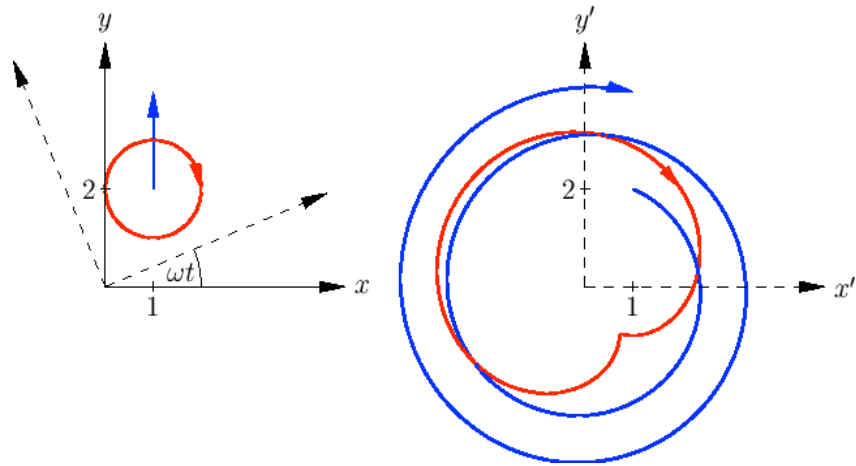


## وکتور شمیرنه



**Ketabton.com**

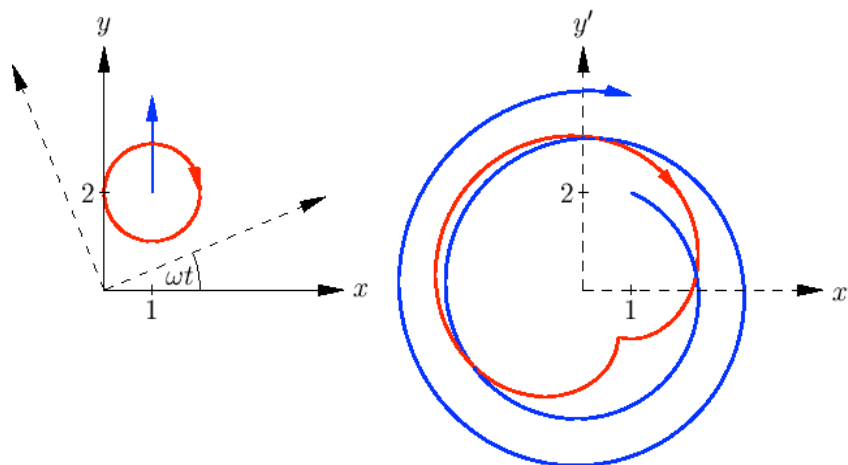
داکتر ماخان شینواری

۱	وکتور شمیرنه
۱	په هواره (سطح) او هوا (فضا) کې
۲	پیکسل – یا د چوځونې کوادینات
۲	د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کوادینات
۴	په کارتيزي کوادینات کې ټکي
۴	د اوږدوالي – او سور درجي
۶	توته – یا استوانه کوادیناتونه
۷	سیګنوم ( لاتین : Signum نخښه) فنکشن ...
۸	ورل ( سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) ....
۹	څرخون Rotation
۱۱	څرخنده یا څرخیدونې نسبي سیستم :
۱۳	وکتورونه په فضا کې
۱۴	د وکتورونو جمعه (زیاتون)
۱۶	سکالار ضرب
۱۷	د اړخنیمو غوڅټکي
۱۸	(مطلق) ارزښت
۱۸	درېګوډیز ( مثلثاتي) نامساوات
۱۹	د شمیرني قوانین
۱۹	له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ...
۲۱	کونج یا زاویه

۲۲	د کوساین جمله
۲۶	اورتوگونال یا یو په بل ولاړ (عمودي) بنسټونه
۳۰	وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب
۳۴	د لورنڅ زور Lorentzkraft
۳۷	د ایپسیلون – تنزور
۳۸	شپات ضرب
۳۹	د یوه څلور سطحیز د ډکي (حجم) شمیرنه
۴۱	د غیر گسطحیز یا نوذنقي خویونه
۴۲	د کواور دیناتونو یا پروت ولاړ .....
۴۳	ټکي – لور – بڼه
۴۵	دوه – ټکي – بڼه
۴۶	لحضوي – یا سترگورپ بڼه
۴۸	د ټکي – کرښي واټن
۵۱	د دوه کرښو واټن
۵۳	د الوتنې لارې
۵۵	د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه
۵۷	د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه
۵۸	د یوې سطحې د هیسي -نورمال بڼه
۶۰	د سطحو انځورونو ترمنځ ...
۶۲	د ټکي – سطحې واټن

- ۶۵ د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع
- ۶۸ هگی (بیضوي) Ellipse
- ۷۱ د سوزونتيکي وړانگه (شعاع نقطه محراق)
- ۷۲ پارابول Parabe
- ۷۳ د ساتلايت تلوېزيون Satelliten-TV
- ۷۴ های پاربول Hyperbel
- ۷۷ ناويگيشن Navigation
- ۷۹ د ډاکتر ماخان شينواري چاپ وي کتابونه  
د ليکونکی ژوند ته لنډه کتنه

## وکتور شمیرنه



د شمیرپوهنې نړیوال جال څخه په مننه

ژباړی: ډاکتر ماخان شینواری

۱	وکتور شمیرنه
۱	په هواره (سطح) او هوا (فضا) کې
۲	پیکسل – یا د چوځونې کوادینات
۲	د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کوادینات
۴	په کارتيزي کوادینات کې ټکي
۴	د اوږدوالي – او سور درجي
۶	توته – یا استوانه کوادیناتونه
۷	سیګنوم ( لاتین : Signum نخښه) فنکشن ...
۸	ورل ( سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) ....
۹	څرخون Rotation
۱۱	څرخنده یا څرخیدونې نسبي سیستم :
۱۳	وکتورونه په فضا کې
۱۴	د وکتورونو جمعه (زیاتون)
۱۶	سکالار ضرب
۱۷	د اړخنیمو غوڅټکي
۱۸	(مطلق) ارزښت
۱۸	درېګوډیز ( مثلثاتي) نامساوات
۱۹	د شمیرني قوانین
۱۹	له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ...
۲۱	کونج یا زاویه

۲۲	د کوساین جمله
۲۶	اورتوگونال یا یو په بل ولاړ (عمودي) بنسټونه
۳۰	وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب
۳۴	د لورنڅ زور Lorentzkraft
۳۷	د ایپسیلون – تنزور
۳۸	شپات ضرب
۳۹	د یوه څلور سطحیز د ټکي (حجم) شمیرنه
۴۱	د غیر گسطحیز یا نوذنقي خویونه
۴۲	د کواور دیناتونو یا پروت ولاړ .....
۴۳	ټکي – لور – بڼه
۴۵	دوه – ټکي – بڼه
۴۶	لحضوي – یا سترگورپ بڼه
۴۸	د ټکي – کرني واین
۵۱	د دوه کرني واین
۵۳	د الوتنی لاری
۵۵	د یوې سطحې پارامتریکی انځورونه
۵۷	د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه
۵۸	د یوې سطحې د هیسی -نورمال بڼه
۶۰	د سطحو انځورونو ترمنځ ...
۶۲	د ټکي – سطحې واین

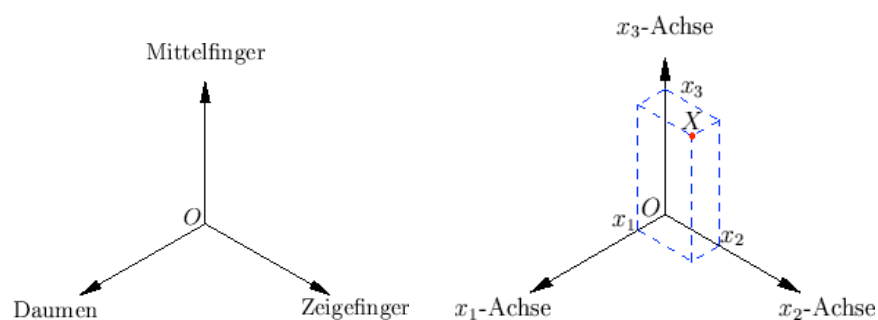
۶۵	د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع
۶۸	هگی (بیضوي) Ellipse
۷۱	د سوزونټکي وړانگه (شعاع نقطه محراق)
۷۲	پارابول Parabe
۷۳	د ساتلايت تلوېزيون Satelliten-TV
۷۴	های پاربول Hyperbel
۷۷	ناویگیشن Navigation
۷۹	د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه



## وکتور شمیرنه

په هواره (سطح) او هوا (فضا) کې کارتیزي - یا پروت ولاړسیستم

یو فضایی کواوردیناتسیستم له درې په سرچینییز ټکي  $O$  کې یو په بل ولاړو  
ګڼونکرنسو (محورونو) څخه جوړ دی، چې لوریزوالی یې د څیرې له مخې، د بڼې  
لاس قاعدې، سره سم ټاکل شوی دی.



یو ټکی  $X$  د کواوردیناتو  $x_i$  سره په نڅښه شوی په محورونو د پرېوستون ارزښت  
سره سم کره کیدی شي.  $X = (x_1, x_2, x_3)$ . که ایندکس یا پیژندنڅښه ونه کارول  
شي، نو

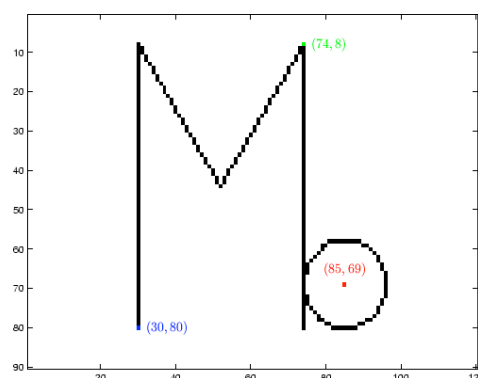
کواردینات په ورسره بلد ډول د  $(x, y, z)$  او گڼونمخور د  $x$ ،  $y$ ، او  $z$  - محور په

نڅبنه کيږي.

په ورته توگه د هواري کارتيزي کواردیناتسیستم پیژنو یا تعریفوو.

## پیکسل – یا د چوځوني کواردینات Pixelkoordinaten

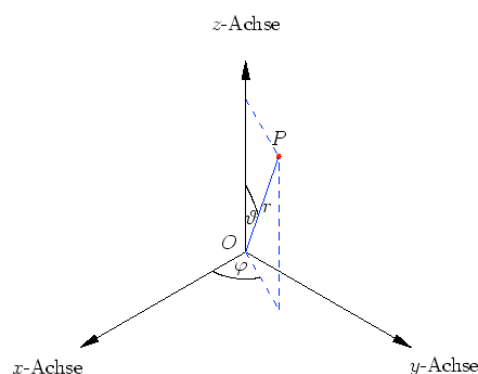
په یوه گرافیکي کرکي کې شیان د پیکسل- چوځونو کواردینات (Pixel خورا کوچني څیره شوي ټکي) له لاري ورکول کيږي.. دا انځور شوی ولاړگودیز یوه کرکي ده د  $90 \times 120$  چوځونو سره او د رنگه چوځونو کواردینات پروت دی د څيري گود په گوته کوي .



## د غونډاري (غونډوسکي) یا کرې کواردینات

یو ټکی  $P = (x, y, z)$  کیدی شي د سرچینې سره د واټن  $r = |\overline{OP}|$ ، د کونج  $\varphi$  د  $x$  - محور او د هغه پرېوستون  $\overline{OP}$  په  $xy$  - هواره او کونج  $\vartheta \in [0, \pi]$  د  $\overline{OP}$  او  $z$  - محور ترمنځ له لاري انځور بدلې شي. کونج  $\varphi$  ټیک تر  $2\pi$

زياتخلي پوري ٽاڪلڪيڊي شي. د ستاندارد په څير په  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  پرېکړه کيڊي شي يا منل کېږي شي. (په لاندې او نورو ځايونو کې: محور = Achse)



باور لري:

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta$$

همداسي

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

د کوم سره چې د  $x, y$  او  $z$  نيوڼي سره سم د ارکوسټانجنټ يوه مناسبه څانگه د ټاکلو وي.

د اصلي څانگې- کونج  $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$  سره باور لري

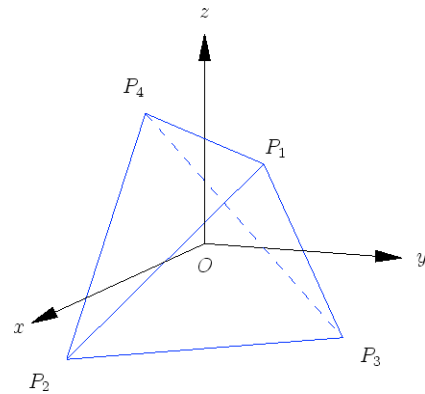
$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \text{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

ليکونکي: اپ، هولیک

په کارتيزي کوارډينات کې ټکي

$$P_1 = (1, 1, 1), \quad P_2 = (1, -1, -1), \quad P_3 = (-1, 1, -1), \quad P_4 = (-1, -1, 1)$$

د منظم ټيټرايډر کونجونه جوړوي د اړخ اوږدوالي  $2\sqrt{2}$  سره او په  $O$  کې د دروند ټکي سره



په غونډاري کوارډينات  $(r, \vartheta, \varphi)$  کې گوډټکي يا کونج- لاندې کوارډينات لري

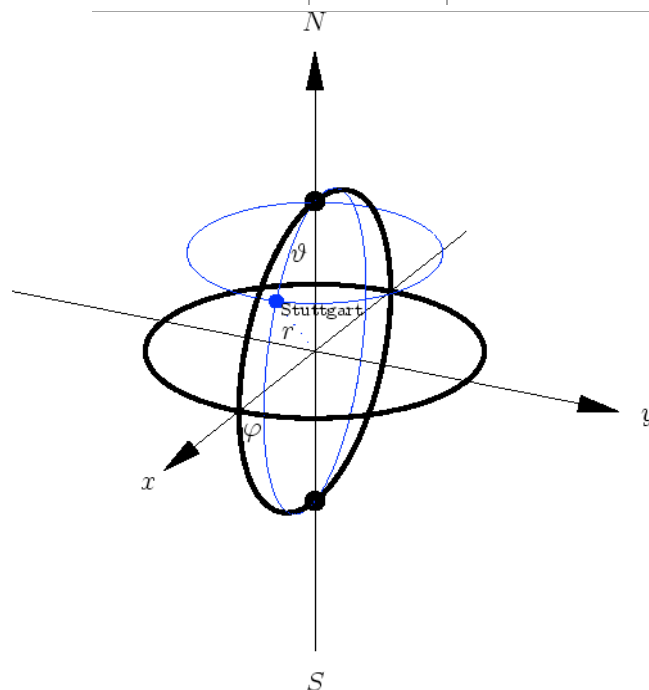
$$\begin{aligned} P'_1 &= (\sqrt{3}, \psi, \pi/4), & P'_2 &= (\sqrt{3}, \pi - \psi, -\pi/4), \\ P'_3 &= (\sqrt{3}, \pi - \psi, 3\pi/4), & P'_4 &= (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4), \end{aligned}$$

چېرته چې  $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$  همداسې  $\psi = \arctan \sqrt{2}$  دي

د اوږدوالي – او سور درجي (طول البلد او عرض البلد؟)

په ځمکغونډاري (ځمکغونډوسکي) يا ځمکي کره باندې د اوږدوالي – او سور درجي د کرې يا غونډاري کوارډينات دي، خو يواځې بل ډول کونجورشو گانې (کونجساحې) کارول کيږي:

ختيز اوږدوالی	$180^\circ - 0^\circ$	$\varphi = 0 \dots \pi$
لویدیز اوږدوالی	$180^\circ - 0^\circ$	$\varphi = 0 \dots -\pi$
شمالي سور	$90^\circ - 0^\circ$	$\vartheta = \pi/2 \dots 0$
جنوبي سور	$90^\circ - 0^\circ$	$\vartheta = \pi/2 \dots \pi$



په څیره کې اېکواتور (سور  $0^\circ$ ) او صفري اوږدوالی غور کښل شوي دي، شمالي قطب ( $90^\circ$  درجي شمالي سور) او جنوبي قطب ( $90^\circ$  درجي جنوبي سور) هم په نڅبنه شوي دي. شنه اوږدې - او سورگردۍ د ستوتگارت ( $90^\circ$  درجي ختيزې اوږدوالی،  $49^\circ$  درجي جنوبي سور) تېرېږي

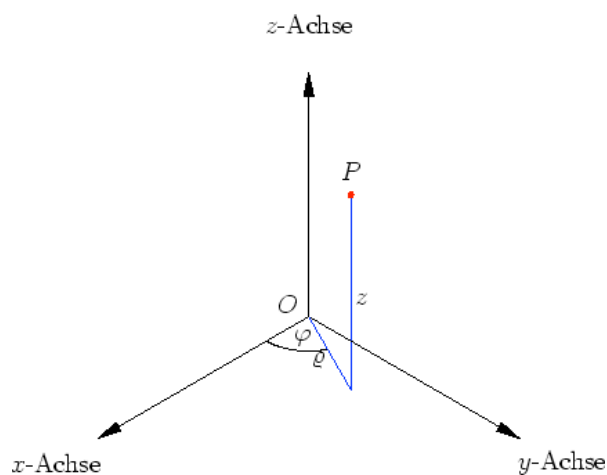
او  $\varphi = \frac{1}{20}\pi$  (ختيز نیم غونډاری) او  $\varphi = -\frac{19}{20}\pi$  (لویدیز نیمغونډاری په نڅبنه کوي

$$\vartheta = \frac{41}{180}\pi \text{ او}$$

## توته – يا استوانه کواوردیناتونه Zylinderkoordinaten

بوټکی  $P = (x, y, z)$  کیدی شي د یوه کونج  $\varphi$  له لاري، چي د  $x$ -مخور او د  $xy$ -هواره باندي د پریوستون (پروجکشن)  $\overline{OP}$  ترمنځ پروت دی، پریوستون د اوږدوالي او د  $z$ -کواوردینات له لاري وټاکل شي.

کونج  $\varphi$  ټیک ترد  $2\pi$  پوري ټاکلی. د ستانداردورشو پرپکړه زیات وخت تر  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  پوري شوي.



باور لري

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

همداسي

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z,$$

د کوم سره، چې د  $x$  او  $y$  د مخخښي پورې اړونده د ارکوسټانجنت يوه څانگه ټاکل کېږي.

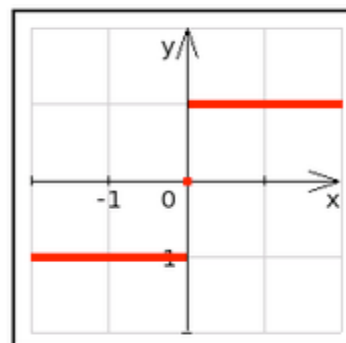
د اصليڅانگې - کونج لري:  $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$  سره باور

په لاندې کې Für د ... لپاره په مانا او sign سگنوم لوستل کېږي

د $x > 0$ , لپاره	$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, \\ \text{sign}(y)\pi/2, \\ \varphi_H + \pi, \\ \varphi_H - \pi, \end{cases}$
د $x = 0$ , لپاره	
د $x < 0 \wedge y \geq 0$ , لپاره	
د $x < 0 \wedge y < 0$ , لپاره	

سيگنوم ( لاتين : Signum نخښه ) فنکشن په رييل گڼونکرښه :

د فنکشن د مخخښو گراف

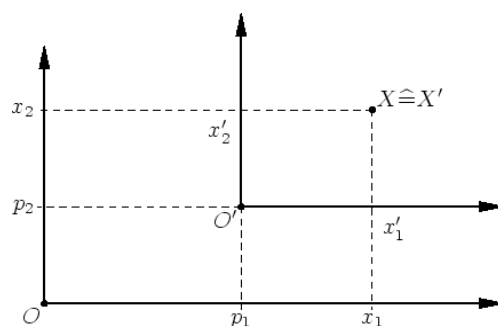


د رييل گڼونو څيره ونه ده په ډېرې  $\{-1,0,1\}$  کې

## وړل ( سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال ) Translation

د سرچینې  $O$  کښولو سره و  $O' = (p_1, p_2, p_3)$  ته د برابر پاتیکیدونکي لور سره د یوه ټکي  $X = (x_1, x_2, x_3)$  کواوردینات په لاندې توګه تغیر خوري

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) .$$



## خوزنده یا متحرک نسبي سیستم

د پوه د  $x$ -محور په لور د  $v$  چټکتیا سره ځغلنده ګاډی په هواره ( سطحه ) برابر ډوله خوزښت

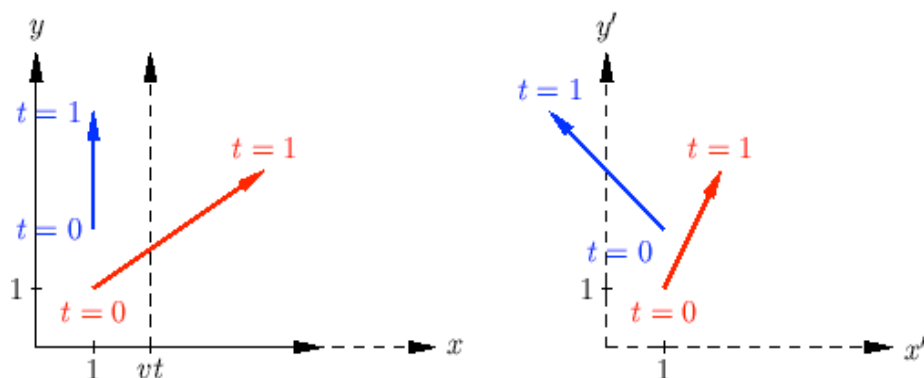
$$(x(t), y(t)) = (p + \alpha t, q + \beta t), \quad t \geq 0,$$

په پام کې نیسو ، نو کواوردینات یې په لاندې ډول تغیر خوري

$$x' = x - vt, \quad y' = y.$$

کتونکی یوه بله چټکتیا رینتوني نیسي یا بله چټکتیا گوري





د بیلګې په توګه د یوه شي لپاره باور لري، چې د یوه وخت په یوون (واحد) کې د  $v = 2$  لپاره له ټکي  $P = (1, 1)$  و ټکي  $Q = (4, 3)$  ته خوزي (سور غشی)

$$P' = (1, 1), \quad Q' = (4 - 2, 3 - 0) = (2, 3).$$

د ریښتوني او کتونکي چټکتیا لپاره په ورته توګه باور لري

$$v_t = \sqrt{(4 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{13}, \quad v_b = \sqrt{5};$$

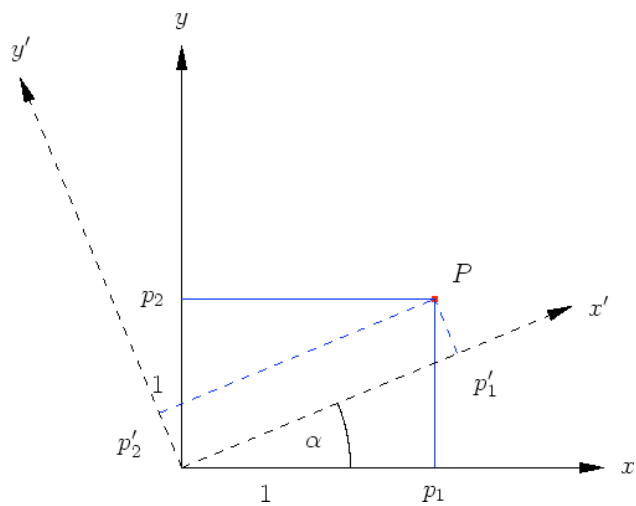
له دې خوزښت څخه خوزښت بتیاوالی برېښي.

لیکونکي: ایپ، هولیک

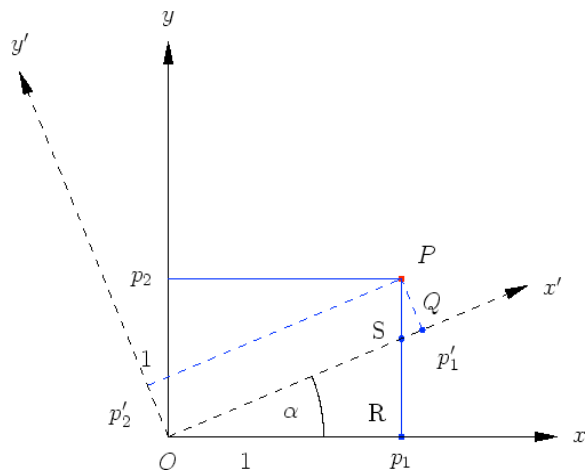
## څرخون Rotation

د  $xy$ -هوارې یا سطحې څرخون په  $z$ -محور د یوه ټکي  $P = (p_1, p_2, p_3)$  کواوردینات د  $\alpha$  کونج سره ترانفورمي کيږي د لاندې سره سم

$$p'_1 = \cos \alpha p_1 + \sin \alpha p_2, \quad p'_2 = -\sin \alpha p_1 + \cos \alpha p_2, \quad p'_3 = p_3.$$



په ورته توگه د  $yz$  - او  $zx$  - هوارو څرخون لپاره فرمولونه لاس ته راځي لیکونکي: اېپ، هولیک



لومړی پیژنو، چې

$$\angle(S, P, Q) = \alpha,$$

دایه دې معنا چې ولاړکونجیز درېگودی (مثلث)  $\triangle(R, O, S)$  او  $\triangle(Q, P, S)$  ورته دي.

په لومړي درېځوډي کې باور لري.

$$|\overline{OS}| = p_1 / \cos \alpha$$

او

$$|\overline{RS}| = p_1 \tan \alpha .$$

له دويم درېځوډي لاس ته راځي

$$\begin{aligned} p'_2 &= \cos \alpha |\overline{PS}| = \cos \alpha (p_2 - |\overline{RS}|) \\ &= \cos \alpha p_2 - \sin \alpha p_1 \end{aligned}$$

او

$$\begin{aligned} p'_1 &= |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1 / \cos \alpha + \sin \alpha (p_2 - |\overline{RS}|) \\ &= \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} p_1 + \sin \alpha p_2 \end{aligned}$$

ليکونکی: اېپ، هولير

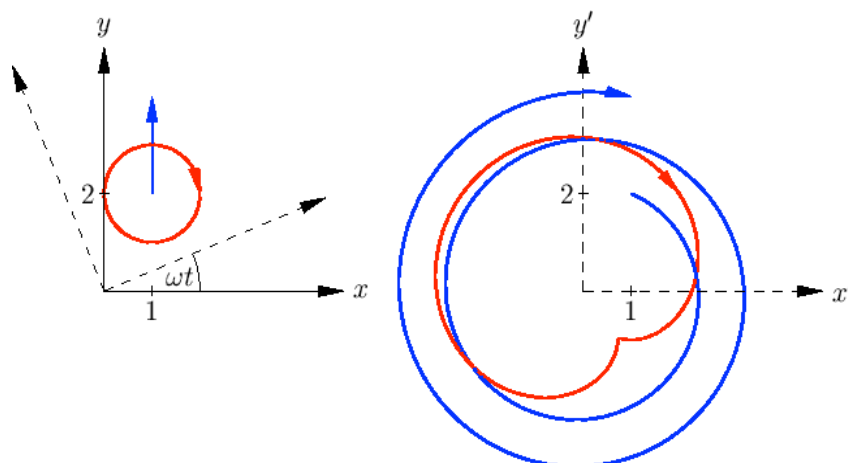
**څرخنده يا څرخيدونى نسبي سيستم :**

تابع کين د د سيده کرښيز او گردي ډوله خوزښتونو د د خوزښت منحنې بنایي:

$$G : (x, y) = (1, 2 + t/(2\pi)),$$

$$K : (x, y) = (1 + \cos(t), 2 - \sin(t)).$$

بني لور ته دواړه منحنی یا کرې دیوهکونج سره څرخیدوني نسبي سیستم انځوروي، دا په دې معنا چې داسې لکه په یوه کاروسل ( هغه څرخیدوني شیان دي، چې کسان په کې گرځي) کې یوه کتونکي ته برېښي.



د کواوډیناتو ترانفومیشن یا بدلون د سیده کرښیز خوزښت لپاره راکوي:

$$x' = c + (2 + t/(2\pi))s, \quad y' = -s + (2 + t/(2\pi))c$$

د لاندې سره

$$c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t).$$

یوه شپیرال منځ ته راځي، ځکه چې په نوکانو کې ضریب د جگیدونکي  $t$  سره لویږي.

دا جوړشوي 2 اوږونونه وخت انټروال  $0 \leq t \leq 4\pi$  په گوته کوي. د بدلي شوي کواوډینات څخه د  $\omega = 1$  سره د دایره ډوله خوزښت لپاره

$$x' = c(1 + c) + s(2 - s), \quad y' = -s(1 + c) + c(2 - s),$$

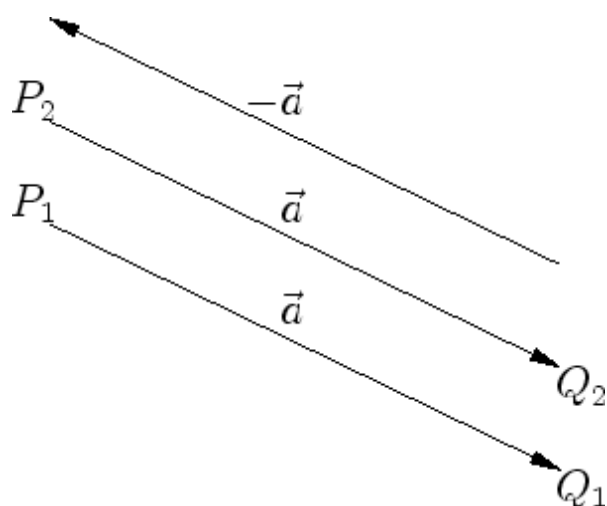
په څرخون سیستم کې د خوزبستمېنې بڼه نه پسي ترلې پېژندل کېږي. لکه دا بېلگه چې په گوتېکوي، کېدی شي د کتلو لور سملاسي تغیر شي. کېدی شي چې د کتلو خوزبست منحنې کې گود یا ماتوالی راپېداشي. په څرخېدونکي سیستم کې په یوه داسې زینګولار ټکي کې کتونکي چټکتیا صفر ده.

## وکتورونه په فضا کې

یو وکتور یوه لوریزه ټوټه کرښه ده:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

دا وکتور له ټکي  $P$  څخه و ټکي  $Q$  ته په نڅېنه کوي. یا بڼایي. په بدیله توگه کېدی شي وکتور په فضا کې د  $P$ -راکبني په توگه افاده شي او له یوه غشي سره په نڅېنه شي.



لکه د څیرې څخه چې کتل کېږي برابر اوږده غشي په همغه (برابره) لور همغه (برابر) وکتورونه  $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$  انځوروي.

ځانکې انځورونه نسبت و سرچینې ته ځای وکتور بلل کېږي او د وکتور کواوردیناتونه داسې تعریفوي:

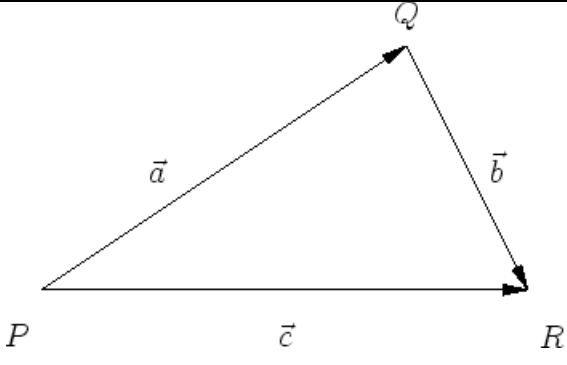
$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

د  $\vec{a}$  کواوردیناتونه هم کیدی شي د د ټکو  $Q$  او  $P$  کواوردیناتونو په څېر و شمیرل شي. بالاخره د

$$\vec{OO} = \vec{PP} = \vec{0}$$

سره صفروکتور په نڅېنه کوو.

د وکتورونو جمع (زیاتون):

<p>د دوه وکتورونو جمع د وکتورونو یو و بل ته یا یو بل پسې راکښنه ده</p> $\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR}.$	
--	---

د کواوردیناتونو یا محورونو لپاره دا دي:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

د

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

سره و  $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$  ته مخامخ يا په خُټ (برعكس) راكښنه  $-\vec{a}$  په نڅښه كيږي. په ځانگړې توگه باور لري

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

(ليكونكي: هوليك، موخ)

<p>د ټکو</p> <p><math>P = (1, 1, 1), \quad Q = (4, 2, 7), \quad R = (1, 4, 3)</math></p> <p>لپاره وکتورونه</p> <p><math>\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}</math></p> <p>او</p> <p><math>\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} + (-\overrightarrow{QR})</math></p> <p>شمير لکيږي</p>	
--	--

لکه په څيره کې چې کښل شوي د کواورد پښاتو لپاره باور لري:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 4-2 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-4 \\ 7-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-\vec{c}}$$

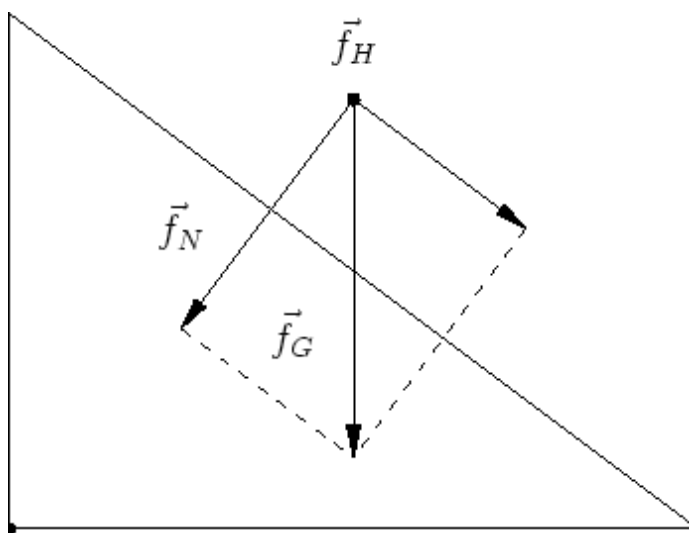
(لیکونکي: هولیک، موخ)

د یوې کبرې سطحې ( هواری ) لاندې داسې یوه سطحه پوهیږو، چې د پروتوالي لور ته میلان ولري.

لکه څنگه چې په څیره کې لیدل کیږي، کیدی شي د وزن زور  $\vec{f}_G$  په دوه یو بل سره ولاړو یا عمود بوخو یا کمپوننتونو ټوټه شي ( د زور ټوټه کونه د دوه زور غبرگ اړخیزې ( موازی الاضلاع ) سره ).

$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H.$$

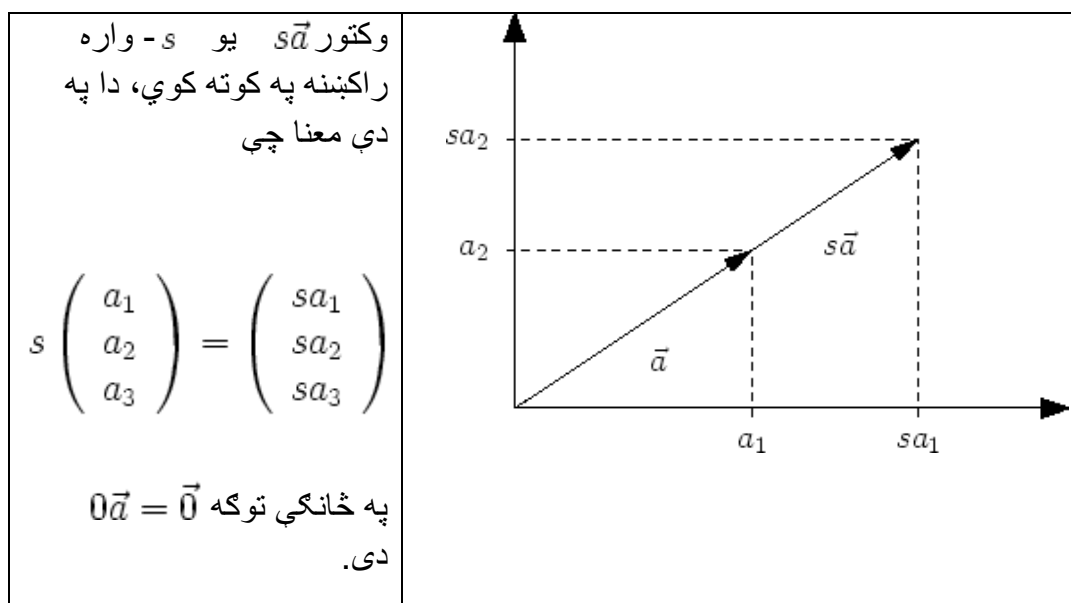
مایلی سطحې سره عمود عمودي زور ( ولاړ زور ) اغیزه لري. او مایلی هواری سره غرگ کښته لور ته لوریزه بیره بیزه زورند زور  $\vec{f}_H$  اغیزه لري.



(لیکونکي: هولیک، موخ)

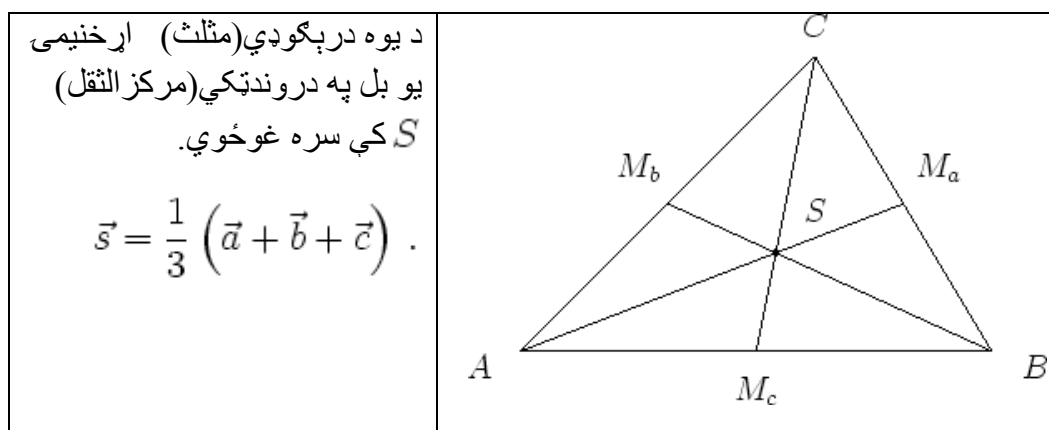
سکالار ضرب:





(لیکونکي هوليګ، موخ)

د اړخنیمو غوڅتکي (نقاط تقاطع ناصف الاضلاع) :

د دې د بنوولو لپاره ځای د وکتور د اړخنیمي په ټکولیکو  $\overline{AM_a}$  په لاندې بڼه:

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{m}_a - \vec{a}) = \vec{a} + t\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right), \quad t \in [0, 1].$$

د لپاره دی، نو دروند ټکی  $\overline{AM_a}$  په 1 : 2 نسبت وېشي

په ورته توگه اړخیميو  $\overline{BM_b}$  او  $\overline{CM_c}$  لپاره باور لري.

(لیکونکي هولیک، موخ)

### (مطلق) ارزښت

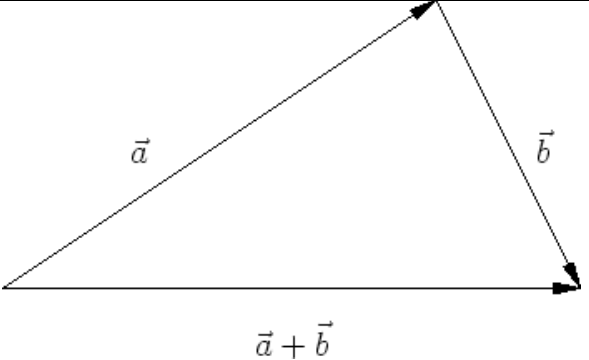
د  $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$  ارزښت له  $P$  څخه د  $Q$  ته د غشي اوږدوالی دی همداسې له  $O$  و  $A$  ته، دا په دې معنا چې

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

په ځانگي توگه  $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$  دي.

یو وکتور د 1 (مطلق) ارزښت سره یوونوکتور (واحدوکتور) بلل کیږي.

### درېگودیز ( مثلثاتي ) نامساوات :

<p>د دوه وکتورونو د جمعي (زیاتون) لپاره باور لري</p> $ \vec{a} + \vec{b}  \leq  \vec{a}  +  \vec{b} $ <p>د برابروالي سره ټیک هلته ، چې <math>\vec{a}</math> او <math>\vec{b}</math> غبرگ (موازي) وي، داپه دې</p>	
--	--

معناچي $\vec{a} = s\vec{b}$ دي.	
---------------------------------	--

(ليكونكي هوليك، موخ)

د شميرني قوانين :

د وكتورونو لپاره لاندي شمېر قوانين باور لري:

• Kommutativgesetz كموتاتيو قانون

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

• Assoziativgesetz اسوخيانيو قانون

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

• Distributivgesetz دېسټريبيوټيو قانون

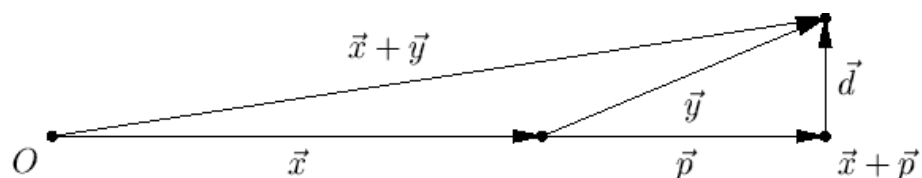
$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

(ليكونكي هوليك، موخ)

(له باد را پيداشوي د لويو اوبو يا بحر په سر) هواجرياتات

Drift eines Flugzeugs

يوه الوتکه په 800 km/h چټکتيا ختيز لور ته الوزي د يوه باد 50 km/h چټکتيا سره له WSW .



که پروت محور د ختیز سره او ولاړ محور د شمال سره په نڅبه کرښ یابونښایي، نو له

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سره د الوتکي چټکتیا او

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50 \cos(\pi/8) \\ 50 \sin(\pi/8) \end{pmatrix}$$

د باد چټکتیا ښایي.

د یوه ساعت وروسته الوتکه تر

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 800 + 50 \cos(\pi/8) \\ 50 \sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

پورې الوتکې. که له  $\vec{p}$  سره په کرښه د  $\vec{y}$  عمود یا orthogonale پرېوستون د  $\vec{x}$  په لور وښایو، نو ټولیزه چټکتیا له کمپوننتو څخه

$$\vec{x} + \vec{p} = \begin{pmatrix} 800 + 50 \cos(\pi/8) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د ختیز لورته او دریفت څخه

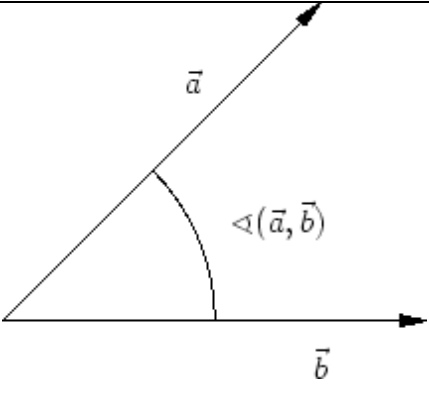
د شمال لورته

$$\vec{d} = \vec{x} + \vec{y} - (\vec{x} + \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

جوړيږي.

(ليکونکي هوليگ، اېپ)

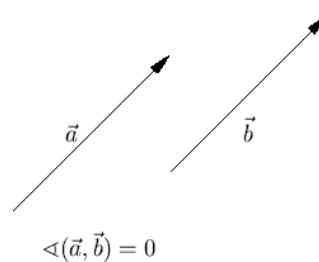
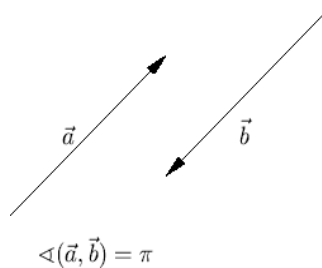
کونج يا زاويه :

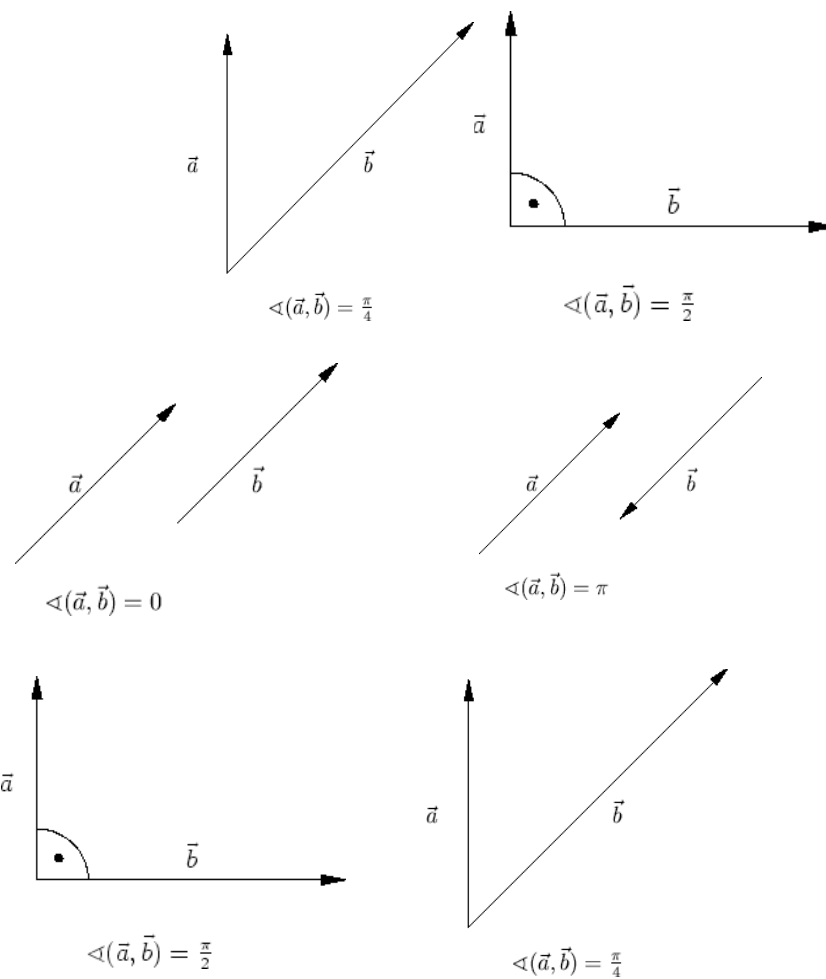
<p>د <math>\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}</math> لپاره سرى د</p> $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$ <p>د دواړو کونجونو کوچنى کونج بنايي، چې د وکتور سره په نخښه شوي غشي سره گډ ککړئ ټکى د رأس نقطه جوړوي.</p>	
---	---

دواړه وکتورونه عمود دي،  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ، که کونج له  $\pi/2$  سره برابر وي. له دې سره  
قرار دادکيږي، چې صفروکتور په هر وکتور عمود يا ولاړ درېدلى.

(ليکونکي هوليگ، موخ)

لاندي څيرې يو څو نمونه يي حالتونه د ليد کوي.





د کوساین جمله :

<p>په یوه درې‌ګونې کې په کوم چې د اړخ <math>\overline{AB}</math> مخامخ کونج <math>\gamma</math> پروت دی باور لري</p> $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$	<p>Diagram of a triangle with vertices A and B. Side AB is labeled c, side AC is labeled a, and side BC is labeled b. The angle at vertex C is labeled <math>\gamma</math>.</p>
---	---

نو په ځانگړې توگه لاس ته د  $\gamma = \pi/2$  لپاره د پیتاگوراس جمله راځي:  
 $c^2 = a^2 + b^2$

(لیکونکي هولیک، موخ)

د بنووني لپاره یې د پیتاگوراس له جملې کار اخلو.

<p>باور لري</p> $c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$ <p>همداسې</p> $q = b - p, \quad p = a \cos \gamma.$ <p>له دې سره لاس ته راځي</p> $c^2 = (a^2 - p^2) + (b - p)^2$ $= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$ <p>څه چې د بنوولو وو.</p> <p>(لیکونکي هولیک، موخ)</p>	
--	--

سکالار ضرب :

د دوه وکتورونو ضرب د

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

د له لارې تعريف دی

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

او

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

د سکالار ضرب د کواوردینات د انځورولو له لارې لاس ته راځي

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

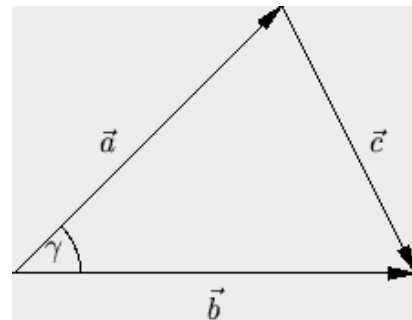
همداسي

$$(s\vec{a} + r\vec{b}) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c},$$

دا په دې معناچې د ضرب ورسره بلد قوانین باور لري.

(لیکونکي هولیک، موخ)

د دواړو ورته والیو انځورونه د کوساین جملې له لارې لاس ته اځي:





$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma.$$

که دایره مربع وي کين لور ته راوړل شي، نولاس ته راځي

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

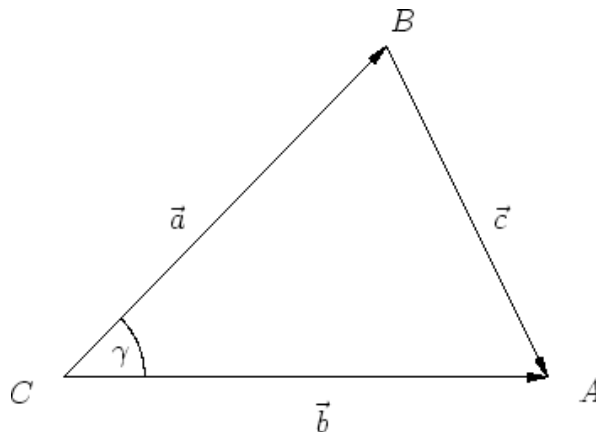
د بدلون  $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$  څخه وروسته دواړه مربع وي يو بل سره پورته کوي يا سره له منځه ځي، او پاتې گډ ترمونه د (-2) - ځله سکالار ضرب سره يو بل سره سر خوري.

دا څېره شوی مثلث لاندې گوډونه لري

$$A = (6, 0), \quad B = (4, 4), \quad C = (0, 0)$$

او دی

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



د  $\gamma$  کونج د سکالار ضرب په مرسته شمېرل کېدی شي.

$$\cos \gamma = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

لاس ته راځي  $\gamma = \pi/4$ ، لکه ترلي له کواوردیناتونو څخه د لیدني دي. د دې راوړل شوي بېلگې په بنسټ کېدی شي د کوساین جمله هم وشمېرل شي. باور لري

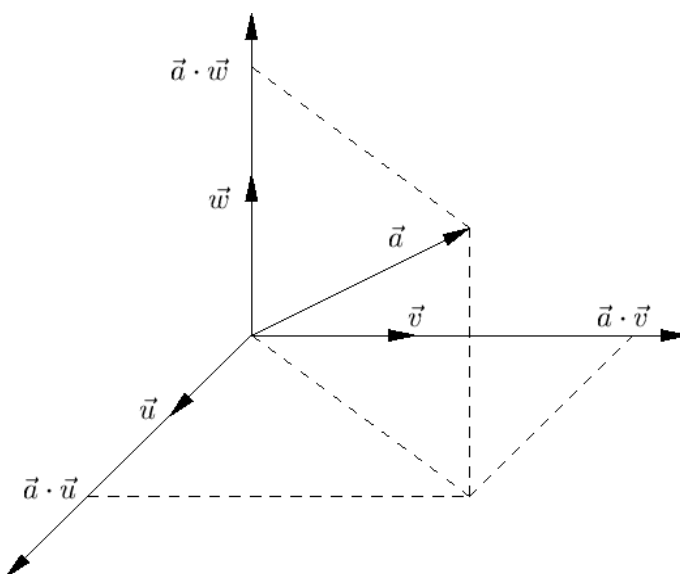
$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48,$$

او هم د  $-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \gamma = -2(4\sqrt{2})6/\sqrt{2}$  سره توفیق مومي یا سر خوري.

(لیکونکي هوليگ، موخ)

اورتوگونال یا یو په بل ولاړ (عمودي) بنسټونه Orthogonalbasis

اورتوگونال بنسټ له درې جوړه اورتوگونال وکتورونو  $\vec{w}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{u}$ . څخه جوړ دي.



لکه په څیره کې چې کښل شوی دی، کیدی شي هر وکتور  $\vec{a}$  د کرښیز کمپینیشن

$$\vec{a} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}|^2} \vec{u} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})}{|\vec{v}|^2} \vec{v} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{w})}{|\vec{w}|^2} \vec{w}$$

له لارې انځور شي. د زیاتوونو (د جمعې برخو) د بنسټیزو وکتورونو تولید شوی پرېستونونه دي، او د ضریبونو لپاره باور لري

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a} \cdot \vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a} \cdot \vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2.$$

که وکتورونه  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  نورمي یعنی یو په بل ولاړ (عمود) وي، نو د اورتوگونال بنسټ څخه غږېږو. په ځانګړې توګه لرو:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \vec{e}_x + a_2 \vec{e}_y + a_3 \vec{e}_z$$

د کارتیزې کواوردینات سیستم د کانونیکي اورتوگونال بنسټ

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لپاره

(لیکونکي هولیک، موخ)

دا چې هر وکتور  $\vec{a}$  د کرښیز کمپینیشن

$$\alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$$

له لاري انځور بدلای شي، هندسي ترلی لیدل کيږي

د ضریبونو د ټاکلو لپاره د بنسټ وکتورونو سره سکالار ضرب جوړيږي. دا چې

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} = 1, \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{u} = 0,$$

د سکالار ضرب د کرښيزوالي له لاري لاس ته راځي:

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = \left( \alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right) \cdot \vec{u} = \alpha.$$

په ورته توګه د  $\beta$  او  $\gamma$  لپاره ورته فرمول تصدیقيږي. د ضریبونو د مربع جمعې فرمول لپاره سړی د لاندې ضربولو له لاري

$$|\vec{a}|^2 = \left( \alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right) \cdot \left( \alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right).$$

ښوول کيږي.

دا هم په ساده توګه لیدل کيږي، چې پرېستونو ته کمښت وکتورونه

$$\vec{a} - \alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}, \quad \vec{a} - \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}, \quad \vec{a} - \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2},$$

هر یو په اړونده بنسټ وکتور باندې عمود یا ولاړ دی:

$$\left( \vec{a} - \alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} \right) \cdot \vec{u} = \left( \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right) \cdot \vec{u} = 0.$$

(لیکونکي هوليګ، موخ)

نسبت اورتوگونال بنسبت ته

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وکتورونه

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$$

لاندي ضربونه لري.:

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$	=	$\vec{a} \cdot \vec{u}$
$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{3}$	=	$\vec{a} \cdot \vec{v}$
$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$	=	$\vec{a} \cdot \vec{w}$

له دي سره انځورونه لاس ته راځي:

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{u} + \sqrt{3}\vec{v} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\vec{w}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب:

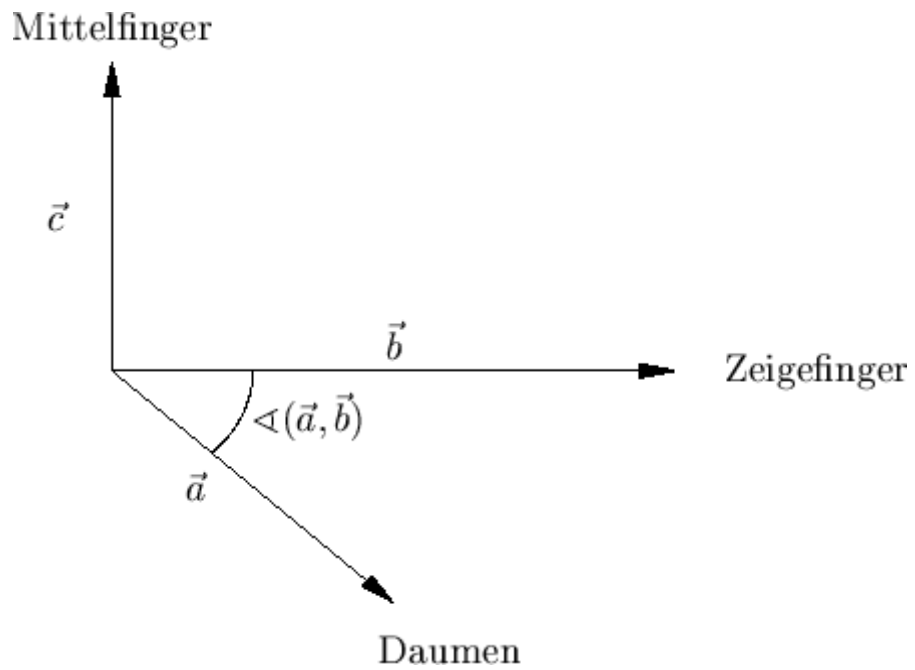
وکتور

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a}$  او  $\vec{b}$  ته اورتوگونال دی، د ،، بني –لاس- قانون، لوریز دی او اوږدوالی

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})).$$

لري. (د څیرې د الماني پښتو: منځکوته، کوتلکه، غټه کوته)



شکل کي الماني: پورته: منځگوته، ښي لور ته: نخښ گوته، کښته لور ته غټه گوته

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

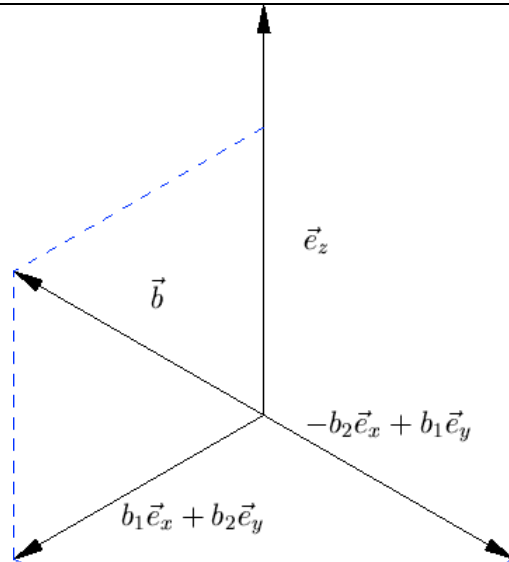
په ځانگړي توگه باور لري د لپاره او د لپاره  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

بدیل يي وکتور د

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

سره تعريفوي.

(ليکونکي: هولیگ، اپپ)

<p>د دې لپاره چې د دواړو تعريفونو ورته والی وښايو، لومړی په پام کي نيسو، چې دواړه انځورونې په <math>\vec{a}</math> او <math>\vec{b}</math> کي گربښيزي دي، دا په دې معنا چې سکالار ضرب او وکتور جمعي سره زعمور دي. د کواورديناټ انځورني لپاره کيدی شي دا تړلي پسي وشميرل شي. فقط زياتونوالی(جمعه کيدنه) د هندسي تعريف لپاره څرگنده توگه روښانه دی.</p> <p>لومړی ښايو، چې .</p> <div style="background-color: #e0e0e0; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <math display="block">\vec{e}_z \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} .</math> </div>	
---	---

لکه له څیرې چې لیدل کیږي، وکتور ضرب لاس ته راځي، داسې چې که وکتور  $\vec{b}$  په  $xy$ -سطحه پرېوتل شي او بیا په کونج  $\pi/2$  و څرخول شي. دا چې د پرېوتون اودوالی

$$|\vec{b}| \sin(\angle(\vec{e}_z, \vec{b}))$$

دی، نو پورتنی فرمول لاس ته راځي.

د ځانگړي انځوروني څخه په دویمه کمپوننت کې د سیده پسي شمېرنې کرښيزوالی لاس ته راځي، ځکه چې بي د توليز محدودیت څخه د لومړي وکتور لور د  $\vec{e}_z$  په حیث ټاکو.

په ورته توگه لومړی کمپوننت هم همداسې کاروو.

بسیا کوي، چې د  $\vec{e}_z$ ،  $\vec{e}_y$ ،  $\vec{e}_x$  کانونیکي بنسټ وکتورونو کمپینیشن لپاره وراته والی و ازمايل شي.

(لیکونکي: هولیک، اپپ)

د تعریف یا پیژند د څرگندونې لپاره د وکتورونو

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{او} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب  $\vec{c}$  شمیرل کیږي.

یو و  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  ته اورتونال وکتور دی



$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \parallel \vec{c},$$

کوم چي همدا اوس ٽيڪ لوريزوالی لري. له

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لاس ته راڻي:  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$ . له دي سره

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

دی او ورپسي

$$\vec{c} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

په بديله توگه په ساده توگه تحلیلي تعريف

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته اڻي

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

( ليکونکي: کلاوس، هولیک )

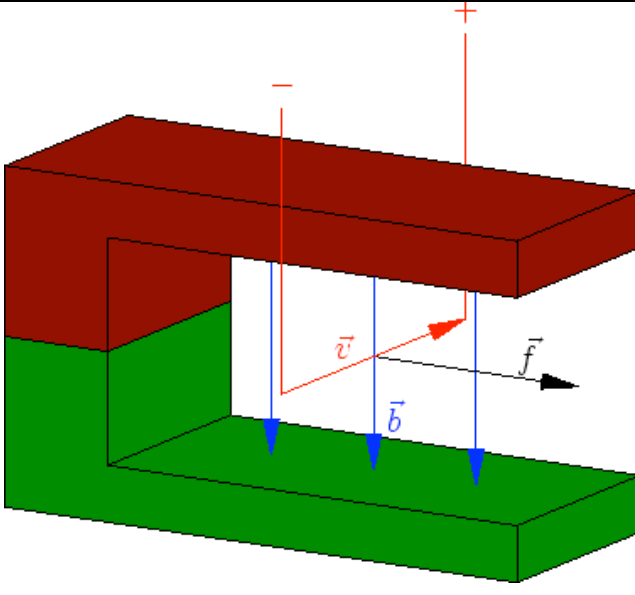
د ستاندارد بنسټ لپاره باور لري

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \times \vec{e}_y &= \vec{e}_z, & \vec{e}_y \times \vec{e}_z &= \vec{e}_x, & \vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y \\ \vec{e}_x \times \vec{e}_x &= \vec{0}, & \vec{e}_y \times \vec{e}_y &= \vec{0}, & \vec{e}_z \times \vec{e}_z &= \vec{0}. \end{aligned}$$

اړونده فرمولونه د په خوښه ، د ،، بنې-لاس-قانون،، سره سم لوريزي اور توگونال بنسټونو لپاره باور لري.

(ليکونکي : هولیک، اپپ)

د لورنڅ زور Lorentzkraft

<p>په يوه الکترون <math>-e</math> ، چې د <math>\vec{v}</math> چټکتيا سره په يوه مقناطیسي ورشو <math>\vec{b}</math> کې خوزي يا حرکت کوي، د لورنڅ زور اغيز لري</p> $\vec{f} = e\vec{b} \times \vec{v}.$ <p>دا په دا څيره شوي ازمايښت نظم د برېښنا جريان تيروني د <math>\vec{f}</math> په لور لوريزه اغيزه لري..</p>	
---	---

(ليکونکي : هولیک، اپپ)

د وکتور ضرب لپاره قانونونه:

د وکتور ضرب لپاره لاندې قوانين باور لري:

• Antisymmetrie اسوځياتيو قانون

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

• Linearität کرښيزوالی

$$(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) \times (\beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2) = \alpha_1 \beta_1 (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) + \alpha_1 \beta_2 (\vec{a}_1 \times \vec{b}_2) +$$

$$\alpha_2 \beta_1 (\vec{a}_2 \times \vec{b}_1) + \alpha_2 \beta_2 (\vec{a}_2 \times \vec{b}_2)$$

• غیرګارڅیز یا موازی الاطلاع ډ سطحی مساحت، هغه چي له وکتورونو  $a$  او  $b$  غزېدلې، د هغه د ضرب مطلق ارزښت دی، نو  $|a \times b|$ .

• د ګراسمن کټمتوالی Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

• د لاګرانج کټمتوالی Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(لیکونکي: اېپ، هولیګ، کیمرلي)

انتیسیومتری او کرښيزوالی د وکتور ضرب د کواورډینات انځورونې څخه تړلی لیدونکی دی.

د کټمتوالي د بنووني لپاره کیدی شي بي له ټوليزو بنديزونو  $\vec{a} = \vec{e}_x$  ونيول شي او بايد په  $\vec{b}$  کې د کرښيزوالي په بنسټ فقط حالتونه  $\vec{b} = \vec{e}_y$  او  $\vec{a} = \vec{e}_x$  وڅيرل شي، د  $\vec{a} = \vec{b}$  لپاره د کټمتوالي دواړه اوځونه په ساده توگه صفر دي. په لومړي حالت کې د کين اړخ د کاسمن کټمتوالي لاس ته راځي

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

دا د بني اړخ

$$c_1 \vec{e}_y - c_2 \vec{e}_x$$

سره يوغريز کيږي. په دې راورل شوي ځانگړي حالت ( $\vec{b} = \vec{e}_y, \vec{a} = \vec{e}_x$ )

کې د لاگرانژ کټمتوالي

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix} = c_1 d_2 - c_2 d_1 ,$$

هم ټيک دی.

په ورته توگه د  $\vec{b} = \vec{e}_z$  لپاره هم دليل راورل کيږي.....

کرښيزوالي کیدی شي د غبرگيزوالي لپاره وکارول شي. دا لاندې يې بيلگه ده.

$$\left( 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د گراسمن - او لاگرانژ کټوتوالی وکتور ضرب په ساده توګه د شمیرلو سکالار ضرب ته بیرته بیایي. د بېلګې په توګه دی

$$\left( \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right) \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

او

$$\left( \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right) \cdot \left( \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right) = 0 \cdot 6 - 12 \cdot 1 = -12.$$

(لیکونکي: ایپ، هولیګ)

د ایپسیلون - تنزور Epsilon-Tensor

د  $\varepsilon$ -تنزور

$$\varepsilon_{i,j,k} \in \{-1, 0, 1\}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\},$$

د دوه برابر و پېژندنځینو ( ایندکسونو ) سره صفر دی او دوه جوړه ډوله مختلفو ایندکسونو سره لاندې ارزښت لري:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,2,3} &= \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = 1, \\ \varepsilon_{1,3,2} &= \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1.\end{aligned}$$

نو دا د څيکليکي پرموتيشن (ځای بدلون) لاندې اينوارينانت (تغير نه خوړونکي) دی او د پېژندنځينو يا ايندکسونو د بدلون سره مخنځبنه بدلوي.

(ليکونکي: اېپ، هولیک)

د -تنروز په مرسته کيدی شي د وکتور ضرب  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  په لاندې بڼه وليکيل شي.

$$c_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

(ليکونکي: اېپ، هولیک)

شپات ضرب

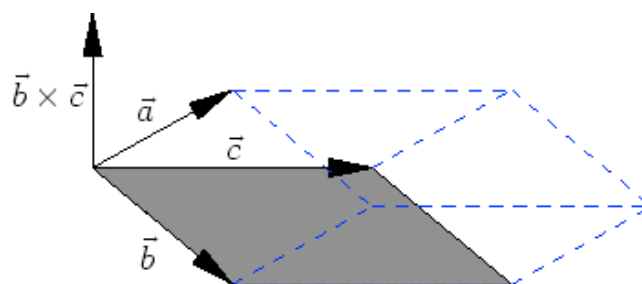
شپات ضرب

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ترمخنځبنې پورې د له درې وکتورونو  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  څخه غزول شوی شپات ډکي يا حجم سره يو غبريز شي يا برابر شي.

(غبرگ سطحيز)



د  $\varepsilon$  - تنزور په مرسته کېدی شي د غیرگخواييز يا شپات ضرب په لاندې بڼه هم وليکل شي:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

(ليکونکي: اېپ، هولیک)

$$\vec{d} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$$

سره

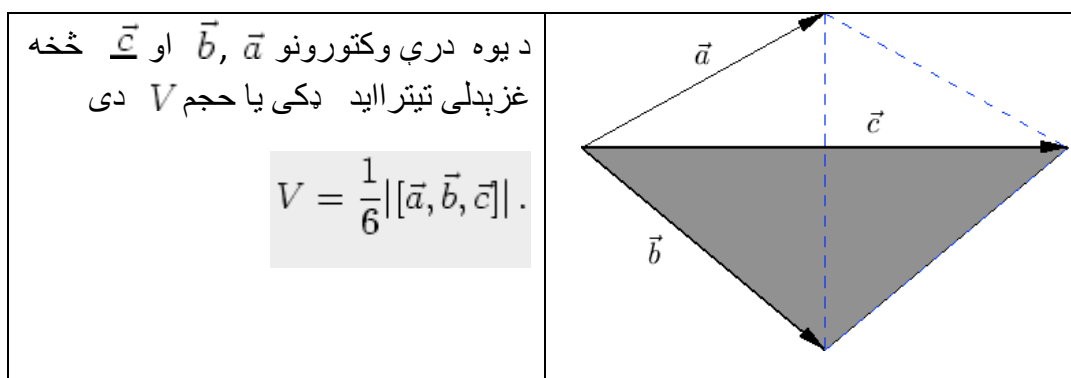
د

$$h = |\vec{a}| \left| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{d})) \right| = |\vec{a} \cdot \vec{d}|$$

د شپات يا غبرگ سطحيز جگوالی دی. دا چې  $f = |\vec{b} \times \vec{c}|$  د کرښيز شوي غبرگ اړخيز د سطحې خونديونه ده، د ډکي يا حجم لپاره لاس ته راځي:

$$hf = \left| \vec{a} \cdot \left( \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \right) \right| |\vec{b} \times \vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|.$$

د يوه څلور سطحيز (حجم) شميرنه Volumen eines Tetraeders



(لیکونکي: اېپ، هولیک)

د یوه تیترااید (څلور سطحیز) ډکی  $V$  داسې شمیرل کیږي

$$V = \frac{1}{3} Gh,$$

چیرته چې  $G$  بنسټ سطحه ده او  $h$  جگوالی په گوته کوي. که په بام کې ونیول شي،  
چې  $G$  نیم دومره لوی دی، لکه د غبرگسطحیز  $G_{\text{Spat}}$  سطحه، چې له درې  
وکتورونو غزېدلی، نو لاس ته

$$V = \frac{1}{6} G_{\text{Spat}} h = \frac{1}{6} V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

راځي، د غبرگسطحیز  $V_{\text{Spat}}$  په مرسته .

(لیکونکي: اېپ، هولیک)

د څلور سطحیز  $V$  ډکی، چې له وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



غزبدلی ، دی

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

د غیرگسٹحیز یا ذونذقی خویونه Eigenschaften des Spatprodukts

د غیرگسٹحیز ضرب په هر Argument کې کرښیز دی او سربیره پردې دا لاندې نور خویونه لري

• څیوکلکي - یا تل بیرته راگرځیدونی بدلون : zyklische

Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

• کرښیز بلواکوالی یا تابعیت

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c},$$

د لږ ترلږه یوه سکالار  $\alpha, \beta, \gamma$  سره د 0 سره نابرابر.

• Orientierung: لوريزونه

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$$

د هر بني سيستم لپاره

(ليكونكي: اېپ، هولېگ)

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ارزښتونو شمیرنه

وکتورونه  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  او  $\vec{w}$  یو ریښتونی غیرگهواریز (سطحیز) غزوي، نو یو په خوښه وکتور  $\vec{x}$  کیدی شي د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$$

په څیر انځور شي د لاندې ضریبونو سره:

$$\alpha = \frac{[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}, \quad \beta = \frac{[\vec{x}, \vec{w}, \vec{u}]}{[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]}, \quad \gamma = \frac{[\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}]}{[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]}.$$

(ليكونكي اېپ، هولېگ)

د

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$$

لپاره سکالار ضرب د  $\vec{v} \times \vec{w}$  سره جوړوو، نو لاس ته راځي

$$\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \alpha \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

همداسي

$$\alpha = \frac{[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]},$$

داچي  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , او  $\vec{w}$  يو ريښتوني غبرگسطحيز غزوي، داښه دي معنا چي  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$  دي.  $\beta$  او  $\gamma$  لپاره سړي په روتنه توگه مخ ته ځي. (ليکونکي اږپ، هولیک)

که وکتور

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د وکتورونو

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د کربنيز کمبیشن په څير انځورول غواړو، نو لاس ته راځي

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = 2$$

$$[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}] = 4, \quad [\vec{x}, \vec{w}, \vec{u}] = -4, \quad [\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}] = 8$$

او له دي سره

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \frac{4}{2}\vec{u} - \frac{4}{2}\vec{v} + \frac{8}{2}\vec{w} \\ &= 2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}. \end{aligned}$$

(ليکونکي اپ، هولیک)

ټکي - لور - بڼه:

<p>په يوه کرښه ټکي <math>X</math> له <math>P</math> د <math>\vec{u}</math> په لور کېدی شي د</p> $\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$ <p>سره انځور شي.</p>	
---	--

په ورته توگه باور لري

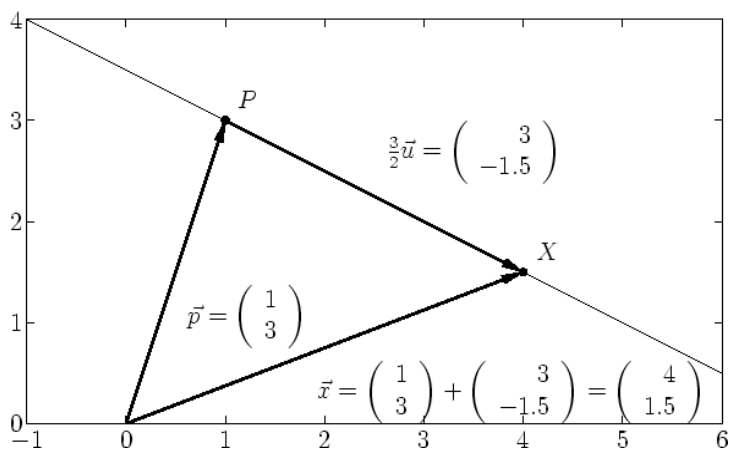
$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

د ځای-وکتور  $\vec{x}$  کواوردیناتو لپاره.

(ليکونکي، هولیک، هیورنر)

څېره د یوې کرښې د ټکي-لور-بڼه د لیدلو کوي د په د پاسه ټکي  $P = (1, 3)$

او  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  لور سره. د کرښې د  $X$  ټکي پارامتر  $t = 3/2$  لري.



(لیکونکی، هولیک، هیورنر)

### دوه - ټکي - بنه :

<p>په یوه کرښه د <math>X</math> ټکی چې له دوه <math>P \neq Q</math> ټکو تیریري کیدی شي په بنه <math>\vec{PX} = t\vec{PQ}, t \in \mathbb{R},</math> انځور شي. پارامتر ارزښت <math>t \in [0, 1]</math> توپه کرښه <math>\overline{PQ}</math> راکوي.</p>	
--	--

په ورته توگه

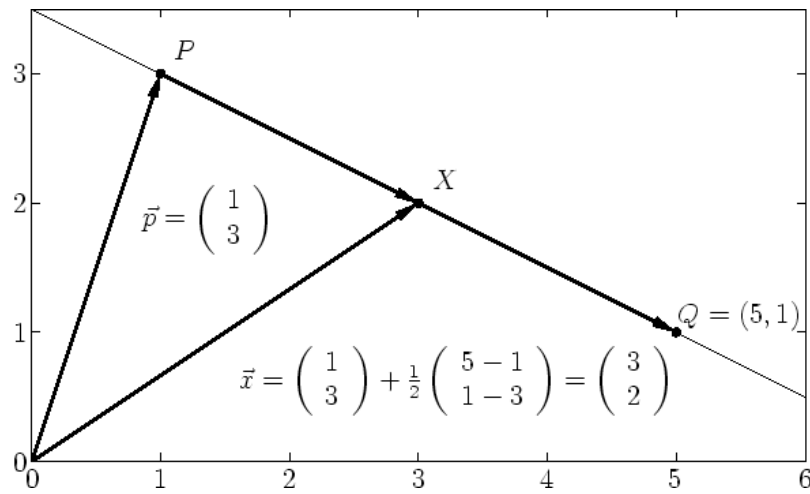
د ځای-وکتور  $\vec{x}$  د کواورډینات لپاره باور لري

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

(لیکونکي، هولیک، هیورنر)

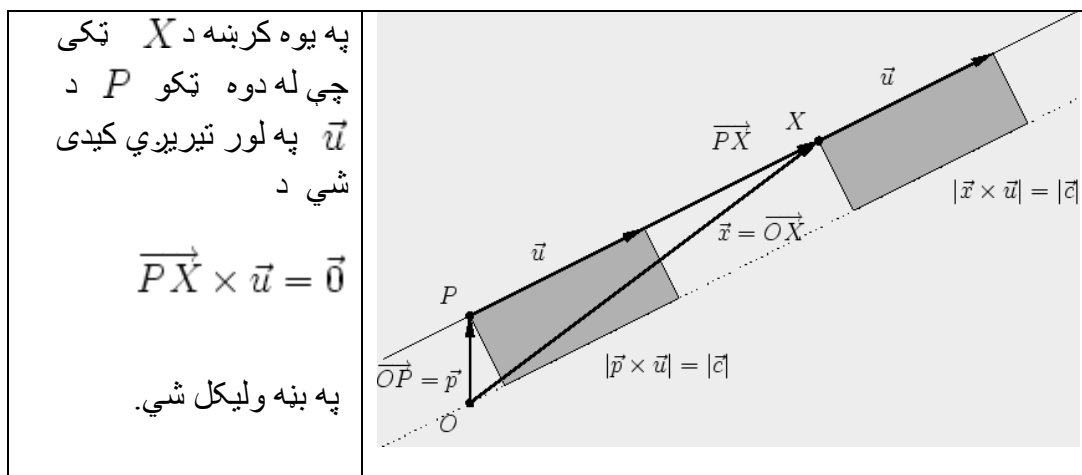
د  $t \in [0, 1]$  لپاره د دوه-ټکو-بڼې سره ټکی  $X$  ټوټه کرښه  $\overline{PQ}$  په  $(1-t)$  نسبت ویشي.

په ځانګړې توګه د  $P$  او  $Q$  ټکو ترمنځ منځ ټکو پارامتر  $t = 1/2$  په ګوته کوي.



(لیکونکي، هولیک، هیورنر)

لحزوي – یا سترګورپ بڼه Momentenform



په ورته توګه د ځایوکتور لپاره باور لري.

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p} \times \vec{u}.$$

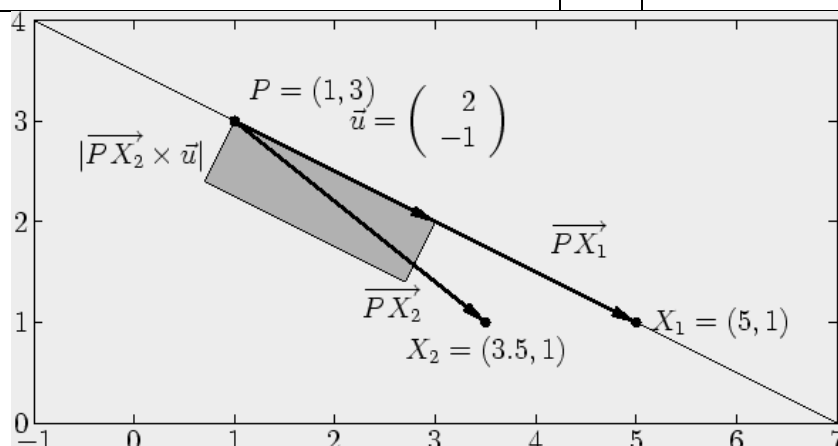
(لیکونکي، هولیک، هیورنر)

د یوې کرښې لحظوی بڼه کېدی شي استعمال شي، چې ایا یو ورکړشوی ټکی  $X$  په یوه کرښه پروت دی. د دې څیره شوی بیلګی لپاره د  $X_1$  ټکی لپاره ورکوي:

$$\begin{aligned} \vec{PX}_1 \times \vec{u} &= \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \vec{0}. \end{aligned}$$

د دې برعکس د  $X_2$  ټکی لپاره لاس ته راځي:

$\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	=	$\overrightarrow{PX_2} \times \vec{u}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$	=	



د ټکي کرښې واټن:

په یوه کرښه د یوه ټکي  $Q$  پروجکشن (پربوستون)  $X$  چې له  $P$  تیریري د لور سره لاندې پوره کوي

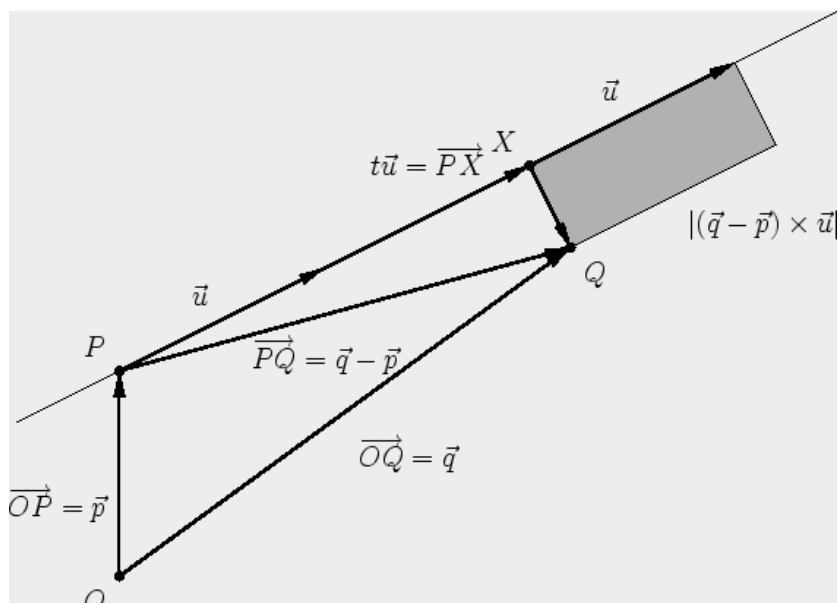
$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}.$$

له دې څخه د په حیث

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

واټن لاس ته راځي .





(لیکونکي، هولیک، هیورنر)

په کرښه د ټکي  $Q$  پرېستون  $X$  لپاره وکتور  $\overrightarrow{XQ}$  په  $\bar{u}$  عمود- یا نیغ ولاړ دی.

دا د سکالا ضرب له لارې ازمایل کېدی شي:

$$\overrightarrow{XQ} \cdot \bar{u} =$$

$$\left( \bar{q} - \left( \bar{p} + \frac{(\bar{q} - \bar{p}) \cdot \bar{u}}{|\bar{u}|^2} \bar{u} \right) \right) \cdot \bar{u} = (\bar{q} - \bar{p}) \cdot \bar{u} - \frac{(\bar{q} - \bar{p}) \cdot \bar{u}}{|\bar{u}|^2} |\bar{u}|^2 = 0.$$

د چلییا یا وکتوري ضرب تعریف له مخې باور لري

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \left( \angle (\bar{a}, \bar{b}) \right)$$

او له دې سره د واټن  $d$  لپاره:

$$\begin{aligned}
 d &= \left| \overrightarrow{XQ} \right| = \left| \overrightarrow{PQ} \right| \sin \left( \angle \left( \overrightarrow{PQ}, \vec{u} \right) \right) = \\
 &= \frac{\left| \overrightarrow{PQ} \right| |\vec{u}| \sin \left( \angle \left( \overrightarrow{PQ}, \vec{u} \right) \right)}{|\vec{u}|} \\
 &= \frac{\left| (\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u} \right|}{|\vec{u}|}.
 \end{aligned}$$

(لیکونکی، هولیک، هیورنر)

که تکی  $Q = (3, 3, 3)$  په کرنه پر بیستل شي

$$g : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د پروجکشن په حیث د خای وکتور سره تکی لاس ته راوړي

$$\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left( \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

واتمن

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2}{3}} = \sqrt{2},$$

د

$$|\overrightarrow{XQ}| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}.$$

سره يو غريز دی.

(ليکونکي: هولیگ، هیورنر)

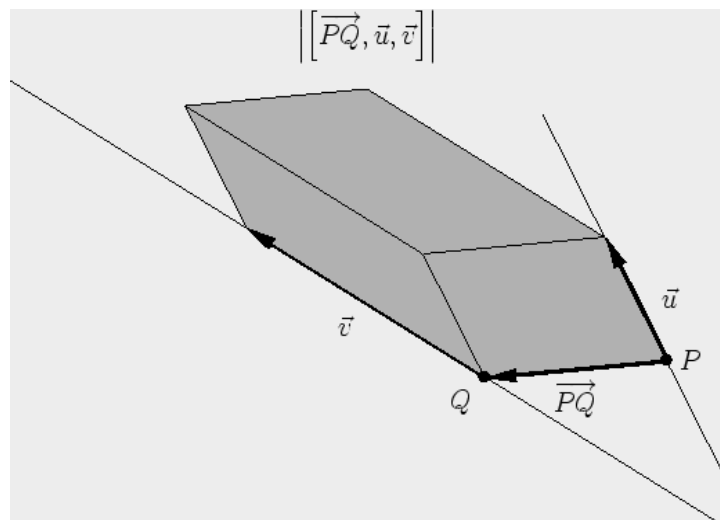
د دوه کرښو واتن :

د دوه کرښو ، چې له ټکو  $P$  ،  $Q$  او د لورو  $\vec{u}$  ،  $\vec{v}$  سره ورکړ شوي دي واتن دی

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

که  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  وي. د غبرگو کرښو پاره باور لري

$$d = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$



دوه کرښې بادمايلې windschief بلل کيږي، که غبرگې نه وي او مثبت (زياتيز) واټن ولري..

(ليکونکي: هولیگ، هیورنر)

که

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

د ټکو ځای وکتورونه وي د خورا لنډ واټن سره، نو

$$\vec{XY} = \vec{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}$$

دواړو لور وکتورونو سره عمود يا ولاړ دی، يعن غبرگ وه

$$\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}.$$

ته.

دا چي د يوه وكتور اوږدوالي د هغه مطلق ارزښت ضرب يوون (واحد) وكتور سره برابر دی لاس ته راځي:

$$d = |\overrightarrow{XY}| = \left| (\overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}) \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \right| = \left| \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \right|,$$

او له دې سره غوښتونکی فرمول.

د غبرگو کرښو لپاره هغه د يوه ټکي واټن له کرښې سره فرمول و کاروي.  
(ليکونکي: هولېگ، هيورنر)

کرښې

$$g : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h : \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دا لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left| \left[ \overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v} \right] \right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\left| \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(1 - (-2))^2 + (1 - 1)^2 + ((-2) - 1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(ليكونكي: هوليك، هيورنر)

### د الوتني لاري Flugkorridore

په ساده توگه نيسو، چي الوتکه په سيده لار له الوتنخاي څخه و موخي ته الوزي او د التتار له سيده کربنيتوتو څخه جوړه ده، نو د يوي الوتني لپاره له شتوتگارت ( $S$ ) Stuttgart څخه و کوينهاگن ته د جگيدني لار

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 8]$$

او د يوي الوتني لپاره له فرانکفورت ( $F$ ) څخه قاهري ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3].$$

که د ساده وينا څخه مخ ته لاړشو، چي الوتکه په سيده لار د د الوتنخاي څخه و موخه خاي ته الوزي او د الوتني لار له سيده کربنيتوتو څخه جوړه ده، نو د شتوتگارت  $S$  څخه د کوينهاگن ته د يوي الوتني د جگيدني الوتنلار ده

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 8]$$

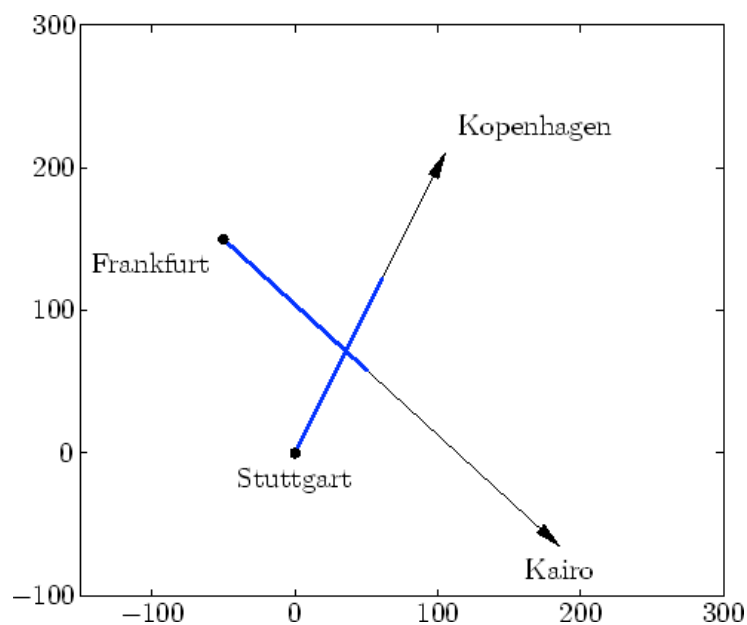
او د يوې الوتنې لپاره له فرنكفورت  $F$  څخه و قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3].$$

که د کواورديناټ پيل شتوتگارت و ټاکل شي، نو کواورديناټونه  $F = (-50, 150, -1/4)$  لرو، په کيلو متر کچ شوي.

دواړه د الوتنلارې لاندې واټن لري:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left| \left( \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left( \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33. \end{aligned}$$



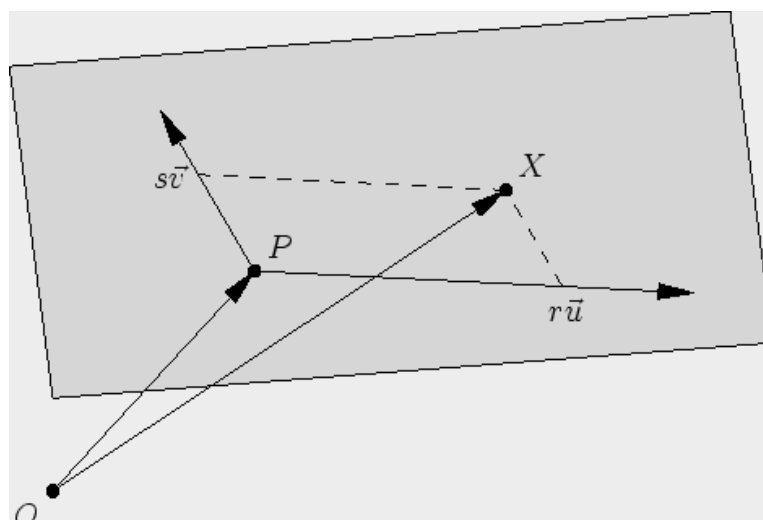
(ليکونکي: هولیگ، هیورنر)

د یوې سطحې پارامتریکې انځورونه Parameterdarstellung einer Ebene

له ټکي  $P$  تېره، چې له دوه نه غبرگو لورو  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  غزېدلي سطحه باندې ټکی  $X$  پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$





په ورته توگه د خای وکتور  $\vec{x}$  د کواوډیناتو لپاره باور لري

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

(لیکونکي: هولیگ، وایس)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

یوه سطحه دې د ټکي  $P = (1, 2, 3)$  او وکتورونو

سره روکړ شوي وي. نو  $X = (1, 1, 2)$  په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

له بلې خوا  $X = (0, 0, 0)$  په سطحه پروت نه دی، ځکه چې

دی او د مساوات سیستم

$$s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

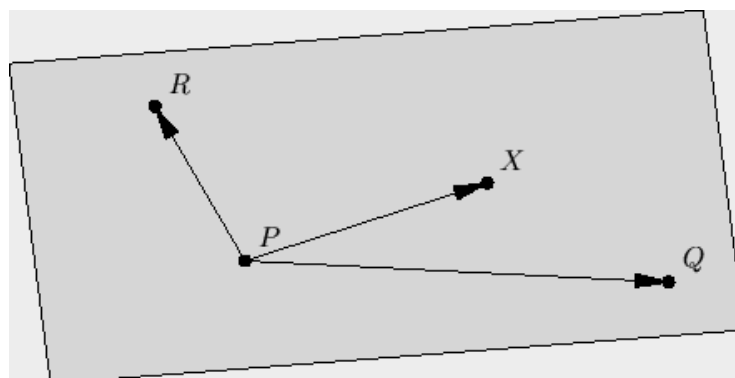
حل نه لري، که لومړی او دویمي لیکي ته وگورو .

### Drei-Punkte-Form einer Ebene د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه

د ټکي  $X$  لپاره چې په یوه سطحه پروت دی، کومه چې له ټکو  $P, Q, R$  تېرېږي او یو اصلي درې‌گونی جوړوي د غبرگخوایزو ضرب ورکیري .

$$[\vec{PX}, \vec{PQ}, \vec{PR}] = 0.$$

$$[\vec{PX}, \vec{PQ}, \vec{PR}] = 0.$$



(لیکونکي: هولیک، وایس)

یوه سطحه دې د ټکو  $P = (1, 2, 3)$ ,  $Q = (3, 2, 3)$  او  $R = (2, 3, 4)$  له لارې ورکړ شوې وي.

نو  $X = (1, 1, 2)$  په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

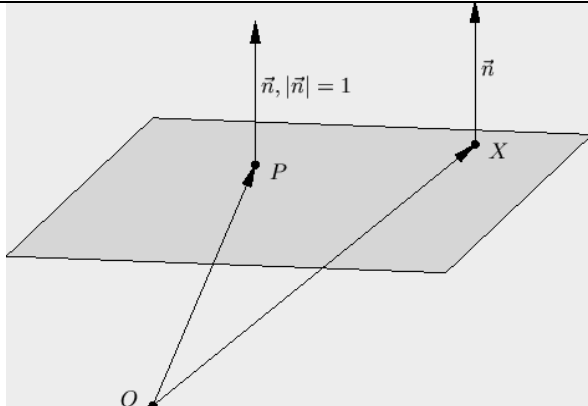
$$[\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}] = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

له بلي خوا  $X = (0, 0, 0)$  په سطحه نه دی پروت، ځکه چې باور لري

$$[\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}] = \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

(ليکونکي: هولیگ، وایس)

د یوې سطحې د هیسی - نورمال بڼه Hesse-Normalform einer Ebene

<p>په یوه سطحه د یوه ټکي <math>X</math> ځایوکتور <math>\vec{x}</math> په یوه سیخه په <math>P</math> کې اورتوگونال و یوه نورمالوکتور ته پوره کوي</p> $\vec{x} \cdot \vec{n} = d, \quad d = \vec{p} \cdot \vec{n}.$ <p>په نورمال بڼه نیول کېږي چې <math> \vec{n}  = 1</math> او <math>d \geq 0</math>. په دې حالت کې <math>d</math> د سطحې واټن دی و سرچینې ته</p>	
--	---

(ليکونکي: هولیگ، وایس)

یوه سطحه  $E$  دې ټکي  $P = (1, 2, 3)$  نه لاري ورکړشوي وي او نورمي نورمال وکتور

$$\vec{n} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دی

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3,$$

دا په دی معناچي سطحه لاندې نورمال بڼه لري

$$E : \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3.$$

نو  $X = (4, 0, 1)$  په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8 + 0 + 1) = d.$$

له بلې خوا  $X = (0, 0, 0)$  په سطحه نه دی پروت، ځکه چې پاور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d.$$

(لیکونکي: هولیگ، وایس)

د سطحو انځورونو ترمنځ د شمیرني بدلون یا اړول

لومړی: یوه سطحه دې د ټکي  $P$  له لارې ورکړ شوې وي همداسې دوه نه غبرگ وکتورونه  $\vec{u}, \vec{v}$ .

سړی نور دوه ټکي  $Q$  او  $R$  لاس ته راوړي، چې دا هم په سطحه پراته دي او له  $P$  سره، د  $\vec{q} = \vec{p} + \vec{u}$ ,  $\vec{r} = \vec{p} + \vec{v}$ .

له لارې کرښه نه جوړوي

د نورمالو وکتور  $\vec{n}$  په  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  نیغ ولاړ دی یا نیغ عموددی، یعنی  $\vec{u} \times \vec{v}$  ته غبرگ دی.

له دې دا نورمي نورمالو وکتور د هېسې-نورمال بني لپاره دی

$$\vec{n} = \sigma \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

د له کوم سره چې مخخښه  $\sigma \in \{-1, 1\}$  داسې باید وټاکل شي، چې  $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$  مثبت (زاتيز) وي.

دویم: یوه سطحه دې د درې ټکو  $Q, P, R$  او لارې ورکړ شوې وي، چې یو اصلي درېګودی (مثلث) جوړوي.

دوه وکتورونه لاس ته راځي، چې سطحه غزوي یا جوړوي د لاندې وکتورونو له لارې

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR}.$$

له دې وکتورو څخه لکه په لومړي کې کېدی شي د هېسې-نومالبنه لاس ته راوړل شي.

دریم: یوه سطحه دې د یوه ټکي او یوه نورمالو وکتور  $\vec{n}$  له لارې ورکړ شوې وي.

دوه وکتورونه لاس ته راځي. چې يوه سطحه داسې و غزول شي پخ کږمه کې چې دوه کرښيز خپلواک وکتورونه چې  $\vec{n}$  باندې عمود يا ولاړ وي، و پلټل شي.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u},$$

چېرته چې  $\vec{x}$  يو په خوښه وکتور  $\vec{n} \neq \lambda \vec{n}$  دی.

له دې وکتورونو څخه کېدی شي، لکه په لومړي کې دې-ټکي-بڼه لاس ته راوړای شي.

(ليکونکي: هولیک، وایس)

لاندې ټکي دې ورکړ شوي وي

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

له دې څخه شمېرو

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د هېسي-نورمال بڼې لپاره د نورمال وکتور لپاره اوس دالاندې شمېرو

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24 + 20 \\ -16 + 18 \\ 60 - 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

او له دې سره

$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{6}.$$

خُڪه چي  $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$  بايد مثبت (زياتيز) وي، له لاندې لاس ته راځي

$$d = \vec{p} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -4$$

$\sigma = -1$   
او له دې سره

$$\vec{n} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

نو سطحه نورمال بڼه لري

$$E : \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 4.$$

(ليکونکي: هولیک، کرايخ)

د ټکي - سطحې واټن :

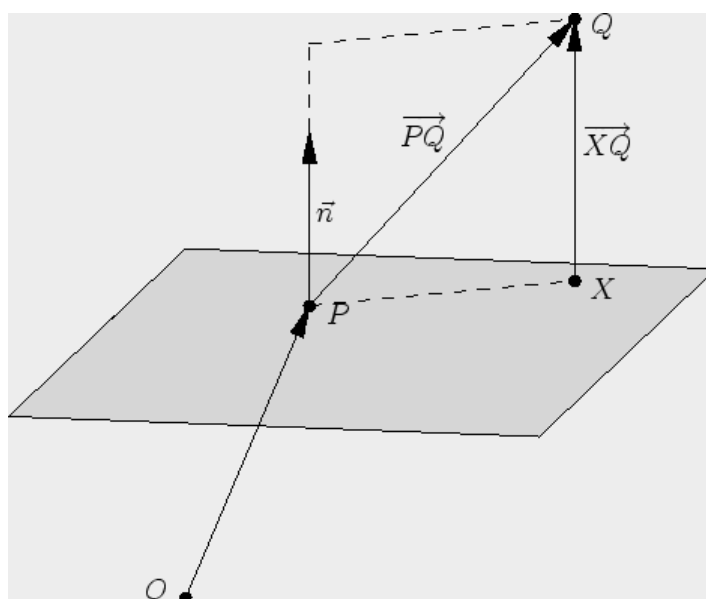
د يوه ټکي  $Q$  ولاړ برېوتلی وکتور په يوه سطحه په ټکي  $P$  د نورمالوکتور  $\vec{n}$  سره دی

$$\vec{XQ} = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}.$$

د دي اوږدوالی

$$d = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

د سطحی واټندی و ټکي  $Q$  ته.



(لیکونکی: هولیک، وایس)

سکالار ضرب

$$\vec{PQ} \cdot \vec{n} = \cos \alpha |\vec{PQ}| |\vec{n}| = \pm d |\vec{n}|$$



څخه دا  $|\vec{n}|$  - واره د ټکي  $Q$  او سطحې ترمنځ واټن لاس ته راځي، د کوم سره چې

مخنځبنه دا راپه گوته کوي، چې ايا په همغه خوا بڼايي، لکه يې چې  $\vec{n}$  بڼايي. له دې سره دی

$$d = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

او

$$\vec{XQ} = \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}.$$

ليکونکي: هيوليگ، وایس

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

له ټکي  $P = (1, 2, 3)$  تېره سطحه د نورمالوکتور سره دې د  $Q = (3, 2, 3)$  ټکي واټن  $d$  همداسې په سطحه پرې ولارټکی  $X$  وټاکل شي.

لومړی دی

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{PQ} \cdot \vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3.$$

له دې سره لاس ته راځي

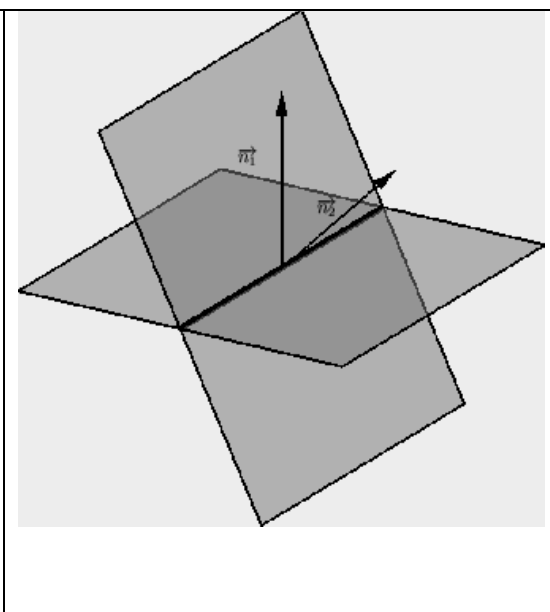
$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

او بالاخره شميرل کيري

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 19 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

(ليکونکي: هولیگ، وایس)

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع:

<p>د دوه سطحو د نورمال وکتور <math>\vec{n}_i</math> سره د دواړو کونجونو (زاویو) <math>\varphi \in [0, \pi/2]</math> هغه کوچني کونج يې د</p> $\cos \varphi = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1   \vec{n}_2 }$ <p>له لارې يواځنی ټاکلي او</p> $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ <p>د غوڅکړنې لور ده.</p>	
---	---

(ليکونکي: هولیگ، وایس)

د دوه هوارو لپاره، چې هره یوه یې له ټکو  $P_2 = (0, 1, 3)$ ,  $P_1 = (1, 2, 0)$  او نورمالوکتورونو

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سره تعریف دي، د کونج او د دواړو سطحو د غوڅکړنې سره جوړ کونج (زاویه)  $\varphi$  دې وټاکل شي.

دی

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

او له دې سره

$$\varphi = \pi/3.$$

پسې هم

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

د غوڅکړنې لور ده.

د دې لپاره چې یو غوڅکی (نقطه تقاطع) وشمیرو، و

$$d_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = -1, \quad d_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_2 = 2$$

ته اړتيا شته او يو ټکی  $S$  ته، چې مساوات

$$\vec{s} \cdot \vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{s} \cdot \vec{n}_2 = d_2$$

پوره کوي. د بېلگې په توگه  $S = (2, 3, 5)$  پيدا کيږي او له دې سره غوڅکړبڼه لاس ته راوړو:

$$g : \vec{x} = \vec{s} + t\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ليکونکي: هولېگ، وایس)

د منظم تترايد(څلور سطحيز) د کونج ټکو

$$P_1 = (1, 0, 0), \quad P_2 = (-1, 0, 0),$$

$$P_3 = (0, 1, \sqrt{2}), \quad P_4 = (0, -1, \sqrt{2})$$

د دوه سطحو ترمنځ کونج يا زاويه دې پيدا شي.

مور د بېلگې په توگه د سطحو څخه چه له  $P_1, P_2, P_3$  همداسې له  $P_1, P_2, P_4$  جوړې وي يا تېرېږي کار اخلو.

د نورمال وکتورونو لپاره باور لري

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

همداسی

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} .$$

له دي سره دی:

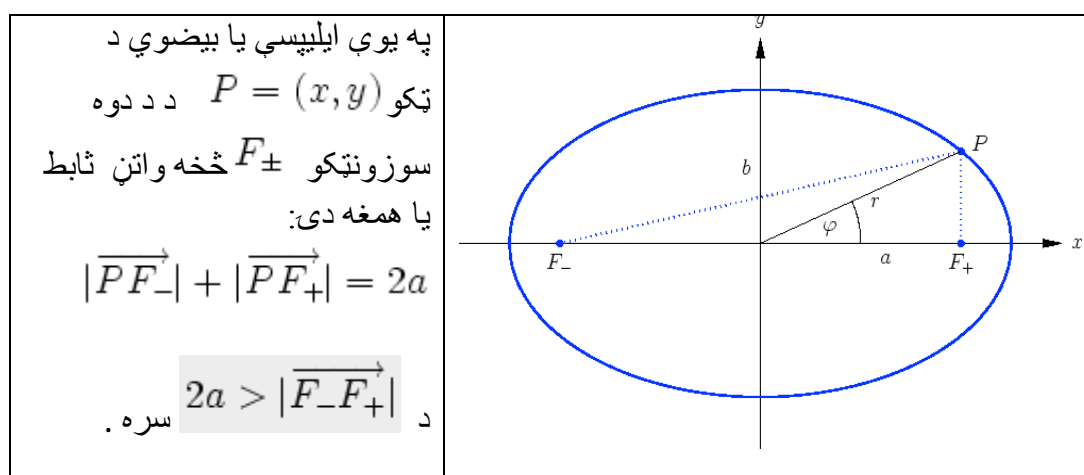
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

او لاس ته راوړو

$$\varphi \approx 70,59^\circ .$$

(لیکونکي: هولیک، وایس)

## هگی (بیضوي) Ellipse



که وي  $F_{\pm} = (\pm f, 0)$ ، نو د کواورديناټونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2,$$

او

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو  $P$  د قطبي کواورديناټونو لپاره.

د هگي پارامټري کونه ده

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

د  $t \in [0, 2\pi)$  سره.

(ليکونکي: اېپ، هولیک)

د انځوره ونو ورته والی کیدی شي د سیده پسي شمیرني له لاري و ازمایل شي.

د دي لپاره چي وښايو، چي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

مربع (څلوری) کوو

$$\underbrace{2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2}}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

او دي کين مساوات ته ورته مساوات لاس ته راوړو

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}.$$

د  $4a$  سره وېشني وروسته نوې مربع کول يا بيا مربع کول راکوي

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2.$$

د بدلون  $f^2 = a^2 - b^2$  له لارې د بڼې بدلون وروسته د کواورديناټ بڼه راکوي.

د قطبي بڼې پيدا کوني

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

لپاره د مخرج (ماتلاندي) سره ضربولو سره او په پام کې نيسو

$$x^2 = (x^2 + y^2) \cos^2(\varphi).$$

له دې سره لاس ته راځي

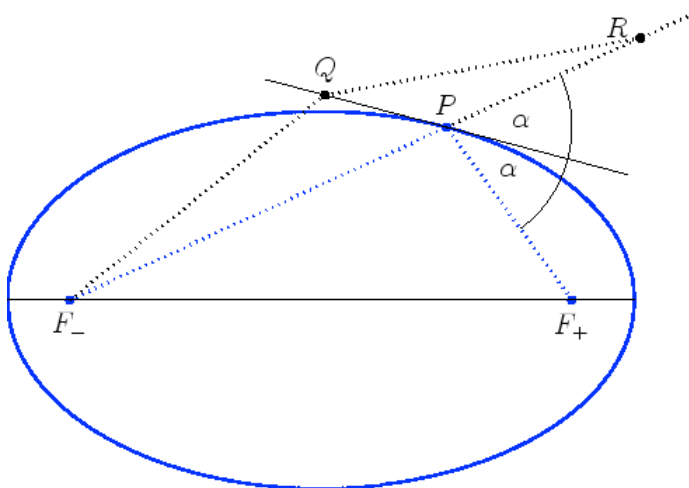
$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 = b^2$$

او د  $b^2$  سره وېش له لارې د کواورديناټ بڼه.

(ليکونکي: اپې، هولیک)

د سوزونتيكي وړانگه (شعاع نقطه محراق):

د سوزونتيكو وړانگي (په سوزونتيكو كي راگرځي (رفلكت كونه يا بيرته راگرځيدنه)



د بنووني لپاره د مرستندوی ټکي په حيث په تانجنټ  $g$  د سوزونتيكي  $F_+$  هنداره شوي څيره  $R$  ټاکو او په  $g$  یو په خوښه ټکي  $Q \neq P$  ټاکو. دا چې  $Q$  دهگي يا بيضوي دباندې پروت دی، نو دی

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}|.$$

که د ټوټه کرښو  $\overrightarrow{PF_+}$  او  $\overrightarrow{QF_+}$  په ځای يي هنداره شوي څيري کيږدو، نو لاس ته راځي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}|,$$

او پسي يا تعقيب بايد  $F_-, P, R$  په يوه کرښه پراته وي. له دې سره  $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$  دی.

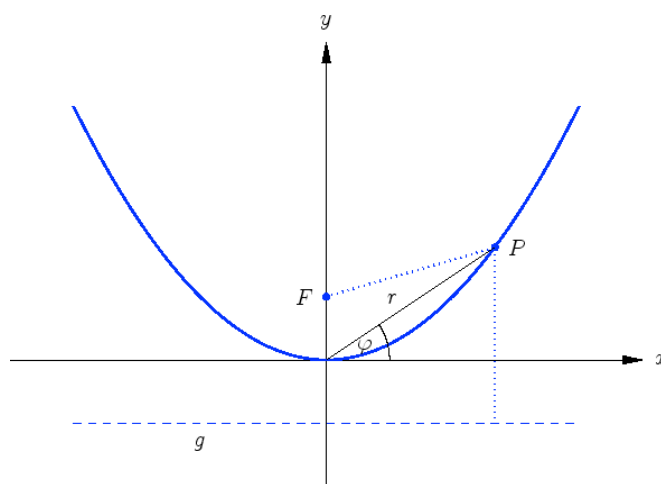


دا هندارون خوبونه د پختورگو تیگو توتنه کونې لپاره په کار راځي. په سوزونټکي  $F^-$  کې د یوې رادیال (د وړانګې په لور) سرچینې څخه وړانګې کېدې شي د یوه هګۍ ډوله یا بیضوي ډوله رفلکتور له لارې په سوزونټکي  $F^+$  کې کوده شي یعنې سره غوڅ کړي..

(لیکونکي: ایپ، هولیک)

## پارابول Parabel

په یوه پارابول د ټکي  $P = (x, y)$  د سوزونټکي  $F$  او یوې وړونکې کرښې  $g$  څخه برابر واټن لري.



که  $F = (0, f)$  او  $g : y = -f$  وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$4fy = x^2$$

او

$$r = \frac{4f \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

د ټکي  $P$  قطبي کواوردیناتونو لپاره

(لیکونکي: اپپ، هولیک)

د انځورونې ورته والی یې ترلی څرگند دی. د مربع شوي واټن د برابر ایښوونې له لارې

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y - f)^2 = (y + f)^2 = (\text{dist}(P, g))^2$$

د کواوردینات بڼه لاس ته راځي. د

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

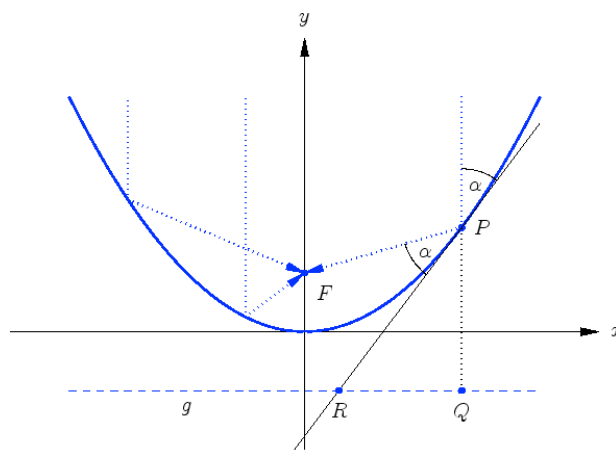
بدلون مو قطبي بڼې ته بیایي.

(لیکونکي: اپپ، هولیک)

## د ساتلايت تلوېزيون Satelliten-TV

غبرگې کرښې، وړونکریښو سره ولاړې یا عمود غورځېدونکې وړانگې په سوزونټکي کې سره کوده کيږي.

داد د ساتلايت په کاسه او تېلېسکوپ کې کارول کيږي، چې پریوتي سیگنالونه قوي کړي.



د بنووني لپاره په بام کې نيسو، چې

$$\vec{FP} + \vec{QP} = \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \right) + \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -f \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$$

په ټکي  $P_t$  ،  $\begin{pmatrix} 1 \\ x/(2f) \end{pmatrix}$  کې د تانجنت د لور سره غبگ دی. دا چې

$$|\vec{FP}| = |\vec{QP}|,$$

له دې څخه د کونج  $\sphericalangle(F, P, R)$  او  $\sphericalangle(R, P, Q)$  مساوات لاس ته راځي، د کوم

سره چې  $R$  د تانجنت غوڅټکی دی د  $g$  سره.

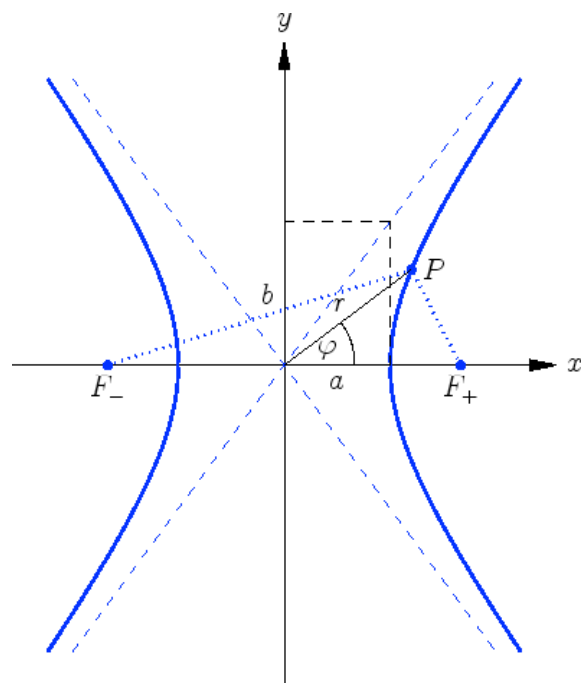
(لیکونکي: اېپ، هولیک)

## های پاربول Hyperbel

په یوه های پاربول د یوه ټکي  $P = (x, y)$  د سوزون ټکو  $F_{\pm}$  سره د واټونو کمښت ثابت دی:

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

د  $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$  سره .



که  $F_{\pm} = (\pm f, 0)$  وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2,$$

او

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د  $P$  د قطبي کواوردیناتونو لپاره . اسپیتوتي  $\pm b/a$  جگوالی لري.

د هایپرابول د بناخونو پارامترې کونه

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t$$

ده د  $t \in \mathbb{R}$  سره.

(لیکونکي: اپپ، هولیک)

د انځوره ونو ورته کېدی شي سیده یو په بل پسې وازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو ، چې لرو

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2,$$

نو

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \pm 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

مربع کوو او دې و کین مساوات ته ورته اړیکې لاس ته راځي

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = \pm 4a \sqrt{(x+f)^2 + y^2}.$$

د  $4a$  سره وېشنې وروسته له نوې مربع کونې څخه لرو

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2.$$

د  $f^2 = a^2 + b^2$  بدلون سره د بڼې بدلون وروسته د کواوډیناتونو بڼه لاس ته راځي.

د قطبي بڼ لاس ته راوړلو ته

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د مخرج سره ضربوو او په بام کې نیسو

$$x^2 = (x^2 + y^2) \cos^2 \varphi.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 = -b^2$$

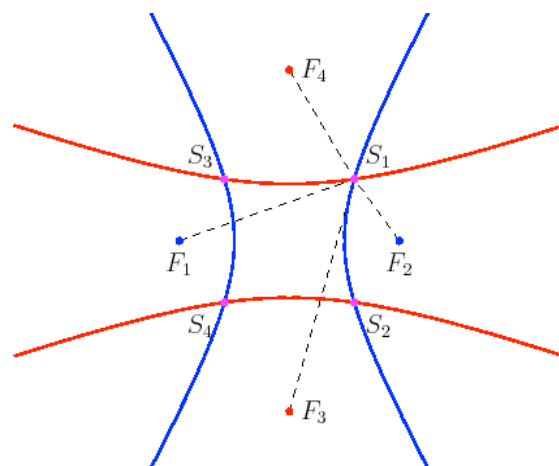
او د  $-b^2$  سره ضربولو له لارې د کواوډیناتونو بڼې راکوي

(لیکونکي: اپ، هولیک)

## ناویگیشن Navigation

د یوې کیشټې ځای Position معلومولو  $P$  لپاره د وخت کمښتونه  $2a_{j,k}$  د

سینکرون رادیو سیگنالونو د مختلفو خورونکو سټیشنونو  $F_i$  څخه سره پرتله کېږي. نو په دې توګه کیدی شي  $P$  د هایپرابول د سوزونټکو  $F_k, F_j$  سره د غوڅتکي په څیر لاس ته راوړل شي.



يوه څرگنده بيلگه کيدی شي

$$F_1 = (-2, 0), F_2 = (2, 0), F_3 = (0, -3), F_4 = (0, 3)$$

او  $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$  و ټاکل شي. اړونده هاپرابول مساوات دي

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \quad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1,$$

او د څلر غوڅټکو  $S_i$  د کواوډيناتو لپاره لاس ته راځي

$$x^2 = \frac{32}{23}, \quad y^2 = \frac{27}{23}$$

لکه د څيرې څخه چې ه م ليدل کيږی، څلور اوبيوني (حلونه) لاس ته راځي. د ناوېگيشن لپاره دا بي پرابلمونو دی، ځکه چې يو کفتان بايد وپوهيږي، چې کيښتی نږدې يات قريبا چيرته پرځای ده، دا په دې معنا چې کوم د منلو اوبی يا حل دی.

(ليکونکي: اپپ، هولیک)

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد  
لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ  
او دا نوي لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځني ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه ( هندسه ) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې  
شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي



2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي )

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرېون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی )

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

، د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شینواري د ،، د افغانستان روغي او بیا  
ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکټر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیري

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینکمن لیکنې چې له برینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک

۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصایه یا ستاتیستیک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت  
پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - انالیزی ۱

۷ - انالیزی ۲

۸ - کرینیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نوري ژباري

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرښيز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکني

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهني ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهني برخي برسیره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسي د بنوونکو او زدهکونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کي د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډبري پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ - د شميرپوهني سم اند ( منطق رياضي )

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ - د شمير پوهني گډي وډي ليکني

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳- د شمیرپوهنې انگریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴- د شمیرپوهنې پښتو انگریزي ډکشنري

۲۵- د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶- د زره له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي).

۲۷- د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د گروپونو تیوري

- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره بڼه لیکنه ده، چې د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېښي)

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**