الجبرون

ALGEBREN

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

لیکوال:

ډاکټر ماخان (مېرې) شینواری

نیولیک

سریزه .... الف

شمیرپوهنیزې نخښې............ ت

۱ . ګڼونډیری ۱

۱ . ۱ طبیعي ګڼونډیری ۱

۱ . ۲ د ټول ګڼونډیری ۴

۱ . ۳ ریشنل ګڼونډیری ۵

۱ . ۴ رییل ګڼونډیری ....، ۷

۱ . ۵ ایماګینار ګڼونډیری ۷

۱ . ۶ کمپلکس ګڼونډیری ۸

۲ . ډیرپپوهنیزې ستکلیمی ۱۱

۲ . ۱ ډیری ۱۱

۲ . ۲ خلډیری یا ضرب ډیری او اړیکی یی... ۲۶

۲ . ۳ نیمنظم یا نیمترتیب ۳۶

۲ . ۴ مینیمالشرطونه ۳۸

۳ . الجبري جوړښتونه ۴۱

۳ . ۱ ګروپ ۴۴

۳ . ۲ بدن یا تن او کړی ۵۹

نورمي شوې ټولینوم ۶۶ څه مانا لري

۳ . ۳ . لاندیګروپ او لاندې کړی ۷۰

۳ . ۴ ایزومورفیزم ۸۰

۳ . ۵ د نیمګروپ په ګروپ او کړی په یوه (ناضرور
کموتاتیو) تن یا بدن کی خوندیونه ۹۲
۳ . ۶ نورمالپرویشنه ۹۵
۳ . ۷ ایدیال او پاتیتهولګیکړی ۱۰۵
۴ د بول الجبر، سرکټ الجبر......... ۱۱۶
۴ . ۱ د ول الجبر سټ کلیمی ۱۱۶
۴ . ۲ د بول فنکشنونه او پولینومونه ۱۲۹
سویچ الجبر یا برینبناجریان الجبر ۱۴۶
۵ الجبرونه ۱۵۶
یو څو بنسټکلیمی ۱۵۶
۵ . ۲ لاندي الجبر یا سب الجبر ۱۷۳
۵ . ۳ ایزمورفیزم ، هومومورفیزم ۱۸۰
۶ . ترونونه یا ترونی ۲۰۷
۶ . ۱ ترونی او مکمل - یا پوره ترونی.. ۲۰۷

۱ ګڼونډیري

د دې لیاره، چې دا د الجبر کلیمې مو پوره څېړلې وي او ښه پوهوړ شي، نو په سر کې غواړم هغه د ښوونځي باید (چې متآسفانه دا مو په هیواد کې، په دې نامه نه وو نومولي) ورسره بلد، د ګڼونو ډیري یو په بل پسې تعریف کړم، یا بهتره لنډه ګوته ورته ونیسم او دا په هغو کې د باوري کارونو یا اپریشنونو یا عملیو او یا ګنډنو او یا د تړونونو په بنسټ.

۱ . ۱ طبیعي ګڼونډیری

Die Menge der natürliche Zahlen
(the set of non negative integer)

دا د ګڼونو ډیری چې صفر ورسه نه وي په لاندې ډول دی:

$$N = \{ 1,2,3,...,n , ... \}$$

دا لاندې د طبیعي ګڼونو ډیري دی، چې صفر ورسره دی، یا په بل عبارت : د طبیعي ګنونو ډیری د صفر سره

$$N^* = \{0,1,2,...,n,...\}$$

په دې ډیري کی لاندې شیمر قاعدې باور لري

.

.

.

۱ . ۱ . ۲ په طبیعي ګڼونو کی شمیرقاعدې

الف : و زیاتون ته یا بهتره، نسبت وزیاتون ته:

اول : د هرو دوه طبیعی ګڼونو $a,b \in N$ لپاره، و زیاتون ته، یا نسبت وزیاتون ته، یو دریم طبیعي ګڼ $c \in N$ شته د کومو لپاره چی باور لري: $a + b = c$

دوېم : اسوشیاتیو قانون Assotiative : د طبیعي ګڼونو لپاره د اسوشیاتیو قانون باور لري:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

دریم : کموتاتیو قانون commutative : د طبیعي ګڼونو لپاره د کموتاتیو قانون باور لري، یعني:

$$a + b = b + a$$

څلورم: بي تاثیره یا ناپیلی توکی das neutrales Element: په طبیعي ګڼونو کی چی صفر ورسره وي باور لري

$$a + 0 = 0 + a = a$$

صفر د طبیعي ګڼونو ناپیلی یا بهتره بی تاثیره توکی بلل کیږي.

ب : و ځل ته یا بهتره نسبت ځل ته

.

اول : د هرو دوه طبيعی گڼونو a , b ∈ N لپاره يو دريم طبيعی گڼ c ∈ N شته، د کومو لپاره چی باور لري

$$a.b = c$$

دوم : د طبيعي گڼونو a,b,c ∈ N لپار اسوشياتيو قانون باور لري

$$(a . b) . c = a . (b . c)$$

دريم : د طبيعي گڼونوډيري کی کموتاتيو قانون باور لري

$$a . \ b = b . a$$

څلورم. نسبت و ځل ته ناپيلي يا بهتره بي تاثيره توکی : که طبيعي گڼونه له 1 سره ځل شي، نو بيرته پخپله همغه طبيعي گڼ لاس ته راځي

$$1 . a = a . 1 = a$$

دا 1 د طبيعي گڼونو يو ناپيلی يا بي تاثيره توکی بلل کيږي، چی يوی (دا ځکه يوی بولو ، چی بايد له يو سره يی توپير شوی وي) يي بولو

يادونه : د بېګونو، چی يوی له يو څخه لوی پارچه ... شی.

دیا

يادونه : په پورته نښلونو کی دي ته پام وي، چی ورکړ شوي توکی يو د بل څخه بايد توپيريدونکی نه وي، کيدی شي، چی يو له بل سره مساوي هم وي يا بهتره همغه توکي وي.

ګورو چې په طبیعي ګڼونډیري کی، نسبت و زیاتون ته، د هر توکی لپاره د هغه په څټ یا برعکس ګڼ نه شته، نو له دې امله مجبوریږو، چې د طبیعی ګڼونو ډیری د ټولګڼونو ډیري ته پراخ کړو،

۱ . ۲ د ټولګڼونو ډیری die Menge der ganze Zahlen :

د ټولګڼونو ډیری، د طبیعي ګڼونو ډیری د صفر او د دې طبیعي ګڼونو د توکو په څټ ګڼونو ډیری دی، چې په Z سره یی ښایو او داسی یي لیکو

$$Z = \{ ...,-n, ..., -3,-2,-1,0,1,2,3,...,n,...\}$$

په ټولګڼونو ډیري کی هغه په طبیعی ګڼونډیري کی باوري نښلونی یا عملیي باور لري او په دې برسیره د هر یوه ګڼ لپاره د هغه په څټ ګڼ نسبت و زیاتون ته هم موجود دی، یعنی لاندې باور لري:

د هر ټولګڼ $a \in Z$ لپاره د هغه په څټ ګڼ یعنی $-a \in Z$ موجود دی، چی دا لاندې باوري کوي:

$$a + (-a) = a - a = -a+ a= 0$$

دلته $-a$ د a په څټ ګڼ یا inverse دی نسبت و زیاتون ته. دې ته طبعاً پام شته، چی د مثبت ګڼ څل د منفی ګڼ

.

.

سره منځ ته راغلی، چی نتيجه يی يو منفی ګڼ دی، دا په دې مانا، چی دلته اصلي نبنلونه يا عمليه زياتون دی او نه . (ځل).

يادونه : زياتون دوه ځايزه عمليه binäre Operation يا نبنلونه ده او په څټ عمليه يوه يوځايزه عمليه unäre Operation يا نبنلونه ده.

ګورو، چي د ټولګڼونو په ډيري کی د ځل لپاره د ګڼونو په څټ ګڼونه inverse Zahlen نه دي تعريف، يعنی د يوې افغانی يو په څلورمه (1 / 4) يو ټولګڼ نه دی، نو له دې امله بايد د ټولګڼونو ډيری و ريشنل ګڼونو Q ته پراخه شی .

۱ . ۳ ريشنل ګڼونه rationale Zahlen :

د ريشنلګڼونو ډيری له دې امله د ټولګڼونو ډيری Z او د ټولو ماتګڼونو ډيري a / b څخه جوړ دی، چي په Q سره يي په نخښنه کو او په لاندې ډول يي ليکو :

$$Q = \{ Z , a/b , a,b \in Z , b \neq 0 \}$$

دا داسی لوستل کيږي : ډيری Q مساوي دی د ټولګڼونو ډيری Z اود مات ګڼونو a / b ډيري سره، $a , b \in Z$.

د ریشنلګڼونو ډیري کی، هغه په Z کی ټول د شمیرقوانین باور لري او په دې برسیره د هر ګڼ لپاره نسبت و ځل ته د هغه په څټ ګڼ هم موجود دی ، یعنی په ریشنل ګڼونو کی د هر ګڼ $a \in Z$ لپاره یو $b \in Z$ موجود دی د کوم لپاره چي باور لري:

$$a \cdot b = 1 \Rightarrow b = 1/a, a \neq 0$$

دلته a باید د صفر سره برابره یا مساوي نه وي، ځکه، چی په صفر ویش نه دی تعریف.

ګورو چی ددوه په څټ ګڼونو ځل د ریشنلګڼ یو یوی راکوي. یوی هغه توکی دی، چی د ریشنلګڼون ډیري هرتوکی سره د ځل نښلونه کی بي تاثیره پاتي کیږي یا ناپیلی. دا یوی مورږ له دې امله ناپیلیdas neutrale Element او یا هم بی تاثیره توکی بولو.

په پورته ګڼونو کی توان تعریف دی، یعني هر ګڼ د خپل ځان سره ځل کیدنه شته، خو د دې په څټ کارونه یاعملیه یا بهتره نښلونه موجود نه ده، نو له دې امله باید دا ګڼونډیری نور هم پراخه شي. یعني د ګڼون ریښه هم باید په ګڼونډیري کی باور ولري. د بیلګي په توګه د ۲ ریښه یعنی $\sqrt{2}$ په ټولګڼونوکی نه دی تعریف. دا پراختیا مو ریبلګڼونډیری ته لاربښودوي، چي

په R سره ښايو يا نخښنه كوو.

۱ . ۴ رييل ګڼونډېرى R die Menge der reelen Zahlen:

د هغو ګڼونوډېرى، چې له ريښو جوړ وي، هغه مو ږ د ايريشنل ګڼونوډېرى die Menge der irationale Zahlen بولو چې په Q_i سره يې په نخښنه كو . د رييل ګڼونډېرى ياد رييل ګڼونو ډېرى په دې توګه بيا د ريشنل ګڼونو ډيري او د ايريشنلګڼونو ډيري د ټولنى څخه جوړ دى يعنى

$$R = Q \cup Q_i$$

يادونه : په پورته او راتلونكى كي كه U راشي، نود ټولنى په ځاي به يى ځاي نيولى وي، كه بل نوم ورسره مل نه وي. په دې ډيري كي د هرنامنفى ګڼ لپاره د هغه ګڼ ريښه موجود ده. د رييلګڼونوډېرى. بيا تكراوروو، چې د ټولو ريشنلګڼونو ډيري څخه عبارت دى، چې د نامنفي ريشنلګڼونوګڼونو ريښى هم ورزياتي شي.

په رييلګڼونو كي د ريشنل ګڼونډېري ټول قوانين باورلري او په همدې ډول په R كى د هر مثبت ګڼ a ريښه هم موجود ده، يعني $\sqrt{a}$ موجود ده، چې a منفي ګڼ نه وي. دا ريښه نيونه يو يوځايز اپريشن يا عمليه او يا نښلونه ده.

دلته هم سملاسی راته جوته کیږي، چې د ریښې یا بهتره د مربع ریښی د منفی ریښه نیونکي یا ریښه ایستونکی ګڼ ریښه نه ده تعریف، نو له دې امله باید د رییلګڼونوډیری د کمپلکس ګڼونډیرۍ‌ته پراخه شي.

۱ . ۵ ایماګینار ګڼونډیری: د ټولو منفی ګڼونو ریښوډیري ته ایماګینار ګڼونډیری وایو die Menge der imaginäre Zahlen . او دا په I سره په نخښه کوو. دا هغه ګڼونه i دي، د کومو لپاره چې باور لري: $i^2 = -1$. یانی $i = \sqrt{-1}$, نو که b یو رییلګڼ وي، نو ib یو ایماګینار ګڼ دی .

اوس راځو د کمپلکس ګڼونو ډیري تعریف ته :

۱ . ۶ کمپلکس ګڼونډیری

die Menge der komplexen Zahlen

کمپلکس ګنونډیری د رییلګڼونډیری او ایماګینارګنونډیري ټولنی ته وایي. یاني که ایماګینارګڼ ډېرګه د I سره په نخښه کړو نو کمپلکسګڼ چی د C سره یي په نخښه کوو، دی
ډېرګه

$$C = R \cup I$$

دلته له دې پیژندنی یا تعریف څخه روښانیږي، چی کپلکس

.

گڼونه دوه برخې لري، رييله برخه او ايماګينار برخه، نو له دې امله د کمپلکس ګڼونو په ډيري کې ټولې نښلونې يا عمليې، چې په رييل ګڼونډيري او ايماګينار ګڼونډيري کې باور لري، باوري دي. او برسيره پردې، دا لاندې قوانين هم باور لري: دلته که $z = a + ib$ يو کمپلکس ګڼ وي، چې a رييله برخه او $ib = bi$ يې ايماګينار يا ايماجينار برخه ده. او س راځو شميرقوانينو ته:

الف : $i^5 = i \quad i^4 = 1 \quad i^3 = -i \quad i^2 = -1$

په ټوليزه توګه:

$$i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i \quad i^{4n+4} = +1 \qquad i^{4n+5} = i$$

ب –

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1+b_2)$$
$$z_1.z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) +i(a_1b_2+a_2b_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

کيدى شي، چې وي $z^* = \bar{z} = a - ib$ ، نو دا ګڼ و $z = a+ib$ ته يو کونجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي

پ–

$$z.z^* = z.\overline{z} = (a+ ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

دا پورته د جملو یا قضیو په څیر هم ښوول کیدی شي، خو مونږ یی دلته د ښوونی څخه تیرېږو او دایی د تعریف له مخی د اعتبار وړ قوانینو په څیر راوړو.

یادونه : مونږ کړای شو، چی دا د گڼونو ډیري په لاندې ډول د ډیریو په توگه یو په بل کي خوندې ولیکو:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

دا په ترتیب د ورپسی ډیري اصلي برخڼیري دي

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

۲ – ډیرېپوهینیزې ستړکلیمی

۲ . ۱ . ډیری

په شمیرپوهنه کی پل په پل موږ ددې، د ستونځو سره مل، تعریف شوې کلیمي سره مخامخ کیږو، کومه چی د یوه لغات « ټولګې » سره روښانه کیدی یا پوهیدل کیدی شي. د بیلګي په توګه د انسانانو د ټولګې څخه غږیږو، چی په یوه ټاکلی وخت کی په یوه کوټه کی موجود وي، یا هغه هیلی، چی په یوه ځانګړي وخت کې په یوه ځانګړي ځای کې په اوبو کی لامبی. هغه غرڅه، چی د هسکی مینې د سپینی مورګي په ځنګلونو کی لا پاتی دي او همدا ډول هغه میږې او ووزې، چی په ۱۹۹۹ میلادې کال کی د کوچیانو څخه د لوړې له امله مړې شوي دي. د داسی شیانو ټولګه «ډیری» (Die Menge , set) بلل کیږي یا داسی ټولګي ډیری نوموو.

۲ . ۱ . ۱ **لنډ تعریف** : ځموږ د خیال یا تصور د ټولو، په روښانه توګه، توپیرکیدونکو شیانو ټولګه «ډیری» نوموو یا بولو.

.

شیان، چې له هغو ډیری جوړ شوی دی، د ډیرې «توکې» بلل کیږي. د دې لپاره، چې « x د ډیرې M توکی دی» لیکو: « $x \in M$ ». د دې وینا په څټ یا نفي یا نیګیشن Negationد « $x \notin M$ » له لارې ورکول کیږي.

د « $x_1 \in M$ او .... او $x_n \in M$ » په ځای لیکو:

$$"x_1,x_2,...,x_n \in M"$$

یو ځانګړی ډیری تشډیری دی، داسې کرکتریزه کیږي، چې کوم توکی نه لري. دا تشډیری د سومبول یا نخښې $\emptyset$ سره نخښون کیږي یا په نخښه کیږي.

نور هغه ډیرې چې زیات مو مخ ته راځي یا زیات منځ ته راځي، دا لاندې ډیرې دي:

د ټولو طبیعی یا پیدایښتګڼونو ډیری د N سره په نخښه کیږي، چې صفر ورسره مل دی.

د ټولو ټولګڼونو ډیری Z

د ټولو راشنلګڼونو ډیری Q

د ټولو رییلګڼونو ډیری R

د ټولو کمپلکسګڼونو ډیری C

د ۳۰ پرویشونو ډیری، چې له ۸ توکو څخه جوړ ډیری دی.

یعنی {1,2,3,5, 6,10,15,30 } ډیری.

۲ . ۱ . ۲ تعریف : یو ډیری M د ډیري N برخه ډیری بلل کیږي، که له $x \in M$ څخه تل لاس ته راشی $x \in N$.
په نخښونه یی : $M \supset N$. یا $M \subset N$

۲ . ۱ . ۳ تعریف : هغه ډیری، چی هیڅ توکی ونه لري، تشډیری بلل کیږي او داسی $\emptyset$ یي په نخښه کوو.

تشډیری $\emptyset$ د هرډیري برخډیری دی ، برسیره پردې هر ډیری د خپل ځان برخډیری دی. دا ډول ډیري نااصلي برخډیري بلل کیږي، هغه برخډیری اصلي برخډیری دی یا اصلي برخډیری بلل کیږي، که دا برخډیری له دې دوه ډیریو یعنی له پخپله دې ورکړ شوي ډیرې او تشډیري څخه توپیر ولري. دې ته دې هم باید ګوته نیول شوي وي، چی کله کله برخډیریو ته «لاندې ډیري» هم ویل کیږي
دا نخښی $\subset$، $\subseteq$ د اینکلوزیون نخښو Inklusionszeichen په نامه بل کیږي.

۲ . ۱ . ۴ تعریف : که وي $M \subseteq N$ او $M \models N$ نو M د N اصلي برخډیری بلل کیږي. ($M \neq N$)
په نخښونه یی : $M \subset N$

۲ . ۱ . ۵ **تعریف**: د یوه ډیرې S توکي کیدی شي پخپله ډیري وي. دلته نو S د ډیریسیستم په توګه په نخښنه کیدی شي یا د ډیري سیستم په څیر ګڼل کیدی شي یا په بل عبارت: د یوه ډیري د توکو ډیري د هغه ډیري برخډیری دي، چې دا یو د ډیریسیستم جوړوي.

۲ . ۱ . ۶ **تعریف**: د یوه ناتش ډیري سیتسم S غوڅډیری (د سیستم هغه برخډیری، چې د سیستم د هر ډیري برخډیری وي) D د ټولو توکو هغه برخډیری دی، چې په همغه وخت یا یووخت کی د سیستم S د هر ډیري M توکی وي. یعنی لرو $x \in D$ همغه ارزښته یا برابرارزښته د دې سره دی $x \in M$ د ټولو ډیریو $M \in S$ لپاره .

په نخښونه: $D = \bigcap_{M \in S} M$ یا $D = \bigcap \{M \mid M \in S\}$

$D = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$

که S یوائې د پای ډیرو برخډیریو $M_1, \dots, M_n$ څخه جوړ دی.

مساوات یا برابرون $M \cap N = \emptyset$ وایي، چې M او N ګډ توکی نه لري، یعني توکی پردي دي یا لنډ پردي یا دیسیونکت دي(Disjnukt) دي .

۲ . ۱ . ۷ تعریف: د یوه ناتش ډیریسیستم S ټولنه V د ټولو هغو توکو ډیری دی، چې کم له کمه د S ډیریسیستم یوه ډیري M پورې اړه ولري یعنی توکی وي.

په نخښونه : $V = \bigcup_{M \in S} M$ یا $V = \bigcup \{ M \mid M \in S \}$

$V = M_1 \cup \dots \cup M_n$

که ډیریسیستم S د پای ډیرو برخډیریو $M_1, M_2, \dots, M_n$ څخه منځ ته راغلی یا جوړ وي.

د غوڅډیري او ټولنډیري د تعریف په مرسته پسی ترلي لاندې اړیکي لاس ته راځي ، چی ښوونه یی ګرانو لوستونکو ته پریښوول کیږي.

۲ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله:

$$(a) \quad M \cup (N \cap N) = (M \cup N) \cap (M \cup N)$$
$$(b) \quad M \cap (N \cup N) = (M \cap N) \cup (M \cap N)$$
$$(c) \quad M \cap N = M$$

د $M \subset N$ سره په همغه مانا ده

$$(d) \quad M \cup N = M$$

د $N \subset M$ سره په همغه مانا ده

پايډيري كيدى شي، چې د هغو د غړو له لارې په نخښه شي.
ليكل كيږي

$$\{ x_1 , x_2, \ldots , x_n \}$$

د همغه ډيري M لپاره، چې ټيك له دې وركړشوو توكو څخه جوړ وي. يوتوكيز ډيرى $\{ x \}$ د هغه د توكي x څخه بايد توپير شي:
د بيلگې په توگه $\{ \emptyset \}$ هغه ډيرى دى، چې د هغه يواځنى توكى تشډيرى دى .

ديوه ډيري M د توكو گڼون يا تعداد د $|M|$ سره په نخشه كيري. دا گڼ $|M|$ د ډيري M زور يا توان بلل كيږي، دا په دې مانا چې د ډيري د توكو گڼون يا تقداد د ډيري زور دى. د بيلگې په توگه دى $|\{\emptyset\}| = 1$ او $|\emptyset| = 0$.
د يوه ډيري بل ډول روښانونه يا شميرنه په دې كى نغښتى، چې ديوه وركړ شوي ډيري M ټول توكي وركړ شوي ، كوم توكى چې گډ خويونه E ولري، و يوه نوي ډيري ته سره راټولگه كړي يا را يوځاي كړي. $E(x)$ په دې مانا چې x خويونه E لري، نو دا ډيرى په $\{ x \in X \mid E(x) \}$ سره ښايو.
د بيلگې په توگه ډيرى $\{ x \in Z \mid x^2 = 1\}$ د 1- او 1 څخه جوړ شوى، د ټولو ټولگڼونو برخډيري دى. د يوه ډيري دا

ډول جوړونی سره د انډولډيري X ورکونه مهمه ده، له کومی چی توکی رانیول کیږي، په غیر له دې کیدی شي، له تضاد یا مخامخوالی ډك یا په ځتې ډيري رامنځ ته شي، دا چی انډولډيری په ټولیزه توګه په همغه اړیکو یواځنی ټاکلی دی، نو په دې حالت کی دې په اکسپلیځیت(Explizite لاتین : روښانه ، واضح) ورکونه تیریدنه وشي.

۲ . ۱ . ۹ تعریف: د دوه ډيريو M او N کمونډيری دی :

$$M \setminus N = \{ x \in M \mid x \in N \}$$

د غوځي ، ټولنی او کمون لپاره په پوره روښانه توګه لاندې یادوو:

کموتاتیو قانون Kommutativität

$$A \cap B = B \cap A \ , \quad A \cup B = B \cup A$$

اسوځیاتیو قانون Assotiativität

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

دیستریبوتیویتي قانون Distributivität :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \ ,$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

ټولیز یا عمومي

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) \cap B = \bigcup_{\alpha} (A_{\alpha} \cap B)$$

او وروسته

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B), \qquad A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

ډیري شمیرپوهنیزې ښووني د پوره اندکشن په پرینخیپ ولاړې دي، کوم چې د طبیعي ګڼونو اکسیوماتیکي جوړخت دلایلو راوړنه کی یو غوره رول لوبوي.

۲ . ۱ . ۱۰ د پوره اندکشن ثبوت پرینخیپ:

A دې په طبیعي ګڼونو $n \in N$ یوه ویناو ی. $A(n)$ په دې مانا دی، چې A په n باوري کیږي.
د یوه کره ټاکلی $n_0 \in N$ څخه پیل باور لري:

الف : $A(n_0)$ د اینډکشن پیل:
ب ؛ د اینډکشن پاي : د ټولو $n \geq n_0$ لپاره له $A(n-1)$ څخه هم $A(n)$ لاس ته راځي
نو بیا A د ټولو طبیعي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتیا ده یا صحیح یا ټیك ده (دا ریښتیا مناسبه نومونه ده).

دې ته دې ګوته نيول شوي وي، چې خورا ساده دی، که چيري د ايندکشن پای په لاندې ډول لاربښوده کړو:

ب : له $A(i)$ څخه د ټولو i لپاره د $n_0 \le i < n$ سره $A(n)$ هم لاس ته راځي.

شرايط (b) او (b') برابرارزښته دي ، لکه چی وړېسی يا ترلي ليدل کيږي.

د انيدکشن ښوونه يا ثبوت بيلګي د لاندې جملو اوبيو يا حلونو ته مرسته کوي يا د لاندې جملی اّبيو په چوپړ کي دي.

۲ . ۱ . ۱۱ تعريف: M دې يو ورکړشوی ډيری وي. د M د ټولو برخډيريو ډيری. چې په $P(M)$ سره يی په نخښه کوو يا ښايو، د M دپوتنځډيري Potenzmenge يا توانډيري په نامه ياديږي.

۲ . ۱ . ۱۲ جمله: M دې يو n– توکيز ډيری وي. $P = P(M)$ دې د M د ټولو برخډيريو ډيری وي. نو دا د M په توان ډيری P له 2^n توکو څخه جوړ دی.

اوبی (حل): د ايندکشن پيل: $n = 0$

ګورو چی M کوم توکی نه لري. له دې امله M تشه ډيری Ø دی. د $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ له امله په P کی یو توکی $1 = 2^0$ موجود دی.

وي دې : $n \in N, n \geq 1$

د ايندکشن نيونه يا فرضيه: هر $(n - 1)$ – توکييز ډيری دې ټيك 2^{n-1} توپيريدونکی برخډيري ولري.

د ايندکشن اوبی يا ثبوت : که M يو ډيری د n توکو سره وي، نو $P(M)$ ټيك له 2^n توکو جوړ دی.

د دې سره دې $M = \{a_1, a_1, \dots, a_n\}$ وي.

نو بيا $P(M')$ د $M' = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ لپاره د ايندکشن د نيونی يا فرضيي سره ټيك 2^{n-1} توکي لري،

که $A \in P(M)$، نو بيا يا $a_n \in A$ دی او يا $a_n \notin A$. په دوم حالت کي A په $P(M')$ پورې اړه لري، او په لومړي حالت کي $A' = A \setminus \{a\} \in P(M')$ نو $P(M)$ ټيك

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1 + 1) = 2^n$$

توکي لري. د پوره ايندکشن د پرينځيپ له مخی دلته وښوول شو، چی د هر n – توکيز ډيري M لپاره پوتنځ – يا تواندډيری $P(M)$ ټيك 2^n توکی لري. *

يو د ثبوت له مرستندوي موادو څخه د ناپاي ډيري زدکړې لپاره د څورن Zorn جملګي ده. S دې يو ناتش ډيريسيستم وي. يو ناتش د S برخډيرى K يو ځنځير بلل کيږي، که له $M_1 , M_2 \in K$ څخه تل $M_1 \subseteq M_2$ لاس ته راشي او يا $M_2 \supseteq M_1$ لاس ته راشي.

۲ . ۱ . ۱۳ تعريف :يو ډيري $M \in S$ د S يو ماکزيمال يا لوي توکى بلل کيري، که له $N \in S$ او $M \subseteq N$ څخه تل لاس ته راشي ، چى $M = N$. نو د څورن جملګى په لاندې ډول ده: (ماکزيمال يا ماکسيمال = Maximal)

۲ . ۱ . ۱۳ د څورن جملګىLemma vo n Zorn:

که د ناتش ډيريسيستم S د هر ځنځير K لپاره ټولنډيري $\{ K \mid K \in K \}$ هم يو د S ډيريسيستم توکى وي، نو بيا په کي يو ماکزيمال maximales Element توکى موجود دى.

ددې جملګى د ثبوت څخه دلته تيريږو.

وي دې N د يوه نيم منظم ډيرې M لاندې ډيرى يا برخه ډيرى. هر (ضرور نه دى، چى په N کى ځاى وي يا خوندې وي) a له M څخه، کوم چى د ټولو $x \in N$ لپاره شرط $a \geq x$

پوره کړي د لاندې ډیري پورته بند بلل کیږي یانی ډیری یی د لته رابند دی. دې ته دوګونی کلیمه لاندې بند دی.
په ورکړ شوې نیممنظم ډیري M سره د ټولو ځنځیرونو ډیری د ډیرې خوندیونی په موخه یا هدف ، هم نیمه منظم دی. دا ټول د اخرني ډیري ماکسیمال توکی ، د خپل طبیعت له مخی د M ماکسیمال ځنځیر بلل کیږي.
لاندې جملی یو بل ته ورته دې یانی د یوې څخه بله لاس ته راځی او په څټ.

۲ . ۱ . ۱۴ د څرمیلو جمله Zermelo: هر ډیری کیدی شي منظم شي

۲ . ۱ . ۱۵ د هاوزدورف جمله Hausdorff: هره د یوه نیمه منظم ډیري ځنځیر په یوه ماکسیمال ځنځیر کي خوندې ده.

۲ . ۱ . ۱۶ د کوراتوفسکي –څورن جمله Kuratowski-Zorn :
که د یوه نیممنظم ډیري M هر ځنځیر یو پورته بند ولري، نو د M په هر توکی پسی یو په نامه ماکسیمال توګي راځی.
ددې درې جملو له ثبوت څخه دلته تیریږو.

اوس دې X او Y دوه ناتش ډیري وي. د یوې د X په Y کی څیرونی (په نخښونه $f: X \rightarrow Y$) لاندې یو تنظیم پوهیږو ، په کوم کی چی د $x \in X$ هر توکی یواځنی یوه د $y \in Y$ توکی باندې د څیرې په توګه تنظیم شي یا ترتیب شي، د x څیره y په څیرونه f د f(x) سره او یا هم ساده د fx سره په نخښنه کوو. ډیری X د څیرونی f تعریفډیری بلل کیږي او ډیری Y د هغی موخیډیری یا څیرډیری بلل کیږي.

که f د x څیرونه یا څیره کونه وي په Y کی او M یو د X برخډیری وي، نو دا د ټولو $x \in M$ توکو څیرې ډیری او په ورته توګه د ډیرې M څیره بلل کیږي او داسې یې په نخښنه کوو f(M) یا په ساده توګه fM . پس باور لري:

$$fX = \{ fx \mid x \in M \},$$

او fM د Y یو برخډیری دی. د تشډیري څیره بیرته تش ډیری دی. د تعریف ډیري څیره fX د f څیره هم بلل کیږي او د Im f سره په نخښنه کیږي.

۱ . ۱ . ۱۰ تعریف: که $\operatorname{Im} f = Y$ باور ولري ، د څیرونی $f: X \rightarrow Y$ لپاره، نو f یوه سوریکتیوه څیرونه surjektive Abbildung بلل یږي، یو سوریکشن Surjektion یا یوه د X څیرونه په Y باندې. په څټ دې N یو د S

برخډیری وي. نو بیا د ټولو X د توکو ډیری، چې د هغو ځیره د N یو توکی وي، د N له ځیرې پخوا ځیرونه، په ځیرونه f کی، بلل کیږي او د $f^{-1}(N)$ سره په نخښه کیږي. باور لري

$$f^{-1}(N) = \{ x \in X \mid fx \in N \}$$

او $f^{-1}(N)$ یو د X برخډیری دی.

که $N \models \emptyset$ هم باور ولري، کیدی شي $f^{-1}(N)$ تشډیری وي، یعنی هلته که $N \cap \mathrm{Im}\, f = \emptyset$ باور ولري.

۲ . ۱ . ۱۷ تعریف : یوه ځیرونه $f: X \longrightarrow Y$ د خویونو سره،

چې له $x_1 \models x_2$ تل $fx_1 \models fx_2$ لاس ته ریشي، اینیکتیو ځیره کونه injektive Abbildung بلل کیږي یا اینیکشن Injektion. که په همدې وخت کی f حتی یو اینیکتیو او سوریکتیو وي، نو f بییکتیو ځیره کوونه bijektive Abbildung بلل کیږي یا بیکشن Bijektion بلل کیږي.

۲ . ۱ . ۱۸ تعریف : $f: X \rightarrow Y$ دې یوه بییکتیوه ځیره کونه وي. په هر $y \in Y$ د ځیرې په توګه یو یواځنی

ټاکلی توکی $x \in X$ د $y = f(x)$ سره د ځیرې په توګه تنظیم کړي، نو دلته د Y یو بییکشن په X تعریفوي.
دا د f په څټ ځیرونه بلل کیږي او یا دا f ته راګرځیدونکی ځیره کوونکي ده. او د $f^{-1} : Y \to X$ سره په نخښه کیږي

۱ . ۱ . ۱۹ **تعریف:** که دوه ځیرونی $Y \to f : X$ او $Z \to g : Y$ یو په بل پسی رامنځ ته کړی شي او په ټولیزه توګه یوه د $g \circ f$ سره په نخښه شوې ځیره کونه د X په Z کی ترې لاس ته راځي، کوم چې د f او g ځل یا ضرب ځیرونه بلل کیږي زیات وخت د ځنځیرې او یا تړلی بلواك یا ځیره کوني په نامه هم یادیږي. دا په لاندې ډول ورکړ شوی دی.

د ټولو $x \in X$ د پاره $(g \circ f) = g(fx) = g(f(x))$
کیدی شي چی تعریفډیری او ځیره ډیری یو بل باندې پریوځي.
دلته بیا له یوې ځیرونی f غبرېږو، چی X په خپل ځان ځیره کوي.

۲ . ۱ . ۲۰ **تعریف:** که دډیري X هر توکی په خپل ځان بیرته ځیره شي، نو یو د X بیکشن په خپل ځان لاس ته ترې راځي،

چی د X کتمټ څیرونه Identität یا identische Abbildung یي بولو او په لاندې ډول یې ښایو id_x او یا په ساده توګه id .

۲ . ۱ . ۲۱ یادونه: د هر $x \in X$ د پاره باور لري $id_x = x$.
که f یو د X بیکشن په Y وي، نود دې په څټ څیره کونه f^{-1} هم موجود ده او لاس ته ترې راځي

$$f^{-1} \circ f = id_x , \quad f \circ f^{-1} = id_y$$

۲ . ۲ ځلېدیری یا ضربېدیری او اړیکی یی

په دې برخه کی کارتیزي ځل د ناتشو ډیریو او همداسی د اکویوالینځ اړیکو یا ورتوالی اړیکو Äquivalenzrelation کلیمه څیړو.

۲ . ۲ . ۱ تعریف: د دوه ډیریوA اوB کارتیزې ځل A×B د تنظیمشوو جوړو (a , b) ټولګه ده، د $a \in A$ او $b \in B$ سره.
دلته (a , b) = (a',b') ټیک هلته باور لري، چی a = a' او b =b' وي.
.

۲ . ۲ . ۲ یادونه: کارتیزې ځل په ټولیزه توګه کموتاتیو نه دی ، دا په دې مانا چې $A\times B \neq B\times A$ که $A \neq B$ وي. په پام کي دې دا اثتثنا وي، چی د هر ناتشډیري A او تشډیري $\emptyset$ لپاره باور لري

$$A\times\emptyset = \emptyset \times A$$

په ورته توګه د دوه ډیریو کارتیزې ځل په څیر د پاي ډیرو ډیریو دپاره هم کارتیزې ځل تعریفیږي.

۲ . ۲ . ۳ تعریف: کارتیزې ځل $A = A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ د پای ډیرو ډیریو A_i د $i = 1,\ldots,n$ لپاره، د ټولو منظمو یا ترتیبشوو n – ګونو $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ د $a_i \in A , i = 1 , 2 , \ldots , n$ سره. دلته

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1', a_2', \ldots ,a_n')$$

ټیك هلته باور لري، که $a_i = a_i'$ د ټول $i = 1,2,\ldots,n$ لپاره وي.

که $A = A_i$ وي، د ټولو $i = 1 , 2,\ldots,n$ لپاره، نو $A^n = \overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i$ د A n –ایزی توان یا پوتنځ بلل کیږي. ([illegible])

ډیری $\{(a,\ldots,a) \in A^n \mid a \in A \}$ د A^n نیمی یا قطر دی.

بینار اړیکی binäre Relationen

۲ . ۲ . ۴ تعریف : یود $A \times A$ برخېدیری R د ډیري A دوه ځایزه اړیکي بلل کیږي. وایو : د A دوه توکی a او b په اړیکه R کی یو له بل سره پراته دي، په نخښونه $a \sim b$, هلته او هلته یا په بل عبارت ټیك هلته، که وي

$$(a, b) \in R \qquad \text{او} \qquad a\,R\,b$$

د بینار اړیکو یا دوه ځایزو اړیکو R کومپلیمنت یا پوره کید- ونکی یو دوه ځایزه اړیکي $\overline{R}$ دی چي په لاندې توګه تعریف دي $\overline{R} = (M \times M) \setminus R$. په نورو ویناو سره $a\,\overline{R}\,b$ ټیك هلته باور لري، که $(a,b) \notin R$.
د بینار اړیکو د ځل RS لاندې پوهیږو، چی $a(RS)b$ ټیك اوټیك هلته باور لري، که په M کی یو توکی c موجود وي ، د کوم لپاره چی $a\,R\,c$ او cSb باور لري.

د بینارارېکو ځل اسوشیاتیو دی یعنی

$$(RS)T = R(ST)$$

د بینار اړیکو ځل په هیڅ توګه کوموتاتیو نه دی ، کله کله اړیکی
R او S یو له بل سره بدلیدونکی وي ، دا په دې مانا چي

$$RS = SR$$

یوون اړیکی E په لاندې ډول تعریف دي: aEb ټیك هلته باور
لري که وي، a = b . یا په بل ډول اړیکی E د ټولو هغو توکو
جوړو (a,a) د a ∈M سره ډیری دی. دلته په روښانه توګه
باوور لري: $E = E^{-1}$ او دیوه خوښی اړیکیR لپاره باور لري :

$$RE = ER = R$$

موږ تش اړیکو 0 ته هم ګوته نیسو، چی د M × M تشډیري
په څیر تعریف دی. د هر بیناراړیکي R لپاره په ډیري M
کی باور لري:

$0 \subseteq R$ او $0R = R0 = 0$

موږ کله کله د بینارو اړیکو سره مخامخ کیږو، چي د
لاندې خویونو څخه ځنی په کی باور لري
رفلکسیویتي: a R a د ټولو a ∈M لپاره دا په دې مانا
چي $E \subseteq R$
ترانزیتیویتي: له a R b او b R c څخه لاس ته راځي،
a R c دا په دې مانا چي $RR \subseteq R$
سیومتري: له a R b څخه لاس ته راځي b R a دا په دې

مانا چي $R^{-1} = R$

انتيسيومتري: له $a R b$ او $b R a$ څخه لاس ته راځي
$a = b$ دا په دې مانا چی $R \cap R^{-1} \subsetneq E$

۲ . ۲ . ۵ جمله : که کوم یو بینار اړیکي له دې پورته خویونو څخه کوم یو ولري یا ټول ولري، نو د دې اړیکو په څېر اړیکي R^{-1} هم دا خویونه لري.

اوبی (حل):
په عمل کی له $E \subseteq R$ څخه لاس ته راځی

$$E = E^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $RR \subseteq R$ وي، نو باور لري

$$R^{-1} R^{-1} = (RR)^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $R^{-1} = R$ وي ، نو باور لري

$$(R^{-1})^{-1} = R = R^{-1}$$

له $R \cap R^{-1} \subseteq E$ څخه لاس ت هراځي

$$R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R \subseteq E$$

ایکویوالنځ اړیکی :د بینار اړیکو څخه یی خورا مهمي اړیکی ایکویوالنځ اړیکي دي، چی په لاندې کی یي تعریفوو

۲ . ۲ . ۶ تعریف : یو ناتش دوه ځایزه اړیکی ~ په ډیري A کی ورته اړیکي یا اکویوالنځ اړیکی بلل کیږي، که د ټولو $a , b , c \in A$ لپاره لاندې اړیکی باور ولري.

الف) $a \sim a$ (رفلکسیو reflexiv)

ب) $a \sim b \iff b \sim a$ (سیومتري symetrisch)

پ) $a \sim b$ او $b \sim c$ څخه ($\Longrightarrow$) $a \sim c$ لاس ته راځي . (ترانزیتیو transitiv)

۲ . ۲ . ۷ بیلګه:

الف) مساوات یا برابرون « = » د هر ډیري A لپاره یو ورته والی اړیکي Äquivalenzrelation دي.

ب) د $a , b \in Z$ لپاره $a \sim b$ ټیك هلته باور لري، که 2 د ګڼ $a - b$ پرویشونی وي.

ایکویوالنځ اړیکی په کلکه د دې سره تړاو لري، چی یو ډیری

یو بل سره په پردیو ټولګي ډېریو ویشي. دوه ډېري یو بل سره پردي بلل کیږي، که دوي ګډ کوم توکی ونه لري یانی غوڅي یي تشه ډیری وي.

غواړم، چی دا ټولګیویشنه داسی لږغونډي روښانه وڅیړم، که څه هم زیاتو لوستنکو ته به ستړیکیدونکي وي، مګر لږ پوهوړ به شي. که چیرې طبیعي ګڼونه په ۵ وویشو نو دلته پنځه ټولګیویشنی لاس ته راځي، چی ویشپردي دي: هغه ټولګی، چی 1 ولري او ټول 1 + 5, 1 + 25 , ... , 1 + n5 ، دوم هغه ټولګی، چی ۲ ولري او ورسره تر 2 + n5 دریم: هغه ټولګی، چی 3 ولري او ټول ورسره 3 + n5 . څلورم هغه ټولګی، چی ۴ ولري او ټول ورسره 4 + n5 . پنځم هغه ټولګی، چی 5 او ټول ورسره 5 +n 5 . چی دا په 0 سره هم ښوولی شو، چی نور ورسره ټول 0 + n5 ولري. دا ډول شمرنی بیا د ګڼونتیوري دنده ده، چی په همغه ډول کتابونو کي لوستل کیږي. هلته د کونګرو- اینځ اړیکو لاندي لوستل کیږي، چی زه یي دلته په لیك دود هم نورې خبرې نه کوم. په دې کی دې ګران لوستونکی یو پوره پام وځغلوي او ټولګی ویشنه او ایکوالنځ اړیکي دې پخپله نوري هم روښانه کړي، چی.

د ټولګيويشنه په همدې وخت کي ايکويوالنځ اړيکی هم جوړوي،

دا په دې مانا چی د ايکويوالنځ اړيکو او ټولګی ويشنی ترمنځ راګرځيدونکی يواځنی اړيکي موجود دي. دا په دې مانا چی د اکويوالنځ اړيکو سره يو يواځنی تنظيم راکړ شوی او دا بيا په څڼ کيدونکی هم دی.

که R په A کی يو ايکويوالنځ اړيکه وي ، نو A / R د فاکتورډيري په نامه بلل کيږي نسبت و ايکويوالنځ اړيکوR ته. هغه څيرونه چی د A او A / R ترمنځ پرته ده د طبيعي څيرونی په نامه بلل کيږي.

لنډ : ويلی شو، چی ټولګي ويشنه او ايکويوالنځ اړيکی يو له بل څخه لاس ته راځی. موږ دا شمير پوهنيز په لاندې توګه تعريفوو:

۲ . ۲ . ۸ تعريف: که ~ د ډيري A ورته والی اړيکي وي، نو د توکی $a \in A$ ورته والی ټولګی يانی کلاسی يا صنف [a] په لاندې توګه ورکړ شوی دی.

$$[a]= \{ b \in A \mid a \sim b \}$$

د ورته والی ټولګي [a] هر توکی b د ټولګي [a] نماينده

.

بلل کیږي.

۲ . ۲ . ۱۱ مرستندوي جمله: که ~ د ډیري A ورته – والی اړیکي وي، نو د توکو $a, b \in A$ لپاره لاندې وینا وې جوړه برابرارزښته یا جوړه مساوي ارزښته دي

(a) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

(b) $a \sim b$

(c) $[a] = [b]$

اوبی (حل): که $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ وي، نو یو $c \in A$ موجود دی د $a \sim c$ او $b \sim c$ سره. د ~ سیومتري او ترانز– یتیویتي له امله لاس ته راځي $a \sim b$. له دې امله (b) د (a) یوه لاس ته راوړنه ده یا تعقیب دی. اوس باور لري $a \sim b$. له دېامله نو $x \in [a]$ د $x \sim a$ سره برابرارز– ښته دی، او همداسی د $x \sim b$ سره. نو $[a] = [b]$ دی، او (c) له (b) څخه لاس ته راځي.
په پوره باور (a) له (c) څخه لاس ته راځي.

زیات موخور یا هدفمند دی، که یو ډیریسیستم S د یوه په نامه ایندکشنډیري یا پیژندډیري A په مرسته په نخښه کړو یا روښانه کړو. د لته A یو (پاي یا ناپای) ناتش

ډیری دی، او هر ایندکس یا پیژندنخښی $\alpha \in A$ یواځنی یو ډیری A له S څخه داسی ترتیب شوی دی، چی باور لري: $S = \{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

۲ . ۲ . ۱۲ تعریف : د یوه ډیري $A \neq \emptyset$ د برخډیریو A یو سیستم $\{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$ د د ډیري A یوه ټوټونه (تجزیه) بلل کیږي، که باور ولري:

(a) $A_\alpha \neq \emptyset$ د ټولو $\alpha \in A$ د پاره

(b) $A = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

(c) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$

د ټولو $\alpha, \beta \in A$ لپاره د $\alpha \neq \beta$ سره

۲ . ۲ . ۱۳ جمله : R دې په ډیري A کی یو ورته اړیکي وي. نو د ورته والي ټولګي نسبت و R ته یو د A ټوټونی دی. په څې یو په خوښه د A ټوټونه $\{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$ یواځنی یو ورته والی اړیکي په A ټاکي، د کوم لپاره چی د ټوټونی ډیری A ټیك ورته والي ټولګي دي.

اوبی (حل یا ثبوت): سملاسي د پورته مرستندوي جملی ۲ . ۲ . ۸ او تعریف ۲ . ۲ . ۹ څخه لاس ته راځي.

۲ . ۳ نیمنظم یا نیم ترتیب

د بینار اړیکو یو بل غوره یا مهم حالت نیمنظم اړیکی جوړوي. دا هغه اړیکی دي، چی رفلکسیو، ترانزیتیو او انتیسیومتري دي. هغه ډیری، چی نیمنظم په کی تعریف وي ، نیممنظم یا نیم په ترتیب بلل کیږي. د نیمنظم لپاره دا سومبول $\leq$ کارول کیږي او د ډیري M د توکو a , b لپاره باور لري $a \leq b$ او داسی لوستل کیږي، چی a له b کوچنی او یا له b سره مساوي ده. یا a په b کی خونديږ ده یا a له b څخه مخ ته ځی. که $a \leq b$ وي او $A \neq b$ وي، نو لیکو $a < b$ او وایو چي a له b څخه کوچنی ده، په دې حالت کی a په b کی اصلي خونديږ ده. په یوه ډیري Mکی دی نیمنظم تعریف وي. د دې ډیر دوه توکي $a , b \in M$ یو له بل سره انډولوړ دي، که چیرې وي $a \leq b$ او یا $b \geq a$. که له $a \leq b$ څخه $a = b$ لاس ته راشی نو د ساده نیمنظم څخه غږیږو.
یو ډیری، په کوم چی دوه توکی تل یو له بل سره انډولوړ وي، نو دا ډیری لاینی نظم شوی یا منظم یا ترتیب شوی او یا ځنځیر یعنی یو له بل سره تړلی بلل کیږي.

۲ . ۳ . ۱ تعریف: د دوه نیمنظم شوي ډیریو M او 'M

ترمنځ يواځنی او په څټ ځيره کونه f موجود ده يعني

$af = a' \ , a \in M \, , a' \in M'$

که له $a \le b \ , a\,b \,, \in M$ تل $af \le bf$ لاس ته را شي او په څټ، نو d د M او 'M ترمنځ يو ايزومورفيزم ispmorphism بلل کيږي، چې دا به وروسته هم بيا پوره وڅيړل شي او ډيري 'M , M پخپله ايزومورف نيممنظم ډيري بلل کيږي.

که يوه نيممنظم ډيری M په يوه نيممنظم ډيري N کی ايزومورف خونديې وي، نو دې ته ايزومورف ځايونه يا خونديونه وايو، که د M يوه ايزومورفه ځيره کونه په 'N د ډيري N برخه ډيري باندې موجود وي او ډيری 'N پخلپه نيممنظم ډيری وي او که 'N په هغه نظم ترتيب وي ، چې له N ورته راپاتی وي.

۲ . ۳ . ۲ جمله:

هر نيممنظم ډيری M د ډيري N ، چې نسبت وخونديونی ته نيممنظم دی، ټولو لانديډيريو ډيري 'N سره ايزومورف دی. په ځانګړي توګه کيدی شي ، چې د ډيري N لپاره پخپله ډيری M ونيول شي يا راوړل شي.

د دې جملی د خوونی څخه تيرېږو. په کوروش کی کتل کيدی شي.

یوه نیمنظم ته په څېر اړیکی هم نیممنظمی دي.
د ټولو $a' \in M$, $a \in M$, $af = a'$ لپاره، د $a, b \in M$
سره $a \leq b$ ټیك او ټیك هلته یا هلته او هلته باور لري،
که وي: $af \leq bf$.

۲ . ۴ مینیمال شرطونه

یو د نیممنظم ډیري M توکی a د ډیري مینیمالتوکی بلل کیږي، که په M کی داسی یو توکي x موجود نه وي، د کوم لپاره، چی شرط $x < a$ باور ولري. دا روښانه ده، چی M ډیر مختلف مینیمال توکي لرودی شي او یا هیڅ مینیمال توکي .
د بیلګي په توګه ډیری 'N د ټولو د ډیري N لاندېډیریو یا برخه ډیریو ډیری یواځنی یو مینیمال توکی لري، داسی په نامه تشډیری . په یوه ډیري کی هر لاندې ډیری یا برخډیری مینیمال توکی دی ، که دا ډیری د یوه توکی جوړ وي. دا کلیمه د یوه ځانګړي نیمتنظیم شوي ډیري ټولګیو لپاره کارول کیږي. د دې ټولګی نیمتنظیم شوي ډیري لاندې یو بل سره ورته یا ایکویوالنت شرطونه پوره کوي:

۲ . ۴ . ۱ جمله(مینیمال شرطونه) : هر د یوه نیمتنظیم شوي ډیري M ناتش لاندې ډیری N یو مینیمال توکی (په N کی) لري.

۲ . ۴ . ۲ (د لویدونکی ځنځیر پریکیدنی شرطونه): د نیمتنظیم شوي ډیري M په را غونډه موخه هر لویدونکی ځنځیر

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots.$$

د پایڼیرو غړو وروسته پرې کیږي یا ماتیږي یا غوڅیږي. په نورو کلیمو سره ، د توکو د هر لویدونکی ځنځیر

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$$

سره یو ایندکس یا پیژند نخښه n شته، له کومی چی د دې ډیري ټول توکی برابر دي دا په دې مانا چی د n وروسته $a_n = a_{n+1} = \ldots$ باور لري

۲ . ۴ . ۳ جمله (ایندکشن شرطونه): د یوې نیمتنظیم شوي ډیري M ټول توکی څه روښانه خویونه E لري. که دا خویونه په ټولو مینمال توکو (که داسی یو توکی موجود وي) موجود وي او که د دې موجودوالی، د ټولو توکو لپاره، چی له توکي a په کره توګه مخ ته ځي، پخپله په دې خویونو a

رابندیدی شي یاني دا خویونه ولري.

د دې جملو، چې یو بل ته ورته دې، د ښوونې یا اوبیونې ځخه تیرېږو.

ویناوې چې د ټاکن اکسیوم سره همغه ارزښته دي:

ډیری N دې د یوه ډیري M لاندې ډیری وي. هر (ضرور نه دی چې په N کی خوندې وي) د M د توکی a د کوم لپاره چې شرط $a \geq x$ پوره وي د ټولو $x \in N$ لپاره، د لاندې ډیري پورته بند بلل کیږي یانی دا ډیری په دې توکی سره پورته لور ته بند دی. دا لاندې بند ته یوه دویزه کلیمه. په یوه ورکړ شوي نیمنظم ډیري M کی هره د ټولو ځنځیرونو ډیری د ډیري پوهنی په بنسټ نیمتنظیم ده. د دې ډیري ټول ماکسیمال توکی په طبیعي توګه د M ماکسیمال ځنځیر جوړوي.

یادونه : د دې پورته جملو ښوونه او زیات ورننوتنه په کروش کی کتل کیدی شي. مونږ یې نوره رالنډوو.

۳ . الجبري جوړښتونه

د الجبر په کتابونو کی ډیر وخت دا دلته څیړل شوي
موضوعات له توپیریدونکو یا له بیلو بیلو لارو څخه
څیړل کیږي، څنی له عمومي الجبر څخه پیل کوي
n–ځایزي عملیې، نښلونی یا کارونی تعریفوي او له
دې څخه بیا ګروپ die Gruppe ، کړی Ring ، تن یا
بدن Körper (engl. Field او په همدې ډول ترونونو
یا ترنو Verbände او بول الجبر boolische Algebra
ته راځی. زه دا لار غوره ګنم، چی لمړی له موړ ورسره
بلدو کاروونو یا عملیو څخه پیل وکړم او له دې لارې
بیا الجبر ته راشم، او بیا په لنډ ډول د الجبر له لارې دا
موړ ورسره بلدې کلیمي لنډې تعریف کړم.

د الجبر د مختلفو ځانګو لپاره بنستیزه کلیمه، چی ډیره
تر څیړنی لاندې نیول شوې ده هغه د الجبري اپریشن یا
الجبري عملیې او یا همدا ډول د الجبري کارونی، الجبري
نښلوني یا الجبري ګنډني کلیمه ده.

موړ. ځانونه په یوه دوئیزې کارونی په زیاتون یا ځل رابندوو یا محدودوو. دا دوئیزې کارونی یا عملیې، په لرې موخه، هغه عملي دي، چی د یوه ډیري G ټاکلي منظم د توکو جوړه (a,b) د دې ډیري په یوه بل توکی c تنظیم یا څیره کړي(لکه د G د ټاکلو غړو مربع، یعني دا د لاندې خویونو سره یوه څیرونه ده:

$G \times G \longrightarrow G$

دا په دې مانا چی د ټولو $(a,b) \in G \times G$ لپاره یو c د G څخه، یعني $c \in G$ موجود ده، د کومو لپاره چی باور لري که دا نښلونه ځل وي

$a \,.\, b \longrightarrow c$

په دې ټولیزه توګه په یوه ډیري کی د بینار یا دوه-ځائیز عملیې کلیمی تعریف، په یوه ډیري کی د یوه ترنار ریلیشن ternäre Relation یا درېځایزو اړیکو سره په همغه یا مساوي مانا دی.

یادونه: اپریشن die Operation، عملیه ، کارونه او یا نښلونه، ګنډنه، او همدارنګه په بلواکو کی کمپوز-یشن die Komposition یا څنګ په څنګ ایښوونه یا بهتره څنځیرونه تل همغه مانا لري، چی ما کله کله

ترڼه هم کارولی ده. د ډیرو نومونو کارونه، کوم چی همغه مانا ولري، تاوان نه لري. د شمیرپوهني ژبه هم باید پوره پراخه وي او په دې باور لرو چی کومه اشتباه په کي نه رامنځ ته کیږي.

موږ دلته د نمونی په څیر یواځی یویزې کارونی یا عملیي په ګوته کوو. او ور پسی بیا نور سملاسی خپل اصلی موخه تر مخه نیسو. دا یویزې عملیي هغه عملي دې، چی د کارولو سره یی د ډیري توکي تغیر نه خوري، لکه د صفر سره طبیعی ګڼونو N_0 توکو سره، په زیاتون کی چی هر توکي ته د صفر توکی ورزیاتونه پخپله همغه توکی دی،

$$a + 0 = a \quad \text{لپاره} \quad a \in N_0 \quad \text{د ټولو}$$

او یا په ځل کی ، چی د طبیعي ګڼډیري N هر توکي سره 1 ځل شي، یعني

$$a \cdot 1 = a \quad \text{لپاره} \quad a \in N \quad \text{د ټولو}$$

۳ . ۱ ګروپ Gruppe:

که له یوې خوا د ټولګښونو، ریشنلګښونو یا ریيلګښونو زياتون په پام کی ونیسو او له بلی خوا ریشنل یاریيلګښونو د صفر توپیرې یا د صفر سره نامساوي توکو ځل په پام کي ونیسو، نو دا میندلی شو، چی دواړه نښلونعملیي یا نښلو-نکاروني د همغه یو بل سره په یوغږ شمیرقوانینو لاندې دي. د بیلګي په توګه باور لري:

$(a+b)+c=a+(b+c)$ او $(a.b).c=a.(b.c)$

برسیره پر دې راویستلي یا استثنایي ګښونه موجود دي، دا په نامه 0 همداسی 1 ، کوم چی دې دوه ترنو ته ځانونه ناپیلی یا بي تاثیره نیسي. یعني:

$0+a=a$ او $1 . a=a$

بالاخره باور لري

$$(-a) + a = 0 \quad \text{او} \quad (1/a).a = 1$$

دا په دې مانا، چې هر ګڼ a ته یو ګڼ á موجود دی (دا په نامه a- همداسی 1 / a)، چې د هغو زیاتون یا همداسی د هغو ځل یا ضرب د همغی یعنی زیاتون همداسی ځل نښلونی یا نښلونعملیي له لارې ناپیلی یا بی تاثیره توکی ورکوي.

دا چی دا قاعدې ګڼونشمیرنه په پراخه پیمانه په واك کی لري او په ډیرو نورو حالتونو کی هم رامنځ ته کیږي، دا راته نزدې ده، چی دا د ځانګړي طبیعیت، دشمیرنی او د همغو تړنعملیو څخه خپلواك وڅیړو. په دې ذهني راوړون دود سره مو شمیرقاعدې د هر څه له مخه مخ ته پرتي دي. نه هغه څه، د کومو سره چی شمیرنه کیږي غوره دي، بلکه دا غوره دې، چی څنګه شمیرنه کیږي. په یواځني ډول د مخه نیول کیږي، چی د یوه ورکړ شوي ډیري غړو لپاره داسی یوه نښلونه یا تړنه یا عملیه تعریف ده، دکومی له مخی، چی هره منظمه جوړه (a,b) د هغه ډیري د توکو بیرته د هغه ډیري توکی باندې تنظیم شي یا ځیره شي او دې پورته

ویلشوو قوانینو لاندې پرتې دي یا په بل عبارت دا پورته قوانین په کې باور لري.
دا نښلونه د یوه ناپیلې سومبول ° سره ښایو.

یادونه : دا سومبول له خپل ځای څخه لیکل شوی دی، خو زما بله چاره نه وه. د دوه ګڼونو نښلونو ټیك منځ کې که ولیکل شی ښه به وي.

۳ . ۱ . ۱ تعریف : یو ګروپ دیوه ډیري G او یوې ترني یا عملیې ° څخه جوړ دی، دکومې نښلونې سره چې د دې ډیري G د توکو هره منظمه جوړه (a,b) یواځنی یو د $a^\circ b$ سره په نخښه شوی د G توکی باندې داسې تنظیم شي، چې دا لاندې اکسیومونه پوره کړي:

اکسیوم ۱ – اسو ځیاتیو قانوباور لري

د ټولو $a,b,c \in G$ لپاره $(a^\circ b)^\circ c= a^\circ (b^\circ c)$

اکسیوم ۲ – یو ناپییلی توکي $e \in G$ شته، د ° تړاو سره ، د کوم لپاره چې باور لري

$$a^\circ e= e^\circ a = a$$

اکسیوم ۳ – د هر توکی a لپاره یو په ځتې توکی á شته،
د کوم لپاره چې لرو:

$$a \circ á = á \circ a = e$$

د G داسی یو توکی ناپیلی توکی بلل کیږي

یو ګروپ کموتاتیو یا ابلي ګروپ abelsche Gruppe بلل کیږي، که پر دې پورته اکسیومونو برسیره، دا لاندې اکسیوم ۴ هم پوره کړي:

اکسیوم ۴ – کوموتاتیو قانون:

د ټولو $a, b \in G$ لپاره $a \circ b = b \circ a$

که ګروپ G پای ډیر توکی ولري ، نو د G د توکو ګڼون یا تعداد |G| د G نظم بلل کیږي.

د ګروپ ټاکنټوټو پورې د ډیري G ترځنګ د ګروپټړنه ° داسی په نامه اپریشن، نښلونه یا کارونه یا عملیه هم اړه لري یا تعلق لري.
یو ګروپ نو په دې توګه د یوې جوړې $(G, \circ)$ سره په نخښه کول کیږي. دا چی ګروپټړنه ډیر واره په دې اړوند

کره ټاکلی ده، نو په داسی حالتونوکی ددې جوړې په ځاي يواځی G ليکل کيږي. گروپټرنه تر يوې اندازې پورې د گروپځل يا گروپضرب سره هم نومول کيږي، نو په دې توگه دا توکی $a^\circ b$ د توکو a او b د ځل په نامه هم بلل کيږي. په يوه ناابل – يا ناکموتاتيوگروپ کی دې د توکو ترتيب يا لړيپيرلپسی ته هم پام وي، ځکه چی په يوه ناابل گروپ کی په ټوليزه توگه $a^\circ b$ له $b^\circ a$ سره توپير لري .

اکسيوم۱ را په گوته کوي، چی په ډيرواره ځلولو کی په نوکانو کی بندونه يا راگيرونه پورې اړ تيا نه ځرگنديږي. له دې امله کيدی شی ، چی له نوکانو اينښوولو ځخه بيخی تيريدنه وشي او د بيلگي په توگه د $a^\circ (b^\circ c)$ لپاره په ساده توگه ليکو

$$a^\circ b^\circ c$$

۳ . ۱ . ۲ بيلگی :

اول – د ټولو ټولگڼونوډيری Z د ورسره بلد زياتون سره، چی د کروپټرنی په ځير يی نيسو، يو ابلگروپ $(Z;+)$ جوړوي. دلته بيا له زياتونگروپ ځخه غږيږو، په همدې توگه د ريشنلگڼونو ډيری او داسی نور. په دې ټولو حالتونو کي د اکسيوم ۱ لپاره د e لپاره 0 او د a په ځټ توکی á

د a- سره په نخښه کوو.

دوم – په ځمکګچ یا هندسه کی : د ټولو کونګروا‌ینځ ځیرونو (څرخون، ځایبدلون، یا راکښنه ، او اینونه یا هندارونه) ګروپونه جوړوي(ما په دې اړه یوه د هندسی برخه هم په یوه کتاب کی راوړې، چې لیږدی کتاب څخه به تر مخه چاپ شوي وي، دا کلیمي که نا بلدې وې نو بیا دې هلته وکتل شي).

دریم : د ټولو ریشنلګڼونو ډیری Q^* او د ټولو ریيلګڼونو ډیري R^* توکي، چې د صفر سره، نسبت و ځل یا ضرب ته، نابرابر یا نامساوي وي، یو ابلګروپ جوړوي، دا د ډیریو Q^* او R^* ځلونکی ګروپ یا ضربګروپ بلل کیږي. په دې ګروپونو کی e د 1 او á د ماتګڼ $1/a$ په ځیر لیکل کیږي.

څلورم: M دې یو په خوښه ناتش ډیری وي ، او S_M دې د M د ټولو بییکتیو ځیرونو یا بیکشنونو ډیری وي. د هر دوه ځیرونو $f,g \in S_M$ لپاره $f \circ g$ د دې دواړو ځیرونو یو په بل پسی راوړنو له لارې ټاکل شوی ځل دی. د هر درې ځیرونو f,g,h او هر $x \in M$ لپاره دا لاندې باور لري

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(hx) = f(g(h(x)))$$

او

$$(f\circ(g\circ h))(x) = f((g\circ h)(x)) = f(g(h(x)));$$

دا په دې مانا چې اکسیوم ۱ پوره دی. که د e لپاره د M کتمتې ځیرونه id وټاکل شي، نو اکسیوم ۲ باور لري.
بالاخره اکسیوم ۳ باور لري، که د ورکړ شوي $f \in S_M$ لپاره د ځیروني f^1، هغه f ته په ځتې ځیرونه f^{-1} وټاکل شي. ډيرى S_M د یو په بل پسی د ځیرونو ځلوني یا ضربوني له امله یو گروپ جوړوي، چې د ډيري M سیو- متري گروپ بلل کيږي.
که په ځانګړي توکه ډيرى M ډيرى $\{1,2,3,...,n\}$ وي، نو دا اړونده سیومتري گروپ ځیفرونه یا گڼونه $1, 2, 3, ..., n$ په ساده توګه د S_n سره په نخښه کوو. هره ځیرونه $f \in S_n$ د گڼونو $1,2,3,...,n$ پرموتیشن یا بدلون دی. که $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ ...,\ f(n)= a_n$ باور ولري، نو f د ځیره گڼونو پرلپسی لړی $a_1, a_2, ..., a_n$ یواځنی ټاکلی ده. موږ لیکو $f = (a_1,a_2,...,a_n)$، که د بیلګي په توګه باور ولري $n = 3$ او $f = (2,3,1), g = (3,2,1)$ نو لاندې ځلونه یا ضربونه لاس ته راځي

$$f\circ g = (1,3,2) \quad \text{او} \quad g\circ f = (2,1,3)$$

دا بیلگه ښایي، چې S_n د $n = 3$ لپاره ابل گروپ یا کموتاتیو گروپ نه دی.

۳ . ۱ . ۳ یادونه: دا د صفر سره نامساوي ټولگڼونه ، نسبت و ځلونی یا ضرب ته گروپ نه جوړوي، ځکه چې د بیلگې په توگه و 2 ته کوم ټول گڼ $á$ وجود نه لري، د کوم لپاره، چې $2.á = 1$ باور ولري.

د گروپ د اکسیوموانو څخه کیدی شي ، چې په لاندې کی یو څو ساده «لاس ته راوړنی » رابیلي کړو. په لاندې کی دې G تل یو گروپ وي

۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جمله: د هر توکی $e \in G$ لپاره، چی اکسیومونه۱ ، ۲ پوره کوي دا هم باور لري $a^\circ e = a$ د ټولو $a \in G$ لپاره. له $á^\circ a=e$ څخه $a^\circ á = e$ لاس ته راځي.

اوبی یا ثبوت: لمړی دوهمه غوښتنه ښوول کیږي: و a' ته د اکسیوم۳ له مخی یو $a\in G$ د $a'.a = e$ سره موجود دی. د اکسیومونو۱ او ۲ په پام کی لرلو سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} a^\circ a' &= e^\circ(a^\circ a') = (a''^\circ a')^\circ(a^\circ a') = a''^\circ((a'^\circ a)^\circ a') \\ &= a''^\circ(e^\circ a') = a''^\circ a' = e \end{aligned}$$

له دې څخه اوس لمړی غوښتنه لاس ته راځی

$$a^\circ e = a^\circ (a' \circ a) = (a^\circ a')^\circ a = e^\circ a = a \qquad *$$

۳ . ۱ . ۵ مرستندوي جمله: ټيك يو توکی $e \in G$ موجود دی، چی هغه په اکسيوم ۲ او اکسيوم ۳ کی غوښتل کيږي. همدا اوس له $x^\circ a = a$ څخه د ټولو $a \in G$ لپاره لاس ته راځي: $x = e$.

اوبی یا ثبوت: توکی e^* دې هم برابرون $e^* \circ a = a$ پوره کړي، د ټولو $a \in G$ لپاره. نو بيا په ځانګړي توګه د ۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جملې له امله باور لري

$$e^* = e^{*\circ}e = e$$

دا په دې مانا چي e يواځنی ټاکلی دی. که بيا هم ورپسی باور ولري $x^\circ a = a$ د يوه کره ټاکلی توکي $a \in G$ لپاره، نو د اکسيوم ۳ له امله يو $a' \in G$ موجود دی د $a' \circ a = e$ سره، او د ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي:

$$x = x^\circ e = x^\circ (a^\circ a') = (x^\circ a) \circ a' = a^\circ a' = e \qquad *$$

دا په دې توګه د اکسيومونو سره يواځنی ټاکلی ناپيلی يا بی

تاثیره د ګروپ G توکی e د ګروپG «یوی توکی» بلل کیږي.
په زیاتونډوله لیکلي ابلګروپ G کي ناپیلی توکی e د G «صفرتوکی» 0 بلل کیږي.

۳ . ۱ . ۶ مرستندوي جمله : په اکسیوم ۳ کي a' د a له لاري یاد a سره یواځنی ټاکلی ده .

اوبی یا ثبوت: د $a' \circ a = e$ تر څنګ دي $a^* \circ a = e$ هم باور ولري. پرتله ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$a^* = a^* \circ e = a^* \circ (a \circ a') = (a^* \circ a)\circ a' = e\circ a' = a'$$

دا توکی a' د a « په څټ توکی» بلل کیږي او د دې لپاره په ټولیزه توګه a^{-1} لیکل کیږي. که په ځانګړي توګه د ګروپ– عملیي یا د ګروپتړنی زیاتون ډوله ولیکل شي
پرتله ۳ . ۱ ۲ الف، نو ناپیلی توکی په 0 سره لیکل کیږي او د a په څټتوکی د $-a$ سره لیکل کیږي.

۳ . ۱ . ۷ مرستندوي جمله: $(a^{-1})^{-1} = a$
او $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

اوبی: دا په ۱ . ۳ . ۴ کی ښوول شوي برابرون $a \circ a' = e$

له مخې لرو، چې a و a^{-1} ته په څټ توکی دی، چې په دې توکه لمړی غوښتنه باور لري. دومه له لاندې څخه لاس ته راځي

$$(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) = b^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ b)$$
$$= b^{-1} \circ (e \circ b) = b^{-1} \circ b = e \qquad *$$

۳ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله: په یوه گروپ G کی برابرون $x \circ a = b$ او $a \circ y = b$ په ورکړشوو توکو $a,b \in G$ سره یواځني ټاکلي حلونه یا اوبیونی $x,y \in G$ لري.

اوبی یا حل : که $x \in G$ د لمړي برابرون اوبی وي، یعني که باور ولري $x \circ a = b$ نو لاس ته راځي:

$$x = x \circ e = x \circ a \circ a = b \circ a$$

دا په دې مانا، چیx د a او b سره یواځنی ټاکلی . په څپ د

$$(b \circ a) \circ a = b \circ (a \circ a)\, b \circ e = b$$

له امله توکی $x = b \circ a$ په رینښتونی یو اوبی یا حل دی.
په همدې توگه دوهم برابرون هم پاي کولی شو. *

په لاندې کی غواړم، چې داپورته د گروپ تعریف لږ وغزوم

او په دې توګه ګروپوئيد او نيمګروپ تعريف کړم. دا کار په زياتو ادبياتو کی لمړی سر ته رسيږي، خو داسی تعريفونه يی هم په پوهيدلو کی ستونځي نه رامنځ ته کوي او ما هم غوښتل، چی موږ لمړی د ګروپ کليمه باندې وپوهيږو، چی بنستيزه ده.

۳ . ۱ . ۹ **تعريف** : يو ډيری G ، چی نسبت و يوه اپريشن يا ګنډنی يا عملي ° ، چی موږ يی دلته د ځل عمليي « . » په څير ښايو، ته رابند وي، نو دې ډيري ته ګروپويد وايو، ياني که د هرې جوړي (a,b) د a ,b ∈ G لپاره يو توکی c ∈ G موجود وي ، د کوم لپاره چي باور ولري a.b = c ليکنه يی په لاندې توګه ده(. , G) .

دا د ګروپوئيد کليمه لږ را تنګوو او نيمګروپ تعريفوو.

۳ . ۱ . ۱۰ **تعريف** . هغه ګروپوئيد G، په کوم کې، چی پورته د ګروپ اکسيوم ۱ باور ولري يا نی ځل يی اسو-شياتيو وي، نيمګروپ بلل کيږي، چی په همغه پورته توګه د اوس لپاره نخښوڼ کيږي.

دا چې نیمګروپ همغه ګروپ دی، دا لاندې جمله یې
روښانه را په ګوته کوي

۳ . ۱ . ۱۱ جمله : یو نیمګروپ G هلته او هلته یو
ګروپ G دی، که په G کې کم له کمه یو ښی یویتوکی e
موجودوي، چې لاندې شرطونه پوره کړي

$$ae = a \quad \text{لپاره} \quad a \in G \quad \text{د ټولو}$$

او دا توکی e داسی وټاکل شي، چې د هر $a \in G$ لپاره
کم له کمه یو ښی په څټ توکي $a \in G$ موجود وي، چې
غوښتنی

$$a \,.\, a^{-1} = e$$

پوره کړي.

اوبی یا حل : که دا پورته ورکړ شوې غوښتنی پوره وي،
خو دا مو وښوول، چې ګروپ جوړوي. اوس دې یو
نیمګروپ G راکړ شوی وي، چې پورته نیونی پوره کوي.
دا غواړو وښایو، چې e په G کی یو کیڼ یویتوکي هم
دی. که د a^{-1} سره د a ښی په څټ توکی وښایو ، نولاس
ته راځي

$$eaa^{-1} = ee = e = aa^{-1}$$

که د برابرون دواړه خواوې د يوه و a ته په ښۍ توکي سره ځل کړو او د نيمګروپ د ځل يواځنوالي قوانين وکاروو يا استعمال کړو، نو لاس ته راځي

$$eae = ae$$

له کوم ځخه چې د حلونکې يا اوبيوونکې اړيکې $ea = a$ لاس ته راځي.

بالاخره د G ګين يويتوکي e' او ښی يويتوکي e'' رانيسو، نو د مخ ته تيرو جملو ثبوت ځخه دا اوبي يا حل $e'' = e'$ لاس ته راځي، چې په دې توګه د G يوي(يويتوکي) e موجوديت او يواځنتوب وښوول شو.

بيا دې a^{-1} د يوه توکی $a \in G$ ښی په ښۍ توکی وي.
که برابرون $aa^{-1} = e$ له کيڼ لور د a^{-1} سره ځل کړو، نو لاس ته راځي

$$a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$$

د a د ښي په ښۍ توکي د اخرني برابرون ځلولو يا ضربولو ځخه لاندې نتيجی ته راځو

$$a^{-1}ae = e$$

له کوم، چې $a^{-1}a = e$ لاس ته راځي.

دا توکی a^{-1} ته له دې امله یو کیڼ په څټ توکی هم دی.
لکه د مخه تیرې جمله د د ثبوت په توګه، کیی شي ساده وښوول شي، چی د a هر ښی په څټتوکي د کیڼ په څټتوکی سره پریوځي یا هغي سره ورته دی.
په دې توګه په G کي د هر توکی a لپاره د هغه توکی په څټتوکي موجودیت په یواځنی توکه تضمین دی.
د جملي د ثبوت د پوره کیدو لپاره دې په ګوته شوی وي، چي توکي

$x = a^{-1}b$ او $y = ba^{-1}$

د برابرون $ax = b$ او $ya = b$ حل ښايي. دا حلونه یواځنی دي، ځکه، چی $ax = xa$ دی، نو له کیڼ څخه یی د a' سره ځلوو او $x = x$ لاس ته راځي. پای یا *

د ابلګروپ د څیړنی لپاره، د ځل عملیي په ځاي د زیاتون ګنډنه یا عملیه په کار اچوو، چی ناپیلی توکی یی 0 دی او هر توکی a ته په څټ توکی یی د a- سره په نخښه کوو.
دلته هم همغه پورته جمله کاروول کیږي، خو د ښی یویتوکي لپاره 0 صفر یوي توکی دی او ښی په څټ یی a- دی. د په څټ عملیي یواځنتوب

د یوه نیمګروپ بیلګه چې ګروپ نه وي.
که د طبیعی ګڼونوډیری N پام کی ولرو، نو دا ډیری د زیاتونعملیي ته نیمګروپ جوړوي، خو دا ګروپ نه دی، ځکه، چی په دې ډیري کی، په هر حالت کی کمون نه دی تعریف.

که نسبت و ځل ته د ګڼونو څخه ګروپ جوړوو، نو باید دا مو پوره په پام کی وي، چی دا ګڼونډیری د صفر توکی ونه لري، ځکه چی په صفر پرویشنه نه ده تعریف.

۳ . ۲ بدن یا تن او کړی

Körper und Ring (Field and ring)

په داسی حال کی چی د ګروپ اپریشنونه یا ګروپ عملیي یواځی له یوه تړونعملیي څخه منځ ته راځي، اوس دوه عملیي څنګ په څنګ راوړل کیږي، چی په ورسره د ګڼو- نشمیرني بلد ډول، چی زیاتون «+ » او ځل یا ضرب « . » سره ښوولکیږي، تکیه کوو. که له ریشنل ګڼونو څخه مخ ته ولاړ شو، نو د هلته باوري شمیر قاعدو څخه

په ورته ذهنیت، لکه په گروپونو کی، نوي الجبري جوړ-
ښتونه لاس ته راځي.

۳ . ۲ . ۱ تعریف : یو بدن یا تن د یوه ډیري F او دوه عملیو + او . څخه جوړدی، چی د F د توکوهره جوړه (a,b) د F په یوه یواځنی توکی a+b همداسی a.b باندې داسی ځیره کړي، چی لاندې باوري کړي یا لاندې په کی باور ولري:

ډیری F دې و + ته یو ابل گروپ وي، دا په دې مانا، چی لاندې باوري کیږي

۱ - د زیاتون اسوځاتیو قانون

. د ټولو $a,b,c \in F$ دلپاره $(a+b)+c = a+(b+c)$

۲ - د زیاتون کموتاتیو قانون

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a+b = b + a$

۳ - په F کی یو صفر توکی 0 شته، دا په دې مانا چی $a = 0+a = a+0$ باور لري د ټولو $a \in F$ لپاره.

۴ - هر توکی $a \in F$ ته یو توکی $-a$ په F کی موجود

دی د $(-a)+a=0$ سره ، د کوم سره چي 0 په F
کی صفر توکی دی

د F توکو د څل یا ضرب . لپاره باور لري
۵ - اسوځیاتیو قانون

د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره $(a.b).c = a.(b.c)$

۶ - په F کی یو یویتوکی 1 شته ، دا په دې مانا ،
چی $1.a = a.1 = 1$ د ټولو $a \in F$ لپاره .

۷ - هر توکی $a \in F$ ته د $a \neq 0$ سره ، یو توکی a'
د $a.a' = 1$ سره موجود دی ، چیرته چی 1 د F یوی
توکی دی.

۸ - دیستریبوتیو قانون
$a.(b+c) = a.b + a.c$ او $(b+c).a = b.a + c.a$
د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره

۹ - $1 \neq 0$

که یوائې د اکیسیومونو ۱ - ۵ او ۸ باوریتوب
وغوښتل شي، نو F ته کړی بللل کیږي.
که برسیره پر دې اکسیوم ۱۰ باور ولري یعنی
۱۰ - د څل کموتاتیو قانون

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a . b = b.a$
نو F یو کموتاتیو تن یا کموتاتیو بدن او همداسی کموتاتیوکړی بلل کیږي

لکه څنګه په ګروپ کی په همدې توګه یوه کړی یا تن هم د (. ,+,.F) په ځای د F سره په نخښه کوو. د ځل لپاره سومبول «.» نه لیکل کیږي او د دې لپاره لنډ لیکو ab . ډیر واره د «بدن» یا «تن» لاندې کموتاتیو بدنونه پو-هیږو، په داسی حال کي، چی ناکموتاتیو بدنونه ، «کاږه بدنونه» بلل کیږي. دلته به موږ تل کموتاتیتو بدنونه تر څیړنی لاندې نیولي وي.

د اکسیوم ۱ او اکیسوم ۵ له امله کیدی شي، چی نوکان نور هم پرینښوول شي یا تیریدنه ترې وشي یا ونه لیکل شي. د نوکانو د نه لیکلو لپاره یو بل د مخه پیژندل شوی قرارداد یا پریکړې یو قاعده هم شته، چی د ټکو لکه ځل عملیه د کرښو لکه زیاتون عملي څخه د مخه اجرا کیږي.
لکه د (ab)+c) په ساده توکه ab+c لیکل کیږي. دا ساده-والی همدا اوس د اکسیوم ۸ په فرمولولو کی وکارول شو.
د بدن F یا همداسی د کړی R ناپیلی توکی وزیاتون ته صفر-

توکی دی او یا لنډ صفر دی. دا په ځت توکي $-a$ و a ته منفي توکی بلل کیږي. د $b+(-a)$ په ځاي لنډ لیکوه $b-a$ او دا کارونه د a او b کمون بولو.
باور لري $a+(b-a)=b$ او $b-a$ د ۳ . ۱ . ۸ له مخی د برابرون $a+x=b$ یواځني حل دی. د ۳ . ۱ . ۷ له امله بالاخره باور لري $-(-a)=a$ او $-(a+b)=-a+(-b)=-a-b$.
دا د $F^*=F\backslash\{0\}$ ځلگروپ ناپیلي توکی 1 د بدن یا تن F یویتوگي یا ساده یوی بلل کیږي. کړی دې ته ضرورت نه لري چی یویتوکي ولري» که یویتوکی موجود وي نو یواځنی به ټاکلي وي.

۳ . ۲ . ۲ د بدنونو لپاره بیلگي

الف – د ریشنلگڼونو ډیری Q او همداسی د رییل گڼونو ډیري R په ورسره بلدو تړنو یا عملیو له لارې یعنی زیاتون او ځل له لارې هر یوکموتاتیو بدن یا تن جوړوي،

ب – د ټولو کمپلکسگڼونوډیری C هم یو کموتاتیو بدن یا تن جوړوي. په روښانه توگه یا ډول یو کملکس گڼ a دا لاندې بڼه لري $a=a_1+a_2i$ د رییل گڼونو a_1, a_2 سره او

ایماګیناریوون i سره، د کوم لپاره چی $i^2 = -1$ باور لري.
دا a_1 د a رییل برخه او a_2 د a ایماګینار برخه بلل کیږي.
په نخښونه : $a_1 = Re(a)$ او $a_2 = Im(a)$
که $b = b_1 + b_2 i$ یو دوم کمپلکس ګڼ وي، نو زیاتون، کمون او څل یی په څرګنده توګه په لاندې ډول روښانه دي یا تشریح شوي دي:

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) \pm (a_2 + b_2)i,$$
$$a\,b = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,i$$

دا و کمپلکس ګڼ $a = a + ai$ ته کوجوګیري کمپلکس ګڼ $\bar{a}$ د $\bar{a} = a_1 - a_2 i$ سره تعریف دی . په دې پسی ترلي لاس ته راځي

$$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}, \quad \overline{ab} = \bar{a}\,.\,b\,, \quad \bar{a} = a\,,$$
$$a + \bar{a} = 2Re(a) \quad , \quad a - \bar{a} = 2iIm(a)$$

د یوه په خوښه کمپلکسګڼ a لپاره باور لري

$$a\bar{a} = (Re(a))^2 + (Im(a))^2$$

له دې امله $a\bar{a}$ تل یو نامنفی رییلګڼ دی، او $a\bar{a} = 0$ د $a = 0$ سره برابر ارزښته دی.
که $a \mid= 0$ یو کمپلکسګڼ وي، نو باور لري $a\bar{a} \mid= 0$

او $C \in aa / a = \bar{a}$. د کمپلکس ګڼ ارزښت $|a|$ ،
چې $a = a_1 + a_2 i$ د نامنفي رييلګڼونو ريښه ارزښت
دی. $a\bar{a} = a_1^2 + a_2^2$ دا په دې مانا، چي

$$|a| = + \sqrt{a^2 + a^2} .$$

رييلګڼونه ځانګړي کمپلکس ګڼونه دي، په نامه هغه ګڼونه،
چې ايماګينار يې ورکيږي: کمپلکسګڼ ټيك هلته يا هلته او
هلته يو رييلګڼ دی، که $a = \bar{a}$ وي.

۳ . ۲ . ۳ د کړيو لېاره بېلګې:

الف –د ټولو ټولګڼون ډيری Z يوه کموتاتيو کړۍ ده، د يوي
سره.* مګر Z بدن نه دی، ځکه، چې د بيلګي په توګه ۲
په Z کی نسبت و ځل ته په ځټ نه لري. يعنی 1/2 په Z
و 2 ته په ځټ توکی نه دی.

ب – جوړه ټولګڼونه $R = 2Z$ ددي لېاره بيلګه ده، چې
صفرتوکی نه لري.

پ – F دې يو کموتاتيو تن وي. يوه د لاندې بڼې افاده

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...+a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

د $a_i \in F , i = 0,1,2,...,n-1,n$ سره پولینوم بلل کیږي د یوې نامعلومی x سره او چی ځلووني یا ضریبونه او یا کوایفځینتونه يي له F وي. که $a \neq 0$ وي، نو n د پولینوم f (x) درجه بلل کیږي.

نخښنونه یی: ګراد Grad f = n

که حتی a = 1 وي، نو f(x) یو نورمي شوی پولینوم normiertes Polynom بلل کیږي. د صفر درجي پولینومونه ثابتی دی د $0 \neq a \in F$ سره. صفر پولینوم 0(n=0,a=0) سره درجه نه ترتیب یا تنظیم کیږي.

د ټولو پولینومونو f(x) ډیری، چی ځلووني یی له بدن F څخه وي د[x]F سره په نخښنونو یا په نخښنه کوو. په F[x] باندې زیاتون (په ورکړشوی حالتکي د صفرځلوونو سره) او یو ځل یا ضرب په دې لاندې ډول تشریح شوي

$$(a_0 + a_1x+a_2x^2+,,,+a_nx^n)+(b_0+b_1x+ b_2x^2+...+b_nx^n)$$
$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x +...+(a_n+b_n)x^n \ ,$$

$$(a_0+a_1x+...+a_mx^m).(b_0+b_1x+...+b_nx^n)$$
$$= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+ ...+a_mb_nx^{n+m}$$

و زیاتون « + » او ځل « . » ته F[x] یوه کړۍ‌ده، د پولینو 1 سره د یویتوکي په څیر. پولینومډیری F[x] پولینوم کړي په F باندي بللکیږي، د ناپیژنونکی x سره.

دې تراوسه یادشوو بدنونو ترمنځ د کمپلکس ګنونوګروپ یو ځانګړی ځاي لري، له دې امله په ځانګړي څیرنی کی ځانګړی رول لري، ځکه چی ددې لپاره د الجبر اصلي جمله باور لري کومه چی په لاندې ډول ده :

۳ . ۲ . ۴ جمله: هر یو پولینوم $f(x) \in C[x]$ د $\mathrm{Grad}\, f > 1$ سره د لاینې پولینومونو په ځلوونویا ضریبونو ټوټه کیږي، دا په دې مانا، چی $f(x)$ ته ډیر پای مختلف کمپلکس ګنونه c موجود دي، او طبیعي ګڼونه k په داسی توګه یا ډول چی لاندې باوري کوي:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - c_i)^{k_i} \qquad \text{او} \qquad \mathrm{Grad}\, f = \sum_{i=1}^{m} k_i.$$

دا جمله دلته نه ثبوت کیږي.

دا لاندې جملی دا را په ګوته کوي، چی په خوښه کړیو او بدنونو یا تنونوکي ، په ورسره بلد ډول شمیرنه کیږي

۳ . ۲ . ۵ مرستندوي جمله:
په یوه کړی کی باو رلي: $0.a = a.0 = 0$ د هر توکي a لپاره .
اوبی یا حل :د $0+0=0$ اوی د اکسیوم۸ له امله باورلري:

$$0.a+0.a = (0+0)\,.a = 0.a$$

د دې او ۳ . ۱ . ۴ څخه لمړی اوبی $0.a = 0$ لاس ته راځي، دوهم اوبی یا حل په ورته توګه لاس ته راځی . *

۳ . ۲ . ۶ مرستندوي جمله: په یوه کړی کي باور ري

$$a(-b) = (-a).b = -ab$$

په ځانګړي توګه دا لاندې باور لري

$$(-a)(-b) = ab$$

اوبی: د ۸ او ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$ab + a(-b) = a(b-(b)) = a\,.\,0 = 0$$

په دې پسی $a(-b)$ و ab ته منفي توکی دی، دا په دې مانا چی باور لري

$$a(-b) = -(ab)$$

په ورته توګه دوم برابرون لاس ته راځي. *

د مخه مو د بدن کلیمه روښانه کړه، اوس غواړم، چې دا کلیمه له یوې بېلې لورې هم، یا بهتره، په یوه بل ډول تر څېړنې لاندې ونیسم او هغه په دې ډول، چې هغه مو ورسره بلد د ترونکارونو نخښې ونه کاروم او دوه ذهني ترونونه راوړم، چې وروسته کار مو بیا همداسې مخ ته بیولی دی:

۳ . ۲ . ۷ تعریف :د ډیري M هغه جوړښتونه بدن بلل کیږي، د کومو لپاره چې باور ولري:

۱ - په ډیري M کې دوه تړاونه ° او o تعریف دي

۲ - دلته (M ; °) کموتاتیو ګروپ دی

۳ - دلته (M\e$_0$; o) یو ګروپ دی او e$_0$ یو ناپیلی توکی دی و° ته.

دا لاندېقوانین باور لري:

۴ - دیستریبوتیو قانون: ao(b°c) = (a° b)o(a°c)

(a° b)oc = (aoc)°(boc)

په یوه کموتاتیو بدن کې په دې برسیره باور لري

۵ - کموتاتیو قانون : aob = boa

۳ . ۳ لاندېګروپ او لاندېکړی

۳ . ۳ . ۱ تعریف : د یوه ګروپوئید G برخډیری یا لاندګډیري U ګرپوئید بلل کیږي، که د U د هرو دوه توکو همغه تړنه ° (ځل) د دې ډیري U توکی وي.
که G نیمګروپ وي، نو بیا په نتیجه نیونه کی له یوه لاندې نیمګروپ څخه غږیږو.

۳ . ۳ . ۲ تعریف : یو د ګروپ G برخډیری U یو د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ Subgrupp بلل کیږي، که U نسبت د ګروپ G ګرُپ عملیو یا ګروپتړون ° ته پخپله ګروپ وي.
په نخښنونه $U < G$.

۳ . ۳ . ۳ مرستندوي جمله: د ګروپ $(G,°)$ یو ناتش برخډیری U تېیك هلته یا هلته او هلته د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ دی، که د هرې جوړې $a,b \in U$ لپاره تل باور ولري

$$a \circ b \in U$$

اوبی یا حل: شرایط په پوره باور ضرور دي. دا باید وښوول شي، چی پوره کیدونکي هم دي.
دلته دې e د G یوی توکی وي. د $U \neq \emptyset$ له امله یو $a \in U$ موجود دی. نو لرو $e = a^{\circ} a' \in U$ او e د U یوی توکی دی. وریسی باور لري $a = e^{\circ} a \in U$ د هر $a \in U$ لپاره. د مرستندوي جملي له امله لرو $a^{\circ} b \in U$
د ټولو $a,b \in U$ لپاره.
ساده کتل کیږي، چی په U کی اسوشیاتیو قانون باور لري.
پس $(G , {}^{\circ})$ یو ګروپ دی.

۳ . ۳ . ۴ تعریف : د یوې کړۍ R لاندېډیری A، نسبت و هغه په R کی تعریف شوو عملیو ته، یوه لاندې- کړۍ بلل کیږي. دا په دې مانا، چی په A کی د R ټولې ترنې یا عملیې باور ولري. یا په بل عبارت، چی A نسبت و زیاتونګروپ ته یو لاندې زیاتونګروپ جوړوي او د R ځلګروپوئید ته لاندېګروپوئید جوړوي، او په همدې ډول په R کي تعریف دیستریبوتیو قانون په لاندېډیري A کی هم باور لري.

په ورته توګه د بدن یا تن F لاندې تن هم تعریف دي.

۳ . ۳ . ۵ جمله : د G لاندېگروپونه پخپله G او یونلاندیګروپ E ، چی له یویتوکی څخه جوړ دی، دي. په ورته توګه د کړی R لاندیکړی پخپله R او د صفر- توکي څخه جوړه شوې ، صفرکړی دي.

د نورو لاندیګروپونو غوره بیلګو جوړولو لپاره د یوه توکی د پوتنځ (Potenz) کلیمه پلی کوو یا رامنځ ته کوو. G دې یو په خوښه نیمګروپ وي او a دېد هغه په خوښه یو توکي وي.د څل اسوځیاتیو قانون دا اجازه راکوي، چی په یواځنی توګه (یواځنی ته دې د ګرانو لوستونکو تل پاموي، چی د څه لپاره کارول کیږي) د یو په خوښه پوتنځ یا توان

$$a^n, \quad n = 1,2,\ldots,n$$

تعریف کړو، او دا باور لري

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l} \qquad (1)$$
$$(a^k)^l = a^{kl} \qquad (2)$$

له (1) څخه لاس ته راځي، چی په یوه نیمګروپ G کی د یوه توکی ټول مثبت توانونه یو ابل نیمګروپ جوړوي، چی د a توکي څخه منځ ته راغلی یا جوړ ځیکلیکي یا بیرته راګرځیدونکی لاندېګروپ بلل کیږي.

که G برسیره پر دې یو ګروپ وي، نو لمړی داسی نیسو، چی $a^0 = 1$ او بالاخره د توکي a منفی توانونه هم پلي کوو. که n یو طبیعي ګڼ وي نو د لاندې برابرون

$$a^n (a^{-1})^n = 1$$

راجوړیدنه په ساده توګه کتل کیږي، له کومی چی بیالاس ته راځي

$$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} \qquad (3)$$

دا توکی، چی د (3) دواړه خواو کی یی ځاي نیولی د a^{-n} سره ښایو یا په نخښنه کوو. برابرونونه (1) او (2) د ګروپG د یوه ټولګنیز توکي a لپاره ریښتوني پاتي کیږي او د a ټول توانونه د صفر او منفی پوتنځ پورې له دې امله د G یو لاندیګروپ جوړوي. دا لاندې ګروپ د a څخه جوړ بیرته راګرځیدونکی zyklische Untergruppe لاندېګروپ بلل کیږي او په $\{a\}$ سره په نخښنه کیږي.
په زیاتون لیکدود سره بیا د a دپوتنځ په ځاي د هغه ډیرځلی راوړل کیږي.

په ګروپ G کی د یوه توکي a توان یا پوتنځ په مختلف ځګګڼ یا اکسپوننت Exponent سره ضرور د مختلف

ګروپ توکي نه ورکوي یا نه رامنځ ته کوي، کوم چی د ناپاي ګروپ له موجودیت څخه جوتیږي. که د a ټول توانونه توپیر ولري یا په بل عبارت مختلف وي، نو a د ناپایډیر نظم توکی بلل کیږي، په بل ډول بیا یو د پاینظم توکی بلل کیږي.

په دوم حالت کی یو ټولګڼ k او یو ټول ګڼ l د $k > l$ او

$$a^k = a^l$$

سره موجود دي.

له دې څخه لاس ته راځي $a^{k-l} = 1$ ، چیرته چی $k - l > 1$ دی، نو له دې امله د a توانونه شته، چی د یویتوکي سره برابر دي. ددې اکسپوننت یا جګګڼ کوچنی مور د a نظم بولو یا نوموو.

که a یو د پاینظم n توکی وي، نو بیا په روښانه توګه توکي

$$1 = a^0, a, a^2, \dots, a^{n-1} \qquad (4)$$

ټول یو له بل توپیر لري او هر ورپسي منفی یا مثبت د a پوتنځ a^k د یوه دې په (4) کی وکړشوو توکو سره برابر دی. دا په لاندې ډول لیدل کیږي: دی

$$k= nq+r, \qquad 0 < r < n$$

نو له (1) او(2) اړیکو a = 1 څخه لاس ته راځي:

$$a^k = (a^n)^q a^r = a^r$$

له دې سره د پاینظم توکو لپاره لاس ته راځي: دیوه توکي a نظم د هغه توکی n څخه تولید شوي یا جوړ شوي بیرته راګرځیدونکي یا څیوکلیکي لاندې کروپ {a} سره برابر دی یا د هغه سره سر خوري.

هغه ګروپونه، چی یواځي د پاینظم توکي لري تورزیونګرپونه Tursionsgruppen یا پریودي ګروپونهperiodische Gruppen یا بیرته راګځیدونکي ګرپونه بللکیږي، په بل ډول ناپریودي ګروپونه Torsionsfrei Gruppen بلل کیږي.

اوس دا پوښتنه د کړیو لپاره، لکه د بیرته راګرځیدونکی لاندیګروپ لپاره، رامنځ ته کیږي، چی ایا داسی یوه لاندېکړی یا مینیمال لاندیکړی شته، چي یو ورکړ شوی توکی ولري. R دې یوه ورکړشوې (ناضروري اسوځیاتیو) کړۍ وي اوa دې یو د هغی کړۍ په خوښه توکو څخه یو توکی وي. هر د هغه لاندیکړی د توکي a سره ټول څلونه، په کومو

کې چې ټیك فاکتور a رامنځ ته کیږي، د کوم یوه ګڼون یا تعداد ..,1 , 2 , 3 = n سره، دا فاکتور د a د مثبت پوتنځ یا توان رول لوبوي. دا چې ځل باید ضرور اسوشیاتیو نه وي، نو په ټولو توپیریزو ډولونو ، جوړه ډوله په نوکانو کې نیول کیږي، چې په دې توګه د کړی دوه فاکتورونه یو د بل سره ځلیږي یا ضربیږي. د n = 3 لپاره ځل a(aa) او (aa)a) او n = 4 لپاره ، او همداسې د n = 5 لپاره اوداسې ورپسې.
هر لاندېکړی د a سره ټول زیاتونونه ، ورکړشوي پاي زیاتو ځلونه، کوم چې د ټولګڼیز فاکتور سره سنبال وي خوندي لري.
داسې د R توکی . چې په دې زیاتونیز ډول لیکل کیږي د خپلې لور ځخه په R یو لاندې کړی جوړوي او دا، هغه غوښتونکې یا لټوونکې د a ځخه جوړه، لاندېکړي بلل کیږي.
د یوه اسوشیاتیوې کړیR لپاره د یوه توکی a ځخه جوړ لاندېکړی لاندې د R د ټولو توکو ځخه جوړه لاندېکړی، چې په یوه ډول د a زیاتون او مثبت پوتنځ ځخه جوړه وي لاس ته راځي(د ټولګڼیز ځلوونو سره). دا کړی له دې امله کموتاتیو ده.

د یوه ګروپ هر لاندېګروپ د دې ګروپ یویتوکی لري، د

یوې کړۍ هره لاندېکړی په همدې توګه د دې صفر توکی لري. دګروپ G لاندې ګروپونو (په همدې توګه د کړۍ R لاندېکړیو) غوځی له دې امله تشه‌یری نه دی.

۳ . ۳ . ۶ جمله : د ګروپ G د لاندېګروپونو یوه سیستم غوځی بیرته د G لاندېګروپ دی. په همدې توګه دکړۍ R د لاندېکړیو د یو سیستم غوځی، د دې کړۍ لاندېکړی جوړوي. د لاندې نیمګرپونو یوه سیستم غوځی بیرته لاندینیمګروپ دی، که دا تش نه وي، او همداسی ورپسی..

موږ دلته د لمړنی غوښتنی ثبوت مخ ته بیایو. ددې لپاره دې په ګروپ G کی یو لاندېګروپ سیستم A_i ورکړ شوی وي، چیرته چی i یو پژندډیری یا ایندکسډیریIndexmenge کی ځغلی، او D دې د دې لاندېګروپونو غوځی وي. که چیرې b او c د D په خوښه کوم توکی وي، نو د دوي ځل bc په هر لاندې ډیري A_i کی پروت دی او په ورپسی توګه یا په لاس ته راوړنی سره سملاسی هم په D کی پروت دی. نو له دې امله b^{-1} د په خوښه $b \in D$ لپاره په هر A_i کی پروت دی او له دې امله په D کی هم پروت دی. پس D د G لاندې ډیری دی.

اوس نیسو چی G دې یو ګروپ، کړی او یا په همدې توګه یو تن یا بدن یا کوم یو بل، موږ ته څرګند، الجبري سیستم وي، کوم چی تراوسه پیژنو. د M سره د G لاندېګروپ ښایو، نو یو مینیمال لاندېګروپ(په ورته ډول لاندېکړی، لاندې تن یا لاندېبدن) شته، کوم چی M خوندي لري. دا د M سره جوړه شوي یا تولید شوي لاندې کروپ {M } جوړوي او د ټولو M خوندي لرونکود G د لاندېګروپونو غوځی دی، د کومو څخه، چی کم له کمه یو دا په نامه ګروپ G موجود دی.
د مخه ویل شوي یا ورکړ شوي څیوکلیکي لاندې ګروپ تعریف د ټولیزولو له لارې ساده ښوول کیدی شي، چی لاندیګروپ {M } ټیك د ټولو هغو G توکو څخه جوړ دی، چی د په خوښه ترتیب د پایډیرو M توکو د پوتنځځل په بڼه لیکل کیدی شي.

ټیك په همدې توګه د مخه لوستل شوي ټولیزولو له لارې لاندېکړی، چی په R کی له M تولید ټولو توکو جوړ دی، کوم چی په M کي د پاي ډیرو توکو د ځلولو د زیاتون(د ټولګنیز ضریب سره) څخه انځوریدلی شي. په نااسوځیا- تیو حالت کی دې طبعآ ضریبونه د ټول ممکنو نوکانو سره بندې شي.

۳ . ۳ . ۷ یا دونه یا تعریف: که د تیرې برخې د M لپاره، د ګروپ G د ټولو لاندې ګروپونو A_i , $i \in I$ سیستم ونیول شي یا فرض شي، نو د یوه لاندې ګروپ کلیمي ته راځو، چې د ورکړشوو لاندې ګرپونو سیستم له خوا تولید شوی دی. ددې لپاره { A_i , $i \in I$ } لیکو، یا هم {A,B} { }، که دا دلاندې کروپونو ټولنه وي. په همدې توګه کیدی شي په یوه کړی کي هم د لاندېکړی سیستم له لارې تعریف لاندېکړي هم پوهیدل کیدی شي.

۳ . ۳ . ۸ یا دونه یا تعریف . دلته دې G یو ګروپ وي، یوه کړی او همداسی ورپسی. نو په G کی داسی لاندېډیري M شته، د بیلګي په توګه پخپله G، د کوم لپاره چی باور لري

$$\{M\} = G$$

هر داسی لاندېډیري د G لپاره یو جوړیدونکی یا تولیدیږو ینکی سیستم بلل کیږي . تر هغی، چی G یو پاې د تولید- ونکو سیستم ولري، نو دلته د ګروپ)یو نیمګروپ، یو کړی) G ځخه غږیږو، چی پایتولیدیدونکی ګڼون یا

شمیر ولري. په ځانګړې توګه کیدی شي، چی دا جوړوونکی یا تولیدونکی له یوه توکی څخه جوړ وي. دا ګروپ چی یو جوړیدونکی توکی لري او د هغه د څیوکلیکي لاندې ګروپ سره سر وخوري، څیوکلیك ګروپ بلل کیږي.

۳ . ۴ . ایزومورفیزم Isomorphimus

دا دلته د هر الجبري سیستم راوړلو کلیمو لپاره د ایزمو- رفیزم کلیمه روښانه کیدی یا تشریح کیدی شي، کومه چی همغه رو ل لوبوي لکه په نیم نظم شوي ډیري کی یی چی لروده.

د بیلګي په توګه ایزمورف ګروپونه یو بل ته کتمټ دي، د یو او همغه ګروپ دوه اکسمپلاره یا نموني ، چی په نیولی دې وي، چی که د ګروپ عملیي یی تړونونه همغه وي، په داسی حال کی چی توکي له کومو چی ګروپونه جوړ دي، طبیعیت یا پیدایښت کوم رول نه لوبوي.

په کره کلك تعریف سره لاندې راوړو:

۳ . ۴ . ۱ تعریف : ګروپوئید G او 'G ایزومورف

دي، که د ګروپوئید یواځنی او په څټ څیرونه f د ګروپو-
ئید G په ګروپوئید 'G داسی موجود وي، چی د په
خوښه $a,b \in G$ لپاره باور ولري

$$(ab)f = af.bf$$

په همدې توګه هره څیرونه ، چی دا غوښتنی پوره کوي،
د ایزومورفی څیرونی په څیر یي په نخښه کوو یا یی ایز-
ومورف څیرونه بولو. د دوه ګروپوئیدو خویونه، چی یو
بل سره ایزومورف وي، سیومتري خویونه دي، (هغه و
ایزومورفی څیرونی ته په څټ څیرونه بیرته ایزومورف
څیرونه ده)، او ترانزیتیو، دا برسیره پر دې ، که ځیرې
څوك د ګروپوئید کتمټ په ځان څیرونه ورسره وګڼي،
رفلکسیو هم دی. د ایزومورف ګروپوئیدو لپاره په ټولیزه
توګه لاندې لیکدود کارول کیږي یا استعمالیږي

$$G \sim G'$$

که چیرې د نورو الجبري جوړښتونو ایزومورفي مو هم
مطلب وي ، نو موږ به بیا هم همدا نخښه وکاروو.
طبعاً به د ګروپوئید په ایزومورف څیرونه کی ټول هغه
خویونه، چی په ګروپوئید کی لیکل کیږي، لکه اسوشیاتیو

قانون، کموتایتو، د یویتوکي موجودیت او د په ځتهتوکي موجودیت، د ګروپوئید ځیرې چه هم ور کارول کیږي یا وروړل کیږي. موږ په ساده بیلګه سره ښنایو، چې دا وینا څنګه ښوول کیدی شي. G دې یو کومتایتو ګروپوئید وي او f دې د G یوه ایزمورف ځیرونه په G' وي. که a' او b' دوه د G' په خوښه توکي وي او a, b د G هغه توکی وي، د کوم لپاره چې باوړ لري

$$af = f(a) = a' \quad , bf = f(b) = (b)f = b'$$

نو لرو

$$(ab)f = a'.b' \quad , (b.a)f = b'.a'$$

او د برابرون $ab = ba$ او د ځیرونی د یواځنتوب څخه $a'b' = b'a'$ دي. له دې ځخ لاس ته راځي،

۳ . ۴ . ۲ جمله: د نیمګروپ، ګروپ او همداسی د ابلګروپ یا کموتاتیو ګروپ ایزومورفی ځیرې بیرته نیمګروپ، ګروپ او همداسی ابلګروپ دی.

۳ . ۴ . ۳ مرستندوي جمله: دوه کړي یو بل سره ایزومورف دي، که د هغو د توکو ترمنځ یو یواځنی اوپه

څټکيدونکی نظم يا څيرونه موجوده وي، چی هغه څيرونه نسبت و زياتونګروپ ته ايزومورفيزم وي او هم د کړۍ و ځلګروپوئيد ته ايزمورفيزم وي. د ايزومورف څيرونی سره طبعاً کړۍ هغه خويونه، اسوشياتيو، او کمو-تايتو يا ليکړی liesche Ring او داسی نور وي، ساتي.
د ايزومورف ګروپونو لپاره يوه په زړه پورې بيلګه، د مثبت رييلګڼونو ځليزه ګروپ او د ټول رييلو ګڼونو زياتونګروپ جوړوي. که هر مثبت ګڼ د هغه په لوګاريتم باندې تنظيم يا څيره شي، چی بنسټ يی کره کلك ټاکلی وي ، نو د لمړي ګروپ يو ايزومورف څيرونه، په دوم ګروپ، لاس ته راځي.
ايزومورفيز له دې ريښتينيو څخه لاس ته راځي، چی د يوه ځل لوګاريتم دې د لوګاريتم د يوګونو فاکتورونو د زياتون سره برابر يا مساوي دی (د لوګاريتم او قوانينو لپاره دې ځما د شمير پوهنی کتاب وکتل شي).

موږ اوس هغه مخه په ګوته شوې پاملرنه په څيوکليکي زياتونګروپ کی رامخ ته کوو او په يوه بيلګه پيل کوو.
د ټولګڼونو زياتونګروپ د يوه ناپای څيوکليکي ګروپ لپاره بيلګه ده، ځکه، چی هر ټول ګڼ د ۱ څو ځله دی.

۳ . ۴ . ۴ جمله : ټول ناپای څیوکلیکي ګروپونه د ټولګڼونو زیاتونګروپ سره ایزومورف دي او همداډول په خپلو منځونو کی هم. همداسی پاي د n–نظم څیوکلکي ګروپونه یو بل سره ایزومورف دي.
ددې جملی له ثبوت څخه دلته تیرېږو (ثبوت یی په Kuroŝ کی کتل کیدی شي).

۳ . ۴ . ۵ جمله: د ټولګڼونو د صفر لاندیګروپ، څخه توپیري ټول لاندیګروپونه د یوه څرګند طبیعي ګڼ n د ډیرواره ډیري څخه راپیدا دي.
او بی : روښانه ده، چی د یوه طبیعی ګڼ ټول څوواره یو لاندېګروپ، دا په نامه له n څخه جوړ لاندېګروپ جوړوي. د یو بل څخه توپیري ګڼونو n لپاره لاندېګرپونه هم یو له بل توپیر لري. کیدی شي یود ټولګڼونو زیاتون ګروپ، لاندېګروپ A، چی یواځي د منفی ګڼونو څخه نه وي جوړ، ځکه چی د هر ګڼ سره د هغی په څټ هم لري. n دې کوچنی طبیعی ګڼ وي، چی په A کی خوندي ده. د یوه په خوښه $a \in A$ لپاره باور لري

$$a = qn + r\,,\ \ 0 < r < n$$

نو دی.

$$r = a - qn \in A$$

او په دې لاس ته راوړني $r = 0$ (د n له ټاکنی څخه) ، دا په دې مانا چي دی $a = qn$ ، څه مو چی ښوول.

۳ . ۴ . ۶ جمله : هر د یوه ناپای څیوکلیکي ګروپ لاندېګروپ څیوکلیکي دی، او دا د پای څیوکلیکي ګروپ لپاره هم باور لري.

۳ . ۴ . ۷ تعریف : وایو، چی ګرپوئید G په ګرپو-ئید 'G کی ایزومورف خوندي دی، او یا په 'G کی ایزومورف نغښتی دی، که چیرې له G یوه ایزمورفه څیرونه د ګروپو-ئید 'G په کوم یوه لاندېګروپوئید باندې موجود وي. دا کلیمه کړیو ته هم غزول کیدی شي،

هره کړی R، په کړی R باندې د پوره ماتریکسکړی R_n کی ایزومورف خوندې دی.

سکالار ماتریکسونه ، دا په دې مانا، چی د همغه توکي $a \in R$، چی په اصلي نیمي یا قطر کی پروت وي او نور د نیمي دواړو خواو ته صفرونه وي، په نامه R_n یو لاندېکړی، د R سره ایزمورف ده.

۳ . ۴ . ۷ جمله : هره کړی R په ورکړ شوي ډیري M باندې یوه پوره فنکشنکړی سره، چې ارزښت یي په R کې پروت دی، ایزومورف دی.

د ټولو x ∈ M لپاره هر فنکشن د همغه برابر ارزښت a ∈ R سره، هغه و R سره ایزومورف فنکشنکړی راکوي.

د یوه په خوښه اسوشیاتیو، کموتاتیو کړی R کې پولینومکړی R[x] پوتنځلړیکړی R{x} کې ایزومورف خونديږ دی.

پوتنځکړی د زیاتو پاي صفر څخه توپیریدونکو ځلوونو یا ضریبونو سره، یو و R[x] ته ایزومورف د R{x} لاندېکړی جوړوي.

یو لوي کار د لاندې جملي اوبی یا حل غواړي:

۳ . ۴ . ۹ جمله : هره کړی R په یوه کړی کې، چې یویتوکی لري، ایزومورف خوندي ده. که کړی R په دې برسیره اسوشیاتیو یا کموتاتیو وي، نو کیدی شي ، چې دا همداسې په یوه اسوشیاتیو، کموتاتیو دیویتوکي سره کړی کې خوندي شي.

اوبی یا ثبوت: موږ د ټولو جوړو (a,k) ډیری په نظر کې

نیسو، چی $a \in R$ او k یو ټولګڼ دی او د دې جوړو لپاره د لاندې مساواتو له لارې زیاتون او ځل تعریفوو:

$$(a,k) + (b,l) = (a+b,k+l) \qquad (1)$$
$$(a,k)(b,l) = (ab+la+kb,kl) \qquad (2)$$

نسبت و زیاتون ته یو ابلګروپ لاس ته راځي. دا چی برسیره پر دې

$$\begin{aligned}[(a,k)+(b,l)](c,m) &= (a+b,k+l)(c,m)\\ &= ((a+b)c+m(a+b)+(k+l)c,(k+l)m\\ &= (ac+ma+kc+bc+mb+lc,km+lm)\ m\\ &= (ac+ma+kc,km)+(bc+mb+lc,lm)\\ &= (a,k)(c,m)+(b,l)(c,m)\end{aligned}$$

باور لري او ټیك په همدې ډول د دیستریبوتیو دوم قانون هم ښوولی شو، نو ډیری یوه کړی انځوروي. له (2) څخه وریسی لاس ته راځي

$$(a,k)(0,1) = (0,1)(a,k) = (a,k)$$

دا جوړه (0.1) په دې کړیکی د یویتوکي ځاي نیسی یا نمایندګي کوي. بر سیره پر دې د (1) او(2) سره سم لرو

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0)\ ,$$
$$(a,0)(b,0) = (ab,0)$$

د کومو سره ، چی د ټولو د (a,0) فورمجوړو ډیری د ټولو

جوړو(a,k) په کړی کی یو وR ته ایزومورف لاندېکړی جوړوي.
له دې سره د ثبوت لمړی برخه تکمیل ده، دومه برخه د (2)
استعمال سره په ساده توګه لاس ته راځي.
موږ دا په ګوته کوو، چی دا له موږ جوړه شوې کړی یواځنی
کړی نه ده (او همداسی هم نامینیماله کړی) د یویتوکي سره،

کوم چی یورکړه شوېکړی R (د ایزومورف خوندیونی په موخه)
خوندې لري، کیدی شي چی R پخپله یو یویتوکی ولري.

۳ . ۴ . ۱۰ جمله : هر ګروپوئید کیدی شي ، چی د
یوې کړی په ځلګروپوئید کی خوندي شي، یو اسوشیاتیو یا
کموتاتیو ګروپوئید کیدی شي، چی په یوه کړیکی، چی
همغه خویونه ولري خوندي شي.
د ثبوت لپاره ټول ممکن د زیاتون فورمولونو زیاتون رانیسو

$$\sum_{a \in G} k_a a \qquad (3)$$

د کومو سره ، چی a د ورکړشوي ګروپوئید G ټولو توکو
کی ځغلی، په داسی حال کی چی ځلووني یاضریبونه k_a
ټولګڼونه دي او په ریښتونی، داسی چی زیات ترزیات پای
ډیر د صفر څخه توپیري رامنځ ته کیږي د زیاتون (3)
زیاتون او ځل د برابرونونو یا مساواتو

$$\sum_{a \in G} k_a a + \sum_{a \in G} l_a a = \sum_{a \in G} (k_a + l_a)a \qquad (4)$$

$$\sum_{a \in G} k_a a \cdot \sum_{a \in G} l_b b = \sum_{c \in G} m_c c \qquad (5)$$

سره روښانه يا تشريح دی، په کومو کي، چی m_c د ټولو صفر څخه توپير څلونو $k_a\, l_a$ زياتون په مانا دی، چی په ټولو a اوb کی ځغليدلی وي، د $ab = c$ سره. روښانه ده، چی د برابرونونو ښی لور (4) او (5) د (3) فورم زياتون انځوروي. مساوات (5) وايي، چی په کيڼ لور، د فاکتورونو په څير رامنځ ته شوي، پاي زياتونونه د غړو په څيرړو له بل سره ځليږي، او په رينښتونی د قانون

$$k_a a . l_a b = (k_a l_a)(ab)$$

لاندي، چی دab سره د ګروپوئيد په موخه ورکړ شوي عمليه مو مطلب دی، د کومو سره چی د ځل ab رامنځ ته کيدو سره همغه توکی c ورکوي، سره يوځاي راټول شي.

د زياتون لپاره په هره توګه يو ابلګروپ لاس ته راځي. د ديستريبوتيو قانو او د هغه ثبوت چی د G په ګروپ کی د ځل اسوشياتيو همداسی کموتاتيو قانون او همغه مساوي يي

د زیاتونونو ځل، چې فورم (3) لري لاس ته راځي، که څه هم خورا پراخ دی، مګر په پرینځیپ یا اصولوکی ستونځې نه رامنځ ته کوي، د هغو پرمخ بیول دې د لوستونکو دنده وي.

د ټول زیاتون، چې فورم (3) لري له دې امله نسبت و(4) او (5) مساواتو تعریف شوو اپریشن ته یوه کړۍ جوړوي، هغه زیاتون (3) په کومو کي ، چې $k_a = 1$ دی، د په خوښه a لپاره، چې له G دی. د (5) پسی یو ګروپ G سره ایزومورف لاندېګروپوئید، د دې کړۍ د ځلوونکي ګروپوئید سره، جوړوي. له دې سره دا ښونه سر ته ورسیده.

دا له موږ جوړ شوې د ګروپوئید G کړۍ د ټولګښونو ګروپو-ئیدکړۍ بلل کیږي.
که G یو نیمګروپ وي او یا ګروپ، ~~نو د~~ نو د دې په ځاي د ټولګښیزنیمګروپ او همداسی د ټولګښیزګروپ څخه غږیږو.

۳ . ۴ . ۱۱ جمله: هر ګروپ د یوه ډیري M په سیو-متري ګروپ کی ایزومورف خوندي دی، کیدی شي، چې د M په ځاي په ځانګړې توګه د ګروپ ټولو توکو ډیری وکارول شي.
دلته د ګروپ G هر توکی a هغه ترانسفورمیشن باندې تنظیمو، چې یو د G توکی x په توکي xa باندې تنظیم

کړي. دا چي له $x \neq y$ څخه هم $ax \neq ay$ لاس ته راځي
او برسیره پر دې د هر $x \in G$ لپاره برابرون

$$(xa^{-1})a = x$$

رامنځ ته کیږي، ترانسفورمیشن $x \to xa$ ګروپ G په ځان
په ځټ یواځنی ځیره کوی یا تنظیموي، دا نو له دې امله یو
پرموتیشن (پرموتیشن څما د شمیرپوهنه کتاب کی په پراخه
توګه روښانه شوی دی) دی. د $a \neq b$ لپاره په دې برسیره
په دې د غوښتونکو پرموتیشنونو توکي یو له بل توپیر لرود-
ونکی دي، ځکه، چی $1.a \neq 1.b$ دی.
بالاخره برابرون

$$(xa)b = x(ab)$$

په ګوته کوي، چی د ab پورې اړونده پرموتیشن د و a اوb
پورې اړونده یوبه بل پسی راوړنو څخه لاس ته راځي.

۳ . ۴ . ۱۲ جمله : هر نیمګروپ G ، د یوه ډیري M
سیومتري نیمګروپ کی خوندي دی.
اوبی یا حل: د ثبوپ لپاره نیمګروپ G د ۳ . ۴ ، ۱۰
سره سم په یوه، د یوه اسوځیاتیو کړی R, په ځلیز ګروپ

کی خوندې کوو، دا بیرته د ۳ . ۴ ، ۹ سره سم په یوه اسوشیاتویکړی R کی د یویتوکي سره خوندې کوو او د G سره یی په نخښه کوو، چی داد اخرنی کړی ځلیزه نیمګروپ دی. لکه څنګه، چی په G کی هم یو توکی 1 د $1.a \mid= 1.b$ سره له $a \mid= b$ څخه موجود دی، نو د لغاتو پورې د پورته جملی ثبوت سره دا سر خوري ، چی دا نیمګروپ G د نیمګروپ سره پخپله، په دې ډیرګ G باندې، ایزومورف خوندي دی. له دې څخه د سرچینیز ګروپ G خوندیونه لاس ته راځي.
مونږ غواړو، چی دې ته ګوته ونیسو، چی د یوه ګروپوئید (په ځانګړي توګه یو ه نیمګروپ) په بل ګروپوئید (یوه نیمګروپ) کي خوندیونه سیده وښایو، بی له دې، چی یوه ګړی د یویتوکی سره وکاروو.

۳ . ۵ د نیمګرپونو په ګروپ کی او کړی په یوه (ناضرورکموتاتیو) تن یا بدن کی خوندیونه

هر نیمګروپ، ضرورپه یوه ګروپ کی، ایزومورفف نه شی خوندي کیدی، د دې لپاره ضروري شرطونه هغه باید ورسره بلد د لنډونی قاعدې دي.

۳ . ۵ . ۱ جمله: له $ac = bc$ او همداسی $ca = cb$
څخه لاس ته راځي $a = b$.

یادونه : دلته ګورو، چی د لنډونی قاعدې کارول شوي دي.

په لاندې برخه کی غواړو وښایو، دا راوړلشوي ضروري شر-
طونه، چی د نیمګروپونو په ګروپونو همداسی د اسوشیاتیو
کړی په یوه (ناسو[۸] کموتایتو) بدن کی د کموتایتو په حالت
کی پوره کیدونکي هم دي.د دې لپاره د لاندې مرستندوي
جملي په ښوونه پیل کوو.

۳ . ۵ . ۲ مرستندوې جمله: د ابل په یوه نیمګروپ G
کی دې یو لاندې نیمګروپ S ورکړ شوی وي، او په G
کی دې د S د توکو سره لنډونه وشي، دا په دې مانا، چی له

$$ax = bx \ , \ x \in S; \ a,b \in G$$

څخه دې تل $a = b$ لاس ته راشی. نو کیدی شي، چی G
د ابل نیمګروپ ایزومورف په یوه داسی ابل ګروپ G کی
د یویتوکي سره ، ایزومورف خوندې شي، چی د S هر توکی
په G کی یو په څټ توکی ولري.

(۸) ناضو د کموتایتو

یادونه : د دې جملې له ثبوت څخه تیرېږو. دا د الجبر په درسي کتابونو کې کتل کیدی شي،

په دې پورته غوښتنو له مخې لاندې جمله لاس ته راځي

۳ . ۵ . ۳ جمله : هر ابل ګروپ د لنډونو قاعدو سره په یوه ابل ګروپ کي خونديږ کیدی شي .
د دې ورکړ شوي جوړښت د طبیعي ګڼونو په یوه زیاتون نیمګروپ ، کوم چې د لنډونو قاعدو سره یو ابل نیمګر-وپ دی ، په ساده توګه د ټولګڼونو په زیاتونګروپ کې میندل کیدی شي ،

۳ . ۵ . ۴ جمله: په یوه اسوشیاتیو - کوموتاتیو کړی R کی دې د توکو یو ډیری N راوستل شوی وي، په کوم کې چې صفر او پرصفرویشنه نه وي موجوډ. نو کیدی شي، چې کړی R ایزومورف په یوه اسوشیاتیو-کموتایتو کړی R کی، د یویتوکي سره، داسي خوندي شي، چې د N هر توکي په R کی یوه په څټ توکی ولري.

یادونه : دا ثبوت هم پرېږدو او په دې توګه نورو غوښتنو ته هم پاي ورکوو، چې موضوع اوږده نه شي.

۳ . ۶ نورمالپرویشونی

۳ . ۶ . ۱ تعریف : یو ګروپ G او په هغه کی دې توګه یو لاندېګروپ H دې ورکړ شـوې وي. که یوه a د G په خوښه توکی وي، نو ممکنه ځلونی ah چی د aH ټولګه ده ، چیرته چی h په لاندې ګروپ H کی ځغلي، دا د a ~~sah~~ تعریف شوې، د ګروپ G کیڼ اړخیزځنګ- ټولګی یا ګاونډې ټولګی(موږ به کوښښ وکړو چی دا تل ګاونډیټولګی وبولو) بلل کیږي و لاندې ګروپ H پسی. په څرګنده توګه $a \in aH$ دی، ځکه چی لاندېګروپ H یویتوکی لري.

د یوه توکی b لپاره دې، چی د ګاونډیټولګی aH څخه دی، تل باور ولري $bH = aH$ ، دا داسی بللکیږي، چی د ګروپي G هر کیڼ اړخیز ګاونډیټولګی و H پسی د هغه د هر توکی سره تعریفیږي. که $b = aH$, $h \in H$ باور ولري، نو د په خوښه $h', h'' \in H$ لپاره باور لري:

$$bh' = a(hh') \quad \text{او} \quad a h'' = b(hh'')$$

$$\text{پس} \quad bH \subseteq aH \quad \text{او} \quad aH \subseteq bH$$

.

په دې سره هر دوه کیڼ اړخیز ګاونډیتوبولګي، یو د بل سره کټمټ دي او یا یې غوڅې تشډیرې دی.
موږ ددې سره د ګروپ G یوه ټوټونه یا تجزیه لاس ته راوړو، په لاندېګروپ H پسې، چې د یوه مخه یې کیڼ اړخیزو ګاونډیتوبولګیو یو له بل څخه پردې دي، دا ګروپ G کیڼ اړخیزه ټوټونه بلل کیږي په یوه لاندېګروپ H پسې. د دې ټوټوونو یاتجزیې یو ټولګی پخپله H دی:
د $a \in H$ سره باور لري $aH = H$.

په ورته توګه د ګروپ G ښي اړخیزه ټوټونه یا تجزیه لاس ته راوړې شو، په یوه لاندېګروپ H پسې، کوم چې له ښي اړخیز ګانډېټولګی ha , $a \in G$ څخه جوړدی، که یو ګروپ کموتاتیو نه وي، نو کیدی شي، چې کیڼ ګاونډیتو- لګي او ښي ګاونډي ټولګی باندې د یوه ګروپ G ټوټونه د لاندېګروپ H پسې یو له بل توپیر ولري. په هر صورت دواړه ټوټونې د ټولګیو برابر ګڼون لري: ځیرونه چې د G هرتوکی a د G په a^{-1} توکی ځیره کوي، په څټکیدو- نکی یواځنی ځیرونه ده، د ګروپ G په خپل ځان او کیڼ اړخیز aH ګاونډیتولګی په همغه ورته ښي اړخیز ګانډیتو- لګي Ha^{-1} ځیره کوي او په څټ.

۳ . ۶ . ۳ تعریف:د ګروپ G ټوټونه په لاندېګروپ H پسي ، د ګاونډیو ټولګیو ګڼون په دې دواړو هر ټوټونو یا تجزیه کی ، که دا پاي وي، د لاندې ګروپ پیژند نخښه یا ایندکس Index، په ګروپ G کی بلل کیږي.

ګروپ G دې د n نظم پاي ګروپ وي او H دې د هغه لاندېګروپ وي، د k نظم او j پیژند نخښی یا ایندکس سره. هرګاونډټولګي aH د ټیك k توکو څخه جوړ دی او له دې امه باور ولري

$n = k.j$

له دې څخه لاندې جمله لاس ته راځی

۳ . ۶ . ۳ د لاګرانژ Lagramge جمله: د یوه په خوښه پای لاندېګروپ نظم او پیژندنخښه د ټول ګروپ د نظم پرویشوني دي.

دا جمله د ۳ . ۳ . ۴ سره سم لاس ته رکوي ، چی د پاي ګروپ د هر په خوښه توکی نظم همداسی د ګروپ نظم ویشي. د دې جملی بله پسی راتلنه ده:

۳ . ۶ . ۴ پسی راتلنه: هر د لمړي ګڼ نظم(لمړيګڼ هغه ګڼ دی ، چی پرویشوني یی ساده پرویشوني وي، یعنی پخپله دا ګروپ او یویتوکی) څیوکلیك یا په بل نوم، راګرځیدونکی دی.

دا باید د په خوښه د هغه توکي جوړه څیوکلیکي لاندی ګروپ سره سر وخوري، تر هغي چی دا توکی له ۱ څخه توپیر ولري.

۳ . ۶ . ۵ تعریف: یو لاندښیمګروپ H د ګروپ G نورمالپرویشونی Nrmalteiler (یا اینواریانتي invariante Untergrupp لاندښګروپ) بلل کیږي، که د G کینڼ اړخیزه ټوټونه یا تجزیه د ښی خوا ټوټونی سره، نسبت و H ته، سر وخوري، دا په دې مانا، چی د هر $a \in G$ لپاره (په G کی د دواړو برخېږیریو یو بل سره د سر په سر خوړلو په موخه وي) مساوات

$$a H = H a \qquad (1)$$

رامنځ ته کیږي. یا باوري کیږي. کیدی شي چی د لته د ګروپ G ټوټونی و H پسی د نورمالګروپ څخه وغږیږو.

په لاندې کی د نورمالپرویشونی یو بل تعریف ورکوو، چی

دې همدا اوس ورکړشوي تعریف سره برابرارزښته دی.

۳ . ۶ . ۶ تعریف : په ګروپ G کې توکی x او y یو د بل سره کونجوګیري konjugiert **بلل کیږي**، که په G کې یو توکی a داسې پیداکیدي شي ، چې باور ولري

$$y = a^{-1}xa$$

داسې هم ویل کیږي، چې له y څخه د x سره ، د a ترانفورمیشن له لارې لاس ته راځي.

۳ . ۶ . ۷ جمله : د ګروپ G لاندې ګروپ H هلته او هلته په G کې نور مالپرویشونی دی، که H وهر توکی ته دده توکی په G کې ټول کونجوګیري توکی هم ولري.

اوبې : د دې لپاره دې H په G کې نورمالپرویشونی وي، او په ورزیات دې یا برسیره پر دې دې h د H په خوښه توکی وي. a دې د G یو په خوښه توکی وي، په H کې د (۱) پسې یا د (۱) له مخې یو توکی 'h د

$$ah' = ha \qquad (2)$$

سره موجود دی. پس دی

$$a^{-1}ha = h' \in H \qquad (3)$$

او په ځتې که د $h \in H$ په خوښه توکی لپاره او $a \in G$
په H کی یو توکي h' موجود وي، کوم چی برابرون (۳)
پوره کړي او د دې پسی یا د دې په تعقیب(۲) پوره کړي،
نو باور لري $aH \subseteq Ha$. که په دې رامنځ ته شوې اړیکی،
چی د ټولو a لپاره رامنځ ته شوي یا باور لري، د a په
ځای a^{-1} ولیکي ، نو و $a^{-1}H \subseteq Ha^{-1}$ ته راځي او
همداسی $Ha \subseteq aH$.کوم چی د مخ ته تیر سره برابرون
(۱) ورکوي.

۳ . ۶ . ۸ تعریف : دوه لاندېګروپونه U او V په G
کی یو د بل سره کونجوګیر konjugiert بلل کیږي، که یو
داسی توکی $a \in G$ موجود وي، چی د هغه سره د
ترانسفورمیشن له لارې لاندېګروپ U په لاندېګروپ V
پریباسي، یعنی باور ولري

$$a^{-1}Ua = V$$

ډیري $a^{-1}Ua$ بی له دې هم د هر $a \in G$ لپاره د په خوښه
یو (په ریښتونی U سره ایزومورف) لاندېګروپ سره
تل بیرته یو لاندې ګروپ دی.

د په خوښه توکو $u_1 , u_2 \in U$ لپاره لاندې اړیکی رامنځ ته کیږي

$$(a^{-1}u_1a)(a^{-1}u_2a) = a^{-1}(u_1u_2)a$$

او له

$$a^{-1}u_1a = a^{-1}u_2a$$

څخه برسیره پردي لاس ته راځي $u_1 = u_2$ ، د کوم سره چی څیرونه یا نظم $u \to a^{-1}ua$ د $u \in U$ سره، یو ایزومورف څیرونه د U په $a^{-1}Ua$ ده: aUa هم یو لاندېګروپ انځوروي.

۳ . ۶ . ۹ جمله :د یوه ګروپ G هر نورمالپرویشونی د ټولو خپلو په G کی کونجوګیر لاندېګرپونو سره یوځای پریوزی. په ځټ: د ګروپ G یولاندې ګروپ H ټولي و H ته په G کی کونجوګیر لاندېګروپونه خوندي لري، نو له دې امله دا نورمالپرویشونی دی.

له (۱) څخه په لمړی وار لاس ته راځي

$$a^{-1}Ha = H \qquad (4)$$

کوم چی د جملی لمړی برخه ثبوتوي. اوس نو باور لري

$$a^{-1}Ha \subset H$$

د اصلي خوندیلرنی په موخه. دا رات راکوي

$$H \subset aHa = (a^{-1})^{-1}Ha^{-1}$$

او د H لاندې ګروپ باید، که هغه ټولی و هغی ته کونجو-
ګیر خوندي ولري، د دې توافق یا یو په بل سرخوړنی سره .
د په خوښه توکي $a \in G$ لپاره له دې امله (۴) رامنځ ته
کیږي، له کوم چی (۱) رابیلیدلی شي.

۳ . ۶ . ۱۰ جمله: د یوه ګروپ G د په خوښه نومالپرو-
یشونو ډیریو غوڅی ، بیرته نومال پرویشونی دي.

اوبی : که D د $i \in I$, A_i غوڅی وي ، نو په هرترتیب D
د G لاندې ګروپ انځوروي. (پرتله ۳ . ۳ . ۶) برسیره پر
دې د هر توکی ، چی یوه د D توکي سره کونجوګیر وي،
په ټولو A_i کی پروت دی او په دې پسی لاس ته راځي، چی
په غوڅ کی هم پروت دی.

۳ . ۶ . ۱۱ جمله :د یوه ګروپ G په خوښه نورمالپرو-
یشونو سیستم څخه تولید یا راپیداشوي لاندېګروپ(پرتله
۲ . ۳ . ۸) په همدې حالت کی د G یو نومرمالپرویشونی
دی

ورکړ شوی دي نورمالپرویشونی $A_i \ , i \in I$ وي او د هغه ځخه جوړ شوي یا تولید شوی د لاندې ګروپ B وی لکه په ۳ . ۳ . ۷ کی ښوول شوي وو، هر د B توکی b په لاندې بڼه لیکل کیدی شي

$$b = a_1 a_2 \ldots a_n$$

د ورکړ شوي $a_j \in A_j \ , j = 1,2,\ldots,n$ سره . له G ځخه په خوښه توکي g لپاره باور لري

$$g^{-1}bg = (g^{-1}a_1 g)(g^{-1}a_2 g)\ldots(g^{-1}a_n g)$$

او دا چی

$$g^{-1}a_j g \in A_j \quad , j=1,2,\ldots,n$$

دی ، نو لاس ته راځي

$$g^{-1}bg \in B$$

۶ . د ابلګروپ ټول لاندې ګروپونه د هغی خپل نورمالپر-ویشونی دي. په دې ورزیات یا برسیره پر دې په هر ګروپ G کی یوونګروپ E د نورمالپرویشونی په څیر موجود دی او په همدې توګه پخپله ګروپ G هم.

۳ . ۱۲.۶ تعریف : یو ګروپ ، چې نورمال پرویشونی یې یواځې یوونګروپ او پخپله خپل ځان وي، ساده بلل کیږي.

۳ . ۱۳.۶ جمله : یواځني ساده ابل ګروپونه، هغه ځیو-کلیکي ګروپونه دي، چې نظم یې پریمګڼ یا لمړی ګڼ وي.

اوبې : که یو ابل – یا کموتاتیو ګروپ ساده وي، نودا بیخي ناساده یا نااصلي لاندې ګروپ نه لري: دا چې په دې کې ځیوکلیکي لاندې ګرپونه باید خوندې وي، نو دا پخپله ځیوکلیکي دی. یو ناپاي ځیوکلیکي لاندې ګروپ نااصلي یا ساده لاندېګروپونه لري، په کوم چې د ټولګڼونو زیاتون-ګروپ دی ، په هغه کې چې د جفت ګڼونو ګروپ په ځان کې دننه یا خوندي لري. که یو پای ځیوکلیکي ګروپ $G = \{a\}$ راواخلو چې نظم یې n دی، نو د ټوټونې n له لارې څخه لرو $n = kl$ ، چې لاندې ګروپ $\{a^k\}$ نظم l او په دې لاس ته راوړنې سره د E او G څخه توپیر لري.
د دې په څېر: ګروپ $G=\{a\}$ کیدی شي چې هیڅ ناساده لاندېګروپ ولري، که نظم یې یو پریمګڼ یا لمړی ګڼ وي.
چې د لاګرانژ له جملې څخه ساده په لاس راتلی شي.

يادونه: دا موضوع دلته رالنډوم او داسی نور ې په دې هکله موضوعګاني په خارجي ژبو درسی کتابونو کی شته، چی هلته کتل کیدی شي، دلته به زيات وخت او ځاي ونيسی. زما هئله هم دا ده، چی د زياتو شيانو سره په دا لمړي کی داسی لړ غوندې بلد شو.

۳ . ۷ ايديال او پاتي ټولګيکړی

Ideal und Restklassenring

يادونه: ی ما دا پاتيټولګيکړی بللی، چی یو نوم وي، خو دا کيدی شي، چی د پاتيټولګی کړی هم وبلل شي. د نومونو په هکله ستونځي به منو، تر څو، چی ځموږ په هيواد کي شميرپوهنی خپله لار نيولي وي.

په دې برخه کی ګورو، چی د نورمالپرويشونی په ځاي د ايديال کليمه رامنځ ته کيږي.
په دې برخه کي R تل يوه کموتاتيوه کړی د يوښتوکی ۱ سره په نخښه کوي يا ښايي. اوس د يوې کړی د « ايديال»کليمه پيل کيږي. لاس ته راځی، چی د R هر ايديال Y په R باندې

یو ایکویوالنت یا ورته ټولګی ~ تعریفوي. د دې سره ښوول کیږي، چې د هر $r \in R$ کړیتوکی اړونده ایکویوالنتټولګي [r] بیرته یوه کړی R / Y جوړوي.

۳ . ۷ . ۱ تعریف : د کړی R یو ناتش برخه‌یږی Y یو ایدایال دی، که Y د زیاتونګروپ $(R , +)$ یو لاندې ګروپ وي او د ټولو $y \in Y$ او $r \in R$ لپاره باور ولري $yr \in Y$.
دا د R ایدیال Y اصلي ایدایل بلل کیږي که $R \neq Y$ وي .

۳ . ۷ . ۲ بیلګی:

الف) دا د R یواځي د صفرتوکی څخه جوړ برخه‌یری $\{ 0 \}$ د R یو ایدیال دی، دا صفرایدیال دی. او له همدا اوسه به په 0 سره په نخښه شي.

ب) که $R = Z$ د ټولګښونو کړی وي، نو ډیری Y د ټولو جوړه ګښونو $Y = 2z$ د $z \in Z$ سره جوړ ډیری د Z یو ایدیال دی. د دوه جوړه ګښونو زیاتون او کمون تل یو جوړه ګڼ دی، او برسیره پر دې yz د ټولو $y \in Y$ لپاره او د ټولو $z \in Z$ لپاره یو جوړه ګڼ دی.

پ) که $R=F$ یو بدن وي، نو 0 او F د R یواځنی ایدیالونه دي.

۳ . ۷ . ۳ تعریف: د R یو ایدیال Y اصلي ایدیال بلل کیږي، که $Y=yR$ وي، د یوه $y\in Y$ لپاره، دا په دې مانا چې یو $y\in Y$ داسې موجود دی، چې د هر $z\in R$ لپاره یو $r\in R$ د $z=ry$ سره موجوږوي. داسې هم ویل کیدی شي : چې دا توکی y ایدیال Y جوړوي یا تولیدوي او یا y د Y جوړوونکي یا تولیدوونکی دی.

۳ . ۷ . ۴ تعریف: Y دې د R یو ایدیال وي. نو دوه توکی $r,s\in R$ و Y ته ایکویوالنت یا ورته بلل کیږي، که باور ولري : $r-s\in Y$
په نخښوونه یی : $r\sim s$ یا $s\sim r$.

دا په ساده توګه لیدل کیږي، چې $\sim$ په R باندې یو ایکوبوالنځ اړیکه یا ورته اړیکه ده.

۳ . ۷ . ۵ مرستندوي جمله: Y دې د R یو ایدیال وي د $R=|Y$ سره او R/Y دې د R له توکو r څخه جوړ، د ورته ټولګیو $[r]=\{s\in R\mid s\sim r\}$ ډیری وي.

نو R / Y به د زیاتون $[r_1] + [r_2]$ او ځل $[r_1] . [r_2]$ سره د ټولو $r_1 , r_2 \in R$ لپاره یوه کړیوي د یوې توکی [1] سره .

اوبی: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله ورته ټولګی $[r] , r \in R$ ډیری R په پردیو برخېیریو باندې ټوټه یا تجزیه کوي. وي دې

$$[r_1] , [r_2] \in R / Y ,$$

نو دا باید وښوول شي، چې زیاتون

$$[r_1] + [r_2] = [r_1 + r_2]$$

او ځل

$$[r_1] . [r_2] = [r_1 . r_2]$$

د هغو د نماینده توکو څخه خپلواك ایکیوالنځټولګي یا ورته ټولګي دي. که $s_1 , s_2 \in R$ نور د ټولګي $[r_1]$ او همدا ډول د ټولګی $[r_2]$ نماینده ګان وي نو $r - s = y \in Y$ هم دي، د ټولو $i = 1 , 2$ لپاره، د کوم څخه چې لومړی

$$[r_1 + r_2] - [s_1 + s_2] = [r_1 + r_2 - s_1 - s_2] =$$
$$=[(r_1 - s_1) + (r_2 - s_2)]$$
$$=[y_1 - y_2] = [0] \in R / Y$$

لاس ته راځي. له دې امله زياتون + كره تعريف دى او [0] د ابل د ګروپ R / Y يو صفرتوكى دى او ترڼنى يا نښلونى يا عمليي + ته.
په R / Y باندې ځل . هم كره تعريف دى، ځكه چې

$$
\begin{aligned}
r_1r_2 - s_1s_2 &= (s_1 + y_1)(s_2 + y_2) - s_1s_2 \\
&= s_1s_2 + y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 - s_1s_2 \\
&= y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 \in Y
\end{aligned}
$$

له كوم چې $[r_1] [r_2] = [r_1r_2] = [s_1s_2] = [s_1] [s_2]$ لاس ته راځي. سمې په دې پسې ترڼلى په دې باور راوړى شي، چې R / Y (د كړى د تعريف سره سم) يوه كړى ده د يوي توكى [1] سره.

۳ . ۷ . ۶ تعريف : دا كړى R / Y د R يو د پاتى- ټولګيو كړى و ايډيال Y ته بلل كيږي.

۳ . ۷ . ۷ تعريف : د كړى R يو ايډيال M ماكزيمال ايډيال بلل كيږي، كه $M \neq R$ باور ولري او Y،د R يو بل ايډيال، موجود نه وي د $M \subset Y \subset R$ سره.

۳ . ۷ . ۸ جمله: R دې يوه كموتاتيوه كړى وي،

د R $1 \in R$ سره، نو باور لري:

الف) د R هر اصلي ایدال Y په یوه ماکزیمال ایدیال کي خوندي دی.
ب) که M د R یو ماکزیمال ایدیال وي، نو د پاتیټولګی کړی $F = R / Y$ یو بدن یا تن دی.

اوبی:
الف) دا چی Y د R یو اصلي ایدیال دی، نو $1 \notin Y$ دی.

$Y \subseteq y_1 \subseteq y_2 \subseteq \ldots \subseteq Y$

دې د کړی R د ایدیالونو Y_i یو جګیدونکی ځنځیر وي د $1 \notin Y_i$ سره.، چیرته چي $i \in I$ او I یو اندکس ډیری یا پیژندډیری دی. وي دې $W = \bigcup_{i \in I} Y_i$ ، نو $u, v \in W$، د $i \in I$ سره موجود دی د $u, v \in Y_i$ سره، ځکه چی ایدیال Y_i یو ځنځیر جوړوي. نو لرو $W \subseteq Y_i$ $u - v \in$، همدا ډول $ur \in W$ لاس ته راځي، د ټولو $u \in W$ لپاره او $r \in R$. له دې امله W د R یو ایدیال دی، او $1 \notin W$ دی. نود کړی R د ټولو Z ایدیالونو ډیری M د $Y \subseteq Z$ سره، او $1 \notin Z$ سره، د څورن لیما پسی یو ماکزیمالتوکی M لري. داچی هر اصلي لوي ایدیال $M' > M$ دا یویتوکي 1

.

لري او له دې امله $M' = R$ باور لري، نو لاس ته ترې اځي ، چې M د R يو ماکزيمال ايديال دی. دا Y خوندي لري.
ب) وي دې $[r] \neq [0]$. نو $M + rR$ د R يو ايديال دی، کوم چې M اصلي خوندې لري. دا چې M د R يو ماکزيمال ايديال دی، نو باور لري

$$R = M + rR$$

پس د R يوی په $M + rR$ کی پروت دی، دا په دې مانا چې $1 = m + rs$ د توکو $m \in M$ او $s \in R$ لپاره باور لري.
له دې امله $[r][s] = [1] \in R / M$ دی.
او له دې سره $[s] = [r]^{-1}$ دی.
نو پاتی ټولګی کړی يو بدن يا تن دی. څ چ د ښ و

۳ . ۷ . ۹ بيلګي

اول : د ټولګښونو Z په کړی کیY د ټولو جفتو ګڼونو ډيری ماکزيمال ايديال دی. پاتيټولګي بدن Z / Y يی د دواړو پاتيټولګيو $[0]$ او $[1]$ څخه جوړ دی. دا نو له دې امله دوه توکی لري او د $Z / 2Z$ سره په نخښه کيږي.
دوم : په پولينومکړی $R = F[X]$ کی په بدن يا تن F باندې د نا ټاکلی يا مجهولی X سره $Y = \{ X f(X) \mid f(X) \in R \}$

یو ماکزیمال ایدیال دی د پاتی ټولګیتن $R / Y \sim F$ سره د مخ ته تیر تعریف له مخی، ځکه چی دی

$$f(X) = f_0 + f_1X + \dots + f_nX^n \in R$$

نو $[f] = [f(X)]$ په R / Y کي پروت دی. د مرستندوي جملی۳ . ۷ . ۵ له مخی دا څیرونه $[f_0] \to f_0 \in F$ د بدنونو یا تنونو R / Y او F ترمنځ یو ایزومورفیزم دی.

۳ . ۷ . ۱۰ تعریف: د کموتاتیو کړی R د یویتوکي 1 سره یو توکي u یوون بلل کیږي، که یو $v \in R$ څخه موجود وي د $uv = 1$ سره.

۳ . ۷ . ۱۱ جمله : د یوه توکي $u \in R$ لاندې خویونه ایکویوالنت یا ورته دي

الف) u د R یو یوون دی

ب) R د u څخه جوړ شوی یا تولید شوی اصلي ایدیال دی ، دا په دې مانا چی $uR = R$.

پ) u د R په هیڅ ماکزیما ایدیال کي خوندي دی یا په بل ډول : په کوم ماکزیمال ایدیالکی خوندي نه دی).

.

ثبوت یا اوبی: پ) په ساده توګه له ب) څخه لاس ته راځی.
که u د R په کوم ماکزیمال ایدیال کی خوندي نه وي، نو د
جملي ۳ . ۷ . ۸ له مخی اصلي ایدیال نه دی.
پس لرو $R = uR$ او $1 = uv$ د یو $v \in R$ لپاره، که چیرې
الف ښوول شوی وي. دا ایمپلیکیشن $(b) \Leftarrow (a)$ ساده
دی. څ چ ښ و (څه چی د ښوولو وو)

۳ . ۷ . ۱۲ **تعریف:** د کړی R یو ناتش برخړیری U
لاندېکړی بلل کیږي، که د ټولو $u_1, u_2 \in U$ لپاره هم
$u_1 - u_2 \in U$ او هم $u_1 u_2 \in R$ باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۳ بیلګي:

الف) د R هر ایدیال Y د R یو لاندې کړی ده.

ب) Z د Q یو لاندېګروپ دی، مګر د Q ایدیال نه دی.

پ) د Z د ټولو جفتو ګڼونو ډیری Y د Z لاندې کړی
ده. په ځانګړې توګه دا Y داسی لاندې کړی ده، کومه چی
یویتوکی نه لري.

دا چی په ټولیزه توګه یوه لاندېکړی U یویتوکی نه لري، نو ضرور دا ده چی د لاندیکړی د « ایدیال» کلیمه رامنځ ته کړو.

۳ . ۷ . ۱۴ تعریف : U دې د R یوه لاندې کړی وي. د U دا ناتشډیری Y د لاندې کړی U یو ایدیال دی، که د ټولو $Y \in y_1, y_2$ لپاره $y_1 - y_2 \in Y$ وي او که $yu \in Y$ د ټولو $y \in Y$ او ټولو $u \in U$ لپاره باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۵ لاسته راوړنې: U دې د R یوه لاندېکړی وي او Y دې د کړی R یو ایدیال وي. نو باور لري:

الف) $Y_1 = U \cap Y$ د U یو ایدیال دی

ب) $U + Y = \{ r \in R \mid r = u + r$
د ټولو $u \in U$ او یوه $y \in Y$ لپاره}
یوه د لاندېکړی ده.

پ) $(U+Y)/Y$ د پاتیټولګیکړی R/Y ، لاندېکړی ده.

ت) د R/Y د هر لاندېکړی T لپاره

$$T^{-} = \{ r \in R \mid r[r] \in T \}$$

د R لاندې کړی ده.

ټ) د R / Y د هر ایدیال I لپاره

$$I^{-} = \{ r \in R \mid [r] \in I \}$$

د R یو ایدیال دی، د $Y \subseteq I^{-}$ او $I^{-} / Y = I$ سره.

اوبی: الف) د تعریف ۳ . ۷ . ۱۲ او تعریف ۳ . ۷ . ۱۴ څخه ترلی لاس ته راځي

ب) $r_1 = u_1 + y_1 \, , \; r_2 = u_2 + y_2 \in U + Y$ دي،

د $u \in U$ او $y \in Y$ سره، نو لرو

$$r_1 - r_2 = (u_1 - u_2) - (y_1 - y_2) \in U + Y$$

دا چې Y د R یو ایدیال دی نو دا لاندې هم لرو:

$$r_1 \cdot r_2 = (u_1 + y_1)(u_2 + y_2)$$
$$= u_1u_2 + (y_1u_2 + u_1y_2 + y_1y_2) \in U + Y$$

دا نورې ساده د پ) ، ت) او ټ) اوبیونی د کورکار دی.

۴ د بول الجبر ، سرکیټ الجبر

۴ . ۱ د بول د الجبر ستکلیمی

په برخه ۱ کی مو د ډیري M برخډیریو ترمنځ ترونونه یا عملی ولوستلی. په دې عملیو کی، که چیرته د ډیري M برخډیریو ترمنځ دوه ځایز اپریشنونه یا کارونی (د ډیریو ترنی) غوڅی ، ټولنه او همداسی کمپلیمنت جوړونه په پوتنځ یا تواندیري باندې یوه «جوړښت» ته سره راټولګه کړي، نو هغه «جوړښت» چی لاس ته راځي، د ډیري M د برخډیریو بول الجبر بلل کیږي. په دې جوړښت کی تشډیری Ø او ټولډیری M یو راوتلی یا کره راوتلی رول لوبوي. د ترونو لپاره مو د مخه په برخه ۱ کی یوه لړی شمیرقوانین کره کړل او په لیست کی مو راوستل.دا ډول شمیرنی د پوره بل ډول شمیرپوهنیزو شیانو لپاره هم باور لري یا کارول کیږي. دا ګټور دي، چی دا ډول شمیرقاعدې لمړی په دې لاس ته راغلی پرپریکندنی یا پریکړي یا لاس ته راغلي نتیجی په عمومی توګه تر ځیرنی لاندې ونیول شي. « ټولیز» دلته په دې مانا

دی، چې د عملې په ډول نه پیچوْبلکه په هغو توکو، د کومو لپاره چې دا عملیې باور لري. له دې څخه مخ ته ځو، چې د شیا ئنو یو ډیری مو مخ ته پروت دی د کومو لپاره چې عملیی روښانه یا تشریح دی یا کره شوي دي(یعنی چې یو بل سره « تړلکیدی» شي، د کومو سره چې شمیرنه ممکن وي)، او د دې عملیو سره شمیرنی له لارې، هغه تر څیړنی لاندې نیولې شمیرقوانین باور ولري. له دې څخه په فورمال توګه لاندې تعریف لاس ته راځي. دلته یو دوه ځایزه عملیه یا کارونه یا اپریشن یو تړون یا تړنه ده یو «شمیرقاعده» ده د کوم له مخی، چې له دوه توکو څخه یو دریم توکی لاس ته راځي. (د بیلګې په توګه په ګڼونو کې زیاتون یا ځل). یو یوځایزه عملیه له هر توکی څخه یو ټاکلی بل توکی جوړوي (لکه مربع یا د کوم ګڼ ریښه یا بهتره ریښه ویستنه).

۴ . ۱ . ۱ تعریف : د بول الجبر د هغو توکو یو ډیری دی ، د کومو لپاره چې دوه دوه ځایزې نخښلونی یا اپریشنونه (عملیې)،غوځی $\cap$ ، ټولنه $\cup$ او یوه یوځایزه عملیه ' کارول کیږي او په هغو کی دوه توکی 0 (په صفر یی په نخښه کوو) او 1 (په یوې باندې په نخښه کیږي) داسی راوتلي یا غوره شوي وي، چې د M د ټولو توکو a , b , c

لپاره لاندې اړیکې باور لري:

۱ - اسوشیاتیو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$$
$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$$

۲ - کموتاتیو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$a \cap b = b \cap a$$
$$a \cup b = b \cup a$$

۳ - رازغمنې یا راکښنی یا جذب قانونونه

$$a \cap (b \cup c) = a$$
$$a \cup (b \cap c) = a$$

۴ - دیستریبوتیو قانون

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$
$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

۵ - د صفر او یوې خویونه

$$a \cup 0 = a \ , \ a \cap 0 = 0$$
$$a \cup 1 = 1 \ , \ a \cap 1 = 1$$

۶ - د کمپلیمنت یا پوره کیدونکی خویونه

$$a \cup á = 1 \ , \ a \cap á = 0$$

دا اړیکي د بول د الجبر اکسیومونه هم بلل کیږي (د اکسیوم تعریف څما د شمیرپوهني کتاب کی ورکړ شوی دی) . موږ تر یوې اندازې زیات اکسیومونه ورکړل، څکه چی برخسیستمونه شته ، له کومو چی بیا دا نور اکسیو- مونه لاس ته راتللی شي.

په دې برخه کی ددې مینیمالسیستمونو کارونی یا استعمال باندې ځانونه نه مشغولوو، همدومره دلته مهم دی، چی ټول شمیر قوانین باور ولري.

که د توان یا پوتنځ ډیری P(M) په پام کی ونیول شي، د هغه د غوڅي ∩ (انګریزي meet)، ټولنه ∪ (join) او کملپلیمنت جوړونی سره او $\varnothing = 0$, $M = 1$ سره نو دا د ∩ پورته تعریف سره سم یو د بول الجبر جوړوي. دا کارول شوي سومبولونه یوونیز یا واحد نورم ته نه دي راوړل شوي. د ∩ لپاره ∧ هم کارول کیږي او د ∪ په ځاي ∨ او د á په ځاي $\bar{a}$ هم کارول کیږي.

۴ . ۱ . ۲ بیلګه : یو د بول الجبر باید تل یو صفر 0 او یو 1 (یوی) خوندي ولري. داکیدی شي ، چی یواځي د 0 او 1 څخه جوړ وي، چی دا یی د بول ساده الجبر دی. وي

دې 0 او 1 کوم په خوښه سومبولونه. نو په $B=\{0,1\}$ باندې عمليې $\cup, \cap, '$ په لاندې ډول تشريح کيږي:

$$0 \cap 0 = 0\,,\quad 0 \cap 1 = 0\,,\quad 1 \cap 0 = 0\,,\, 1 \cap 1 = 1$$
$$0 \cup 0 = 0\,,\quad 0 \cup 1 = 1\,,\quad 1 \cup 0 = 1\,,\, 1 \cup 1 = 1$$
$$0' = 1 \quad , 1' = 0$$

دلته په ساده توګه د بول د الجبر قوانين ازمايل کيدی شي.
له دې سره نو جوړښت يا سترکچر $(B, \cap, \cup, ')$ يو د بول الجبر دی د دوه توکو سره .

د بول الجبر راوړل شوو اکسيومونو ته يو بل مهم خوي رامنځ ته کيږي: که په همغه وخت کي اکسيومونه $\cup$ د $\cap$ سره او $\cap$ د $\cup$ سره او 0 د 1 سره بدل شي، په دې ګروپ کی هغه بل اکسيوم لاس ته راځي . وايو: په ګروپ کی ورکړ شوي اکسيو- مونه يو بل ته دوال Dual يا دوه ګونی دي.
د بول الجبر هر خوي کيدی شي ، چی له اکسيومونوڅخه لاس ته راوړل شي، او د بول الجبر د هرې وينا څخه کيديشي چی نومولي بدلونونه رامنځ ته شي، دا په دې مانا ، چی دوه ګونی وينا وې جوړې شي. « وينا دوګونی کيدنه ».دلته يوه رينښتيا وينا بيرته رينښتيا («د بول د الجبر يوه جمله ») وينا باندې

بدلیږي، ځکه چې د سیستم دوه ګونوالی ساتلی پاتی کیږي.
دا د بول د الجبرد دوه ګونی پرینځیپ متن دی: د هرې جملی د ثبوت سره د هغې جملی دوه ګونی هم ثبوت ده.

د بول د الجبر خویونه دې ورکړ شي او په حقیقت کي . د اکسیومونو څخه د لاس ته راوړنو په څیر .

۱ – باور لري $a = a \cap a$ او $a = a \cup a$ د بول د الجبر ټولو توکو a لپاره

اوبی: دی

$$a = a \cap 1 = a \cap (a \cup a') = (a \cap a) \cup (a \cap a')$$
$$= (a \cap a) \cup 0 = a \cap a$$

د $a = a \cup a$ لپاره ښوونه د دوه ګونوالی څخه لاس ته راځي .

۲ – د a کمپلیمنت a' د ورکړ شوو خویونو سره یواځنی ټاکلی دی، دا په دې ماناچي باور لري $a \cap c = 0$ او $a \cup c = a$ نو دی $c = a'$.

اوبي: لمړی دی

$$a' = 0 \cup a' = (a \cap c) \cup a' = (a \cup a') \cap (c \cup a') = c \cup a'$$

او د دې سره دوه ګوني هم $a' = c \cap a'$ دی.

له دې امله

$$a' = c \cap a' = c \cap (c \cup a') = c$$

دی . څه چی د ښوولو وو (لنډ: ځ ښ وو).

۳ – صفر 0 او یوی 1 په بول الجبر کی یواځنی ټاکلي دي،
دا په دې مانا چی دا یواځني تو کی دي، د هغو خویونو
سره، چی په ټکی ۵ کی ورکړ شوي دي.
اوبی : د یوه توکی n لپاره دې د بول د الجبر د ټولو توکوa
لپاره باور ولري $a \cup n = a$ او $a \cap n = n$. که د $a = 0$ لپاره
کیږدو، نو لاس ته راځي $0 \cup n = 0$.له بلی خوا هم $0 \cup n = 0$
او له دې امله $n = 0$ دی. د 1 لپاره اوبیونه د دوه ګونوالی
څخه لاس ته راځي.

۴ – باور لري $(a')' = a$ د ټولو توکو a لپاره. دا له $a' \cap a = 0$
او $a' \cup a = 1$ څخه لاس ته راځي او د کمپلیمنت د
یواځنوالی څخه.

۵ – د دې مورګان De Morgan قانون

$$(a \cup b) ' = a' \cap b' \quad \text{او} \quad (a \cap b)' = a' \cup b'$$

ثبوت : د دوه ګونپرینځپ له لارې بسیا کوي، که یواځي یوه له دې دوه ګونو ویناو څخه وښایو. دبیلګې په توګه کینه.

د دې لپاره لاندې شمیرقوانین کاروو:

$$(a \cup b) \cup (a' \cap b') = ((a \cup b) \cup a') \cap ((a \cup b) \cup b') =$$

$$= ((a \cup a') \cup b') \cap (a \cup (b \cup b') = 1 \cap 1 = 1$$

او

$$(a \cup b) \cap (a' \cap b') = (a \cap (a' \cap b')) \cup (b \cap (a' \cap b')) =$$

$$= ((a \cap a') \cap b') \cup ((b \cap b') \cap a') = 0 \cup 0 = 0$$

د دواړو مساواتځنځیرڅخه په ګډه لاس ته راځي،

چې $a' \cap b'$ د $a \cup b$ کمپلیمنت دی.

۶ – د اسوځیاتیو و کموتاتیو قوانینو او له

$$a = a \cup a = a \cap a$$

څخه لاس ته راځي: د غوځي (ټولنی) جوړولو نتیجه

په یوه توکو پای ډیرې کی، د لړپیرلپسی څخه خپلواک دی او له دې هم خپلواک دی، چې یو توکي یواځي یوځل او که یا زیات رامنځ ته کیږي. زیاتون نخښې ته ورته لیکل کیږي: $\bigcap_{i=1}^{n} a_i$ همداسی د $\bigcup_{i=1}^{n} a_i$

د ټولو $a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ لپاره، همداسی

د $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$ لپاره.

۷ – ډیستریبوتیو قانون هم ټولیز کیدی شي او په رینښتونی داسی

$$\left(\bigcup_{i\in I} a_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J} b_j\right) = \bigcup_{i\in I, j\in J}(a_i \cap b_j)$$

او

$$\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right)\cup\left(\bigcap_{j\in J} b_j\right) = \bigcap_{i\in I, j\in J}(a_i \cup b_j)$$

چیرته چی I او J پاي ایندکسډیري (پیژندډیري) دي

۸ – له $a\cap x = a\cap y$ او $a\cup x = a\cup y$ لاس ته راځی $x = y$

ښوونه : باور لري

$$x = x\cap(x\cup a) = x\cap(y\cup a) = (x\cap y)\cup(x\cap a) =$$
$$(x\cap y)\cup(y\cap a) = y\cap(x\cup a) = y\cap(y\cup a) = y$$

پای.

موږ دلته د بول الجبر ، لکه چی په پیل کی وویل شو، د یوه ذهني نظر له لارې تر څیړنی لاندې نیسو، په دې کی چی موږ د توکو په ډول (چی څه شی دی) کی خپله علاقه نه ګورو، بلکه یواځي دا علاقه لرو، چی له دې توکو سره څنګه شمیرنه

کيدی شي. له دې امله د بول الجبرونو M_1 او M_2 ترمنځ يو بييکتيوه ځيرونه داسې موجوده ده، چې د M_1 دوه توکو ټولنه (غوځي) د تنظيم شوو توکو ټولنه (غوځي) تنظيم دي، او د هر توکي کمپليمنت د ورسره تنظيم شوي توکی کمپليمنت دی، نو په دې توګه کيدی شي ، چې دواړه الجبرونه «سوچه شميريز» مساوي و ليدل شي. يو داسې بييکتيو ځيرونه $f : M_1 \rightarrow M_2$ لکه د مخه مو چې هم ګوته ورته نيولی ايزمورفيزم Isomorphismus نوميږي او دا راوړل شوي شرايط لنډ په لاندې ډول دي. د ټولو $a , b \in M_1$ لپاره باور لري:

$$f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$$
$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$$
$$f(a') = f(a)'$$

د دې سره په کيڼ لور $'$، $\cup$، $\cap$ د M_1 عمليې او په ښي لور د M_2 عمليې. نخښلونی يا کارونی دي.

د نور الجبرونو په څېر يا خلاف کيدی شي، چې په ټولو (پای) د بول الجبرونو باندې په ساده توګه يو د يوه پام يا نظر امکانات برابر شي. د داسې يوه پاملرنی ته دوه د بول الجبرونه بايد برابر وکتل شي، که د دوي ترمنځ يو ايزومور-

فيزم موجود وي، يعنی که دا ايزمورف وي. دا لاندې مهمه جمله باور لري، چی ثبوت لپاره يی په ليو (LIU 1977) حواله ورکوو .

۴ . ۱ . ۳ **جمله** : هر يو پای د بول الجبر د يوه پاي ډيري M د برخډيريو څخه جوړ د بول د الجبر سره ايزومورف دی . په ځانګړي توګه د يوه پای بول د الجبر توکو ګڼون تل د 2^n فورم يا ډول دی ، او هر دوه پاي د بول الجبرونه د برابر ډيرو توکو سره يو د بل سره ايزومورف دي.

که څه هم موږ د پاي بول الجبرونو سره سر او کار لرو، دا بايد په ګوته شی، چی په پورته جمله کی ورکړ شوي خويونه يا کرکتريي د ناپای ډيرو توکو ډيري لپاره باور نه لري . ناپای ډير د بول الجبرونه شته، کوم چی د ډيري د ټولو برخډيريو د الجبر سره ايزومورف نه دي. د دې لپاره چی ټولی ناپای ډير د بول الجبرونه کرکتريزه کړی شو، لاندې کليمو ته اړ يو. M دې يو ډيری وي. يو سيستم K د M برخډيريو ډيريبدن يا ډيريتن بلل کيږي، که K د A, B سره $A \cap B$ $A \cup B$ او $A \cap B'$ هم خوندي ولري.
د بيلګي په توګه ټول د تواندیری ډيريتن دی. K دې د

ډېري M برخډیریو یو ډیریتن وي، د $M \in K$ سره.
په K باندې کیدی شي بیا یو بول الجبر توضیح شي، په کوم کي چی $\cup$ د ټولنی ،$\cap$د غوڅی ، تشډیری $\emptyset$ د صفر ، یو ډیری M د یوې ډیری، 'A د $A \in K$ کمپلیمنت $M - A$ سره نیسی ، یعني دا ډیري تیوریتیکي کومپلیمنت. داسی یو الجبر ډیریبدن الجبر هم بلل کیږي او په ټولیزه توګه د M هر برخډیری خوندې نه لري. اوس دا لاندې جمله باور لري، چی د ثبوت لپاره دې
GRÄTZER(1977) وکتل شي.

۴ . ۱ . ۴ جمله : (د ستون Stone جمله) هر د بول الجبر د ډیریتن الجبر سره ایزومورف دی.

د بول د الجبر کرکتریزه کولو سره په اړوند ، کیدی شي چی د بول د الجبر سیده ځل ګټور وکارول شي یا استعمال شي.

۴ . ۱ . ۵ تعریف : V او W دې دوه د بول الجبرونه وي، چی د هغی بنستیز ډیري هم په V او W سره په نخښه کوو. نو دا د V او W سیده ځل $V \times W$ د بول الجبر دی د ټولو منظمو جوړو (v,w) په ډیري، چی $v \in V$

او $w \in W$ وي، د لاندي عمليو سره

$$(v,w) \cap (v_1,w_1) = (v \cap v_1, w \cap w_1)$$
$$(v,w) \cup (v_1,w_1) = (v \cup v_1, w \cup w_1)$$
$$(v,w)' = (v',w')$$

او د صفر توکی $(0,0)$ او د يوي توکي $(1,1)$ سره، چی د V او W همغه مساوي توکي دي.

د دې ښوونه دې د ګرانو لوستونکو دنده وي، چی وښايي، چی سيده ځل $V \times W$ په ريښتيا دبول الجبر دی.

اوس دې B د بول الجبر وي په دوه توکو باندې، يعني $B = \{0,1\}$ د ترونونو

$$0 \cap 0 = 0, \quad 0 \cup 1 = 1, \quad 1 \cup 1 = 1$$
$$1 \cap 1 = 1, \; 1' = 0, \; 0' = 1$$

سره. د B^n لاندې، دا n–ځله، د B دخپل ځان سره سيده ځل پوهيږو. د B^n توکی منظم n–ګونی دې له توکو $0, 1$ او د بول ترونونو کمپوننت ډوله تشريح شوي. دا په دې مانا چی:

$$(a_1, ..., a_n) \cap (b_1, ..., b_n) = (a_1 \cap b_1, ..., a_n \cap b_n)$$
$$(a_1, ..., a_n) \cup (b_1, ..., b_n) = (a_1 \cup b_1, ..., a_n \cup b_n)$$
$$(a_1, ..., a_n)' = (a_1', ..., a_n')$$
$$1 = (1, ..., 1)$$
$$0 = (0, ..., 0)$$

د بیلګي په توګه د $n = 5$ لپاره باور لري

$$(0,1,0,1,0) \cup (1,0,1,1,0) = (1,1,1,1,0)$$
$$(0,10,10) \cap (1,0,0,1,1) = (0,0,1,1,0)$$
$$(1,1,0,0,1)' = (0,0,1,1,0)$$

له دې بیلګي لیدل کیږي، چی په B^n کی ساده شمیرنه کیدی شي. له بلی خوا د B^n توکو ګڼون 2^n دی او د جملی ۴ . ۱ . ۳ هر د بول الجبر د 2^n توکو سره د B^n سره ایزومورف دی. د بول الجبر د څیړنی لپاره کیدی شي، چی دا د الجبر درس په B رالنډ کړي.

۴ . ۲ . د بول فنکشنونه او پولینومونه

مو ږد فنکشنونو لپاره، د تړونونو په تعریف پیل کوو، چی ارزښتڼیری یي د بول الجبر وي. دلته دې M یو په خوښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیری وي او V دې یو د بول الجبر. د دوه ځیرونو

$$f, g : M \longrightarrow V$$

لپاره لاندې عملیې ∩ ، ∪ تشریح کوو، د

$$(f \cap g)(x) = f(x) \cap g(x) \quad , x \in M$$
$$(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x) \quad , x \in M$$

سره ، او همداسې یوکمپلیمنتجوړښت د

$$f'(x) = (f(x))' \quad ,x \in M$$

سره.

د دې تعریفونو ښې اړخ پوره یا ټیك تعریف دی، ځکه چې $f(x)$ او $g(x)$ د V توکی دي او له دې امله ∩، ∪ موخه ور یا هدفمند دي. اوس په ساده توګه شمیرل کیږي، چې د ټولو د M په V کی ځیرونو ټولګه له دې سره یو د بول الجبر کیږي، چې د هغه صفر توکي د ځیرونه f ده، د $f(x)$ سره، ټول $x \in M$ او د هغی یوي توکي د ځیروني f له لارې ځخه د $f(x)$ سره، ټولو $x \in M$ دي.
یو ځانګړی حالت هلته لرو که ډیری M دV n–ځله د خپل ځان سره سیده ځل وي. موږ غواړو ټولی د V^n ځیرونی په V کی د $A_n(V)$ سره په نخښه کړو او دا $A_n(V)$ د n– ځایزې د بول فنکشنونه په V باندې نومو یا بلل کیږي.

هره د f څیرونه له $A_n(V)$ هر n–ګونی $(v_1,...,v_n)$ چې د V له n توکو څخه جوړ وي، د V په یوه توکی $f(v_1,...,v_n)$ تنظیموي. د دې څیرونو لاندې یې ثابتې څیرونې او پرویکشنونه د ځانګړو ماناو یا اهمیت دي. یوه ثابته څیرونه د ټولو $(v_1,...,v_n)$ لپاره همغه فنکشن ارزښت لري. یو i–ام پرویکشن x په لاندې توګه تعریف دی

د ټولو $(v_1,...,v_n) \in V^n$ لپاره $x_i(v_1,...,v_n) = v_i$,

یادونه : موږ دا ستونځې لرو، چې د شمیرپوهنې لیکنه کې کله کله د کیڼ وښی لور ته او بیا بیرته له ښي وکیڼ لور ته لوستل کیږي، نو کیدی شي ، چې داپورته داسی هم ولیکل شي: د ټولو $(v_1,...,v_n) \in V^n$ لپاره

دا دا مانا لري چې : څیرونه x_i (داهم تر یوې اندازې ورسره نا بلد کار دی، چې فنکشن په x_i ښایو، خو فکر کوم، چې کومې ستونځې به د دې سره مل نه وي) هر n–ګونی د هغه په i– ام کمپوننت تنظیموي. له ثابتو څیرونو او پرویکشنونو یا پریوستونونو د ∩، ∪ ، / ' عملیو. نخښلونو یا کارونو په مرسته یوه ځانګړې n–ځایز د بول فنکشنونو، مهم ټولګی د بول پولینومونه جوړي.

۴ . ۲ . ۱ **تعریف** : هره څیرونه $f : V^n \longrightarrow V$ ، کومه چی په $A_n(V)$ د پاي زیاتو د عملیو $\cap , \cup , '$ کارونو یا استعمال څخه، له ثابتو او پرویکشنونو، لاس ته راوړي، د بول n - ځایز پولینوم فنکشنونه بلل کیږي.

۴ . ۲ . ۲ **بیلګه** : که ثابت فنکشن په ساده توګه د هغه د ارزښت سره وښایو، داپه دې مانا چی د V د یوه توکی په څیر ، نو

$$(a \cap x_1) \cup (b \cap x_2 \cap x_3 \cap x_4) \cup (x_1 \cap x_2)'$$

یو د بول پولینومفنکشن $P : V^4 \longrightarrow V$ انځوروي: دکوم لپاره چی باور لري

$$P(v_1,v_2,v_3,v_4) = (a \cap v_1) \cup (b \cap v_2 \cap v_3 \cap v_4) \cup (v_1 \cap v_2)'$$

دلته a,b د V په کلکه ځاي په ځاي توکی دي.

یو د بول پولینوم فنکشن د یوې افادي له لارې کره ټاکلی دی، چی له ثابتو (له V څخه) او پرویکشنونو x څخه د ' ، $\cap$ ، $\cup$ له لارې جوړ وي. داسی یوه افاده د بول پولینوم بلل کیږي او دا یو د شمیرنی قانون د فنکشن ارزښت ټاکنی یا تعین لپاره راکوي، که د x لپاره i –ام

کمپوننت يو n–ګونی له V^n څخه کينښوول شي. دا شميرنه په رابنديزه توګه په V کی باور لري او دا توکي $P(v_1,...,v_n) \in V$ راکوي. د پولينوم (= افاده) او په دې پورې اړوند پولينومفنکشن(=څيرونی) ترمنځ بايد ټيك توپير وشي. اړيکی « پولينوم» د دې بول د فنکشن لپاره دا لاس ته راکوي، چی له $x_1,...,x_n$ او ثابتو څخه د ' ، ∩ ، ∪ سره ټيك راجوړي دي يا بهتره په دې باندې جوړې دي، لکه څنګه نور رييل پولينومونه د نښلونو + , * او − سره، چی نمونه يی ده

$$p(x) = a_0 + a_1x + ...+a_nx^n$$

دلته x له يوه بنسټيزې څخه دی او a_i د ټولو $i \in I$ لپاره يو رييل ګڼ دی.

دوه د بول مختلف پولينومونه په کوم کي چی x او کومی ټاکلی ثابتی، او ' ، ∩ ، ∪ کړی شي ، چی هغه پولينومونه وټاکی: دبيلګی په توګه د $(a \cap x)' \; x \cup$ او $x \cup (a' \cup x')$ لپاره همغه حالت دی. که دوه داسی پولينومونه له مخه ورکړ شوي وي، نو مهمه ده چی وڅيړل شي يا پريکړه په وشي، چي ايا د دوې سره برابر فنکشنونه مساوي دي. دا داسی پيښيږی، چی د هر پولينو–

مفنکشن f لپاره یو نورمالفورم N(f) د یوه ټاکلی افادې په څیر داسی ورکول کیږي، چی د $f_1 \mid= f_2$ لپاره $N(f_1) \mid= N(f_2)$ باور ولري. برسیره پردې یوه تګلار ورکول کیږي، دکومې سره چی هر پولینوم په نورمالفورم ترانسفورمي کیدی شي. نو بیا دوه پولینومونه ټیك هلته همغه پولینومفنکشن دی، کله چی د هغوی نورمالفورم یو له بل سره پریوزي. دا پروګرام اوس غواړو پلی کړو.

۴ . ۲ . ۳ تعریف: ویل کیږي، چی یو n– ځایزه پولینوم په دیسیونکتیو نورمالفورم (disjnktiver Normalform) یا نورمالبڼه دی، که دا د لاندې فورم یا بڼی وي:

$$P = \bigcup_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} a_{i_1 i_2 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \dots \cap x_n^{i_n}$$

د دې سره $\in V$ $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ دی، د ټولو $(i_1 , i_2 , \dots , i_n)$ لپاره، هر $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ یو n–ګونی دی له ۱ او ۱– سره، او ټولنه یی په دې ټولو 2^n n –ګونو غزول کیږي، چیرته چی x_i^1 د x_i او x_i^{-1} د x_i' لپاره ځاي په ځای یا ځایول کیږي.

په ورته قانونيت يا قرارداد سره د هر پولينوم P کونيو-
نکتيو نورمالفورم بلل کيږي، دلاندې څېنې سره:

$$P = \bigcap_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$$

که يو ځانګړی ديسيونکتيو نورمالبڼه وليکل شي، نوټول
غړي به د ديسيونکتيو نورمالفورم سره $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$ له
ليکلو پرېښوول شي يا صرف نظر به پرې وشي، ځکه چې
دا په نتيجه کوم تاثير نه پرېباسي. په ورته توګه دا د ديسيو-
نکتيو نورمالفورم لپاره باور لري، که $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$ وي.

۴ . ۲ . ۴ بيلګه : يو پولينوم په ديسيونکتيو نورما-
لفورم دی (د $a,b,c,\ldots \in V$ سره):

$$(a \cap x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (b \cap x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup$$
$$(c \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3) \cup (d \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

لاندې يو کونيونکتيو نورمالفورم دی:

$$(a \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3) \cap (b \cup x_1 \cup x_2' \cup x_3) \cap$$
$$(c \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3') \cap (d \cup x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap$$
$$(e \cup x_1' \cup x_2' \cup x_3')$$

۴ . ۲ . ۵ جمله : هر د بول پولینومفنکشن
$P : V^n \longrightarrow V$ لپاره ټیك یو دیسیونکتیو نورمالفورم موجود دی. نو په دې توګه ټیك یو د بول پولینوم لاس ته راځي، کله چې ټول دیسیونکتیو نورمالفورمونه جوړ شي. په همدې توګه (دوه ګوني) ویناد کونیونکتیو نورمالفورم لپاره هم باور لري.

د دې جملې د ښوونې څخه هم دلته تیریږو، دا په نورو ادبیاتو کې شته(دا دې ګران لوستونکي په پام کې ونیسي، چې دا به ځما پوره وخت ونیسي که دا هرڅه راوګورم. ځما هدف همدومره دی، لکه چې په نورو ځایونوکې مې هم ګوته ورته نیولې، دا بنسټیز څه راټول کړم)
د نورمالفورم د څیړلولپاره کله کله لاندې خویونه (قاعدې) ګټورې دي، کومې چې په نورمالفورم کې د $V \ni 0,1$
« ځایونو یا ایښوونو » له لارې لاسته راوړل کیږي. څکه چې د بیلګې په توګه $x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \dots \cap x_n^{i_n}$ یواځې د n -ګونو لپاره له $V \ni 0 , 1$ نا مساوي 0 دي(په ریښتونی مساوي په 1)،
په کوم کې ، چې $x_j = 1$ د $i_j = 1$ لپاره او $x_j = 0$
د $i_j = -1$ لپاره دی، یعنی د دې n-ګونی
$(1^{i_1}, 1^{i_2}, \dots, 1^{i_n})$ لپاره .

قاعده ۱ : که دا لاندې

$$\bigcup_{(i_1, \ldots, i_n)} a_{i_1 \ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$$

د بول د پولینوم فنکشن $P \in A_n(V)$ دیسیونکتیو نورمالفورم وي، نو د $1^1 = 1$, $1^{-1} = 1' = 0$ سره باور لري

$$a_{i_1 \ldots i_n} = P(1^{i_1}, \ldots, 1^{i_n})$$

د ټولو $(i_1, \ldots, i_n)$ لپاره.

نو د بیلګې په توګه د $n = 3$, لپاره دی:

$$a_{1,-1,1} = P(1,0.1), \quad a_{-1,-1,-1} = P(0,0,0),$$
$$a_{1,1,1} = P(1,1,1)$$

ددې اړیکو وروسته د P د دیسیونکتیو نورمالفورم د ټاکلو لپاره بسیا کوي، که 2^n د P فنکشن ارزښتونه په ټولو n–ګونو کی له 0 او 1 (د V څخه) راپیدا کړو. لیدوړ دا لاس ته راوړنی د $n = 2$ لپاره د P دیسیونکتیو نورمالفورم په لاندې توګه راکوي:

$$P = (P(1,1) \cap x_1 \cap x_2) \cup (P(0,1) \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$(P(1,0) \cap x_1 \cap x_2') \cup (P(0,0) \cap x_1' \cap x_2')$$

د دې سره د دیسیونکتیو نورمالفورم لپاره دوه ګوني نتیجه

په لاندې توګه ده:

قاعده ۲ : که

$$\bigcap_{i_1, \ldots, i_n} a_{i_1 \ldots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$$

د بول د پولینومفنکشن P دیسیونکتیو نورمالفورم وي،
نو د $1 = 0' = 0^{-1}$, $0^1 = 0$ سره باور لري

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = P(0^{i_1}, 0^{i_2}, \ldots, 0^{i_n})$$

د بیلګي په توګه د $n = 3$ لپاره دی :

$$a_{1,1,-1} = P(0,0,1) \quad \text{او} \quad a_{-1,-1,1} = P(1,1,0)$$

پخوا له دې چې موږ د نورمالفورم ترانفورمیشن لپاره تګلار روښانه کوو، یا لیکو، نو د مختلفو څیرو ګڼون(تعداد یا شمیر) دې ورکړ شي. دلته طبعاً ټول الجبرونه پای دي.
که V ټیك $2^k = m$ توکي ولري، نو $A_n(V)$ لکه چې پوهیږو $m^{(m)^n}$ توکی لري، ځکه چې V^n ټیك m^n توکی لري. د بول پولینومفنکشن ګڼون د دې په څټ m^{2^n} دی، کوم چې سملاسی د نورمال فورم په څیر انځورونی څخه لاس ته راځي، ځکه چې د دلته 2^n ځلوونی یا ضریبونه $a_{i_1 \ldots i_n}$

په خوښه د m توکو سره (له V څخه) ځاينيونکی يا ځاي په ځاي کيدی شي. که $m > 2$ وي، نو په ټوليزه توګه کم پولينومفنکشنونه موجود دي نسبت و څيرونو ته. که $m = 2$ وي، کوم چی د کارونی يا استعمال لپاره مهم حالت انځوروي، نو بيا دواړه ګڼونه مساوي دي، په نامه 2^2 سره . له دې لاس ته راځي

۴ . ۲ . ۶ جمله: که $B = \{0,1\}$ دوه توکيزه د بول الجبر وي، نو هر n – ځايز د بول فنکشن ، يو د بول پولينومفنکشن په څير انځوروړدی.

اوس د ديسيونکيو نورمالفورم د راپيداکولو تګلار و يوه پولينومفنکشن P ته، په P باندې لاندې پلونه کارول کيږي:

۱ – د دې مورګان de Morgan قاعدې د استعمال له لارې ټول کمپليمنت ' جوړښتونه ترلي x_i ته راوړل کيږي، همداسی ثابتو ته راوړل کيږي.

۲ – د دسيتريبوتيو قانونه کارونی يا استعمال سره سم P د غوڅيو ټولنی ته راوړل کيږي. په دې فورم کی په ټوليزه توګه ځنی «زياتووني» (د x_i او x_i' غوڅي دي) يو څو x_i ورکيږي، مګر د هر i لپاره په يوه زياتووني کی

زیات تر زیاته یو له x_i او x_i' رامنځ ته یا راڅرګندیږي.

۳ - که د دیسیونکشن په یوه زیاتون کی یو x_i ورك شي، نو $x_i' \cup x_i$ په دې زیاتون کی د یوه «فاکتور» په څیر ورزیاتیږي(دا اړوند پولینومفنکشن نه تغیروي، ځکه چی $x_i' \cup x_i$ تل 1 ورکوي)

۴ - په دې داسی تغیر شوې زیاتوونی باندې تر هغی پورې دیستریبوتیو قانون کارول کیږي یا استعمالیږي، تر څو چی بیرته د غوڅیو ټولنه رامنځ ته شي یا راپیدا شي. دا د برابرو زیاتونونو د ټولګی (دا په دې مانا، چی چیرته چی همغه x_i کمپلیمنت شوی وي او یا نه وي کمپلیمنت شوی) او دیسیونکتیو نورمالفورم ترتیبوو (بیرته د دیستریبوتیو قامون د کارونی لاندې) ، که چیرې ممکن دا ورك زیاتوونی(د x_i او x_i' غوڅی) د ځلوونو 0 سره تکمیل شي.

دا روښانه ده، چی د ټول هغه بنه اړونی یا فورمبدلون سره، چی همغه مطلوب پولینوم پورې اړه لرونکی پولینوم فنکشن، همغه پولینومفنکشن لکه پخپله P دی. په ریښتونی سره له دې امله د پولینومفنکشن نورمالفورم وP ته لاس ته راوړو.

۴ . ۲ . ۷ **بیلګه :** P دې په V باندې په لاندې توګه دوه ځایز پولینومونه وي

$$P = ((a \cap x_1) \cup (b \cap x_2)')' \cup (x_1 \cup b)'$$

د $a,b \in V$ سره

لمړی پل :

$$((a' \cup x_1') \cap (b \cap x_2)) \cup (x_1' \cap b')$$

دوم پل :

$$(a' \cap b \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1')$$

دریم پل

$$(a' \cap b \cap (x_1 \cup x_2') \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b' \cap x_1' \cap (x_2 \cup x_2'))$$

څلورم پل

$$(a' \cap b \cap x_1 \cap x_2) \cup (a' \cap b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$$

د

$$(b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) = (1 \cap x_1' \cap x_2)$$

له امله، د نورمالفورم په بڼه لاس ته راځي:

$$((a' \cap b) \cap x_1 \cap x_2) \cup (1 \cap x_1' \cap x_2) \cup (0 \cap x_1 \cap x_2') \cup$$
$$\cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$$

لوستونكي دې دا نتيجى د قاعدې ۱ سره و ازمايي.

په پای کي دې n – ځایز ځانګړی د بول فنکشنونه په $B = \{0,1\}$ باندې وڅېړل شي، کوم چی همدا اوس د n– ځایز پولینومونو له لارې ، د مخه تیرې جملی سره سم راونیول کیدی یا لاس ته راتلی شي.
که P یو داسی پولینوم وي، نو P هر n–ګونی د 1 , 0 یا په 0 او یاپه 1 تنظیموي. په دیسیونیکتیو (کونیونکتیو) نورمالفورم کی ځلووني هم یا 0 او یا 1 دي او لاندې پریکړه کوو: په دیسیونکتیو نورالفورم کی ټول زیاتووني یانی $x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n} \cap a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ د ځلونو $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$ سره پرېښوول کیږي او ځلوونی 1 نه لیکل کیږي. په کونیونکتیو نورمالفورم کی به ټول فاکتورونه (دا اوس ټولنه $x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$ ده) د ځلونو $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$ سره پرېښوول کیږي یعنی صرف نظر پري کیږي او ځلوونی 0 نه لیکل کیږي. دا چی 1 او 0 د $\cup$ او $\cap$ لپاره ناپیلی یا بیتاثیره توکی دي، نو د هغه نورمالفورم باندې لیکلي پولینوم کی تغیر نه راځي . په هر حالت بیا

ثابت فنکشن د 0 ارزښت سره (داسی ليکوړ دی)
ديسيونکتيو نورمالفورم نه لري. او ثابت فنکشن د
ارزښت سره کوم کونيونکتيو نورمالفورم نه لري.

۴ . ۲ . ۸ بيلګه: د لته دې ۳ -ځايز فنکشن

$P: B^3 \longrightarrow B$ د لاندې جدول سره ورکړ شوی وي:

x_1	x_2	x_3	P
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

د قاعدې ۱ سره سم د P ديسيونکتيو نورمالفورم د
لاندې سره برابر دی.

$$(x_1 \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3) \cup$$
$$\cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

ديسيونکتيو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت ۱ لپاره يو
زياتوونی خوندي لري، په کوم کی چی x_i ولاړ دی ،

که $x_i = 1$ وي، او x_i' ولاړ وي، که $x_i = 0$ وي(په ورته توګه n− ګونی $(x_1,x_2,...,x_n)$ د فنکشن ارزښت 1 سره) . که x_i د یوه شرط په څیر ونیول شي$(x_i = 1)$ نو بیا « شرطونه پوره دی » بلل کیږي، $x_i = 0$ په همدې توګه « شرطونه نه دي پوره» بلل کیږي) ، نو په دې توګه دیسیونکتیو نورمالفورم د ټول کمبینیشنونو یو لیستونه یا یوجوړشوی لیست راکوي د ټولو n شرطونو x_i سره ، په کومو کی چي 1 د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي: $x_1 \cap x_2 \cap x_3'$ په همدې توګه x_1 او x_2 پوره دې او x_3 پوره نه دی.

د قانون ۲ د کونیونکتیو نورمالفورم P د لاندې سره برابر دی :

$$(x_1' \cup x_2 \cup x_3') \cap (x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap (x_1 \cup x_2 \cup x_3')$$

کونیونکتیو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت 0 لپاره یو فاکتور خوندې لري، په کوم کی چي x_i ولاړ دی یا ځای دی، که $x_i = 0$ وي او x_i' ځاي په ځاي وي ، که $x = 1$ وي (په همدې توګه n − ګونی $(x_1 , ...x_n)$ له B^n څخه د فنکشن ارزښت 0 سره) . کونیونکتیو نورمالفورم پس د کمبینیشن د شرطونو یو لیست جوړونه

ده، د کومو لاندې چې 0 د فنکشن ارزښت په څير لاس ته راځي : $x_1' \cup x_2 \cup x_3'$ په دې مانا دې، چې x_1 يا x_2 پوره دي او يا x_3 پوره نه دی.

په الجبر $A_n(B)$ کی د $A_n(B)$ څخه ديوه د مخه ورکړ شوي پولينوم فنکشن P کمپليمنت 'P څنګه ټاکل کيږي؟
د ورکړ شوې قانونمندی له مخی د دې لپاره په ساده توګه P په يوه ديسيونکتيو نورمالفورم انځوروي، بيا نو 'P ټيك د غوڅيو ټولنه ده، کومه چې د P په نورمالفورم کی نه رامنځ ته کيږي(يعنی 0 ځلوونی لري).
په ورته توګه د ديسيونکتيو نورمالفورم لپاره هم مخ ته تللی شو.

۴ . ۲ . ۹ بيلګه : د اخرنی بيلګی څخه د پولينوم فنکشن P لپاره د 'P ديسيونکتيونورمالفورم په لاندې توګه ورکړ شويدی

$$(x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3)$$

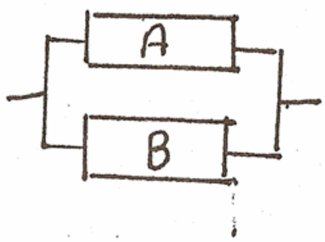
پام دې وي، چې $(p')' = P$ دی او د دېمورګان قانون له مخی د يوه ديسيونکتيونورمالفورم کمپليمنت کونيو- نکتيو نورمالفورم دی، نو ګورو، چې د د ديسيونکتيو

نورمالفورم P' ځخه کونیونکتیونورمالفورم P د کمپلیمنت دجوړولو له لارې لاس ته راوړي،

۴ . ۳ سویچ الجبر یا برېښنا جیریان الجبر

په برېښنايي یا برقي سرکیتونو (Schlatkreise (En. circuit (یا برېښناجیریانکړی یا په ساده توګه :برېښنادوران) کی سویچ د برېښنا اړیکو یا برېښنا تړونونو کی، د وازولو او بندولو لپاره دنده په غاړه لري. موږ دلته دوه ګوني دوه اړیکیز سویچونه تر ځیرنی لاندې نیسو، کوم چی په بند حالت کی برق جیریان په دواړو لورو ممکنوي. د سویچ حالت کیدی شي بند یا واز وي، یعنی ټیك دوه ارزښتونه نیولی شي. واز سویچ سره ارزښت 0 تنظیموو او بند تړلي سویچ سره ارزښت 1 تنظیموو، داسی چی 0 په دې مانا دی ، چی«برق نه شته یا برق جریان نه لري» او 1 دا مانا لري، چی« برق جریان لري» . دلته 0,1 د سویچ ارزښتونه هم بلل کیږي.

کیدی شي، چی سویچونه په زیاتو ډولونو یوه سرکت ته سره یوځای کړی شي. دلته خورا مهم یی هغه سرکیټري circuitary دی، چی د پایډیرو غبرګسرکیټریو یا همداسی سیریالسرکیټریو په ځیر جوړ شوي وي. په ټولیزه توګه سویچونه هغه جوړښتونه وي ،کوم ، چی«واز» یا « بند یعنی تړلی» کیدی شي.



ځیره

که A او B دوه سویچونه وي، نو غبرګسرکیټېري، لکه په پورته شېره کی انځور شوی په کار واچول شي، او دا به د A v B سره په نخښه کیږي.

په څرګند ډول A v B یو سویچ ارزښت 1 لري، که کم له کمه یو له دې سویچونو څخه واز وي او ارزښت 0 لري، که دواړه سو- یچونه ارزښت 0 ولري. کیدی شی د سویچ ارزښتونو لپاره پخپله غبرګ سرکیټېري (یا شاید په انګریزي سرکیټ وبېل شي) داسی ولیکل شي

$$0 \vee 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 , 1 \vee 0 = 1 , 1 \wedge 1 = 1$$

کیدی شي ، چی $A \vee B$ د یوځاي اآیښوول شوي سویچ په څیر وکتل شي، چی دا د A او B په اړتیا یا په واك برقجریان بهیږي یا برق جایان لري او که یا نه بهیږي یا نه پرېږدي.

د A او B سویچونو زیریالسرکیټېري $A \wedge B$ د A او B یو بل پسی یعنی په پرلپسی توګه ایښوونی یا ځاي په ځاي کونی څخه منځ ته راځي، لکه په څیره کی چی انځور شوي.

سرکیټ یا برېښنادوران $A \wedge B$ ټیك او ټیك هلته ارزښت1 لري، که دواړه سویچونه ارزښت 1 ولري او په غیر له دې ارزښت 0 . لنډ : $0 \wedge 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$

او $1 \wedge 1 = 1$.

دلته هم $A \wedge B$ یو رایوځاي شوی سویچ دی.

ددې سره ترنی $A \vee B$ او $A \wedge B$ د سویچ لپاره همغه فورمالی قاعدې ډکوي یا پوره کوي، لکه د ویناو لپاره د سمسوځ له پوهی ورسره بلده په $\vee$ او په $\wedge$ راوړل شوو

تړونونو کې. هلته د يوې وينا نه والی هم موجود دی.
که $\vee$ ، $\wedge$ د سويچ ارزښتونو 1 , 0 په څير راونيسو، نوهغه
په باندې شميرقوانين د $\vee$ او $\wedge$ ديوه بول الجبر لپاره .
په { 0 , 1 } پوره دي. هلته کومپليمنت هم په واک کی لرو.
دا کليمې جوړونی د سويچ لپاره هم يوه موخه لري: د 'A
سره يو سويچ په نخښه کوو، کوم چی تل يو و A ته په څټ
ارزښت لري، د کوم سره، چی موږ په تخنيکي ريښتينوالی
يا رياليزه باندې ددې

خيره

غوښتنو (لکه د مناسبو چالانماشين له لارې) په غم کی نه
يو.'A د A نيگيشن يا نفي هم بلل کيږي. د سويچ ارزښت
لپاره دا دامانا لري، چی 0 = '1 , 1 = '0 . په دې توګه سويچ
ارزښتونه د عمليو يا کارونو $\vee$، $\wedge$ ، ' سره يو دوه توکيزه
بول الجبر جوړوي.

۴ . ۳ . ۱ تعريف : يو زيريالغبرگ سرکيټړي دپای ډيرو
سويچونو څخه جوړيږي د پای زيات فورمال عمليو ، ، '
د کارونی يا استعمال سره. په داسی سرکيټ کی دوه سويچونه،
کوم چی همغه د سويچ ارزښتونه لري په همغه يا برابر سومبول
سره په نخښه کيږي.

ټيك داسی تعريفولی شو: هر سويچ يو زيريالغبرگ سرکيټړي
جوړوي. که S_2 ، S_1 زيريالغبرگ سرکيټړونه وي(يعنی سره

رایوځاي اینښوولي سرکیټېري یا سویچونه) ،
نو $S_1 \vee S_2$ ، $S_1 \wedge S_2$ او 'S هم زیریالغبرګ سرکیټېرونه دي.
هر زیریالغبرګ سرکیټېري په ټولیزه توګه زیات پیچلی جوړ شوی سویچ دی، چې د «برخسویچونو»ځاینیونی څخه په واکوالی کی یا په اړه، واز (ارزښت 0) یا تړلی (ارزښت 1) دی. له دې امله کیدی شي، چې بیرته دوه سرکیټېونه د $\wedge$ او $\vee$ له لارې سره وتړل شي. کیدی شي، چې موږ لنډ له سرکیټېونو یا سرکیټېریو څخه وغږیږو.
د یوه زیریالغبرګ سکریټېري S د سویچ د هر ځاي نیونی لپاره د یوه ټاکلی سویچ ارزښت ټول سرکیټېري لاس ته راکوي ، په دې اړوند، چې ایا د دوي ترمنځ بریښنا بهیږي (جریان لری) او که نه. پس وي دي $A_1, ..., A_n$ د پورته تعریف سره سم د سرکیټ $S(A_1,...,A_n)$ سویچونه ، د کومو سره چې A_i زیات واره جوړیدی شي. د سویچونو $A_1,...,A_n$ هر ځاینیونه د 1 , 0 د یو n–ګونو سره برابر دی او د S له لارې یا د S سره به دا n–ګونی یا 0 او یا 1 د S په سویچ ارزښت باندې تنظیمیږي. په دې توګه سرکیټ S یو n –ځایز د بول-فنکشن f_S په دوه توکیز د بول په الجبر $B=\{0, 1\}$, $f_S : B^n \longrightarrow B$ تعریفوي(دې ته دې دلته هم پام وي او داسی نور ورته لیکنو ته ، چی دا د لاتین تورو لیکنی له کیڼ وښی لوز ته لوستل کیږي، په دې ګران لوستونکی پوهیږي، چی یادونی ته اړتیا نه شته،خو زما زړه نه ودریده) . دلته f_S په سرکیټ S اړه لرونکی

سویچ فنکشن بلل کیږي. اوس څنګه کیدی شي، چی سرکیټ په $A_n(B)$ کی د سرکیټري لپاره د $\cap$، $\cup$، $'$ کاروني یا عملیي وکارونه واضح کړای شي؟ اوس دې S,T دوه سرکیټونه وي، له سویچونو A_i څخه د سویچفنکشنونو f_T , f_S سره، نو کیدی شي، چی له S , T څخه هم زیریالسرکیټري $S \wedge T$ او هم یو غبرګسرکیټري $S \vee T$ جوړ شي، پوره و یوګونو سویچونو ته ورته یا لکه همغسی لکه یو ګوني سویچونه . دا نو اوس روښانه ده، چی $f_T \cap f_S$ د $S \wedge T$ سویچفنکشن دی او $f_S \cup f_T$ د $S \vee T$ سویچفنکشن دی. بالاخره f_S' سویچفنکشن دی و سرکیټ S' ته ، کوم چی تل و S ته مخامخ– یا په بل عبارت په خټ سویچ ارزښت لري.

۴ . ۳ . ۲ تعریف : دوه زیریالغبرګ سرکیټري S او T و همغو سویچونو $A_1 , A_2 , ..., A_n$ ته، ایکویوالنت یا همغه ارزښتیز بلل کیږي، که دا همغه سویچفنکشن ورکړي، دا په دې مانا چی که د هغو سویچفنکشنونو f_S او f_T لپاره باور ولري $f_T = f_S$.

د استعمال یا کاروني د لیدټکي څخه دا تعریف موخور (همدفمند) دی، ځکه چی لمړی علاقه مو د سویچفنکشن سره ده، یعني د سرکیټ ځاننیوني ته ده او کم د هغه دننني جوړښت ته.

د سرکیټونو ترمنځ په دې پورته ورکړ شوي تعریف کی روښانه شوی اړیکی په رښتینی برابرارزښته اړیکی دی، په داسی

حال کی چی دې برابرارزښتتولگی پورې تړل سرکیټونه اړه لري یا په هغه ټولگی کی دي، د همغه سویچفنکشن سره. له دې سره د سرکیټ ځیرنه د بول الجبر په ځیرنه بیرته واړول شوه او په دې توگه شمیرپوهنیزو متودو یا لارو ته لار ,ور جوړه یا ور وازه شوه، لکه په مخته تیره برخه کی چی ودیزه شوې وې.

په سرکیټري تیوري(Swiching Theory) او همداسی په ټولیزه توگه په سرکیټ تیوري کی دوه غوره پرابلمونه دا لاندې دي:

اول) د ورکړ شوي سرکیټري شننه یا تحلیل او

دوم) د پلټونکی سرکیټري سینتیز Synthese .

په شننیز حالت کی یو سرکیټري S د مخه ورکړ شوې ده او د هغه سویچفنکشن باید راپیدای شي یا غوښتل کیږي. د دې لپاره د S د هر سویچ $A_1;A_2,...,A_n$ د سرکیټري S لپاره د سویچ ارزښت باید کره وټاکل شي. کیدی چي اوس S په $A_1,A_2,...,A_n$ کی (د $x_1,x_2,...,x_n$ په ځای) باندې د بول د پولینوم په ځیر انځور شي په همدې توگه یا په ورته ډول د S جوړونه په ۸.۷ ' سره له $A_1,A_2,...,A_n$ څخه . له دې پولینوم څخه یا سیده د فنکشن ارزښت شمیرل کیږي او یا په هغو د دواړو نورمالفورمونو څخه په یوه ترانفورمي کیږي، له کومو چی بیا فنکشن په ساده توگه لوستل کیږي.

۴ . ۳ . ۳ بیلگه : لاندې سرکیټ S دې د سویچونو A , B , C سره مخ ته ږوت وي، څرنه دې وکتل شي په

ورته توګه د بول پولینوم په دې توګه دی

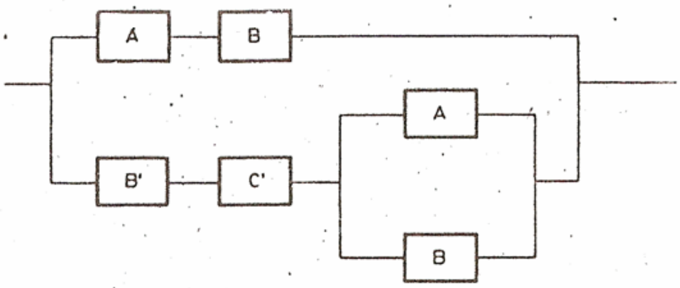
$$(A\wedge B)\vee(B'\wedge C'\wedge(A\vee B))$$

دا په دیسیونکتیو نورمالفورم اړوو:

$$(A\wedge B)\vee(A\wedge B'\wedge C')\vee(B\wedge B'\wedge C)$$

$$(A\wedge B\wedge(C\vee C'))\vee(A\wedge B'\wedge C')$$

$$(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge C')\vee(A\wedge B'\wedge C')$$



د نورمالفورم (اخرنی لیکه) سملاسی د S ارزښت جدول لاس ته راځي :

A	B	C	f_S
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

تیک د دې په څېر د سینتیز پرابلم رامنځ ته کیدنی سره د یوهسرکیپ د پرابلم رامنځ ته کیدنه ده. د لته دې د سویچفن- کشن f ورکړ شوی وي، او د دې سویچفنکشن رښتیاکیدونکی

یا ریالیزه کیدونکی سرکیټري دپیدا شي. دا پرابلم یواځنی ټاکلی اوبی یا حل نه لري او امکانات شته، چی د همغه موخی لپاره جګ اوبی ولټول شي. یو په هر صورت یواځي تیوریکي مانا لرونکی اوبی سملاسی ورکول کیدی شي. که ارزښت جدول پیژندل کیږي، نو کیدی شي ، چی د دیسیونکتیو نور- مالفورم ولیکل شي او د هغي سره سم یو سرکیټري جوړ کړی شي. په دې سرکیټري کی مګر د دې رامنځته کیدونکی ګټون هر د سویچ په ټولیزه توګه نازغموړ یا بهتره بي وعدي وړ لوي وي، دا په دې مانا، چی تخنیکي رینښتینوالی به یی زیات قمته وي. دلته یو سرکیټري د کمو سویچونو سره لټول کیږي، چی هغهٔ د مخه ورکړ شوی سویچفنکشن رینښتینی کوي. د جوړولو قمت یا مصرف باندې یي یواځی د سویچونو ګټون تاثیر نه لري،بلکه جوړونه هم او همداسی د سرکیټ سکترکتور یا جوړښتډول، د زیاتو مختلفو قمتفنکشنونو له مخی پاملرنه ورته شي. داد کمون پرابلم نسبی تاونی کیدی شي حل شي. د دې پرابلمونو حل یا اوبی د بیلګي په توګه د Kohavi 1970 په کتان کی ورکړ شوی دی. د سرکیټونوکارونه د مختلفو کارخانو په چا- لانولو کی د خورا لوي اهمیت دي: په مرکزګرمی، خطرزنګ، کنترولخونوکی او داسی نور. یوګوني سویچونه په دې کی ټاکلی پیښي ، حالتونه ، او شرایط په ګوته کوي له کومو، چی د هغو ځاي مربوط دی یا اړه لري. موضوع هم دلته را لنډوو او په همدې لوستلشوو بسیا کوو.

۵ الجبرونه

یو څو بنسټیزې کلیمې

لومړی موخه مو دا ده، چې د دې کتاب د الجبر بنسټیزو کلیمو په څېړلو پیل وکړو، چې موږ دا په نامه ټولیز الجبر، یا لنډ الجبر بولو. برسیره پردې دلته درې مهمې جوړښتیز کلیمې پېژندل کیږي یا معرفي کیږي، چې د هغو په مرسته بیا له ورکړ شوو الجبرونو څخه نور (واړه یا کوچنی) الجبرونه ګټل کیدی شي، په نامه لاندې الجبرونه ، بیا هومومورفي څیره کونی او بالاخره فاکتور الجبرونه، کوم چې د کونګروایننځ اړیکو له فاکتوره کوونی څخه لاس ته راوړل کیږي.

په تکراري توګه د لته هم د الجبري جوړښتونو د بیلګې لپاره ، لومړی، لکه ددې کتاب هم ، لکه د ګروپونو په

.

درس کی مو چی ګوته ورته ونیوله ، ګروپونه څیړل کیږي.

دا تعریف به د لمړني تعریف سره لکه په برخه ۳ کی موچی کړی وو، یواځی په نخښونه کی توپیر ولري.دلته به مو د ګروپ تعریف داسی وي، چی سملاسی راته د الجبر یوه بیلګه راکوي.

۵ . ۱ . ۱ تعریف: ګروپ په پیژندل شوي ډول یو ډیری G دی، د یوه، په G باندې د دوه ځایزې کارونی یا اپریشن، نښلونی ، ګنډنی یا عملیې د تعریف سره. (دا په دې مانا، چې یوه څیره کونه له $G\times G$ څخه په G کې د $x.y$ --> (x,y) سره) کوم چی لاندې قاعدې پوره کوي یا په کومو کې، چی لاندې قاعدې صدق کوي

(د ټولو) $x,y,z \in G$ (لپاره باورل ري):

$(x.y).z = x.(y.z)$ (اسوشیاتیو قانون)

دا اسوشیاتیو قانون په نخښو داسی لیکلی شو:

$$\forall\ x, y, z \in G : ((x.y).z = x.(y.z)$$

(یو) $e \in G$ (د ټولو) $x \in G$ (لپاره موجود دی، د کوم لپاره چې باور لري) :

$$e.x = x.e = x$$ (ناپیلی توکی)

دا پورته قاعده داسې په نخښنولیکلې شو:

$$\exists\, e \in G, \forall\, x \in G : e.x = x.e = x$$

(د ټولو) $x \in G$ (لپاره یو) $x' \in G$ موجود دی د کوم لپاره چې باور لري:

$$x.x' = x'.x$$ (په څټ توکی)

دا قاعده په شمیرپوهنیزه نخښنو داسې لیکلی شو:

$$\forall\, x \in G \quad \exists\, x' \in G : x.x' = x'x = e$$

په دې قاعدو کې د ټول کوانتور (Allquantor) $\forall$ (لوستل یې : د ټولو لپاره) او د موجودیت کوانتور (Existenzquantor) $\exists$ (لوستل یې : موجود دی) کارول شوي دي. دریمه قاعده د بیلګې په توګه داسې لو

.

ستل کېږي: «د ټولو x لپاره، چې د G توکی دی یا په کې G پروت دی ، یو توکی x' له G څخه موجود دی، د x.x' = e سره یا په بل ډول : د کوم لپاره چې x.x' = e باور لري ». دلته e د دومی قاعدې سره ورکړ شوی ناپيلی توکی دی(يواځنی ټاکلی) . ناپيلی په شميرپوهنه کی د یوې عمليي یا کاروني یا نبنلونی په نسبت دا مانا ورکوي، چې دا ناپيلی توکی د یوه توکی سره په همغه عمليه کی همغه توکی بيرته لاس ته راکوي، يانی د همغی عمليي سره د یوه توکی سره په نبنلونه یا عمليه کی راوستلو سره ور سره نبنلووني توکي کی بدلون نه راولی.

په پوره ورته توګه، لکه ګروپ، کيدی شي ، چی د بيلګي په توګه کړی هم تعرفي شي، چی دې کار دمخه صورت نيولی، د کوم لپاره، چی په هر حالت کی دوه عمليي په کار دي(زياتون او ځل) . د دې پام لرنو یا کتلوڅخه د دې کتاب بنسټيزو کليمو فکر رامنځته کيږي: د یوه « ټوليز یا عمومي الجبر » لاندې يو ډيری پوهيږو د عمليو د یوې کورنی سره، کوم چی تل یا ضرور بايد دوه ځايز نه وي. دا اوس بايد په پوره دقت یا پوره پام وړ تعريفونو کي راټول شي.

۵ . ۱ . ۲ تعریف : د هر ګڼ $n \in N \ \{0\}$ او هر ډیري A لپاره یوه ځیره ونه $f : A^n -> A$ شته، کومه چی n– ځایزه عملیه په A بلل کیږي . د ټولو n – ځا– یزو عملیو ډیری په A د $Op_n(A)$ سره په نخښه کوو.
په A باندې د پایځایزو عملیو لاندې دا عملیي پوهیږو:

$$Op(A) := \bigcup_{n=0}^{\infty} Op_n(A)$$

۵ . ۱ . ۳ یادونه : د همدې ورکړ شوي تعریف سره به د یو صفر ځایزې عملیي لاندې څه پوه شو؟ کره دې ونیول شي، چی A^n دې د ټولو g ځیره کو نو یا ځیره ونو

$$g : \{0,1,2,..., n-1\} \longrightarrow A$$

ډیری وي. په ځانګړې توګه باور لري:

$$A^0 = \{g \mid g : \emptyset \longrightarrow A .$$

مګر ګورو، چی یواځی یوه ځیرونه g موجود ده، یانی په نامه $g = \emptyset$ (پام دې وي ، چی هره ځیرونه $g : \emptyset \longrightarrow A$ $g : \emptyset \longrightarrow A$ په کره نیونه د جوړو یو ډیری دی، دا په نامه

$$g = \{(x,g(x)) \mid x \in B\}$$

د $B = \emptyset$ لپاره، پس $g = \emptyset$) له دې امله یوه صفرځایزه
.

عملیه یوه دا ورکړ شوې څیرونه ده : $f : \{Ø\} \longrightarrow A$.
دا څیرونی همداسی ټیك د A توکی په ګوته کوي، څکه چی f د $f(Ø) \in A$ توکی سره یواځنی ټاکلی دی، او د هر $a \in A$ (بیایی لوستل هر a له G څخه) لپاره ټیك یوه څیره ونه $f_a : \{Ø\} \longrightarrow A$ موجود ده، د $f_a(Ø) = a$ سره. له دې امله صفرځایزې اړیکی ثابتی هم بلل کیږي، او د f_a په ځاي په ساده توګه a لیکو.

۵ . ۱ . ۴ تعریف : د یوه الجبر د تیپ یا ډول لاندې یوه تنظیم شوې جوړه (f , ß) (دلته دا f باید لوي وی ، خو زه یی بل ډول امکان نه لرم، بیا د سهوو سره مخامخ کیږو، څکه چی په کمپیوتر کی د F څخه بدل بل لوی F نه لرم) پوهیږو، چیرته چی f یو ډیری دی ، چی توکي یی د عملیو سومبولونه دي او $ß : f \longrightarrow N \cup \{0\}$ یوه څیره ونه ده، کوم چی هر $f \in f$ په ځایزوالی (یاني هغه ځاي چی دا یی نیسی) ß(f) باندې تنظیم وي. دلته f یو د ß(f) – ځایزوالي عملیو سومبول بلل کیږي.

یو ټولیز الجبر (یا لنډ : الجبر) د (F, ß) تیوپ یو تنظیم شوې جوړه A = (A, F) ده ، کومه چی له ډیري A او یوې
.

په A د عملیو کورنۍ $F(f \mid f \in f)$ څخه منځ ته راغلی یا جوړه شوې ده، چیرته چې هر $f \in f$ په $\beta(f)$ – ځایز عملیې $f \in Op(A)$ باندې تنظیم شي. ډېرۍ A د A بنسټېزې بلل کیږي او د F توکی د A بنسټیزې عملیې بلل کیږي.

۵ . ۱ . ۶ یادونه : الف) : که چیرې د لوستونکو لپاره دا د الجبر تعریف، د د تیوپ سره ، اپریشن سومبول سره ، او داسې نور، لږ پیچلی ښکاریږي، نو کړی شي ، چې دا لاندې تعریف ته خپل پام راوګرځوي.

د الجبر لاندې کیدی شي ، چې یوه جوړه $A=(A,F)$ پام یا خیال کې راولو، چې A یو ډېری او F یو د په A د عملیو یا کاروونو یا اپریشن پاې ډېری وي. هغه نازکوالی، چې د مخ ته تیر تعریف و شا ته خوندې یا پټ دي کیدی شي، چې وروسته په کرار کرار د نورو تیوریو په ودیزه کې روښانه شي.

ب) په دې کتاب کې تل د الجبر د کلیمې لاندې ټولیز یا عمومي الجبر پوهیږو. چې په دې توګه د کلاسیکي یا ټولګیز الجبر د کلیمې سره په یوه کړی باندې، څخه یې

.

توپیر کیدی شي. له دې امله ټولیزه یا عمومي کلیمه نه لیکو او لنډ یې «الجبر» لیکو.

پ) لیکنو ته یې یو څو یادونې : زیات وخت f د الجبر تیوپ بلل کېږي، دا په دې مانا، چې له سره مو فکر د کارونې سومبول ځایزوالی ته پام راګرځي. په څټ یا برعکس، زیات وخت د تیوپ ß څخه غږېږو، که زیات مو موخه ځایزوالی وي او کم مو موخه د کارونې یا عملیي سومبول وي.

که یو الجبر (A,F) یواځې پای ډېرې بنسټیزې کارونې یا عملي ولري، د بیلګې په توګه $F = (f_1 , f_2 ,...,f_k)$، نو زیات وخت دلته $(A, f_1,...,f_k)$ د (A, F) په ځاي لیکل کیږي، او تیوپ په دې $(ß_1 ,..., ß_k)$ بڼه نوټ کوو، چیرته چې $ß_i$ د f_i ځایزوالی راکوي.

د یوه تیوپ f په الجبرونو کې بنسټیزې کارونې یا عملیي د f_A سره نه په نخښنه کیږي، بلکه په ساده توګه د f سره، دا په دې مانا، چې د اړوند کارونې سومبول سره، لکه چې د ابل ګروپ کې زیاتون زیات د نخښې « + » سره په نخښنه کیږي. دا امکانات، چې دا به مو سهوو ته لاربنود کړي، خورا کم دي.

۵ . ۱ . ۷ بیلګه ګروپ: په دې برخه کې ، لکه په سر کې مو چې الجبر تعریف کړ، هغې ته ورته ګروپ د یو الجبر (G , .) په څیر د تیوپ (2) تعریفوو (ټیک: د یوه الجبر، چې تیوپ یې (ß , f) د f = {.} سره دی او 2 = (.)ß)، چې هغه هلته نه ورکړ شوي اکسیومونه پوره کړي. په هر حالټ ګټور دی ، که ګروپ بل ډول تعریف کړو (د مخه مو ګروپ پوره څیړلی دی او هلته یې تعریف بل ډول وو و دې اوسنی تعریف ته). ورسره بلد یا مروج میتودونه دي: یو ګروپ یو الجبر (G (. , -1 , e دی، د تیوپ (0 , 1 , 2) ، چې لاندې اکسیومونه پوره کړي:

ګ ۱ : $(x.y).z = x.(y.z)$ (اسوشیاتیو قانون)

ګ ۲ : $x . e = e . x = x$ (ناپیلی یا بې تاثیره توکی)

ګ ۳ : $x . x^{-1} = x^{-1} . x = e$ (په څټ توکی)

د دې متود ګټه په دې کی نغښتی ده، چې د موجودیت کوانتورونو ته اړتیا نه پیښیږي او په څټ توکی په ساده توګه د یوه یوځایزې کارونی څخه لاس ته راځي، او ناپیلی توکی د صفرځایزې کارونی په څیر په « تیوپ کی خوندې

ده» . که چیرې له ټولکوانتورونو څخه تیر شو، نو کیدی شي، چی د ګروپ اکسیومونه د مساوت یا برابرون په څیر ولیکل شي، څنګه چی دلته ورکړ شوي دي. دا نور هم روښانه کیږي، چی برابرون په ټولیز الجبر کی لوي رول لوبوي.

سړی کړی شي، چی ګروپ په بل ډول هم ولیکي، د بیلګي په توګه د یو الجبر (G,p) په څیر، چی تیوپ یی (3) وي، په داسی ډول ، چی p د سرچینیزې ګروپ کارونی یا عملي د $p(x,y,z) = x.y.z$ په څیر تعریف شوې وي.

لوستونکی دې پخپله دې ته پام کړي، چی ایا د ګروپ اکسیومونه، یواځي د p له لارې فرمولولی شي.

دې ته دې هم پام راواړول شي، چي یو ګروپ $(G, ., ^{-1}, e)$ ابیلي abelsche Grupp یا کموتاتیو بلل کیږي، که لاندې برانرونونه باور ولري:

ګ ۴ : $x.y = y.x$ (کموتاتیو قانون)

دا ورسره بلد یا مروج دی، چی په ابل یا کموتاتیو ګروپ کی $+, -, 0$ د $., e$ په ځای کارول کیږي.

(د زیاتون لیکنډول یا لیکندود).

ب) یو الجبر $(G, .)$ د تیوپ {2} ګروپوئید بلل کېږي.
یو ګروپوئید بل څه نه دې په غیر له یوه ډیري، چې په
هغه کې یو دوه ځایزه کارونه یا عملیه کارول شوي وي،
په ځانګړي توګه ګروپونه په همدې وخت کې ګروپوئید
هم دي، که دا د تیوپ (2) الجبر په څیر وګڼل شي.

پ) یو ګروپوئید $(H, .)$ نیمګروپ بلل کیږي، که
$(H, .)$ برابرون ګ ۱ پوره کړي..

ت) یو الجبر $(M, ., e)$ د تیوپ $(2, 0)$، مونوئید
بلل کیږي، که $(M, .)$ یو نیم ګروپ وي او برسیره پر
دې برابرون ګ ۲ پوره کړي.

ټ) یو ګروپوئید $(Q, .)$ کوازیګروپ بلل کیږي،
که د هر $a \in Q$ لپاره لاندې څیرونې د Q په Q
باندې پرموتیشنونه وي، یعنې:

(د a سره کیڼ ځلوونه) $x \longrightarrow a . x$
(د a سره ښي ځلوونه) $x \longrightarrow x . a$

زیات وخت د کارونې یا مروج دی، چې کوازیګروپ

د تیوپ (2,2,2) الجبر (Q , . , \ , /) په څیر تعریف کړو، کوم چې لاندې برابرونونه یا مساوات پوره کوي:

$$\begin{array}{ll} (Q1) & x\backslash(x.y) = y \quad , \\ (Q2) & (x.y) / y = x \quad , \\ (Q3) & x.(x\backslash y) = y \ , \\ (Q4) & (x/y).y = x \end{array}$$

یا دونه: ګورو چې / او \ د ښي او کیڼي ویشنی په څیر کارول شوي(دا سي، نخښې ، چې په هر بل ځاي کې په بل مفهوم ورکړ شوې وي، همغلته به په همغه مفهوم ونومول شي)

ث) یو لوپ یو د تیوپ (0,2) الجبر (L , . , e) دی، په کوم کې چې (L , .) یو کوازیګروپ وي، او e یو ناپیلی توکی وي، دا په دې مانا چې برابرون ګ۲ باور لري. لکه د کوازیګروپ په څیر کیدی شي چې لوپ هم تعریف شي، د یوه الجبر (L , . / , \ , e) په څیر.

ج) کړی: یو د تیوپ (2,1,0,2) الجبر (R , + , - , 0 , .) کړی بلل کیږي، که (R,+,-,0) یو ابل ګروپ وي، (R , .) یو نیمګروپ او لاندې دیستریبوتیو

قوانین باور ولري:

د ۱) $x . (y + z)) x.y+x.z$

د ۲) $(x + y) z = x . z + y . z$

پام دې وي: د دې لپاره، چې نوکان مو سپما کړي وي، نو هغه له پخوا معلومه قاعده کارول کېږي، چې ټکیشمیرنه له کربشمیرنې له مخه ده، دا په دې مانا، چې لمړی د ټکو شمیرنه بدنیز (تنیز) کیږي یا صورت نیسي لکه ځل او ویش او ورپسې بیا هغه چې کربشمیرنه وي لکه زیاتون او کمون. یوه اونیتار کړۍ ($R,+,-,0,.,1$) unitärer Ring (دا په دې مانا چې دا یوه کړی ده د یوي سره)، یو الجبر دی ، چیرته چې $(R,+,-,0 , .)$ یوه کړی ده او 1 یو ورزیات شوی صفر ځائیزه کارونه یا عملیه ده، کوم چې مساوت ګ ۲ پوره کوي (طبعآ دلته 1 د e په ځاي دی).

ح تن یا بدن) یو اونیتارکړۍ $(K , + , - , . , 0 , 1)$ یو تن یا بدن بلل کیږي (انګریزي field) که $(K , \setminus ,\{0\} , .)$ یو ابل ګروپ وي ، د ناپیلي توکی 1 سره. دا راته نزدې پرته ده، چې اوس که پر دې په ورزیاته توګه $x \longrightarrow x^{-1}$ (په $(K \setminus \{0\} , .)$ کې په څټ څیرونه) یوه یوځائیزه کارونه یا

عملیه یا اپریشن وګڼو. دا چي 0^{-1} تعریف نه دی، نو ($K,+,-,0,.,,^{-1},1$) به د لمړنی تعریف په موخه کوم الجبر نه وي. د ټوټه الجبر په تیوري کی ، چی په دې کتاب کی نه راوړل کیږي، نا پوره تعریف شوې عملیې یا کارونی اجازه لري.

خ) مودولونه Moduln . دا ($R,+,-,0,.$) دې یوه کړی وي. یو الجبر $(M,+,-,0,R)$ د $(2,1,0,(1)_{r\in R})$ تیوپ R–مودول بلل کیږي(یا مودول په کړی R باندې)، که $(M,+,-,0)$ یو ابل ګروپ وي، او د ټولو $r,s \in R$ لپاره لاندې مساوات باور ولري:

$$r(x+y) = r(x) + r(y) \quad (م_1$$

$$(r+s)(x) = r(x) + s(x) \quad (م_2$$

$$(r.s)(x) = r(s(x)) \quad (م_3$$

په یوه اوڼیارکړی $(R,+,-,.,1)$ باندې مودول څخه دا د لاندې مساوات باوریوالی هم غوښتل کیږي.

$$1(x) = x \quad (م_4$$

دا لمړنی بیلګه ده د ناپایډیرو عملیو سره(طبعاً که R ناپای وي) . برسیره پردې هم یو ځانګړی پام ضرور دی، ځکه چی سومبولونه + , - , 0 په دوه مختلفو ماناو رامنځ

،

ته کیږي: یو ځل د ابل ګروپ (R,+,-,0) عملیې په څیر او بیا د ابلګروپ (M,+,-,0) په څیر. دا پرابلم په ساده توګه کیدی شي ، چې راوباسل شي، د بیلګې په توګه په کوم کې (R ,$+_R$, $-_R$, 0) او (M , $+_M$, $-_M$, 0) په څیر لیکل کیږي. یواځې د اسانتیا له خاطره ضرور ښکاریږي، چې د ابل ګروپونو باندې په همغه یوون د + ,- , 0 سره پاتې شو،

خ) وکتور فضا (وکتورهوا) : وي دې (K,+,-,0,.,1) یو تن . نو هر K–مودول (V,+,-,0,K) موږ K –وکتورهوا (یا وکتورهوا یا وکتورفضا په تن K) بولو.

ځ) تړون(تړونونه) (Verband(english: lattice)) یو لاتیس یا تړون یو الجبر (∧، ∨، L) دی، د تیوپ (2,2)، کوم چې لاندې مساوات پوره کوي:

ل ۱) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$ کموتاتیو قانون

ل ۲) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(اسوشیاتیو قانون)

ل۳) $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$ (ایدمپوتینڅ)

ل ۴) $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$

(ابزربشن یا راکښنه یا جذبونه)

دلته افادې " $x \vee y = z$ " او په همدېتوګه " $x \wedge y = z$ " داسې لوستل کیږي x له y سره ټرلی مساوي په z دی، همداسې x غوځ په y مساوي په z دی.

یو رابند ټرون یا لاتیس (یا ټرون د 0 او 1 سره) یو الجبر ($L, \vee, \wedge, 0, 1$) ددی د تیوپ (2,2,0,0), داسې چې ($L, \vee, \wedge$) یو ټرون یا لاتیس دی او په دې برسیره لاندې مساوات هم باور لري:

ل ۵) $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$

ټرونونه به په ځانګړې توګه په وروستي برخو کې پوره وڅیړل شي او د هغو مختلف ډولونه او هم به په هازې دیاګرام کې وکښل شي)

د) نیم ټرون (semilattice) یو نیم ګروپ (S , .) نیمټرون یا سیمیلاتیس بلل کیږي، که دا کموتاتیو او ایدمپوتنت وي. دا په دې مانا، چې که مساوات ګ ۴ او همداسې لاندې باور ولري:

س ۱) $x . x = x$ ایدمپوتنځ (Idempotenz)

د هر لاتیس $(L, \wedge, \vee)$ جوړښتونه $(L, \wedge)$ او $(L, \vee)$ په روښانه توګه سیمیلاتیسونه دي. د نیم ترو ډ۱

ذ) دیستریبوتیو ترون یا – لاتیس) یو لاتیس $(L, \wedge, \vee)$ دیستریبوتیو بلل کیږي، په کوم کی چی دا لاندې دیستریبوتیو قانونونه باور ولري:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad \text{د ل ۱)}$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad \text{د ل ۲)}$$

کیدی شي ، چی د ل ۱ تر ل ۴) مساواتو پورې وښول شي، چی د ل ۱ او دل ۲ یو بل ته ورته دی یا همغسی دي. چی له دې مساواتو یو بیا پوره دی، یا بسیا کوي.

ر) د بول الجبر : یو الجبر $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ د تیوپ $(2,2,1,,0,0)$ د بول الجبر بلل کیږي، که $(B, \wedge, \vee)$ یو دسیتریبوتیو لاتیس وي، مساوات ل ۵ پوره کړي او په دې برسیره لاندې هم پوره کړي

$$x \wedge x' = 0\ ,\ x \vee x' = 1 \qquad \text{ب ۱)}$$

دا څه د الجبر پورته تیرې بیلګې مو، چی دلته راوړلی، د هغو څخه به ځنی وروسته پوره ترڅیړنی لاندې ونیول شي. او س په دا همدومره بسیا کولی شو.

۵ . ۲ لاندې الجبر یا سب الجبر Subalgebra

د هر الجبري دیسخیپلین مهمه موخه داده، چی پوره بیلګي ترې لاس ته راوړل شي. زیات وخت داسی کیږي، چی د لرلو الجبري جوړښتونو څخه نوي الجبري جوړښتو نه لاس ته راوړو. په دې برخه کی به یو متود یا یوه لار وپیژندل شي یا معرفي شي، کومه چی د ټولګیزو کلیمو څخه لکه لاندېګروپ، لاندېوکتورفضا ، لاندېټړون په لور لوریزه وي.

۵ . ۲ . ۱ تعریف : $A = (A,F)$ دې یو د تیوپ f الجبروي، او برخه‌یری $B \subset A$ دې یو د A برخه‌یری وي، د خویونو سره ، چی

$$f(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$$

د ټولو $f \in f$ لپاره او د ټولو n –ګونو $(b_1, \ldots b_n) \in B^n$ لپاره (د کومو سره، چی $\beta(f) = n$ ځای په ځاي کیږي). الجبر $B = (B, (f \mid f \in f))$ د الجبر A لاندې الجبر بلل کیږي، د کوم سره $f : B \longrightarrow B$ د ټولو $f \in f$ لپاره د f بندیزنو په څیر په ډیري B تعریف وي، د « B د A لاندې الجبر» لپاره لیکو $B \leq A$.

د $\mathrm{Sub}\ A$ سره د ټولو د A د لاندې الجبرونو بنسټه‌یریو.

ډیری په نخښه کیږي، دا په دې مانا، چې $A=\{B \mid B \leq A\}$
(انګر : Subalgebra = لاندې الجبر)

یو برخډیری $B \subset A$ ټیك هلته د یوه االجبر $A = (A , F)$ لاندې الجبر بنسټډیری دی، که B د ټولو د $f_A \in F$ بنسټ عملیو سره رابنده، راتړلی وي یا رامحدوده وي. څه ناڅه ټیکه توګه زیات داسی لیکل کیږي $B = (B,F)$ ،
داپه دې مانا، چی د B د بنسټعملیو ډیری بیرته په F سره په نخښه کیږي. لکه څنګه د f_A لپاره همداسی د f_B لپاره هم په ساده توګه د کارونی سومبول په f سره ښوول کیږي یا بهتره، نخښون کیږي.
د ګروپ په بیلګه روښانه کیږي، چی په لاندې الجبر کی په هغه تیوپ ګڼل کیږي ،کوم چی ټاکل شوی دی: که ګروپ د یوه الجبر په څیر، چی تیوپ یی (0 , 1 , 2) دی راوړل شي یا وګڼل شي، لکه په مخ ته تیره بیلګه کې؛ نو لاندې الجبرونه په ټولګیزه موخه لاندېګروپونه دي. که چیرې ګروپ د (2) تیوپ الجبر په څیر راوړل شي یا په پام کی ونیول شي، د ګروپ سره‌چی یواځنی عملیه یا کارونه ده، ممکن دي، چی لاندې الجبر لاس ته راوړو، کوم چی لاندې ګروپونه نه دي. بیا نور لاندې الجبرونه
،

لاس ته راځي، که ګروپ د یوه الجبر ، په څیر د

$p(x , y , z) = xy^{-1}z$

سره راوړل شي، چې دا یې یواځنی عملیه وي.

د هر الجبر لپاره دا سیستم د غوځیجوړښت په مخامخ رابند دی. ټیك یا کره په لاندې ډول :

۵ . ۲ . ۲ جمله : A دې یو الجبر وي. نو باور لري:

الف) $A \in \text{Sub } A$

ب) $B \in \text{SubA}$ د هر ناتشهیري $B \subseteq \text{Sub A}$ لپاره،

یادونه : دا افاده " $\cap B$ " د $\bigcap_{B\in B} B$ لپاره ځاي په ځاي ده او همداسی د $\bigcap\{ B \mid B \in B\}$ لپاره .

اوبې : الف) روښانه دی. د ب) د ښوونی لپاره دې وي: $B \subseteq \text{SubA}$, $B \neq \emptyset$. دا د ښوولو دی، چې $\cap B$ د A د هر ې عملیې f لپاره رابند دی یا راتړلی دی. وي دې $n = ß(f)$. له $\bigcap B$ $b_1 , \ldots , b_n \in$ څخه لاس ته راځي د ټولو $B \in B$ $b_1 , \ldots , b_n \in B$ لپاره . دا چی ټولی $B \in B$ څخه د لاندې الجبرونو بنستهیري

.

دي، نو باور لري $f(b_1, \dots, b_n) \in B$ د ټولو $B \in \mathcal{B}$
لپاره . له دې څخه لاس ته راځي $f(b_1, \dots, b_n) \in B$.

۵ . ۲ . ۳ لاس ته راوړنه(دا هم ديوې جملې په څير ده، خو له جملې څخه لاس ته راځي): د هر الجبر A او هر برخه‌يري $X \subseteq A$ لپاره دی

$$<X> = \bigcap \{ B) \in \mathrm{Sub}\,A \mid B \supseteq X \}$$

د A د لاندې الجبر ښستهيری، دا په دې مانا چې $<X> \in \mathrm{Sub}A$. په څرګنده توګه $<X>$ د A د لاندې الجبرونو کوچنی بنستهيری دی، کوم چې X خوندې لري (دا د X څخه راجوړه یا تولید شوې لاندې الجبر)
د الجبر A باندې زور اچووني له امله ډير وخت $<X>_A$
د $<X>$ په ځاي ليکو اوله بلی خوا په ساده توګه د پاي ډيري $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ لپاره .
د بيلګې په توګه څيوکليکي لاندې ګروپ $(Z_6, +, -, 0)$
را نيسو (د ګڼونو $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ سره مودول 6 شميرل کيږي): باور لري

$$<0> = \{0\}, <1> = Z_6, <2> = \{0, 1, 4\},$$
$$<3> = \{0, 3\}, <2, 3> = Z_6$$

۵ . ۲ . ۴ جمله : A دې یو الجبر وي . د برخېریو $X, Y \subseteq A$ لپاره باور لري:

الف) $X \subseteq \langle X \rangle$ (اکستنزیویتیت Extensität)

ب) $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ (مونوتوني Monotonie)

پ) $\langle X \rangle = \langle\langle X \rangle\rangle$ (ایدمپوتنت Idenmpotent)

د دې جملې اوبی سملاسی د مخ ته تیرې عملي $\langle \; \rangle$ له تعریف څخه لاس ته راځي. پای

بنستېزیری $\langle X \rangle$ په ریښتیا چې د X څخه تولید شوې د $A = (A, F)$ لاندې الجبرونو څخه لاس ته راځي د یوه تولیدپروسي سره: د هر برخېزیري $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$E(X) = X \cup \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f \in F, a_1, \ldots, a_n \in X (n = \beta(f))\}$$

وریسی دې وي

$$E^0(X) = X$$

اود ټولو $k \in N \cup \{0\}$ لپاره

$$E^{k+1}(X) = E(E^k(X))$$

۵ . ۲ . ۵ جمله : د هر الجبر $A = (A, F)$ او هر

برخه‌یري $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$<X> = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

اوبی : « $\supseteq$ »: وي دې $<X> \supseteq x = E^0(X)$.
نیونه دې وي، چې $E^k(X) \supseteq <X>$، ښوول شوی دی،
او وي دې $a \in E^{k+1}(X)$. وي دې $a \notin E^{k+1}(X)$ د مخه
نیونه(ځکه، چې په بل ډول به په ساده توګه باور ولري

$a \in <X>$)
نو $f \in F, a_1, \ldots, a_n \in E^k(X)$
موجود دي، د $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ سره .
د $E^k(X) \supseteq <X>$ له امله او دا چې $<X>$ د یوه لاندې
الجبر بنسټ ډیري دي، لاس ته راځي $a \in <X>$. دا
ښایي $E^{k+1}(X) \supseteq <X>$، او په k باندې د اینډکشن
سره لاس ته راکوي $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X) \supseteq <X>$.

« $\subseteq$ »: یواځې دې وښوول شي، چې $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$ د یوه
لاندې الجبر بنسټه‌یری دی، دا په دې ما ، چې د F
د ټولو اپریشنونو په هکله رابنده یا راتړلی ده. وي دې:

$$f \in F,\ n = \beta(n),\ a_1, \ldots, a_n \in \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k(X.$$

نو بیا د هر $i \in \{1, \ldots, n\}$ لپاره په لاندې توګه یو$\{0\}$ $k(i) \in N \cup$ د $a_i \in E^{k(i)}(X)$ سره موجود دی. وي دې $m = \max\{(k(i) \mid i = 1, \ldots, n\}$. نو باور لري $a_i \in E^m(X)$ د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره. په دې پسې لاس ته راځي

$$f(a_1, \ldots, a_n) \in E^{m+1}(X) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

دا په دې مانا، چی $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$ د f لاندې رابند یا تړلی دی ګڼی پای

یادونه: دا رابند یا راتړلی دا مانا لري، چی f په همغه الجبر کی باور لري. دې لغات ته دې په نورو ځایونو کی هم پام وي، چی ډیر کارول کیږي.

دا تر اوس پام په یو څو برخو کی په کار راځي، چی په خپل ځاي کی به وکتل شي.

د ډیریسیستم Sub A یوائی دې ته همدا دلته ګوته نیسم، چی د یوه الجبر A د لاندې الجبرونوبنسټډیرئ په

پيدايښتي يا طبيعي ډول يو تړون يا تړنه يا لاټيس جوړوي:
د $B, C \in A$ لپاره دې وي

$$B \wedge C = B \cap C$$
$$B \vee C = B \cup C$$

نو لرو

۵ . ۲ . ۶جمله :د هر الجبر A لپاره $(\wedge, \vee, \text{Sub } A)$
يو تړون دی(د A د لاندې الجبرونو تړون يا تحت اوړيا توکنی)
اوبی دې تمرين وي: د لته د تړون اکسيومونه له ل۱ تر
ل۴ پورې ازمائيل کيږي.

۵ . ۳ ايزومورفيزم ، هومومورفيزم

Isomorphismen, Homomorpismen

دا روښانه ده ، چې د يوه الجبر ذهني خويونه تغير نه خوري،
که چيرې د الجبر د ستهيري د توکو نومونه بدل شي ، يا بل
ډول ونومول شي. دا پام يا فکر مو تړلی د ايزومورفي کليمي
ته لارښودوي .
دوه الجبره يو بل سره ايزومورف بلل کيږي، که چيرې يو الجبر
له دې بل څخه د هغو توکو نومونو د بدلون له لارې لاس ته
راوړی شو:

۵ . ۳ . ۱ تعریف : A او B دې دوه الجبرونه وي، د **همغه تیوپ** f، او $u : A \to B$ دې یو **بیجکتیوه** bijektive **څیرونه** وي. نوں د A ایزومورفیزم په B **بلل کیږي**، که د ټولو $f \in f$ لپاره او ټولو $(n = ß(f)$، $a_1, \ldots, a_n \in A$ لاندې شرطونه پوره وي:

$$uf_A(a, \ldots, a) = f_B(ua, \ldots, ua) \quad (\text{هوم})$$

دا الجبرونه A او B بیا (یو د بل سره) **ایزومورف بلل کیږي**، په نخښونه یې $B \cong A$ ده.

۵ . ۳ . ۲ بیلګه

الف) : دوه ګروپونه $(G, ., ^{-1}, e)$ او $(e, ^{-1}, ., H)$ تیک هلته ایزمورف دي، که یوه **بیجکتیو څیرونه** $u : A \to B$ موجود وي کوم چې د ټولو $a, b \in G$ لپاره لاندې شرطونه پوره کوي.

$$\begin{array}{ll} (i) & u(a.b) = u(a).u(b) \\ (ii) & u(e) = e, \\ (iii) & u(a^{-1}) = u(a)^{-1} \end{array}$$

که پام وکړو، نو دلته شرطونه (ii) او (iii) د اړتیا اخوا دي، ځکه چې دا دواړه له (i) څخه لاس ته راوړلی شو:

$$u(e) = u(e.e) = u(e).u(e) \Rightarrow u(e) = e,$$
$$e = u(e) = u(a.a^{-1}) = u(a).u(a^{-1}) \Rightarrow u(a) = u(a)^{-1}$$

ب) $(Z_7 \setminus \{0\}, . , \ , 1)$ دې د تن $(Z_7, +, -, 0, 1)$
یو ځلیزګروپ وي. نو ایزومورفیزم

$$u: (Z_6, +, -, 0) \longrightarrow (Z_7 \setminus \{0\}, ., {}^{-1}, 1)$$

په لاندې سره لاس ته راځي:

x	0	1	2	3	4	5
u(x)	1	3	2	6	4	5

د A ایزومورفیزم و B ته په ټوله توګه سیومتري نه دی.
مګر باور لري:

۵ . ۳ . ۳ جمله: که u یو ایزومورفیزم د A په B
وي، نو په ځټ ځیرونه u^{-1} د B یو ایزومورفیزم دی و A ته.

اوبی : شرطونه (هوم) له همدا تیر درس څخه کیدی شي
و ازمائل شي، د u^{-1} لپاره ، چی د u لپاره ځای په ځای شي.
وي دې

$$f \in f,\ b_1, \ldots, b_n \in B$$

د $a_1 = u^{-1}(b_1), \ldots, a_n = u^{-1}(b_n)$ سره، نو لاس ته راځي

$$u^{-1}(f_B(b,\ldots,b) = u^{-1}f_B(ua_1,\ldots,ua_n)$$

$= u^{-1}[uf_A(a_1,\ldots,a_n)]$ ځکه چي u ایزومرفیزم

$= f_A(u^{-1}(b_1),\ldots,u^{-1}(b_n))$ پاي

پای

که د مخه تیرو لوستونو کی له غوښتنو څخه تیر شو، چی $u: A \longrightarrow B$ بیجکتیو دی، نو د هوموموفیزم ټولیزې کلیمی ته راځو. پس هوموموفیزم د الجبرونو مساوات کره نه ټاکي (تر د توکو د چاپیریال پورې لکه په ایزمورفیزم کی)، مګر بیا مو هم د جوړښت ورتوالی مخ ته پروت دی:

۵ . ۳ . ۴ تعریف : A او B دې د همغه تیوپ f الجبرونه وي. یوه څیرونه $u : A \longrightarrow B$ هومو مورفیزم د A وB ته بلل کیږي،

د ټولو $f \in f$ او ټولو $a_1, \ldots, a_n \in A\ (n = ß(n))$ لپاره هوموموفي شرطونه (هوم) له تیر درس څخه پوره دې.

د « u یو د A هوموموفیزم دی و B ته» لپاره لنډ لیکدود « $u : A \longrightarrow B$ » هم معمول دی یا کارول کیږي.

شرط (i) د له مخ ته تیرې جملې څخه همغه ورسره بلد د هومومورفیزم شرطونه دي، د ګروپونو لپاره. ټیك په همدې توګه، لکه د ګرووپ هومومورفیزم، په ټولیزه توګه د ټولو الجبرونو د هو-مومورفیزم لپاره لاندې نخښونې معمول دي: سورجکتیو هومومو-رفیزم ایپیمورفیزم Epimorphismus بلل کیږي. که $u : A \rightarrow B$ یو ایپیمورفیزم وي، نو B د A یو هومومورفه څیره بلل کیږي. (په نخښونه یې $uA = B$) . اینجکتیو هومومور-فیزم د نزدې پرتو دلایلو له امله خوندیونه Einbettung یا نغړنه (په کې) بهتره یې رانغړنه(زه یې خوندیونه بولم) بلل کیږي. (د دې لپاره راتلونکې یادونه وګورئ) د یوه الجبر A هومومورفیزم $u: A \rightarrow A$ یانې هومورفیزم په خپل ځان ایندومورفیزم Endomorphimus بلل کیږي، او ایندو-مورفیزم چې په همغه وخت کې ایزومورفیزم (دا په دې مانا، چې بیجکتیو) دی، د A اوتومورفیزم Automorphismus بلل کیږي د A د ټولو ایندومورفیزمونو ډیرې End A په پیدایښتي یا طبیعي توګه یو نیمګروپ جوړوي، او د A د ټولو اوتومورفیزمونو (Auotomorpihismen (Aut A یو ګروپ جوړوي. د دې لپاره چې دا ولیدلی شو، لاندې دوه وېناوو ته اړتیا پیښیږي، چې اوبې یې ګرانو لوستونکو ته یوه ساده د تمرین دنده یا وظیفه ده:

یادونه : الف) د هر الجبر A لپاره کتمتې څیرونه یانی $id\ A \longrightarrow A$ یو اوتومورفیزم دی
ب) که $u_1 : A \longrightarrow B$ او $u_2 : B \longrightarrow A$ هومومورفیزمونه وي، نو یو په بل پسې راوړنه یا په بل پسې نښلونه $u_1 \circ u_2$ یی هم یو د A هومومورفیزم و C پسې دی.
د له مخ ته تیرې جملی له امله د End A همداسی د Aut A ډیري د کارونی یا عملی $\circ$ لاندې رابند یا راګیر دی . د مخ ته تیرې جملی له امله Aut A تل دا ناپیلی توکی id A خوندي لري. همغه تیره جمله ښایي، چی له $u \in Aut\ A$ څخه تل $u^{-1} \in Aut\ A$ لاس ته راځي، یعني باور لري:

۵ . ۳ . ۵ جمله: د هر الجبر A لپاره $(End\ A, \circ)$ یو نیم ګروپ دی (د A د ایندومورفیزم نیمګروپ) ، او $(Aut\ A, \circ, ^{-1}, id\ A)$ یو ګروپ دی (داسی په نامه د A د اوتومورفیزم ګروپ)

لاندې الجبرونه او هومومورفیزم یو له بل څخه کامل خپلواک راوړل شو. اوس به وښوول شي ، چی دا جوړښتکلیمي یو د بل سره په یو ډول زغموړ دي:

۵ . ۳ . ۶ جمله: څیرونه $u : A \longrightarrow B$ دې یو هومو-

مورفيزم وي، نو باور لري:

الف) له $U \in Sub\ A$ څخه لاس ته راځي $uU \in Sub\ B$

ب) له $V \in Sub\ B$ څخه لاس ته راځي $\bar{u}^1 V \in Sub A$ (۲)

پ) د ټولو برخېريو $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$<uX> = u<X>$

اوبی : الف) وي دې $f \in f, b_1,..., b_n \in uU$ (چيرته چی، لکه چی ورسره بلديو، $\beta(f) = n$ ليکل کيږي) .

نو $a_1, ..., a_n \in U$ موجود دي، د $b_1 = ua_1, ..., b_n = ua_n$ سره . باور لري

$f_B(b, \ldots, b) = f_B(ua, \ldots, ua)$

دا چي u هومورفيزم $= uf_A(a, \ldots, a)$

د $U \in Sub\ A$ له امله $\in uU$

دا راته په ګوته کوي، چی

$uU \in Sub\ B$

ب) وي دې $f \in f, a^1, \ldots, a^n \in \bar{u}^1 V$. نو باور لري

. $ua^1,...,ua^n \in V$

له دې لاس ته راځي

دا چی u هومورفيزم $uf_A(a_1, \ldots, a_n) = f_B(ua_1, \ldots, ua_n)$

د $V \in Sub\ B$ له امله $\in V$

. (۲) $u^{-1} \in \ldots$

.

له دې ~~سره~~ امله باور لري $f_A(a_1, \dots, a_n) \in u^{-1}V$ او له دې

امله $\bar{u}\dot{V} \in \text{Sub}\, A$ $\Rightarrow$ $(u^{-1}V$

پ) E دې لکه هغه د مخه تعریف شوی اپریټر یا عملیه وي. لمړی ښوول کیږي، چې $E(uY) = uE(X)$ د ټولو $Y \subseteq A$ لپاره باور لري: $E(uY)$ ټیك له هغو توکو uy ځخه د $y \in Y$ سره جوړ دی، او همداسی له هغو توکو ځخه، چې لاندې بڼه لري $f_B(uy_1, \dots uy_n)$ ، د $f \in f, y_1, \dots, y_n \in Y$ سره. همداسی یا په همدې ډول $uE(Y)$ له توکو uy ځخه جوړ دی، د $y \in Y$ سره، او همداسی له توکو ځخه، چې لاندې بڼه لري:

$$uf_A(y_1, \dots, y_n)$$

دا چې u یو هومورفیزم دی ، نو بنایي چې $E(uY) = uE(Y)$.

په k باندې د ایندکشن له لارې کیدی شي،

چې $E^k(uY) = uE^k(Y)$ وښوول شي، د ټولو $k \in N \cup \{0\}$ لپاره. د له مخ ته تیرو ځخه لاس ته راځي

$$< uX > = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(uX) = \qquad uE^k(X) = u[\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)]$$

$$= u<X>$$

پای

لکه د مخه مو، چې ګوته ورته ونیوله د الجبر بنسټیري uU د uU سره په نخښه کیږي او همداسی له مخه بلدوځخه د

الجبر بنستېډيري $u^{-1}V$ د $u^{-1}V$ سره په نخښه کیږي. کیدی شي ، همدا د مخه کیدی شي، چی زیات وکارول شي، که د یوه الجبر A هومومورفیزم (ایزومورفیزم) په یوه الجبر B غواړو، چی وټاکو.

بیلګه: د توکو $u \in Aut(Z_6, +, -, 0)$ د ټاکلو لپاره فکر کیدی شي، چی $<u1> = u<1> = uZ_6 = Z_6$. له دې امله یا $u1 = 1$ باور لري له کوم، چی $u = id\ (=idZ)$ لاس ته راځي، او یا $u1 = 5$ دا په دې مانا چی $u = -id$.

پس:

$$Aut(Z_6, +, -, 0) = \{id, -id\}$$

په ورته توګه د $End(Z_6, +, -, 0)$ توکی هم ټاکل کیږي

لکه د مخه مو چی ګوته ورته ونیوله اینجکتیو هومومور– فیزم $u : A \longrightarrow B$ خوندیونه هم بلل کیږي، د u سره A په B کی خوندي کیږي. دا برخه چی لاندې الجبرونه او خوندیونه په کی روښانه شوه داسی پای کیږي:

یادونه : الف) د هرې خوندیونی $u:A \longrightarrow B$ لپاره باور لري $uA \leq B$ او $uA = A$ دا په دې مانا، چی uA یو و A ته ایزومورف د B لاندې الجبر دی.

ب) د الجبر B د هر لاندې الجبر A لپاره د یو

اینکلوژنځیرونه Inklusionsabbildun

$$i : A \longrightarrow B\ ,\ i(x) = x$$

یو ه خوندیونه ده.

کونګروواینغ اړیکی او فاکتور الجبر
Kongruenzrelationen und Faktoralgebren

لکه د ګروپ تیوري کی د نورمالپرویشوني، یا همداسی د ایدیال کلیمه په کړی تیوري کی منځنی یا مرکزي کلیمه ده، همدا ډول په ټولیزه توګه په الجبر کی د ټولیزې یا پورته کلیمي کونګروواینغ اړیکو کلیمه جوړوي. دا به راته څرګنده کړاي شي، چی د کونګروواینغ اړیکو او هومومورفیزم ترمنځ نزدې اړیکی پرتی دي، لکه څنګه چی په ګروپتیوري او همدا ډول کړېتیوري کی، کیدی شي چی الجبرونه د کونګر-واینغ اړیکو له لارې فاکتوریزه کړی شو، د کوم له مخی چی «فاکتور الجبر» ته رسیږو. یو ګروپ د نورمالپرویشنونی پسی فاکتورونی کوي، په کوم کي چی د نورمالپرویشونی څنګټولګی د نوي ګروپ توکو په څیر یا په توګه وکاروي، دا په نامه فاکتورګروپتوکی. دا په څنګټولګی یا اړختټولګی د یوه ایکویوالنغ اړیکی «ایکویوالنغ ټولګی» جوړوي. دا

کتنه یا څېړنه د «کونګروواینځ» فکر رامنځ ته کوي، کوم چې باید دلته تعقیب شي.

۵ . ۳ . ۷ تعریف : A دې یو ډېرې وي. هر برخډېرې $R \subseteq A^n$ یو په ډېرې A باندې n–ځایزه اړیکه بلل کیږي. یوه 2 –ځایزه اړیکه Θ په A باندې ایکویوالنت اړیکه بلل کیږي، که د ټولو $x , y \in A$ لپاره لاندې شرطونه باور ولري:

اي ۱) $(x,x) \in \Theta$ (رفلیکسیویتټې)

اي ۲) $(x,y) \in \Theta \Rightarrow (y,x) \in \Theta$ (سیومتري)

اي ۳) $(x, y) \in \Theta$ ، $(y,z) \in \Theta \Rightarrow (x,z) \in \Theta$
(ترانزیتیویتټې)

د $(a , b) \in \Theta$ په ځاي داسي هم لیکلی شو $a = b(\mathrm{mod}\ \Theta)$ (په کلیمو: "a په b مودولوΘ سره مساوي دی")، او یا هم داسی لکو $a \Theta b$ ، په دې توګه کیدی شي، چې اکسیوم ۳ په لاندې توګه فرمولبندې شي، له $x \Theta y \Theta z$ څخه لاس ته $x \Theta z$ راځي. د هر ایکویوالنځ اړیکو Θ لپاره د لاندې بڼې ډېرې $[a]\Theta = \{x \in A \mid x \Theta a\}$ ایکوالنځټولګی بل کیږي. په روښانه یا څرګنده توګه هر یو توکی $x \in A$ ټیك د Θ یوه ګونګروایځټولګي پورې اړه لري. (ساده بیلګه د ټولګی : لکه چې یو هلك په همغه وخت کی په دوه یا

زیاتو ټولګیو پورې اړه نه شي لرودی).
د A ټولو ایکوالنتټولګیو ډیری په Eq A سره په نخښه کوو (د ایکویوالنځټولګی الماني او انګریزی:
(ÄquivalenZklassen = equivalence relation
د ډیري A لپاره دوه ایکوالنځ اړیکی ∇_A او Δ_A په لاندې ډول لاس ته راځی

(ټول اړیکی Allrelation) $\nabla_A = A^2 = \nabla_A$
(کتمتې یا دیاګونالی Identität oder Diagonale)
$\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} = \Delta A$

خیره: ۱۰۱
په پورته خیره کی په ډیري {1,2,3} باندې ټول ایکوالنځ-اړیکی د لویوالی په ترتیب بیرته ورکړ شوي دي(دا یو د Hasse-DiaGram هازېدیاګرام دې) هر ایکویوالنت اړیکه د ایکویوالنځټولګي په بیرته ورکړه کی انځور ده.
.

۵ . ۳ . ۸ جمله: A دې يو ډيری وي او R دې يو ناتش
د $\mathrm{Eq}\,A$ برخډيری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in \mathrm{Eq}\,A$$

(ليکدود ته يې " $\bigcap R$ " . دا دې د مخ ته تيرو درسونو
سره انډول شي يا دا مو د مخه لوستلی دي)
اوبې : د دې ښوونه يو ساده تمرين دی. پای

ديوه ډيري A ايکويوالنخ اړيکې په طبيعي يا پيدايښتي
توګه يو لاټيس يا ټرون جوړوي. يا ټروڼی جوړوی .
د ټولو $\Psi, \Theta \in \mathrm{Eq}\,A$ دې وي

نو کيدی شي، چې په ساده توګه وښوول شي:

۵ . ۳ . ۹ جمله: د هر ډيري A لپاره $(\mathrm{Eq}A, \vee, \wedge)$
يو ټرون يا لاټيس دی (په A باندې د ايکوالنخ اړيکو ټرون)
دا پورته ورکړ شوی تعريف د $\Theta \vee \Psi$ په ټوليزه توګه لږ
مناسب دی ، که په ريښتيا $\Theta \vee \Psi$ شميرو. د دې لپاره
کيدي شي، په خوښه دوه ځايز اړيکو Θ_1, Θ_2 لپاره

تعریف شوی د اړیکو ځل

$$\Theta_1 \circ \Theta_2 = \{ (x, y) \mid \exists z \in A : x \Theta_1 z \Theta_2 y \}$$

وکارول شي یا استعمال شي. دا اړیکځل اسوشیاتیو دی
(د ې ښوونه دې تمرین وي) :

$$(\Theta_1 \circ \Theta_2) \circ \Theta_3 = \Theta_1 \circ (\Theta_2 \circ \Theta_3)$$

له دې امله کیدی شي، چی ډیر واره راوړل شوي نوکان
له لیکلو پاتی شي.

۵ . ۳ . ۱۰ جمله : د هر ډیري A او ټولو $\Theta, \Psi \in Eq\,A$
لپاره باور لري

$$\Theta \vee \Psi = \Theta \cup (\Theta \circ \Psi) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta \circ \Psi) \cup \ldots$$

دا په دې مانا چی $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ ټیك هلته باور لري،
کله چی توکي $c_1, c_2, \ldots, c_n \in A$ موجود وي،
د $a = c_1 \Theta c_2 \Psi c_3 \Theta c_4 \ldots c_n = b$ سره.
اوبی یا ځل: تمرین دې وي: لمړی فکر کیږي، چی اوبیونی
یا حل کوونی برابرون مساوات و ښي لور ته یو ایکویوالنت
اړیکه پرته ده، او هر دا . په ښی لور یا اړخ، په نوکانو کی
نیول شوو اړیکوځل (اړیکځل) په $\Theta \vee \Psi$ کی خوندي دی.

په یوه ډیري A باندې د یوې ایکویوالنت اړیکی Θ لپاره ډیری $A / \Theta = \{ [a]\Theta \mid a \in A \}$ د ډیري A د Θ دټولو ایکویولنتټولګیو د A فاکتور الجبر په Θ پسی بلل کیږي. فاکتورډیري زیات وخت پارتیشن Partitionen یا ټوټوونی هم بلل کیږي(ځکه، چی A / Θ د A یو ټوټونی یا تجزیه ده، په پردیو برخډیریو باندې)، او ایکویوالنځټو-لګي د ټوټوونو بلاکونه بلل کیږي.
خاماخا فاکتورډیري او (چی وروسته به تعریف شي) فاکتور الجبرونه یو له بل سره سر او کار لري. وهغي لار ته مرسته کوي، که د ګروپونو حالت راواخلو یا بهتره تر ځیرني لاندې ونیسو: $(G , . , ^{-1} ,e)$ دې یو ګروپ وي او N دې د G یو نورمالپرویشونی وي، دا په دې مانا چي یو لاندې ګروپ شته د دې لاندې نورمالپرویشونی شرطونو سره:

$\forall x \in G : x^{-1} N x = N$ (د نومال پرویشوني شرتونه)
(دا پورته داسی لوستل کیږي: د ټولو x لپاره، چی له G دی یا د G توکی دی باور لري.......)
وي دې Θ_N په G باندې یوه ایکویوالنځ اړیکه د ځنګټولګي aN سره د یوه ایکویوالنځ په ځیر،دا په دې مانا چی د $G / \Theta_N = \{aN \mid a \in G\}$ سره. نو کیدی

شي، چی په G/Θ_N باندې يو ګروپجوړخت يا ګروپسکترکچر $(G/\Theta_N, \cdot, ^{-1}, e_N)$ د دې لاندې سره تعريف کړي

$$(aN).(bN) = abN,$$
$$(aN)^{-1} = a^{-1}N,$$
$$eN = eN$$

اوس دا غوره ده، چی وښوول شي، چی دا ډول تعريف شوی اپريشن يا کارونه کره تعريف ده. د بيلګي په توګه د ځل . لپاره ښوول کيدی شي، چی له $aN = a'N$ او $bN = b'N$ څخه تل $abN = a'b'N$ لاس ته راځي. دا کيدی شی، چی د نورما پرويشوني شرايطو سره ساده وشميرل شي. دلته ويل کيږي، چی Θ_N او . يوله بل سره زغموړ دي. همداسی په ټوليزه توګه تعريفيږي:

۵ . ۳ . ۱۱ تعريف: A دې يو ډيری وي او $\Theta \in Eq\ A$ او $f \in Op_n(A)$. نو Θ او f دي زغموړ بلل کيږي، که د ټول $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in A$ لپاره د $a_1\Theta b_1, ..., a_n\Theta b_n$ سره تل

$$f(a_1,...,a_n)\ \Theta\ f(b_1,...,b_n)$$

باور ولري. $\Theta \in Eq\ A$ په الجبر $A = (A,F)$ يو کونګرو- اينځ اړيکه بلل کيږي، که Θ د ټولو f سره زغموړ وي.

په A د ټولو کونګورنیځ اړیکو ډیرۍ په Con A سره په نخښنه کیږي یا نخښوون کیږي.
(انګریزي Kongroenzrelation= congruence relation)

۵ . ۳ . ۱۲ بیلګی

الف) په هر ډیري A باندې ثابتی عملیي یا کارونی $f_c : A^n \longrightarrow A , f(x_1,...,x_n) = c$ او id_A کټمټ ځیرونی د ټولو $\Theta \in$ Con A سره زغمور دي. له دې امله د پریوستونځیرونی (المانی او انګریزي (Projektionsabbidung or projections mapping یا -عملیي باور لري:

$$p_i : A^n \longrightarrow A , p_i(x_1,...,x_n) = x_i$$

یا دونه : دې ته‌بیا ګوته نیسم، چی دا پورته ډول ځیرونه د پریوستونځیرونی Projektionsabbildung تعریف دی.

ب) د ټولو الجبرونو(A , F) لپاره $\Delta_A, \nabla_A \in$ Con A باور لري. یو الجبر (A , F)، کوم چی د Δ_A او ∇_A څخه بل کونګر-واینځ اړیکه ونه لري ساده بلل کیږي، د بیلګي په توګه د هر ډیري A لپاره الجبر ((A ,Op(A) ساده دی:

$$Con(A,Op(A)) = \{\Delta_A, \nabla_A\}$$

پ) باور لري

$$Con(A\ ,\ \emptyset) = Eq\ A$$

کیدی شي ، چی ګونګروانیخ اړیکي، د زغموالی له لاري، د ځانګړو یوځایزو عملیو سره کرکتر.یزه شي:

۵ . ۳ . ۱۳ تعریف : (A, F) دي یو الجبر وي. یوه ځیرونه د بڼی

$$x \longrightarrow f(a_1, , a ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$$

د $f \in F$ (n – ځایز) او $a_1, ..., a_{i.1}, a_{i+1}, ..., a_n \in A$ سره د (A, F) یو ترانسلاشن Translation بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۴ جمله: د هر الجبر (A, F) لپاره باور لري: $\Theta \in Eq\ A$ ټیك او ټیك هلته په $f(A, F)$ باندي یو کونګروانیخ اړیکه ده، که Θ د (A, F) د ټولو ترانسلا-یشنونو سره زغمور وي.

اوبی : دا چی هر $\Theta \in Con(A, F)$ د ټولو ترانسلیشنونو سره زغمور دی، دا سیده مخه لوستلود کونګروانیخ اړیکو ځخه لاسته راځي. په ځتې دي $\Theta \in Eq\ A$ د ټولو ترانسلیشنونو سره زغمور وي. دا باید وښوول شي چي Θ د ټولو $f \in F$ سره زغمور دی. f دي یو n–ځایزه کارونه یا عملیه وي او باور دي ولري $a_1 \Theta b_1, ..., a_n \Theta b_n$. دا چی هر د f ځخه ګټلی

ترانسلیشن د Θ سره زغمور دی، نو لاس ته راځي

$$f(a_1,a_2,...,a_n)\ \Theta\ f(b_1,a_2,a_3...,a_n)$$
$$\Theta\ f(b_1,b_2,a_3,...,a_n)$$
$$.$$
$$.$$
$$\Theta\ f(b,b,...,b)$$

۵ . ۳ . ۱۵ تعریف : A دې یو الجبر وي، د تیپ f او $\Theta \in$ Con A سره. په لاندې توګه تعریف شوی الجبر A/Θ د الجبر A فاکتور الجبر Faktoralgebra نومیږي یا بلل کیږي و کونګروراینخ Θ پسی یا کونګروراینخ Θ ته: د A/Θ بنسټ- ډیری یی همدا فاکتورډیری A/Θ دی ، دا په دې مانا چی د Θ د ټولوګونګرواینتټولګیو ډیری. د A/Θ بنسټکارونی یا عملي د A له کارونویا اپریشنونو څخه لاس ته راوړل کیږی له

$$f_{A/\Theta} : (A/\Theta)^n \longrightarrow A/\Theta,$$
$$f_{A/\Theta}([a_1]\Theta,...,[a_n]\Theta = [f_A(a_1,...,a_n)]\Theta$$

څخه . کارونی یاعملیي $f_{A/\Theta}$ په دې توګه کره تعریف دي:
له $[a_1]\Theta = [b_1]\Theta,...,[a_n]\Theta=[b_n]\Theta$ څخه

$$[f_A(a_1,...,a_1)] = [f_A(b_1,...,b_n)]\Theta$$

لاس ته راځي (ټیك همدا د مخه تیر تعریف کی د وینا

د زغموالي خویونه دي).
الجبر $A / \Theta = (A / \Theta, | f_{A/\Theta} \in f))$ بیرته د تیپ یا ډول f دی. زیات وخت په ساده توګه داسی $A = (A , F)$ او $A / \Theta = (A /\Theta,F)$ لیکل کیږي.

هومومورفیزم د کونګروانیڼ اړیکو او فاکتور الجبر سره کلك خپلوان دي یا کلك تړلي. دا به په لاندې کی وښوول شي.

۵ . ۳ . ۱۵ تعریف : $u : A \longrightarrow B$ دې یوه څیرونه وي . نو د u زړی (الماني Kern) په لاندې توګه تعریف دی :

$$\text{Ker } u = \{ (a,b) \in A^2 \mid ua = ub \}$$

دا روښانه ده، چی د u زړی تل په A باندې یو ایکویوالنځ اړیکه ده . په دې برسیره د الجبرونو لپاره باور لري:

۵ . ۳ ۱۶ جمله: د هر هومومورفیزم $u : A \longrightarrow B$ لپاره، د u زړی Ker u په A یو کونګروانیڼ اړیکه ده، دا په دې مانا چی $\text{Kern } u \in \text{Con } A$ باور لري:

اوبی: f دې د A یو n–ځایز بنسټیزه کارونه یا عملیه وي او باور دې ولري

$$(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in \text{Kern } u$$

دا په دې مانا چې $ua_1 = ub_1, ..., ua_n = ub_n$ ، نو دا لاندې لاس ته راځي:

$$uf(a_1,...,a_n) = f(ua_1,...,ua_n) = f(ub_1,...,ub_n) = uf(b_1,...,b_n)$$

له دې لاس ته راځي

$$(f(a_1,...,a_n), f(b_1,...,b_n)) \in \text{Ker } u$$

دا په دې مانا چې Kern u یا د u زړی د ټولو بنسټیزو کارونو یا عملیو سره زغمور دی. خ چ ښ و

د دې په څېر د کونگرویخ اړیکو څخه تل هومومورفیزمونه لاس ته راځي:

۵ . ۳ . ۱۷ تعریف: A دې یو ډیری وي او $\Theta \in \text{Eq } A$. نو

$$P_\Theta : A \longrightarrow A/\Theta, \ P_\Theta(x) = [x]\Theta$$

د Θ کانوني څیرونه kanonische Abbildung بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۸ جمله : A دې یو الجبر وي او $\Theta \in \text{Con } A$. نو کانوني څیرونه P_Θ یو سورجیکتیو هومومورفیزم:

$$P_\Theta : A \longrightarrow A/\Theta$$

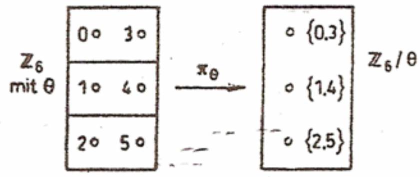
ذی. (د Θ کانوني هومومورفیزم). باور لري: د P_Θ زړی یعنی $\text{Kern } P_\Theta = \Theta$.

د مخ ته تیرې جملي ویناوې ساده ښوول کیږي. په تو- لیزه توګه له مخ ته تیرو دوه جملو څخه لاس ته راځي:

لاس ته راوړنه: په الجبر A باندې کونګروانیڅ اړیکی تیك د هومومورفیزم زړي دي د A پیل سره.

۵ . ۳ . ۲۰ بیلګه: Θ دې د ګروپ $Z_6 = (Z_6, +, -, 0)$ یوه کونګروانیڅ اړیکه وي، د کونګروانیڅټولګیو $\{2,5\}$, $\{1,4\}$, $\{ 0,3 \}$ سره.

نو $Z_6 / \Theta = (Z_6/\Theta,+,-,0)$ د $Z_6 / \Theta = \{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\}\}$ او $\Theta = \{0, 3\}$ سره. په څرګند ډول باور لري $Z_6 / \Theta = Z_3$ ، چیرته چی Z_3 څیوکلیکي یا بیرته راګرزیدونکی ګروپ دی د درې توکو سره. (وریسی څیره دې وکتل شي)



څیره ۲۸

طبعاً د یوه الجبر کونګروانیڅ اړیکي، لکه لاندې الجبرونو ته ورته، یو.ترون یا لاټیس جوړوي. د دې د کتلو لپاره ذا لاندې لاس ته راوړني ته اړیو:

۵ . ۳ . ۲۱ جمله: A دي يوالجبر وي او R دې د Con A يو ناتش برخډيرى وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in \mathrm{Con}\, A$$

اوبې يا ثبوت: f دې د A يو n–ځايزه بنستيزه کارونه يا عمليه وي، او وې دې: $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in R$ ، نو باور لري: $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in \Theta$ او له دې امله

$$f(a_1,\ldots,a_n)\ \Theta\ f(b_1,\ldots,b_n)$$

د ټولو $\Theta \in R$ لپاره. له دې امله باور لري

پای $f(a_1,\ldots,a_n)\ \ R\ f(b_1,\ldots,b_n)$

په دې پسې به وښوول شي چې د $\Theta, \Psi \in \mathrm{Con}\, A$ لپاره تل $\Theta, \Psi \in \mathrm{Con}A$ او $\Theta \vee \Psi \in \mathrm{Con}A$ باور لري،

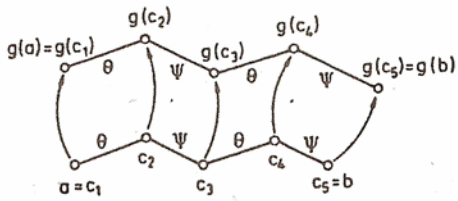
د $\wedge$ او $\vee$ سره لکه د مخه مو ، چې و ښوول.

په نورو ټکو يا کليمو سره په Θ او Ψ کې غټې خوندي اکويوالنځ اړيکى او کوچنى Θ او Ψ خوندي لرلي ايکو- يوالنځ اړيکي دواړه اوتوماتيك کونګروانيځ اړيکي دي.

په داسې حال کې چې $\Theta \wedge \Psi \in \mathrm{Con}\, A$ په دې د مخه جمله پسې ترلي لاس ته راځي د $\Theta \vee \Psi \in \mathrm{Con}\, A$ ښونه په لاندې ډول سرته رسيدلي شي:

داچې $\Theta \vee \Psi \subset \mathrm{Eq}\, A$ روښانه ده نو لکه د مخه مو، چې ښوولې، بسيا کوي چې د $\Theta \vee \Psi$ زغموالى د $A = (A, F)$ ترانسليشن سره وښوول شي. وي دې $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ او $f \in F$ د $g(x) = f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$ يو ترانسليشن د او $a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n \in A$ سره.

نو $(g(a),g(b)) \in \Theta$ د ثبوت دی. جمله د
توکو $c_1,\ldots,c_n \in A$ موجودیت لاس ته راکوي
د $a = c_1 \Theta c_2 \quad c_3 \Theta c_4 \ldots c_n = b_n$ سره. دا چي g
د Θ همدا ډول د Ψ سره زغمور ده، نو لاس ته راځی:
$$g(a)=g(c_1)\Theta g(c_2) \Psi g(c_3) \Theta g(c_4) \ldots g(c_n) = g(b_n)$$
له کومی چی د ۵.۲.۰.۱۰ پسی $(g(a),g(b)) \in \Theta \vee \Psi$ ورکوي،
لکه څنګه چی د غوښتلو وو (دا پسی څیره دې وکتل شي).



څیره

دا پورته راوړلی فکرونه کیدی شي چی په لاندې ډول راټول شي:

۳.۵ . ۲۱ جمله: د هر الجبر A لپاره $(\mathrm{Con}\,A, \wedge, \vee)$ د $(\mathrm{Eq}\,A, \wedge, \vee)$ یو لاندې الجبر دی. په ځانګړي توګه $(\mathrm{Con}\,A, \wedge, \vee)$ یو تړون یا فرباند دی (د A کونګرو- اینځفرباند یا کونګروانیځ تړون)

د دې جملی له مخه تیرې جملی څخه ترلی لاس ته راوړنه لاندې هم ده:

۳.۵ . ۲۲ جمله: د هر الجبر A او هر برخه‌یيري $X \subseteq A^2$ لپاره

$$\Theta(X) = \bigcap\{ \Theta \in \text{Con } A | \Theta \supseteq X\}$$

یو کونګروانینځ اړیکه په A ده، دا په دې مانا
چې $\Theta(X) \in ConA$. په ښکاره ډول $\Theta(X)$ په A
باندې کوچنی کونګروانینځ اړیکه ده، چې X خوندي لري.
دلته $\Theta (X)$ هغه د X څخه جوړه شوې یا تولید کونګرو-
اینځ اړیکه بلل کیږي. د پایډیري $X=\{(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)\}$
لپاره زیات وخت داسی لیکل کیږي $\Theta((a_1,b_1),...,(a_n,b_n))$
د $\Theta(X)$ په ځای. د $Y \subsetneq A$ لپاره په زیات وخت کی په ساده
توګه د $\Theta(Y^2)$ اود $\Theta(a_1,...,a_n)$ په ځای $\Theta(Y)$ لیکل کیږي،
که $Y = \{ a_1,...,a_n \}$ وي. د $\Theta(a,b)$ بنې کوانګروانینځ
اړیکی د $a \neq b$ سره اصلي کوانګروانینځ بلل کیږي.
لکه په لاندې الجبرونو کی ، دمخه دې وکتل شي، کیدی
شي، چې له X و $\Theta(X)$ ته تلونکی تولیدي پروسی په
روښانه ډول تشریح کړای شي یا روښانه شي. د په ساده
توګه داسی کیږي، چې کونګروانینځ اړیکي دلاندې الجبر-
ونو د بنسټډیري په څیر تشریح کړای شي: A دې یو الجبر
وي د تیپ f د بنسټډیري A سره. د نوي الجبر بنسټډیری
A^2 دی. د هر n -ځایزې عملي سومبول $f \in f$ همداسی
یو n-ځایزه عملیه f_2 په A^2 تعریفوي د

$$f_2((x_1,y_1),...,(x_n,y_n)) = (f_A(x_1,...,x_n),f_A(y_1,...,y_n))$$

سره.

بیا د هر $a \in A$ لپاره توکی (a,a) د صفرځایزې عملیي
په څیر ورزیاتیږي، په دې برسیره د

$$s((x,y)) = (y,x)$$

سره یوه یوځایزه عملیه تعریفیږي او بالاخره په لاندې توګه تعریف شوې دوه ځایزه عملیه:

که $y_1 = x_2$ وي $t((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1,y_2)$

په بله توګه (x_1,y_1)

د فامیل F سره، چې له عملیو

$$f_2\,(f \in f),\,(a,a)\,(a \in A),\,s,\,t$$

څخه جوړ وي، هغه غوښتونکی الجبر لاس ته راځي.

(ښوونه دې د کورکار وي)

۵ . ۳ . ۲۳ جمله: د هر الجبر A لپاره باور لري

$$\text{Con}\,A = \text{Sub}\,(A^2, F_{Con})$$

دا په دې مانا، چې په A باندې کونګرواینځ ټیک د (A^2, F_{Con}) لاندې الجبرونو بنسټيزي دي.

کیدي شي ، چې سیده په کونګروایتخ اړیکو وکارول شي یااستعمال شي. څکه چې باور لري $\Theta(X) = \langle X \rangle$، د کوم سره، چې $\langle X \rangle$ کوچنی X خوندي لرونکی د (A^2, F) لاندې الجبر په نخښه کوي. د $\Theta(X)$ یو بل جوړځیزه روښانونه به په جمله کی ورکړ شوې وي، چیرته چې د پولینوم کلیمه په واك کی لرو. یوه بله د کونګروینځ اړیکو او لاندېالجبرونو ترمنځ اړندونه په لاندې جمله کې روښانه شوې ده، چی ښوونه یی بیا هم ګرانو لوستونکو ته پاتی ده.

د دې له مخه یو بل تعریف : د هر ډیري A دې $\Theta \in \text{Eq}\,A$

او $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$[X] = \bigsqcup_{x \in X} [x]\Theta$$

دا په دې مانا چې $[X]\Theta$ د هغو ایکویوالنت اړیکوΘ ټولنه ده، کوم چې یو $x \in X$ خوندې ولري.

۵ . ۳ . ۲۴ جمله : وي دې A یو الجبر، $\Theta \in ConA$،
او $B \in Sub\,A$. نو باور لري

$$[B]\Theta \in Sub\,A.$$

عمومي الجبر تیپ او داسې نور لاندې الجر

۶ تړوني Verband (lattice)

۶ . ۱ تړوني او مکمل یا پوره تړوني

د ګروپ تیوري او کړی تیوري ترمنځ غبرګوالی نوري تیوري،
په ځانګړي توګه د تړونی تیوري رامنځ ته کړه یا راپورته کړه.
دا له دې لاندې څخه لاس ته راغله: د یوه ګروپ لاندېګرو-
پونه او هم د ګروپ نورمالپروېشوني او په همدې توګه د
یوې په خوښه کړی ټولو لاندېکړی اویا ټول (دوه اړخیزو،
کیڼ اړخیز ، ښي اړخیز) ایدیالونه نسبت د ډېری تیوري
خوندیونی ته-چی نیممنظم یا نیمترتیب دي-هلته دا نیممنظم
یو څو بنسټیز خویونه لري.

۶ . ۱ . ۱ تعریف : یوه نیمترتیب ډېری S تړونی بلل
کیږي، که هغه دا لاندې دوه خویونه ولري:
الف ۱ . د توکو $a, b \in S$ هرو جوړو لپاره په S کی یو داسی
توکی $c = a \cap b$ شته. چی د a او b غوڅي بلل کیږي، د
کومو لپاره چی

$$c \leq a \quad , c \leq b$$

باور لري، که یو بل توکی 'c موجود وي، چې هغه همدا شرطونه $c' \le b$, $c' \le a$ پوره کړي ، نو $c' \le c$ دی.
الف ۲) د توکو $a, b \in S$ هرې جوړې ته په S کې یو توکی d ، چې د a او b ټولنه بلل کیږي، شته، دکوم لپاره چې
$d \ge a$, $d \ge b$
باور لري، او هر بل داسې توکی 'd د $d' \ge b$, $d' \ge a$ سره دا اړیکی $d \ge d'$ پوره کوي.
په ښکاره توګه د دوه توکو a ، b دا ټولونه $a \cup b$ او غوځی $a \cap b$ له دې سره یواځني ټاکلي دي.دا هم په ښکاره توګه ساده لیدل کیږي، چې هر نیممنظم ډیری ، یوه تړون ته په ځټ یا مخامخ ایزومورف ډیري (پرتله برخه ۲) په همدې ډول یو تړون دی. په کومو کې، چې کلیمی غوځی او ټولنه یو بل ته دوه ایزې یا دوال Dual کلیمې دي. پس کیدی شي، چې د کوم ګروپ G د یوه لاندېګروپ له تړوني او همداسی د دې ګروپ G د نورمالپرویشوني له تړوني ځخه وغیرو، او همداسی د یوې کړی R د لاندې کړیو تړون او همداسی د دې کړی R د ایدیال د تړونو ځخه وغیرو، که دا ایدیالونه کینې او ښې هم وي. په دې ټولو حالتو کې د لاندېګروپونو (لاندېکړیو) A , B د غوځی ځخه د هغو ډیرښتیوریکی غوځی $A \cap B$ پوهیږو، د ټولنی په ځیر د دې لاندې ګروپونو (لاندېکړیو) ځخه جوړ شوي لاندې‐ ګروپونه(په همدې ورته توګه لاندېکړی) { A , B } .
په ټولیزه توګه کیدی شي، د یوه الجبر د لاندې الجبرونو.

ترون ښخه وغېږېږو. د ترون لپاره يوځو نورې بېيلګې هم راوړو.
د يوه ډيرې M ټول لاندې ډيرې نسبت د ډيريتيوري خوند-
بوني ته يو ترونی جوړوي، په کومو کی چی غوڅي او ټولنی
د ډيريتيوري د موخی يا هدف په ښير پوهيدل کيږي، داد
لاندېډيريو M ترون به وريسی هم زيات وکارول شي.

۶ . ۱ . ۲ **جمله:** هر لايني منظم ډيری L يو ترون دی،
او دا د

$a \cap b = a \ , a \cup b = b$

سره د $a, b \in L, a < b$ (دې ته دلته بيا هم ګوته نيسم،
چی دا په لاتين تورو ليکنه له کينې لورلوستل کيږي) له امله.
د پيداينېتي يا طبيعي ګڼونو ډيری يو ترون دی، که د نظم
اړيکي د ويشوړوالی اړيکی ونيول شي، د غوڅي رول دلته
غټ ګډ پرويشونی لوبوي او د ټولنی رول کوچنی ګډ زيات-
څله لوبوي. (دا د غ.ګ .و او ك.ګ.ز.موضوعګانی ځما د
شميرپوهنی په کتاب کی پوره څيړل شوې)
ترونونه د الجبر يو ځانګړی حالت دی. کيدی شي ، چی
ترون بي د نيمنظم له استعمال ښخه،يواځي د خويونو له
مخی تعريف کړی شي، چی غوڅي او ترون د بينار اړيکو
په ښير بايد ولري:

۶ . ۱ . ۳ **جمله** : ډيریS د دوه بينار يادوه ګونو اړيکو
$a \cup b$ او $a \cap b$ سره هلته او هلته يا ټيك هلته يو ترون
دی، که دا عمليي لاندې کتمټ اړيکی پوره کړي:

یا دونه: لوستونکی دې بیا هم ماته بخښنه وکړي، که
دا ساده کلیمه بیا دلته کوته لکه کړم، چی دا هلته او هلته
په دې مانا دی، چی که چیرې دا شرطونه پوره وي، نو دا
یو تړون دی. اوپه څټ: که دا الجبر یو تړون وي ، نو دا
شرطونه پوره دی. دا په دې مانا، چي د یوه څخه بل لاس
ته راځي او په څټ

$$II_1.\quad a \cap a = a,\quad a \cup a = a$$

$$II_2.\quad a \cap b = b \cap a,\quad a \cup b = b \cup a$$

$$II_3.\quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c),$$

$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c):$$

$$II_4.\quad a \cap (a \cup b) = a \cup (a \cap b) = a$$

موږ لمړی نیسو ، چی یو تړون S ورکړ شوی دی، عملیې
$a \cap b$ او $a \cup b$ د الف۱ او الف ۲ لاندې تعریف شوې
دي یا پیژندلای شوي دي. د II_1 او II_2 باوري کید نه بیا
روښانه ده. موږ اوس خوي II_3 ازمایو او دا د غوڅي
لپاره. له لمړي ۱ څخه لاس ته راځي:

$$(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq a.$$

$$(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq b,$$

$$(a \cap b) \cap c \leq c$$

همداسی لکه د لمړي ۱ پسی

$$(a \cap b) \cap c < b \cap c,$$

$$(a \cap b) \cap c < a \cap (b \cap c)$$

لاس ته راځي. په برابره یا همدې توګه دی

$$a \cap (b \cap c) < (a \cap b) \cap c$$

له دې سره II_3 باوري کيږي

وريسې بيا د لمړي ۱ پسې روښانه دي

$$a \cap (a \cup b) < a;$$

په همدې توګه له بلې خوا $a < a$ باور لري او د لمړي۲

له امله $a < a \cup b$ ، پس د لمړي ۱ پسې دی

$$a < a \cap (a \cup b)$$

له دې څخه د II_3 باوري کيدنه لاس ته راځي.

اوس دې يو ډيریS د دوه بينار يا دوه ګونو اړيکو سره ورکړ

شوي وي، کوم چې خويونه II_1 او II_4 لري. د $a, b \in S$

لپاره خويونه

$$a \cap b = a, \quad a \cup b = b \qquad (1)$$

تل سملاسي پوره دې يا پوره نه دي. که $a \cap b = a$ وي نو

له II_4 او II_2 څخه

$$(a \cup b) = (a \cap b) \cup b = b$$

لاس ته راځي.

که د دې په څېر $a \cup b = b$ وي، نو II_4 پسې لرو

$$a \cap b = a \cap (a \cup b) = a$$

که د توکو a او b لپاره مساوات (۱) باور ولري،

نوکيږدو $a \leq b$. له دې سره په ډيريS کی يو نيمنظم

پلې کيږي. په رينبتونی $a \leq a$ د II_1 په بنسټ دی.

که په دې ورزيات $a \leq b$ او $b \leq c$ باور ولري، يعنی

$$a \cap b = a, b \cup c = b ،$$

نو د II_3 سره سم لاس ته راځی:

$$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a$$

دا په دې مانا، چې $a \leq c$. بالاخره دی: $a \leq b$, $b \leq a$,
پ، $b \cap a = b$, $a \cap b = a$ له II_2 بیا لاس ته $a = b$ راځي .
پسی ترلی د لمړي ۱ شرط باوړپوالی یا باوریتوب ښایو. له
$(a \cap b) \cap a = a \cap (a \cap b) = (a \cap a) \cap b = a \cap b$
څخه لاس ته راځي $a \cap b \leq a$ ، په ورته توگ کیدی شي
$a \cap b \leq b$ وښوول شي.

د دې په څټ په S کی دې یو په خوښه توکی c' ټاکلی وي،
کوم چی شرطونه $c' \leq a , c' \leq b$ دا په دې مانا چی
$$c' \cap a = c' , \quad c' \cap b = c'$$
پوره کوي، نو باور لري
$$c' \cap (a \cap b) = (c' \cap a) \cap b = c' \cap b = c'$$
له کوم چی $c' \leq a \cap b$ لاس ته راځي. دا توکی $a \cap b$ په
تعقیب د توکو a او b غوځی د لمړي ۱ په موخه یا هدف
انځوروي. په ټیك دې سره سمه توگه توکی $a \cup b$ ښوول
کیدی شي، چی د توکو a او b ټولنه ده، د لمړي ۲ په
موخه یا هدف.

څمور د ترون د کلیمي دوم تعریف په گوته کوي، چی ترون
د ټولیز الجبر پریمیتیو ټولگي یا ساده ټولگی جوړوي، د
دې دوه دوه ځایزو عملیو سره(دا مو د مخه په گوته کړي
وو، چی ساده ټولگی څه ته وایي)
دا د ترون د کلیمي هغه زړی دی، څنگه چی دا د لاندې
ترونو او ایزومورفو څیرونو او د ترونونو د خوندیونو لپاره
په پام کي نیول کیږي.

۶ . ۱ . ۴ **تعریف** : یو د ترون S لاندېډیری T لاندېترون بلل کیږي، که دا د مخ ته تعریف شوې، د الجبر په موخی راوړل شوي ترون، یو لاندې الجبر انځور کړي. د نورو ټکو سره یا کلیمو سره یا په بل ډول T د هرو دوه توکو a او b غوځی $a \cap b$ او د هغو توکو ټولنه $a \cup b$ خوندې لري، نسبت وهغو عملیو ته چی په ترون S کی تعریف شوي دي، چی T پخپله یو ترون شي وهغو عملیو ته چي په S کی تعریف شوي وي.

دې ته دې پام وي، چی د یوه ترون S یو لاندې ډیری T نسبت په S کی تعریف شوي نیمنظم ته چی هغه په کی هم باور و لري، ښوول کیدی شي، مګر دا ضرور نه ده یا په نورو کلیمو ، تل داسی نه ده، چی دا دې یو لاندېترون جوړ کړي. د ګروپ G د ټولولاندېګروپونو ترون د ډیریتیوري له مخي نظم راوستی شي، خو دا ترون د ګروپ G د ټولو لاندېډیریو ترون لاندېترون نه انځوروي، ځکه چی ټولنه په دواړو ترونونو کی مختلفی ماناوې لري. په همدې توګه د یوې کړی R د لاندېکړیو ترون هم همداسی دی، چی په ټولیزه توګه دکړی د زیاتونیګروپ لاندېګروپونه ترون نه جوړوي.

۶ . ۱ . ۵ **جمله** : د یوه ګروپ G د نورمالپرویشونو ترون د زیاتونګروپ G د ټولولاندېګروپونو لاندې ترون نه دی، چی دا مو د مخه د ګروپتیوري کی ښوولی دی.

۶ . ۱ . ۶ **تعریف** : د یوه تړوني S را په څتکیدونکی یواځنی څیرونه یا په بل عبارت یو اینجکتیوه څیرونه u په تړون S' باندې یوه ایزومورفه څیرونه ده یا په بل عبارت یوه ایزومورفه خوندیونه ده د S په S' کی ، که د په خوښه توکو $a , b \in S$ لپاره

$$(a \cup b) u = au \cup bu \; . \quad (a \cap b) u = au \cap bu$$

باور ولري

یادونه : د u لپاره په کتابونوکی زبات وخت یوناني توري ځاي په ځاي کیږي، مګر زه دا ستونځي لرم، چې یوناني توري مې په پروګرام کی نه شته. هیله ده چې څیرونی او د یوه ډیری توکی توپیر ته به د ګرانو لوستونکو پام وي) دا د S او S' یو ایزومورفیزم دی، چې د ټولیز الجبر په څیر راوړل شوي تړوني یې یو له بل سره لري.

۶ . ۱ . ۷ **جمله** :: د یوه تړوني S ایزومررف خوند یرنه u په تړونS' کی.د نیممنظم ډیریو په موخه یا هدف د ډیري S په ډیرې S کی یو ایزومورفیزم انځوروي.

اوبی : د اوبیونی لپاره ټکو $a , b \in S$. که $a < b$ وي یعنی $a \cap b = a$. نو وبه لرو

$$(a \cap b) u = au \cap bu = au$$

او له دې امله لاس ته راځي $au < bu$. که دا پام په څټ یا په برعکس لور وکړو او وکاروو. چې u یو یواځنی په څتکیدونکی دی. نو له $au < bu$ څخه هم $a < b$ لاس

ته راځي.

دا پورته بیلګی را ته ښايي، چی په څنګ ثابتونه باورنه لري.
د دوه ډیریو S او 'S لپاره ، چی نیممنظمي دي، يو ایزو-
مورف څیروني u ته د S په 'S کی، هلته اړتیا یا
ضرورت شته، چی S او 'S دواړه ترونونه وي. دا د S
ایزمورفی څیرونی کي په 'S باندې بل ډول ځانونه نیسي.

۱۶ . . ۸ جمله : که ترونونه S او 'S ورکړ شوي وي،
نو د نیم نظم په موخه هر ایزمورف څیرونه د S په 'S
باندې ترون S ایزمورف په ترون 'S باندې انځوروي.
اوبی : په ریښتیني د $a, b \in S$ سره له $a \cap b \leq a$
څخه هم $(a \cap b)u \leq au$ او په همدې توګه

$$(a \cap b)u \leq bu$$

که $c' \in S$ داسی وي، چی $c' \leq au$ او $c' \leq bu$ باور
ولري، او c د S هغه توکی وي، د کوم لپاره چی
$cu = c'$ دی، نو لاس ته راځي $c \leq a$ او $c \leq b$ دا
په دې مانا چی $c \leq a \cap b$ له کوم څخه چی
$cu < (a \cap b)u$ لاس ته راځي. له دې سره سم
لاس ته راځي

$$(a \cap b)u = au \cap bu$$

د ټولني لپاره یی ښوونه یا اوبیونه په همدې توګه ده. موږ
دا هم په پام کی نیسو، چی په ترونونو باندې د هومورفیزم
اوټولی هغه کیلمي چی په خوښه، د ټولیزالجبرونو په ساده

یا پریمیتو ټولګیو کارول کیږي، کارولی شو. (دلته نورې بیلګي هم شته خو هغه موضوعګانی موږ نه دې څیړلی ، له دې امله یې نورې زه هم دلته نه ګوته لکی کوم)
د تیرو بینار اړیکو په بنسټ(لمړی برخه دې وکتل شي)، په یوه ډیرې M باندې بینار اړیکی یو ټرونې جوړوي، کوم چې د M×M ډیري د ټولو لاندې ډیریو سره پریوځي، یا برابر دی. په همدې توګه په یوه ډیري M باندې تعریف شوي ایکویوالنت اړیکي یو ټرون جوړوي، لکه په برخه ۱ کی چې ښوول شوي دي. دا د ایکویوالنت اړیکو ټرون د بینار اړیکو د ټرون لاندې ټرون نه دی.

۶ . ۱ . ۹ جمله: هر ټرون په یوه ځانګړي ډیري باندې تعریف شوي ایکویوالنت اړیکو ټرون کی ایزومورف خوندې دی.
(Whitman, Bull.Amer. Math. Soc 52(1946), 507 - 522)

۶ . ۱ . ۱۰ جمله :په یوه ورکړ شوي ډیري باندي تعریف شوی ټرون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګروپونو ټرون کی ایزومورف خوندي دی.
(Brkhoff , Proc .Cambr.Phil.Soc 31(1935) , 433 - 454)
له دې سره سم هر ټرون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګرو- پونوټرون کی ایزومورف خوندي دی.
ډیر دا مخ ته راوړل شوي ټرونونه – لکه د یوه ډیري M لاند- ډیریو ټرون ، د یوه ګروپ G لاندېګروپونو ټرون، د یوې

کړی R د ایدیالونو ترون ، په یوه ډیرې کی د ایکویوالنځ-
اړیکو ترون، - دا سی خویونه لري، د هغو غوځی او ټولنه
نه یواځي د دوه توکو لپاره بلکه د اسوشیاتیو قانون سره
سم د زیاتو توکو لپاره روښانه یا تشریح شوي ده، بلکه د
ناپای ډیرو ډیریو لپاره هم.

په بل ډول افاده کوو، دا ترونونونه دلاندي تعریف سره سم
پوره ترونونه انځوروي:

۶ . ۱ . ۱۱ تعریف : یو نیم منظمډیری S پوره ترون یا
مکمل ترون بلل کیږي، که په خوښه ناتش لاندیډیري $A \subseteq S$
لپاره په S کي توکي c او d د لاندې ورکړشوو خویونو سره
سم موجود وي:

الف ۱ . د ټولو $a \in A$ لپاره نامساوات $c \leq a$ باور لري،
هر وریسی توکی c' د $c' \leq a$ سره د ټولو $a \in A$ لپاره
شرطونه $c' \leq c$ پوره کوي.

دوم ۲ - د ټول $a \in A$ لپاره نامساوات $d \geq a$ باور
لري، هر اوریسی توکي d' د $d' \geq a$ سره د ټولو $a \in A$
لپاره شرطونه $d' \geq d$ پوره کوي.

دا یواځنی ټاکلی توکی c او d د لاندیډیري A د توکو
غوځی او همداسی ټولنه بلل کیږي. د سومبولونو سره
کیدی ، چی c او d په لاندې توګه انځور شي:

$$c = \bigcap_{a \in A} a, \quad d = \bigcup_{a \in A} a$$

یا پیژند نخښه i یو ټاکلی پیژندډیري I کی وخغلي
یعنی i ∈ I، په لاندي بڼه هم لیکل کیږي

$$c = \bigcap_{i \in I} a, \quad d = \bigcup_{i \in I} a$$

طبعآ یو پوره ترون یو ترون هم دی، په ورسره بلده موخه یا هدف.

۶ . ۱ . ۱۲ تعریف :د پوره ترون S د ټولو توکو غوڅی د ترون صفرتوکی بلل کیږي او په سومبول 0 سره په نخښه کیږي. دا توکي د لاندې درې شرطونو، هر یوه سره یوا- ځنی ټاکل کیدیشي. د ټولو a ∈ S لپاره باور لري

$$1)\quad 0 \leq a; \quad 2)\ 0 \cap a = 0; \quad 3)\quad 0 \cup a = a.$$

۶ . ۱ . ۱۳ تعریف : د یو پوره ترون د ټولو توکو ټولنه د ترون یویتوکی بلل کیږي اود سومبول 1 سره په نخښه کیږي. دا سي یویتوکی د لاندې درې په خوښه شرطونو، له یوه څخه یواځنی ټاکلی دی : د ټولو a C S لپاره باور لري

$$1')\quad 1 \geq a; \quad 2)\ 1 \cup a = 1 \quad; \quad 3')\ 1 \cap a = a$$

طبعآ هغه ترونونه چی پوره ترونونه نه دي کړی شي، چی صفرتوکی او یویتوکی (او یا یو له دوي څخه) ولري.
د یوه ګروپ G د لاندې ګروپونو په ترون کی د هغه صفر توکی یونلاندېګروپ سره او یویتوکی یی پخپله د G سره انځوریږي، د یوي کړی د لاندېکړیو په ترون کی د صفرتوکی د صفر لاندېکړی سره او پخپله د کړی R

سره انځوريږي، د يوه ډيري M ټولو لاندې ډيريو ترون کې د تشډيري او پخپله د ډيري M سره انځوريږي.
د پرويشنې قانون له مخې منظم يا تنظيم شوي د طبيعي ګڼونو ترون او د ځنځيرونې ، چې پخپله طبيعي نظم يې جوړوي، هر وار يې صفر توکې ګڼ ۱ دي، په داسې حال چې يوېتوکې موجود نه دي.

۶ . ۱ . ۱۳ جمله: يو نيم منظم ډيري S هلته او هلته يوترون دي، که هغه يو يوېتوکي ولري او په هغې کې د هرو، په خوښه ناتش لاندې ډيريو لپاره غوڅي موجود وي.
اوبې : د ښوونې لپاره بسيا کوي، که داسې فکر وکړو، چې د يوېتوکې د موجوديت او د د ټولو غوڅيو له موجوديت څخه د ټولنې موجوديت لاس ته راځي. A دې د S يو ناتش لاندېډيري وي. په S کې داسې توکيb موجود دي د کوم لپاره چې $b \geq a$ دي، د ټولو $a \in A$ لپاره، داسې يو توکې تل دا يوېتوکې دي، B دې د ټولو داسې توکو يو ناتش لاندېډيري وي او d دې د هغو غوڅې وي :

$$d = \bigcap_{b \in B} b$$

موږ به سملاسې وښايو، چې d د لاندېډيري A ټولنه انځوروي. په رېښتيني سره $a \leq b$ دي، د ټولو $a \in A$ لپاره او د ټولو $b \in B$ ، له دې امله $a \leq d$ باور لري. وريسې دې $s \in S$ داسې وي، چې $s \geq a$ د ټولو$a \in A$ لپاره دي.

له دې څخه $s \in B$ لاس ته راځي او له دې سره $d \leq s$.
په دې ډول دی

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

د یوه نیم منظم ډیري خویونه، چې یو پوره ترون(او یا هم یو ترون) وي، ځان په یوه په ځټ ایزومورفیزم ته لاښودوي (د دې سره دې لمړی برخه پرتله شي)، مور کړی شو، چې د همدا اوس ښوول شوو جملو څخه او د هغو د نیونو یا فرضیو څخه هم د صفر توکي موجودیت او د ټولو لاندېډیریو موجودیت و غوښتل شو.

۶ . ۱ . ۱۴ **تعریف:** د یوه نیم منظم ډیري M څیرونه u په نیم منظم ډیري N کی، په کوم کی چې
له $a , b \in M , a \leq b$ څخه تل $au \leq bu$ لاسته اځي، مونوتون monoton بلل کیږي(مونوتون په دې مانا، چې توکی یو په بل پسی یا لویږي او یا کوچني کیږي). یو ترون S هلته او هلته پوره ترون دی که دS په هر مونوتون څیرونی u په خپل ځان باندې فیکس توکی موجود وي، یعني توکي، د کومو لپاره چې $au = a$ دی

(Tarski , Pacif. J. Math.5 (1955) , 285 - 309 ;
David Ö Pacif. J . Math 5(1955) 311 - 319)

لکه د مخه تیرو درسونو چې وښول شو، هر نیم منظم ډیري M د ټولو لاندېډیریو په پوره ترون M کی خوندي ده.

مور غواړو چی دا لاندي جمله وښایو

۶ . ۱ . ۱۵ جمله : هر ترون کیدی شي ، چی په یو پوره ترون کی ایزومورف(د ترونونود ایزومورفي په موخه، پرتله دمخه همدا برخه) خوندې شي.

دا جمله د راتولنکي جملی څخه لاس ته راځي، چی نسبت و مخ ته تیره لمړی برخی کی وینا ته لږ تیزه ویناد :

۶ . ۱ . ۱۶ جمله : هر نیم منظم ډیری M په یو ټاکلي ترون S کی ایزومورف خوندې دی، او دا په داسی توګه چی د هر لاندېډیري M A لپاره و کوم ته چی په M کی غوڅی یا ټولنه موجود ده، چی دواړه د u په خوندیونه کی و بل ته وړل کیږي: دا داسی بلل کیږي، چی دی

$$\Big(\bigsqcap_{a\in A} a\Big) u = \bigsqcap_{a\in A} au \quad , \quad \Big(\bigsqcup_{a\in A} a\Big)u = \bigsqcup_{a\in A} au \qquad (2)$$

دا په برخه ۱ کي جوړ شوي د M خوندیونه په M کی، په روښانه توګه مخ ته لرونکی شرطونو لپاره بسیانه کوي.

مور په لاندې توګه مخ په وړاندې خو: لمړی نیسو چی ډیری M یو صفر توکی لري، که نه نو M ته یو توکی 0 صفر ورزیاتوو.

۶ . ۱ . ۱۷ تعریف : یو ناتش لاندېډیری M X په M کی یو ایدیال بولو که:

اول) X و هر خپل توکي x ته تړل توکي y هم لري

د $y \leq x$ سره.

دوم) د هر $X' \subseteq X$ لپاره، د کوم لپاره چې په M کې ټولنه موجود وي دا ټولنه په X کي هم موجود ده.

د ډیري M د ټولو ایدیالونو ډیری S نسبت د ډیریتیوري خوندیونی ته نیم منظم دی. دا چې S یو یویتوکی لري– په څرګند ډول M د خپل ځان ایدیال دی–، له دې وراخواد ایدیالونو په خوښه ډیري غوځی، چې صفر لري، او ټول د ایدیال په تیوري کی راغلي تعریفونه پوره کوي، نو ډیريS د په دې برخه کی د مخه لوستل شوو له مخی پوره ترون دی.

د یوه په خوښه توکی $a \in M$ لپاره د ټولو توکو $b \in M$ ډیری (a) د $b \leq a$ سره یو ایدیال انځوري، کوم چې د a څخه راجوړ یا تولید شوی اصلي ایدیال بلل کیږي. که هر توکی $a \in M$ د هغه څخه راجوړ یا تولید ایدیال(a)باندې تنظیم شي، نو په لمړی برخه کي لوستل شوو له مخی یو ایزومورف خوندیونه u د نیم تنمظیم شویډیر M ، په پوره ترون S کی، لاس ته راځي.

موږ نو نیسو ، چې په M کی د لاندېډیریو $A \subseteq M$ د هغو غوځی

$$c = \bigcap_{a \in A} a$$

موجود دی. پس لرو $c \leq a$ او په دې پسی $(c) \geq (a)$ د ټولو $a \in A$ لپاره.

که بیا د ټولو اصلي ایډیالونو(a) , $a \in A$ د ډیریتیور–

یکي غوښی توکی x ولري، نو $x \leq a$ دی، د ټولو $a \subset A$ لپاره او له دې امله $x \leq c$.له دې سره باور لري

$$(c) = \bigcap_{a \in A} (a)$$

او له دې سره جوخت لمړی مساوات (۲) وښوول شو.
همداسې دې و دې لاند ډیر $A \subseteq M$ ته په M کی ټولنه

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

موجود وي. نو $(a) \supseteq (d)$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره.
که یو ټاکلی ایدیال X ټول $a \in A$ ولري، نو په همدې توګه د دې ټولنه هم خوندي لري. په دې لاس ته راوړنی سره $X \subseteq (d)$ دی.
له دی امله باور لري

$$(d) = \bigcup_{a \in A} (a)$$

په دې توګه مو د (۲) دوهم مساوات وښوول، او په له دې امله د جملی اوبی پوره شو.

۶ . ۱ . ۱۸ جمله :یو نیمتنظیم شوی ډیری S هلته او هلته یو پوره ترون دی، کله چی په S کی یو صفر توکیموجود وي او هر ایدیال یو اصلي ایدیال وي.
یا دونه: د دې جملي له ښوونی څخه هم دلته تیریږو .
کیدی شی په کوروش یا خوروش کې وکتل شي..