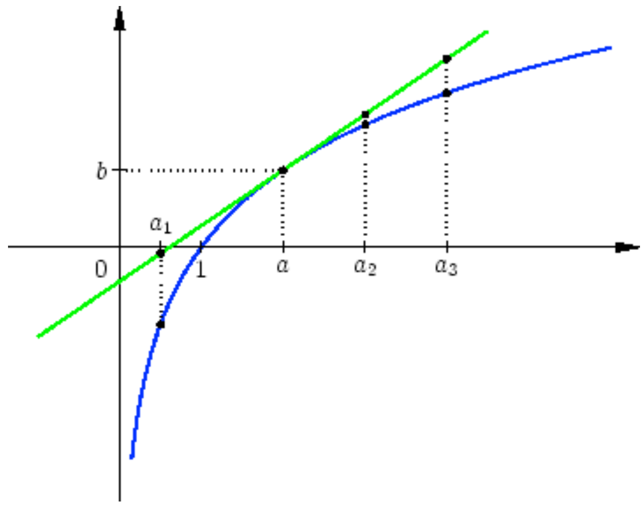
فنکشنل انالیزې

Funktionalanalysis



ډاکتر ماخان میرېي شینواری

دلوي ښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

کتاب پېژندنه

د کتاب نوم: فنکشنتيوري

ليکونکی:

ژباړی : ډاکتر ماخان،، ميری،، شينواری

د خپريدو لړی ....

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

د ژباړي برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

چاپ چارې

چاپ ته يې د هر چمتو هيوادوال مرسته په سترګو منل کيږي

.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

نيوليک

فنکشنل انلیزې Fuktionalanalysis

متریکي فضاوې

یوه ډېرۍ یا سټ M متریکي بلل کیږي، که په M باندې یو فنکشنواټن یا تابع واټن d د لاندې خویونو سره تعریف وي:

M1 زیاتیزوالی یا مثبتوالی $d(x,y) \geq 0$ او $d(x,y) = 0$ تیک هلته، که $x = y$ وي.

M2 سیومتري

$$d(x,y) = d(y,x)$$

M3 دربګوډېز – یا مثلثاتي مساوات

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

د ټولو $x, y, z \in M$ لپاره.

تابع d د M متریک په حیث هم بلل کیږي.

د متریک له لارې په کانونیکي ډول په M باندې یوه توپولوژي هم تعریفیږي. له

$$B(x_0; r) = \{x \in M : d(x, x_0) < r\}$$

سره په x_0 باندې یو واز غونداری د وړانګې r سره هم په نخښه کیږي. یوه برخه ډېرۍ $U \subseteq M$ نو له دې امله وازه بلل کیږي، که هر یوه $x \in U$ ته یوه وړانګه $r > 0$ شتون ولري، داسې چې

$B(x;r) \subseteq U$

دی.
لیکونکي: اٍپپ او هولیګ

د اویکلید یا اقلیدس متریک **Euklidische Metrik**

په $\mathbb{R}^n$ کې د اویکلید واټن

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

یو متریک دی.
مثبتوالی او سیومتري سملاسي لیدل کیږي او درېګوڼي مساوات سیده د لاندې مینکوفسکي Minkowskischen نابرابرون څخه لاس ته راځي:

$$d_2(x,y) =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k -$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هامینګ واټن **Hamming-Abstand**

پای پرلپسي له 0 او 1 د کودکول په تیوري کې (دوه بیز- -Binär) لغاتونه بلل کیږي.
د دوه n -ځایزو لغاتونو x او y د هیمینګ-واټن

$d_H(x,y) =$ د k ګڼون یا تعداد د $x_k \neq y_k$ سره $=$

یو ماتریکس دی په n -ځایزو بینارلغاتونو.
د بیلګې په توګه د $n = 3$ لپاره

$d(011,110) = 2$

او واز غونډاری $B(101;2)$ او $x = 101$ د وړانګې 2 سره توکي

$$001, \quad 111, \quad 100\,.$$

خوندي لري.
توکي چې له 101 په دوه ځایونو کې توپیر لري، په دې پورې اړه نه لري، ځکه واټن باید له دوه کوچنی وي.
مثبتوالی او سیمتري روښانه دي. د درېګوډي نامساوات د ورته واي تعریف څخه لاس ته راځي

$$d_H(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

او د مطلقه ارزښتونو

$$|x_j - z_j| = |x_j - y_j + y_j - z_j| \le |x_j - y_j| + |y_j - z_j|\,.$$

لپاره د درېګوډي نامساوات.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په متریکي فضاو کې پولې ته تلنه

په متریکي فضا M کې یوه پرلپسي (x_n) پولې $x \in M$ ته تلونکي بلل کیږي، که دا لاندې باور ولري.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

توکی x د (x_n) پرلپسي پوله بلل کیږي او یوائځنۍ ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که (x_n) د x او y په لور وهڅیږي، نو باور لري

$$d(x,y) \le d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

د ټول n لپاره، او داچې

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$$

دی، باید

$d(x,y)=0$

هم وي او له دې سره $x=y$ باور لري، داپه دې معنا چې پوله ارزښت يواځنی دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په متريکي فضا کې کوشي- پرلپسي(ترادف)
Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

په يوه متريکي فضا M کې يوه پرلپسي (x_n) کوشي – پرلپسي بلل کيږي، که د هر $r>0$ لپاره يوه پيژند نخښه يا ايندکس n_0 شتون ولري، داسې چې د ټول $m,n>n_0$ لپاره

$d(x_m,x_n)<r$

باور ولري. په ځانګړې توګه پولې ته تلونکې پرلپسې کوشي-پرلپسي ده.
که په يوه متريکي فضا M کې هره کوشي-پرلپسي په M کې يو پوله ارزښت لري، نو M پوره يا مکمل بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په M کې دې (x_n) يوه پولې ته تلونکې پرلپسي وي د پولې ارزښت $x\in M$ سره. د هر $r>0$ لپاره يو ايندکس n_0 شتون لري، داسې چې د ټولو $n>n_0$ لپاره

$d(x_n,x)<r/2$

باور لري. نو د دريګوډي نامساوات له مخې بيا دا لاندې باور لري

$d(x_m,x_n)\leq d(x_m,x)+d(x,x_n)<r/2+r/2=r$

د ټول $m,n>n_0$ لپاره. د دې په تعقيب په M کې هره پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي – پرلپسي ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی

که د يو متريکي فضا M يو واټن تابع d په يوه پورته ډېرئ $\widetilde{M} \supset M$ تعريف وي، کومه چې په M کې د ټولو کوشي-پرلپسيو پوله رازښتونه خوندي ولري، نو پايونه $\overline{M} \subseteq \widetilde{M}$ نسبت و d ته د M پوره کيدونکې بلل کيږي.

په ټوله توګه کيدی شي د M پوره کيدنه بې له په پورته -ډيرئ کې له خونديوني تعريف شي. له دې سره سرې $\overline{M}$ د پولې ته تلونکو پرلپسيو ورته ټولګي سره په نخښه کوي يا پيژني.
د ډېريو پوره کيدنه د ناپريکيدونکو توابعو په څېړنه کې غوره رول لوبوي.
خويونه، کوم چې په کې باور لري، کيدی شي د د پوله ارزښت-جوړونو له لارې $\overline{M}$ ته يووړل شي. بې ځانګړې توګه يو ناپريکيدونکی تابع همدا اوس په M د هغه ارزښتونو له لارې يواځنی ټاکل شوی دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

نورم Norm

په حقيقي يا کومپلکس وکتور فضا V يو نورم يو تابع
$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$
دی د لاندې خويونو سره:

- Positivität: مثبتوالی(زياتيزوالی)

$$\|v\| > 0$$ د $v \neq 0$ لپاره

- Homogenität: هوموجينيټي

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

- Dreiecksungleichung: درېګوډيز- مثلثاتي نامساوات

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

دلته u, v په خوښه وکترونه دي او λ یو په خوښه سکالار.

د یوه نورم په مرسته کیدی شي د

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

له لارې د دوه وکوترونو په منځ کې یو واټن تعریف شي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،هیورنر

د یوې نورمي وکتور فضا متریک
Metrik eines normierten Vektorraumes

په یوه وکتورفضا V د یوه نورم $\|\cdot\|$ دواټنتابع یا واټنفنکشن
$d(u,v) = \|u - v\|$

سره برابر دی. دا ځانګړی متریک دوه ورزیات خویونه لري:

- ترانسلیشن اینواریانځ یا د د خوژښت یا کښولو سره بې تغیري Translationsinvarianz

$$d(u+w, v+w) = d(u,v)$$

- Homogenitätهوموجینیټي

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u,v)$$

د ټولو $u, v, w \in V$ او سکالار λ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

نیم نورم Halbnorm

په یوه حقیقي یا کومپلکس وکتور فضا V باندې یو نیمنورم یو تابع
$p : V \to \mathbb{R}$

دی د لاندې خويونو سره:
HN1(HN د نيم نظم لپاره)
: ناکميزوالی يا نامنفيوالی:
$p(v) \geq 0$
HN2
:Homogenität هوموجينوالی
$p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$
HN3
:Dreiecksungleichung درېګوړي يا مثلثي نابرابرون
$p(u+v) \leq p(u) + p(v)$

د ټولو $u, v \in V$ او λ لپاره.

يو نيم نورم ټيک هلته يو نورم دی، کله چې $p(x) = 0$ فقط د $x = 0$ لپاره باور ولري.

د نيم نورم د تعريف لپاره وروستني دواړه خويونه بسيا کوي. ناکميزوالی کيدی شي له دوي لاس ته راوستل.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

له هوموجينيتي څخه سيده لاس ته راځي
$p(0) = p(0 \cdot x) = 0 p(x) = 0$
او د درېګوړي نامساوات سره
$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) =$$
$$= p(x) + |-1| p(x) = 2p(x)\,,$$
دا په دې معنا چې ناکميزوالی يا نامنفيوالی
$p(x) \geq 0$

دی، د ټولو $x \in V$ لپاره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

متريک، چې د نيم نورم څخه رامنځ ته کيږي
Metrik, induziert durch Halbnormen

که په یوه وکتور فضا V د نیمنورم یوې پرلپسي (p_k) لپاره

$$p_k(v) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \Longrightarrow v = 0$$

باور ولري، د ټول $v \in V$ لپاره، نو نیمنورم یو متریک منځ ته راوړي. د کانوني واټن تابع دا لاندې ده

$$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} \,.$$

نسبت دې متریک ته پرلپسي (v_n) ټیک هلته د v په لور ځي یا هځیږي، که

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټولو $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور ولري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د متریک د اکسیمونو څخه یوازې د درېګوډي نامساوات ساده نه دي. باور لري

$$\frac{p_k(u-w)}{1+p_k(u-w)} = 1 - \frac{1}{1+p_k(u-w)}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{1+p_k(u-v)+p_k(v-w)}$$

$$\leq \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} + \frac{p_k(v-w)}{1+p_k(v-w)}$$

او له دې سره دی

$$\leq d(u,v) + d(v,w) \,.\, d(u,w)$$

د پولې ته تلنې لپاره لومړی نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = 0$$

باور لري او یو k شتون لري، داسې چې

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

باور نه لري. له دې سره نو يو برخه پرلپسي (v_{n_j}) شتون لري چې د هغې لپاره تل
$$p_k(v_{n_j} - v) > \varepsilon > 0$$
باور لري او له دې امله
$$d(v_{n_j}, v) \geq 2^{-k}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$$
باور لري، کوم چې مخامخوالی يا تضاد دی.

له بله پلوه دې $\varepsilon > 0$ وي او باور دې ولري
$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$
د ټول k لپاره. نو يو k_0 شتون لري، داسې چې
$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)} < \frac{\varepsilon}{2}$$
باور لري. پسې هم نسبت نيممتريک ته د پولې ته تلنې له امله لاس ته راځي، چې د 1 او k_0 تر منځ دهر k لپاره يو n_k شتون لري، داسې چې د ټولو $n > n_k$ لپاره
$$p_k(v_n - v) < \frac{2^{k-1}}{k_0}\varepsilon$$
باور لري. که کيږدو
$$n_0 = \max_{k=1,\dots,k_0} n_k\,,$$
نو د ټولو $n > n_0$ لپاره باور لري
$$d(v_n, v) =$$
$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)}$$
$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\,\frac{2^{k-1}}{k_0}\,\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$
$$<$$
څه چې نسبت متريک ته پولې ته تلنه ښايي.

ليکونکي: ايپ، هيوليګ

ايپسيلون- جال **Epsilon-Netz**
د يو متريکي فضا M د يوې برخدېرئ K لپاره يو ε – جال يو پوښوونکی يا پټوونکی دی، چې د پاي ډېرو غونډارو
$B(x_1;\varepsilon),\ldots,B(x_n;\varepsilon)$

جوړ دی. دا مينيمال وړانګه $\varepsilon_n(K)$، چې د n منځټکو x_i په ښه يا اوپټيمال ټاکنې د M پوښووني ته بسيا کوي، د ε-اينتروپي ε-Entropie (فزيکي لويه چې د تودخئ پروسي خوزښتلور په نخښه کوي)بلل کيږي.
که يوه K ته د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو ε-جال شتون ولري، نو K توتالي محدود يا رابند بلل کيږي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په متريکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) او نسبي کومپاکت ډېرئ

د يوه متريکي فضا M کومپاکت برخه ډېرئ K کيدی شي په درې ورته ډولونو خويونيز شي
لومړی: هره وازو ډطريو سره د K پټه ونه يا پوښونه هر پای برخه پوښونه لري.
دويم : په K کې هره پرلپسې يوه پولې ته ت لونکې برخه پرلپسې په K کې لري.
دريم : K توتالي محدوده او پوره ده.
په پام کې دې وي، چې په $\mathbb{R}^n$ کې باوري د کومپاکت ډېرئ کرکتريزه کونه په دريم کې محدوديت او رابندوالی په ګوته کوي.

د يوه متريکي فضا M يوه برخډېرئ R نسبي کومپاکت بلل کيږي، که د $\overline{R}$ رابندوالی يا راټرلوالی کومپاکت وي، يا دې ته ورته، که په R کې هره پرلپسې يوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه به د حقيقی اعدادو مختلفې برخډېرئ تر څېړنې لاندې ونيول شی.
لومړی : انتروال $[0,1]$ د $\mathbb{R}$ يو کومپاکت (او له دې سره يو ن سبي کومپاکت) برخډېرئ ده، ځکه چې رابنده يا تړلې او محدوده ده.
دويم : انتروال $(0,1]$ د $\mathbb{R}$ کومپامت برخډېرئ نه ده، ځکه چې د بيلګې په توګه ، د، پرلپسې $1/n$ ، $n \in \mathbb{N}$ پوله خوندي نه لري. دا چې $\overline{(0,1]} = [0,1]$ دی، نو دا نيم

واز انتروال نسبي کومپاکت دی. دريم: ځلورم: انتروال $[0,\infty)$ د $\mathbb{R}$ کومپاکت برخډېرۍ نه ده، ځکه چې په حقيقت کې د وازې ډېرۍ $(n-1,n+1)$ ،
$n\in\mathbb{N}_0$ ښخه پوښ کيږي، مګر دې ته يو پای برخه پوښونه شتون نه لري. له دې امله نيم ناپای انتروال هم نسبي کومپاکت نه دی، ځکه چې د بيلګې په توګه د طبيعي اعدادو پرلپسي $1,2,\dots$ پولې ته تلونکې برخه پرلپسي نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع **Stetige Funktionen auf einem Gebiet**

په $\mathbb{R}$ باندې د(حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيزو) ناپريکيدونکو توابعو په فضا $C(\mathbb{R})$ د نيمنورم

$$|f|_{[-k,k]}=\max_{|x|\le k}|f(x)|$$

له لارې د لاندې سره يو متريک توليدوي

$$d(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{|f-g|_{[-k,k]}}{1+|f-g|_{[-k,k]}}\,.$$

نسبت دې متريک ته پولې ته تلنه په خوښه کومپاکت انتروال باندې برابرډوله پولې ته تلنه په ګوته کوي. له دې سره پورهوالی لاس ته راځي، ځکه چې په برابرډوله پولې ته تلنې سره ناپرېکيدنه خوندي پاتې کيږي.
د توليزې ساحې $D\subseteq\mathbb{R}$ لپاره به ورته توګه مخ ته ځو. د انتروال $[-k,k]$ په ځای يوه دا ساحه جوړه وونکې د کومپاکتو ډېريو پرلپسي

$$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots\subset D$$

کارول کيږي يا استعماليږي.
د $C_0(D)$ سره په D د ناپرېکيدونکو توابعو ډېرۍ په نخښه کوو، د کومپاکت وړونکي(انتقال کوونکي) سره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ازماېښتي توابع **Testfunktionen**

د يوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}$ لپاره په D باندې د ناپای ډېرواره مشتقوړ توابعو لپاره ساحه $C^\infty(D)$ ده.
د تابع لاندې فضا، چې د کومپاکت برخه ډېرئ $K \subset D$ د باندې برته ده ورکيږي، د $C_0^\infty(D)$ سره يا د ازماېښت توابعو $\mathcal{D}$ په نخښنه کيږي. دا فضا چې له شوارڅ(Schwartz) له خوا منځ ته راوستل شوې، په ټوټه انتګرالمساواتو او ديستريبوتيو تيوري مطالعه کې غوره رول لوبوي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

کمزوري يا ضعيف مشتقونه **Schwache Ableitung**

د ټوټه انتيګرال په مرسته کيدی شي کلاسيکي مشتقکليمې ټولنيزې شي. يو تابع

$$\partial^\alpha f, \quad \partial^\alpha = \prod_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$

يو په تعريف ورشو يا ساحه D تعريف شوې تابع f د کمزورې مشتق په نامه يادوو، که

$$\int_D \partial^\alpha f(x) g(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_D f(x) \partial^\alpha g(x)\, dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(D),$$

د $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$، $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$ سره باور ولري. له دې سره و ړاندنيونه ده، چې د ازماېښت توابع g لپاره دواړه انتيګرالونه شتون لري. د بيلګې په توګه دا حالت هلته رامنځ ته کيږي، که $\partial^\alpha f$ او f په هر د D په هر کومپامتبرخه ډېرئ مطلق انتيګرالوړ وي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

توپولوژيکي وکتور فضاوې **Topologischer Vektorraum**

يو توپولوژيکي وکترو فضا V يوه وکتور فضا ده، د وازو ډېريوو ياسټونو په يوه سيستم $\mathcal{U}$ باندې د لاندطخويونو سره ورکړل شوی يا روښانه شوی دی

T1

$\emptyset \in \mathcal{U}$

T2

$$V \in \mathcal{U}$$

T3

د هرو وازو ډېريو یا سټونو $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$$

T4

د په خوښه وازو ډېريو $U_i \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}\,.$$

یوه وازه ډېرئ $U(v) \in \mathcal{U}$ د یوه ټکي $v \in V$ چاپېريال بلل کيږي، که $v \in U(v)$ باور ولري.

د سرچينې یا پيل د چاپېريالونو $U_i(0)$ ډېرئ لوکال بنسټ $\mathcal{B}$ بلل کيږي، که هر چاپېريال $U(0)$ د لوکال بنسټ يو توکی خوندي ولري

$$\exists_i : U_i(0) \subseteq U(0)\,.$$

داسې يو توپولوژيکي جوړښت کیدی شي د بيلګي په توګه د يوه متريک یا نورم له لارې کره وټاکل شي یا کره شي. دا يو پولې ته تلنکليمه راکوي. يوه پرلپسې (v_n) ټيک هلته یوه کوښي پرلپسي ده، که د ټولو $U_i(0) \in \mathcal{B}$ لپاره يو اينډکس n_0 داسې شتون ولري چې د ټولو $m, n > n_0$ لپاره

$$v_m - v_n \in U_i(0)$$

باور ولري.

که v_∞ د (v_n) پوله ارزښت وي، نو د v_∞ په هر چاپېريال U کې د پرلپسې ټول

غړي پراته دي تر د پای ډېرو غړو پورې يعنې پای ډېر غړي کيدی شي له دې چاپېرياله دباندې پراته وي.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

د بانخ فضا Banach-Raum

يو نورمي وکتورفضا V د بانخ فضا بلل کيږي، که د نورم له لارې منځ ته راغلي متريک پوره وي، دا په دې معنا چې که هره کوشي پرلپسې په V کې يو پوله ارزښت ولري.

هر رابنده لاندې وکتور فضا $U \subset V$ هم د د بانخ فضا ده.
په ځانګړې توګه پای پراخيدونکي يا پای بعدې فضاوې نورمي وکتور فضاوې دي.
ليکونکي: اپپ، هيوليگ

په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپرېکيدونکي توابع
Stetige Funktionen auf einer kompakten Menge

د ناپرېکيدونکو(حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيز) توابع په يوه کومپاکت برخه ډېريو $K \subseteq \mathbb{R}^n$ باندې فضا $C(K)$ بانخ فضا ده نسبت د

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

له لارې تعريف شوي نورم ته. پوره کيدنه لاس ته راځي، ځکه چې برابرډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کيږي.
د تعريف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه يا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکيدونکې توابع بايد نه دی، ماکسيموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليگ

په کومپاکت ډېريو باندې مشتقوړ توابع
Differenzierbare Funktionen auf einer kompakten Menge

د m -ځله ناپرېکيدونکو مشتقوړ توابعو)(حقيقي – يا کومپلکس ارزختيزې) فضا $C^m(K)$ په يوه کومپاکت برخه ډېرئ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ نسبت و

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ته د تعریف شوي نورم یو باناخ-فضا ده. پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې د ټوټه مشتقونو $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ، $\partial^\alpha f$ ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع، د برابر ډوله پولې ته تلنه ساتلي پاتې کیږي.

د تعریف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه یا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکیدونکې توابع باید نه دی، ماکسیموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

p -انتیګرالوړ توابع p-integrierbare Funktionen

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $L^p(D)$ ، $1 \le p < \infty$ ، د تابع باناخ-فضا په ګوته کوي، چې هغه نسبت و نورم

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f|^p\right)^{1/p}$$

ته د ناپرېکیدونکي له لارې د د کومپاکت وړونکي ډېرئ سره ښپروکسیمي کیږي، دا په دې معناچې د $\|\cdot\|_p$ رابندونه Abschluß ده نسبت و $L^p(D)$ ته ده.

توابع فقط تر کچي صفر پورې په ډېرئ ټکي ډوله تعریف دي. سړی لیکي $f = g$ ن.ه. : نږدې هرچېرته (almost everywhere)

د توابعو لپاره، چي فقط په یو صفرډېرئ یا"فرسټ سره توپیري او داسې توابع راپیژني.

په ټیکه توګه سړی ورته والی یا اکویوالنت تر څیرنې لاندې نیسي، چې د هغوی لپاره f او g ځای نیونکي یا نماینده ګان دي.

د لبسک انیګرال په مرسته کېدی شي $L^p(D)$ په ټولیزه توګه د په خوښه لیبسک-کچوړ ډېرئ لپاره تعریف شي. د اپروکسیمیشن ته کیدی شي، ریمن-انتیګرال ته ورته د زیني توابع کارول کیږي، چې د لیبسک-کچوړ د D په برخه ډېرئ ثابت دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

محدود توابع **Beschränkte Funktionen**

د لیبسک کچوړ توابعو f د $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ساحي یا ورشو لپاره د بانخ فضا د $L^\infty(D)$ سره په نخښه کو، چې په یوه صفرډېرئ محدود دی، دا په دې معنا،چې
$$|f(x)| \le c < \infty$$
نږدې هر چیرته دی. د c کوچني بند یا بندیز یا نور هم ښه پوله د
$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)|$$
سره په نخښه کوو.
فضا $L^\infty(D)$ د ټول هرچیرته په D محدودو توابعو یوه اصلي برخه ډېرئ ده. دواړه فضاوې کیدی شي نسبت $\|\cdot\|_\infty$ ته د ناپرېکیدونکو توابعو سره جوړې یا تولید کړای شي. دا یو روښانه توپیر دی د p – انتیګرلوړ توابعو $L^p(D)$ ته.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د موزونو اریتمیتیکي او هندسي منځ ترمنځ نابرابرونونه

Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel

د زیاتیزو یامثبتو $a_1, \ldots, a_n$ ګڼونو لپاره اریمیتیکي منځ نسبت هن**دسي منځ یا وسط ته کوچنی نه دی:**

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\,.$$

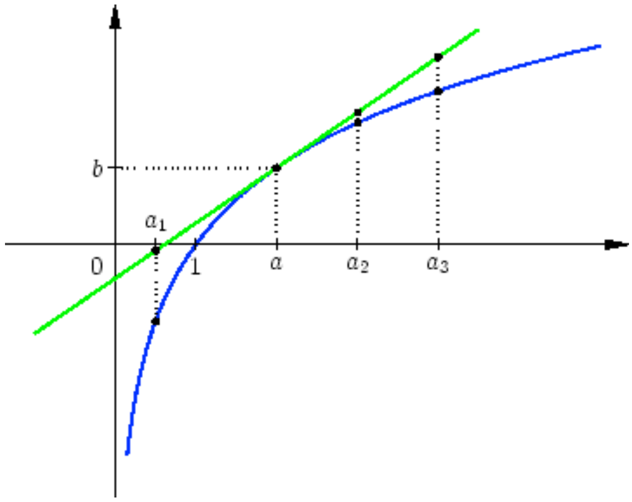
په ټولیزه توګه د مثبت وزن λ_i لپاره د $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ سره باور لري

$$\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1}\cdots a_n^{\lambda_n}\,.$$

برابروالی ټیک هلته باور لري، که $a_1=\cdots=a_n$ باور ولري.

سړی د $a=\sum_i \lambda_i a_i$ او $b=\ln a$ سره د لوګاریتم کوني وروسته موَزن نابرابرون یا نامسوات ورته غوښتني لاسته راوړي.

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \ln a\,.$$



که-لکه په مشتق کي چي ښوول شوی- وکارول شي، چي تانجنت

$$g:\ y=b+\frac{1}{a}(x-a)$$

د لوګاريتم د ګراف پورته لور ته پروت دی، نو د $\sum_i \lambda_i = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \le \sum_i \lambda_i \left(b + \frac{1}{a}(a_i - a) \right) = b + \frac{1}{a} \left(\sum_i \lambda_i a_i - a \right) = b$$

لکه چې غوښتل مو.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د انتيګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه
Höldersche Ungleichung für Integrale

وي دې $f \in L^p(D)$ او $g \in L^q(D)$ د $1 < p < \infty$ او د $1/p + 1/q = 1$
سره. نو $fg \in L^1(D)$ باور لري او لاندې د هولدر نامساوات باور لري

$$\int_D |f(x)g(x)|\, dx \le \left(\int_D |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\, dx \right)^{1/q}.$$

مساوات ټيک هلته باور لري، که د توابعو $|f|^p$، $|g|^q$ څخه يو يې نردې هر چيرته د د بل ډېرواره وي.
د پولې حالت $p = \infty$، $q = 1$ (همداسې $p = 1$، $q = \infty$ د f او g سره بدليدنې) لپاره

$$\int_D |f(x)g(x)|\, dx \le \|f\|_\infty \int_D |g(x)|\, dx.$$

باور لري
د $p = q = 2$ لپاراه دا مساوات د کوشي-شوارڅ نامساوات هم بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

فقط دا ناساده حالت $1 < p < \infty$ تر څیرنې لاندې نیسو. داپسې بې له ټولیزو بندیزونو کیدی شي ونیول شي یا فرض شي، چې انتیګرال

$$I_1 = \int_D |f(x)|^p dx \quad \text{او} \quad I_2 = \int_D |g(x)|^q dx$$

زیاتیز یامثبت دي. که د بیلګې په توګه $I_1 = 0$ وی،، نو $|f|^p$ او له دې سره به f هر چیرته ورک شي، دا په دې معنا چې، $\int_D |f(x)g(x)|\, dx = 0$ او نا مساوات به په ساده توګه پوره وی. دا چې نامساوات د سکالا کونې $f \to rf$ ، $g \to sg$ په مقابل کې اینواریانت یا بې تغیره دی، کیدی شي برسېره پردې $I_1 = I_2 = 1$ ونیول یا فرض شي.

د موَزنو اریتمیتیکي - او هندسي - یا څمکګچیز منځ ترمنځ باور لري

$$|fg| = (|f|^p)^{1/p}(|g|^q)^{1/q} \le \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q .$$

له دې سره $fg \in L^1(D)$ دی او د انتیګرالونې پسې لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)g(x)|\, dx \le \frac{1}{p}I_1 + \frac{1}{q}I_2 = 1 .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرال لپاره د مینکوفسکي ناساوات
Minkowskische Ungleichung für Integrale

د دوه توابعو f او g په $L^p(D)$ کې د $1 \le p < \infty$ سره د مینکوفسکي نامساوات باور لري

$$\left(\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

مساوات تیک هلته باور لري، که د توابعو f ، g څخه یو یې تل هر چیرته د بل ډېرواره یو نامنفي ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیک

دا چې حالت $p=1$ ساده دی، په لاندې کې به $p>1$ ونیول یا فرض شي. ورپسې دې همداسې $1/p+1/q=1$ وي او انتیګرال

$$I=\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx$$

دې بې له ټولیزو محدودیتونو زایاتیز وي. نو د درېګوډي نا مساوات سره لاس ته راځي

$$I = \int_D |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx$$

$$\le \int_D |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_D |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx.$$

د هولدر نامساوات او $(p-1)q=p$ سره

$$\le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

$$+\left(\int\limits_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int\limits_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

$$=\left(\left(\int\limits_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int\limits_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right)I^{1/q}\,.$$

د $I^{1/q}$ سره د وېشنې له لارې سرې د مينکوفسکي نامساوات لاس ته راوړي
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د سوبوليف فضاوې **Sobolev-Räume**

د ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره

$$W^{k,p}(D),\quad k\in\mathbb{N}_0,\quad 1\le p\le\infty,$$

د توابعو باناخ فضا بنايي د $\le k$ نظم د کمزورو مشتقونو سره په $L^p(D)$ او

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int\limits_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty$$

کي همداسي

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|\le k}\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D}|\partial^\alpha f(x)|$$

اړونده نورم. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|=k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

همداسې

$$|f|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k}\ \underset{x\in D}{\text{ess sup}}|\partial^\alpha f(x)|$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
په ځانګړې توګه دی
$W^{0,p}(D) = L^p(D)\,.$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه تابع
$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0,$

په n–بعدیزې یا n–پراخیدونې یونګردئ(دایره واحد)
$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$

تر څیرنې نیول کیږي. د f لپاره $s > -n$ انتیګرالوړ دی،، خکه چې د ګردئ کواوردیناتونه(پراته ولاړ محرونه) ($r = |x|$) سرې لاس ته راوړي

$$\|f\|_{0,1} = \int_D |x|^s\,dx = c_n\int_0^1 r^s r^{n-1}\,dr\,,$$

چیرته چې c_n دا $n-1$ – بعدیز حجمونو یونفضا (واحد فضا) ده. پسې دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2}x_\nu$$

د $s > 1-n$ لپاره د f یو انتیګرالوړ کمزوری مشتق دی، په سرچینه کې د سیګولاریتي سره. په غونډاري کواودینات کې سړی لاس ته رانړي

$$\begin{aligned}\|f\|_{1,2}^2 &= \int_D |f(x)|^2\,dx + \sum_{\nu=1}^{n} \int_D |\partial_\nu f(x)|^2\,dx \\ &= \mathrm{const.} \int_0^1 \left(r^{2s} + s^2 r^{2s-2}\right) r^{n-1}\,dr\end{aligned}$$

د $r = |x|$ سره. له دې سره $f \in W^{1,2}$ دی د $s > 1-n/2$ لپاره. دا چې د $n > 2$ لپاره کمیز اکسپوننتونه s هم منځ ته راتلی شي، له دې لاس ته راځي، چې مربع انتیګرالوړ مشتقونه نه اړین محدود دي. د مشتقونو کمزوروالي څخه ناپربکیدنه لاس ته راځي.

که همدا توابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| > 1\}$$

وڅیړل شي، نو f مربع انتیګرالوړدی د $s < -n/2$ لپاره او کمزوري مشتقونه د $s < 1-n/2$ لپاره مربع انتیګرالوړ دي، کوم چې بیرته د غونډاري کواوردینات

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\tilde{D}} |\partial_\nu f(x)|^2\,dx = \mathrm{const} \int_1^\infty r^{2s-2} r^{n-1}\,dr$$

سره ښووول کیدی شي.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

کمزوري مشتقونه په حقيقت کې تولګيزه يا کلاسيکي مشتقکليمه توليزه کوي، مګر قوي سينګولاريتي اجازه نه لري. د بېلګې په توګه تابع

$$f(x)=\begin{cases}1, & x_1\geq 0,\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

راوړو، په n-بعدي يا n– پراخيدوني انټروال

$$D=(-1,1)^n$$

ترڅېړني لاندې نيسو. تابع په هيوپرسطحهHyperebene

$$S=\{x\in\mathbb{R}^n : x_1=0\}$$

پرېکيدونکي ده او مربع – انتيګرالوړ کمزوری مشتق $g=\partial_1 f\in L^2(D)$ نه لري، دا په دې معنا چې مساوات

$$\int\limits_D g(x)\varphi(x)\,dx=-\int\limits_D f(x)\partial_1\varphi(x)\,dx$$

د هيڅ کوم g لپاره د ټول $\varphi\in C_0^\infty(D)$ لپاره پوره وړ دی. د دې لپاره چې دا وښايو، نو يو ازماېښت تابع

$$\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geq 0,\quad \varphi(0)>0\,,$$

ټاکو او ودې ته د $1>\varepsilon>0$ لپاره

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\varphi(x_1/\varepsilon,x_2,\ldots,x_n), & x_1\in(-\varepsilon,\varepsilon)\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}.$$

له دې سره په پورته مساوات کې د ښي اړخ لپاره راکوي

$$\int\limits_D f(x)\partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx=-\int\limits_{x_1\geq 0}\partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx$$

$$= \int\limits_{(-1,1)^{n-1}} \varphi_\varepsilon(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$\int\limits_{n-1} \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n = \text{const} > 0$$

په داسي حال کې چې په کينه خوا د کوشي-شوارځ نامساوت

$$\left| \int\limits_D g(x)\varphi_\varepsilon(x)\, dx \right| \quad \leq \|g\|_2 \left(\int\limits_D |\varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \ldots, x_n)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

$$\left(\int\limits_D |\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)|^2\, \varepsilon\, dy \right)^{1/2} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

د ε سره د صفر0 په لور ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د سوبوليو په کې خونديوني جمله**Sobolevscher Einbettungssatz**

د يوې ليښشيخ ورشو $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره د سوبوليو-فضا لپاره خونديونه

$$W^{k,p}(D) \subset W^{l,q}(D), \quad q > p, \quad \frac{k-l}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

باور لري، له کوم سره چې د $q=\infty$ لپاره تیک یوه خوندیونه په $W^{l,\infty}(D)\cap C^{l}(D)$ پسې منځ ته راځي.

د محدودې ورشو لپاره خوندیونه کومپاکتده، دا په دې معنا چې محدوده ډېرئ په $W^{k,p}(D)$ کې پولې ته تلونکې پرلپسې په کې $W^{k,p}(D)$ لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګی په توګه خوندیونه

$$W^{1,p}\subset W^{0,q}=L^{q}$$

د تابع

$$f(x)=|x|^{s},\quad s\neq 0$$

په مټه په n–بعدیز یونغونډاري

$$D=\{x\in\mathbb{R}^{n}:\quad |x|<1\}$$

څیړل کیږي. تابعه د $s>-n/q$ لپار q–انتیګرالوړ ده، ځکه چې د غونډاري کواوردینات ($r=|x|$) سره لاس ته راځي

$$\|f\|_{0,q}^{q}=\int_{D}|x|^{sq}\,dx=c_{n}\int_{0}^{1}r^{sq}r^{n-1}\,dr\,,$$

د کوم سره چې c_{n} د یوونغونډاري $(n-1)$-بعدیز حجم دی. نور پسې دی

$$\partial_{\nu}f(x)=s|x|^{s-2}x_{\nu}$$

د f یو کمزوری مشتق دی، کوم چې د $s>1-n/p$ لپاره p– انتیګرالوړ دی. دا بیرته کیدی شي د غونډاري کواوردینات له لارې وازمایل شي

$$\int_D |\partial_\nu f(x)|^p \, dx \leq |s|^p \int_0^1 r^{(s-1)p} r^{n-1} \, dr \,,$$

د کوم سره چط

$$|x_\nu|^p \leq \left(\sum_\nu |x_\nu|^2 \right)^{p/2} = r^p$$

کارول شوی. د خوندیونې جملې پسې $W^{1,p} \subset W^{0,q}$ دی، که

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

همداسې

$$1 - \frac{n}{p} = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) > n\left(-\frac{1}{q}\right)$$

باور ولري، کوم چې په باندې د پورته شرایطو سره سر خوري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بانخ ځای په ځای ټکي جمله **Banachscher Fixpunktsatz**

که g یو رایوځای کیدونکي تابع وي، کوم چې یوه نه تشه، رابنده ډېرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځیره کړي، دا په دې معنا چې، باور لري

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \leq c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

د $c < 1$ سره، نو g یو یواځنی ځاپه ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري. که له $x_0 \in D$ راووځو یا مخ ته لاړ شو، نو کیدی شي x_* د اتریشن پرلپسي (د تکرار پرلپسي) له لارې
$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$
اپروکسیمیر(په نږدې توګه ټاکل) شي یا نږدې (که غواړئ: تقریبي) وټاکل شي. د ناټیکاوي لپاره باور لري
$$\|x_* - x_k\| \leq \frac{c^k}{1-c}\,\|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې، که د اتریشنپرلپسي یا د تکرار پرلپسي د هر پیل ارزښت لپاره کربنیزه پولې ته لاړه شي.
د ځای په ځای ټکي جمله په ټولیزه توګه په پوره متریکي فضاو کې باور لري. دا چې د ترانسلیشن واریانځ او نورم هوموجینیتی ته اړتیاپیښنه نه شي، کیدی شي سرې د یوه ټولیز واټن تابع له لارې $d(x,y)$ $\|x-y\|$ بدل کړي.
لیکونکي: اپپ، بوسلي، هیولیګ

سکالار ضرب Skalarprodukt

یو سکالار ضرب په یو کومپلکس وکتور فضا V یو تابع دی
$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

د لاندې خویونو سره:

- Positivität: مثبتوالی:

$$\langle v, v\rangle > 0 \quad \text{für} \quad v \neq 0$$

- Schiefsymmetrie: مایلسیمتري

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

- Linearität: کرښیزوالی

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ په خوښه وکتورونه او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ همداسې سکالار دي.
د مایل سیومتري په بسټ یو کومپلکس سکالار ضرب نسبت و دویمي متحولي یا اووښتوني ته کرښیز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\varrho}\langle u, w\rangle\,.$$

یواځې د حقیقي سکالار لپاره کومپلکس کنجوګیشن بې معنا دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ، کرایخ

هیلبرت - فضاHilbert-Raum

یوه هیبرت – فضا H یوه پوره نورمي (حقیقي یا کومپلکس) وکتور فضا ده، چې په کومه کې نورم د سکالار ضرب له لارې تعریف ده:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}\,.$$

په ځانګړې توګه د کوشي – شواذرخ نابرابرونونه باور لري

$$|\langle u, v\rangle| \le \|u\|\|v\|$$

همداسې د غبرګ اړخیز-ایدنتیتي یا - - کتمتوالی

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2\,.$$

سړی د هیلبرت-فضا Hilbert-Raum سیپارابل Hilbert-Raum بولي، که یوه ګڼلوړ اورتونورمال بنسټ

$$e_1, e_2, \ldots, \quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}\,,$$

شتون ولري. په دې حالت کې هر $v \in H$ د فوری- وديزينه-die Fourier-Entwicklung

$$v = \sum_{k=1}^{\infty}\langle v, e_k\rangle e_k\,,$$

چي نسبت پورته نورم ته پولي ته تلونکي ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليگ

مربع جمعه کيدونکې پرلپسيQuadratsummierbare Folgen

مربع جمعه کيدونکې پرلپسي
$c_1, c_2, \ldots, \quad c_i \in \mathbb{C}$

هيلبرت-فضا l^2 جوړوي سبت سکالار ضرب ته

$$\langle c, d\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}\,.$$

فضا l^2 د يوه سيپارابل هيلبرت-فضا H پروتو تويپ دی، ځکه چي هر توکی

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$$

کيدی شي د د اورتوگونال بنسټ د ضريب c_k سره معلومه identifiziert شي. له دې سره باور ل ري

$$\|v\|_H = \|c\|_{l^2}\,,$$

دا په دې معنا، چي فضاوې H او l^2 ايزومورف دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

مربع انتيگراوړ توابع Quadratintegrierbare Funktionen

د يوې ورشو يا سطحې $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره $L^2(D)$ د تابع $f:\ D \to \mathbb{C}$ فضا بنايي
د لاندې سر

$$\int_D |f(x)|^2\,dx < \infty$$

او دا د سکالار ضرب

$$\langle f,g\rangle_2=\int\limits_D f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

له لاري منځ ته راغلی نورم $\|\cdot\|_2$.

په بديله توګه کيدی شي $L^2(D)$ د ښويي تابع په ځير د رابندېدني په توګه هم تعريف شي، دا په دې معنا ، چې هر مربع انتيګرالوړ تابع کېدی شي د يوې ناپاې پرلپسي په توګه د زياتځله مشتقوړ تابع f_n له لارې اپروکسيمی يا په نږدې توګه انځور شي شي:

$$\|f-f_n\|\to 0,\quad n\to\infty\,.$$

ليکونکي: ايپ، هيوليک

د بيلګي په توګه تابع

$$f(x)=|x|^s$$

په پراخيدوني يا - بعديزې يوونګردی(دايره واحد)

$$D=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$$

تر ځيرني لاندې ونيل شي.

د غونداري کواوردينات ($r=|x|$) سره لاس ته راځي

$$\int\limits_D|f(x)|^2\,dx=c\int\limits_0^1 r^{2s}r^{n-1}\,dr=c\left[\frac{r^{2s+n}}{2s+n}\right]_0^1,$$

دا په دې معنا چې f د $2s>-n$ لپاره مربع اايګرال وړ دی.

که همدا تابع په ساحه

$$\tilde{D}=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|>1\},$$

تر ځيرني لاندې ونيسو، نو بيا هم د غونداري کواوردينات سر لاس ته راځي

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_{\bar{D}} |x|^{2s}\, dx = c \int\limits_1^{\infty} r^{2s} r^{n-1}\, dr\,,$$

دا په دې معنا، چې f د $2s < -n$ لپاره مربع انتیګرالوړ دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د مربع انتیګرالوړ توابعو سوبولیف – فضا
Sobolev-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

د یوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $H^k(D) = W^{k,2}(D)$ د (حقیقي - یا کومپلکس ارزښتیزو) هیلبرت-فضا په ګوته کوي. توابع د مربع انتیګرالوړ کمزورو ټوټه مشتقونو سره ، چې نظم $\leq k$ لري د سکالار ضرب

$$\langle f,g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x)\overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

له لارې

$$\langle f,g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x)\overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

منځ ته راغلي نورم $\|\cdot\|_{k,2}$ سره. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,2} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int\limits_D |\partial^\alpha f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د فوریر- لړئ

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

په $D = [-\pi, \pi]$ باندې مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty ,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx} \overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$$

دی، د فوریې – بنسټ $e^{\mathrm{i}kx}$ د اورتوګونالیتي په اساس.
مشتق

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}kc_k e^{\mathrm{i}kx}$$

مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty ,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} kc_k e^{\mathrm{i}kx} j\overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = -2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 .$$

دا چې له دویم شرط لومړی لاس ته راځي، نو لرو $f \in H^1$ د $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty$ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هاردي-لیبسک فضا**Hardy-Lebesgue-Raum**

د هاردي-لیست – فضا HL د ټولو د یوونکردئ په ټیکلي

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

هولومورف توابعو

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

څخه جوړه ده

د

$$\|f\|_{HL}^2 = \langle f, f \rangle_{HL} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \overline{c_k} < \infty .$$

سره.

پوره اورتونورمالسيستم **Vollständiges Orthonormalsystem**

يو اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ په هيلبرت- فضا کي پوره يا ماسيمال بلل کيږي، که

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

باور ولري.

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

يو اورتونورمال سيستم ټيک هلته د هيلبرت – فضا يو اورتونورمال بنسټدی، کله چط هغه پوره وي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت٠فضا کي فوری-پروجکشن (پرېوستون)
Fourier-Projektion in Hilbert-Räumen

د يوه وکتور v فوريي –پروجکشن په يوه هيلبرت-فضا H کي د اورتونورمالسيستم $e_1, e_2, \ldots$ ، سره

$$p_n v = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = \langle v, e_k \rangle$$

و v ته ښه اپروکيميشن دی د سکالار ضرب $\langle \cdot, \cdot \rangle$ له لارې اینډوڅیرت (منځ ته راغلی) نور م $\| \cdot \|$ سره، دا په دې معناچې

$$\| v - p_n v \| = \min_{q = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k} \| v - q \| .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

سرې لومړی په پام کې نيسي، چې

$$\langle v - p_n v, e_j \rangle = 0, \quad 1 \le j \le n .$$

دا د $\{e_j\}$ د اورتونورماليتي څخه ترلې لاس ته راځي، ځکه چې

$$\langle p_n v, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad 1 \le j \le n .$$

د يوه په خوښه اپروکسيميشن $q = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$ لپلره باور لري

$$\| v - q \|^2 = \| v - p_n v + p_n v - q \|^2$$

$$= \| v - p_n v \|^2 + \langle v - p_n v, \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) e_k} \rangle + \langle \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) e_k}, v - p_n v \rangle + \| p_n v - q \|^2$$

$$= \| v - p_n v \|^2 + \| p_n v - q \|^2 ,$$

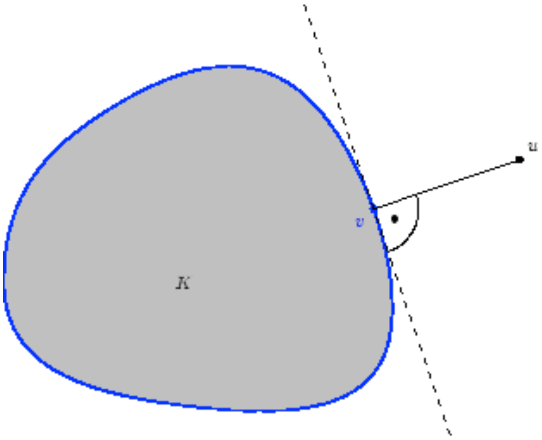
داپهدې معنا، چې نتيکاوی مينيمال کيږي، که q د فوری- پروجکشن $p_n v$ وي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت- فضا باندې د کونوکسو(وتلو) ډېريو خورا ښه اپروکسيميشن
Beste Approximation von konvexen Mengen in Hilbert-Räumen

د يوه هيلبرت-فضا H د يوه رابند کونوکس برخه ډېرئ K لپاره هر $u \in H$ ته يو يواځنی ځورابنه اپروکسيميشن شتون لري د دې لاندې سره

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\| .$$



خورابنه اپروکسيسميشن يواځنی د

$$\langle u - v, w - v \rangle \leq 0,$$

له لارې د ټولو $w \in K$ لپاره کرکتريزه(خوي ټاکنی) شوی، دا په دې معنا، چې د وکتورونو $u - v$ او $w - v$ ترمنځ کونج پڅ دی.

په ځانګړې توګه د رابندو کرښيزو برخه فضاوو U خورا ښه اپروکسيميشن شتون لري.

په دې حالت کې دا پورته سکالار ضرب صفر دی، داپه دې معنا، چې ناټيکاوی $u - v$ و U ته اورتوګونا دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

که

$$d = \inf_{w\in K} \|u - w\|$$

ځای په ځای کړو

او یوه پرلپسي (u_n) په K د

$$\|u - u_n\| \to d, \quad n \to \infty\,,$$

سره کې وټاکو، نو د K کونوکسیټي له امله باور لري

$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$$

او ورپسې

$$\|2u - (u_n + u_m)\|^2 \geq 4d^2\,.$$

د غبرګ اړخیز-کتمتوالي څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} &\|(u - u_n) - (u - u_m)\|^2 \\ &= \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - \|(u - u_n) + (u - u_m)\|^2 \\ &\leq \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - 4d^2\,. \end{aligned}$$

دا چې د کېڼورې وړو نوکانو افاده یا وینه د $4d^2$ په لور هڅیږي، نو

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_m - u_n\|^2 = 0$$

لرو او (u_n) په H کې یوه کوشي -پرلپسي ده، دا په دې معنا، چې یو $v \in K$ شتون لري

د $\lim_{n\to\infty} u_n = v$ او $\|u - v\| = d\,.$ سره.

پوله ارزښت يواځنی دی، ځکه چې که يو بل پوله ارزښت $w \in K$ شتون لرودی د
$\|u-w\| = d$ سره، نو پرلپسي $v, w, v, w, \ldots$ به لکه پورته پولې ته تلونکې وی
او باید $v = w$ باور ولري.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په هيلبرت-فضا کې اورتوګونال کومپليمنت

Orthogonales Komplement in Hilbert-Räumen

د يوې هيبرت-فضا H هرې رابندې لاندې – يا برخه – فضا Uته يو اورتوګونال کومپلمنت ،، دا په دې معنا، چې يوه رابنده لاندې فضا

$$U^{\perp} = \{v \in H : \langle u, v\rangle = 0, \quad \forall u \in U\}\ ,$$

شتون لري د

$$H = U \oplus U^{\perp}\,.$$

سره.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

دا چې $U^{\perp}$ د H يو لاندې – يا برخه فضا ده، سيده له سکالار ضرب $\langle u, v\rangle$ څخه لاس ته راځي، او د کوښش – شوارڅ مساوات له لارې رابندوالی لاس ته راځي.
د $u \in U$ او $u \in U^{\perp}$ لپاره $\langle u, u\rangle = 0$ باور لري او له دې سره $u = 0$ همداسي

$$U \cap U^{\perp} = \{0\}\,.$$

دا چې U کونوکس ده، نو د $w \in H$ لپاره يو خورا ښه اپروکسيميشن $u \in U$ شتونلري، هغه چې نورم
$\|w-u\|$

ميمال کوي. که کيږدو $v = w - u$، نو د ټولو $\tilde{u} \in U$ او ټولو α لپاره باور لري

$$\|v\|^2 \leq \|v - \alpha\tilde{u}\|^2 = \|v\|^2 - \overline{\alpha}\langle v, \tilde{u}\rangle - \alpha\langle \tilde{u}, v\rangle + \alpha\overline{\alpha}\|\tilde{u}\|^2 .$$

د

$$\overline{\alpha} = \frac{\langle \tilde{u}, v\rangle}{\|\tilde{u}\|^2} \qquad \alpha = \frac{\langle v, \tilde{u}\rangle}{\|\tilde{u}\|^2},$$

همداسې

.

سره لاس ته راځي

$$\|v\|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle \tilde{u}, v\rangle|^2}{\|\tilde{u}\|^2}$$

او له دې سره

$$v \in U^\perp . \qquad \langle \tilde{u}, v\rangle = 0$$

همداسې

.

$$w = u + v$$

دا چې دی، نو

$$H = U \oplus U^\perp$$

و ښوولشو.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په هیلبرت-فضا کې د بیسل-نامساوات

Bessel-Ungleichung in Hilbert-Räumen

$\{e_i : i \in I\}$

په یوه هیلبر-فضا H کې د هر اورتونورمالسیستم لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

$$v \in H$$

د ټولو لپاره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ښونه فقط یوه ګڼلوړ اورتونورمال سیسم لپاره مخ ته بیایو.

وي دې $i_1, i_2, \ldots, i_n$ د ايدکشن(پيژند نخښو) يوه په خوښه پرلپسې په I کې. د کومپلکی اعدادو يوهپه خوښه پرلپسي $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$ لپاره د e_i له اورتونورماليتي ځخهه لاس ته راځي

$$0 \leq \left\| v - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} e_{i_k} \right\|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} \langle e_{i_k}, v \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_{i_k}} \langle v, e_{i_k} \rangle + \sum_{k=1}^{n} |c_{i_k}|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle - c_{i_k}|^2 .$$

د $c_{i_k} = \langle v, e_{i_k} \rangle$ ټاکنو لپاره دا دا معنا لري

$$0 \leq \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2$$

همداسې

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 \leq \|v\|^2 .$$

دا نامساوات د پولي ته تګ $n \to \infty$ سره هم ساتلی پتې کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت- فضا کې د فورير(فوريې) وديزيينه
Fourier-Entwicklung in Hilbert-Räumen

په يوه هيلبرت-فضا H کې د يوه پوره اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره سړی

$$u = \sum_{i\in I} \langle u, e_i \rangle e_i$$

د u د فوريې – ودیزینه بولي.
ليكونكي: اېپ، هيوليګ

پە هیلبرت – فضا کې د پارزيوال-كتمتوالی

Parseval-Identität in Hilbert-Räumen

د يوې هيلبرت-فضا H د هر (نه په اړيینه توګه ګڼلوړ) پوره اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i\in I} |\langle v, e_i \rangle|^2 = \|v\|^2, \quad v \in H\,,$$

دا په دې معنا، چې نورم v د بنسټ ضريبونو د l^2 -نورم سره سر خوري.

ليكونكي: اېپ، هيوليګ

ښوونه سيپارابل خيلبرت-فضا لپاره مخ ته بيول کيږي.

د سکالار ضرب د ناپرېکيدني له امله

$$\left\langle v - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \langle v, e_j \rangle - \langle v, e_j \rangle = 0$$

دی،، د ټولو e_j لپاره، دا په دې معنا، چې

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}\langle v, e_k\rangle e_k\right\|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\langle v, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle v, e_k\rangle|^2$$

داپه دې معنا، چې د پارزیوال – کتوتوالی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ناپرېکیدونکي کرښيز فنکشنال Stetiges lineares Funktional

په یوه حقیقي (کومپلکس) توپولوژیکي وکتورفضا V باندې یو ناپرېکیدونکی کرښيز بنکشنل Λ یو ناپرېکیدونکی کرښيز تا بع دی د V په پسې.($\mathbb{C}$)$\mathbb{R}$.

په یوه نورمي وکتورفضا کې د Λ ناپرېکیدنوالی ورته دی په صفر باندې د یوونغونډاري یا واحدغونډاري د ځېرې ته. په دې حالت کې سړی

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1}|\Lambda v|$$

د کرښيز فنکشنل د نورم په حیث تعریفوې یا پېژند ورکوي.

د نورم د هوموجینیتي په بنسټ هم ورته تعریفونه

$$\|\Lambda\| = \sup_{v\neq 0}\frac{|\Lambda v|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|\leq 1}|\Lambda v|$$

شوني دي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د دې لپاره چې وښایو، چې د ناپرېکیدنې ځخه محدودوالی لاس ته راځي، نیسو، چې Λ په نورمي وکتورفضا باندې ناپرېکیدونکې دی، په صفر د یوونغونډاري ځېره یا عکس نامحدود دی، دا په دې معنا، چې د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره په V کې یو v_n شتون لري د

$\|v_n\| \leq 1$ او $|\Lambda v_n| > n\,.$

سره.

که کیږدو

$$u_n = \frac{1}{n} v_n\,,$$

نو لاس ته راځي

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{n}\,,$$

دا په دې معنا،چې $u_n \to 0$ د $n \to \infty$ لپاره او د فنکشنل د ناپرېکیدنې په بنسټ له دې سره لاس ته راځي $\Lambda(u_n) \to \Lambda(0)$. د فنکشنل د کریزوالي سره باور لري

$$\Lambda 0 = \Lambda(0 \cdot v) = 0 \Lambda v = 0$$

د ټولو $v \in V$ لپاره او له دې سره $|\Lambda u_n| \to 0$. له بله اړخه دی

$$|\Lambda u_n| = \frac{1}{n} |\Lambda v_n| > 1\,,$$

چې تضاد انځوروي.

برعکس له محدودوالي څخه ناپرېکیدنوالی لاس ته راځي، که سرې ږنیسي، چې

$$|\Lambda u| < c$$

په صفر د یوونغونداري د ټولو u لپاره. که اوس سړی یوه په V کې په خوښه پرلپسې (v_n) ولري د $v_n \to v$ او $v_n \neq v$ سره د ټولو n لپاره، نو سړی لاس ته راوړي

$$|\Lambda v_n - \Lambda v| = |\Lambda(v_n - v)| = \|v_n - v\| \left|\Lambda\left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|}\right)\right| \leq \|v_n - v\| c \to 0\,,$$

دا په دې معنا، چې د فنکشال ناپرېکیدنه لرو.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د پیلګې لپاره دا کرښیز فنکشنال

$$\Lambda f = f(1)$$

د ټول $f \in C[0,1]$ لپاره رانیسو.

د په $C[0,1]$ د ماکسیموم نورم سره،

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|\,,$$

لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |f(1)| \leq \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|f\|_\infty = 1\,,$$

دا په دې معنا، چې فنکشنال ناپرېکیدونکی دی. د تابع (فنکشن) $f(x) = 1$ سره د ټولو $x \in [0,1]$ لپاره د فنکشنال د نورم لپاره راکوي

$$\|\Lambda\| = 1\,.$$

که د دې لپاره په $C[0,1]$ باندې L^2 -نورم وکاروو،

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} ,$$

او توابعو پرلپسې راواخلو

$$f_n(x) = \sqrt{2n+1} x^n, \quad n \in \mathbb{N} ,$$

نوو سړی لاس ته راوړي

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (2n+1) x^{2n} \, dx = 1 ,$$

مګر

$$f_n(1) = \sqrt{2n+1}$$

له ټولو پولو اوړي یا له ټول پولو لوییږي، دا پهدې معنا، چې فنکشنل پرېکیدونکی دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هان-بانخ د دوام(پسې تلنې یا مخ ته بیونې) جمله

Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

د یوه نورمي وکتور فضا پ V ه یوه لاندېفضا یا برخه فضا U باندې هر ناپرېکیدونکي کربښیز فنکشنال Λ ته یوه نورم ته وفاداره پرمخ ته تلنه شتون لري، داپه دې معنا، چې په V یو ناپرېکیدونکی کربښیز فنکشنال $\tilde{\Lambda}$ شتون لري د

$$\tilde{\Lambda}u = \Lambda u, \quad u \in U$$

او

$$\sup_{v\in V, \|v\|=1} |\tilde{\Lambda}v| = \|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| = \sup_{u\in U, \|u\|=1} |\Lambda u| .$$

سره

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه د $L^2(-1,1)$ په لاندې فضا

$$U = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$$

باندې د اړونده نورم

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

سره کرښيز فنکشنال

$$\Lambda f = f(0)$$

رااخلو.

يو تابع يا فنکشن

$$f = a + bx + cx^2$$

له U څخه لاندې نورم لري

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2)^2\, dx = 2a^2 + \frac{2}{3}\, b^2 + \frac{4}{3}\, ac + \frac{2}{5}\, c^2\,.$$

له دې سره له Λ څخه په U لاس ته راځي

$$\|\Lambda|_U\|^2 = \max_{0 \neq f \in U} \frac{|\Lambda f|^2}{\|f\|_2^2} = \max_{(a,b,c) \neq (0,0,0)} \frac{a^2}{2a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{5}c^2}\,.$$

د ځای په ځای یا کلک a د $b = 0$ ، $c = -\frac{5}{3}\, a$ لپاره مخرج یا ماتلاندې مینیمال کیږي ، دا په دې معنا، چې

$$\|\Lambda|_U\| = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{8}{9}a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,.$$

په روښنه توګه په L^2 باندې د فنکشنال ارزښتونه پرېکیدونکي ده. د دې لپاره چې د Λ لپاره یو پرمخ بیونه وګټو ، نو ایښوونه

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{-1}^{1} \underbrace{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}_{p(x)} f(x)\, dx$$

کوو او ضریبونه α, β, γ دغوښتو څخه ټاکو، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ سره د U په یوه بنسټ باید یو د بل سره سر وخوري.

$$\Lambda \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma \\ \frac{2}{3}\beta \\ \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\gamma \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \tilde{\Lambda} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\}\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha = \frac{9}{8}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{15}{8}\,.$$

د کوشي-شوارڅ نامساوات په بنسټ دی

$$|\tilde{\Lambda} f| \leq \|p\|_2 \|f\|_2\,,$$

یعني $\|\tilde{\Lambda}\| \leq \|p\|_2$. ځا چې $p \in U$ نو دا لاندې هم باور لري

$$\|\tilde{\Lambda}|_U\| \geq \frac{|\tilde{\Lambda} p|}{\|p\|_2} = \frac{\int_{-1}^{1} |p(x)|^2\, dx}{\|p\|_2} = \|p\|_2\,.$$

دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\|\tilde{\Lambda}\| = \|p\|_2 = \sqrt{2\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 0 + \frac{4}{3}\,\frac{9}{8}\left(-\frac{15}{8}\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,,$$

دا په دې معنا، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ نورمساتونکی یا - وفادار پر مخ وړنه ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دوال- یا دوه ګونې فضا Dualraum

دیوه نورمي وکتور فضا V دوال- یا دوه ګوني فضا V' په V د ناپرېکېدونکو کرښيزو فنکشالونو Λ لاندې د نورم

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

سره په V' نخښنه شوی یو بانخ-فضا ده.

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

سيده ليدل کيږي، چې V' يوه نورمي وکترفضا ده. د ښوول يې د V' پروه والى دى.

وي دې (Λ_n) يوه کوشي- پرلپسي په V' کې دا په دې معنا دى، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_0 شتون ل ري، داسې چې دټولو $n, m > n_0$ لپاره

$$\|\Lambda_n - \Lambda_m\| < \varepsilon$$

باور لري. نو د هر $v \in V$ لپاره باور لري

$$\|\Lambda_n v - \Lambda_m v\| = \|(\Lambda_n - \Lambda_m)v\| \le \|\Lambda_n - \Lambda_m\||v| < \varepsilon |v|$$

داپه دې معنا، چې $(\Lambda_n v)$ يوه سکالار کوشي – پرلپسي ده، نو يو پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ لري. دا د $\Lambda v = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ له لارې تعريف شوى تابع کرښيز او له پورته تخمينونو نورم پرلپسي د ناپرکيدني له لارې د $m \to \infty$ لپاره

$$\|(\Lambda_n - \Lambda)v\| \le \varepsilon |v|$$

د $n > n_0$ لپاره. له دې لاس ته راځي،چې $\Lambda_{n_0} - \Lambda$ او له دې سره هم $\Lambda = (\Lambda - \Lambda_{n_0}) - \Lambda_{n_0}$ ناپرېکيدونکي دى، او

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| < \varepsilon$$

د $n > n_0$ لپاره باور لري،دا په دې معنا، چې

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \Lambda \,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

بيدوالفضا (دوه دوه ييزه فضا) Bidualraum

د يوې نورمي وکتورفضا V بيدوال-يا بيدوه ييزه فضا V'' د V' دوه ييزه فضا ده. دا چې هر توکی $v \in V$ دې

$$\Lambda \mapsto \Lambda v, \quad \Lambda \in V'$$

يو ناپريکيدونکی کرښيز فنکشنال په V' جوړ کړي، کيدی شي V د V'' يوې لاندې فضا سره جوړ شي يا منځ ته راشي. باورلري

$$V'' = V \,,$$

نو V رفلکسيو يا هنداروني بېل کيږي.

رفلکسيو باناخ-فضاوې فضاوې $L^p(D)$، $1 < p < \infty$ دي، همداسې هر پاې بعدي(پراخيدوني) وکتور فضاوې. $L^1(D)$ او $C[0,1]$ د نا-هنداروني بيلګې باناخ - فضا دي

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د p - انتيګراوړ توابعو دوالفضا

Dualraum der p-integrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ او $1 \leq p < \infty$ لپاره دی

$$L^p(D)' = L^q(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

اوس یوائي $L^q(D) \subseteq L^p(D)'$ اینکلوزیون یا خوندیونه ښوول کیږي.

هر $g \in L^q(D)$ ته د

$$\Lambda : \quad f \mapsto \Lambda f = \int_D f(x)g(x)\,dx, \quad \forall f \in L^p(D),$$

له لارې په $L^p(D)$ یو ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال تعریف دی، خکه چې هولدر نامساوات پسې د د انتیګرالونو لپاره دی

$$\cdots(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

د $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ سره. له دې لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_p = 1} |\Lambda f| \le \|g\|_q .$$

د $f = \mathrm{sign}(g)|g|^{q-1}$ لپاره نامساوات تیره یا تیز دي، دا په دې معنا، چې سړی لاس ته راوړي

$$\|\Lambda\| = \|g\|_q .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ریسځ د انځورولو جمله Darstellungssatz von Riesz

د یوې هیبرت-فضا H او یوه کره یا کلک $v \in H$ لپاره د

$$\Lambda: \quad u \mapsto \Lambda u = \langle u, v \rangle, \quad \forall u \in H$$

له لارې یو ناپرېکیدونکی کربنیز تابع په H د

$$\|\Lambda\| = \|v\|$$

سره تعریف دی.

معکوس هر یو ناپرېکیدونکي کربنیز فنکشنال $\Lambda \in H'$ ته تیک یو $v \in H$ شتون لري، داسې چې پورته مساوات باور لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بېلګې په توګه د مربعجمعه وړ پرلپسې l^2 رانیسو. وي دې $\Lambda \in (l^2)'$، نو تیک یوه پرلپسې په l^2 کې شتنو لري د

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}, \quad \forall c \in l^2 .$$

سره.

د d څخه و Λ ته دیواځني تنظیم له لارې کیدی شي فضا l^2 د خپل دوال- یا دوه ګونې فضا $(l^2)'$ سره و ښوول شي یاو پیژندل شي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه مربع انتیګرا لوړ توابع $L^2(D)$ په ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رانیسو. وي دې $\Lambda \in L^2(D)'$، نو تیک یو تابع $g \in L^2(D)$ شتون لري د

$$\Lambda f = \langle f, g \rangle = \int\limits_D f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad \forall f \in L^2(D)\,.$$

سره.

له g څخه و Λ ته د یواځني تنظیم له لارې کیدی شي فضا L^2 د خپلې دوال- یادوه ګوني فضا $(L^2)'$ سره وپیژندل شي.

لیکونکي: اپپ، هیولیک

کمزوري پولې ته تلنه Schwache Konvergenz

په یوه نورمي شوي وکتورفضا V یوه پرلپسي (v_n) کمزورې پولې v ته ځي، که

$$v_n \rightharpoonup v\,,$$

که

$$\Lambda(v_n - v) \to 0, \quad \forall\, \Lambda \in V'\,.$$

د Λ د ناپرېکیدنې په بنسټ هره پولې ته تلونکې پرلپسي

$$v_n \to v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_n - v\| \to 0$$

هم کمزورې پولې ته تلونکي ده. معکوسوالی یا په څتوالی په ټولیزه توګه باور نه لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیک

د بیلګې په توګه په فضا کې مربع جمعه کیدونکې پرلپسې‌و l^2 کې پلپسي

e	$= (0,0,0,\ldots)$
e^1	$= (1,0,0,\ldots)$
e^2	$= (0,1,0,\ldots)$
	$\vdots$

رانیول کیږي. دا چې هر ناپرېکيدونکی کرښیز فنکشنال Λ په l^2 د رسسخ(وبینه: ریخ) د انځوریزې جملې

$$\Lambda c = \langle c, d\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

په حیث د کلک یا کره $d \in l^2$ سره لیکل کیږي، نو لاس ته راځ

$$\Lambda(e^n - e) = \langle e^n, d\rangle = \overline{d_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

ځکه چې d مربعجمعه وړ دی، دا په دې معنا، چې دی

$$e^n \rightharpoonup e, \quad n \to \infty.$$

مګر په ر حالت

$$||e^n - e|| = 1,$$

داپه دې معنا، چې

$$e^n \not\to e\,.$$

ليكونكي: اپپ، هيوليگ

محدود كرښيز اوپراتورونهBeschränkte lineare Operatoren

د نورمي وكتورونو فضاو تر منځ يو كرښيز تابع

$$L: \quad V \to W$$

محدود كرښيز اوپراتور بلل كيږي، كه د اوپراتور نورم

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|$$

پاى وي. محدودوالى د L د ناپرېكيدنوالي سره په يوه معنا دى.

سږى كرښيز اوپراتور هغه په كرښيز الجبر كې د كرښيز تابع په ځاى كاروي، چې داناپاى ـبعديز Kontext غوره وښايو يا را مخ ته كړو.

د ټولو كرښيزو مخدودو له V څخه د W پسې اوپراتورونو د $\mathcal{L}(V,W)$ سره په نخښه كيږي. دا باناخ-فضا ده، كه W يوه باناخ-فضا وى.

ليكونكي: اپپ، هيوليگ

انتيگرال اوپراتور Integraloperatoren

د يوه تابع

$$K: \quad D \times D \ni (x,y) \mapsto K(x,y) \in \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

لپاره د

$$(Lf)(x) = \int\limits_D K(x,y) f(y)\, dy$$

له لاري يو كرښيز اوپراتو تعريفيږي. د مخته څېړي- يا تابع - او ډڅېړي فضا(تابع تابع) V او W د داسي په نامه زړي تابع K د خويونو په واک كې دي.

په لاندې كې يوه څو بيلګې او همداسې د اړونده اوپراتور نورمونه وركړ شوې.

- K په $\overline{D} \times \overline{D}$ ناپرېكيدونكې، D محدود ده.

$$L : \quad C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$$

$$\|L\| = \max_{x \in \overline{D}} \int\limits_D |K(x,y)|\, dy$$

- $K \in L^2(D \times D)$

$$L : \quad L^2(D) \to L^2(D)$$

$$\|L\| \leq \left(\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2\, dx\, dy \right)^{1/2}$$

- $D = \mathbb{R}^n$, $K(x,y) = \varphi(x-y)$

$$L: \quad L^p(D) \to L^p(D)$$

$$\|L\| = \int_D |\varphi(z)|\, dz$$

د کربنیزو اوپراتورونو پولې ته تلنه Konvergenz linearer Operatoren

د محدودو کربنیزو اوپراتورونو پرلپسیو لپاره لاندې دوه کلیمې کارول کیږی.

- تکي ډوله پولې ته تلنهPunktweise Konvergenz

یوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ تکيډوله د یوه اوپراتور L په لور پولې ته ځي، که

$$L_n v \to L v, \quad \forall v \in V\,.$$

- برابرډوله پولې ته تلنه Gleichmäßige Konvergenz

یوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ برابرډوله دیوه اوپراتور L په لور پولې ته تلونکې ده، که وي

$$\|L_n - L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L_n v - L v\| \to 0\,.$$

د برابرډوله پولې ته تلنې څخه تکي ډوله پولې ته تلنه راکوي، معکوس په ټولیزه توګه باور نه لری.

د برابر ډوله محدودوالي اصول Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

که د یوې باناخ-فضا V په یوه نورمي وکتور فضا W کې د یوې محدودې کرښیز اوپراتورونو (L_n) پرلپسې لپاره لاندې باور ولري

$$\sup_n \|L_n v\| < \infty \quad \forall v \in V \,,$$

،

نو لاس ته راځي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty \,,$$

دا په دې معنا، چې د اوپراتور-نورم برابرډوله مخدودوالی.

د باناخ-شتاینهوز جلمه Satz von Banach-Steinhaus

وي دې V, W باناخ-فضا او U یوه د V ټینګه یا(غلیضه) برخه ډېرئ، نو بیا یوه پرلپسې $L_n \in \mathcal{L}(V, W)$ ټیک هلته ټکي ډوله و یوه کرښیز محدود اوپراتور L ته ځي،

$$L_n v \to L v \,, \quad \forall v \in V,$$

که

(a)

$$\forall u \in U \,, \quad L_n u$$

پولې

$$\sup_n \|L_n\| < \infty \,.$$

(b)

د باناخ شرایط a) او b) دې پوره وي او v دې یو په خوښه وکتور له V څخه وي. دا جې U په V کې ټینګه یا کیمنډلې ده، نو د $\varepsilon > 0$ لپاره یو $u \in U$ شتون لري،
داسې چې دی

$$\|u - v\| < \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|}\,.$$

پرلپسۍ $(L_n u)$ د نیونې یا فقضيي له مخې پولې ته ځي، یعنې یو اینډکس یا پیژندنخښنه n_0 شتون لري، داسې چې د $m, n > n_0$ لپاره

$$\|L_m u - L_n u\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

باور لري. له دې لاس ته راځي

$$\|L_m v - L_n v\| \;\leq \|L_m v - L_m u\| + \|L_m u - L_n u\| + \|L_n u - L_n v\|$$

$$\text{p}\,\|L_n\|\frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} + \frac{\varepsilon}{3} + \sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} = \varepsilon\,,$$

داپه دې معنا، چې $(L_n v)$ په W کې یوه کوشي-پرلپسي ده. دا چې W پوره ده، ن و پوله ارزښت شتون لري، یعنې

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv \in W\,.$$

د L محدودوالی او کرښیزوالی تړلی د نورم له ناپرېکیدنې لاس ته راځي.

د معکوسونې لپاره دې فقط شرایط b) و ښوول شي. دا د برابرړوله محدودوالي له شرایطو څخه لاس ته راځي، ځکه چې

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv$$

راکوي، چې $\sup_n \|L_n v\|$ د ټولو v لپاره پای دی.

وي دې

$$s_n f = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n})$$

د لاندې انتیګرال لپاره نږدېونه

$$sf = \int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

که وزنونه $w_{i,n}$ زیاتیز یا مثبت وي او s_n ټیک دی د $< n$ درجې پولینوم لپاره، نو لاس ته راځي

$$sf = \lim_{n\to\infty} s_n f$$

د $f \in C[0,1]$ لپاره.

ښوونه د باناخ-شتاینهوز له جملې تړلی لاس ته راځي، په کارول شوی په $s_n \in \mathcal{L}(C[0,1], \mathbb{R})$ او د $C[0,1]$ پولینومونو ټینګه برخه فضا باندې. د پولینوم p لپاره د $s_n p$ پولې ته تلنه روښانه دی،، ځکه چې $s_n p = sp$ دی د $n > \mathrm{Grad}\, p$ لپاره.

د دې لپاره چې برابرډوله محدودوالی وښایو، سړی په پام کې نیسي، چې

$$\sum_{j=1}^{n} w_{j,n} = 1,$$

دا چې s_n د ثابتو یا د ټل همغو توابعو $f(x)=c$ لپاره ټیک دی. له دې لاس ته راځي

$$\|s_n\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |s_n f| = 1.$$

کومپاکت اوپراتورونه Kompakte Operatoren

د باناخ-فضاو تر ةنځ یو اوپراتور $L \in \mathcal{L}(V,W)$ کومپاکت دی، که د V په W کې د یوونغونډاري(واحدغونډوسکې یا -کرې) B څېره یا عکس نسبي کومپاکت وي، دا به دېمعنا، چې په B کې د هرې پرلپسې (v_n) لپاره پرلپسې (Lv_n) یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.

د بېلګې په توګه په $\mathcal{L}(V,W)$ کې دوه اوپراتورونه د $V=W=l^2$ سره رانیسو.

- اوپراتور Der Operator

$$L: \quad (c_1, c_2, c_3 \ldots) \mapsto (c_1, c_2, c_3 \ldots)$$

کومپاکت نه دی، خکه چې د بیلګې په توګه د پرلپسېو پلرپسي

$= Le_1 = (1,0,0,\ldots)$	e_1	
$= Le_2 = (0,1,0,\ldots)$	e_2	
$\vdots$	$\vdots$	

په B کي پولي ته تلونکي برخه پرلپسي نه لري.

- Der Operator کرښیزه تابع

$$L: \quad (c_j) = (c_1, c_2, c_3, \ldots) \mapsto (c_1, c_2/2, c_3/3, \ldots) = (\tilde{c}_j)\,,$$

$$, \quad \tilde{c}_j = c_j/j$$

کومپاکت دی. د دې لپاره دې وي (c_n) یوه په خوښه په B کې د پرلپسیو پرلپسې. نو سړی په لومړي ځل کره کوي، چې په روښانه توګه د توکي

$$c_n = (c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3}, \ldots)$$

لپاره دا پرلپسي په هر ځاي $c_{n,j}$ کې محدود دي. یعنې

$$|c_{n,j}| \leq 1\,.$$

که د دې پرلپسی هر فقط د ټولو پرلپسي توکو لومړني ځایونه $(c_{n,1})$ تر ښیرنې لاندې ونیسو، داسې چې د محدودوالي په بنسټ یوه برخپرلپسي $(c_{n_k(1)})$ پیداکړو، د کومو لپاره چې لومړي ځایونه پولې ته ځي. که د دې برخپرلپسیو $(c_{n_k(1)})$ څخه اوس د هر توکي څخه لومړني دوه ځایونه

$$(c_{n_k(1),1}, c_{n_k(1),2}),$$

راونیسو، نو بیرته دمخدودوالي په بنسټ پرخپرلپسي پیداکولای شو، دکومو لپاره، چط د وه کونترې پرلپسي یا ورتر پرلپسي

$$(d_k) = (c_{n_k(k)}), \quad k \in \mathbb{N}$$

لپاره نو د هر کره J لپاره د J د لومړني ځايونو وکتور $(d_{k,1}, \ldots, d_{k,J})$ پولې ته ځي.

د دې لپاره چې وښايو، چې (d_k) غوښتونې برخپرلپسي ده، نو يوه د خوښې $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس K داسي ټاکو، چې

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{4}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور ولري. دا چې برخپرلپسي (d_k) د پورته جوړښتاصولو له مخې د لومړنيو K ځايونو لپاره پولې ته ځی، نو يو ايندکس N شتون لري،دا سي، چې د $k, l > N$ لپاره

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. له دې سره د $k, l > N$ لپاره لرو

$$\|Ld_k - Ld_l\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{\overbrace{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}^{\leq 4}}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

د وازو توابعو په هکله جمله Satz über offene Abbildungen

د باناخ-فضاو تر منځ يو په باندې(surjektiver) محدود کرښيز اوپراتور L يوه وازه ډېرئ په يوه وازه ډېرئ ځېره کوي.

که L په کې (injektiv) هم وي، نو محدودوالی له L^{-1} لاس ته راځي. له دې سره
حقيقي عدونه a, b د

$$a\|v\| \leq \|Lv\| \leq b\|v\|$$

سره شتون لري د L د مخته ځېرې ځخه د ټولو v لپاره، چېرته چې دویم نامساوات
سملاسي د L د محدودوالي ځخه لاس ته راځي.

ليکوني: هيوليګ، ايپ

صرف نظر نه شي کولای، چې د عمليه يا اوپراتوري کيدنه L د باناخ-فضاو تر منځ
ده. د دې ترمنځ کتمتوالی $L \in \mathcal{L}(V, W)$ ځيرل کيږي، د کوم سره چې $V = l^1$ د
نورم

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$$

سره په نخښنه کيږي او ځېره -فضا W د نورم

$$\|w\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k|$$

سره په نخښنه کيږي. د

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1$$

له امله کتمتوالی L يو په (bijektiver) محدود کرښيز اوپراتو دی، مګر داچې

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_\infty = 1$$

او

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} e_k\right\|_1 = n$$

د $e_1 = (1,0,0,\dots), e_2 = (0,1,0,\dots),\dots$ سره، L^{-1} نامحدود دی.

ليکوني: هيوليګ، اپپ

د رابند يا بند ګراف جمله Satz vom abgeschlossenen Graphen

که د بانخ – فضاو ترمنځ اوپراتور $L: V \to W$ رابند وي، دا په دې معنا،چط له

$$v_n \to v \quad \text{او} \quad w_n = Lv_n \to w$$

لاس ته راځي، چې $w = Lv$ دی، نو L محدود دی.

ليکوني: هيوليګ، اپپ

له دې بيلګې ښخه ليدل کيږي، چط سرې د رابند ګراف په جمله کې په نيوني يا فرضيي صرف نطر نه شي کولای، داسې چې L د باناخ-فضاو ترمنځ عمل کوي يا اوپريشن کوي. د دې لپاره دفرنځيال اوپراتور

$$\mathcal{L}(V,W) \ni L: \quad f \mapsto f'$$

رانيسو، د کوم سره چې $V = C^1[0,1]$ د سوپريموم نورم $\|\cdot\|_\infty$ سره په نخښنه شوی دی او $W = C[0,1]$ سره هم سوپريمومنورم دی. L يوو کرښيز اوپراتور دی، ځکه چې د $f(x) = x^n$ لپاره

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|Lf\|_\infty = n$$

باور لري

محدود نه دی. مګر د L ګراف رابند دی، له دې امله چې د یوې پرلپسې (f_n) لپاره
په V کې د $f_n \to f \in V$ ، $Lf_n \to g \in W$ سره باور لري $f_n \to f$ برابر
ډوله دی، $f_n' \to g$, پرابر ډوله دی.

L له دې لاس ته راځي،چې f مشتقوړ دی، او

$$f' = g$$

باور لري.

(Autoren: App/Höllig)

په هیلبرت-فضا کې د یوه کرښیز اوپراتور ماتریکس

Matrix eines linearen Operators im Hilbert-Raum

یو کرښیز اوپراتو

$$L: \quad H \to H$$

په یوه سیپارابل هیلبرت-فضا د اورتوګونال بنسټ $e_1, e_2, \ldots$ سره کیدی شي د
ماتریکس

$$(a_{j,k}) : \quad a_{j,k} = \langle Le_k, e_j \rangle$$

له لارې روښانه شي. باور لري

$$w = Lv \leftrightarrow w_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} v_k \,,$$

چیرته چې $u_l = \langle u, e_l \rangle$ د بتسټ ضریبونه ښایي یاپه ګوته کوي.

لیکونکي اپپ، هیولیګ

د فوریر-پروجکشن د پولي ته تلنې او د L کرښیزوالي په بنسټ باور لري

$$w_j = \langle Lv, e_j \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k Le_k, e_j \right\rangle \,.$$

که پوله او زیاتون یا جمعه د سکالار ضرب سره بدل شي، نو سرې د L ماتریک انځورونه لاس ته راوړي.

لیکونکي اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه به د یوه 2π -پریودي یا 2π - تل بیرته راګرځیدوني تابع

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e_k, \quad e_k(x) = e^{\mathrm{i}kx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښیز اوپراتورونه رانیسو.

لومړی: ضرب $L : f \to \varphi f$: د فوریر – ضریبونو له مخې د ماتریکس- راوړنو Matrix-Einträge لپاره سړی لاس ته راوړي

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{i(k-j)x} \, dx = \varphi_{j-k} \, .$$

د نورو ویونو یا لغاتو سره د f ضرب د φ سره د f او φ د فوريي- ضریبونو یو دیسکرت قتونه په ګوته کوي.

دویم قتونه غبرګونه $L : f \to \varphi \star f$: که د ماتریکس-قیمتونو

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) e^{i(kt-jx)} \, dt \, dx$$

په تعریف کې سړی $y = x - t$ بدل کړي، نو د

$$e^{i(kt-jx)} = e^{i((k-j)x)} e^{-iky}$$

له امله انتیګرال په y لاس ته راځي

$$a_{j,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k e^{i(k-j)x} \, dx = 2\pi \varphi_k \delta_{j,k} \, .$$

د قاتوني ماتریکس دوه کونجتری یا دیاګونال دی، د f د فوريي- ضریبونه د 2π –واره د φ فوری-ضریبونو سره ضربیږي

لیکونکي: اپپ، هیولیک

ادجونګيري اوپراتور Adjungierter Operator

په يوې سيپارابلې هيلبرت-فضا H باندې د يوه محدود كرښيز اوپراتور L لپاره د

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L^\star w\rangle, \quad v, w \in H,$$

له لارې يو داسې په نامه ادجونګيري اوپراتور $L^\star$ د ماتريكس

$$(a^\star_{j,k}) = (\overline{a_{k,j}})$$

سره تعريفيږي. كه $L^\star = L$ باور ولري، نو سرې L پخپله يا د ځان سره ادجونګيري يا هرميتيک بولي.

د بيلګې لپاره په $L^2(D)$ يو انتيګرال اوپراتور رانيسو. K دې يو زړي تابع وي د

$$\int_D \int_D |K(x,y)|^2 \, dx \, dy < \infty \,,$$

سره، نو د

$$(Lf)(x) = \int_D K(x,y) f(y) \, dy$$

له لارې د هر $f \in L^2(D)$ لپاره يو كرښيز اوپراتو تعريفيږي. د انتيګرال لپاره د كوشي-شوارڅ نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\int_D |(Lf)(x)|^2 \le \int_D \int_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx \int_D |f(y)|^2 dy \,,$$

دا په دې معنا، چې L يو محدود کرښيز اوپراتور دی په $L^2(D)$ د

$$\|L\| \leq \left(\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx \right)^{1/2} .$$

سره.

اړونده ادجونګيري اوپراتو $L^\star$ د

$$(L^\star g)(x) = \int\limits_D \overline{K(y,x)} g(y) \, dy$$

سره تعريفيږي، دا په دې معنا، چې L ټيک هلته د ځان سره يا خپل ادجونګيري دی، که نږدې هرچيرته

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

باور ولري.

يونيتار اوپراتور Unitärer Operator

په يوه هيلبرت-فضا کې يو محدود کرښيز اوپراتور $Q : H \to H$ يونيتار دی، که وي

$$QQ^\star = I = Q^\star Q \, ,$$

چيرته چې I کټوټوالی په ګوته کوي.

د يونيتار اوپراتورونو ورته خويې خووني يا کرګتريزه کونې دي

a)

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H\,,$$

b)

$$\|Qv\| = \|v\|, \quad v \in H\,,$$

کوم ته چې هر چطرته د Q سورجکتیویتې یا په باندې والی له مخه نیول شوی دی.

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

که Q یونیتار وي، نو سملاسي لاس ته راځي، چې Q په باندې یا سورجکتیو ده او

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, Q^\star Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H,$$

ځکه چې $Q^\star Q = I$، دا په دې معنا، چې خوبې (a.

دا ساده لیدل کیږي،چې له خوي یا کرمتریزه (aڅخه د $v = w$ سره سملاسي (b لاس ته راځي.

بالاخره له (b څخه لاس ته راځي

$$\langle Q^\star Qv, v\rangle = \langle Qv, Qv\rangle = \|Qv\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v\rangle, \quad v \in H$$

د $L = Q^\star Q - I = L^\star$ سره له دې لاس ته راځي

$$\langle Lv, v\rangle = 0$$

د ټولو $v \in H$ لپاره، همداسې

$$0 = \langle L(v+w), v+w\rangle = \langle Lv, v\rangle + \langle Lv, w\rangle + \langle Lw, v\rangle + \langle Lw, w\rangle$$

$$= \langle Lv, w\rangle + \langle w, Lv\rangle = \langle Lv, w\rangle + \overline{\langle Lv, w\rangle}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\langle Lv, w\rangle$$

د ټولو $v, w \in H$ لپاره، که په ځتنګړې توګه کېږدو $w = Lv$ نو لاس ته ترې راځي

$$\mathrm{Re}\langle Lv, Lv\rangle = \langle Lv, Lv\rangle = \|Lv\|^2 = 0$$

او له دې سره $Lv = 0$ د ټولو $v \in H$ لپاره، نو $L = 0$ همداسې

$$Q^{\star}Q = I\,.$$

د بېلګې په توګه په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې سکالار شوی د فورېې – ترانسفورمېشن رانیسو د

$$(Lf)(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

سره. دا چې $\|Lf\| = \|f\|$ دی ، نو L یونیتار دی، او ادیونکیري اوپراتور د، اړونده سکالار شوی، د معکوس فوری-ترانسفورمیشن له لارې ورکړ شوی دی:

$$(L^{\star}g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

د یوه کرښیز اوپراتور آیګن ارزښتونه

Eigenwerte eines linearen Operators

که د یوه V وکتور فضا یوه کرښیز اوپراتور L لپاره په خپل ځانګي باور ولري

$$Lv = \lambda v, \quad v \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

نو λ آیګن ارزښت بولو او v د آیګنوکتور په حیث(همداسې دیوه وکتور فضا V لپاره آیګن فنکشن). فضا

$$E_\lambda = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$$

آیګن فضا بلل کیږي او $m_\lambda = \dim E_\lambda$ د آیګن ارزښت ډېرواروالی بولو.

د بیلګې لپاره به یو ناپرېکیدونکی نا- ثابت 2π - پریودیکي(تل بیرته راګرځیدونی) تابع

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښیز اوپراتورونه راونیول شي.

ضرب اوپراتور (i) Der Multiplikationsoperator

$$L : \quad f \mapsto \varphi f$$

آیګن ارزښت نه لري، ځکه چې له $Lf = \lambda f$ په $\varphi(x) = \lambda$ ، $x \in (-\pi, \pi)$ لاس ته راشي.

دقاتولو اوپراتور (ii) Der Faltungsoperator

$$L: \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cdot - t) f(t)\, dt$$

اکسپوننشل تابع $e_j(x) = e^{\mathrm{i}jx}$ د آيګن تابع په څير لري. باور لري

$$(Le_j)(x) = \sum_k \varphi_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}k(x-t)} e^{\mathrm{i}jt}\, dt = \sum_k \varphi_k (2\pi) \delta_{j,k} e^{\mathrm{i}kx} = 2\pi \varphi_j e_j(x)\,,$$

داپه دې معنا، چې $2\pi\varphi_j$ اړونده ايګن ارزښتونه دی.

د هرميتيکي اوپراتورونو آيګن ارزښتونه

Eigenwerte hermitescher Operatoren

د يوه هرميتيکي اوپراتور $L: H \to H$ آيګن ارزښتونه حقيقي دي او آيګنوکتورونه و مختلفو أيګن ارزښتونو ته اورتوګونا دي.

که L هرميتيکي وي، نو باور لري

$$\overline{\langle Lv, v\rangle} = \overline{\langle v, Lv\rangle} = \langle Lv, v\rangle\,,$$

دا په دې معنا، چې $\langle Lv, v\rangle$ د ټولو $v \in H$ لپاره حقيقي دی. اوس دې $v \neq 0$ د آيګن وکتور وي و آيګن ارزښت λ ته، نو

$$\langle Lv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\neq 0}$$

دی، همداسي

$$\lambda = \frac{\langle Lv, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

حقيقي دي.

که $w \neq 0$ د L آيگنوکتور وي و آيگن ارزښت μ ته، نو باور لري

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Lv, w\rangle = \langle v, Lw\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

او له $\lambda \neq \mu$ سره

$$\langle v, w\rangle = 0\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

د يوه هرميتيکي کومپاکت اوپراتور نورم

Norm eines kompakten hermiteschen Operators

د يوه کومپاکت هرميتيکي اوپراتور $L : H \to H$ لپاره، $\|L\|$ يا $-\|L\|$ د L يو آيگن ارزښت دی

ښوونه په دوه پلونو(قدمونو) کې صورت نیسي یا پلې کیږي.

(i) لومړی

$$\sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle| = \|L\|$$

ښوول کیږي..

د

$$s = \sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle|$$

او

$$|\langle Lv, v\rangle| \leq \|Lv\|\|v\|$$

سره سړی سملاسي لاس ته راوړي

$$s \leq \|L\|\,.$$

د دې لپاره چې معکوسونه یا په ځنوالی $\|L\| \leq s$ وښوول شي، لومړی په پامې نیسو، چې د په خوښه حقیقي $\alpha > 0$ لپاره لرو

$$\left\langle L(\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle - \left\langle L(\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle$$

$$= \alpha^2 \langle Lv, v\rangle + \langle LLv, v\rangle + \langle Lv, Lv\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv, v\rangle$$

$$-\alpha^2\langle Lv, v\rangle + \langle LLv, v\rangle + \langle Lv, Lv\rangle - \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv, v\rangle$$

$$= 4\langle Lv, Lv\rangle = 4\|Lv\|^2 .$$

د

$$|\langle Lv, v\rangle| = \|v\|^2 \left|\left\langle L\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right| \le s\|v\|^2$$

سره او د غبرګاړخيز – يا مازی الاضلاع کتمېوالي سره له دې لاس ته راځي

$$\|Lv\|^2 \le \frac{s}{4}\left(\left\|\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2 + \left\|\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2\right)$$

$$= \frac{s}{2}\left(\alpha^2\|v\|^2 + \frac{1}{\alpha^2}\|Lv\|^2\right) .$$

که په ځانګړې توګه کيږدو

$$\alpha = \left(\frac{\|Lv\|}{\|v\|}\right)^{1/2}$$

نو راکوي

$$\|Lv\| \le s\|v\|$$

داپه دې معنا، چې $\|L\| \leq s$.

له (i) د (ii) Nach (i) existiert eine Folge (v_n) in H mit $\|v_n\| = 1$ und

مخې په H کې یوه پرلپسې (v_n) شتون لري د او

$$|\langle Lv_n, v_n\rangle| \to \|L\|,$$

سره، دا په دې معنا، چې یوه برخه پرلپسې (v_{n_k}) شتون لري د

$$\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle \to \lambda$$

او

$$|\lambda| = \|L\|.$$

سره.

اوس فقط ښایو، چې

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\| \to 0$$

د دې لپاره په پام کې نیسو $\|Lv\| \leq \|L\|\|v\| = |\lambda|\|v\|$ او

$$Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\|^2 = \|Lv_{n_k}\|^2 - \langle Lv_{n_k}, \lambda v_{n_k}\rangle - \langle \lambda v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2$$

$$\lambda|^2\|v_{n_k}\|^2 - \overline{\lambda}\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle - \lambda\langle v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2,$$

د کوم سره چې ښی اړخ د ∞ $k \to$ لپاره د

$$|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$$

په لور هڅیږي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو سپکترال انځورونه

Spektraldarstellung kompakter hermitescher Operatoren

یوه کومپاکت هر میتیکي اوپراتور $L : H \to H$ ته په یوه هیلبرت-فضا یو اورتونورمل بنسټ له آیګن ارزښتونو څخه شتون لري

$$e_1, e_2, \ldots,$$

د کوم سره چې مطلق ارزښتونو د اړونده آیګن رازښتونه λ_j یوه همغږیزه صفرپرلپسي جوړوي، یعنې

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots, \quad \lambda_j \to 0\,.$$

نسبت دي بنسټ ته L دا لاندې انځورونه لري

$$Lv = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v, e_j \rangle e_j\,.$$

ښوونه يې په ډېرو برخه پلونو)(قدمونو) کې پلی کيږي.

لومړی: د e_j جوړښت. د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو نورم د خویونو په بنسټ یو آیګن ارزښت $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ شتون لري د لاندطې سره

$$|\lambda_1| = \|L\| \,.$$

اوس سړی په پام کې نیسي، چې L د آیګنوکور e_1 څخه غزېدلې لاندې فضا E_1 اوتوګونال کومپلمنت ایناریانت پرېږدي. د $v \in E_1^\perp$ لپاره دی

$$\langle Lv, e_1 \rangle = \langle v, Le_1 \rangle = \lambda \langle v, e_1 \rangle = 0,$$

داپه دې معنا، چې $Lv \in E_1^\perp$. د دې پسې یا د دې په تعقیب L همداسې په $E_1^\perp$ باندې یو کومپاکت هرمیتیکي اوپراتور دی. د نورم خوی یا کرکتریزه بېرته یو آیګن لرزښت $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ راکوي د لاندې سره

$$|\lambda_2| = \|L|_{E_1^\perp}\| \,.$$

د λ_2 ارزښښت $\leq |\lambda_1|$ دی ، څکه چې د یوې کوچنۍ فضا په نسبت نورم جوړیږي.

اوس سړی کړی شي جوړښت ایندوکتیو مخ ت ه بوزي:

$$|\lambda_n| = \|L|_{E_n^\perp}\|$$

د لومړیو n اوتوګونال آیګنوکتورونو کرښیز پوښ Hülle E_n سره. دا تلنلار پرې کیږي، که $L|_{E_n^\perp} = 0$ وي، داپه دې معنا، چې که

$$\dim \mathrm{Bild}(L) = n < \infty$$

وي.

دویم: د صفر 0په لور پولې ته تلنه: وړاندنیونه، چې $\lambda_j \geq \lambda > 0$ د ناپای ډېرو j لپاره باور لري، لاندې تضاد ته لاربنودوي. د L د کومپاکتوالي په بنسټ د $\{e_1, e_2, \ldots\}$ څېره یا عکسدا لاندې محدوده ډېرئ یا سټ

$$\{e_1/\lambda_1, e_2/\lambda_2, \ldots\}$$

نسبي کومپاکت ده، باید یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې یې خوندي لرودې وی. دا د

$$\|e_j - e_k\|^2 = \|e_j\|^2 + \|e_k\|^2 = 2, \quad j \neq k$$

له امله ناشونې ده.

دریم: د L انځورونه: د جوړښت وروسته $e_1, e_2, \ldots$ یو اورتونورمال بنسټ دی د

$$H = \mathrm{Bild}\, L \oplus \ker L\,.$$

لپاره.

دا ودیزېنه تړلې د کرښیزوالي څخه لاس ته راځي، چیرته چې آیګنوکتورونه، کوم چې د $\ker L$ لپاره بنسټ جوړوي، طبعاً ترې تیریدلی شو یا صرف نظر ترې کولای شو.

شتورم-لیوویل-پرابلم Sturm-Liouville-Problem

د ژئ ارزښت پرابلم

$$Lu = -(pu')' + qu \qquad = f \quad \text{auf} \quad (0,1),$$

$$u(0) = u(1) \qquad = 0,$$

د ناپرېکيدونکي، کره همغږيزو توابعو p, q سره يو ځانګړی شتور-ليوويل پرابلم دی. د کومپاکت-هرميتيکي اوپراتورونو لپاره د سپکترال انځورنې سره کيدی شي يو اورتوکورمال بنسټ $e_1, e_2, \dots$ شتون د $L^2(0,1)$ لپاره د L آيګن توابعو څخه وښوول شي، د ايګن ارزښتونو

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

او $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ سره . د دې بنسټ په مرسته کيدی شي په

$$u = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle e_j$$

بڼه انځور شي.

داوينا کيدی شي نوره هم تيزه شي. دا مګر له دې برسيره نور فکر کونې ته اړتيا لري.

د آيګن توابعو څخه د اورتونورمال بنسټ شتون د دې برعکس تړلی د ټوليزې تيوريڅخه، لکه چې په لاندې کې روښانه کيږي.

لومړی: د $f = 0$ لپاره د ژئ پرابلم فقط ساده حل لري. ځکه چې د u سره ضرب تېوته انتيګرال

$$\int_0^1 \underbrace{p}_{\geq 0}(u')^2 + \underbrace{q}_{\geq 0} u^2 = 0,$$

راکوي، يعني $u = 0$. د عادي دفرنشل مساواتو څخه اوس لاس ته راځي، چې د ژئ پرابلم د خوښې $f \in L^2(0,1)$ لپاره يو يوائځنی حل $u \in C^1[0,1]$ لري.

دويم: دا حل u د f کرښيز په واک دی يا کرښيز تابع دی، نو هر L ته يو معکوس اوپراتور A شتون لري:

$$f \to u = Af\,.$$

دريم: د ټوټه انتيکريشن پهمرسته سړی ښايي، چې A د ځان سره – يا خپل ادجونګيري ده. د $u = Af$، $v = Ag$ سره دی

$$\langle Af, g\rangle = \int_0^1 -u(pv')' + quv = \int_0^1 -(pu')'v' + quv = \langle f, Ag\rangle\,.$$

څلورم: د $u = Af$ سره د ضرب له مخې د دفرنشل مساوات د u سره لاس ته راځي او انتيګريشن

$$\int_0^1 p(u')^2 + qu^2 = \int fu$$

او له دې سره

$$c\,\|u\|_{1,2}^2 \leq \|f\|_0\,\|u\|,$$

د کوم سره چې $c > 0$ د p او q لپاره يوه پورته بند يا بنديز دی، او $\|\cdot\|_{1,2}$ په سوبوليو-فضا $H^1(0,1)$ نورم ښايي. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$، نو A په

$L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری (واحد کره) جوړوي، چې د یوه محدوده ډېرئ یا سټ په $H^1(0,1)$ کې. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو A په $L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری جوړوي، چې دا د محدودې ډېرئ په $H^1(0,1)$ کې پروت دی، يعني د سوبليو خونديوني جملې په بنسټ کومپاکت دی.

پنځم: د کومپاکت هرميتيکي اوپراتورونو شپکتاکولار انځوروني څخه له آيګن توابعو څخه د يوه اورتونورمال بنسټ شتون لاس ته راځي، چيرته چې د آيګنارزښت مطلق ارزښت λ_j يوه صفرپرلپسې جوړوي. په ورته توګه د معکوس اوپراتور A لپاره وينا سرې لاس ته راوړی شي.

ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع Schnell abfallende Testfunktion

د ګړندي لوېدونکو ازماېښتتوابعو S فضا کومپلکس ارزښتيز توابع $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ لري د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره د ټولو α, β لپاره.

نيمنورم $|\ |_{\alpha,\beta}$ په S باندې يو متريک تعريفوي. د يوه په خوښه کره ټاکلي پرلپسې (α_k, β_k) لپاره مولتی ايندکس جوړه Multiindexpaare سرې

$$\varrho_k(f) = \frac{|f|_{\alpha_k,\beta_k}}{1 + |f|_{\alpha_k,\beta_k}}$$

ږدي او

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k(f-g)$$

د کانوني واټنتابع په حيث تعريفوي.

فضا $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ د شوارڅ د ازمايښت تابع د $\mathcal{S}$ يو نينګه يا غليظه لاندي فضا ده. په انالېز کې په $\mathcal{S}$ باندې د ناپرېکيدونکو توابعو کيدی شي سرى کړى شي په همغه ازمايښت توابعو د کومپاکت وړونکي سره ځان محدود کړي.

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

د ګړندي لوېدونکو توابعو لپاره تيوپيکي بيلګي توابع دي د يوه اکسپوننشل د راکميدو حالت يا ځانيوني Abklingverhalten, سره، لکه د بيګي په توګه

$$f(x) = p(x)\exp(-|x|^2),$$

چيرته چې p يو په خوښه پولينوم دی.

تابع

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

په $\mathcal{D}$ کې د تابع لپاره يوه بېلګه ده. په همدې توګه د gh سره په $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\mathcal{D}$ پورې اړه لري او له دې سره په $\mathcal{S}$ پورې.

تابع $f(x) = \exp(-|x|)$ په حقیقت کې کړندئ لویږي، مګر په اصل یا سرچینه کې ناپرېکېدونکې مشتقوړ نه دی او له دې سره په S پورې اړه نه لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

تیمپیریري دیسریبوشنونه Temperierte Distributionen

تیمپریري دیستریبوشن و فضا S ته د ګړندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو دوال-یا دوه ګونې فضا S'جوړوي. یعنې یو تیمپریري دیستریبیوشن Λ یو کرښیز تابع دی، کوم چې هر تابع f د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره یو کومپلکس ګڼ یا عدد Λf ترتیبوي یا تنظیموي او اټکل

$$|\Lambda f| \leq c \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq n} |f|_{\alpha,\beta}$$

د پوره یا کافي لوی $n(\Lambda)$ لپاره پوره کوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په لاندې کې د تیمپریري دیستریبیوشنونو دوه تیپیکي بېلګې تشریح شوي دي.

(i)

کمزوري ځګېدونکي توابع:

د یوه $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \frac{dx}{(1+|x|^2)^{k/2}} < \infty$$

نو

$$\Lambda_\varphi f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi f\,, \quad f \in \mathcal{S}\,,$$

یو تیمپریري دیستریبیوشن تعریفوي. د

$$(1+|x|^2)^{k/2} \le c \sum_{|\alpha|\le k} |x^\alpha|\,,$$

له امله کېدی شي د $|\Lambda_\varphi f|$

$$c \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|}{(1+|x|^2)^{k/2}} \left(\sum_{|\alpha|\le k} |x^\alpha f| \right) \le \tilde{c} \sum_{|\alpha|\le k} |f|_{\alpha,0}$$

له لارې تخمین یا اټکل شي.

(ii)

د مشتقونو کرښیز کمبینیشن:

د مشتقونو هره موزن یا درونډ زیاتون یا جمعه

$$\Lambda f = \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x)$$

يو تيمپريري ديستريبيوشن تعريفوي. په جوته توگه باور لري

$$|\Lambda f| \leq \left(\max_\alpha |c_\alpha|\right) \sum_\alpha |f|_{0,\alpha} \,.$$

په ازماېښت توابعو د کرښيزو توابعو لپاره بېلگې چې په $\mathcal{S}$ ناپرېکېدونکي(متمادي) نه دي، دي

$$\Lambda f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(x^2) f(x)\, dx$$

او

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^\infty f^{(k)}(k)\,.$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د تيمپريري ديستريبيوشنونو مشتق

Ableitung von temperierten Distributionen

د يوه ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$توېه مشتق د

$$f \mapsto \left(\partial^\alpha \Lambda\right) f = (-1)^{|\alpha|} \Lambda\left(\partial^\alpha f\right)\,, \quad f \in \mathcal{S}\,,$$

له لارې تعريف شوی ديستريبيوشن دی. دا تعريف د کمزورو مشتقونو کونځپت(کنسپټ) تولېز کوي او د

$$\Lambda_\varphi f = \int\limits_D \varphi(x) f(x)\, dx\,, \quad \varphi \in C_0^\infty(D)\,,$$

لپاره د ورسره بلد مشتق تعریف سره سرخوري یا یو غږیز کیږي.

$$\partial^\alpha \Lambda_\varphi = \Lambda_{\partial^\alpha \varphi} \,.$$

د تعریف سره سم تمپیریري دیستریبیشن ناپای زیات مشتقوړ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

دیراک- او هیویزایډ – فنکشنال Dirac- und Heavyside-Funktional

د هیویزایډ-فنکشنال H یو دیستریبیوشن دی، هغه چې د تابع

$$h : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

له لارې ایندوڅیر کیږي، دا په دې معنا، چې

$$Hf = \int_0^\infty f \,.$$

.

د مشتق H' لپاره راکوي

$$f \mapsto H'f = -H(f') = -\int_0^\infty f' = -\left(\lim_{x\to\infty} f(x) - f(0)\right) = f(0) = \delta f \,,$$

دکوم سره چې δ یو دیراک-تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د تیمپیریري دیستریبیوشنونو ضرب(څل)

Multiplikation von temperierten Distributionen

د یوه تیمپیریري دیستریبیوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ سره د یوه کمزوري چټکېدونکي تابع $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ضرب د

$$(\varphi\Lambda)\, f = \Lambda\, (\varphi f)\ \ , f \in \mathcal{S}\,,$$

له لارې تعریف شوی تیمپریری دیستریبیوشن $(\varphi\Lambda)$ دی.

$$\sup_x \left| \left(1 + |x|^2\right)^{-s/2} \partial^\alpha \varphi \right| < \infty$$

د ټولو ضربیزو(ډېر) اندکشني(پېژندنښنو) α او $s(\alpha) > 0$ لپاره. دا شرایط په ځانګړې توګه د ټول پولینومونو لپاره پره دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د تیمپیریري دیستریبیوشنونو قات کونه یا راغبرګونه

Faltung von temperierten Distributionen

د یوه تیمپیریري دیستریبیوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره اویوه ګړندي لویدونکي ازماېښت تابع $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره

$$(\Lambda \star \varphi)\ (x) = \Lambda\varphi(x - \cdot)$$

د له لارې یوه قاتونه یا را غبرګونه تعریف ده.

تابع $\Lambda \star \varphi$ ناپای ډېر مشتقوړ دی او کمزوری جګېدونکی، کېدی شي د تیمپیریري دیستریبیوشن سره و پېژندل شي،

که $\Lambda = \Lambda_\psi$ له $\psi \in \mathcal{D}$ سره وي، نو

$$(\Lambda \star \varphi)\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy\,,$$

قاتونه ده د دیستریبیوشن سره یعني د تابع لپاره ورسره بلد تعریف دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

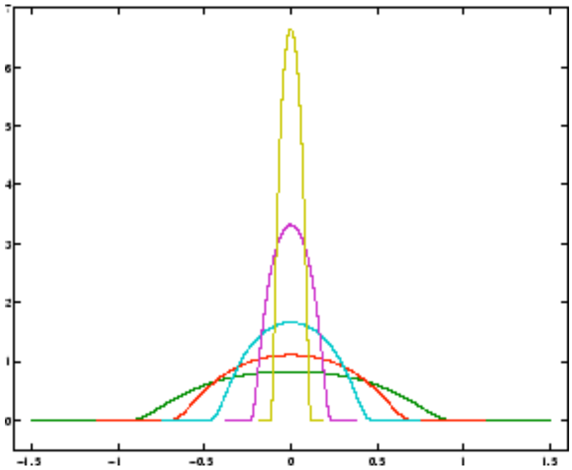
اپروکسیمي کتمتوالی Approximierende Identität

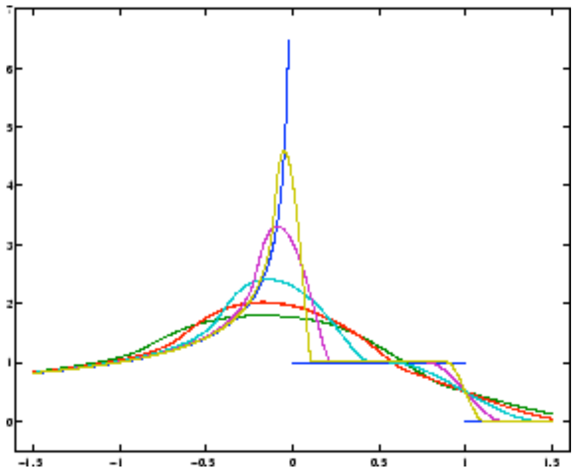
وي دې $\varphi \in \mathcal{D}$ یو د

$$\varphi \geq 0\,, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$$

سره ازماېښتي تابع او $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ ، نو باور لري

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon \star f = f\,, \quad f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\,.$$





کینه څیرونه یاتابع د $\varepsilon = 1, .75, .5, .25, .125$ لپاره φ_ε او $\varphi = c\exp(1/(x^2-1))\,, x \in \mathbb{R}$ ښايي ، ښئ تابع یا څیرونه اړونده قاتوني ښايي.

لکه په تابع کي چي ښوول شوی دی، کیدی شي قاتونه د توابعو د خویوني لپاره وکارول شي، ځکه چي

$$\varphi_\varepsilon \star f \in L^p \cap C^\infty\,.$$

د دي اپروکسيمسشن-پروسي په مرسته بسيا کوي، چې د بيلګي په توګه دا کټمټوالی د ناپرکيدونکو کربنيز اوپراتورونو لپاره فقط د خويو توابعو لپاره وښايو.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن

Fourier-Transformation schnell abfallender Testfunktionen

د فوريې ترانسفورميشن

$$f \to \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dx$$

اد فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن

$$g \to \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \exp(\mathrm{i}xy)\, dy$$

ناپرېکيدونکي کربنيز اوپراتورونه دي د ګړندي لويدونکو ازماېښت توابعو په فضا S باندې

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

تر يوه نورمي شوي ضريب د فوريې – ترانسفورميشن او د فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن پورې په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې ايزومتريګانې دي، کوم چې يو بل ته معکوس يا په څټ دی. دا چې $S \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ دی، نو بايد چې د S په توپولوزي کې ناپرېکيدنه وښايو:

د فوريي – ترانسفورميشن قوانينو سره سم باور لري

$$\left|(\mathrm{i}y)^\alpha \partial^\beta \hat f(y)\right| =$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \left((-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dy\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n} \left|\left(1+|x|^2\right)^n \partial^\alpha \left(x^\beta f(x)\right)\right|\, dx\,.$$

دا چې $\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n}\, dx < \infty$ دی، نو کيدی شي ښئ خوا د $\mathcal{S}$ د نيم نظم له لارې اټکل شي.

د په څېر يا معکوس فوريي – ترانسفورميشن لپاره په ورته توگه مخ ته ځو.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريي –ترانسفورميشن

Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ د فوريي –ترانسفورميشن د

$$\hat\Lambda\varphi = \Lambda\hat\varphi\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

له لارې تعريف دی او په $\mathcal{S}$ باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز اوپراتور تعريف دی.

دیستریبیوشن $\hat{\Lambda}$ کېدی شي په دېرو حالتونو کې د

$$\hat{\Lambda}(y) = \Lambda_x e^{-\mathrm{i}xy}$$

له لارې وشمېرل شي. د ټولیزو تیمپریري دیتریبیوشنونو Λ لپاره داکټمتوالی باید د یوه اپروکسیمیشن-پورسي په مرسته و ښوول شي، ځکه چې $e^{-\mathrm{i}xy}$ یو نه اجازه لرونکي ازماېښت تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د $\Lambda = \Lambda_\psi$ لپاره د $\psi \in \mathcal{S}$ سره دی

$$\Lambda\hat{\varphi} \underset{\mathbb{R}^n}{=\int}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dx\,\psi(y)\,dy$$

$$\underset{\mathbb{R}^n}{=\int}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dy\,\varphi(x)\,dx\,.$$

دویمه لیکه د $\Lambda_{\hat{\psi}}\varphi$ سره برابره ده، دا په دې معنا، چې $\hat{\Lambda}$ د $\hat{\psi}$ له لارې ایندوڅیر شوی دیستریبیوشن دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د تمپوریري دیستریبیوشنونو د فوریې – ترانسفورمیشن لپاره قواعد یا لارې

د توابعو د فوریې – ترانسفورمیشن ته ورته لاندې کټمتوالی د ګرندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو و $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره باور لري او د تیپریري دیستریبیوشنونو $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره:

- مشتقونه او ضربونه:

د یوه پولینوم $p(y)=\sum a_\alpha y^\alpha$ لپاره باور لري

$$p\widehat{(-\mathrm{i}\partial)\Lambda} = p\hat{\Lambda}\,.$$

لهدې سره دی $p(-\mathrm{i}\partial)=\sum a_\alpha(-\mathrm{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha$. په ځانګړې توګه $-\mathrm{i}\partial_\nu$ ټوټه مشتقونه د y_ν سره ضرب په ګوته کوي(دلته دی $p(y)=y_\nu$).

په ورته توګه باور لري

$$\widehat{p\Lambda} = p(\mathrm{i}\partial)\hat{\Lambda}\,.$$

- :Faltungقاتونه:

$$\widehat{\Lambda\star\varphi} = \hat{\varphi}\hat{\Lambda}\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ماتو نظمونو د سوبولیف-فضاګانې

Sobolev-Räume gebrochener Ordnung

د سوبولیف-فضا $H^s(\mathbb{R}^n)\ ,\ s\in\mathbb{R}$ د ټولو تیمپیری دیستریبیوشنونو Λ څخه جوړه ده د

$$w^s\hat{\Lambda}\in L^2(\mathbb{R}^n)\ ,\quad w(y)=\left(1+|y|^2\right)^{1/2}\ .$$

سره .

دا خویونه یا کرکتاریزه کونه د $H^k(\mathbb{R}^n)\ ,\ k \in \mathbb{N}_0$ تولګیز تعریف تولیز کوي، د تولو توابعو فضا په حیث د مربع انتیګرالوړ توته مشتقونو سره بالاخره تر نظم k پورې.

د کمیز یا منفي اکسپوننت یا جګګن سره فضاوې د زیاتیز یا مقبت اکسپوننت سره فضاوو دوه ګوني فضاوې دي.

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)'\ , \quad s \geq 0\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ښووني لپاره د $n=1$ حالت تر څېړني لاندې نیسو. تولیز حالت کېدی شي په ورته توګه تر څیرني لاندې ونیول شي او تنها تخنیکي پیچلی دی

(i)

د $k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د تعریف سره همغږیزوالی د پلانشرل-کټمټوالي Plancherel-Identitätڅخه لاس ته را ځي

$$f, f', \ldots, f^{(k)} \in L^2 \Leftrightarrow \hat{f}, |y|\hat{f}, \ldots, |y|^k\hat{f} \in L^2\,.$$

دا چې

$$|y|^j \leq \left(1+|y|^2\right)^{k/2} \leq c\left(1+|y|^k\right)\ , \quad y \in \mathbb{R}$$

د $j \leq k$ لپاره دی، ورته والی کرکتي کوني $\left(1+|y|^2\right)^{k/2}\hat{f} \in L^2$ ته بیایي

(ii)

د دوال فضا کرکتري کونه کیدی شي د د یوه ابسترکت د لیل سره وښوول شي. که د فوریې ترانسفورمیشن د F سره په نخښه شي w^s او د ضرب د W سره ، نو سړی لاندې دیاګرام لري

$$L^2 \xleftarrow{W} \hat{H}^s \xleftarrow{F} H^s \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{C}\,.$$

یو فنکشنال $\Lambda \in (H^s)'$ یو فنکشنال

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda F^{-1} W^{-1} : L^2 \to \mathbb{C}\,.$$

ایندوخیرت کوي.

دا چې $(L^2)' = L^2$ دی سړی کړی شي$\tilde{\Lambda}$ د یوه تابع $g \in L^2$ سره
وښوول شي یا په نخښه شي

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g}\,.$$

نو د $(FF\varphi)(x) = 2\pi\varphi(-x)$ له امله لاندې باور لري

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi} = \tilde{\Lambda} WFF\varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}\varphi(-x) w^s(x) \overline{g(x)}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} w^s(-x) \overline{g(-x)}\right)}_{\hat{\Lambda}(x)} dx$$

له دې سره غوښتونی کرکتاری کونه $\hat{\Lambda} w^{-s} \in L^2$ لاس ته راځي، ځکه چې کومپلکس
کونجوګیشن او هندارونه په انتیابیلیتي باندې کومه اغیزه نه ري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه Translationsinvariante Operatoren

هر محدود کربشيز اوپراتور $L : L^2\left(\mathbb{R}^n\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ ، هغه چې له ترانسليشن سره کومتير دی ،

$$Lf(\cdot - h) = \left(Lf\right)(\cdot - h)\,,$$

کيدی شي د يوه تيمپريري ديستريبيوشن Λ سره د محدود فوريي – ترانسليشن سره انځور شي، دا په دې معنا، چې

$$L\varphi = \Lambda\star\varphi\,,\quad \varphi\in\mathcal{S}\,,$$

او

$$\|L\| = \mathrm{ess\ sup}_{y\in\mathbb{R}^n}\left|\hat{L}(y)\right|\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د جملې يو اړخ د پلانشيرل قضيې حخه لاس ته راځي:

$$\|\Lambda\star\varphi\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|\hat{\Lambda}\hat{\varphi}\|_2 \le (2\pi)^{n/2}\|L\|\|\hat{\varphi}\|_2 = \|L\|\|\varphi\|_2,$$

د کوم سره چې اټکلونه خورا ښه شونې(ممکنه) ده.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د دفرنشل-اوپراتورونو لپاره بنسټيزه اوبيونه(حل)

د هر دفرنشل اوپراتور

$$L = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha\partial^\alpha$$

لپاره د ثابت یا تل همغه ضریب c_α سره یو تیمپریري بنسټیز حل شتون لري، دا په دې معنا، چ ېیو تیمپریري دیستریبیوشن Λ د لاندې سره شتون لري

$$L\Lambda = \delta\,.$$

د دفرنسیشن او قاتولو قانو سره سم ، د ټوټه دنرنشیشن مساوات یا –برابرون

$$Lu = f\,,\quad f \in \mathcal{D}\,,$$

یو حل به لاندې بڼه

$$u = \Lambda \star f$$

انځور شي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اونیوارینت دفرنشل اوپراتر

$$L = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 1$$

لپاره تیمبیریري بنسټیز حل $\Lambda = e^{-|x|}/2$ دی، د دې لپاره چې دا وښوول شي، سړی د لاندې برابرونیا مساوات فوریې – ترانسفورمي جوړوي

$$L\Lambda = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2\Lambda + \Lambda = \delta$$

او لاس ته راوړي

$$-(\mathrm{i}y)^2\hat{\Lambda} + \hat{\Lambda} = 1\,.$$

د $\hat{\Lambda}$ پسې حلونې پله مخې راکوي

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{1+y^2}\,,$$

کوم چې د $e^{-|x|}/2$ فوريې – ترانسفورمي په ګوته کوي.

نو د دفرنشل مساوات

$$-u'' + u = \sin x$$

يو حل دی

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\sin(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{y}\sin(x-y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x+y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \end{aligned}$$

$$= \qquad \sin x \int_0^\infty e^{-y} \cos y \, dy = \frac{\sin x}{2} \, .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د لاپلاس - اوپراتور بنسټيزه اوبيونه(حل)

Fundamentallösung des Laplace-Operators

د لاپلاس - اوپراتور

$$\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$$

په $\mathbb{R}^n$ کي لاندې بنسټيز حل لري

$$\frac{1}{(2-n)c_n} \, |x|^{2-n} \, , \quad n \geq 3 \, ,$$

د c_n سره د يوونسفر(واحد سفر) د $(n-1)$ - بعديز ډکي يا حجم.

د $n = 2$ لپاره

$$\frac{1}{2\pi} \, \ln |x|$$

يو بنسټيز حل دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د ښووني لپاره سرې د $\Delta\varphi = \Delta |x|^{2-n}$ له لارې منځ ته راغلی فنکشنال Λ اغيزه په يوه ازماېښت تابع $f \in C_0^\infty$ باندې تر څېړنې لاندې نيسو:

$$\Lambda f = \int_{R^n} \varphi \Delta f \,.$$

که د انتيګريشن ورشو د غونډاري پوښ $K_{\varepsilon,R}$ له لارې اپروکسيمي کړو د د دننۍ وړانګې ε او دباندنۍ وړانګې R سره، نو د ګرين Greenد دويم انتيګرال فورم يا بڼې له مخې باور لري

$$\int_{K_{\varepsilon,R}} \varphi \Delta f = \int_{\partial K_{\varepsilon,R}} \varphi \partial_{\perp} f - \int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f \partial_{\perp} \varphi + \int_{K_{\varepsilon,R}} f \Delta \varphi \,,$$

د $\partial_{\perp}$ د نورمال مشتق سره. له دې سره پهښنى اړخخ دريم انتيګرال ورکيږي، ځکه چې $\Delta\varphi = 0$ د $x \neq 0$ لپاره دى. لومړيو دواړو انتيګراله ونو ته فقط دننۍ ژى تر څېړنې لاندې نيسو، ځکه چې f محدود وړونکى لري او د پوره لوى R لپاره د خپلو ټولو مشتقونو سره ورکيږي.

که سرې پولار يا قطبي کواوردينات $x = rx^{\circ}\,,\ r \in [0,\infty)\,,\ x^{\circ} \in S_n$ وکاروي، د کومو سره چې S_n $(n-1)$-بعديز يوونسفر په ګوته کوي، نو دى

$$\int_{K_{\varepsilon}} \varphi \Delta f dx = -\int_{S_n} \varepsilon^{2-n} (\operatorname{grad} f)(\varepsilon x^{\circ}) \cdot x^{\circ} \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$+ \int_{S_n} f(\varepsilon x^{\circ})(2-n)\varepsilon^{1-n} x^{\circ} \cdot x^{\circ} \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$= -\varepsilon \int_{S_n} (\operatorname{grad} f)(\varepsilon x^{\circ}) \cdot x^{\circ} dS_n$$

$$+(2-n)\int_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)dS_n\,.$$

دا لومړی انتیګرال د ε سره د صفر په لور هڅيږي، ځکه چې $\operatorname{grad} f$ محدود دی، اودويم انتيګرال د $n \neq 2$ لپاره ارزښت $(2-n)\operatorname{vol}(S_n)f(0)$ راکوي. له دې سره دی

$$\frac{1}{(2-n)c_n}\Lambda f = f(0) = \delta f\,.$$

د $n = 2$ لپاره کيدی شيپه ورته توګه مخ ته لاړ شو، له دې سره دی

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\ln r) &= \frac{x^\circ}{r}\,, \quad r \neq 0\,,\\ \Delta(\ln r) &= 0\,, \quad r \neq 0\,,\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon &= 0\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

،،له هر څه ستونځمن يو څه ته نيت اوملا راتړل دي(ژباړی)،،.

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنرۍ، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته

تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور بریښي)