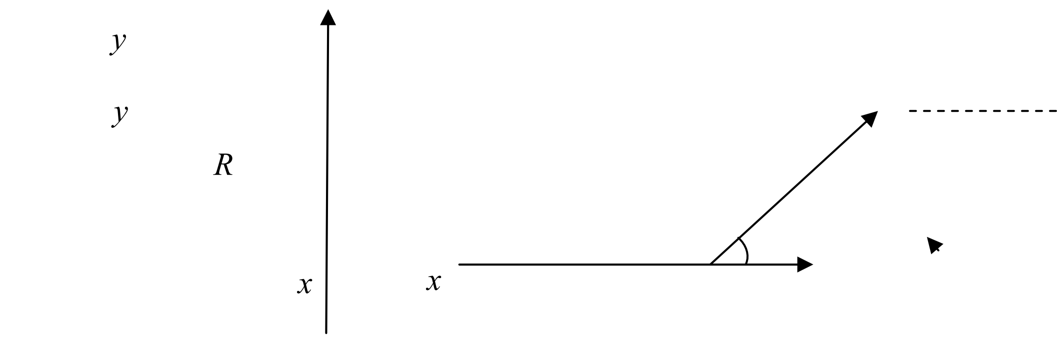
د θ زاویه چې $\overline{OP}$ هغه د x محور د مثبت جهت سره جوړه وي د z مختلط عدد شاخص1 په نامه او د $\overline{OP}$ اوږدښت د z د بعد 2 (مقدار په نوم یادوي.

له شکل څخه په څرګنده لیدل کیږي چې

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = arctan\frac{y}{x}$$

په دې ترتیب سره $r = |z|$ او د θ د معلومولو لپاره د x او y اشارې باید په نظر کې ونیول شي. طبیعي ده چې x او y د r او θ له جنسه معلومیدلی شي.

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$



په دې ترتیب که x او y د r او θ له جنسه عوض شي نو لرو چې

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

دې حالت ته د z عدد قطبي ارائه (ښودنه) وایې.

5 مثال. د $z = 2 + 2i$ عدد په قطبي شکل ولیکئ

حل. واضح ده چې

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

6 مثال. د $z = 3 + \sqrt{3}i$ قطبي حالت وليکئ؟

$$r = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \text{او} \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow z = 3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

د مختلطو عددونو ضرب

دوه مختلط عددونه

$$z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right) \text{ و } z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$$

په ساده ډول ضربوو

$$z_1 z_2 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$$

$$= r_1 r_2\left[\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right) + \left(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1\right)i\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_3\right)\right]}$$

وروستنی رابطه کيدلی شي د n مختلطو عددونو لپاره تعميم کړای شي او هم ددې رابطې څخه د مختلطو عددونو توانونه په ښه توګه حسابيدلی شي.

د $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدد لپاره لرو چې

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

……

$$\boxed{z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)}.$$

نتیجه. که چېرې د $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ مختلط عدد په نظر کې ونیول شي لرو چې

$$z^n = r^n \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n \dots \quad (I)$$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \dots \quad (II)$$

د (I) او (II) څخه په لاس راځي چې

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

او دا رابطه د موآورى [2] په نامه يادېږى.

7 مثال. په قطبی شکل کې د $(1+i)^{12}$ ضرب حساب کړئ؟

حل. $z = 1 + i$ په قطبي شکل راوړو.

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \text{و} \quad \tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\Rightarrow 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

لهذا

$$(1+i)^{12} = \left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right]^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{12}$$

$$= 64\left(\cos\frac{12\pi}{4} + i\sin\frac{12\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow (1+i)^{12} = 64(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 64(-1 + i.0) = -64$$

---

[2]. *de Moivre Abraham (1667 – 1754)*

په قطبي حالت کې د مختلطو عددونو تقسيم (ويش)

د $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ عدد پر $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ باندې تقسيم کړئ.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]}\cdot$$

8 مثال. د قطبي حالت څخه په استفاده $\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{12}$ حساب کړئ.

$$-1+i \ : \ r = \sqrt{2} \ , \ \tan\theta = \frac{1}{-1} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow -1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$1+i \ : \ r = \sqrt{2} \ , \ \tan\theta = \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-1+i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1+i}{1+i} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$

بناپر دی

$$\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{12} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{12} = \cos\left(\frac{12\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{12\pi}{2}\right)$$

$$= \cos(6\pi) + i\sin(6\pi) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

.

تمرين

لاندې افادې محاسبه کړئ؟

$1.\quad (2+3i)+(3-2i)$, $2.\quad (2+3i)(2-3i)$

$3.\quad (4+i)(3+2i)(1-i)$, $4.\quad (2-i)^2$

$5.\quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$, $6.\quad \frac{(2i)^3 + i^{25}}{2i-1}$

لاندې مختلط عددونه په قطبي شکل وليکئ

$7.\quad 2-2i$, $8.\quad -7i$, $9.\quad (1-i)^2$, $10.\quad i^{25}$

د $z_1 = 2 + 3i$ و $z_2 = 5 - 2i$ لپاره لاندې عددونه محاسبه کړئ.

$$11.\quad z_1\overline{z_1} \quad , \quad 12.\quad z_1^{\,2} \quad , \quad 13.\quad (\overline{z_1})^2$$

$$14.\quad z_1 + z_2 \quad , \quad 15.\quad z_1^{\,2} - 2z_2^{\,2} \quad , \quad 16.\quad \left(\overline{z_1}\right)^3 + \left(\overline{z_2}\right)^3$$

لاندې مختلط عددونه له قطبي شکل څخه د $z = x + yi$ په شکل ولیکئ.

$$17.\quad z = 5(\cos\pi + i\sin\pi) \quad , \quad 18.\quad z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$19.\quad z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad 20.\quad z = 6\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

پنځم څپرکی
معادلې او نامساوی ګانی

د معادلې کلمه د تعادل، مساوات، برابری، هم وزنه او داسې نورو په معنا ده د الجبر په اصطلاح کې معادله د دوو الجبری افادو د تساوی څخه عبارت دئ. په یوه معادله کې هغه حرفونه چې د هغوی د قیمت معلومول مطلب وي د مجهولونو $(unknowns)$ په نامه یادیږي. که چېرې په یو مساوات کې د مجهولونو د ځینو معینو قیمتونو لپاره، د تساوي شرط صدق کړي. هغې ته مشروط مساوات یا معادله وایې. مګر که د ځینو خاصو مواردو څخه پرته د مجهولونو د ټولو قیمتونو لپاره مساوات بر قرار وي، نو هغې مساوات ته مطابقت یا عینیت $Idetify$ وائي. د مثال په توګه $2x+4=14$ یوازی د $x=5$ لپاره صدق کوي. نو دا یوه معادله ده. خو د $(x-3)^2=x^2-6x+9$ مساوات د x د هر قیمت لپاره صدق کوي او یو مطابقت دی. په همدې ډول تساوی د $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{2x}{x^2-4}$ تساوی د $x=\pm 2$ څخه پرته د x د ټولو قیمتونو لپاره صدق کوي نو دا مساوات یو مطابقت دی.

د معادلې جذر. د متحول هغه قیمتونه چې معادله صدق کړي دهغې معادلې د جذرونو یا حلونو په نامه یادیږي. دمثال په توګه د $x = 2$ عدد د $3x + 4 = 10$ معادلې جذر او $x = \pm 5$ دوه عددونه د $x^2 = 25$ معادلې جذرونه دي.

د یوې معادلې درجه که چېرې د معادلې خواوې د یو پولینوم شکل ولري. نو د په هغې کې د هغې مجهول لوړ توان د نوموړي معادلې ددرجې په نامه یادوي. د مثال په توګه د $4x - 6 = 5$ د معادلې درجه یوه ده او $x^2 - 6x = -8$ د معادلې درجه دوه ده.

معاَدلې معادلې. هغه معادلې چه عین جذرونه ولري. یو تر بله معاَدلې معادلې بلل کیږي. د مثال په توګه د $2x - 8 = 0$ او $x - 4 = 0$ معادلې سره معادلې دی.
په همدی ډول د $x^2 - 9 = 0$ ، $(x-3)(x+3) = 0$ معادلې یو تر بله سره معاَدلې دي.

د معادلو خاصیتونه

۱. که چېرې د یوې معادلې دواړو خواو ته یو عدد جمع شي معادله پر ځای پاته کیږي.

۲ . که چېرې د یوی معادلې له دواړو خواو څخه یو عدد تفریق شي تعادل پر ځای پاته کیږي.

۳. که چېرې دیوې معادلې دواړه خواوې په یو عدد ضرب شي تعادل نه بدلیږي.

۴ . کیدلای شي د یوې معادلې دواړه خوا وې د صفر خلاف په یو عدد باندی تقسیم شي خو تعادل نه بدلیږي.

۵ . که چېرې د یوی معادلې دواړه خواوې د یو طاق عدد په توان رفع شي مساوات په ځای پاته کیږي.

٦ . که چېرې د معادلی دواړه خواوې په یو معینه مرتبه جذر ونیول شي تعادل بدلون نه کوي.

٧ . که چېرې د یوې معادله دواړه خواوې (د صفر د حالت څخه پرته) معکوس شي، تعادل په خپل ځای پاته کیږي.

د معادلو د حل طریقې (روشونه)

د یوې معادلې د جذرونو د په لاس ته راوړلو لپاره. پورتنی اوه ګوني عملونه مرحله په مرحله پرې عملي کیږي نو هر ځلی یوه ساده او د مخکښنۍ معادلې سره معادله یوه معادله په لاس راځي. او په نهایت کې د هغې جذر په ګوته کیږي. په عمومي توګه د یوې لومړی درجې معادلې د حل لپاره لاندې عملونه سرته کوو.

1. که چېرې په معادله کې د ضرب، تقسیم او توان عملیې شاملې وي نو لومړی هغه عملونه سرته رسوو.
2. که چېرې معادله کسري افادې ولري. نو دواړه خواوې یې د مخرجونو د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب په وسیله ضربوو.
3. مجهولې افادې یوې خوا او معلومې افادې یې مخامخ لوری ته اړوو.
4. دواړو خوا ته مشابه حدونه ور جمع کوو.
5. دواړو خواوې د مجهول پر ضریب تقسیموو.

د معادلو ډولونه ددرجې او د مجهولونو د تعداد له مخې

معادلې د درجې او د مجهولونو د تعداد له مخی په لاندې ډول صنف بندی کیږي.

<u>**لومړی درجه یو مجهوله معادلې**</u>. هغه معادلې دي چې په هغې کې یوازی یو مجهول وجود ولري او د معادلې درجه هم یوه وي. په معموله توګه لومړی درجې معادلو ته خطی معادلې هم وایې.

د څو مجهوله لومړي درجې معادلو سیستم. هغه معادلې چې په هغې کې دوه مجهوله، دری مجهوله، څلور مجهوله او داسی نور موجود وي په ترتیب سره دوه مجهوله، څلور مجهوله او داسې نوروپه نامه یادیږی. په معموله توګه دا ډول معادلې چې څو مجهوله ولري څو معادلې هم وي نو ځکه یې د څو مجهوله معادلو د سیستم په نامه یادوي.

که د مجهولونو او معادلو تعداد سره مساوی وي نو هغې سیستم ته مربعي سیستم هم وایې.

د لوړو درجو لروونکي معادلې. هغه معادلې دې چه درجې ئې دوه، درې، څلور، پنځه او داسې نور وي. دا ډول معادلې هم د څو مجهوله او د څو معادلو سیستمونه کیدلی شي.

د هغوی څخه ډیرې معمولي همغه دوه درجه یې معادلې دي.

لومړی درجه یو مجهوله معادلې

لومړی درجه یو مجهوله معادله په نهایت کې د $ax+b=0$ شکل لري. چې په هغې کې a او b حقیقي عددونه، $a \neq 0$ وي او دا معادله په لاندې ډول حل کیږي.

$$ax+b=0 \Rightarrow ax+b+(-b)=0+(-b) \Rightarrow ax=-b$$
$$\Rightarrow (ax)\left(\frac{1}{a}\right)=(-b)\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

په دې ترتیب سره د معادلې جذر د $x=-\frac{b}{a}$ څخه عبارت دی.

په عمومی توګه د یوې درجه یي معادلو د حل لپاره لاندې عملونه تر سره کوو.

1. که چېرې په معادله کې د ضرب، تقسیم او توان عملیې شاملې وي، نو لومړی موږ همغه اعمال تر سره کوو.
2. که چېرې معادله کسري افادې ولري، نو د معادلې دواړه خواوې، د هغې د مخرجونو په تر ټولو کوچني مشترک مضرب کې ضربوو.
3. معلومې افادې یوې خواته او مجهولې افادې بلې خواته وړو.
4. د دواړو خواوو جملې سره جمع کوو.
5. دواړه خواوې د مجهول پر ضریب تقسیموو.

مثالونه.

$$1.\quad 2(x+3)=3(x-1)\Rightarrow 2x+6=3x-3$$
$$\Rightarrow 2x+(-3x)+6=3x+(-3x)-3$$
$$\Rightarrow -x+6=-3\Rightarrow -x+6+(-6)=-3+(-6)$$
$$\Rightarrow -x=-9\Rightarrow (-x)(-1)=(-9)(-1)\Rightarrow x=9$$

$$2.\quad \frac{x}{3}+\frac{x}{2}=5\Rightarrow 6\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{2}\right)=6\cdot 5\Rightarrow 2x+3x=30$$
$$\Rightarrow 5x=30\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)(5x)=\left(\frac{1}{5}\right)\cdot 30\Rightarrow x=6\cdot$$

$$3.\quad \frac{3x}{2}+4=\frac{2x}{3}+\frac{3}{4}\Rightarrow 12\left(\frac{3x}{2}+4\right)=12\left(\frac{2x}{3}+\frac{3}{4}\right)$$
$$\Rightarrow 18x+48=8x+9\Rightarrow 10x=-39\Rightarrow x=-\frac{39}{10}$$

4 مثال. د $\frac{x-7}{4}+\frac{x+10}{21}+1=\frac{5x-7}{8}-\frac{9x+6}{35}$ حل کړئ.

حل: اګر چې کولی شو د معادلې دواړه خواوې د هغې د مخرجونو په مشترک مخرج ضرب کړو او معادله په غیر کسري شکل واړوو او بیایې حل کړو. مګر کله بیا امکان لري چې د څو مرحلو په ترڅ کې عملیه اسانه شي. په دی ترتیب د معادلی دوړه خوا وې په 8 ضرب کولی شو. لرو چې

$$2x-14+\frac{8x+80}{21}+8=5x-7-\frac{72x+48}{35}\Rightarrow\frac{8x+80}{21}+\frac{72x+48}{35}=3x-1$$

$$\Rightarrow(3\times7\times5)\left(\frac{8x+80}{21}+\frac{72x+48}{35}\right)=(3\times7\times5)(3x-1)$$

$$\Rightarrow 40x+400+216x+144=315x-105\Rightarrow 544+105=315x-256$$

$$\Rightarrow 649=59x\Rightarrow x=\frac{649}{59}\Rightarrow x=11$$

5 مثال. د $\frac{6x-3}{2x+7}=\frac{3x-2}{x+5}$ معادله حل کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې د مخرجونو پر ټولو کوچني مشرک مضرب $(2x+7)(x+5)$ باندې ضربوو په لاس راوړو چې

$$(6x-3)(x+5)=(3x-2)(2x+7)\Rightarrow 6x^2+27x-15=6x^2+17x-14$$

$$\Rightarrow 10x=1\Rightarrow x=\frac{1}{10}$$

د مطلقه قیمت لرونکي معادلې

دا ممکنه ده چې په یوه معادله کې د ځینو افادو مطلقه قیمت مطرح شي. نو کله چې مطلقه قیمت رفع کوو، دوه حالته تر مناقشې لاندې راځي. دلته اسانه نمونی تر بحث لاندی نیسو.

6 مثال. $|2x-3|=7$ حل کړئ؟

حل: دلته $|2x-3|$ دوه حالته لری. یا $2x\text{-}3>0$ یا $0<(3\text{-}2x)-$ دی. بنا پر دې

$$|2x-3|=7 \Rightarrow 2x-3=\pm 7 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=7 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5 \\ 2x-3=-7 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

نو معادله دوه حلونه $x=5$ او $x=-2$ لري.

<u>7 مثال</u>. د $|3x-12|+8=17$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$|3x-12|+8=17 \Rightarrow |3x-12|=9 \Rightarrow 3x-12=\pm 9 \Rightarrow 3x=12\pm 9$$

$$x=\frac{12\pm 9}{3} \quad \Rightarrow x_1=\frac{21}{3}=7\,,\ x_2=\frac{3}{3}=1 \Rightarrow x_1=7\,,\ x_2=1$$

یعنی د 1 او 7 عددونه ددې معادلې حلونه دي.

هغه جذر لرونکي معادلې چه په اوله درجه معادلو اړول کیدای شي

هغه معادلې چې په هغې کې ځینې افادې تر جذر لاندې (غیر ناطقې) وي. نو د هغې دواړو خواوو د مربع کولو په صورت کې داسې چې جذر د معادلې په یوه خواکښې وي کیدلی شي په یوه عادي معادله واړول شي. په دې صورت کې له حل وروسته، ټول لاس ته راغلي حلونه په اصل معادله کې امتحان کیږي. دلته یوازې د جذري معادلې هغه حالت مطرح کیږي چې هغه په یوه اوله درجه معادله واړوی.

<u>8 مثال</u>. د $\sqrt{x+3}=8$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sqrt{x+3}=8 \Rightarrow \left(\sqrt{x+3}\right)^2=8^2 \Rightarrow x+3=64 \Rightarrow x=61$$

بنا پردې د معادلې حل 61 دی.

<u>9 مثال</u>. د $\sqrt{2x-3}+5=2$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sqrt{2x-3}+5=2 \Rightarrow \sqrt{2x-3}=-3 \Rightarrow \left(\sqrt{2x-3}\right)^2=(-3)^2$$
$$\Rightarrow 2x-3=9 \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6$$

اوس که د $x=6$ قیمت په معادله کې وضع شي هغه نه صدق کوي. نو دا معادله حل نه لري.

<u>10 مثال</u>. د $\sqrt{2x-3}=\sqrt{3x+4}$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4} \Rightarrow \left(\sqrt{2x+3}\right)^2=\left(\sqrt{3x+4}\right)^2$$
$$\Rightarrow 2x+3=3x+4 \Rightarrow 2x-3x=4-3 \Rightarrow x=-1$$

<u>د $ax+b$ افادې د علامې معلومول</u>

د $ax+b$ افادې د علامې د معلومولو څخه مطلب. د x متحول د قیمتونو معلومول دي چې د هغي لپاره ددې افادي قیمت مثبت، منفی یا صفر شي. ددې افادې د علامې د معلومولو لپاره د $ax+b=0$ معادلې حل یعنی $x=-\frac{b}{a}$ په نظر کې نیسو. لومړی د x هغه قیمت پیدا کوو چې نوموړی افاده صفر کړي. یعنی

$$ax+b=0 \Rightarrow ax=-b \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

اوس که $a>0$ وي نو د افادې اشاره د $x=-\frac{b}{a}$ ښيء خواته مثبت او چپ خواته منفی دی. او که $a<0$ وي نو دا خاصیت برعکس دی.

x	$-\infty$				$-\frac{b}{a}$				∞
$ax+b$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

يعنى د $x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$ لپاره د افادې اشاره مثبت او $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ لپاره ددى افادې علامه منفي ده.

x	$-\infty \qquad -\frac{b}{a} \qquad \infty$
$ax+b$	$+ \quad + \quad + \quad + \quad 0 \quad - \quad - \quad - \quad -$

نو د $x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$ لپاره د افادې اشاره منفى او د $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ لپاره د هغې اشاره مثبت دى.

***11* مثال. د $2x-8$ افادې اشاره معلومه کړئ؟**

حل: $2x-8=0 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$

څرنګه چې $a=2>0$ دى نو

x	$-\infty \qquad 4 \qquad \infty$
$2x-8$	$- \quad - \quad - \quad - \quad 0 \quad + \quad + \quad + \quad +$

$$x \in (-\infty, 4) \Rightarrow 2x-8<0 \quad , \quad x \in (4, \infty) \Rightarrow 2x-8>0$$

***12* مثال. د $-3x-18$ افادې اشاره معلومه کړئ؟**

حل:

$$-3x-18=0 \Rightarrow -3x=18 \Rightarrow x=-6$$

بناپر دې

x	$-\infty \qquad -6 \qquad \infty$
$-3x-18$	$- \quad - \quad - \quad - \quad 0 \quad + \quad + \quad + \quad +$

$$x \in (-\infty, -6) \Rightarrow -3x-18<0 \quad , \quad x \in (-6, \infty) \Rightarrow -3x-18>0$$

لومړی درجه نامساوي ګانې

د لومړی درجه نامساوي عمومي حالت عبارت دی له

$$ax + b \geq 0 \quad , \quad ax + b > 0$$

$$ax + b \leq 0 \quad , \quad ax + b < 0$$

ددې نامساویګانو د حل څخه مطلب د x لپاره د هغو قیمتونو پیداکول دي چې د هغوی لپاره نامساوي صدق شي.

13 مثال. د $4x + 9 \leq 3$ نامساوی حل کړئ؟

حل:

$$4x + 9 \leq 3 \Rightarrow 4x + 9 - 3 \leq 0 \Rightarrow 4x + 3 \leq 0$$

$$\Rightarrow 4x \leq -3 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{4}$$

یعنې د $x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$ لپاره پورتنی نامساوي درسته ده.

<u>14 مثال</u>. د $-4x + 20 > 0$ نامساوي حل کړئ؟

حل:

$$-4x + 20 \leq 0 \Rightarrow -4x + 20 > 0 \Rightarrow -4x > -20$$

$$\Rightarrow -4x > -20 \Rightarrow x < \frac{-20}{-4} \Rightarrow x < 5$$

نو د $x \in (-\infty , 4]$ لپاره پورتنی نامساوي صدق کیږي.

هغه نامساویګانی چی مطلقه قیمت لري

معادلو ته ورته، په نامساويگانو کې هم مطلقه قيمت مطرح کيدلی شي، چې بيا هم د مطلقه قيمت لروونکي هره افاده دوه حالته لري. په دې لړ کې لومړی درجه نامساوي گانو ته چې مطلقه قيمت لري اشاره کيږي او هغه په دی ډول دي.

$$|ax+b|<c \quad , \quad |ax+b|\le c \quad , \quad |ax+b|>c \quad , \quad |ax+b|\ge c$$

په داسې حال کې چې a او b حقيقي ثابت عددونه او c مثبت عدد دی. دا هر يوه له دې څلوورو نامساوي گانو څخه بيا مضاعفی نامساوي گانې په ځان کې لري. او په لاندی ډول دي.

$$\pm(ax+b)<c \quad , \quad \pm(ax+b)\le c \quad , \quad \pm(ax+b)>c \quad , \quad \pm(ax+b)\ge c$$

ددې فرضيې پر بناکولی شو ځانگړي مسئالې حل کړو.

15 مثال. د $|5x-15|<10$ نامساوی حل کړئ؟

حل:

$$|5x-15|<10 \Rightarrow \pm(5x-15)<10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x-15<10 \;\Rightarrow\; 5x<25 \;\Rightarrow\; x<5 \\ -(5x-15)<10 \Rightarrow 5x-15>-10 \Rightarrow x>1 \end{cases} \Rightarrow 1<x<5$$

نو ددې نامساوي د حلونو ست عبارت دی له $(1\,,\,5)$ انترول څخه.

<u>16 مثال</u>. د $|5x-15|\ge 10$ نامساوي حل کړئ؟

حل:

لومړی طريقه: که مخکښنی مثال و کاروو ددې نامساوي حل د x د قيمتونو د هغې ناحيې څخه عبارت دی چې د $|5x-15|<10$ نامساوي صدق نه کړی. يعني د $(1\,,\,5)$ انترول څخه نه وي. نو مطلوب حل عبارت دی له

$$(-\infty\,,\,1]\cup[5\,,\,\infty)$$

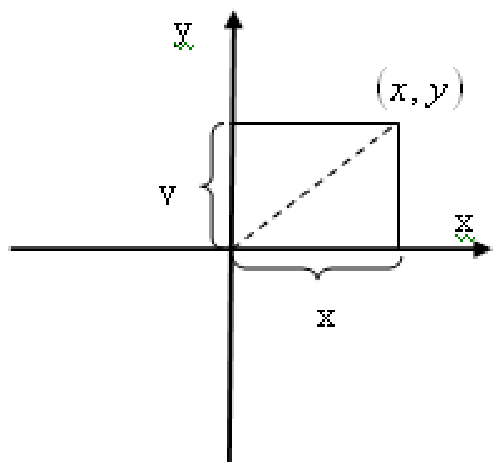
دوهمه طریقه: د پورتني مثال په ډول

$$|5x-15|\geq 10 \Rightarrow \pm(5x-15)\geq 10 \Rightarrow 5x-15\geq 10 \vee -(5x-15)\geq 10$$
$$\Rightarrow 5x\geq 25 \vee -5x\geq -5 \Rightarrow x\geq 5 \vee x\leq 1 \Rightarrow x\in(-\infty\ ,\ 1]\cup[5\ ,\ \infty)$$

د قایمو مختصاتو سیستم

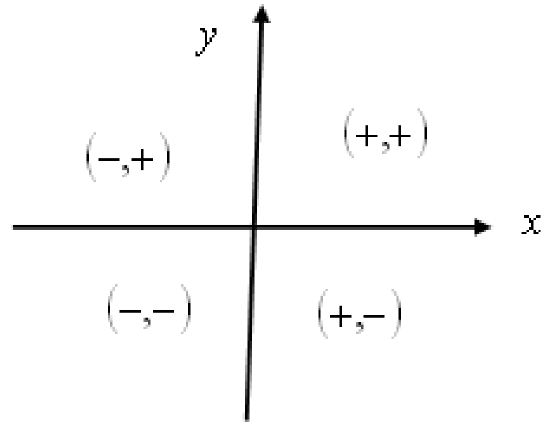
دوه د حقیقی عددونو محوررونه چی په عمودي ډول یو تر بل سره قطع کوي په نظر کې نیول کیږي. د هغوی د تقاطع نقطه د مبدا په توګه خو په افقي او عمودي محوررونو کې ښی خوا او پورته خوا مثبت جهتونه (1 شکل) وي. که چېرې p د مستوی یوه اختیاری نقطه وي. نو د P څخه د عمودي او افقي محوررونو سره دوه موازی خطونه رسم کوو. دا خطونه افقی محور د x په نقطه او عمودی محور د y په نقطه کې قطع کوي. په دې ترتیب د P نقطه د یوې جوړې حقیقي عددونو (x,y) سره مطابقت کوي چې د P د قایمو مختصاتو په نامه یادیږی. دلته x عدد ته د P فاصله او y ته د P ترتیب وائي. بنا پر دې د هرې جوړې حقیقی عددونو سره د مستوی یوه نقطه او برعکس د مستوی د هرې نقطې سره یو جوړه حقیقي عددونه ترړی.

پورتنی د محورو دستګاه د قایمو مختصاتو سیستم یا کارترین سیستم بولي.



دوې نقطه $(x_1.y_1)$ او (x_2, y_2) یو تر بله سره مساوي بلل کیږي. که چېرې $x_1 = x_2$ او $y_1 = y_2$ وي.

د قایمو مختصاتو سیستم یوه مستوي په څلوررو ناحیو ویشي چه هره ناحیه د یوې قایمی زاوئې په وسیله تشخیص کیږي. او د ساعت د عقربې په خلاف په ترتیب سره په اوله، دومه، دریمه او څلورمه ناحیه نومول کیږي. د نقطو د مختصاتو علامې په دې ناحیو کې په ترتیب سره (+ او +)، $(-,+)$ ، $(-,-)$ ، $(+,-)$ وي.



د یو مستقیم خط معادله.

د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هغو نقطو (x, y) سېټ چې یوه دوه مجهوله یو درجه یې معادله صدق کړي یو مستقیم خط دی. همدا وجه ده چه یو ې لومړی درجې دوه مجهوله معادلې ته خطی معادله وائي.

هره خطی معادله په یو له دې دوه شکلونو لیکل کیږي.

$$y = ax + b \quad , \quad Ax + By + C = 0$$

د هغې زاويې $tangent$ چې د $y=ax+b$ مسقيم خط يې د افقي محور سره جوړ وي د α عدد دی او هغه د نوموړی مسقيم خط د ميل په نامه يادوي. يعنی $tan\alpha = a$ د $y=ax+b$ مستقيم خط ميل دی.

16 مثال. د $y = x-8$ مسقيم خط د افقي محور سره څو درجې زاويه جوړوي؟

حل : که چېرې α مطلوبه زاويه وي نو

$$tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}$$

د مستقيمو خطونو موازی والی او عموديت

دوی خطی معادله $\begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ y = m_2 x + b_2 \end{cases}$ دوه مسقيم خطونه ارائه کوي او دا مسقيم خطونه درې حالته لرلی شي

اول. دا مسقيم خطونه يو تر بله سره موازي دي که چېرې $m_1 = m_2$ وي.

دوهم. دا مستقيم خطونه سره عمودي دي که چېرې دواړه معادلې يو شان وي.

دريم. دا مستقيم خطونه سره منطبق دي که چېرې دواړه معادلې يو شان وي.

17 مثال. د لاندې سيستمونو اړونده مستقيم خطونه يو تر بله سره څه مناسبت لري؟

$$(i)\quad \begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 6 \\ y = -\frac{4}{3}x + 1 \end{cases} \quad , \quad (ii)\quad \begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = 2x + 9 \end{cases}$$

$$(iii)\quad \begin{cases} y = 3x + 5 \\ 2y = 6x + 10 \end{cases} \quad , \quad (iv)\quad \begin{cases} x + 2y = 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + 9 \end{cases}$$

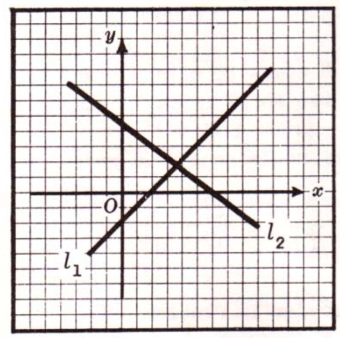


Fig. 1(*a*)

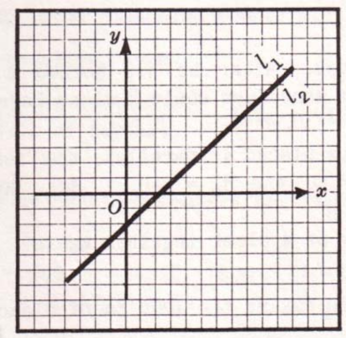


Fig. 1(*b*)

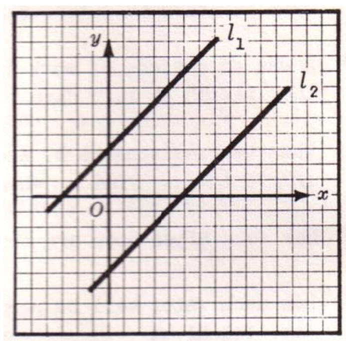


Fig. 1(*c*)

حل: په (i) کې $m_1 m_2 = \frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right) = -1$ دی نو مستقیم خطونه یو تر بل سره عمود دي.

په (ii) حالت کې لرو چې $m_1 = 2 = m_2$ نو مستقیم خطونه یو تر بله سره موازی دي، په (iii) حالت کې که د دوهمی معادلې دواړه خواوې پر 2 تقسیم شي نو لومړی معادله په لاس راځي نو دواړه معادلې یو شان دي او مستقیم خطونه سره منطبق دي.

په (vi) حالت کې معادلو ته د شکل تغییر ورکوو لرو چې

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 9 \end{cases} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} = m_2$$

نو مستقیم خطونه سره موازي دی.

د دوه مجهوله خطی معادلو سیستم

د یو دوه مجهوله خطي معادلو سیستم په عمومي توګه لاندې شکل لري.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

واضح ده چې دا سیستم دوه خطي معادلې دي. او طبعاً دوه مستقیم خطونه کیدلی شي موازی، متقاطع او یا سره منطبق وي. دا سیستم ته په لاندی ډول د شکل تغیر ورکوو.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1y = -a_1x + c_1 \\ b_2y = -a_2x + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x + \dfrac{c_1}{b_1} \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}x + \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

کله چې دا مستقیمونه سره متقاطع وي یعنی سره موازی نه وي، په بل عبارت یو تر بله مختلف میلانونه ولري نو دا سیستم یو حل لري. په دې صورت کې

$$m_1 \neq m_2 \Rightarrow -\frac{a_1}{a_2} \neq -\frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow a_1b_2 \neq a_2b_1 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

که چېرې مستقیم خطونه سره موازی وي (متقاطع نه وي) نو سیستم حل نه لري. په دې صورت کې

$$m_1 = m_2 \Rightarrow -\frac{a_1}{a_2} = -\frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

یو سیستم نامتناهي حلونه لري، که چېرې دواړه معادلې یې یو تر بله سره منطبقې وي. یعنی متناسب ضریبونه ولري. په دې ترتیب هغه شرایط عبارت دي له:

د تقاطع شرط د یکتا(یوازی یو) حل موجودیت $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

د حلونو د نه موجودیت (موازی والي) شرط

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

د انطباق شرط (د بی نهایت حلونو درلودل)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

د دوه مجهوله خطي معادلو د سیستم د حل څخه مطلب د هغې حقیقی عددونو جوړې (x, y) پیدا کول دي چې دواړه معادلې همزمان صدق کړي.
ځرنګه چې کیدلی شي دوه مستقیم خطونه یو تر بله موازي، منطبق او یا متقاطع وي.
نو سیستم یوازې یو حل لري کله که نوموړی مستقیم خطونه یو تر بله سره قطع کړي، نامتناهي حلونه لري که چېرې هغه سره منطبق وي او حل نه لري که چېرې هغه سره موازی وي.

د افنا په طریقه د دوه مجهوله معادلو د سیستم حل

په دې طریقه کې دیوې معادلې دواړه خواوې په یو عدد کې ضربیږي تر څو د په نظر کې نیول شوي مجهول ضریب د بلې معادلې د همغه مجهول د ضریب سره یو شان او بیا دواړه معادلې سره جمع یا تفریق کیږي، په نتیجه کې مربوطه مجهول حذف کیږي او یوه معادله په یو مجهول کې په لاس راځي. د هغې د حل څخه وروسته د یو مجهول قیمت په لاس راځي، بیا دا قیمت ددې دوو اولنیو معادلو څخه په یوه معادله کې ږدو او په دې ترتیب د هغه بل مجهول قیمت هم په لاس راځي.
دا طریقه په عمومي حالت باندې تطبیق کیږي.

<u>*19* مثال</u>. د $\begin{cases} 3x - 2y = 7 & \cdots & (I) \\ 5x - y = 21 & \cdots & (II) \end{cases}$ معادلو سیستم حل کړئ؟

حل: د (II) رابطې دواړه خواوې په -2 ضربوو او د (I) رابطې سره ئې طرف په طرف جمع کوو.

$$-2\begin{cases}3x-2y=7\\5x-y=21\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{c}3x-2y=7\\ \underline{-10x+2y=-42}\\ -7x=-35\end{array}\Rightarrow x=\frac{-35}{-7}\Rightarrow x=5$$

اوس $x=5$ په (I) معادله کې ږدو نو y په لاس راځي.

$$3\cdot 5-2y=7\Rightarrow -2y=7-15\Rightarrow -2y=-8\Rightarrow y=\frac{-8}{-2}\Rightarrow y=4$$

په نتیجه کې $x=5$ او $y=4$ یعنې $(5,4)$ ددې معادلې حل دی.

د تعویض په طریقه د یو دوه مجهوله معادلو د سیستم حل.

په دی طریقه کې یوه مجهول د بل مجهول له جنسه په یوه معادله کې په لاس راوړي او هغه په دوهمه معادله کې وضع کوي تر څو یوه، یوه مجهوله معادله په لاس راشي. د هغې د حل څخه وروسته دغه معلوم شوی مجهول په یوه معادله کې ږدو تر څو دوهم مجهول پیدا شي.

$$\begin{cases}2x-3y=6 & \cdots & (I)\\5x-4y=22 & \cdots & (II)\end{cases}$$

حل: دستور سره سم.

$$2x-3y=6\cdots(I)\Rightarrow 2x=3y+6\Rightarrow x=\frac{3y+6}{2}$$

د x دا قیمت په (ii) معادله کبنبی ږدو.

$$5x-4y=22\cdots(II)\Rightarrow 5\cdot\frac{3y+6}{2}-4y=22\Rightarrow 15y+30-8y=44$$

$$\Rightarrow 7y = 44 - 30 \Rightarrow 7y = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{7} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = \frac{3y+6}{2} = \frac{6+6}{2} = 6$$

د معادلې حل $x = 6$ او $y = 2$ دي.

ددوه مجهوله معادلو د سیستم حل ددتیرمنیانت په طریقه

که چېرې د $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ د معادلو سیستم په یوه له مخکښینو طریقو حل شي په لاس راځي چې

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad , \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

اوس درې د تیرمینانتونه Δ، Δ_x و Δ_y په لاندې ډول تعریف کیږي.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \quad , \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2$$

د پورتنی معادلو د سیستم حل عبارت له (x, y) څخه دی، په داسې حال کې چې $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ او $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ دي.

21 مثال . د $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$ معادلو سیستم حل کړئ.

حل: په لومړی سر کې مربوطه د تیرمینانتونه محاسبه کیږي.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - (1)(3) = -4 - 3 = -7$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - (3)(-6) = -4 + 18 = 14$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6) - (2)(1) = -12 - 2 = -14$$

$$\Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = +2 \quad , \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14}{-7} = -2$$

په ګرافیکی توګه د دوه مجهوله معادلو د سیستم حل

لکه څرنګه چې دمخه مو اشاره وکړه چې د یو دوه مجهوله معادلو د سیستم حل ددوی د اړونده مستقیمو خطونو د تقاطع نقطه ده چې د نوموړو دوو معادولو په وسیله معلومیږي.

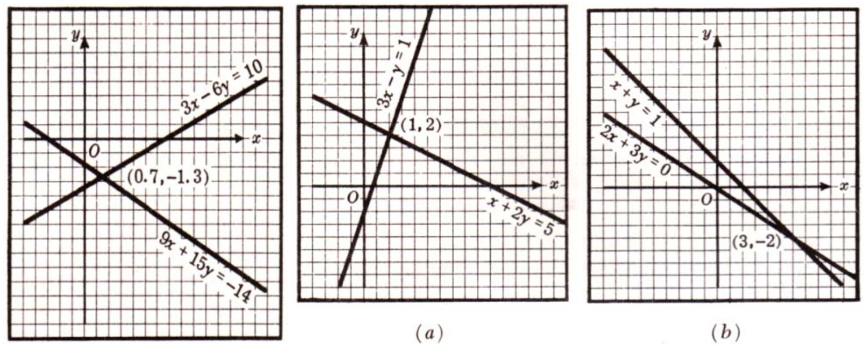
بنا پر دې ددوه مجهوله معادلو د سیستم په ګرافیکي حل کې کافي ده چې ددې معادلو اړونده مستقیم خطونه (ددوی ګرافونه) رسم شي او د هغوی د تقاطع نقطه د دې سیستم د حل څخه عبارت دی چې د رسم کولو په جریان کې باید دقیق معین شي.

د ګرافیکي حل لپاره د مستقیمو خطونو د رسم کولو او ددوی د مشترکې نطقې د دقیق موقیعت لپاره د ګراف کاغذ په مناسب دقت سره کارول کیږي.

<u>**22 مثال**</u>. د لاندې خطي معادلو د سیستمونو حل په ګرافیکی توګه معلوم کړئ

$$(i)\quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \quad , \quad (ii)\quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad , \quad (iii)\quad \begin{cases} 3x - 6y = 10 \\ 9x + 15y = -14 \end{cases}$$

حل: ددې ورکړل شوي سیستمونو ګراف په لاندی ډول رسم کیږي.



د پورتنیو شکلونو څخه لیدل کیږي چې مطلوبه حل په ترتیب سره عبارت دی له

$$(i)\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},\quad (ii)\ \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases},\ (iii)\begin{cases} x = 0.7 \\ y = -1.3 \end{cases}$$

لومړی درجه دوه مجهوله نامساویگانې

لومړی درجه دوه مجهوله نامساوي ګانې په عمومي توګه دا لاندې څلوور شکلونه لري.

$$ax + by + c < 0 \quad , \quad ax + by + c \le 0$$
$$ax + by + c > 0 \quad , \quad ax + by + c \ge 0$$

ددې ډول نامساوي ګانو د حل څخه مطلب په مستوي کې د هغو نقطو (x, y) معلومول دي چې مربوطه نامساوي ګانی صدق کوي.

د نامساوي ګانو د حل لپاره لومړی د $ax + by + c = 0$ ګراف چې یو مستقیم خط دی، رسم کوو او دا مستقیم خط مستوي په دوو برخو ویشي. بیا ددې مستوي د یوې برخې یوه نقطه خوښوو او په نامساوي کې یې وضع کوو. که چېرې نوموړې نقطه هغه نامساوی صدق کړي. نو د هغې ناحیې ټولې نقطې هغه نامساوي صدق کوی او هغه د نامساوی حلونه دي.

که چېرې انتخاب شوي نقطه په هغه نامساوي کې صدق نه شي، نو دهغې ناحيې ټولې نقطې هغه نامساوي نه صدق کوي. په دې ترتيب د مخامخ ناحيې د نقطو ست د دې نامساوي حلونه دي.

هغه ناحيه چې نامساوی نه صدق کوي په شکل کې نشاني شويده.

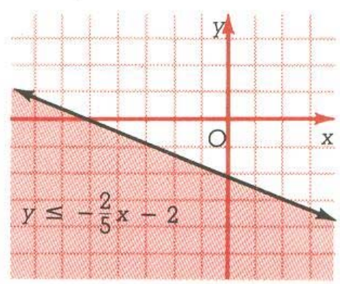
<u>23 مثال</u>. د $5y+2x\leq -10$ نامساوي حل کړئ؟

حل: لومړی نامساوي اسانه کوو.

$$5y+2x\leq -10\Rightarrow 5y\leq -2x-10\Rightarrow y\leq -\frac{2}{5}x-2$$

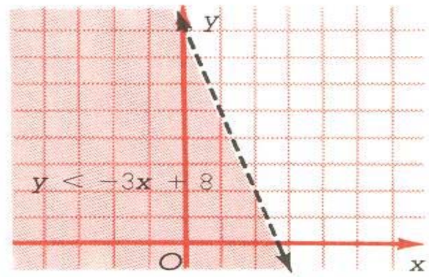
د $y=-\frac{2}{5}x-2$ مستقيم خط رسم کوو چې مستوي په دوو برخو ويشي اوس د مستوي يوه نقطه $(0,0)$ په $y\leq -\frac{2}{5}x-2$ کې وضع کوو. څرنګه چې دا نقطه نامساوی صدق کوی، نو ټولې هغه نقطې چې د (0.0) برخې په مستوی کې واقع دي، د خط د نقطو په شمول ددې نامساوی حلونه دی.

(لاندی شکل)



<u>24 مثال</u>. د $8-y>3x$ نامساوي حل کړئ.

حل نامساوی ساده کوو او مستقيم خط رسموو. بيا هم يوه نقطه په نامساوی کې وضع او د هغې د حلونو ست په ګوته کوو. دا ځل د مستقيم خط نقطې د حلونو په ست کې نه دي شاملې.



$$8-y>3x \Rightarrow -y>3x-8 \Rightarrow y<-3x+8$$

د لومړی درجې دوه مجهوله نامساوی ګانو سیستم

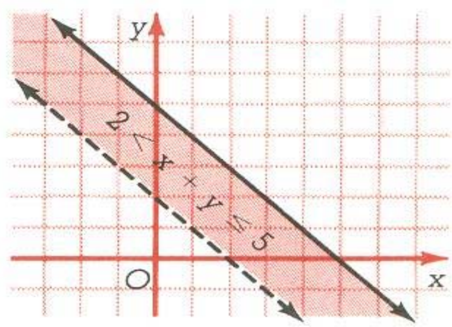
په یو وخت څو نامساوي ګانې د نامساوي ګانو د سیستم څخه عبارت دي. ددې سیستم د حل څخه مطلب د هغو نقطو پیدا کول دي چې نوموړی نامساویګانې په یو وخت کې صدق کړي. د لومړی درجې دوه مجهوله نامساوي ګانو د سیستم د حل لپاره لومړی د هغوی هره نامساوی بیله بیله حل کوو او د هغوی د حلونو مشترکې نقطې د سیستم د حل څخه عبارت دی. که چېرې ددې سیستم حل په مستوي کې یو محدوده ناحیه وي نو دا حل یوه څو ضلعی جوړه وي. دا حالت هغه وخت پیښیږي چې د سیستم د معادلو شمیر له دوو څخه زیات وي.

<u>25 مثال</u> . د $2 < x + y \le 5$ نامساوی ګانو سیستم حل کړئ؟

حل: ددی نامساوی ګانو $x + y \le 5$ او $2 < x + y$ ګرافیکي حل په قایمو مختصاتو کی په نظر کې نیسو. د (x, y) نقطې کومې چی دواړه نامساوی ګانې همزمان صدق کوي د نوموړي نامساوي ګانو د سیستم حل دی.

$$2 < x + y \le 5 \Rightarrow \begin{cases} 2 < x + y \\ x + y \le 5 \end{cases}$$

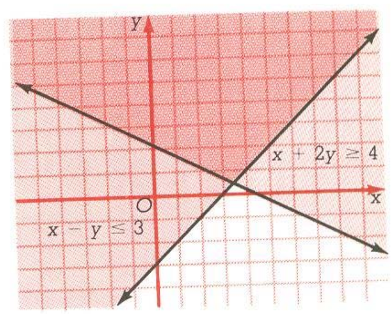
اوس د $5 = x + y$ او $2 = x + y$ مستقیم خطونه رسموو او ددی نامساوی



ګانو د حل مشترکې نقطې معلوموو.

26 مثال. د $\begin{cases} x + 2y \geq 4 \\ x - y \leq 3 \end{cases}$ نامساوي ګانو سیستم حل کړئ

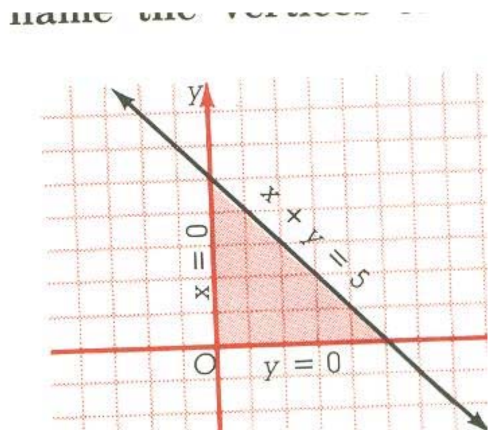
حل: دواړه مستقیم خطونه رسم کوو او مشترکه ناحیه د هرې نامساوي حل معلوموي.



27 مثال. ددې نامساوی ګانو سیستم $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ حل کړئ.

حل: درې مستقیم خطونه $x = 0$ (افقی محور)، $y = 0$ (عمودی محور) او $x + y = 5$ رسم کوو ددې دریو واړو نامساوی ګانو د مشترک حل نقطې چې د

يو مثلث داخلي او محيطي نقطو څخه عبارت دي. د لاندې شکل سره سم په لاس راځي.



د درې مجهوله خطی معادلو سیستم

دا سیستم درې خطي معادلې او درې مجهوله لري چې په اصلي حالت کې لاندې

شکل لري.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

د دريو مجهوله خطي معادلو د سیستم حل د افنا او تعويضي په طريقو

د درې مجهوله خطي معادلو سیستم هم کیدلی شي په تعويضی، افنا او ديترمنيانت په طريقو حل شي. د مثال په توګه د افنا په طريقه د سیستم د حل لپاره لومړی ديوې

معادلې د مناسب مضرب په نظر کې نيولو سره د طرف په طرف جمع يا تفريق عمليې په وجه، يو مجهول حذف او نوموړی سيستم دوه معادلې په دوو مجهولونو باندې بدليږي، بيا هغه د مخکښنې روشونو څخه په يوه طريقه حل کوو. او ددوو په لاس راغلې مجهولونو قيمتونه، د سيستم په يوه درې مجهوله معادلو کښې ږدو او دريم مجهول لاس ته راوړلو سره زموږ حل سرته رسيږي.
په تعويض طريقه کې دوه معادلې په سيستم کې خوښوو او بيا په يوه معادله کې يو مجهول د نورو له جنسه په لاس راوړو او په دې ترتيب يوه دوه مجهوله معادله په لاس راوړو او په دې ترتيب بيا هم يوه دوه مجهوله معادله په لاس راوړو چې په نتيجه کې دوه معادلې به دوو مجهولو کې يو سيستم په لاس راځي. دا سيستم په يوه طريقه سره حل کوو او دواړه مجهوله په لاس راځي بيا ددې مجهول قيمت په يوه له دريو معادلو کې ږدو تر څو دريم مجهول لاس ته راشي.

***28* <u>مثال</u>. د معادلو دا لاندې سيستم حل کړئ.**

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 & \cdots \quad (I) \\ x + y + z = 6 & \cdots \quad (II) \\ x + y - z = 0 & \cdots \quad (III) \end{cases}$$

حل: (I) او (III) معادلې طرف په طرف جمع کوو. په لاس راځي چې $3x = 3$ او د (II) او (III) معادلو څخه په لاس راځي چې $2x + 2y = 6$ اوس نو لاندی سيستم حل کوو

$$\begin{cases} 3x = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \quad , \quad 2 + 2y = 6 \Rightarrow y = 2$$

اوس $x = 1$ او $y = 2$ په (I) معادله کې ږدو لرو چې

$$2-2+z=3 \Rightarrow z=3$$

په نتيجه کې $(1,2,3)$ د راکړل شوي سيستم حل دی.

د درې مجهوله خطی معادلو د سيستم حل د ديترمينانت په طريقه

مترکسونه او ديترمينانتونه د خطي الجبر يو مبحث دی. چې دلته مورږ په تفصيل سره په هغې کې نه داخليږو خو يوازی د دريمې مرتبې د ديترمينانت څخه يادونه کوو او هغه کاره وو.

د $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ او c_3 عددونو درې مرتبه يې ديترمينانت ددوه مرتبه يې ديترمينانت په مرسته داسې تعريف کوو

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

چې ددوه مرتبه يې ديترمينانتونو د انکشاف او محاسبې څخه وروسته د Δ قيمت په دی ډول په لاس راځي.

$$\Delta=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1.$$

د 3×3 ډوله ديترمينانت ساده انکشاف

په دې طريقه کې ديو درې مرتبه يې ديترمينانت د انکشاف لپاره، لومړئ اول او دوهم ستونونه په تکرار سره د اصلي ديترمينانت ښی خواته ليکو، ددې جدول د قطرونو د تفاضل څخه د ديترمينانت قيمت په لاس راځي.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1.$$

<u>*29* مثال</u>. دا لاندې دریمه مرتبه دیترمینانت حساب کړئ؟

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

$$\Delta = 4\cdot 2\cdot 10 + 1\cdot 5\cdot 2 + 10\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 10 - 3\cdot 5\cdot 4 - 10\cdot 3\cdot 1$$

$$\Rightarrow \Delta = 80 + 10 + 90 - 40 - 60 - 30 = 50$$

د دیترمینانت په طریقه د دریو مجهوله خطي معادلو دسیستم د حل پیژندنه

د دریو مجهوله خطي معادلو د سیستم

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

د حل یوه طریقه د کرامر طریقه ده. او ددوه مجهوله معادلو په شان دلته څلوور دیترمینانتونه حسابیږي.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

او باالاخره د سیستم حل عبارت دی له

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

په هره طریقه چې پورتني د معادلو سیستم حل شي نو د معادلو د دریو مجهولونو قیمتونه عبارت دي له

$$x = \frac{d_1b_2c_3 + c_1d_2b_3 + b_1c_2d_3 - c_1b_2d_3 - d_1c_2b_3 - b_1d_2c_3}{a_1b_2c_3 + c_1a_2b_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3}$$

$$y = \frac{a_1d_2c_3 + c_1a_2d_3 + d_1c_2a_3 - c_1d_2a_3 - a_1c_2d_3 - d_1a_2c_3}{a_1b_2c_3 + c_1a_2b_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3}$$

$$z = \frac{a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3 - d_1b_2a_3 - a_1d_2b_3 - b_1a_2d_3}{a_1b_2c_3 + c_1a_2b_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3}$$

<u>*30* مثال</u>. لاندې د معادلو سیستم حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y + z = 4 \\ x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

حل : څلوور اړونده ديترمينانتونه په لاندې ډول محاسبه کيږي.

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right. = 2+2+3+1+1-12 = -3$$

$$\Delta_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 6 & -1 \end{array}\right. = -6+12+4+6-3-16 = -3$$

$$\Delta_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right. = 8-3-18+4-6+18 = 3$$

$$\Delta_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 1 & -1 \end{array}\right. = 6+8+9+3+4-36 = -6$$

لهذا

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-3}{-3}=1 \quad , \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{3}{-3}=-1 \quad , \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-6}{-3}=2.$$

د دې سیستم حل عبارت دی له $(1,-1,2)$.

31 مثال. د لاندې معادلو سیستم حل کړئ؟

$$\begin{cases} x+2z=7 \\ 3x+y=5 \\ 2y-3z=-5 \end{cases}$$

حل : د پورتني سیستم په یو معادل سیستم باندې په لاندې ډول بدلوو

$$\begin{cases} x+0y+2z=7 \\ 3x+y+0z=5 \\ 0x+2y-3z=-5 \end{cases}$$

اوس هغه څلوور مربوطه دیترمینانتونه په لنډ ډول حسابوو.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}=9 \quad , \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -3 \end{vmatrix}=9$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{vmatrix}=18 \quad , \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}=27$$

لهذا

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{9}{9}=1 \quad , \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{18}{9}=-1 \quad , \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{27}{9}=3.$$

د سیستم حل عبارت دی له $(1,2,3)$.

په قسمي کسرونو باندې تجزيه

که چېرې $P_1(x)$ ، $P_2(x)$ ، $P_3(x)$ ، ... ، او $P_n(x)$ ناطق کسرونه وي داسې چې

$$P(x)=P_1(x)+P_2(x)+P_3(x)+...+P_n(x)$$

په دې صورت $P_1(x)$ ، $P_2(x)$ ، $P_3(x)$ او $P_n(x)$ د $P(x)$ د قسمي کسرونو په نامه یادوي.

د کسرونو د مجموعې لاس ته راوړلو لپاره د کسري افادو د جمع عملیې ته مراجعه کیږي. خو د مسئالې برعکس یعنې که یو کسر راکړل شوی وي دهغې د قسمي کسرونو پیدا کول ددې بحث اصلی مسئاله جوړه وي.

که چېرې د یو کسر د صورت درجه د هغې د مخرج له درجې څخه زیاته وي نو د صورت د تقسیم څخه پر مخرج باندې دا کسر د یو پولینوم او یو داسې کسر چې د صورت درجه یې له مخرج له درجې څخه کوچنی وي د حاصل جمع په توګه ارائه کیږي. د مثال په ډول

$$\frac{x^5+3x^3-1}{x^3+2}=x^2+3+\frac{-x^2-5}{x^3+2}$$

هغه کسرونه چې صورت درجه یې د مخرج له درجې څخه کمه وي د مناسبو کسرونو په نامه یادیږی. دلته زموږ د توجه وړ مسئاله په قسمي کسرونو باندې د مناسبو کسرونو تجزیه کول دي.

32 مثال. لاندې نمونه په نظر کې نیسو

$$\frac{-x+8}{x^2-7x+12}=\frac{4}{x-4}-\frac{5}{x-3}$$

د ښی خوا دوو کسرونو د جمع کولو څخه چپ خوا کسر په لاس راځي. اوس خبره دا ده چې د چپ خوا اصلي کسر څخه څرنګه قسمي کسرونه په لاس راوړو.

په قسمي کسرونو باندې د تجزیې طریقې

که چېرې $P(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ناطق کسر وي یعنې $P(x)$ د پولینوم درجه د $Q(x)$ د پولینوم له درجې څخه کمه وي نو

اول. د مخرج $q(x)$ د هر فکتور $(ax+b)^k$ لپاره k قسمي کسرونه

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}\quad,\quad k=1,2,3,\ldots$$

سره مطابقت کوي، په داسې حال کې چې A_1، A_2 ،.....، A_k ثابت عددونه دي.

دوم. د مخرج د $(ax^2+bx+c)^k$ هر فکتور لپاره k قسمي کسرونه

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

سره مطابقت کوي، په داسې حال کې چې A_1 ، A_2، A_3 ، . . . . ، A_k، B_1 ، B_2، B_3 ، . . . او B_k ثابت عددونه دي.

33 مثال. د $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل . تر ټولو د مخه مخرج په ممکنه فکتورونو تجزیه کوو

$$\frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

د مساوي د ښئ او کیڼې خوا د مقایسی څخه باید صورتونه یو تر بله سره منطبق وي نو لازمه ده چې A او B معلوم کړو.

$$x+1 \equiv A(x-3)+B(x+2)$$

که چېرې په ورستنی رابطه کې $x=3$ او $x=-2$ وضع کړو نو په لاس راځي چې

$$\begin{cases} x=3 \Rightarrow 3+1=A.0+B.5 \Rightarrow 4=5B \Rightarrow B=\frac{4}{5} \\ x=-2 \Rightarrow -2+1=A(-5)+B.0 \Rightarrow -1=-5A \Rightarrow A=\frac{1}{5} \end{cases}$$

لهذا

$$\frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{1}{5}.\frac{1}{(x+2)}+\frac{4}{5}.\frac{1}{(x-3)}$$

دوهمه طریقه. د صورتونو د مقایسې څخه A او B په لاندې ډول معلوموو.

$$x+1 \equiv A(x-3)+B(x+2)$$
$$\Rightarrow x+1 \equiv (A+B)x-3A+2B$$

له دی ځایه لاندې دوه مجهوله معادلې په لاس راځی

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{5} \quad , \quad B=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{1}{5}.\frac{1}{x-2}+\frac{4}{5}.\frac{1}{x-3}$$

***34* مثال.** د $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

$$\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{x^2-x+1}{x(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x} \equiv \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+cx}{x^3+2x^2+x}$$

$$x^2 - x + 1 \equiv A(x+1)^2 + Bx(x+1) + cx$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -1 \\ x = -1 \quad \Rightarrow \quad C = -3 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \\ x = 1 \Rightarrow 1 = 4A + 2B + C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{3}{(x+1)^2}$$

په دوهم روش باندې د دواړو خواوو د مقايسې څخه يو د درې مجهوله معادلو سيستم په لاس راوړو چې د حل څخه وروسته A، B، او C معلوميږي.

<u>35 مثال</u>. د $\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}$ په قسمي کسرونو تجزيه کوو.

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1).(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 \equiv A(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow -4 = 5A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{4}{5} \\ x = 0 \Rightarrow -3 = 2A - C \Rightarrow C = \frac{7}{5} \\ x = -1 \Rightarrow 0 = A + 2B - 2C \Rightarrow B = \frac{9}{5} \end{cases}$$

په نتيجه کې

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1).(x^2+2x+2)} = \frac{-4}{5(x-1)} + \frac{9x+7}{5(x^2+2x+2)}$$

36 مثال. د $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کوو.

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

د کسرونو د هم مخرج کولو وروسته دواړه خواوې سره مقایسه کوو لرو چې

$$2x^2+3=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)$$

$$\Rightarrow 2x^2+3=Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)$$

په دې ترتیب د معادلو دا لاندې سیستم په لاس راځي

$$\begin{cases} A=0 \\ B=-2 \\ A+B=0 \\ B+D=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=0 \\ B=-2 \\ C=0 \\ D=1 \end{matrix}$$

لهذا

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{x^2+1}+\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

دوهمه درجه یو مجهوله معادله

د یوې دوهمې درجې یو مجهوله معادلې عمومي حالت عبارت دی له

$$ax^2+bx+c=0$$

چې په هغې کې a، b او c حقیقی عددونه او $a\neq 0$ دی.

د دوهمې درجې يو مجهوله معادلې حل د مربع د تکميل په طريقه

دا معادله د مربع د تکميل په طريقه په لاندې ډول حل کوو.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx = -c \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

د $\Delta = b^2 - 4ac$ لپاره د معادلې جذرونه عبارت دي له

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

لومړی حالت که چېرې د $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حقيقي يو تربله مختلف جذرونه لري. او هغه عبارت دي له

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

دوهم حالت. که چېرې $\Delta = 0$ وي معادله دوه مضاعف جذرونه $x_1 = x_2 = \frac{-b}{a}$ لري.

دريم حالت. که $\Delta < 0$ وي، معادله حقيقي جذرونه نه لري او وايې چې معادله په دې حالت کې دوه مختلط جذرونه لري.

که چېرې b جفت وي نو د $ax^2 + bx + c = 0$ معادلې حل اسانه کيږي.

په دې حالت کې $b = 2b'$ ږدي نو لرو چې

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2\left(-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}\right)}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

په دې ترتيب

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \quad , \quad \Delta' = b'^2 - ac$$

په داسې حال کې چې Δ' او Δ د معادلې له نظره مشابه خاصيتونه لري.

<u>37 مثال</u>. د $x^2 - 3x + 2 = 0$ معادله حل کړئ.

حل : په دې معادله کې $a = 1$ ، $b = -3$ او $c = 2$ دي. بنا پردې

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1 > 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-(-3) - 1}{2} = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{-(-3) + 1}{2} = 2$$

<u>38 مثال</u>. د $x^2 - 2x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل : د $a = 1$ ، $b' = \frac{-2}{2} = -1$ او $c = 1$ لپاره لرو چې

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - (1)(1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b'}{a} = -1$$

بنا پردې معادله مضاعف جذرونه $x_1 = x_2 = -1$ لري.

<u>39 مثال</u>. د $x^2 - 6x + 25 = 0$ معادله حل کړئ.

حل . دلته $a = 1$ ، $b = -6$ او $c = 25$ دي نو

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(25) = 36 - 100 = -64$$

څرنګه چې $\Delta < 0$ ، نو معادله حقيقي جذرونه نه لري مګر مختلط جذرونه په لاندې ډول په لاس راځي.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 + 4i \\ x_2 = 3 - 4i \end{array}$$

<u>40 مثال</u>. د $(x-1)^2 = 2 + x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$(x-1)^2 = 2 + x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2 + x \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow a = 1, b = -3, c = -1 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(1)(-1) = 9 + 4 = 13$$
$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{13}}{2} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$
$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{13}}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

<u>يادداشت</u>. په دې بحث کې مو فورمول د تکميل مربع په طريقه په لاس راوړ.
دوهمه درجه معادلې کولی شو ددې طريقې تر څنګ په يوه بله موازي طريقه هم حل کړو.
او هغلته فورمول نه کاروو.

<u>41 مثال</u>. د $x^2 - 8x + 15 = 0$ معادله حل کړئ.
حل : دا معادله د تکميل مربع د مستقيم روش په وسيله په لاندی ډول حل کيږی.

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + 15 = 16$$
$$\Rightarrow (x-4)^2 = 1 \Rightarrow x - 4 = \pm 1 \Rightarrow x = 4 \pm 1$$
$$\Rightarrow x_1 = 4 - 1 = 3 \quad , \quad x_2 = 4 + 1 = 5$$

42 مثال. لاندې معادلې حل کړئ.

$$a.\quad x^2-6x+25=0 \quad , \quad b.\quad x^2-8x+25=0$$

حل .

$$a.\quad b^2-4ac=(-6)^2-4(1)(25)=36-100=-64$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{-64}}{2}=\frac{6\pm 8\sqrt{-1}}{2}=\frac{6\pm 8i}{2}=3\pm 4i$$

$$x_1=3+4i \quad , \quad x_2=3-4i$$

$$b.\quad \Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4(1)(25)=64-100=-36$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{8\pm 6\sqrt{-1}}{2}=\frac{8\pm 6i}{2}=4\pm 3i$$

$$x_1=4+3i \quad , \quad x_2=4-3i$$

43 مثال. د $x^2-2x-2\sqrt{3}-3=0$ معادله حل کړئ.

حل .

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-(1)\left(-2\sqrt{3}-3\right)}}{1}=1\pm\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}$$

$$\Rightarrow \quad x=1\pm\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=1\pm\left(1+\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_1=2+\sqrt{3} \quad , \quad x_2=-\sqrt{3}$$

44 مثال. د $x^2-2\sqrt{3}x-9=0$ معادله حل کړئ.

حل. دلته ښه دا ده چې $b'=\frac{b}{2}=-\sqrt{3}$ په نظر کې ونیول شي. نو په دې ترتیب

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)(-9)}}{1}=\sqrt{3}\pm\sqrt{12}=\sqrt{3}\pm 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 3\sqrt{3} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

د دوهمې درجې دوه مجهوله معادلو حل د تجزئې په طريقه

د تجزيې په طريقه د دوهمې درجې يو مجهوله معادلې حل تکميل مربع ته ورته په لاندې ډول بيانوي.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

ليدل کيږي چې مخکښنې فورمول په لاس راغی. عددي سوالونه کولی شو په همدی طريقه حل کړو.

45 مثال. د $x^2 - 6x + 8 = 0$ معادله د تجزئې په طريقه حل کړئ.

حل:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 - 1^2 = 0 \Rightarrow (x-3-1)(x-3+1) = 0 \Rightarrow (x-4)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 \\ x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 \end{array}$$

د دوهمې درجه معادلې د جذرونو مجموعه او د ضرب حاصل

که چېرې x_1 او x_2 د $ax^2 + bx + c = 0$ معادلې جذرونه اوسي، نو لرو چې:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

بنا پردې $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ او $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ دی. اوس که د اصلي معادلې دواړه خواوې پر a تقسیم کړو لرو چې

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + x_1 x_2 = 0$$

په نتیجه کې هغه معادله چه جذرونه یې x_1 او x_2 دي عبارت ده له

$$x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + x_1 x_2 = 0$$

هغه معادلې چې په دوهمه درجه معادلو بدلیږي

اول . جذر لرونکی معادلې. په دې معادلو کې مجهول کمیتونه قسمي یا کلي تر جذر لاندې وي.

ددا ډول معادلو د حل لپاره یوه جذر لرونکي افاده د تساوي یوې خواته ساتو نو د تساوی ددواړو خواو د مربع کولو څخه هغه جذر له منځه ځی. او په نهائي حالت کې معادله په اوله درجه یا دوهمه درجه معادله بدلیږی. د مربع کولو په اړدو کې امکان شته چې ځینې منفي ایشارې تلف شي. نو ځکه باید لاس ته راغلي جذرونه په اصلي معادله کې وضع او امتحان شي. هغه قیمتونه چې معادله صدق کړي هغه د معادلې حل دی.

***44* مثال.** د $3\sqrt{x} + \sqrt{9x+13} - 13 = 0$ معادله حل کړئ.

حل :

$$3\sqrt{x} + \sqrt{9x+13} - 13 = 0 \Rightarrow \sqrt{9x+13} = 13 - 3\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{9x+13}\right)^2 = \left(13 - 3\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow 9x + 13 = 169 - 78\sqrt{x} + 9x$$

$$\Rightarrow 78\sqrt{x} = 156 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

که چېرې احتمالي جذر $x=4$ په اصل معادله کې وضع شي نو هغه نه صدق کوي په دې ترتیب معادله حل نه لري.

45 مثال . د $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13} \Rightarrow \left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}\right)^2=\left(\sqrt{6x+13}\right)^2$$
$$x+7+x+2+2\sqrt{x+7}\sqrt{x+2}=6x+13 \Rightarrow \sqrt{x+7}\sqrt{x+2}=2x+2$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x+7)(x+2)}\right)^2=(2x+2)^2 \Rightarrow (x+7)(x+2)=(2x+2)^2$$
$$\Rightarrow x^2+9x+14=4x^2+8x+4 \Rightarrow 3x^2-x-10=0$$
$$\Rightarrow (x-2)(3x+5)=0 \Rightarrow x_1=2\,,\ x_2=-\tfrac{5}{3}$$

د لاس ته راغلو جذرونو څخه نومړي $x=2$ معادله صدق کوي مګر $x=-\dfrac{5}{3}$ دا معادله نه صدق نه کوي، نو د معادلې جذر $x=2$ دی.

د عوض کولو وړ معادلې

د دې سره سره چې ددوو درجو څخه د لوړې درجې معادلې زموږ په اوسني بحث کې ګنجایش نه لري. خو ځینې ډول معادلې کیدلی شي د متحول په عوض کولو سره په دوهمه درجه معادلو راواوړي. او هغه حل شي. څو مثالونه ئی په لاندې ډول ورکوو.

46 مثال. د $x^4-13x^2+36=0$ معادله حل کړئ.

حل: دلته $y=x^2$ په نظر کې نیسو لرو چې

$$y^2-13y+36=0 \Rightarrow (y-4)(y-9)=0$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} y_1=4 \\ y_2=9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^2=4 \\ x^2=9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=-2\,,\ x_2=2 \\ x_3=-3\,,\ x_4=3 \end{matrix}$$

په دې ترتیب سره پورتنی معادله څلوور حلونه لري.

47 مثال. د $x^4-21x^2-100=0$ معادله حل کړئ.

حل: بیا هم $y=x^2$ وضع کوو

$$y^2-21y-100=0 \Rightarrow (y+4)(y-25)=0$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} y_1=-4 \\ y_2=25 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^2=-4 \\ x^2=25 \end{matrix} \Rightarrow x_1=-5\,,\ x_2=5$$

دا معادله دوه حلونه لري.

48 مثال. د $x^4-18x^2-81=0$ معادله حل کړئ.

حل: $y=x^2$ عوض کوو په لاس راځي چې

$$y^2-18y+81=0 \quad \Rightarrow \quad (y-9)^2=0$$
$$\Rightarrow y=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x_1=-3\,,\ x_2=3$$

49 مثال . د $x^4+2x^2+3=0$ معادله حل کړئ.

حل: $y=x^2$عوض کوو لرو چې

$$y^2+3y+5=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta=3^2-4\cdot 1\cdot 5=-11<0$$

دا معادله د حل وړنه ده نو ځکه اصلي معادله هم حل نه لري.

50 مثال. $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-2=0$ حل کړئ.

حل: $y=\sqrt[4]{x}$عوض کوو، لرو چې

$$y^2-y-2=0 \Rightarrow (y+1)(y-2)=0 \Rightarrow y_1=2\,,\ y_2=-1$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x}=2 \Rightarrow \left(\sqrt[4]{x}\right)^4 = 2^4 \Rightarrow x=16$$

څرنګه چې $\sqrt[4]{x}$ مثبت دی نو ځکه په -1 سره نشي مساوي کيدلی، نو $x=16$ ددې معادلې يوازنی جذر دی.

<u>51 مثال</u>. د $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$ معادله حل کړئ.

حل : دلته $y=x+\frac{1}{x}$ ږدو، نو لرو چې

$$2y^2-7y+5=0 \Rightarrow y_1=1,\ y_2=\tfrac{5}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \Rightarrow \Delta=-3<0 \\ x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2-5x+2=0 \Rightarrow x=2,\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

بنا پردې د معادلې جذرونه $x_1=2$ او $x_2=\frac{1}{2}$ دي.

<u>52 مثال</u>. د $\left(x^2+3x+2\right)^2-8\left(x^2+3x\right)=4$ معادله حل کړئ.

حل: اوس $u=x^2+3x+2$ په نظر کې نيسو بنا پر دې.

$$\left(x^2+3x+2\right)^2-8\left(x^2+3x\right)=4 \Rightarrow (u+2)^2-8u=4 \Rightarrow u^2-4u=0 \Rightarrow u=4,\ 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x^2+3x=4 \Rightarrow x_1=-4,\ x_2=1 \\ x^2+3x=0 \Rightarrow x_3=-3,\ x_4=0 \end{matrix}$$

نو د معادلې څلوور جذرونه عبارت دي له -4 ، -3 ، 1 او 0 .

دريم. پارامتريکې معادلې.

کله چې د يوې دوهمې درجې معادلې ځينی ضريبونه د يو نوي متحول (پارامتر) له جنسه مثلاً m راکړل شوی وي په طبيعي توګه د معادلې جذرونه هم د همدې پارامتر تابع وي. ځينې پارامتريکي معادلې ګټه ورې کيدلی شي.

<u>53 مثال</u>. د $-x^2+mx+\frac{2m+1}{4}=0$ معادله حل کړئ.

حل: دلته $a=-1$ ، $b=m$ او $c=\frac{2m+1}{4}$ ، نو

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(-1)\frac{2m+1}{4} = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$$

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{(m+1)^2}}{-2} = \frac{-m \pm (m+1)}{-2} = \frac{-m \pm (m+1)}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-m-(m+1)}{-2} = m + \frac{1}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{-m+(m+1)}{-2} = -\frac{1}{2}$$

54 مثال. د m حدود دا ډول معلوم کړئ چې د $(m-2)x^2 - 2mx + (m^2-4) = 0$ معادله دوه مختلف الایشاره جذرونه ولري

حل:

$$x_1x_2 < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m^2-4}{m-2} < 0 \Rightarrow m+2 < 0 \Rightarrow m < -2 \cdot$$

55 مثال.د m پارامتر دا ډول معلوم کړی چې د $x^2 + 6x + m = 0$ معادلې یو جذر د بل جذر دوه برابره وي.

حل:که چېرې $x_1 = 2x_2$ وي واضح ده چې

$$x_1 + x_2 = -6 \Rightarrow 2x_2 + x_2 = -6 \Rightarrow 3x_2 = -6 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$\Rightarrow x_1 = 2x_2 = -4 \Rightarrow m = x_1x_2 = (-4)(-2) = 8$$

56 مثال.د m قیمت دا ډول معلوم کړئ چې د $2x^2 - 3x + m = 0$ معادلې جذرونه یو د بل معکوس وي.

حل: که x_1 او x_2 یو تر بله سره معکوس وي نو څرګنده ده چې $x_1x_2 = 1$ له بلې خوا

$$2x^2 - 3x + m = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow \frac{m}{2} = x_1x_2 \Rightarrow \frac{m}{2} = 1 \Rightarrow m = 2$$

د دوهمې درجې افادو د علامو معلومول

د يوې دوهمې درجې افادې ax^2+bx+c د علامو د معلومولو څخه مطلب د x د حقيقي قيمتونو د هغو مقدارونو معلومول دي چې د هغــوی لپـــاره نومـــوړې مقدارونه مثبت، منفي يا صفر وي. په دې مقصد لومړی د $ax^2+bx+c=0$ معادله حل کوو، د هغې جذرونه معلوموو او بيا د اشارو د معلومولو په جدول کې د مخکښنی افادې علامې ددوو جذرونو د لرلو په حالت کې د يو جذر د لرلو په حالت کې او د جذر د نه لرلو په حالت کې په لاندی ډول معلوموو.

لومړی حالت: که چېرې د $ax^2+bx+c=0$ معادله دوه جذر x_1 او x_2 ولري $(\Delta>0)$نو افاده دا لاندې شکل لري

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

ددې په نظر کې نيولو سره چې $a>0$ اويا$a<0$ وي د پورتنی افادې د علامو معلول د لاندې جدول سره سم سرته رسيږي.

$a>0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		∞
$x-x_1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-x_2$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a<0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	∞

$x-x_1$	$-\quad 0\quad +\quad +\quad +$
$x-x_2$	$-\quad -\quad -\quad 0\quad +$
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+\quad 0\quad -\quad 0\quad +$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	$-\quad 0\quad +\quad 0\quad -$

د پورتنی جدول څخه ليدل کيږي چې د افادې اشاره د جذرونو تر منځ د a د ایشارې په خلاف او د جذرونو څخه خارج د a د ایشارې سره موافقه ده.

دوهم حالت: که چیرې $ax^2+bx+c=0$ یو مضاعف جذر ولري $(\Delta=0)$ ، نو افاده دا لاندې شکل لري.

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

ددې په نظر کې نیولو سره چې $a>0$ او یا $a<0$ دی د افادې د علامو معلومول د لاندې جدول سره سم تر سره کیږي.

$a>0$

x	$-\infty\qquad -\frac{b}{2a}\qquad \infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\quad +\quad 0\quad +\quad +$
$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\quad +\quad 0\quad +\quad +$

$a<0$

x	$-\infty\qquad -\frac{b}{2a}\qquad \infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\quad +\quad 0\quad +\quad +$
$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$-\quad -\quad 0\quad -\quad -$

په دې حالت کې لیدل کیږي چې د افادې اشاره د a د اشارې سره موافقه ده (مګر $x=-\frac{b}{a}$ د څخه پرته چې هغلته صفر کیږي).

دریم حالت. که چېرې د $ax^2+bx+c=0$ معادله کوم حقیقي جذر، ونه لري $(\Delta<0)$ نو افاده دا لاندې شکل لري.

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right]$$

ددې په نظر کې نیولو سره چې $a>0$ او یا $a<0$ دي پورتنی افاده د لاندې جدول سره سم د a هم ایشاره ده.

$a>0$

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ ∞
ax^2+bx+c	$+\quad+\quad+\quad+\quad+$

$a<0$

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ ∞
ax^2+bx+c	$-\quad-\quad-\quad-\quad-$

په دې حالت کې لیدل کیږي چې د افادې اشاري د a د ایشاره سره موافقه ده.

57 مثال. د x^2-6x+5 افادې ایشاره معلومه کړئ چې د x د کومو قیمتونو لپاره مثبت، منفي، یا صفر دی؟

حل : لومړی د x^2-6x+5 معادله حل کوو.

$$x^2-6x+5=0\Rightarrow(x-5)(x-1)=0\Rightarrow x_1=1,x_2=5$$

x	$-\infty$		1		5		∞
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x-1)(x-5)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

نو د x^2-6x+5 افادې د $x \in (-\infty, 1) \cup (5, \infty)$ لپاره مثبت د $x \in (1,5)$ لپاره منفي او د $x \in \{1,5\}$ لپاره صفر دی.

***58* مثال**. د $-x^2+6x-8$ افادې اشاره معلومه کړئ.

حل: د $-x^2+6x-8=0$ معادلې له حل څخه په لاس راځي چې جذرونه يې $x=2$ او $x_2=2$ دي. بناپر دی $-x^2+6x+8=-(x-2)(x-4)$ ، نو د افادې اشاره د x د هغو قيمتونو لپاره کوم چې د جذرونو څخه خارج وي د $a=-1$ سره هم اشاره يعنې منفي او د جذرونو په داخل کې د هغې مخالفه يعنې مثبت ده اما په جذرونو کې صفر کيږي. په بل عبارت د $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$ لپاره د $-x^2+6x-8$ افادې اشاره منفي د $x \in (2,4)$ لپاره دا افاده مثبته اشاره لري او د $x \in \{2,4\}$ لپاره د افادې قيمت صفر دی. تفصيل په لاندې جدول کې.

x	$-\infty$		2		4		∞
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

$(x-2)(x-4)$	$+ \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \quad +$
$-(x-2)(x-4)$	$- \quad - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \quad -$

59 مثال . د x^2-6x+9 افادې اشاره معلومه کړئ.

حل: د $x^2-6x+9=0$ معادله مضاعف جذرونه لري یعنی $x=3x^2-6x+9(x-3)^2$. واضح ده چې ددې افادې ایشاره د x د ټولو قیمتونو لپاره مثبت (اما یوازې په $\mathrm{x}=3$ کې صفر دی).

60 مثال. د x^2+x+9 افادی ایشاره معلومه کړئ.

حل: څرنګه چې $\Delta=1-4\cdot1\cdot9=-5<0$ نو د $x^2+x+9=0$ معادله حل نه لري او د افادې ایشاره د $a=\pm1$ سره هم ایشاره ده یعنی د x په ټولو قیمتونو کې مثبت ده.

دوهمه درجه نامساوي ګانې

په عمومی توګه دوهمه درجه نامساوي ګانې څلوور حالتونه لري.

$$ax^2+bx+c>0 \quad , \quad ax^2+bx+c\geq 0$$

$$ax^2+bx+c<0 \quad , \quad ax^2+bx+c\leq 0$$

د یوې دوهمه درجې نامساوی د حل څخه مطلب د x د هغو قیمتونو معلومول دي د کومو لپاره چې راکړل شوي چې یو له پورتنیو څلوورو حالتونو څخه به وي صدق کړي. څرګنده ده چې ددې نامساوي د حل لپاره باید د افادې علامې معلومې شي، چې بیا د x لپاره هغه ناحیې معلومیږي په کومو کې چې نامساوي صدق کوي.

61 مثال . د $x^2-4x-5>0$ نامساوي حل کړئ.

حل. <u>لومړی طریقه</u> د $x^2-4x-5=0$ معادلې جذرونه معلوموو، د x^2-4x-5 افادې اشارې معلوموو.

$$x^2-4x-5=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=5$$
$$\Rightarrow x^2-4x-5=0=(x+1)(x-5)$$

بناپردې

x	$-\infty \quad -1 \quad 5 \quad \infty$
$x+1$	$- \quad - \quad 0 \quad + \quad + \quad + \quad +$
$x-5$	$- \quad - \quad - \quad - \quad 0 \quad + \quad +$
$(x+1)(x-5)$	$+ \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \quad +$

واضح ده چې د نامساوي حل عبارت له $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$ څخه دی.

دوهمه طریقه

$$x^2-4x-5>0 \Rightarrow (x+1)(x-5)>0 \Rightarrow \begin{matrix} x+1>0 \wedge x-5>0 \\ x+1<0 \wedge x-5<0 \end{matrix}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} x>-1 \wedge x>5 \Rightarrow x>5 \\ x<-1 \wedge x<5 \Rightarrow x<-1 \end{matrix} \Rightarrow x<-1 \vee x>5$$

بناپردې د مطلوبه حل ناحیه $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$ ده.

<u>62 مثال</u>. د $3x^2+2x+2<x^2+x+2+4$ نامساوي حل کړئ.

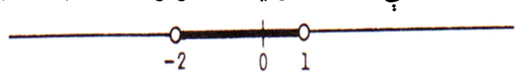
حل:

$$3x^2+2x+2<x^2+x+4 \Rightarrow x^2+x-2<0$$
$$\Rightarrow (x+2)(x-1)<0$$

بناپردې

x	$-\infty$		-2		1		∞
$x+2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+2)(x-1)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

له جدول څخه څرګنده ده چې د نامساوي د حلونو ست $(-2, 1)$ **ده**

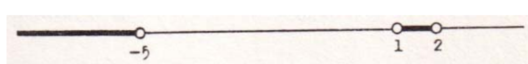


<u>*63* مثال</u>. د $(x+5)(x-1)(x-2)<0$ **نامساوي حل کړئ.**

حل: د لاندې جدول څخه استفاده کوو.

x	$-\infty$		-5		1		2		∞
$x+5$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+5)(x-1)(x-2)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

له جدول څخه په څرګنده لیدل کیږي چې د نامساوي حل عبارت دی له $(-\infty, -5)\cup(1, 2)$



<u>*64* مثال</u>. د $\frac{2x-8}{3x+15} > 0$ **نامساوي حل کړئ.**

حل:

x	$-\infty$			-5			4		∞
$2x-8$		$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$3x+15$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$\dfrac{2x-8}{3x+15}$		$+$	$+$	∞	$-$	0	$+$	$+$	

لیدل کیږي چې ددې نامساوي حل عبارت له $(-\infty\,,-5)\cup(4\,,\infty)$ عددي سېټ څخه دئ.

ددوهمې درجې پولینومونه ګرافیکي ارائه

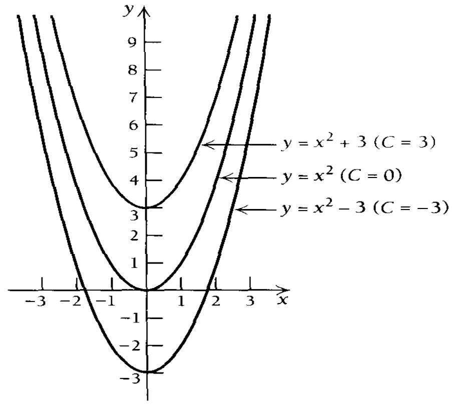
د $f(x) = ax^2 + bx + c$ دوهمه درجه پولینوم په نظر کې نیسو، چه دلته a، b او c حقیقي عددونه او $a \neq 0$ دی. ددې ډول افادو د رسم کولو لپاره لاندنې مقدماتي مثالونه په نظر کې نیسو.

65 مثال. د $y = x^2 + c$ ګراف کله که $c = 0$, $c = 3$, او $c = -3$ وي رسم کړئ.

حل. د $c = 0$ په حالت کې یعنې $y = x^2$ ګراف د ځومعینو قیمتونو په استفاده د لاندې جدول په نظر کې نیولو سره رسم کوو

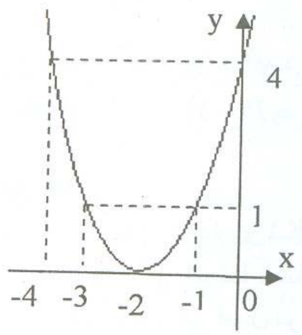
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

ددې ګراف انتقال د دریو واحدونو په اندازه پورته او کښته د $y = x^2 + 3$ او $y = x^2 - 3$ حالتونه را په ګوته کوي.



66 مثال. د $f(x) = (x+2)^2$ گراف رسم کړئ او د مخکښینی گراف سره يې پرتله کړئ.

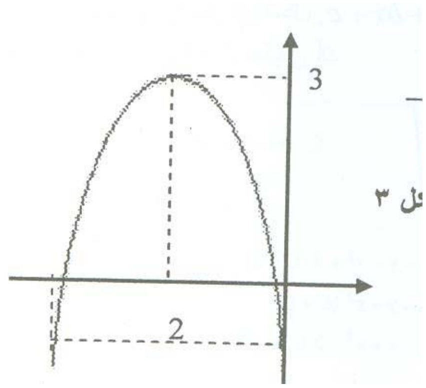
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	9	4	1	0	1	4	9



67 مثال. د $g(x) = -(x+2)^2$ گراف رسم کړئ.

بیاهم د مناسبو قیمتونو جدول په لاندې ډول په نظر کې نیسو.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$g(x)$	-6	-1	2	3	2	-1	-6



په دريو ورستيو مثالونو کې گرافونه په کامل توگه يو بل ته ورته دي.
مګر د هغوی موقيعت او د راسونو خوا (سمت) يو تر بله سره فرق لري.

عمومی حالت

اوس په عمومي توګه $f(x)=a(x-h)^2+k$ افاده د 14 مثال سره پرتله کوو. ليدل کيږي چې د هغې اعظمي يا اصغري عبارت له (h,k) څخه دي، خو د اعظمي يا اصغري ډول د a په اشاره پوري تړلي دي. اوس نو $f(x)=ax^2+bx+c$ ته بدلون ورکوو او د پورتنی يادشوي په ډول يې بدلوو

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c$$

$$\Rightarrow f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

بنا پردې $$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

په دې ترتيب د $k=\frac{4ac-b^2}{4a}$ او $h=\frac{-b}{a}$ لپاره د $f(x)=a(x-h)^2+k$ افاده دا شکل اخلي چې گراف يې $y=x^2$

ګراف ته ورته دی او ضریب یې a دی کوم چې د ګراف پلنوالی کموي او زیاتوی کله که a منفی وی د ګراف خوا (سمت) معکوس کیږي.

(h,k)برسیره پردې ګراف د h واحدونو په اندازه په افقي ډول او k واحدونو په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي او د پارابولا راس دی.

<u>***68* مثال**</u>. د پارابولا د راس نقطه په $f(x)=x^2-4x+2$ کې معلومه کړئ.

حل. د پارابولا راس د (h,k) له نقطې څخه عبارت دئ. په داسې ډول چې

$$h=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2 \quad \text{او} \quad k=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{8-16}{4}=-2$$

نو بنا پر دې د پارابولا راس $(2,-2)$ دی.

<u>د افقي محور سره تقاطع</u>

د $y=ax^2+bx+c$ معادلې ګراف افقي محور هغه وخت قطع کوي چې $y=0$ وي. نو دا نقطې د $y=ax^2+bx+c=0$ معادلې د حل څخه په لاس راځي، خو دا لاندې درې امکانه مطرح کیږي.

<u>**اول**</u>. که چېرې معادله دوه جذره x_1 او x_2 ولري نو د پارابولا اړونده ګراف، افقی محور په دوو نقطو $(x_1,0)$ او $(x_2,0)$ کې قطع کوي.

<u>**دوم**</u>. که چېرې معادله یوازې یو جذر x_0 ولري نو د پارابولا راس د افقي محور سره د په $(x_0,0)$ نقطه کې مماس دی.

<u>**دریم**</u> . که چېرې معادله حل ونه لري، نو پارابولا د افقي محور سره مشترکه نقطه نه لري (د محور څخه پاس یا لاندې موقیعت اخلي)

<u>د عمودی محور سره تقاطع</u>

پارابولا $y=ax^2+bx+c$ عمودي محور د $(0,c)$ په نقطه کې قطع کوي.

اعظمی او اصغری

د $y = ax^2 + bx + c$ د پارابولا شکل لري، داسې چې د $a > 0$ لپاره د پارابولا راس کښته خواته او د $a < 0$ لپاره د پارابولا راس پورته خواته وي.

خلاصه

د $f(x) = ax^2 + bx + c$ ګراف د پارابولا شکل لري، داسې چې

1 . د $x_0 = \frac{-b}{2a}$ په نقطه کې اعظمی لري که چیرې $a < 0$ وی.

2. د $x_0 = \frac{-b}{2a}$ په نقطه کې اصغري لري که چېرې $a > 0$ وي.

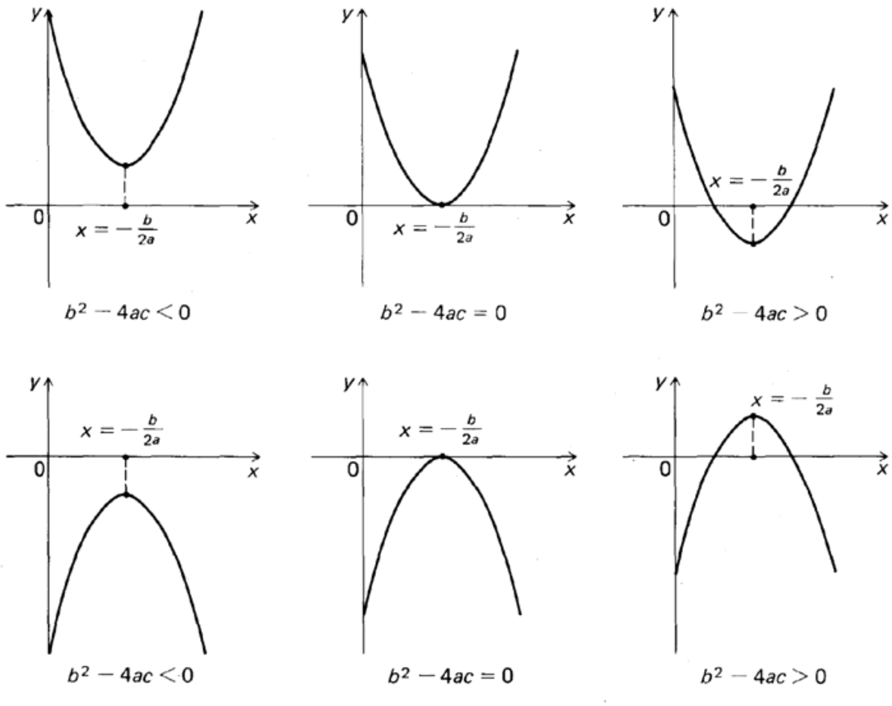
3. د ګراف اعظمي یا اصغري نقطه (x_0, y_0) دی، په داسې حال کې چې $x_0 = \frac{-b}{2a}$ او

$$y_0 = f(x_0) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

دلته $y_0 = f(x_0)$ د تابع اعظمي یا اصغري قیمت بلل کیږي.

4. د افقي محور سره د ګراف د تقاطع نقطې د $(x_1, 0)$ او $(x_2, 0)$ څخه عبارت دي، که چېرې x_1 او x_2 د $x^2 + \mathrm{b} + \mathrm{c} = 0$ معادلې جذرونه وي. که چېرې دا معادله یو جذر ولري او هغه x_0 وي، نو په هغه صورت کې ګراف د $(x_0, 0)$ په نقطه کې د افقي محور سره مماس دی. که معادله جذر ونه لري نو ګراف افقي محور نه قطع کوي.

5. د ګراف د تقاطع نقطه د عمودي محور سره د $(0, \mathrm{c})$ څخه عبارت دی.



<u>69 مثال</u>. د $f(x) = x^2 - 6x + 5$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل. (الف). څرنګه چې $a = 1 > 0$ دی، نو ګراف اصغري نقطه لري.

(ب). اصغري نقطه عبارت له (h,k) څخه دی، داسې چې

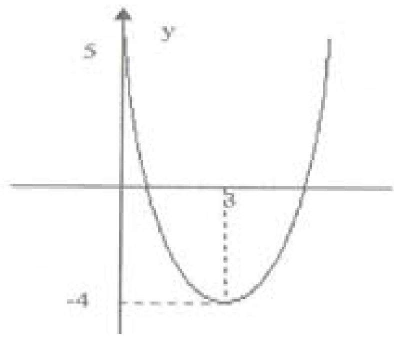
$$h = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \quad , \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1).5 - (-6)^2}{4(1)} = -4$$

(ج). **د x محور سره د منحني تقاطع:** ګراف د x محور په هغو نقطو کې قطع کوي چې $y = 0$ وي. او څرنګه چې

$$y = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$$

نو ګراف د x محور په دوو نقطو (1,0) او (5,0) کې قطع کوي.

(د). **د y مسحور سره د منحني تقاطع:** ګراف د y محور په $x = 0$ کې قطع کوي. په دې ترتیب په (0,5) کې د y محور قطع کوي.



عبارتی سوالونه

په رياضی کې دوه ډوله مسئايل طرحه کيږي. لومړی برخه د رياضي خالص مسايل دي چې فورمولونه، قضيئ او قوانين په برکې نيسي. او دوهم ډول د ورځنی ژوند او کارونو مسايل دي. چې د هغوی د تحليل او منطقي رابطو په اساس کولی شو هغه رياضي رابطو او قاعدو ته راجع کړو. او دا ډول مسالې عبارتي وي او دوه مرحله لري.

په لومړی مرحله کې د عبارتی سوال د تحليل څخه د رياضی مسئاله په لاس راځي او په اصطلاح کې دی مرحلې ته د رياضی مودل سازي (فورمول بندي) وائي. په دوهمه مرحله کې د رياضي په لاس راغلي مسئاله حل کيږي. دلته يوازی څو مسئالې چې د معادلو مربوط وي، مودل سازی او تحليل کيږي.

<u>70 مثال</u>. د يو مستطيل اږدښت او پلنوالی (طول او عرض) معلوم کړئ چې محيط يې $50cm$ او مساحت يې   وي.

حل: قبلوو چې د مستطيل اږدوالی x سانتی متره وي، نو عرض يې $25-x$ سانتي متره دې. په دی ترتيب د هغې مساحت عبارت دی له

$$x(50-x)=50 \Rightarrow x^2-25x+150=0 \Rightarrow (x-10)(x-15)=0 \Rightarrow x_1=10\,,\ x_2=15$$

پــــه دې ترتيـــــب د مســــــتطيل اوږدوالـــــی $x = 15cm$ او پلنـــــوالی $25 - x = 10cm$ دی.

<u>*71* مثال</u>. يو موټر $60\frac{km}{h}$ فاصله په يو معلوم سرعت سره طی کوي. که چېرې ددې موټر سرعت $40\frac{km}{h}$ زيات شي نو د سفر موده نيم ساعت کميږي. د موټر اولنی سرعت معلوم کړئ.

حل: که چېرې د موټر اولنی سرعت x وي، نو ددې په نظر کې نيولو سره چې د فاصلې خارجقسمت پر سرعت باندې د سفر موده راکوي نو

$$\frac{600}{x} - \frac{600}{x+40} = \frac{1}{2} \Rightarrow 600 \cdot 2(x+40) - 600 \cdot 2x = x(x+40)$$

$$\Rightarrow x^2 - 40x + 48000 = 0 \Rightarrow (x-200)(x+220) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 200 \\ x_2 = -240 \end{matrix}$$

په دې ترتيب د موټر سرعت $200\frac{km}{h}$ دی.

<u>*72* مثال</u>. اقبال يو کار 5 ورځې نسبت حمزه ته زر خلاصوي. که چېرې دواړه په يو وخت کې کار وکړی نو هغه کار به په 10 ورځو کې تمام کړي، معلوم کړئ چې هر يو به ځانته ځانته دا کار په څو، څو ورځو کې تمام کړئ.

حل: که چېرې حمزه هغه کار په n ورځو کې سرته رسوي، نو اقبال هغه کار په $n - 5$ ورځو کې تر سره کوي. په دې ترتيب

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-5} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10(n-5) + 10n = n(n-5) \Rightarrow n^2 - 25n + 50 = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 200}}{2} \Rightarrow n_1 = 2.2\ ,\ n_2 = 22.8$$

لیدل کیږی چې $n = 22.8h$ د حمزه د کار وخت او $n - 5 = 17.8h$ د اقبال د کار موده په لاس راځي.
مگر د $n = 2.2h$ د حمزه د کار موده منطقی نه ده، ځکه بیانو د اقبال د کار موده $n - 5 = -3.5h$ په لاس راځې چې دا ناممکنه ده.

<u>**73 مثال**</u>. ددوو عددونو د مربع ګانو مجموعه 34 دی که چېرې دوهم عدد د دوهم عدد ددوه چنده څخه یو واحد کم وي، عددونه معلوم کړئ.
حل: که لومړی عدد n په نظر کې ونیول شي نو دوهم عدد $2n - 1$ دی. بنا پر دې

$$n^2 + (2n-1)^2 = 34 \Rightarrow 5n^2 - 4n - 33 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = (-2)^2 - 5(-33) = 169 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 13$$

$$\Rightarrow n = \frac{2 \pm 13}{5} \Rightarrow n_1 = 3\,,\, n_2 = -2.2$$

که چېرې لومړی عدد $n = 3$ وي نو دوهم عدد $2n - 1 = 5$ دی.په هغه صورت کې چې لومړی عدد $n = -2.2$ انتخاب شي. نو دوهم عدد $2n - 1 = -5.4$ دی.

<u>**74 مثال**</u>. د یو قایم الزاویه مثلث وتر $34cm$ دی، که ددې مثلث یوه قایمه ضلعه د بلې قایمي ضلعې په نسبت $14cm$ اوږده وي. نو د مثلث قایمې ضلعې معلومې کړئ؟
حل: فرض کوو چې لومړی ضلع یې x وي. نو دوهمه ضلع یې $x - 14$ دی
بنا پردې

$$x^2 + (x-14)^2 = (34)^2 \Rightarrow 2x^2 - 28x - 960 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x - 480 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = 7^2 + 480 = 23 \Rightarrow x = 7 \pm 23 \Rightarrow x_1 = 30, x_2 = -16$$

څرنګه چې د مثلث ضلع منفي کیدلی نشي نو لومړی ضلع یې $x = 30cm$ او دوهمه ضلع یې $x - 14 = 16cm$ دی.

تمرين

په لاندې رابطو کې مطابقت او معادله سره جلا او په ګوته کړئ.

$1.\quad 3x-(x+4)=2(x-2) \quad , \quad 2.\quad (x-1)(x+1)=(x-1)^2$

$3.\quad (y-3)^2+3(2y-3)=y(y+1)-y \quad , \quad 4.\quad x+y=\dfrac{2x+2y}{2}$

لاندې اوله درجه معادلې حل کړئ.

$5.\quad 2(x+3)=3(x-1) \quad , \quad . \quad \dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{6}=1 \quad , \quad 6.\quad \dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{4x-5}{x-1}$

$8.\quad \dfrac{4x+3}{5}-\dfrac{2x-3}{3}=\dfrac{x-1}{6} \quad , \quad 9.\quad \dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{2x}{x^2-1}$

لاندې معادله حل کړی.

$10.\quad |2x-8|=4 \quad , \quad 11.\quad |8-4x|=20 \quad , \quad 12.\quad |x-2|=|4-x|$

لاندې دوهمه درجه معادلې حل کړئ.

$13.\quad 3x^2-48=0 \quad , \quad 14.\quad x^2+64=20x \quad , \quad 15.\quad x^2+2x=0$

$16.\quad x^2-\dfrac{17x}{6}=\dfrac{1}{2} \quad , \quad 17.\quad \sqrt{2}x^2-2\sqrt{3}x+\sqrt{2}=0 \quad , \quad 18.\quad x^2=9$

$19.\quad \dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{x^2-75}{x^2+5x+6} \quad , \quad 20.\quad \dfrac{8x-3}{x+3}-2x=4-\dfrac{3x^2}{x+3}$

$21.\quad x+\sqrt{5x+10}=8 \quad , \quad 22.\quad x-2=\sqrt{x^2-3x+1}$

$23.\quad \sqrt{9-x^2}=\sqrt{19-3x^2} \quad , \quad 24.\quad \sqrt{36+x}-2-\sqrt{x}=0$

$25.\quad \sqrt{5x-1}-\sqrt{x}=1 \quad , \quad 26.\quad \sqrt{6x+7}-\sqrt{3x+3}=1$

لاندې د معادلو سيستمونه حل کړئ.

$$27.\quad \begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \quad , \quad 28.\quad \begin{cases} 12x-5y=63 \\ 8x-15y=77 \end{cases}$$

$$29.\quad \begin{cases} \frac{5}{3}x-\frac{2}{5}y=19 \\ 4x+\frac{3}{2}y=21 \end{cases} \quad , \quad 30.\quad \begin{cases} \frac{6}{x}+\frac{5}{y}=4 \\ \frac{14}{x}-\frac{3}{y}=2 \end{cases}$$

$$31.\quad \begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+3y-2x=11 \\ 3x-2y+4z=1 \end{cases} \quad , \quad 32.\quad \begin{cases} \frac{4x}{3}-\frac{3y}{2}-2z=0 \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{4}-\frac{x}{2}=3 \\ \frac{2x}{3}-2=\frac{7y}{4}+z=0 \end{cases}$$

لاندې نامساوي ګانې حل کړئ.

$$33.\quad \frac{x-5}{4}-\frac{x+8}{3}<\frac{x+11}{6} \quad , \quad 34.\quad \frac{7x-3}{8}+\frac{x+31}{4}<\frac{2x+7}{3}$$

$$35.\quad 5x^2+13x-6<0 \quad , \quad 36.\quad x^2-8x+12\ge 0$$

$$37.\quad \frac{4x-2}{-6x+3}>0 \quad , \quad 38.\quad \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}<1 \quad , \quad 39.\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}<0$$

لاندې کسرونه په ممکنه قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

$$40.\quad \frac{1}{x^2-4} \quad , \quad 41.\quad \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} \quad , \quad 43.\quad \frac{1}{x(x^2+x+1)}$$

$$44.\quad \frac{x+2}{x^3+x^2-6x} \quad , \quad 45.\quad \frac{3x^2-10x+14}{(x+1)(x-2)^2} \quad , \quad 46.\quad \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}$$

لاندې د دوه مجهوله نامساوی ګانو سیستمونه حل کړئ.

$$47. \quad \begin{cases} x < 0 \\ y > 1 \end{cases} \quad , \quad 48. \quad \begin{cases} x + y \le 5 \\ x - y \ge 0 \end{cases} \quad , \quad 49. \quad \begin{cases} x - 2y < 8 \\ y - 2x < 8 \end{cases}$$

لاندې نامساوي ګانې حل کړئ.

$$50. \quad x^2 - 7x + 7 < 0 \quad , \quad 51. \quad -x^2 + 6x - 6 > 0$$

$$52. \quad |3x - 18| \le 27 \quad , \quad 53. \quad x^2 - 6x + 9 \ge 0$$

لاندې ګرافونه ترسيم کړئ.

$$54. \quad y = x - 5 \quad , \quad 55. \quad y = 4x \quad , \quad 56. \quad y = (x+2)^2 - 4$$

$$57. \quad y = 2x^2 \quad , \quad 58. \quad y = x^2 - x - 1 \quad , \quad 59. \quad y = x^2 + 3$$

60. ددووعددونو 28 او تفاضل يې 12 دی، عددونه پيدا کړئ.

61. ددوو عددونو مجموعه 21 ده، که چېرې اولنئ عدد ددوهم عدد دوه برابره وي عددونه په ګوته کړئ.

62. ددوو عددونو مجموعه 37 دی که چېرې لوی عدد پر کوچنی عدد باندې تقسيم شي، نو خارجقسمت 3 او باقيمانده 5 په لاس راځي، عددونه معلوم کړئ.

63. که چېرې ديوې مربع هر ضلع 4 متر اوږده کړو نو مساحت يې 64 متر مربع زياتيږي نو ددې مربع هره ضلع څو متر دی.

64. د يوقايم الزاويه مثلث يوه ضلع 20 سانتي متره دی، که چېرې د مثلث وتر ددوهمې ضلعې څخه 10 سانتي متره اوږده وي نو مجهولې ضلعې يې معلومې کړئ.

65. که چېرې د يو کسر د صورت سره 2 عدد زيات کړو اوله مخرج څخه يې 1 کم شي نو هغه کسر $\frac{1}{2}$ کيږي، اوله چېرې د همدې کسر د صورت سره 1 اضافه شي او له مخرج څخه يې 2 کم شي $\frac{3}{5}$ په لاس راځي. نو دا کسر معلوم کړئ.

66. دوه کاله دمخه منصور د خپل ځوی شپږ برابره عمر درلودی. 18 کاله وروسته د منصور عمر د هغه د ځوی دوه برابره کیږي. د هغوی عمرونه به څومره وی.

67. پنځه ګیلاسونو او پنځو پشقابونه 115 افغانی وي، نو د ګیلاسونو او پشقابونو بیه معلومه کړئ.

68. د یوه مثبت عدد درې چنده ددوهم عدد څخه د 5 په اندازه زیات دی، که چیرې ددوی د ضرب حاصل 68 وي، عددونه معلوم کړئ.

69. که چیرې د یو عدد درې برابره مجموعه د هغې د معکوس ددو چندو سره، 5 وي. نوموړی عددونه پیدا کړئ.

شپږم څپرکی

د اعدادو ترادفونه

د اعدادو ترادفونه د رياضی يوه مهمه موضوع ده. چې د رياضي د ډېرو مسئالو په تحليل او له هغې جملې څخه په عددي محاسبو کې زياته کارونه لري.

دلته د ترادفونو مقدماتي او ساده مفهومونه معرفي کيږي.

د ترادف مفهوم.

انتخاب شوي عددونه a_1 ، a_2 ، a_3 ، ... ، a_n ، ... **د عددونو د ترادف** (يا رديف) **په نامه ياديږي. دا هر يو عدد د نوموړی ترادف عنصر بلل کيږي.** a_1 **لومړی عنصر او** a_n ، n **ام عنصر بولي. د يو ترادف عناصر يو تر بله سره منطقي اړيکې لري.**

لکه

د ترادف نوم	ترادف
د جفتو عددونو ترادف	$2 , 4 , 6 , 8 , \ldots , 2n , \ldots$
د تاقو عددونو ترادف	$1 , 3 , 5 , 7 , \ldots , 2n-1 , \ldots$
د ۵ عدد د مضربونو ترادف	$5 , 10 ,15 , 20 , \ldots , 5n , \ldots$
د $\frac{1}{3}$ عدد د مضربونو ترادف	$\frac{1}{3} , \frac{1}{6} , \frac{1}{9} , \ldots , \frac{1}{3n} , \ldots$

معمولاً يو ترادف د n **ام حد،** n **يو اختياري عدد په وسيله تعريف او تعين کيږي.**

د مثال په توګه

د ترادف نوم	ترادف
د جفتو عددونو ترادف	$a_n = 2n \quad , \quad (n = 1,2,3,...)$
د تاقو عددونو ترادف	$b_n = 2n - 1 \quad , \quad (n = 1,2,3,...)$
د 5 عدد د مضربوونو ترادف	$c_n = 5n \quad , \quad (n = 1,2,3,...)$
د $\frac{1}{3}$ عدد د مضربونو ترادف	$d_n = \frac{1}{3n} \quad , \quad (n = 1,2,3,.....)$

د ترادفونو زیاتوالی او کموالی یا (د ترادفونو تناقص او تزاید)

هغه ترادفونه چې د هغه د عناصر عددي قیمتونه په تدریج سره زیاتوالی مومي متزاید ترادف بلل کیږي. لکه د جفتو عددونو ترادف، د تاقو عددونو ترادف او د 5 د مضربونو ترادف او داسې نور.

<u>1 مثال</u>. د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{2}{n}$ ترادفونه متزاید یا متناقص دی؟

$$n: \; 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

لیدل کیږي چې د a_n ردیف عناصر تزاید کوي نو ځکه متزاید دي او د b_n عناصر کمیږي نو ځکه متناقص دي.

حسابی ترادف (حسابی تصاعد)

هغه ردیف چې د هرو دوو پرله پسې عناصرو (جوړو) تر منځ په مرتبه توګه یـــو ثابت عدد وي د حسابی ترادف په نامه یادیږي. یعنې

$$a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d \quad , \quad (n = 1,2,3,...)$$

دلته d ته د ترادف مشترک تفاضل وایي او a_1 د ترادف لومړی عنصر دی.

2 مثال.

$$\underset{a_2}{5}\ ,\ \underset{a_1}{2}\ ,\ \ldots\ \underset{a_6}{17}\ ,\ \underset{a_5}{14}\ ,\ \underset{a_4}{11}\ ,\ \underset{a_3}{8}\ ,$$

ددې ردیف مشترک تفاضل $d=3$ دی. داسې چې

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= a_1+d = 2+3 = 5 \\ a_3 &= a_2+d = 5+3 = 8 \\ a_4 &= a_3+d = 8+3 = 11 \end{aligned}$$

که چېرې په یو حسابي ترادف کې لومړی عنصر او مشترک تفاضل په ګوته شي نو ترادف معلومیدلی شي.

د یو حسابي ترادف د اختیاري عنصر معلومول

که چېرې a_1 د یو حسابي ردیف لومړی عنصر d مشرک تفاضل او a_n د هغې n ام عنصر وي نو ددوی تر منځ رابطه په لاندې ډول تر کتنې لاندې نیول کیږي.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1+d \\ a_3 &= a_2+d = (a_1+d)+d = a_1+2\,d \\ a_4 &= a_3+d = (a_1+2d)+d = a_1+3d \\ a_5 &= a_4+d = (a_1+3d)+d = a_1+4d \end{aligned}$$

بالاخره نتیجه کیږي چې

$$\boxed{a_n = a_1+(n-1)\,d}$$

3 مثال. که چېرې د یو حسابي ترادف لومړی عنصر $a_1 = 5$ ، مشترک تفاضل یې $d = 2$ وي نو شلم عنصر به یې څو وي.

حل

$$a_{20} = a_1 + 19d = 5 + 19.2 = 43$$

<u>4 مثال</u>. یو حسابي ترادف معلوم کړئ چې په هغې کې $a_6 = 27$ او $a_{12} = 57$ وي.

حل: دلته a_1 او d باید معلوم کړو

$$\begin{cases} a_1 + 5d = 27 \\ a_1 + 11d = 57 \end{cases}$$

د دو مجهوله معادلو د سیستم د حل څخه په لاس راځي چې

$$a_1 = 2, \quad d = 5$$

<u>د یو حسابی ترادف د عناصرو مجموعه</u>

د یو حسابی ردیف د n لومړیو عناصرو مجموعه عبارت دی له

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\,d\right]}$$

<u>ثبوت</u>. که چېرې ددې ردیف د لومړیو n عنصرو مجموعه S_n فرض شي یعنې

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

د مثال په توګه د $n = 5$ لپاره لرو چې

$$\begin{cases} S_5 = a_1 + (a_1 + d) + (a_2 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) \\ S_5 = (a_1 + 4d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2S_n = (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d) + (a_1 + 4d)$$

$$\Rightarrow 2S_5 = 2(2a_1 + 4d) \Rightarrow S_5 = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d)$$

په همدې ډول

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

<u>نتیجه</u> : که چېرې a_1 لومړی عنصر او a_n دیو حسابی ترادف n–ام عنصر وي نو

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$

ثبوت: پوهیږو چې

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)d\right]$$

خرنګه چې $a_n = a_1 + (n-1)d$ لهذا

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$

5 مثال. د 1 څخه تر 100 پورې د پرله پسې طبيعي عددونو مجموعه حساب کړئ.

حل: طبيعي عددونه حسابي ترادف جوړوي، دا ډول چې $a_1 = 1 = d$ دی. نو د

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$

په رابطه کې $n = 100$او $a_n = 100$ کې وضع کوو نو لرو چې

$$1 + 2 + 3 + ... + 100 = \frac{100}{2}(1 + 100) = 50.101 = 5050$$

د طبيعی عددونو مجموعه

طبيعی عددونه يو حسابی ترادف دی چې په هغې کې $a_1=1$ او $d=1$ دی. نو د n لومړيو مسلسلو طبيعی عددونو مجموعه عبارت دی له

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2.1 + (n-1).1] = \frac{n(n+1)}{2}$$

بنا پر دې د لومړيو n پرله پسې طبيعي عددونو مجموعه چې له 1 څخه شروع کيږي عبارت دی له

$$\boxed{1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

بنا پر دې $a=2=d$

6 مثال. د جفتو پرله پسی طبیعی عددونو مجموعه: په دې حسابی ترادف کې عددونه جفت دي

$$2+4+6+\cdots+2n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1).d\right]=\frac{n}{2}[2.2+(n-1).2]=n(n+1)$$

$$\boxed{\Rightarrow\ 2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)}$$

7 مثال. پرله پسې طبيعي طاق عددونه. هم يو حسابي ترادف دی چی په هغې کې $a_1=1$ او $d=2$ وي نو

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]=\frac{n}{2}[2.1+(n-1)]=n^2=$$

$$\boxed{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$$

هندسی ترادف (هندسی تصاعد)

هغه رديف چې د هر عنصر او د هغې ړومبنی عنصر تر منځ نسبت يو ثابت عدد r وي، د هندسي ترادف په نامه ياديږي يعنې

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=r\Leftrightarrow a_{n+1}=a_n\ r\ ,\ (n=1,2,3,\ldots)$$

دلته r د ترادف مشترک نسبت، a_1 د هغې لومړنی عنصر دی. يو هندسي ترادف هغه وخت معلوميدلی شي چې لومړی عنصر او مشترک نسبت يې معلوم وي.

8 مثال. په يو هندسی ترادف کې $a_1=2$ او $r=3$ دی. د هغې a_2، a_3 او a_4 عناصر پيدا کړئ.

حل.

$$a_2 = a_1\, r = 2.3 = 6$$
$$a_3 = a_2 r = 6.3 = 18$$
$$a_4 = a_3\, r = 18.3 = 54$$

د یو هندسي ردیف عمومې عنصر

که چېرې د یو هندسي ردیف لومړی عنصر a_1 او مشترک نسبت یې r وي نو د هغې n ام عنصر عبارت دی له

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

ثبوت.

$$a_2 = a_1\, r$$
$$a_3 = a_2\, r = (a_1\, r)\, r = a_1\, r^2$$
$$a_4 = a_3\, r = (a_1\, r^2)\, r = a_1\, r^3$$
$$a_5 = a_4\, r = (a_1\, r^3)\, r = a_1\, r^4$$
$$\dots$$
$$\boxed{\Rightarrow a_n = a_1\, r^{n-1}}$$

د یو هندسی ترادف د عناصرو مجموعه

د یو هندسي ترادف د n پرله پسې عناصرو مجموعه عبارت دی له

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = a_1\, \frac{1-r^n}{1-r}$$

ثبوت. وضع کوو یې

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1\, r + a_1\, r^2 + a_1\, r^3 + ... + a_1\, r^{n-1} \qquad (1)$$

د پورتنی رابطې دواړه خواوې په r ضربوو لرو چې

$$r\, S_n = r\, a_1 + a_1\, r^2 + a_1\, r^3 + a_1\, r^4 + ... + a_1\, r^n \qquad (2)$$

اوله (1) رابطه د (2) رابطې څخه طرف په طرف تفریق کوو

$$r\, S_n - S_n = a_1\, r^n - a_1 \Rightarrow S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}}$$

هندسي سلسله

که چېرې په یو هندسي ترادف کې مشترک نسبت r له $(-1,1)$ انتروال څخه وي یعنی $-1 < r < 1$ نو د n د لویو قیمتونو لپاره د r^n عدد ډیر کوچنی کیږي. په بل عبارت کله چې n بې نهایت خواته نږدې کیږي نو د r^n عدد صفر خواته تقرب کوي.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

او $r^n = 0$ په نظر کې نیولو سره په لاس راځي چې

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \frac{a_1}{1 - r}}$$

ددې وروستی رابطې چپ خوا د هندسی سلسلې په نامه او ښئ خوایې د هغې قیمت (مجموعه) بولی. دا هندسي سلسله په لاندې ډول هم لیکلی شو.

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots = \frac{a_1}{1-r}$$

$$\boxed{\Rightarrow 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}}$$

<u>9 مثال</u>. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots\ldots$ حساب کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a_1=1$ او $r=\frac{1}{2}$ دي. نو ددستور سره سم

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

<u>10 مثال</u>. که چېرې په يو هندسی تصاعد کې $a_1 = 2$ او $r = 2$ وي. نو د لومړيو 5 عنصرو مجموعه يعنې $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ حساب کړئ.

حل: د دستور سره سم

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 \frac{1-r^5}{1-r}$$

بنا پر دې

$$2+6+18+54+162 = 2.\frac{1-3^5}{1-3} = 2.\frac{1-3^5}{-2} = \frac{1-3^5}{-1} = 3^5 - 1 = 242$$

<u>11 مثال</u>. که چېرې په يو هندسی تصاعد کې $a_1=27$، مشترک نسبت يې $r=\frac{1}{3}$ وي نو دهغې د ټولو عناصرو مجموعه يعنې $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$ حساب کړئ.

حل. بيا هم فورمول په نظر کې نيسو.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S = 27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{27}{1 - \frac{1}{3}} = 40.5$$

<u>*12* مثال</u>. د $0,6\overline{23}$ **متوالي کسر د هندسي سلسلې په استفاده په عام کسر بدل کړئ.**

$$0,6\overline{23} = 0,6\ 23\ 23\ 23 \cdots = 0.6 + 0.023 + 0,00023 + 0,0000023 + \ldots.$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100000} + \frac{23}{10000000} + \cdots$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000}\left[1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\right]$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000}\left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000}.\frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} . \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} . \frac{100}{99}$$

$$\Rightarrow \quad 0,6\overline{23} = \frac{6}{10} + \frac{23}{990} = \frac{594 + 23}{990} = \frac{617}{990} .$$

تمرين

1− د $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ رديف په نظر کې ونيسئ د هغې a_1، a_5 او a_9 عناصر وليکئ.

2− د $1,4,9,16,25,\ldots$ رديف د a_n په شکل وليکئ.

3− د $a_n = \frac{2n+1}{n}$ رديف متزايد دی يا متناقص؟ ولې؟

$4-$ ایا د $a_n = 2n^n$ ردیف متزاید دی؟ ولې؟

$5-$ له لاندې ردیفونو څخه یې کوم یو حسابی دی

$I.\quad 3, 6, 9, \dots \qquad II.\quad 25, 19, 13, \dots \qquad III.\quad 5, 10, 14, \dots$

$6-$ د k عدد دا ډول وټاکې چې لاندې ردیف حسابي وي.

$k-1,\ k+1,\ 3k-1, \dots$

$7-$ اتلسم عنصر او د اتلسو عنصرو مجموعه په لاندې ردیف کې پیدا کړئ.

$2, 6, 10, \dots$

$8-$ نه څلویشتم عنصر او د 49 عناصرو مجموعه په لاندز ردیف کې پیدا کړئ.

$$10, 4, -2, \dots$$

$9-$ د یو حسابي تصاعد اوم عنصر 41 او دیارلسم عنصر یې77 دي. نو ددې تصاعد شلم عنصر معلوم کړئ.

$10-$ که په یو حسابي تصاعد کې $a_1=7$ او $a_9=77$ وي، نوموړی ترادف معلوم کړئ.

$11-$ په دې لاندې ترادفونو کې کوم یو حسابې دی.

$$I.\quad 4, 8, 16, \dots \quad II.\quad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots \quad III.\quad 12, -4, \frac{4}{3}, \dots$$

$12-$ د k عدد دا ډول معلوم کړئ چې لاندنې ترادف هندسی وي.

$2k-1 \quad , \quad 3k+1 \quad , \quad 6k+2 \quad , \quad \dots$

$13-$ اوم عنصر او د لومړنیو اوو عنصرو مجموعه په لاندی هندسی ردیف کی پیداکړئ.

$$12 \quad , \quad 16 \quad , \quad \frac{64}{3} \quad , \quad \dots$$

$14-$ نهم عنصر او د لومړنیو نه عنصرو مجموعه په لاندې ترادف کې پیدا کړئ.

$$4 \quad , \quad -6 \quad , \quad 9 \quad , \quad \dots$$

$15-$ پنځم عنصر او د پنځو عنصرو مجموعه په لاندې ترادفونو کې معلوم کړئ.

$$I. \quad a_n = 3n - 4 \quad , \quad n = 1,2,3,\dots$$

$$II. \quad a_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad , \quad n = 1,2,3,\dots$$

$16-$ د یو هندسي ترادف څلورم عنصر $a_4 = 1$ او اتم عنصر $a_8 = \frac{1}{256}$ دی د هغې لسم عنصر پیدا کړئ.

$17-$ په یو هندسی ترادف کې لومړی عنصر $a_1=8$، مشترک نسبت 3، $r = \frac{3}{2}$ او لومړیو n عنصرو مجموعه $S_n = \frac{2059}{8}$ وي نو د n او a_n عددونه معلوم کړئ.

$18-$ په لاندې ترادفونو کې حسابي او هندسي ترادفونه سره مشخص کړئ.

$$I. \quad a_n = b\,n + c \quad , \quad II. \quad b_n = 2^n \quad , \quad III. \quad c_n = \alpha\, e^{\beta\, n}$$

$$IV. \quad d_n = (1+p)^n, p \neq 0 \quad , \quad V. \quad e_n = e^n$$

$19-$ د ($\frac{1}{3}$ او 243) او ($\frac{1}{3}$ او $-\frac{32}{27}$) جوړو عددونو هندسي وسط معلوم کړئ.

$20-$ وښیئ چې د $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \dots$ ترادف یو هندسي ترادف دی او د هغې شلم عنصر ولیکئ.

$21-$ د 4 او 9 عددونو حسابي او هندسي وسطونه پیدا کړئ.

$22-$ د $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots$ هندسی سلسلې مجموعه ولیکې.

$23-$ د $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ هندسي ترادف د ټولو عناصرو مجموعه په لاس راوړئ.

$24-$ د لاندې سلسلو هرې یوې مجموعه پیدا کړئ.

$$I. \quad 24 \quad + \quad 12 \quad + \quad 6 \quad + \quad \dots$$

$$II. \quad 25 \quad - \quad 20 \quad + \quad 16 \quad + \quad \dots$$

$$III. \quad 0,6 \quad + \quad 0,06 \quad + \quad 0,006 \quad + \quad \dots$$

25− د $\dots \; 123 \quad 123 \quad 123 \quad x = 0,0$ **متوالي کسر د يوې هندسي سلسلې په توګه په نظر کې ونيسي او په عام کسر يې بدل کړئ.**

اوم څپرکی

لوګارتم

د عددونو د توانونو او لوګارتم قاعدې سره ورته دي. او د هغوی د خاصیتونو څخه په محاسبه، د نفوسو د زیاتوالي په وړاندلیدنه، د میکروبونو په زیاتوالي، د اوبو د ذخیرو په تبخیر کیدلو د جمسونو په وروستوالي، د رادیو اکتیف د مواد تشعشع او نورو کې ورڅخه ګټه اخیستل کیږي.

همدارنګه د لوګارتم څخه په پیچیده محاسبو او حتی د ریاضیاتو د قضیو په ثبوت کولو او د ریاضی او فزیک د ډول، ډول مسایلو په حل کې ورڅخه ګټه اخیستل کیږي.

په دې برخه کې د عددونو د توانونو او لوګارتم د خاصیتونو څخه په لنډ ډول مرور کوو.

د حقیقي عددونو توانونه

په لومړی فصل کې د حقیقي عددونو لپاره طبیعي او ناطق توانونه معرفي شول. دلته د توان مفهوم د ټولو حقیقي عددونو ساحې ته توسعه ورکول کیږي.

که چېرې a او b مثبت عددونه او x او y حقیقي عددونه وي نو

$$1.\quad a^x a^y = a^{x+y} \quad , \quad 2.\quad \left(a^x\right)^y = a^{x.y}$$

$$3.\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad , \quad 4.\quad (a.b)^x = a^x b^x$$

$$5.\quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, b \neq 0 \quad , \quad 6.\quad a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

$$7.\quad a^x = b^x \Leftrightarrow a = b$$

دلته پورتنی رابطې لږ ترلږه د x او y د نسبتي قیمتونو لپاره ثبوت کیدلی شي.

د مثال په توګه که $x=\frac{p}{q}$ او $y=\frac{r}{s}$ په نظر کې ونیول شي. په دې صورت کې

$$a^x a^y = a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps}{qs}} a^{\frac{qr}{qs}} = \sqrt[qs]{a^{ps}}\,\sqrt[qs]{a^{qr}} = \sqrt[qs]{a^{ps}\ a^{qr}}$$

$$= \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{x+y}\ .$$

مثالونه

$$1.\quad \left(5^{\frac{1}{3}}\right)\left(5^{\frac{1}{4}}\right) = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 5^{\frac{7}{12}}$$

$$2.\quad \left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = 7^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}} = 7^{\frac{1}{15}}$$

$$3.\quad \sqrt[3]{\sqrt{x}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$$

$$4.\quad \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{3-2}{6}} = x^{\frac{1}{6}}.$$

5 مثال. د $2^{2x+3}-33(2^x)+4=0$ معادله حل کړی.

$$2^{2x+3}-33.(2^x)+4=0 \Rightarrow 2^3\left(2^x\right)^2-33\left(2^x\right)+4=0$$

دلته وضع کوو $y=2^x$. لرو چې

$$8y^2-33y+4=0 \Rightarrow y_1=4\ ,\ y_2=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2^2 \Rightarrow x_1 = 2 \\ 2^x = \dfrac{1}{8} \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

دتوانونو عمومي قواعد لکه څرنګه چې د طبيعي او ناطقو عددونو لپاره صدق کوي، حقيقي عددونو د توانونو لپاره هم صدق کوی.

مثالونه

$$6.\quad 4^{\pi}.4^{2}=4^{\pi+2}\quad ,\quad 7.\quad \left(6^{\sqrt{3}}\right)^{2}=6^{2\sqrt{3}}$$

$$8.\quad \left(4x^{2}y\right)^{\pi}=4^{\pi}x^{2\pi}y^{\pi}\quad ,\quad 9.\quad \frac{5^{2}}{5^{\sqrt{3}}}=5^{2-\sqrt{3}}$$

د لوګارتم تعريف

که چېرې $x=b^{y}$ او $1\neq b>0$ وي، په دې صورت کې د y عدد ته د b په قاعده د x لوګارتم وائي او ليکو چې $y=log_{b}x$.

دوه پورتني عبارتونه يو تر بله سره معادل دي.

$$x=b^{y}\Leftrightarrow y=log_{b}x\Rightarrow x=b^{log_{b}x}$$

مثالونه:

$$10.\quad 8=2^{3}\Leftrightarrow log_{2}8=3\quad ,\quad 11.\quad 8=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\Leftrightarrow log_{\frac{1}{2}}8=-3$$

$$12.\quad 1000=10^{3}\Leftrightarrow log_{10}1000=3$$

$$13.\quad 0,0001=10^{-4}\Leftrightarrow log_{10}0,0001=-4$$

د لوګارتم خاصيتونه

د a او b مثبتو عددونو او x ، y ، α حقيقي عددونو لپاره لرو چې

$$1.\quad log_{a}1=0\quad ,\quad 2.\quad log_{a}a=1\quad ,$$

$$3.\quad \log_a(x.y)=\log_a x+\log_a y$$
$$4.\quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$$
$$5.\quad \log_a\left(x^{\alpha}\right)=\alpha\log_a x$$
$$6.\quad \log_a x.\log_b a=\log_b x$$
$$7.\quad \log_{a^{\alpha}} x=\frac{1}{\alpha}\log_a x \quad , \quad \alpha\in R$$
$$8.\quad (\log_b a).(\log_a b)=1$$

ثبوت

$$1.\quad 1=a^0 \quad\Rightarrow\quad \log_a 1=0$$
$$2.\quad a=a^1 \quad\Rightarrow\quad \log_a a=1$$
$$3.\quad \begin{cases}\log_a x=u\Rightarrow x=a^u\\ \log_a y=v\Rightarrow y=a^v\end{cases}\Rightarrow xy=a^u a^v\Rightarrow xy=a^{u+v}$$
$$\Rightarrow \log_a(xy)=u+v=\log_a x+\log_a y$$
$$\Rightarrow \log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$$
$$4.\quad \begin{cases}\log_a x=u\Rightarrow x=a^u\\ \log_a y=v\Rightarrow y=a^v\end{cases}\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{a^x}{a^y}\Rightarrow \frac{x}{y}=a^{u-v}$$
$$\Rightarrow \log_a\frac{x}{y}=u-v=\log_a x-\log_a y$$
$$5.\quad \log_a x=u\Rightarrow x=a^u\Rightarrow x^{\alpha}=(a^u)^{\alpha}\Rightarrow x^{\alpha}=a^{\alpha u}$$
$$\Rightarrow \log_a x^{\alpha}=\alpha.u=\alpha\log_a x$$

$$6.\quad \begin{cases}\log_a x=u\Rightarrow x=a^u\\ \log_b a=v\Rightarrow a=b^v\end{cases}\Rightarrow x=\left(b^v\right)\Rightarrow x=b^{uv}$$

$$\Rightarrow log_b x = uv = log_a x \, log_b a$$

$$7. \quad log_a x = u \Rightarrow x = a^u \Rightarrow x^\alpha = a^{\alpha u} \Rightarrow x^\alpha = (a^\alpha)^u$$

$$\Rightarrow log_{a^\alpha} x^\alpha = u \Rightarrow \alpha \, log_{a^\alpha} x = log_a x$$

$$\Rightarrow log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} log_a x$$

د (6) **خاصیت په استفاده لیکلی شو چې**

$$8. \quad log_b a . log_a b = log_b b = 1$$

نتیجه

له (7) **رابطې څخه واضح لیدل کیږی چې:**

$$log_{a^\alpha} x^\alpha = \frac{\alpha}{\alpha} log_a x = log_a x$$

مثالونه.

$$14. \quad log_2 18 = log_2 (2.9) = log_2 2 + log_2 \left(3^2\right) = 1 + 2. log_2 3$$

$$15. \quad log_2 128 = log_2 (2^7) = 7. log_2 2 = 7.1 = 7$$

$$16. \quad log_b \left(\frac{xy}{z}\right) = log_b (xy) - log_b z = log_b x + log_b y - log_b z$$

$$17. \quad log_b 4 + log_b x - log_b 3 = log_b (4x) - log_b 3 = log_b (\frac{4x}{3})$$

$$18. \quad log_2 \sqrt{11} = log_2 (11)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} log_2 11 \; ;$$

$$19. \quad log_b \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{2}{3}\left(log_b x - log_b y\right).$$

طاقت لرونکي او لوګارتمي معادلې

هغه معادلې چې په توان یا لوګارتم کې یې مجهول عدد مطرح کیږي، طاقت لرونکي معادلې یا لوګارتمي معادلې بلل کیږي. په دې ډول معادلو کې ځینې وخت داسې شرطونه مخ ته راځي چې باید همغه مجهول عدد هغه صدق کړي. دلته ښه داوي چې معادله مستقیماً د لوګارتم او توانونه د قاعدو څخه په استفاده حل کړو او بیا لاس ته راغلي جوابونه په معادله کې ارزیابي شي.

<u>20 مثال</u>. لاندې معادله حل کړئ.

$$log(x-2)+log(x-5)=1$$

حل: د x مجهول عدد باید د $x-5>0$ او $x-2>0$ شرطونه صدق کړي، په بل عبارت باید چې $x>5$ وي او

$$log(x-2)+log(x-5)=1 \Rightarrow log[(x-2)(x-5)]=1$$
$$\Rightarrow (x-2)(x-5)=10 \Rightarrow x^2-7x+10=10 \Rightarrow x^2-7x=0$$
$$\Rightarrow \quad x(x-7)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad , \quad x_2=7$$

لیدل کیږي چې د $x_1=0$ عدد د معادلې شرط نه صدق کوي. په داسې حال کې $x_2=7>5$ د معادلې یوازنۍ جذر دی.

<u>21 مثال</u>. د $2^{2x}-10\cdot 2^x+16=0$ معادله حل کړئ.

حل :

$$2^{2x}-10\cdot 2^x+16=0 \Rightarrow (2^x)^2-10\cdot 2^x+16=0$$
$$\Rightarrow y^2-10y+16=0 \Rightarrow (y-2)(y-8)=0$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} y_1=2 \\ y_2=8 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2^x=2 \\ 2^x=2^3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ x=3 \end{matrix} \Rightarrow x_1=1\,,\ x_2=3$$

22مثال. لاندې لوګارتم معادله حل کړی.

$$\log_{10}[(x-21)x]=2 \Rightarrow (x-21)x=10^2 \Rightarrow x^2-21x-100=0$$

$$(x-25)(x+4)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=25 \quad , \quad x_2=-4$$

23 مثال. لاندې لوګارتمی معادله حل کړئ.

$$\log_{10}x+\log_{10}4=2 \Rightarrow \log_{10}(4x)=2 \Rightarrow 4x=10^2 \Rightarrow x=25.$$

اعشاري لوګارتم (معمولي لوګارتم)

په دې لوګارتم کې د 10 عدد د قاعدې په توګه په نظر کې نیول کیږي او په معموله توګه یې د x $\log_{10} x$ یا $\log x$ په شکل لیکی

$$\log x := \log_{10} x$$

24 مثال. د ځینو ګړدیو عددونو معمولي لوګارتم په لاندې ډول فهرست کوو.

x	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000
$\log x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

د لوګارتم مانتیس او مشخصه.

هر مثبت عدد x کیدلی شي په عملي شکل $x=a\cdot 10^c$ ولیکل شي. دا ډول چې $1\le a<10$ او c یو تام عدد دی. په دې صورت کې

$$\log x=\log(a.10^c)=\log a+\log 10^c=\log a+c\log 10=\log a+c$$

دلته c عدد ته مشخصه (کرکترستیک) او $m=\log a$ ته د $\log x$ مانتیس ویل کیږي، څرنګه چې $1\le a<10$ نو $0\le \log a<1$ وي.

یعنی $\boxed{0\le m<1}$

25 مثال

$$a. \quad \log(527)=\log[(5,27)\times 10^2]=\log(5,27)+2 \Rightarrow c=2, m=\log(5,27)$$

$$b.\quad \log(95000)=\log\left[(9,5)\times 10^{4}\right]=\log(9,5)+4 \Rightarrow c=4, m=\log(9,5)$$

$$c.\quad \log(0,00005)=\log\left(5\times 10^{-5}\right)=\log 5-5 \quad \Rightarrow c=-5 \quad , \quad m=\log 5$$

$$d.\quad \log(1000)=\log 10^{3}=3\log 10=3 \quad \Rightarrow \quad c=3 \quad , \quad m=0$$

د مانتیس او مشخصه خاصیتونه

(1) **د هغو عددونو د لوګارتمونو مانتیس چې عین رقمونه او ترتیب ولري، او د اعشاري علامی موقیعت او د هغې د ښی خوا یا کینې خوا د صفرونو په نظر کې نه نیولو سره یو تر بله سره مساوی دي.**

26 مثال. که چیرې $\log(4,81)=0,6821$ وي نو لرو چې

$$I.\quad \log(48100)=\log\left[(4,81)\times 10^{4}\right]=\log(4,81)+\log 10^{4}$$
$$=0,6821+4=4,6821$$

$$II.\quad \log(481)=\log\left[(4,81)\times 10^{2}\right]=\log(4,81)+\log 10^{2}$$
$$=0,6821+2=2,6821$$

$$III.\quad \log(0,00481)=\log\left[(4,81)\times 10^{-3}\right]=\log(4,81)+\log 10^{-3}$$
$$=0,6821-3=-3+0,6821=\bar{3}\,,\,6821$$

$$IV.\quad \log(0,0481)=\log\left[(4,81)\times 10^{-2}\right]=\log(4,81)+\log 10^{-2}$$
$$=0,6821-2=-2+0,6821=\bar{2}\,,\,6821$$

اوس پورتنی نتیجې فهرست کوو.

عدد	مشخصه	مانتیس	لوګارتم
48100	4	0,6821	4,6821
481	2	0,6821	2,6821
4,81	0	0,6821	0,6821
0,0481	-2	0,6821	-1,3179
0,00481	**-3**	**0,6821**	**-2,3179**

ليدل کيږي چې د ټولو هغه عددونو مانتيس کوم چې په جدول کې راغلي دي د *0.68219* سره مساوي دي.

(*2*) د هغو عددونو مشخصه چې د يو څخه لوی دي، يو واحد د هغوی د صحيحو رقمونو له تعداد څخه کم وي.

27 مثال

اعداد	*425*	*9680*	*2345,9*	*200000*
مشخصه	**2**	**3**	**3**	**5**

(*3*) د هغو عددونو مشخصه چې له يو څخه کوچنی وي، منفي عدد دی او د اعشاری علامې څخه د مخه عدد د چپ خوا د صفرونو له تعداد څخه يو واحد کم وي.

28 مثال

اعداد	*0,128*	*0,041*	*0,00065*	*0,00001*
مشخصه	**-1**	**-2**	**-4**	**-5**

(*4*) د لوګارتم مشخصه له جدول څخه د عدد له مخې د (*2*) او (*3*) دستورونو څخه معلوميدلی شي، مګر مانتيس د جدول څخه په لاس راځي.

(*5*) د يو درې رقمی عدد *493* مانتيس په *49* سطر او *3* ستون کې دی، او د *598* مانتيس بيا په *59* سطر او *8* ستون کې قرار لري (ددری رقمي جدول څخه) دلته دیادونه وړ ده چې په درې رقمي جدولونو کې د *1* څخه تر *99*

عددونو لپاره مانتیس لیکل شوی وي. مګر بیا په څلوور رقمي جدولونو کې د 1 څخه تر 999 عددونو پوري مانتیس ترتیب شویدی.

(6) د یو عدد لوګارتم د مشخصه او مانتیس د یو ځای کولو څخه په لاس راځی.

29 مثال

$$I.\quad log(48100) = 4 + 0,6821 = 4,6821$$

$$II.\quad log(0,00481) = -3 + 0,6821 = \bar{3},6821$$

او باید یادونه وکړو چې

$$\bar{3},6821 = -3 + 0,6821 = -2,3179$$

انتی لوګارتم.

که چېرې $y = log\,x$ وي، په دې صورت کې $x = 10^{y} = anti\,log\,y$. د مثال په توګه

$$log1000 = 3 \Leftrightarrow anti\,log3 = 10^{3} = 1000$$

که چېرې دیو عدد لوګ معلوم وي نو دهغی د صحیحو رقمونو تعداد او یا د اعشاری علامې ځای د هغې عدد د مشخصې او د ارقامو د ډول په مرسته د مانتیس په وسیله له جدول څخه پیدا کیږي.

30 مثال . د N عدد معلوم کړئ داسې چې $log\,N = 1,7016$ وي.

حل: لیدل کیږي چې $m = 0.7016$ او $c=1$ دی. بنا پردې دصحیحو رقمونو شمېر د مشخصې په ملاحظه 2 دی. خو څرنګه چې د هغی مانتیس $m = 0.7016$ په جدول کې د 503 مربوط دی نو باید عدد $N = 50,3$ وي.

31 مثال . د N عدد دا ډول معلوم کړی چې $log\,N = -2.3179$ وي.

حل :

$$logN=-2,3179=-2-0,3179=-3+1-0,3179=-3+0,6821$$

پــه دې ترتيــب ســره $m=0.6821$ او $c=-3$ دی. څرنګــه چــې $m=0.6821$ عدد په جدول کې د *481* عدد مانتيس دی. نو ددې پــه نظر کې نيولو سره چې د N مشخصه د -3 عــدد دی پــه نتيجــه کــې $N=0.00481$. ديادونې وړ ده چې

$$log\,N=-2.3179 \Leftrightarrow N=10^{-2.3179}=0,00481$$

انترپوليشن

د يو درې رقمي عدد مانتيس د درې رقمي جدول څخه او ديو څلوور رقمی عدد مانتيس له څلوور رقمي جدول څخه معلوميدلی شي. خو کله چې ديو عدد رقمونو شمير له دريو يا څلوورو څخه زيات وي نو نشو کولی د هغې مانتيس له اړونده جدول څخه په لاس راوړو. په دې اړه ددې په نظر کې نيولو سره چې د لوګارتمي تابع متزايده وي او د هغې قيمتونه په کوچنيو انترولونو کې تقريباً په خطی توګه زياتوالی کوي. ددې پر اساس د عددونو او د هغوی د لوګارتمونو تر منځ تفاوت په مستقيمه توګه متناسب فرض کيدلي شي.

ددې فرضيې په نظر کې نيولو سره د عددونو د مانتيس د پيداکولو لپاره يو روش وجود لري چې د خطي انترپوليشن په نامه يې يادوي.

د مثال په توګه د $log\,5.235$ په حسابونه کې د 5.235 مانتيس د يو درې رقمی جدول له مخې د پيداکولو وړ نه دی. مګر دوه دري رقمي عددونه پيداکولی شو چې دا عدد يې تر منځ پروت وي يعنی

$$5.23<5.235<5.24$$

په داسې حال کې چې د $5,23$ او $5,24$ د لوګارتمونو مانتیسونه په جدول کې شته دي. نو د حسابونې شکل يې په لاندې ډول مطرح کيږی

$$
\begin{array}{cc}
N & \log N \\
0.010\left\{\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c}5.230\\5.235\end{array}\right\}0.005\\ 5\ 240\end{array}\right. &
d\left\{\begin{array}{c}0.7185\\x\end{array}\right.\left.\begin{array}{c}\\ \\ 0\ 7193\end{array}\right\}0.0008
\end{array}
$$

د لوګارتم فرق	د عددونو فرق
0.0008	0.01
d	0.005

بناپردې

$$\Rightarrow \frac{0.01}{0.005}=\frac{0.0008}{d}\Rightarrow d=\frac{(0,005)(0,0008)}{0,01}=0,0004$$

په نتيجه کې

$$x=\log 5.235=\log 5.23+d=0.7185+0.0004=0.7189$$

که چېرې د 52350 عدد مانتيس مطلوب وي. بيا هم عين طريقه کارول کيږي داسې چې په هغې کې د انتي لوګارتمونو تفاوت لټول کيږي. د مثال په توګه $\log N=1.7206$ وي نو د N عدد معلوم کړی. دلته مانتيس يعنې 0.7206 په درې رقمې جدول کې موجود نه دی، مګر دوه مانتيسونه په جدول کې پيدا کولی شو چې پورتنی مانتيس يې تر منځ پروت وي او هغه يو 0.7202 دی چې په $5,250$ عدد پوری اړه لري او بل 0.7210 دی چې په
$5,\ 60$ عددی پوری تړلی دی. په دې ترتيب د حسابونې شکل په لاندې ډول طرحه کيږي.

$$\begin{array}{cc} N & \log N \\ 0.010\left\{\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} 5.250 \\ y \end{array}\right\} d \\ 5.260 \end{array}\right. , & 0.0004\left\{\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} 0.7202 \\ 0.7206 \end{array}\right\} \\ 0.7210 \end{array}\right\} 0.0008 \end{array}$$

د عددونو تفاوت	د مانتيسونو تفاوت
d	0.0004
0.010	0.0008

$$\Rightarrow \frac{d}{0,010} = \frac{0,0004}{0,0008} \Rightarrow d = \frac{(0,0004)(0,010)}{0,0008} = 0,005$$

$$\Rightarrow y = 5.250 + d = 5.250 + 0.005 = 5.255$$

يادداشت. كله كله په حسابونو كې د لازم دقت په كارولو سره، د عددونو مانتيسونه، د مثال په توګه د 4563 او 456 عددونو مانتيسونه، يو تر بله سره مساوي فرض كيدلى شي. نو د حسابونې د غوښتنو سره سم كولى شو ددرې رقمي عددونو څخه د زياتو رقمونو د عددونو مانتيسونه د هغوی ددرې رقمي عددونو مانتيسونو ته حواله كړو. او د انترپوليشن څخه صرف نظر وكړو. په همدی ډول انتی لوګارتم په تقريبي توګه له جدول څخه تخمين كيدلى شي.

نن ورځ د حساب د جيبي ماشين په وسيله لوګارتمي او د طاقت تابع ګانې حسابيدلى شي. په دې ترتيب سره د لوګارتم جدولونه په اوسني وخت كې له كاره په لويدو دي.

طبيعی لوګارتم

طبيعی لوګارتم چې قاعده يې د اويلر عدد $(e=2.718281...)$ په نظر كې نيول كيږي د رياضي د قضيو او دعوو د ثبوت او له دې جملې څخه د ليميت، مشتق او نورو د حسابونو لپاره زياته كارونه لري. او عبارت دی له

$$ln\ x := log_e\ x$$

$$e = 2.7182818285\quad ...$$

ځرنګه چې $e^{log_e x} = x,\ log_e\ e^x = x$ بناپردې

$$\boxed{e^{ln\,x} = x\ ,\ \ ln\,e^x = x}$$

د اعشاري او طبيعي لوګارتمونو تر منځ رابطه

د دوی ددواړو قاعدې 10 او e په نظر کې نيسو او د لاندې رابطې څخه په ګټه اخيستنه لرو چې

$$log_a\ x\,log_b\ a = log_b\ x$$

$$log_{10}\ x\,log_e\ 10 = log_e\ x \quad \Rightarrow \quad log\,x\,ln10 = ln\,x$$

$$log_e\ x\,log_{10}\ e = log_{10}\ x \quad \Rightarrow \quad ln\,x\,log\,e = log\,x$$

خو د لاس ته راغلي حسابونو څخه

$$log\,e = 0{,}434294\,... \quad , \quad ln10 = 2{,}302584\,...$$

د اعشاری لوګارتم کارونه (استعمال)

د اعشاري د لوګارتم په کارونې سره دارنګه محاسبې سرته رسيدلی شي چې په عمل کې هغه مشکلې يا حتی ناممکنې وي. د لوګارتم عمليې کولی شي ضرب په جمع، تقسيم په تفريق، توان په ضرب او جذر په تقسيم واړوي او د حسابونې په جريان کې په طبيعی توګه د جدول کارونې او انترپوليشن طريقې ته ضرورت پيشيږی.

که غواړو د مثال په توګه $(1.08)^{65}$ حساب کړو. نو دا يو ګران کار دی يا که وغواړو $\sqrt[52]{954658}$ لاس ته راوړو، نو دا يوه ناممکنه عمليه ده. خو د لوګارتم په مرسته دا دواړه حسابونې لاس ته راتلی شي.

د طاقتنما تابع ګانو د ډلکیو (کلاسونو) مشتق او لیمټونه د طبیعی لوګارتم په مرسته په اسانی سره سرته رسیږی.

32 مثال. د $p = 100(1.08)^{10}$ عدد حساب کړئ.

$$\log p = \log\left[100.(1,08)^{10}\right] = \log 100 + \log(1.08)^{10} = 2 + 10\log(1.08)$$
$$= 2 + 10(0,0334) = 2.334 \Rightarrow \log p = 2,334$$
$$\Rightarrow p = \operatorname{anti}\log(2.334) = 215,8 \quad \Rightarrow \quad 100(108)^{10} = 215.8$$

33 مثال. $q = (7.284)^5$ حساب کړئ.

$$\log q = \log(7.284)^5 = 5\log(7.284) = 5(0.8623) = 4,3115$$
$$q = \operatorname{anti}\log(4.3115) \Rightarrow q = 20490 \Rightarrow (7.284)^5 = 20490$$

تمرین

- لاندې رابطې په لوګارتمي عبارت واړوی.

$$1.\quad p^q = r \quad , \quad 2.\quad 2^4 = 16 \quad , \quad 3.\quad 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

- لاندې رابطې د توان په شکل ولیکئ.

$$4.\quad \log_3 81 = 4 \quad , \quad 5.\quad \log_{0.1} 100 = -2 \quad , \quad 6.\quad \log_3 \frac{1}{9} = -2$$

- د لاندې عددونو د هریو قیمت معلوم کړئ.

$$7.\quad \log_{\frac{1}{3}} 8 \quad , \quad 8.\quad \log \sqrt[3]{10} \quad , \quad 9.\quad \log_5 125\sqrt{5}$$

- لاندې معادلې حل کړئ.

$$10.\quad \log_5 x = 2 \quad , \quad 11.\quad \log_4 y = -\frac{3}{2} \quad , \quad 12.\quad \log_x 81 = 4$$

– لاندې افادې د لوګارتم د قاعده په کارونو سره د لوګارتم د مجموع په توګه ولیکی.

$$13.\ \log_a(xyz)\quad,\quad 14.\ \log_a\frac{uv}{w}\quad,\quad 15.\ \log\frac{u^2}{v^2}$$

$$16.\ \log\frac{u^2v^3}{w^4}\quad,\quad 17.\ \log\frac{u^{\frac{1}{2}}}{v^{\frac{2}{3}}}\quad,\quad 18.\ \log\sqrt[5]{x^3y^{-2}z}$$

– ددې په نظر کې نیولو سره چې $\log 2 = 0.3010$ ، $\log 3 = 0.4771$ ، $\log 5 = 0.6990$ او $\log 7 = 0.8451$ دي، لاندې عددونه حساب کړئ.

$$19.\ \log 105\ ,\ 20.\ \log 108\ ,\ 21.\ \log\sqrt[3]{72}\ ,\ 22.\ \log 2100$$

– دا لاندې هره یوه افاده د لوګارتمې یو حده افادې په توګه ولیکی.

$$23.\ \log 3 - \log 8 + \log 24\quad,\quad 24.\ \log 6 - 2\log 3 + \log 54$$

$$25.\ \log x - 5\log y + 4\log 7 - 10\log x + \log xyz + \log x$$

– د لاندې عددونو هر یو د لوګارتم مشخصه معلومه کړئ.

$$26.\ 45000\ ,\ 27.\ 19.234\ ,\ 28.\ 0.00013\ ,\ 29.\ \log 0.23$$

– د $\log 87.2 = 1.9405$ په پام کې نیولو سره، لاندې لوګارتمونه په لاس راوړئ.

$$30.\ \log 87200\quad,\quad 31.\ \log 0.00872\quad,\quad 32.\ \log 0.872$$

– په لاندې رابطو کې د x عدد پیدا کړئ.

$$33.\ \log_x 0.00001 = 5\quad,\quad 34.\ \log_{0.01} x = -3\quad,\quad 35.\ \log_{10} x = -4$$

– د N عدد مشخص کړئ دا ډول چې

$$36.\ \log N = 5\quad,\quad 37.\ \log N = -5\quad,\quad 38.\ \log N = -1$$

– لاندې افادې ساده کړئ.

$$39.\ \log_x\left(\log_a a^x\right)\quad,\quad 40.\ \log_3\left(\log_3 27\right)\cdot\log_2\left(\log_2 64\right)$$

اتم څپرکی

د رياضي اندکشن او بينوم توصعه

د رياضي د رابطو او قضيو د ثبوت لپاره درې طريقې رواج لري. چې هغه مستقيم، غير مستقيمه طريقه او د رياضی استقرار طريقه دي.

په مستقيمه طريقه کې د قضيې د فرضيو د مستقيم تحليل څخه يوه بيانيه په مستقيم ډول ثبوت کيږي.

په غير مستقيمه طريقه کې د مطلوبه نتيجې برعکس په نظر کې نيول کيږي او ددې فرضيو د تحليل څخه وروسته د نادرستو يا غير ممکنو نتيجو ثبوت په لاس راکوي. چې د هغې بنياد همغه د اصلي فرضيې، په خلاف د فرضې په نظر کې نيول بلل کيږي. په دې ترتيب په غير مستقيمه توګه مطلوبه نتيجه ثبوت کيږي.

خو دلته د رياضی د استقرار طريقه چې د طبيعي عددونو اړونده رابطو او د قضيو په ثبوتونو کې ترې کار اخيستل کيږي، تر مطالعې لاندې نيسو او دهغې په مرسته د بينوم (دوه حده) په انکشاف باندې بحث کوو.

رياضی انډکشن (رياضی استقرار)

په دې روش کې د n طبيعی عددونو $P(n)$ خاصيت د ثبوت لپاره دې مرحلې په نظر کې نيول کېږی.

لومړی مرحله. د $P(n)$ خاصيت ثبوت د کوچني طبيعي عدد n (ډير وخت د $n=1$) لپاره ثبوت او تائيد کيږي.

دويمه مرحله. په دې مرحله کې فرض کيږي چې د $P(n)$ خاصيت د اختياري طبيعی عدد $n=k$ لپاره درست وی.

دريمه مرحله . د دوهمې مرحلې له مخې د $P(n)$ ادعا د $n=k+1$ لپاره ثبوت کيږي.

<u>**مثال *1***</u>. د رياضي استقرار په مرسته ثبوت کړئ چې:

$$P(n): 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \cdots \quad (i)$$

حل: لومړی قدم باید ددې حکم صحت د $n=1$ لپاره وښیو. نو په پورتنۍ رابطه کې د n پر ځای د 1 عدد ږدو. که چېرې تساوي صدق شي نو دا به ثبوت شوي وي چې $P(1)$ صحیح ده.

$$P(1) \overset{n=1}{\Rightarrow} 1=\frac{1(1+1)}{2}=1$$

دوهم قدم. فرض کوو چی زموږ ادعا د $n=k$ لپاره درسته ده، یعنې

$$P(k) \overset{n=k}{\Rightarrow} 1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{k} \quad \cdots \quad (ii)$$

دریم قدم . د (ii) رابطې څخه په استفاده ثبوت کوو چې پورتنی حکم د $n=k+1$ لپاره درست دی. په دې منظور (ii) رابطې دواړه خواوته $k+1$ زیاتوو

$$(1+2+3+\cdots+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$\Rightarrow 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$\Rightarrow 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

په دې ترتیب نوموړی حکم د $n=k+1$ لپاره صدق کوي. او په نتیجه کې د هر طبیعی عدد $n \geq 1$ لپاره صحیح دی.

2 مثال: د استقرار روش وکاروی او لاندې بیانیه ثبوت کړئ.

$$P(n): 2+4+6+\cdots+2n=n(n+1) \quad \cdots \quad (i)$$

حل:

لومړی قدم باید ددې حکم درست والی د $n=1$ لپاره دښیو یعنی په پورتنی رابطه کې د n پر ځای د 1 عدد ږدو ، که چېرې هغه تساوي صدق کړي نو ثابت شوی به وي چې $P(1)$ درست دی. لیدل کیږي چې

$$P(1)\overset{n=1}{\Rightarrow}2=1(1+1)=2$$

دوم قدم : فرض کوو چې زموږ ادعا د $n=k$ لپاره درسته ده، یعنی

$$P(k)\overset{n=k}{\Rightarrow}2+4+6+\cdots+2k=k(k+1) \quad \cdots \quad (ii)$$

دریم قدم: د (ii) رابطې په استناد ثبوت کوو چې حکم د $n=k+1$ لپاره درست دی ددې لپاره د (ii) رابطې دواړه خواوته $2(k+1)$ زیاتوو.

$$(2+4+6+\cdots+2k)+2(k+1)=k(k+1)+2(k+1)$$

$$\Rightarrow 2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)=(k+1)(k+2)$$

او حکم د $k+1$ لپاره صدق کوي.

3 مثال. ثابت کړئ چې د هر طبیعی عدد n لپاره لاندې رابطه درسته ده.

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حل: د $P(n)$ خاصیت د هر طبیعی عدد n لپاره په لاندې ډول په نظر کې نیسو.

$$P(n) \quad : \quad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

لومړی مرحله: د $k=1$ لپاره

$$P(1):1^2=\frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=1$$

نو $P(1)$ درسته ده.

دوهمه مرحله: اوس فرض کوو چې $P(k)$ د طبیعی عدد k لپاره صدق کوی یعنی:

$$P(k):1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

اوس غواړو وښیو چې $P(k+1)$ هم صحیح ده. نو د وروستی رابطې دواړو خواو ته $(k+1)^2$ زیاتوو

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2$$
$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=(k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6}+k+1\right]$$
$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=(k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6}$$
$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[(k+1)+1)][2(k+1)+1]}{6}$$
$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

په دې ترتیب $P(k+1)$ درسته ده.

4 مثال. ثبوت کړئ چې د هر طبیعی عدد n لپاره لاندې رابطه صدق کوي.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots.+n)^2$$

حل: څرنګه چې $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ دی نو د $P(n)$ خاصیت د هر طبیعي عدد n لپاره دا لاندې رابطه ثبوت کوو

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

لومړی مرحله: د $k=1$ لپاره لرو چې

$$P(1):1^3=\left[\frac{1.(1+1)}{2}\right]^2$$

نو $P(1)$ درسته ده یا د $k=1$ لپاره صدق کوي.

دوهمه مرحله: اوس فرض کوو چی د هر طبیعی عدد k لپاره $P(k)$ درسته وی یعنی

$$P(k):1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

دریمه مرحله: دا موضوع د $P(k+1)$ لپاره څیړو او د پورتنی رابطې دواړو خواو ته $(k+1)^3$ ورزیاتو.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$$

$$\Rightarrow 1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=(k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]$$

$$\Rightarrow 1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+k+1\right]$$

$$\Rightarrow 1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right]^2$$

په دې ترتیب $P(k+1)$ رابطه درسته ده.

5 مثال. د برنولي نامساوی ثبوت کړئ؟

$$(1+a)^n\geq 1+na \qquad , \qquad a>0$$

حل:

لومړی مرحله: د $n=1$ لپاره لرو چې

$$(1+a)^1=1+1.a\Rightarrow (1+a)^1\geq 1+1.a$$

نو نوموړي رابطه د $n=1$ لپاره درسته ده.

دوهمه مرحله: فرض کوو چې نوموړی نامساوي د یو کیفی طبیعی عدد k لپاره درسته ده

$$(1+a)^k\geq 1+ka$$

دریمه مرحله :اوس د وروستئ رابطې دواړه خواوې په $(1+a)$ باندې ضربوو

$$(1+a)^k(1+a)\geq(1+ka)(1+a)$$

$$\Rightarrow (1+a)^{k+1}\geq 1+a+ka+ka^2\geq 1+a+ka$$

$$\Rightarrow (1+a)^{k+1}\geq 1+(k+1)a.$$

په دې ترتيب نامساوی د $k+1$ لپاره صدق کوي.

فکتوريل

د يو طبيعي عدد n لپاره يو عددي مفهوم n فکتوريل دا ډول تعريف کيږي.

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n$$

يا

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

مگر صفر فکتوريل د 1 سره مساوی تعريف کيږي.

مثالونه

$$6.\quad 1! = 1 \quad , \quad 7.\quad 2! = 1\cdot 2 = 2 \quad , \quad 8.\quad 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$$

$$9.\quad 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24 \quad , \quad 10.\quad 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$$

$$11.\quad \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1).n.(n-1)....3.2.1}{n.(n-1)....3.2.1} = n+1$$

$$12.\quad \frac{9!}{(3!)(6!)} = \frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{(3.2.1)(6.5.4.3.2.1)} = \frac{7.8.9.}{1.2.3} = 84$$

$$13.\quad \frac{n!}{(r!)(n-r)!} = \frac{n.(n-1)....3.2.1}{[r.(r-1)...3.2.1][(n-r).(n-r-1)....3.2.1]}$$

$$= \frac{n.(n-1).(n-2)...(n-r+1)}{r!}$$

د طبيعی عددونو ترکيب

که چيرې r او n دوه طبيعی عددونه وي $0 \le r \le n$. په دې صورت د n او r ترکيب عبارت دی له:

$$C_n^r := \frac{n!}{r!.(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ (n-r+1)}{r!}$$

ځينې د C_n^r د سمبول پر ځای د $\binom{n}{r}$ سمبول کاروي.

مثالونه:

$$14.\quad C_5^3=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{(3!)(2!)}=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=1$$

$$15.\quad C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{(2!)(3!)}=\frac{5\cdot4}{1\cdot2}=10$$

$$16.\quad C_5^0=\frac{5!}{0!(5-0)!}=\frac{5!}{1(5!)}=1\quad,\quad 17.\quad C_5^5=\frac{5!}{5!(5-5)!}=\frac{5!}{(5!)0!}=1$$

د ترکيب خاصيتونه

د دوو طبيعي عددونو r **او** n **لپاره داسې چې** $0\le r\le n$ **وي لرو چې**

$$(i)\quad C_n^{r-1}+C_n^r=C_{n+1}^r$$

$$(ii)\quad C_n^r=C_n^{n-r}$$

$$(iii)\quad C_n^0=1=C_n^n$$

ثبوت

$$(i)\quad C_n^{r-1}+C_n^r=\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{r(n!)+(n-r+1)n!}{(n-r+1)(n-r)!r(r-1)!}=\frac{n!(r+n-r+1)}{(n-r+1)!r!}=\frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}=C_{n+1}^r$$

$$(ii)\quad C_n^{r-1}=\frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}=C_n^r.$$

$$(iii)\quad C_n^0=\frac{n!}{(0!)(n!)}=\frac{n!}{1(n!)}=1=\frac{n!}{(n!)1}=\frac{n!}{(n!)(0!)}=C_n^n$$

مثالونه

$$18.\quad C_9^3+C_9^4=\frac{9!}{(3!)(6!)}+\frac{9!}{(4!)(5!)}=\frac{4(9!)+6(9!)}{(4!)(6!)}=\frac{10!}{(4!)(6!)}=C_{10}^4$$

$$19.\quad C_6^2=\frac{6!}{(2!)(4!)}=\frac{6\cdot 5}{2!}=\frac{30}{2}=15\ ,\ C_6^4=\frac{6!}{(4!)(2!)}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=15$$

د بینوم نیوتن قضیه

د حقیقـــي عـــددونو a او b او طبیعـــي عـــدد n لپـــاره لـــرو چـــې

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ra^{n-r}b^r+\ldots+C_n^nb^n$$

ثبوت. (د ریاضی استقرار په طریقه)

لومړی مرحله. د $n=1$ لپاره لرو چې

$$(a+b)^1=a+b=C_1^0a+C_1^1b$$

دوهمه مرحله. فرض کوو چې اصلي رابطه د $n=k$ لپاره درسته وي. یعنی

$$(a+b)^k=C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+\cdots+C_k^ra^{k-r}b^r+\cdots+C_k^kb^k$$

دریمه مرحله. ددې رابطی دواړه خواوې په $(a+b)$ ضربوو.

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)\left(C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+\cdots+C_k^ra^{k-r}b^r+\cdots+C_k^kb^k\right)$$

$$=C_k^0a^{k+1}+\left(C_k^0+C_k^1\right)a^kb+\cdots+\left(C_k^{r-1}+C_k^r\right)a^{k-r}b^r+\cdots+\left(C_k^{k-1}+C_k^k\right)ab^k+C_k^kb^{k+1}$$

پوهیږو چې

$$C_k^{r-1}+C_k^r=C_{k+1}^r\quad,\quad C_k^0=C_{k+1}^0=C_k^k=C_{k+1}^{k+1}$$

په دې ترتیب

$$(a+b)^n=C_{k+1}^0a^{k+1}+C_{k+1}^1a^kb+\ldots+C_{k+1}^ra^{k+1-r}b^r+\ldots+C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}$$

بنا پر دې قضیه د $n=k+1$ لپاره هم درسته ده.

د بینوم د ضریبونو مجموعه.

که چیرې په اصلي بینوم او انکشاف کې یې $a=1=b$ وضع شي نو لرو چې

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^r+\ldots+C_n^n$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{r} + \ldots + \binom{n}{n}$$

20 مثال.

$$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5$$
$$\Rightarrow (a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5a b^4 + b^5$$
$$a = 1 = b \Rightarrow C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1+5+10+10+5+1 = 2^5$$

21 مثال.

$$(3x+2y)^4 = C_4^0(3x)^4 + C_4^1(3x)^3(2y) + C_4^2(3x)^2(2y)^2 + C_4^3(3x)(2y)^3 + C_4^4(2y)^4$$
$$= (3x)^4 + \frac{5}{1}(3x)^3(2y) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(3x)^2(2y)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}(3x)(2y)^3 + (2y)^4$$
$$= 3^4 x^4 + 5\cdot 3^3 x^3 \cdot 2y + 10\cdot 3^2 x^2 \cdot 2^2 y^2 + 10\cdot 3x\cdot 2^3 y^3 + 2^4 y^4$$
$$= 3^4 x^4 + 5\cdot 3^3 \cdot 2x^3 y + 10\cdot 3^2 \cdot 2^2 x^2 y^2 + 10\cdot 3\cdot 2^3 xy^3 + 2^4 y^4$$

د بینوم د انکشف خاصیتونه

1. د $(a+b)^n$ د انکشاف څخه وروسته $n+1$ حدونه لري.
2. د پورتني بینوم د ضریبونو مجموعه (له انکشاف څخه وروسته) د 2^n سره مساوي دي.
3. نسبت منځ ته د دواړو خوا د متناظرو حدونو ضریبونه سره مساوی دي.
4. د a او b د توانونو مجموعه په هر حد کې د n عدد سره مساوی دي.
5. په $k-$ ام موقیعت کې حد عبارت دی له $C_n^{k-1}\, a^{n-(k-1)} b^{k-1}$.

22 مثال. د $(x+y)^{15}$ بینوم اوم حد پیدا کړئ.

حل: ددې بینوم اوم حد عبارت دی له

$$C_{15}^{7-1}\, x^{15-(7-1)} y^{7-1} = C_{15}^{6}\, x^{15-6} y^6 = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} x^9 y^6 = 5005 x^9 y^6$$

<u>23 مثال</u>. د $\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$ منځنی حد پیدا کړئ.

حل: دلته منځنی حد یعنی شپږم عبارت دی له

$$C_{10}^{5}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{5}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{5}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{\frac{10}{3}}x^{-\frac{5}{2}}=252x^{\frac{5}{6}}$$

د پاسکال مثلث.

د ترکیب د $C_n^0=1=C_n^n$ ، خاصیتونو په نظر کې نیولو سره، کولی شو له انکشاف شخه وروسته د یو بینوم ضریبونه په تدریج سره د $n=1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,...$ لپاره د یو عددی مثلث (پاسکال مثلث) په توګه په لاندي توګه فهرست کوو

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5
\end{array}$$

او یا د $n=0\,,1\,,\,2\,,\,3\,,4\,,\,5$ لپاره د پاسکال مثلث عبارت دی له

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 50 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

د حقيقي عددونو د توانونو لپاره بينوم نيوتن

که چېرې په $(a+b)^{\alpha}$ بینوم کې α یو حقیقي عدد په نظر کې ونیول شي نو دغه انکشاف عمومي حالت غوره کوي او د $|b| < |a|$ شرطونو لپاره نوموړی بینوم د محاسبې لپاره کټور دی او یوه عددی سلسله جوړوي (د بینوم د انکشاف نه وروسته د حدونو تعداد د هغو توانونو لپاره چې طبیعی نه وی نامتناهی دی) دلته د C_{α}^{k} مفهوم په مشخص ډول حسابیږی.

$$C_{\alpha}^{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

د بینوم دغه حالت د محاسبې لپاره زیاته کاروړنه لري خو دلته هغه ځای نه لري.

***24* مثال.** **د $(a+b)^{-3}$ پنځه اول حدونه د $|b| < |a|$ تر شرط لاندې ولیکئ.**

حل:

$$(a+b)^{-3} = a^{-3} + (-3)a^{-4}b + \frac{(-3)(-4)}{1\cdot 2}a^{-5}b^{2}$$
$$+\frac{(-3)(-4)(-5)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-6}b^{3}+\frac{(-3)(-4)(-5)(-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{-7}b^{4}+\cdots$$
$$\Rightarrow (a+b)^{-3}=\frac{1}{a^{3}}-\frac{3b}{a^{4}}+\frac{6b^{2}}{a^{5}}-\frac{10b^{3}}{a^{6}}+\frac{15b^{4}}{a^{7}}+\cdots$$

تمرين

لاندې رابطې د رياضي د استقرار په طريقه ثبوت کړئ.

1. $1^{2}+3^{2}+5^{2}+\ldots+(2n-1)^{2}=\frac{1}{3}n(4n^{2}-1)$
2. $1^{2}+2^{2}+3^{2}+\ldots+n^{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
3. $1^{3}+2^{3}+3^{3}+\ldots+n^{3}=\frac{1}{4}n^{2}(n+1)^{2}$
4. $1.2+2.3+3.4+\ldots+(n-1).n=\frac{(n-1).n(n+1)}{3}$

لاندې افادو ته انکشاف ورکړئ.

5. $(3x+2y^{2})^{5}$, 6. $\left(x^{2}+\frac{1}{2}y\right)^{6}$, 7. $\left(\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2x}\right)^{6}$

8. د $(x+y)^{13}$ اوم حد پيدا کړئ.

9. د $\left(\frac{2}{x}+\frac{x^{2}}{2}\right)^{14}$ هغه حد معلوم کړئ چې x^{4} پکښې وی.

10. د $\left(y^{3}-\frac{x}{3}\right)^{9}$ هغه حد معلوم کړئ چې y^{12} ولري.

$11.$ د $\left(x^2-\frac{2}{x^4}\right)^8$ لومړني پينځه حدونه وليکئ او ساده ئی کړئ.

دا لاندې افادې هره يوې ته تر پنځم حد پوری انکشاف ورکړئ.

$12.\quad (1-x^3)^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad 13.\quad (1+0.5)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad 14.\quad (2+0.1)^{-1}$

$15.$ د $\left(x^2+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{5}{3}}$ شپږم حد معلوم کړئ.

$16.$ وښئ چې د $(a-b)^n$ د ضريبونو مجموعه په صفر سره مساوی دی.

مآخذ

1- اپوستل، ت. م ۱۳۷۲ رياضی اناليز (د عالم زاده ۴-۱ ترجمه) د شريف صنعتي پوهنتون د علمی خپرونو موسسه، د شريف د صنعتي پوهنتون چاپخانه دريم چاپ تهران ۴۸۶-۵٦۹ مخونه.

2- پور کاظمی، م. ح. ۱۳۷۰، عمومي رياضيات دوهم ټوک، نشرنی چاپ، تهران ۱۱-۱۰۸، ۳۰٦-۳۲۱ او ۴۳۳-۵۱۹ مخونه.

3- عدالتی، ت. او فرخی ح. د رياضی جغرافيې اصول و مبانی، د استان قدس اضوی موسسې چاپ، مشهد ۱۳۸۰، ۳۹۷-۴۲۵ مخونه.

4- قران نويس، م. او جوادي، ح د پوهنتون څخه د مخه فزيک، د ققنوس خپرونې، تهران، ايران، ۱۳۸۳، (۱۰-۱۵) مخونه.

5- فرزان م. او ديبائی م. ت. د رياضي د تدريس روس، تحصيلی دورې لاربښونه، گلشن چاپ، تهران ۱۳۸۰. (۱۰۷-۱۴۰) مخونه.

6- ملا فرجزاده، س، ۱۳۷۷ د رياضياتو فرهنگ، د احرار د خپرونو چاپ او نشر، تبريز (۲۲۵- ۲۹۰) مخونه

7- منصورفر، ک ۱۳۷۸، د اجتماعی علومو لپاره د ریاضیاتو پایه (ریاضی اساسات)، د انسانی علومود مطالعې او تدوین سازمان (سمت) چاپ او نشر، تهران، (۱۵۹–۲۰۷) مخونه.

8- نیکو کار، م. و فرزام، گ. ۱۳۸۱، د پوهنتون څخه د مخه ریاضیات، د اساسی علومو د خپرونو نشریه، تهران (۲۲۷–۲۴۷) مخونه.

9- *Ayres, F. J.R. 1964, Calculus, Schoum Publishing Co. New York, pp. 129 -158, 162 – 180. 283 -330.*

10- *Ayres, F. J.R. 1962, First Year College Mathematics, Schoum Publishing Co., New York, pp. 417 – 427.*

11- *Barnett , R.A. , Ziegler M.R. and Byleen K.E. 1999 ,College Algebra , Sixth Edition , Adivision of The McGraw-Hill Companies , boston ,USA , pp. 488-540*

12- *Bermant, A. I. and Aramanovich I.G. 1979, Mathematical Analysis, Mir Publishing, Moscow,, pp. 258 – 343 , 365 – 568 . .*

13- *Cohen, D. 1990, Precalculus, California, Los Angeles, pp. 411 -449.*

14- *Demidovich, B.; 1981, Problems Mathematical Analysis, Mir Pub. Moscow, pp. 180 – 318.*

15- *Demidovich, B.P. and. Maron I.A. 1981, Computational Mathematics .Mir Publishers .Moscow, pp.127 -135 , 229 -269.*

16- *Karl, J.S. 1998, Trigonometry For College Students, Brook/Col Publishing Co .Washington. p. 125.*

17- *Kindle, H.J. 1964, Analytic Geometry, Schoum Publishing Co., New York, pp. 258 – 272, 278, 279, 283 – 330... .*

18- *. Maqsood, A. Mathemahics7, New Star Book Depot, Lahor 2004,p p.21 – 65 .*

19- *Maqsood, A. Mathemahics8, New Star Book Depot, Lahor, 2004, p p.1 – 87.*

20- *. Mira J.A. Arithmetic Clear and Simple, Booksellers, New York, 1968, pp.1-158.*

21- *.Palmer C.I. and Bibb S.F.PracticalMathematics,MeGraw – Hill , Book Company ,New York 1946,pp.1- 161*

22- *Piskunov , S.M. 1981, Differential and Integral Calculus, 1 vols. Mir Pub. Moscow .pp. 158 – 211, 216 – 247, 253 – 319.*

23- *Robert, B. 1997, Intermediate Algebra for College Student Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.p. 819, 843, 858.*

24- *Spiegel , M.R. 1961, Statistics, Schaum, s Outline Series, New York, .pp.45 -64.*

25- *Thomos ,G.B .and Finny ,R.L. 1996 , Calculus and Analytic Geometry , Addison – Wessley ,New York , USA , PP.1001 - 1134 .*

26- *Stein E.I. Refresher Arithmetic , USA,Allyn and Bacon*

, INC, 1961, pp. 109 -200, 220,333.