شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

لومړی برخه

دویم غځېدلی چاپ

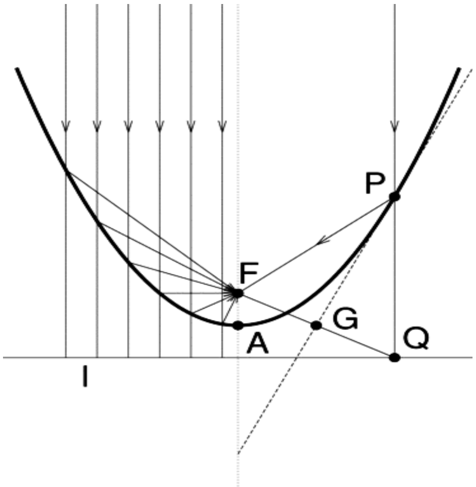
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میږی) شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(رياضي)

ستركتاب



دويم غزېدلی چاپ

ليکونکی: ډاکتر ماخان ميرزي شينواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښبتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب(لومړی برخ)

ليکونکی: ډاکتر ماخان،، ميری،، شينواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولته

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويې ټولنې تخنيکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیوادوالو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګڼانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودریږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وپښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي ډپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي ډپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي ډپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنير او ډپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپيری څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

۱ . ۰	د شمیرپوهنې سم اند یا منطق	۱
۱ . ۰ ۱	پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه	۱
۱ . ۰ ۲	د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې	۳
۱ . ۰ ۳ . ۰ ۱	ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه	۳
۱ . ۰ ۲ . ۰ ۲	وینا	۵
۱ . ۰ ۲ . ۰ ۳	د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینڅیپ	۷
۱ . ۰ ٤	وینا فورم یا ۰بڼه او کوانتورونه	۱۳
۱ . ۰ ۵	اړیین او پوره کیدونکي شرطونه	۲۸
۱ . ۰ ٦	د شمیرکلیمه یا د لغاتو	۳۱
۱ . ۰ ۷	برابرون او نابرابرون	۳۳
۱ . ۸	تمرینونه	۳۸
۲ . ۰	ډیر ی پوهنه	۳۹
۲ . ۰ ۱	د ډیرۍ پوهنې کلیمه	۴۰
۲ . ۲	د ډېریو ترمنځ اړیکې	۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

	برخدېرې	۴۶
	د یوې ډېرې توان یا تواندېرې (توانسټ)	۴۸
۲ ۰ ۳	په ډېرې کې کارونې یا عملیې(۱)	۵۰
	غوڅدېرې یا متقاطعدېرې	۵۲
	د یوې ډېرې یا سټ کمپلیمنت	۵۷
۲ ۰ ٤	څېرونه	۵۸
	تمرینونه	۶۷
۳ ۰	د رییل ګڼونو سره د شمیرلو بنسټیزې...	۷۰
۳ ۰ ۱	د ګڼونو- یا اعدادو سیستم جوړښت	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱	پیدایښتي یا طبیعي ګڼونه	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ الف	د پیدایښت یا طبیعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ب	د پیدایښت ګڼونو انځورونه او شمیرنه	۷۲
۳ ۰ ۱ ۰ پ	د شمیرنې بنسټیز قوان ین	۷۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	الف د ویش تیوري	۸۶
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب	غټ ګډ پرویشونی(بزګترین مقسوم علیه ...)	۸۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ ۰ ۱ ۰ ٤	رییلګڼونه	۱۰۸
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشمیرنه	۱۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳	تمرینونه	۱۳۰
۰ ٤	پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر	۱۴۱
۱ ۰ ٤	توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت	۱۴۱
۲ ۰ ٤	ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره	۱۴۴
۳ ۰ ٤	توان د ریيلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره	۱۵۱
٤ ۰ ٤	ټولګه	۱۵۲
۰ ۵	لوګاریتم	۱۵۸
۱ ۰ ۵	د لوګاریتم کلیمه	۱۵۸
۳ ۰ ۵	ټولګه	۱۶۶
۰ ٦	ګونومتري	۱۶۹
۱ ۰ ٦	بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۱	ټکی او کرښه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۲	کونج	۱۷۱
٦ ۰ ۱ ۰ ۳	درېګوډی	۱۷۴
٤ ۰ ۱ ۰ ٤	کونکروانیڅ او ورته والی	۱۷۸
٦۰ ۱ ۰ ۵	ولاړکونجیز دریګوډی	۱۸۴
۲ ۰ ٦	په ولاړکونجیز دریګوډی کې د ...	۱۸۸
۳ ۰ ٦	په یوونګردی کې د کونج بلواک ..	۱۹۰
٤ ۰ ٦	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ٥ تریګنومتریکي کتمتوالی ۲۰۵

۶ . ۵ تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه ۲۱۵

۷ ٠ کمپلکس ګڼونه ۲۲۲

۸ ٠ د ښووني یا ثبوت متودونه ۲۳۵

۸ ٠ ۱ سیده ښوونه ۲۳۵

۸ . ۲ ناسیده ښوونه ۲۳۷

۸ ٠ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه ۲۳۹

۹ لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ... ۲۴۳

۹ ٠ ۱ لاینیز برابرون ۲۴۴

۱۰ کومبیناترویک، د بینوم جمله ۲۶۶

۱۰ ٠ ۱ فاکولتیت یا فاکتوریل ۲۶۶

۱۰ ٠ ۲ د بینوم ځله ونه ۲۶۷

۱۰ ٠ ۳ د بینوم جمله ۲۷۰

۱۰ ٠ ٤ کومبیناتوریک ۲۷۴

۱۰ ٠ ٤ ٠ ۱ پرموتیشن ۲۷۵

۱۰ ٠ ٤ ٠ ۲ واریيشن ۲۸۰

۱۰ ٠ ٤ ٠ ۳ کمبینیشن ۲۸۶

۱۰ ٠ ٤ ٠ ٤ د پرموتیشن، واریيشن او ۲۹۱

۱۱ ٠ لانیز الجبري برابرونونه ۲۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲. ۴	د ګاوس لګوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلورئ ئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۲۰ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وییتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلورئ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱۲	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
٤ ۰ ۱۲	د ریښي برابرونونه	
۱۳	ترانسڅیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱ ۰ ۱۳	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۲ ۰ ۱۳	اکسپوننشل- یا په جګګڼ برابرونونه	۳۸۰
۳ ۰ ۱۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
١٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱ ۰ ١٤	نابرابرونونه	۳۹۶
۱ ۰ ۱ ۰ ١٤	بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین	
۱ ۰ ١٤ الف	اینتروال	۳۹۷
۲ ۰ ۱ ۰ ١٤	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
۳ ۰ ۱ ۰ ١٤	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
٤ ۰ ۱ ۰ ١٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
۲ ۰ ١٤	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱ ۰ ۲ ۰ ١٤	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
۲ ۰ ۲ ۰ ١٤	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۳ ۰ ۲ ۰ ١٤	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰
۱ ۰ ۱۵	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶

۱ ۰ ۱٦ کربنه ۴۶۶

۲ ۰ ۱٦ ګردۍ ۴۷۵

۳ ۰ ۱٦ ایلیپسې ۴۸۲

٤ ۰ ۱٦ هیوپربول ۴۸۷

۵ ۰ ۱٦ پارابول ۴۹۲

٦ ۰ ۱٦ ټولګه ۴۹۴

۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲

۱ ۰ ۱۷ د وکتور پېژند یا تعریف، ۵۰۲

په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲

۲ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹

۳ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲

٤ ۰ ۱۷ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷

۵ ۰ ۱۷ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....

۱ ۰ ۵ ۰ ۱۷ د یوې کربښې وکتوري انځورونه ۵۲۱

۲ ۰ ۵ ۰ ۱۷ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴

۵ ۰ ۱۷ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸	پرلپسې او پرلپسې لړۍ	۵۳۳
۱۸ ۰ ۱	پیل	۵۳۳
۱۸ ۰ ۲	د ګنون - عددونوپرلپسې کلیمه	۵۳۴
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱	مونوټوني پرلپسې	۵۴۲
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲	اریتمیتیکي پرلپسې	۵۴۵
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳	هندسي پرلپسې	۵۴۷
۱۸ ۰ ۲الف	لړۍ	۵۵۰
۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱	هندسي لړۍ	۵۵۵
۱۸ ۰ ۲ الف ۲	اریتمیتیکي لړۍ	۵۵۷
۱۸ ۰ ٤	د پرلپسې او لړیو د پولې ...	۵۵۸
۱۹	د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه	۵۷۸
۱۹ ۰ ۱	بنسټیزې کلیمې	
	د پولو یا حدونو خویونه	۵۸۶
	د راشنل، کسري یا نسبتي	۵۹۲
	د مثلثاتي یا درېکوډي کچ توابعو پولې	۵۹۶
	ناپرېکیدنې	۶۰۴
۱۹ ۰ ۲	په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې	
۱۹ ۰ ۳	د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه	۶۱۰
۱۹ ۰ ٤	د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي ټولګه ۶۱۶

۲۰ دفرنښیالشمیرنه ۶۲۶

د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت) ۶۲۶

په یوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸

د لحضوی(سترګورپ) تغیر... ۶۳۰

کمښتوېش (تقسیم تفاضل؟) ۶۳۱

دفرنشلوېش یا رابیلیدنه یا مشتق ۶۳۳

کمښتوېش او مشتق یا رابیلیدنه ۶۳۶

د x_o په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳

د تانجنت پیژند او خویونه ۶۴۷

د تانجنت او عمود یا ولاړ ټولیز مساوات ۶۵۰

په بیدیا کې جګوالی ۶۵۲

۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت یا جګیدنې غوره والی

۲۰ ۰ ۲ د فرنښیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې ۶۵۶

د درېګوډیزو یا مثلثاتي ۶۶۲

د اکسپوننشل یا په جګ توابعو.... ۶۷۰

د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې ۶۷۶

د ایمپلیښیت توابعو مشتف ۶۸۳

د بنسټیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه ۶۸۸
د یوې تابع د مشتق قابلیت ۶۹۱
د معکوس- - یا په څټ توابعو مشتق ۶۹۸
۲۰ .۳ د بنسټیزو بلواکو رابیلیدنه ۷۰۱
د رول قضیه ۷۱۰
د وایرشتراس قضیه ۷۱۱
۲۰ .٤۰ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی
د دفرنشل منځ ارزښت قضیه ۷۱۲
یوعبریزې توابع ۷۱۵
ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰
د انعطاف – یا اوړونټکی ۷۲۴
د کوږ یا منحني بحث یا خبرې ۷۳۳
ناټاکلي حدونه یا پولې ۷۴۶
د برنولي او د لو پیتال ۷۵۰
۲۰ ۰ ۵ د غټو ګټو پرابلم ۷۵۷
تمرینونه ۷۶۷
په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸
۲۱ انتیګرالشمیرنه ۷۸۷
پیلراوړنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنسټیزه یا لومړنی تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنی تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالوني قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالوني لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲
	د انتیګرالشمیرنې استعمال	۸۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړي یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مهربان او بخښونکي خدای(ج) په نامه

سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چې پیل لري نو پای هم باید ولري، د داسي یوه کار پیل او پای ته ځما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چې مېړښت یې زما لپاره هم ناشونې دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چې په یوه کار پیل وکړي، څکه چې سملاسي ورته څرګندیږي، چې په هیڅ شي کی څموږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوي په جوړښتیزه لور، په وراني کی مو د نړی سرکښي ځانته ګټلې.
موږ ګورو چې په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځې موجود دي، چې تراوسه حتی هغه بنسټیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبې نه دي را اخستلي، چې مسلك ته اسانتیاوې پیښبوي. له کومه ځای چې ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅې هم نه دي کړي او ستتونځې یې نه دي ګاللي، چې دلته طبعاً افراد ملامت نه دي، بلکه څموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنې او همدا ډول د کلتور او ژبې د ودې دنده د حکومتونو ده، چې څموږ په هیواد کی څموږ حکومتونو خپل ځانونه د دې کار جوګه نه دي ګڼلي، کیدی شي چی ووایو چې په ریښتینې یې ددې کار مخه هم نیولې ده، چې په افغاني ژزبه دې څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار څکه په افغاني او په ولسی افغاني لیکل شوی، چې زه په مسلکي اړخ کی یواځې، په علمي توګه په الماني ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

نومونه چې له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچې په ښوونځي کي څما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمي په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومی او یا کومي چې ماته معلومی دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکی ښکاریدلی .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتی څانګی لري. دا چې څما په فکر دا متآسفانه نه یواځي زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبی په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چې په دې بنستیزه توګه په درسي او تمریني ډول سرته رسیږي.

نن نړی او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چې پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنستیزو ستوځوبیو (د ستونځو حل باندې) پیل نه دی کړی ، که دا په هره څانګه کی هم وي. څموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چې په ټولو پوهنو کی نغښتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کی د پوهیدلو بنستیزه ربښه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعی (پیدایښتی) یعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك، بیله شمیر پوهنی یې وده او په پوهیدنه ناشونی ده. شمیرپوهنه له بلی خوا یواځنی خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کی ونیوه او لیکل یې د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متآسفانه چی مرسته هم نه شوه کولی.

د داسی یوه کتاب لیکنی مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسی لیکنی څخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چی څموږ د هیواد ستنځي نوږې هم گوته لك کړم.

زه غواړم چی خپلی د سر خبرې په لاندې توگه رالنډې کړم
- د لیکونکی راهڅونی دلیلونه یا د شوق رابیدارول
- دداسی کتاب لیکنه په هغه وخت کی شوني کیږي، چی د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یې هم نه لرم چی پیسی وگټم.

- وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چی له دې د مخه می په سیاسی هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس می خپل مسلك ته رامخه شوه.

- ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلی ټولنی او د خپلی ټولنی د خلکو سره مینه ولری او په همدې ډول، د خپلی ټولنی او د ټولنی د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چی یواځی د خوبونو ریښتیا کولو لپاره په داسی کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځی په پوره مینه په غاړ واخستلی او دا کار می په پوره مینه سر ته ورساوه.
- په دې برسیره لیکونکی دې وظیفی ته هم باید شعوري وي، چی دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسی لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غېروالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خو د داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیيو (ستونځو حل) په خاطر، چی موږ افغانان بی په ځانګړی توګه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځي د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یي ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځې:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

۱ – دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری څخه نیول شوې، زیندۍ شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندۍ پاتی شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چی دا کرښی دا مطلب نه لري، چی ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کړیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پرینښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپرینښوولو حق څوک نه لري، نه دولت او نه افراد . دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوک باید ګیله من نه وي.

افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشی یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژبه یواځې د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کې پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لارښودې او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهې د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبې پرمخوده یو بل باندې سیده او په ځټ اغیز من دي، چې ولس وروسته پاتې وي، ژبه یې وروسته پاتې ده او که یوه ژبه وروسته پاتې وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد ځان کې نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چې کم له کمه بنسټیزې کلیمې په افغاني واړوم، چې دا کار مې په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله مې زیات فکر هم په کار اچولی چې مسلکي بنسټیزې کلیمې په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چې ټاکل شوي، داسې نومونه دي، چې د هغه شي ماهیت په کې روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چې په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.
په پوهنه کې له بلې ژبې تیریدنه ناشونې ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چې افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځې هلته کیږي، چې یوه ژبه له پوهنې وروسته پاتې وي.
د پوهنیزې ودې سره ژبې ته د نورو ژبو لغات راننوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چې که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهاني مروجه لغاتو ولیکم.
دا چې افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم زیندی شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبې ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبې د زیندی څخه خلاسون یا د افغاني ژبې څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغې باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوك د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسي یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.
دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولی، چې هغه مي په ټول کتاب کي شاید اصلاح کړي نه وي، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځي نه پیښوي لکه د بیلګي په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلی وه، چې وروسته می شمیر پوهنې بانډې واړوله، شاید په ټولو ځایونو کي مي نه وي شمیرپوهنه کړي. درېګوډي ما لمړی دریکونجي لیکلی وو، چي دا هم شاید د کتاب په اوږدوکي نه وي اصلاح شوی، داسی نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چي د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځي ه پیښوي.

۲ – تخنیکي ستونځې:
د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځي، چې څمړ لپاره د داسي کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکې ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودي، نو له دې امله می د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته می سریښ کړې، چې کله کېږې هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چي دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکی او چاپوونکی به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښې څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطۍ به شوي وي،، خو په پوهیدلو کې به ستونځي پیښي نه کړي، د هغي بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.
ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

حرکت کی برکت اینبوولی دی.
لنډه دا، چی ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیځو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملګرو په فشار ما ، ځما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیدایښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
ځنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنستیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځاي کړم.
ما د بنستیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي څیړل شوی.
ځما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اومه اتمه او نهمه برخه څمور په هیواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیري پوهی سره اشناییته هم خورا ضرور ده

شپږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کي د « افغانستان کلتوري
ودې ټولنی »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.
ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراګټوره مشوره هم راکړي.
زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاتړ کاوه، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یی کله کله ویل، چی ګوندې پیسی می باید ګټلی وی ، خو په دې پوهیږي، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنګه شوه نو ویل به یي چی نور دا د چرګانو ټونګي باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن ښاپیری څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی ښه تکړه ورته د لوي خداي(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

المان د پنځم ټولګی ځخه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی ترلی چاپ ته ورکړي شي.
زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.
که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په ځانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. ځما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما ځخه لټ بل ځوک نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

(c) ketabton.com: The Digital Library

افغاني ، يوناني او الماني الف بی

ا	ب	پ	ت	ټ	ث	ج	چ
څ	ځ	ځ	ح	خ	د	ډ	ذ
ر	ړ	ز	ژ	ږ	ص	ض	ط
ظ	ع	غ	ف	ك	ګ	ق	ل
م	ن	و	ه	ي	ی	ې	ئ ۍ

یونانی الف بی

Α	α	*Α*	*α*	Alpha
Β	β	*Β*	*β*	Beta
Γ	γ	*Γ*	*γ*	Gamma
Δ	δ	*Δ*	*δ*	Delta
Ε	ε	*Ε*	*ε*	Epsilon
Ζ	ζ	*Ζ*	*ζ*	Zeta
Η	η	*Η*	*η*	Eta
Θ	ϑ	*Θ*	*ϑ*	Theta
Ι	ι	*Ι*	*ι*	Iota
Κ	κ	*Κ*	*ϰ*	Kappa
Λ	λ	*Λ*	*λ*	Lambda
Μ	μ	*Μ*	*μ*	My
Ν	ν	*Ν*	*ν*	Ny
Ξ	ξ	*Ξ*	*ξ*	Xi
Ο	ο	*Ο*	*ο*	Omikron
Π	π	*Π*	*π*	Pi
Ρ	ρ	*Ρ*	*ϱ*	Rho
Σ	σ	*Σ*	*σ*	Sigma
Τ	τ	*Τ*	*τ*	Tau
Υ	υ	*Υ*	*υ*	Ypsilon
Φ	φ	*Φ*	*φ*	Phi
Χ	χ	*Χ*	*χ*	Chi
Ψ	ψ	*Ψ*	*ψ*	Psi
Ω	ω	*Ω*	*ω*	Omega

اومیګا ← په پښتو دینه ← په الماني دینه

الماني الف بي

A	a	𝒜	𝒶	𝔄	𝔞
B	b	ℬ	𝒷	𝔅	𝔟
C	c	𝒞	𝒸	ℭ	𝔠
D	d	𝒟	𝒹	𝔇	𝔡
E	e	ℰ	ℯ	𝔈	𝔢
F	f	ℱ	𝒻	𝔉	𝔣
G	g	𝒢	ℊ	𝔊	𝔤
H	h	ℋ	𝒽	ℌ	𝔥
I	i	ℐ	𝒾	ℑ	𝔦
J	j	𝒥	𝒿	𝔍	𝔧
K	k	𝒦	𝓀	𝔎	𝔨
L	l	ℒ	𝓁	𝔏	𝔩
M	m	ℳ	𝓂	𝔐	𝔪
N	n	𝒩	𝓃	𝔑	𝔫
O	o	𝒪	ℴ	𝔒	𝔬
P	p	𝒫	𝓅	𝔓	𝔭
Q	q	𝒬	𝓆	𝔔	𝔮
R	r	ℛ	𝓇	ℜ	𝔯
S	s	𝒮	𝓈	𝔖	𝔰
T	t	𝒯	𝓉	𝔗	𝔱
U	u	𝒰	𝓊	𝔘	𝔲
V	v	𝒱	𝓋	𝔙	𝔳
W	w	𝒲	𝓌	𝔚	𝔴
X	x	𝒳	𝓍	𝔛	𝔵
Y	y	𝒴	𝓎	𝔜	𝔶
Z	z	𝒵	𝓏	ℨ	𝔷

شمیرپوهنیزې نخښې

مساوي .... =

نامساوي(نوروکتابونو کې) (=) |=

کوچنی له .... <

لوي له.................. >

کوچنی یا مساوي له .... ≤

لوي یا مساوي له .... ≥

ډیر کوچني .... ≪

ډیر لوي .... ≫

ورته یا متناسب........... ~

کونګروائنخ .... ≅

همداسې یا ښایي یا په ګوره کوي

کتیمټ................... ≡

غبرګ .... ||

ناغبرګ................. ||

ولاړ په .... ⊥

دریګوډی .... △

ګردی .... ○

نیمی یا قطر............. ⊘

کونج .... <

د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج < (g,h)

کرښه، له A و B ته .... $\overline{AB}$

له A و B ته لوریزه کرښه.... $\overrightarrow{AB}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیندہ.................... AB

مطلقه ارزښت د .... |a|

ایماجینار یوون (واحد)....... i

د اویلرګڼ = ...2,7182818 e

پي د لودولف ګڼ π= ...3, 14149

د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي ->

ناپای.................... ∞

د x فنکشن یا په واك چې بلواك مو بللی f(x)

(لوستل یې (f د x یا د f, x لنډ : fx)

د x څیرونه په f(x) : لیکو: f(x) ~~x~~ f: x →

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن h(x); g(x)

لیمس یا پوله.............. lim

	ساین	sin
تریګونومتریکي	کوساین	cos
بلواك	تانجنت	tan
	کوتنجنت...........	cot
	ارکوس ساین.........	arc sin
څیکلومتریکي	ارکوس کوساین	arc cos
بلواك	ارکوس تانجنت	arc tan
	ارکوس کوتانجنت.....	arc cot

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیدایښتي لوکاریتم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس ګڼونه........... $\mathbb{C}$

رییلګڼونه .... $\mathbb{R}$

ټولګڼونه .... $\mathbb{Z}$

نامنفي ټولګڼونه یا

طبعي ګڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي ګڼونه .... $\mathbb{N}$

تعریفډیری .... D

ارزښتډیری........... W

حلډیری L

د ډیري A پوتنځډیری P(A)

ډیري............. M,N,A,B

تشډیری .... ∅

برخه ډیری............

پورته یا لویډیری (چې بل ډیری خوندي لري)

ټولنډیری............ ∪

غوځډیری .... ∩

د A کومپلیمنت ..... CA , A'

د ډیریو ورته والی ...... A~B

د ډیریو ځل........... A × B

لوستل B اتیران A یا - ځل -

توپیرډیری : A بي له B ده A\B

دلته: a د b پروېشونی ده یا a b ویشي a | b

د a او b غتې ګډ په ویشونی(لنډ: غ ګ و) ggt(a,b)

د a او b کوچني ګډ زیاتځله(لنډ: ك ګ ځ) kgv(a,b)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته : a د M توکی دی .... $a \in M$

او a د M توکی نه دی .... $a \notin M$

ټولنخښه (د ټولو x لپاره باور لري) $\forall$

د موجودیت نخښه: یو x موجود دی $\exists$

کونیونکشن A او B لیکو $A \wedge B$

دیسینکشن A یا B لیکو $A \vee B$

(کله کله الترناتیو)

ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي $A \Rightarrow B$

نیګیشن یا نه والی $\neg$

د A او B ویناو ورته والی یا اکویوالنت $A \Leftrightarrow B$

له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.

ماتریکس......... A نورو کتابونو کې ||A||

دیترمینانت |A|

د a څخه n–امه ریښه $\sqrt[n]{a}$

د x اکسپوننشلبلواك

د n – فاکولتیت یعنی $n!=1.2.3....n$ $n!$

بینومخلووني $\binom{n}{p}$

لوستل: n په p باندې

له a تر b واز اینتروال $]a,b[$

$= \{ x \mid a < x < b \}$

له a تر b بند اینتروال $[a,b]$

$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

کینې واز اینتروال $]a,b]$

$= \{ x \mid a < x \leq b \}$

ښی واز اینتروال $[a,b[$

$= \{ x \mid a \leq x < b \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتون نخښه (سیګما) $\sum_{i=1}^{n}$

که د زیاتون‌نخښه داسی وي

لوستل: له $i = 1$ تر n پورې

څلنخښه (پي) $\prod_{i=1}^{n}$

که داسی لیکل شوي وي

لوستل: له $i = 1$ تر n پورې

پرموتیشن یا بدلون

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چي اند(فکر) یا وی(لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس(۳۸٤ تر ۳۲۲ ز۰ ک۰ ا)) له خوا کینبول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختک یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دئ او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله ختّه کې په فلسفه پورې ترلی مسلک دئ نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې(متن) لرودئ شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې ترلي، چې بیلیدنه یې ناشونی ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهنی(علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور(په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګریټې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.
په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک ایښوولو (ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنی ژبی ویناودو څخه ګټه اخلي٠

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده٠

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي٠

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ایښوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي٠

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره (متصور؟) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسي په نامه د عددنخښي (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغهٔ صفر دی, بلل کیږي. داسي نخښونې دبنسټیزو نخښۇ څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندی ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ .

۱ ۰ ۲ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمي

۱ ۰ ۲ ۰ ۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکي او د شیانو تړنې په نخښو(سومبولونو) انځوریږي.

۱ – شمیرپوهنیزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې (علامې): دا د یوه کره ټاکلي مانا لپاره نخښې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، π ، e, او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د یوې ورکړ شوې ډیرۍ یا سټ (په ډیرۍ پوهنه کی روښانه کیږي) داسې په زړه پورې توکی لپاره یوه نخښه ده، کومه چې د اووښتونویا متحولو بنسټسټ یا-ډیرۍ بلل کیږي، دا په لاتین تورو په نخښه کیږي او کله کله په اندکس(ز۰اېندکسونو) یا پیژندنخښه index (ز۰ پیژندنخښې Indices) چې ایندکس د تورو پښو ته راځي په نخښه کیږي۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \dots$

- اړیکنخښې : دا د شیانو اوګڼونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نخښې دي لکه $<$, $>$، $=$, $\leq$, $\geq$,

- د نښلونو،کارونو، تړنو یا عملیونخښې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-) ، ځل-(ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library

- تخنيکې نخښې : لکه سیمیکولوم („ „)، نوکان ( ) او نور ډولونه يې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واريابلی(اووښتونې), ثابتی او د هغوي يوځاي اېښودل د اړيکو- ، نښلونو- ، او تخنيکی نخښو يوځاي ايښوول موخه ور يا هدفمند يو په بل زيات شي، نو يوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځی٠

(۱) ثابتې((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتیزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړيدونی یا واريابلې او ترمونه

بېلګه :

الف : د $3.(1 + 2a) – a + 144$ يوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : $11x = 6 – 3a).(b – 12)$ ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په يوه لړۍ کې، يواځې ثابتې (همغه)، اووښتونې(متحولې، واريابلې) نښلونې او تخنيکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړيکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ويل کيږي. هر يو ترم پورې که واريابلی ولرې پیژندډيرۍ یا تعریفستڼ هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو يا متحولو اصلی بنسټسټ يوه برخډيرۍ او يا هغې سره برابر برخه سټ یا - ډېرۍ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنسټډېرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې ناروني یا عملیې اجرا شي، که چېرې اووښتونې یا واريابلې د پېژندډېرۍ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لويو لاتين تورو(اکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کيږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو يوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نيولکيږي، لکه :

$$T(x); T(x,y)$$

بېلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتونې يا متحولې نه لري په Tسره په نخښه کوو او ليکو: T=126 + 3/4 يا $T = 126 + \frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتونې يا متحولې x لري ياني T(x) = 10 + 2x ۰ د اووښتونو بنستېديرۍ يا –ډېرۍ دې يا د طبيعي اعدادو ډيرۍ N°وي

تعريفډيرۍ د بنستډيرۍ سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتونې يا واريابلی x پۀ ځاي

يو پيدايښتې ګڼ يا طبيعي عدد 2 کيږدو، نو د ترم ارزښت دۍ : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x يا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دۍ چې دوه متحولې لري او په T(x,y) سره يې په نخښه کوو۰ د اووښتونو يا متحولو بنستډيرۍ دې د پيدايښتې يا طبيعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعريفډيرۍ N° ده۰ د y لپاره N (پيدايښتی ګڼونډيرۍN° تعريفډيرۍ لپاره ترم نه دۍ تعريف ياپيژند نه لري)

د x = 0 لپاره ترم نه دۍ تعريف يا پيژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x يا $T(x,2y) = \frac{x+2y}{x}$

ارزښتشميرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده :4 = 2 / (2+6) = T(2,3)

يادونه: د ګڼونو لپاره دې دريمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼونډيرۍ ورکړ شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې انسان د خپل چاپېریال د ټولو شیانو او پیداېښتونو سره لاس په ګرېوان دی، نو پوښتنې او هیلې رامنځ ته کیږي،غوښتنې لري او وېناوې کوي، په کومو وېناو کې،

چې شیان او رېښتونی(واقعیتونه) بیرته هنداره (منعکس) کیږي یا په یوه څه یا شي، چې وینا کیږي، نو موخه ترې د هغه څه رېښتون حالت یا ځاننیونه ده۰ یوه وینا په واقعیت کې ټیک هلته رېښتیا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت یا بهتره شي ځاننیونه په رېښتونې شته یا موجود وي، په بل حالت کې دا وینا نارېښتیا (غلطه) ده. موږ نیسو، چې دا څه دې په شمیرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پریکړه دې پرې کیدی شي۰

پژند(تعریف) ۱ ۰ ۱ :

وینا د یوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دی)، د هغهٔ بیرته هندارونه یا منعکسونه ده۰ (دا په دې مانا، چې وینا یو شی په وینا کې همهغسی ښایي لکه څنګه چې دی له دې امله شي هندارونه یامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کیږي یا په همدې ډول په نخښه کیږي۰

یا په بل عبارت وینا د کلیمو داسې هدفمند یوځایوالی یا یوځاي اېښوول دي، چې د یوه شی حالت (ځاننیونه) یا شکل او د شیانو رېښتونې اړیکی بیرته هنداره یا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه درېښتیاوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

یا په بل ډول :

د وینا لاندې سړی یو ژبنی یوون، یا یووالی (واحد unit ,Einheit)پوهیږي، کوم چې د شي اړیکی (د شي څرنګوالی) بیانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وینا په کومه ژبه، په پیداېښتي (طبیعي) او که په مصنوعي ژبه ویل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وینا د طبیعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځني ډول: یوه وینا یوه جمله ده یا فرمول دی، چې یا رښتیا او یا نارښتیا ده۰ داسې هم ویل کیږي، چې وینا یو «رښتیاارزښت » ،، رښتیا یا نا رښتیا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعنې : د شميرپوهنې سم اند لپاره پريکړی د وينا « ريښتيا ارزښت»(رښښتيا يا نارښتيا) دئ. نور خويونه په راتلونکی کې نه څيرل کيږي.

ويناوې د لاتين په لويو تورو A , A* په نخښه کوو او داسې نور.

۱ . ۲ . ۳ د دوه ارزښتوالی اصول يا پرينځيپ جمله

هره وينا يواځی يو ممکن « ريښتيا ارزښت» لرودئ شي، دا په دې نامه، چی وينا يا ريښتيا ده او يا ناريښتيا. (د دريم نه والی اصول يا پرينځيپ).

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دئ. دوه ارزښتوالی او د دريم نه والی بايد سره بدل نه شي.

که يوه ژبنی افاده يا وييښه د وينا په څير ترتيبوو، دا بيا دلته ارزښتناکه ده، چی د ويناارزښت حتمآ بايد څرګند يا معلوم نه وي. که بالاخره ټوله پوهنه د رښتيا لور غوره کړي وي، بياهم موږ څرګند ژبنيو موادو ته اړ يو، چی د هغه شي حالت (ځاننيونه) افاده کړاي شو يا وويلی شو، د کومو په شته والی يا نه شته والی، چی پريکړه وشي.

ټولې ويناوې له دې امله په دوه ټولګيو يا کلاسو ويشل کيږي، د رښتيا ويناو ټولګی او د نارښتيا ويناو ټولګی يا کلاس(صنف).

که وينا ريښتيا وي، نو ريښتيا ارزښت يې ريښتيادئ او په w سره يې ښايو، که وينا ريښتيا ارزښت ناريښتيا ولري ، نو په f يا،، نه،، يې ښايواو وايو، چې د وينا ريښتيا ارزښت ناريښتيا دئ

تکرار : هره جمله، چی « ريښتيا ارزښت» (ريښتيا يا نا ريښتيا) ولري، وينا بلل کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیز سم اند(منطق) د وېناو سره سر او کار لري..

بېلګې:

غونډاله (جمله)

الف : » د کابل سین د کونړ له سین سره ګډېږي«رېښتیا وینا ده۰

ب : 3 + 4 = 7 رېښتیا وینا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا ناریښتیا- یا ناتیک وینا ده۰(د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد یاګڼونه کتلکیدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو یې ؟ « نه شي کیدی یو رېښتیا ارزښت باندې تنظیم شي۰ له دې امله وینا نه ده۰

نورې بېلګې :

وېناوې دي:

(دپیتاګوراس (فیثاغورس) جمله۰

د کاتیتونو یا د یو بل سره ولاړو یا عمودو اړخونو یا ضلعو مربعګانو (څلوریو) زیاتون(جمعه) د هیپوتینوزې(اوږده اړخ قایمې زاویې ته مخامخ ضلعه یا قطر) د څلورۍ یا مربع سره برابر دئ.

نورې بېلګې :

سرک لوند دئ

ټول سپي خطرناک دي

3 > 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځاي یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسیډ CO_2 وښایي

د دي پرځې یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار;NaCl ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنګ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیدایښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دریو بی له پاتې (باقي) نه ویشل کیږي

د وینا «ریښتیا ارزښت » ریښتیا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنی ښار دی

3 > 5 پنځه له دریو کوچنی دی

ټول لومړني اعداد یاګنونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دی

هره یوه له دې ویناو « ریښتیا ارزښت » نا ریښتیا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوړه وایو.

په لاندې کې به وڅیرو، چی ویناوې شته، چې نورې ویناوې د خپلې برخی په څیر په ځان کې خوندي(لنډ : خوندي) لري. داسې ویناوو ته یوځاېشوې یا یوځای ایښول شوې یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړی ! مرکبې ویناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بیلګه راوړو » کۀ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشوړ وي، نو داعدد یا ګڼ په 3 ویشوړ دی، یانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ویشوړ ده له دې لاس ته راځي، چی پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ویشوړ دی۰

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشوړ یا ټوټه کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي۰

لکه : سپین غر یوه خورا جګه څوکه لري

یوه بله بیلګه د یوځای شوې(ځنځیري) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي۰

څرګنده ده، چی دواړه ساده جملې د برخویناو په څیر یوځاي شوي ویناوې دي: » سپینغر خورا خواریکښ دی« همدا ډول » هغه (سپیغر) پوهیږي، چی نور کارته وهڅوي«۰

دا ویناوې کیدی شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیاارزښت یې همغه پاتې شي۰

د بیلګي په توګه:

۱ - سپینغرخورا خواریکښ دی۰ یا هغه پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چی هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی۰

۳ - دا چی سپینغر پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي ، نو سپیغر خورا خواریکښ دی۰

٤ – سره له دې، چی هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دی۰

ګورو، چی په دې ډول یو له بل توپیریدونکی تړلې یا ځنځیري، یا یوځاي شوی ویناوې جوړیږي، چی په خپله رښتیاارزښت کی یو له بل توپیر کیدی نه شي۰ د دوي توپیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوي یو له بل سره تړلو ځرنګوالي له لارې مخ ته پروت دئ یا رامنځ ته شوی دئ٠
په لاندې کې به ممکنه« ویناترنه» (یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر ځیړنې لاندې ونیول شي.

پیژند ١ ٠ ٢ :

یوه «ویناترنه» یا یو «ویناتړاو» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنۍ ویینې(افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډیرو ویناو ځخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

موږ د سم اند یا منطق ستېرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یې یواځې او یواځې د «برخویناو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي٠

بیلګې

الف: سپین ډیر خواریکښ دی، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهځوي٠

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي٠

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمي ولید٠

١ ٠ ٢ ٠ ٤ ویناترنه یا وینابلواک (- فنکشن یا – تابع)

د ویناترنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که ځوک د ترنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځاي شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځاي غواړو «ریښتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپیژنو. موږ پریکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو (ویناواریابلو یا وینا اووښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه ...p,q,r او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. موږ دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاینیونکی(یوځائیز یا یوګوني) بلواک یا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه۰

یادونه: د بلواک یا تابع کلمه وروسته څیړل کیږي، دلته د بلواک یا فنکشن پرځاي ویناتړنه یا عملیه بسیا کوي. دا ځنی ویونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي یې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وینا تړاو یا ویناتړنی(عملیې) «نه والی»: دیوی ویناP نه والی هغه وینا ده، چې هلته او یواځی هلته د ریښتیا ارزښت ناریښتیا لري، چیP ریښتیا ارزښت ریښتیا ولري۰

مورږ د وینا P نه والی نفی په Pنه سره ښایو ، شمیرپوهنیزه نخښونه یې په لاندې توګه ده ¬p په یوه جدول کي ریښتیا فنکشن یا ریښتیابلواک کي داسی څرګند وو(دا چې زه کله کله هغه شمیرپوهنیز سومبول د نه p لپاره ¬p نه شم لیکلی، نو دا به همغسي p نه ولیکم.

P	Pنه یا ¬p
w	F
f	w

د یوې وینا P تکرار نه والي یا بیا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې یې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

p	¬p	¬¬p
w	f	w
f	w	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه واره نه والی د همغې لومړنی وینا رښتیاارزښت لري

په پيدايښتي ژبه کی نه والی په«نه» یا « نا » خپل رښتینوالی مومي٠ «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی٠ دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی٠

نه والی ته بیلګه : د وینا ¬A نه والی : "7 < 3 „ وینا نهA ده: دا چی A رښتیا ده، نو ¬A نارښتیا ده٠

ترڼه(عملیه) یا کنجنکشن Conjunction (لاتین: ترڼه، دلته د « او (and)» ترڼه یا تړاو):

وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څېر یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼې لپاره بیلګی دي لکه پوښتني، امرونه او نظرونه یاعقیدې:

۱ – هوا څنګه ده ؟

۲ ـ کورته لاړ شه

۳ – شین یو ښه رنګ دی٠

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتونې لري، اړیکنخښی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي٠ یوه د نخښو لړی کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګې په توګه

3 + x <5 د بنسټیزورشو N کې نه ریښتیا ده او نه ناریښتیا٠ دا له دې امله وینا نه ده٠ که چیرې د واریابلې یا اووښتونې یا متحولې پر ځاي ۰ او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا ترې منځ ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ځاي يې نور د پیدایښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بیا ناریښتیا ویناوې منځ ته ترې راځي٠

دا چی اووښتونې یا متحولې د بنسټډیرۍ یا بنسټ ستې څخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک یا ازاده اووښتونې(متحولې) په نامه یادیږي٠

پیژند :

یوه وینابڼه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اوښتونې(متحوله) لري او د

- د دې اووښتونې په ځاي د بنسټیزې ورشو یا ساحې او یا
- د دې اووښتونې تړلو څخه د کوانتیفیکاتورونو(کوانتورونو) په مرسته یوه وینا جوړیدی شي.

یادونه :

که په لاندې کې د تړاو یا تړنې کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه یاکنجنکشن conjunction دی٠ له ګرامر سره په توپیر، چې هلته تړنه یا تړاو یو « تړونتیکی، تړاولغات» ښایي په سم اند کې تړنه یو څرګند(دوه ځایلرونکی یا دوه ځاییزیا نوره هم ښه دوه ګونی) جملې تړل یا په بل عبارت دوه ځاینیونکې (نوره هم ښه : دوه ییز یا دوه- ګونی) فنکشن یا تابع(بلواک) تعریفوي یا پیژنی٠

د « او» تړنه او نخښنه یې $\wedge$

پیژند ۱ ٠ ۳ :

$p\wedge q$ دوه ویناوې p او q یانې د «او » یوځایوالیp او q یواځې او یواځې هلته یو ریښتیا ارزښت ریښتیا لري، چې p اوq دواړه ریښتیا ارزښت ریښتیا ولري٠ که له دې څخه یوه وینا هم ناریښتیا وي، نو بیا د « او » تړنه ناریښتیا ده ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترنې نخښه ددوه ویناو qاو p ترمنځ لیکل کیږي p/\q او ویل کیږي p او p

موږ د « او » ترنه په لاندې جدول کې روښانه کوو یا انځوروو:

یادونه: په لاندې کې w رښتیا او f ناربښتیا په معنا دي

p	q	p/\q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

د « او » ترنې ته بیلګه :

د دوه رښتینو ویناو د A وینا : ,, 3 < 7 ,, او د B وینا : 3 یو لومړنی ګڼ دی رښتیا وینا A /\ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

یادونه: موږ ګران لوستونکي به سره یوځاي فکر وکړو، چې دا پریمګنونه لومړي او که لومړني ګنونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګنونه لومړنی نه دي۰ دا ځکه لومړي ګنونه دي، چې له دوي له زیاتون او یا کمون ښخه لومړی ګنونه جوړیږي۰ موږ به یې زیاتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ویناو دا ترنه یا کنجنکشن، چې مختلف رښتیاارزښتونه ولري یانې د A وینا: 3 ,, 7 < ,, (رښتیا او د B وینا: « ۳ یو جوړه ګڼ دی (نارښتیا)، نو A/\B وینا : چې ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « (نارښتیا) ده۰ دا ویناترنه ویناارزښت نارښتیا لري۰

د دوه ویناو د « او» ترنه دA وینا: 3 < 7 او د B وینا « ۳ یو جوړه ګڼ یا جفتعدددی» یوه نارښتیا وینا ده : ۳ یو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ومو لیدل، چی د « او » ترنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده (عادي) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټۍ «پټیدځاي» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » ترنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښایې»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځاي پیدا کړ« او » دا پټیدځاي یې پټ واسته۰

۱) هلمند موړ(بډا) شو او هیواد یې پرېښود ۰

۲) سره له دې، چی برلین کوچنیښار دی هلته د منی د المپیک لوبې کیږي

۳) ۱۵ ګڼ جوړه دی، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونی دی

په ټولیزه توګه د « او » ترنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چی د جملی ټولی برخې رښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا ترنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخی سره په ترنه « او » وتړل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او بری یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» ترنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « ترنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله ترنه» تل ژوروالی ته راهځوي: باید جوته شي، چی ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»ترنی پیژند یا تعریف یواځنی دی او دا V د یا ترننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p اوq ترمنځ ځایول کیږي pVq او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول ځرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

p	Q	p\/q
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيږي، چې ديسجنکشن يا د « يا » تړنه p\/q يو داسې رښتياتابع (-بلواک يا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رښتيا فنکشن رښتيا اخلي، کله چې کم له کمه د « يا » تړنې يو غړی د رښتيا ارزښت رښتيا ولري يا واخلي٠ که د ديسجنکشن دواړه غړي نارښتيا وي نو p\/q هم نا رښتيا دی٠ دا د رښتيا فنکشن کې د ځايونې « يا» څخه بل څه نه دي٠ يوه د «نه خونديکونې» يا « نه ځايونې» يا « په برکې نه نيونې» د « يا » وييينه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « يا٠٠٠ او يا ٠٠٠» ليکل کيږي٠

بيلګه (د « يا » تړنې ته):

د دوه رېښتينو ويناو د « يا» تړنه د A وينا: ,, 7 < 3,, او د B وينا: « ٣ د ٦ پروېشونی دی» يوه رښتيا وينا A\/B ده : «٣ له ٧ کوچنی دی او د ٦ پروېشونی هم دی»٠

د دوه ويناو تړنه، چی مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا ,, 7 < 3 ,, رښتيا او د B وينا: ,, 7 =3 ,, (نارښتيا) ، نو A \/ B ده، چې 7 < 3 يا 7 = 3 دا وينا تړنه د رښتيا ارزښت رښتيا w لري٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه نارښتیا ویناو د « یا »(" Or") تړنه:

د A وینا : "7 > 3 " او د B وینا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دئ یوه نارښتیا وینا $A \vee B$ ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دئ»

الترناتیوAltenative یا انتیوالنخ Antivalenz ویناوې : دا د » یا « ویناتړنه باید د « یا ... او یا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتیا ده، که چیرې دواړه ویناوی رښتیا وي.

بیلګه : (دوه الترناتیو ویناو ته ، چې رښتیا وي)

د وینا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دئ» د الترناتیو په نامه داسې دئ « ۳ یا له ۷ کوچنئ دئ او یا یو لومړی ګڼ دئ» نارښتیا دئ.

بیلګی : (نه والي، کنجنکشن، دیسجنکشن ته)

یادونه: په لاندې (Wahr) w د رښتیا او(Falsch)f د نارښتیا لپاره کارول شوي.:

ویناتړاو

A	π پي ټولګڼ دئ	f
B	π ایراشنل ګڼ دی	W
C	صفر له پيπ کوچنی دئ	W
D	π پي له دری کوچنی دئ	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

W	π ټولګڼ نه دی	<u>A</u>
F	π کوچنی برابر له صفر	<u>C</u>
f	π ټولګڼ او له صفر لوي دی	A∨C
W	π ایراشنل او له صفر لوي دی	B∧C
W	πپي ټولګڼ یا له صفر لوي دی	A∨C
f	π ټولګڼ یا له ۳ کوچنی دی	A∨D

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغۀ فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم۰ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دی، یانې د » او یا «
امکان شته۰ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي۰ یانې
دوه نرخونه باید ورنه کړای شي۰

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځیره دې
یې په پام کې راولی۰ په شالت یا سرکټ الجبر کې د کجنکشن یا د »او« ترړنې«
ریښتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه تړل شوي دي،

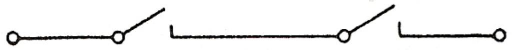


Bild 7.1

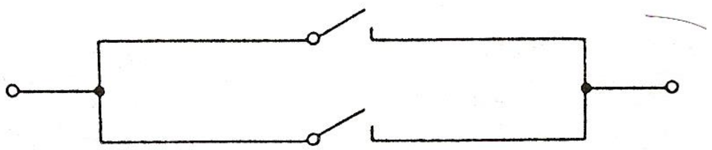


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس ربښتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستۍبیلګه په ګوته کوي، چې داسی یوځاي شوې ویناوې جوړیدی شي، په کومو کې چې له یو زیات تړوني موجود وي٠

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملی کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی (ربښتیا - بلواک یا ربښتیا فنکشن » نهp∨ p دی٠ د دې لپاره هم د ربښتیاارزښت فنکشن ورکول کیږي٠ د ربښتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا p نه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp∨p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دی

د یوې وینا نه والی

p	Pنه	p∨pنه
w	f	W
f	w	w

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکیک کوونکې نه ده یوه وینا نهp∨p تل ربښتیا ده، بی له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم ربښتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغې ربښتیابلواک کټمټ یا identisch(identic) ربښتیا دی(دا په دې مانا، چې که د ویناؤوښتونکې یا واریابلې ته هر ربښتیاارزښت ورکړ شي یانې ربښتیا یا نا ربښتیا تل د ربښتیا ارزښت ربښتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغو ربښتیاارزښت بلواک کټمټ نا ربښتیا دی (دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتونې په هره وینا ارزښت وینا نا ربښتیا ارزښت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته وینا وې کونترادیکشنونه contradiction (د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

ربښتیاارزښت دې د وییني یا افادې نه(p\/q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د p\/qنه ربښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$
\begin{array}{l}
p...q....p \vee q....\neg(p \vee q)......\neg p...\neg q...\neg p \wedge \neg q \\
w...w......w.........f.............f.....f.........f \\
w...f.......w.........f.............f......w.........f \\
f...w........w.........f............w.......f.........f \\
f...f........f.........w............w........w.........w
\end{array}
$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویېنې یا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه ربښتیا بلواک یا – فنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه ربښتیا - (او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکې جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو -وینا تړنه) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعأ همغه نه پاتیږي، لکه

د بې نوکانو عملیې.

ایمپلیکیشن implication (لاتین: درراګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دوه وېناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظیم یا ترتیب شي ایپلیکیشن سومبول=> چې دا سومبول د دواړو وېناو Aاو B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدیډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion (لاتین: پاي لاس ته راوړنه) وایي۰ د دوه وېناو ایمپلیکیشن ټیک هلته نارښتیا دی، چې پریمیسس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي۰ په بل ډول رښتیا دی۰

د دوه وېناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرګندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول =>

P	q	p=> q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسی یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه وېناو A او B ټیک هلته یو نارښتیا یوځای شوې وېناچې په p=/>qسره ښایو)۰

کله چې لومړیبرخه وینارښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوتري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا ویینې په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځیدلی شي. په ښکاره ډول د بیلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلویزیون کتلو ته کورته راځي.

ناریښتیا ده، که د جملې لومړۍ برخه ربښتیاوي او دویمه ناربښتیا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بیلګې په توګه د جدول لومړۍ همداسې څلورمه کرښه سره یو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې ربښتیا همداسې نا ربښتیا وي) پرابلمونه نه پیښوي، په دې حالت کې ټوله وینا ربښتیا ده، که لومړۍ برخه وینا ناربښتیا او معکوس دویمه برخه ربښتیاوي، نو په دې حالت کې به د بیلګې په توګه جمله ناربښتیا ونه لیدل شي(که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلویزیون لیدلو ته راشي)، نو بیا د دوه ارزښتوالي پرینځیپ له مخې یواځې دا ارزښت ،، ربښتیا،، باقي پاتې کیږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg (p \vee \neg q)$ ټیک بیرته بیا(بیرته) د ایمپلیکیشن د ربښتیا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې یې: q که p، او یا هم p ، د q لپاره پوره کیدونکی شرط دی(په بل ډول یې: qد p لپاره اړیین شرط دی)

ورته والی :یوارزښتوالی(برابرارزښتوالی) Äquivalent

که دوه ویناوې qاو p خپله ترنه په » ټیک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که»، تنظیم کړي، دې ته ورته والی یا ایکویوالنت وایي۰ د ایکویوالنت سومبول دی ≍ د دواړو ویناو pاو q ترمنځ دا سومبول پروت دی p ≍q   په دې مانا، چې p ټیک هلته که q ۰ ایکویوالنت سومبول یې په دواړو خواو ایمپلیکیشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ویناو ایکویوالنت ټیک هلته ربښتیا دی، که دواړه ویناوې ربښتیا یا دواړه ویناوې ناربښتیا وي۰

دا شي څرنګوالی یا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

p	q	P⇔q
w	w	W
w	f	F
f	w	F
f	f	W

سیده او مخامخ یا پـه ځنډ دي پـه دې مانا وي، چې له p څخه q لاس ته راځی او پـه ځنډ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی٠

۱ ۰ ۳ د وینابلواکو یا ـفنکشنونو ترمنځ اړیکې

د دوه ویناو ترړنه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د ویناو ربښتیاارزښت د ترړنویناارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي٠ دا د یو ویناارزښت جدول له لارې ځرګندیدی شي٠ ومو لیدل، چې ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی٠ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی ځنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چې سره یوارزښته دي٠

p	q	p ⇔ q	p=>q	q ⇒ p	(p ⇒ q) (q ⇒ p)
W	w	w	w	w	..........W
w	*f*	f	f	*w*	.........*f*
F	*w*	*f*	*w*	*f*	.........F
f	*f*	w	w	*w*	.........*w*

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)\ (q \Rightarrow p)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ورته والي ويناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې يو بل سره بدل کړو يانی د يوه ځاي د بل سره بدل کړو٠ له دې ښخه پيچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کيږي٠

د دې ورته والی ويناتړنې غوره بيلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$

$$(2)......\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او ديسجنکشن لپاره ديستريبوتيو قانون:

(3) [p/\(q\/r)] □ [(p/\q) \/ (p/\r)]

(4) [p\/(q/\r)] □ [(p\/q) /\ (p\/r)]

١ ٠ ٤ وينافورم يا - بڼه او کوانتورونه

وينا سم اند په لاندې ډول ساده توليز کيدی شي٠ د بيلګي په توګه که مختلف شيان همغه خويونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وويلي - - يا افاده کړای شو: دلته د ويناو پر ځاي د وينافورم ښخه خبري دي، يا غږيږو٠ دا داسی ژبنی ويينې يا افادې دي، چې د شيانو لپاره واريابلی يا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته يوه وينا شي٠ بيلګي يی په لاندی ډول دي

لومړی : x پر دوه ويشونی دی »

دويم : » z يو هوار څلورګوډی(څلورضلعي) » دی٠

دريم : «u له v ښخه لوي » دی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترهر ځای پرځای کولو وروسته رښتیا یا نارښتیا وینا لاس ته راځي۰ که په دویم کی دz پرځای «ډیرګوډی» (کثیرالاضلاع) ځای پرځای شي، نو یوه رښتیا وینا لاس ته راځي۰

که په لومړي کیx د7 پرځای ځای پرځای شي، نو یوه نارښتیا وینا لاس ته راځی۰ دریم یوه اړیکه(ریلیشن(ده، چې هلته د انفرادیو د اینسولو ترتیب هم یو رول لري۰ دلته که د تورو پر ځای ګڼونه ږدو، نو هلته دا رښتیا وینا ده که د لومړي توري پرځای ستر ګڼ ځای پرځای شي۰د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل۰(له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وایي۰

بیرته داسی لیکو P(x), Q(z), R(u,v)

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بڼي څخه وینا جوړوي۰ چې کوانتیفیکیشن Quantifikationبلل کیږي۰ دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بڼی افراد همغه خویونه ولري، چې ټولوینا (Allaussage) ورته وایو۰یاچې په پوښتل شوي چاپریال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خویونه ولري، دې ډول وینا ته موږ د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وایو۰ زموږ په بیلګه کې یی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پیداینتی یا طبیعي) ګڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کیږي

پنځم : ټولې څلوری (مربع) هوارې ډیرګوډی یا کثیرالاضلاع دي۰

د ټولکوانتور یا ټولوینا لپاره نخښه $\forall$

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتونوینا لپاره نخښه $\exists$

یادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څیر ده په پام کې دې وي، چی د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې (ویاریابلی یا مجهولی) ورکول کیږي۰

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی یي لولو، چی یو x په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځه ۱ : $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دی (یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه)

دا سومبول ∃ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰۰۰ شته»د وینابنی او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووبنتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووبنتونو ساحه یا ډیری کې، په کوم کې چی کم له کمه یوه داسې اووبنتونې ځاي په ځایونه شته وي کومه چې وینابڼه ربنتیا وینا کوي۰

بیلګی (د ربنتیا شتون - موجودیت ویناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل : یو داسی ریيل ګڼ یا عدد x له(په) R (کې) شته ،د کوم لپاره چې$x+1=0$ باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د ریيلګڼډیری یا ریل ا عدادو سټ R توکی دی او ∈ په دې مانا دی، چې توګي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$x^2 + 4x = 0$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x=0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه ریيلګڼونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4=0$ باور لري

: (2، -2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$\exists x \notin R: x^2+1=0$

لوستل: داسې ریيلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1=0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې وینابنې هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتوندېرۍ یا واریابلډیرۍ ټولو توکو لپاره رښتیا وینا شي٠

بیلګه: وینابنه « x په 2 ویشونی دئ » د جوړه ګڼونو هریوه لپاره رښتیا ارزښت لري په

دا سومبول ∀ په دې مانا دئ، چې « د ټولو x لپاره» د وینابنې او په همدې پورې اړوند د وینا متحولو ډېرئ یا سټ (ویناووښتوندېرۍ یا واریابلډیرۍ) ترنه له دې سومبول سره یوه Universalaussage یونیورزالوینا یا ټولوینا منځ ته راځي٠ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتوندېرۍ) هر توکی لپاره د وینابنې څخه یوه رښتیا وینا جوړیږي٠

جمله : (دUniversalaussage یونیورزال- یا ټولیزې وینا یا ټولوینا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ویشونی دئ)

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو ریيلاعدادو x لپاره, کوم چې له یوه لوي وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د نارښتیا ټولیزې وینا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وینا نارښتیا ده، ځکه چې دا د $1 \le x \le 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وینا د ټولو ریل عددونو لپاره باور نه لري٠

۱ ۰ ۵ اړین – یا ضروري- او پوره کیدونکي شرطونه

د ایمپلیکیکشن سومبولA=>B («کهA نوB » « له A څخه Bلاس ته راځي»)یا په بل ډول : که A باور ولري، نوB هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته۰

الف) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دی»

ب) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف) وایي، چې د A ربښتینوالی د B ربښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چی آ پوره شي۰

بیا : وینا باور لري۰

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دی یا پوره کیدونکی دی یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – ویناA : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « ګڼ n پر ۳ ویشونی دی»

$$A => B$$

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دی یا بسیا کوي، چې یو رییل ګڼ n پر ۳ ویشونی دی، که دا پر ٦ ویشونی وي۰
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ۳هم ویشونی دی ۰ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي۰ د بیلګي په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ویشونی دی ، مګر په ٦ نه دی ویشونی۰

۲ - وینا A : "n > 7"

وینا B :وي دې: n > 6

$$A => B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دا پوره کیدونکی دی، چې یو رییلګې n له ٦ څخه لوي دی۰ که اړیکې، چې n له ٦ لو دی، باور ولري

داسې رییلګڼونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له۷ څخه لوي نه دي۰ د بیلګي په توګه ٥ ،٦، یا شپږ.نیم

د ب) فرمولبندي وايي، چې وینا ب باورلرل غوښتونکی یا اړیین یا ضرور دی، د دې لپاره، چی وینا A باور ولري۰

که وینا B باور ونه لري نو وینا A هم باور نه لري ۰

بیلګی د اړیین(ضروري) شرطونو لپاره:

۱ – د دې لپاره، چې یوګڼ n پر 6 وویشل شي، اړین(ضرور) ده، چې دا ګڼ پر3 ویشونی وي۰ یو ګڼ، چې پر3 نه وي ویشونی، نو پر ٦هم ویشونی نه دی۰

۲ - ویناA : » څلور ګوډی یوه څلوری یا مربع ده«

وینا B : » څلور ګوډی څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې یوه څلورګوډی یوه مربع(څلوری) ده دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه یې ولاړ نه وي، نو مربع یا څلوری نه ده که یوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړین نه ده، چې څلوری یا مربع دې وي۰

د برابروالي یا برابرارزښتي (ایکویوالنت) سومبول«

A<=> B

(په دواړو لورو ایمپلیکیشن) لپاره په شمیرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وايي، چې A دB لپاره یو ضروري او پوره کیدونکی شرط دی۰ « دا وايي، چېA ټیک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – ویناA : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دی، که دا عدد پر۳ او ۲ ویشونکي وي٠

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعې»

A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه(ضلعې) ولري٠

۱ ٠ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم(ترې پوهیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې تیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي٠ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کې داسې نه ده٠

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د تیک ځرګندې پوهنې یوه نه پریښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله څه شی دی ؟

ټولې رښتونې ويناوې په شميرپوهنه کې جملې بلل کيږي، چې د پيژندنې لپاره ښوونې يا ثبوت ته اړتيا لري ۰

اکسيوم Axium څه شی دی؟

بې ثبوته رښتينې وينا ته اکسيوم وايي

شميرپوهنيزې يا د رياضې جملې زياتې نيونې(فرضيې) او ثابتول(غوښتنه،جوته ونه يا ښوونه) په بر کې- يا خوندي لري۰

که دا وينا داسی وي، نو پس داسی به هم وي۰ دلته که دا وينا داسې وي نيونه يا فرضيه ده او نو داسې هم ده۰ دا غوښتنه ده، چې بايد ثبوت يا وښوول شي۰

اکسيوم : ۱ طبيعي عدد دی (پيانو Peano)

: ټکی هغه دی، چې پر ويشونی نه وي يانې په ټکی ويشل بند دي۰ (Euklid)

: حتمي پيښنه د پيښې امکان ۱ درجه لري۰

جمله: که درېګوډی ولاړکونجيز وي، نو(پس) د پيتا ګوراس (pythagoras) درسې جمله باور لري

: يو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، بايد ناجوړه(طاق) وي

: په اخره جمله کې نيونه(فرضيه) ده (که يو پريم عدد له ۲ لوي وي۰۰۰) او ثبوت يې (هر له دوه لوي عدد په دوه ويشل کيږي پس لومړی ګڼ نه شي کيدی، نو دا تل ناجوړه ياطاق دی)په ځتوالي يا تضاد کې پيژندل کيږي۰
تل داسی نه ده، چې د جملې د رښتينوالی ځخه دې د جملې په ځتوالی يا تضاد هم رښتيا وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ۲٪ هم (ربښتیا)

جمله: که ۲ ٪ پس ٦٪ هم (نارښتیا)

۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دنننی کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دیٰ۰

په ځېټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دنننی کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته(هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځنې او یواځنې ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په ځېټ) ولاړکونجیز دیٰ، کله چې دنننی کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره ځخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي ځخه هر یو ځو کلن دیٰ؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دیٰ او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دیٰ یانی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کیږي او ساده کیږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \ \sqrt{} \ \ 22x +3 = 113$$

په کیڼ ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزیات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دئ

نو دا ګڼ ۲۲ ځله x بیا ۱۱۰ کیږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده یانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ۵ کلن پلار ۳٤ کلن او نیکه ۷٤ کلن دئ۰

که ترمونه T^ او T° د برابروننخښنی = باندې یو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابرون پیداکیږي: $T^\circ = T^\wedge$ ۰

که چیرې ترمونه په دې نخښو $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ او(نابرابروننخښه =|) یو له بل سره وتړل شي یو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي یا مجهولو سره یوځاي شي، هغې ته د وینافورم یا نوره هم ښه وینا بڼه ویل کیږي۰

دا یا ربښتیا یا نارښتیا وینا کیدی شي۰ که ناټاکلي، چې اوښتوني یې هم بولو(د بیلګې په توګه z , x , y) پر ځاي د بنسټیدیرۍ ګنونه ولیکل شي۰ په برابرونپوهنه کې له پیژند – یا تعریفدیرۍ څخه هغه ګنونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم یا بڼې یو برابرون یا نابرابرون ربښتیا وینا کړي۰

د یو برابرون یا نابرابرون (مساوات یا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې وینابڼه پیژند - یا تعریفدیرۍ پورې اړوند وي او دا وینا ریښتینې کوي، اوبیډیرۍ یا حلډیرۍ L کې پروت دئ یا د برابرون یا نابرابرون په ډکوونکو (پوره کوونکو) ډیریو پورې تړلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ریښتونې وینا ورکوي کټمټ یا (identisch, identic) وینا وايي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې :

الف) $5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $-4 = x$ لپاره رښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په څټ $3.4 = 48$ پس- $L = \{ -4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 \Rightarrow L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب) $x < 3 \Rightarrow L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی : الف) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیریکې سره برابر وي(یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیری ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي٠

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نابرابرون	براون
۱) وينافورم کې کيدی شي،چې خواوې سره بدلې شي	T° < T^ T^ > T° 2x < 6 6 > 2x	T°=T^ T^ = T° 3x=5y 5y = 3x
۲) که وينافورم په دواړو خواوو همغه ترم زيات يا کم شي او د يوې ورزيات ترم پيژندډيرى خوندې وساتل شي يا ځاي کړي	T^ < T° => T^ ± T° < T° ± T^	T^ = T°=> T^ ±T° = T°± T^
يا تغير ونه خوري٠ مخامخ يا کيڼ لوربيلګه کې تفريفډيرى تغير خوړلی	3y < 4x ⇔ ⇔ 4y±2x < 4x±2x	2z = 8 => 2z ± 3 = 8 ±3

پر څټ بيلګه

2z=8 |=> 2z+3-z=8+3-z

دا چې z=4 دې نوي ورزيات شوي

ترم 3-z نه دی تعريف يا پيژندنه

لري، ځکه چې z - 3 يو پيدايينتي يا طبيعي ګڼ نه دی

۳) د وينافورم دواړه T^=T° ⇔ T^.T > T°.T T^ <T° ⇔

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه کیدی شي چې $T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow$ $T^\wedge.T = T^\circ.T$

له همغه مثبت ترم سره $T^\wedge:T > T^\circ:T$ $\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$

ځل او یا په همغه ترم   که $T > 0$ که $T > 0$ وي

وویشل شي $3y - 12 < 30z - 90$ $4x+2 = 10x-6$

$\Leftrightarrow y - 4 < 10z - 30$ $\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x - 3$

$\Leftrightarrow 4y - 16 < 40z - 120$ $\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x - 30$

٤) د یوه برابرون $T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow T^\wedge.T > T^\circ.T$ $T^\wedge = T^\circ \Leftrightarrow$

دواړه خواوې کیدی شي، $T^\wedge < T^\circ$ $T^\wedge.T = T^\circ.T$

چې له یوه منفی ترم سره $\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$ $\Leftrightarrow T^\wedge:T > T^\circ:T$

ځل شي یا دواړه خواوې په $T < 0$ $T < 0$

همغه ترم وویشل شي٠ $-2y < -4$ $3x = 12$

که په دې فورم کې $\Leftrightarrow y > 2$ $\Leftrightarrow -9x = -36$

نابرابرونونه وي نو د $\Leftrightarrow 10y > 20$ $\Leftrightarrow x = 4$

برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي

یادونه :

په ټولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه Tیو او T دوه په لاندې توګه د ایندکس سره په نخښه کوي: T_1, T_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د رښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د رښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - (A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ډېرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډېرۍ پوهنې یا سټ تیوري باید خپل ځاي په شمیرپوهنه او همدا ډول په نورو پیداینتي- یا طبیعی پوهنو کې نیولي وي، نو له دې امله د لنډ تیر وخت را په دې خوا په پرمختللو هیوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځیو په لیکلوست کې پیل شوه، ځکه چې بې له ډیرپیوهنې یا سټ تیوري شمیرپوهنه بې مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې لیکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پیداینتي یا طبیعي ګڼونه یا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څیره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډیرۍ یا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډیري پوهنې (سټ تیوري)په پرمختللو هیوادونو کې هم د شلمې پیړۍ په دویه نیمه کې د میندو او پلرونو لپاره ستونځې پیدا کړي، ځکه، چې دوي د ډیرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنیانو سره یې مرسته نه شوه کولی۰

د ډیرۍ کلمه له عدددونو یا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښووله لکه اوس۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ یا ډېرئ پيژندل کيږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، یا په یوه ټولګی کې میزونه او چوکی، یا لکه هغه نیزوړي، چې نیز راوړي او د سپین په پټي کې یې ډیری ډیری اچولي یا د هسکې مينې د ښوونځي په لسم ټولګی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکیو او میزونو سټ یا ډیری۰

د ډېرئ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډیری له کلیمې سره اوس بلد شوي یو که څه هم تربيلو بيلو پرديو نومونو لاندې، چی زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته يوائځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چی د ډیری څو مختلف پيژندونه یا تعریفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چی د ډیري پوهنې (سټ تیوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوګرځي۰

ډیرئ پوهنه د شمیرپوهنې سټه جوړوي او د شمیرپوهنې ټولې څانګې په ډیری پوهنه

ودانې دي۰ نن شمیرپوهنه بې له ډیری پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه یې وزي۰

پيژند ۲ ۰ ۱

الف : ډیری یا سټ د ټاکلو شیانو یا کلمو ټولګه (یوځایوالی، مجموعه) ده، چې پخپله خوښه د یوې ټاکلې بنسټډیری یا بنسټ سټ څخه ، چې د پيژندلشویو اصولو یا کرکټرپین له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شمیرپوه کانتور(George Cantor 1845 – 1918) پيژند:

زموږ د خیال یا لید څرګند ټاکلو ، ټیک یو له بل توپیرکیدونکو شیانو ټولګې (یوځایټولولو یا مجموعې) ته ډیری وايي او هر شي ته، چې ډیری یې جوړه کړې یا ډیری ترې جوړه شوې وي، د ډیری – یا سټ توکی وایی۰

(Set and elements of set ډیری او د ډیری توکی)

پ : د مختلفو شیانو ټولګې یوه یوون یا یووالی (واحد Einheit, unite) ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه کې ډیرۍ وایی

یادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی ښه نومه ونې دي٠ دا که څو واره وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیږو٠

ت : څرګند شیان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر څیړنې لاندې نیول کیږي او د دې نخښو له امله یوځاي ټولیږي یا ټولګه جوړوي، ډیرۍ یا سټ تشکیلوي٠ ګډې نخښې کیدی شي ښکلا، کوچنیوالی او داسې نور وي٠

یادونه: د ګرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یاتعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلګه :

ګڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلګو په توګه راوړل شي٠

ګورو، چې د ډیرۍ یا سټ کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیرۍ د څنو شیانو زیات یوځاي کول موخه ده، د ځانګړو شرایطو لاندې.

په شمیرپوهنه کې ډیرۍ په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه ..A,B, او یا M,N, ...X,Y, د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه ...a,b,c, او ...m,n,x,v,

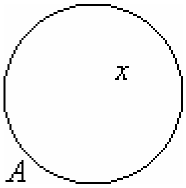
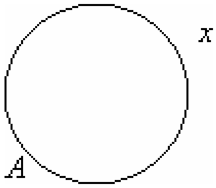
د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی a د ډیرۍ A توکی دی که نه نو لیکو: $a \in A$

په پورته کې توکی a د ډیرۍ A توکی دی.

که a د A توکی نه وي ، نو لیکو: $a \notin A$ دلته a د ډیرۍ A توکی نه دی

دا پورته لینکدود له ښی وکیڼ لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسی لړۍ یې ساتلې پاتې شي٠ زه یې په څټ لیکنو سره لیکنیزې ستونځی لرم٠دا لاندې یې دیاګرام دی، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

 $a \notin A$ (a د A توکی دی)	 $a \in A$ (a د A توکی نه دی)

ډیرۍ A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه یې لیکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډیرۍ یا سټ نخښه ده

یادونه : دا د ډیرۍ کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چې ډیرۍ د شیانو مجموعه یا ټولګه ده او په الماني کې ورته مینګې Die Mengeوایي٠ هغه بنسټیزه خبره یې په پیژند یا تعریف کې ده، که موږ یې چې هرڅنګه وبولو، خو د یو بل څخه کره توپیرکیدونکو شیانو ټولګی ته ٠٠٠ وایو. د ټکو پر ځای ، چې هر څه لیکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو یې هغۀ مناسبه نوموه ونه ډیرۍ ده، دا د کوټې کوټې څخه یا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاریږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي٠ زه بیا په دې ټینګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انګریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ دی٠ د سټ مانا که په ډکشنري کی وګورۍ ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دی. ګورووچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډېرۍ یا ډېرۍ خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ ۰ ۱

الف) M_1 (لوستل Mایندکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces ایندکش پیژند نخښې ته وايي) دې د لومړیو ګڼونو ډیرۍ (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دې د لاندې برابرونونو یا مساواتو د اوبیونو(حلونو) ډیرۍ وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بیلګه ۲ ۰ ۲ :

الف) د مساوات $(x+1)(x-2) = 0$ حل ډیرۍ M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو یاګڼونو ډیرۍ M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$

ډیرۍ لکه، چې ومو ویل د توکو د خویونو له لارې هم ځرګندیدۍ شي یا ورکول کیدۍ شي۰

M = { x | x د خوویونو ۰۰۰ سره}

(لوستل: M د ټولو x ډیرۍ ده له خویونو ۰۰۰۰۰ سره)

بیلګه ۲ ۰ ۳

الف) { د ټولوx سټ ، چې هلته x یو لومړنی عدد یا ګڼ دۍ| M = { x

b) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشدیرۍ: ډیرۍ، چې کوم توکی ونه لري تشدیرۍ یا خالي سټ بلل کیږي او داسی یې لیکو: $\{\} = \varnothing$ یا θ

دا دې د یوې ډیرۍ یا سټ سره، چې یواځی له صفر څخه جوړه ده، نه بدلیږي یانې

$$\{0\} \neq \{\} = \varnothing$$

بیلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x \in Z, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرون یا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډیرۍ

$$\{x|x^2+x-/4= 0\} = \{ 1/2 , -3/2\}$$

کوم ټولګڼ یا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګبونو پیژند ته دې پام وي، چې د راشنلګنونو برخډیرۍ ده۰دریمه برخه دې وکتلشي

بیلګه ۲ ۰ ٥ : د ز۰ کال د دویمې نیمایي میاشتو سټ یا ډیرۍ په Ju , aug sep , ok,no, de سره ښایو او لیکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو یا نوره هم ښه داسی لیکلی شو: $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دۍ

بیلګه ۲ ۰ ٦ : ټول منديزي، چې نن مازيګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون یا جماعت ته راغلي۰

بیلګه ۲ ۰ ۷ : د هغو میرو ، غواوو او وزو ډیرۍ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بیلګه ۲ : ۸ د ټولو هغۏ ګنبونو ډیرۍ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ویشي یانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ٥ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱٥ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې يې ليکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسې وايو، چې ډيرۍ يا سټ M د ټولو هغو توکوx - لکه پورته - جوړ شوې، چې ۳۰ ویشي او داسې يې ليکو: $M =\{ x \mid x$ د ۳۰ پرويشونى ګڼ$\}$

د ټولو پيدايښتي يا طبيعي ګڼونو ډيرۍ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې يې ليکو:

$$N = \{ 1,2,3,4\ldots.\}$$

دا نه پاى لرونکى يا لايتناهي ډيرۍ(سټ) ده ، چې په لاندې ډول يې نخښنه ده يا په لاندې ډول په نخښنه کيږي: ∞

ګورو، چې په شميرپوهنه کى موږ پر پاى ګڼونو برسيره ناپاى عددونو سره هم مخامخ يو.

۲ ۰ ۲ د ډيريو ترمنځ اړيکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړيکى د برابروالى او خونديوني يا خوندي لرنې (مساويوالى او يو په بل کې ځاي لرلو) اړيکې دي.

پيژند ۲ ۰ ۲ دوه ډيري يا سټونه M_1 او M_2 يو د بل سره برابرې دي، يانې

$$M_1 = M_2$$

که چيرې د ډيرۍ يا سټ M_1 هر توکى د ډيرۍ يا سټ M_2 توکى هم وي او پر څټ يا برعکس هر د M_2 توکى د M_1 توکى هم وي.

برابرې ډيرۍ برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګی په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دئ

برخډیری(سبسټ subset)

پیژند ۲ ۰ ۳ :

یوه سټ M_1 د سټ یا ډېری M_2 برخډیری (لاندې ډیری، خوندي ډیری یا سب سټ) بلل کیږي یا M_1 په M_2 کې ځای ده یا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي ده، لیکندود یا لیکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډیری M_1 هر توکی دسټ یا ډېری M_2 توکی هم وي۰

کیدی شي، چې M_1 د M_2 سره برابر هم وي، که برابروالی یا مساوات نا شوني وي نو بیا د اصلي برخډیری یا اصلي سب سټ څخه غږیږو۰

پیژند ۲ ۰ ٤ :

یوه ډېری یا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډیری ده او داسې یې لیکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

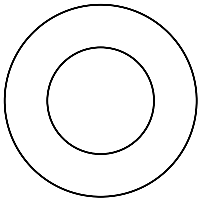
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 یو توکی د M_1 توکی نه وي۰

بیلګې:

الف) که ولرو $M_1=\{-1,1\}, M_2=\{-1,0,1\}$ نو M_1 په M_2کې اصلی خوندي دی

ب) د ټولو څلوریو (مربعو) ډېرۍ د ټولوڅلورګوډیو(څلور اضلاعو) اصلي برخډیرۍ ده۰

پ) څیره ۱ ۰ ۱ په هواره یا سطحه کې ټکوډیرۍ ښایي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډیرۍ یا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څیره کې وګورو، نو یوه ګردۍ (دایره) M_1 په بله لویه M_2 ګردۍ کې خوندي ده۰

تشدیرۍ په هره ډیرۍ کې خوندي ده۰ هره ډیرۍ په خپل ځان کې د نااصلي برخډیرۍ په څیر خوندي ده۰

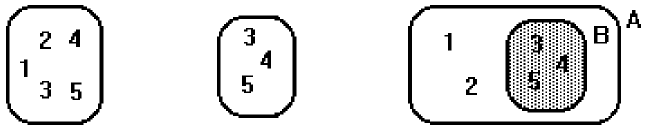
یا دا پیژند :

A⊆B که باور ولري : $x \in A \Rightarrow x \in B$

بیلګه:

A⊆A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند ٢ ٠ ٥ :

هغه ډيرۍ، چې هيڅ توکی ونه لري تشډيرۍ بلل کيږي او داسې يی ليکو: $M=\theta=\{\}$

يادونه : پام دې وي، چې صفر ډيرۍ او تشډيرۍ سره بدلې نه شي يانې لاندې ته:

$\{\} = \theta \neq \{0\}$

د يوې ډېرۍ توان يا تواندېرۍ (توانسټ)

پيژند ٢ ٠ ٦ :

د يوې ډيرۍ M د ټولو برخډيريو ډيرۍ پوتنځډيرۍ يا په تواندیرۍ(-سټ) بلل کيږي او داسې يې ليکو: P(M) په تواندیرۍ توکي لري، چی هر يو يی بيا خپله ډيرۍ ده۰

بيلګه : د M = { a,b.c} ډيرۍ دا لاندې په تواندیرۍ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډيرۍ چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټيک n جګ 2n توکی لري يانی : n^{2n}

دا پورته د جملې په څير د پوره اينډکشن له لارې اوبی (حل-) کيدی شي(لومړۍ برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د ګرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي يې۰

پيژند ٢ ٠ ٧ : د ډيرۍM زور |M| لاندې د ډيرۍ د توکو تعداد ياګڼون پوهيږو۰ که دوه ډيرۍ M اوN همغه زور ولري هغه ته يوزوريزه – يا برابرزوريزه ډيرۍ وايو او داسې يې ليکو: |M| = |N|

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرونونو یا مساواتو او خونديې ساتنو خويونه

الف) رفلکسيو- يا د انعکاس(هندارونيزې) اړيکېreflexivity

هغه اړيکي، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ ريښتوني ويناوې ورکړ شوي وي رفليکسيويا انعکاسي اړيکي بلل کيږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خونديې لرل اړيکې رفلکسيو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هيڅ ډېرۍ د خپل ځان اصلي برخډېرۍ يا برخسټ نه شي کيدی۰

ب) سيومتريکې اړيکې Symetric relation

هغه اړيکې سيومتريک بلل کيږي، چې د شيانو ترمنځ چې کارول کيږي يا استعماليږي يو له بل سره بدليدلی شي۰

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خونديې لرل سيومتريکې اړيکې نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړيکی $M_2 \subset M_1$ نارښتيا يا ناټيک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزيتيويتي Transitivity يا وړون اړيکې

ترانزيتيويتي هغه اړيکې دي، چې له يوه نه وبل ته يي د وړلو امکان شته يا موجود وي۰

له L = M او M = N څخه لاس ته راځي L = N

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته داسې لولو: كه M_1 د M_2 برخډيرۍ او M_2 د M_3 برخډيرۍ وي، نوله دې څخه لاس ته راځي، چې M_1 د M_3 برخډيرۍ ده

برابونونه يا مساوات او په بل كې ځايه ونه يا خوندي ساتنه ترانزيتيو اړيكې يا خويونه دي

۲ ۰ ۲ په ډيرۍ کې کارونې يا عمليې

ټولنډيرۍ (د اتحاد سټ)

پيژند۲ ۰ ۸ :

د دوه ډيريو M_1 او M_2 ټولنډيرۍ(unionاتحاد سټ)، چې د ډيريو ټولنه ورته وايو ده:

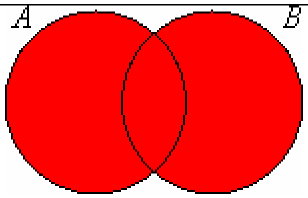
$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسې پوهيږو، چې M د ټولو هغو توكو څخه جوړه شوې ډيرۍ يا سټ ده، چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکي هم خوندي ولري۰

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توكى د M_1 يا M_2 توكى هم دى (پرتله ۱ –مه برخه د يا سره پرتله) ياني دا د ټولنډيرۍ توكى د M_1 يا M_2 او يا د دواړو توكي دي۰

يا لاندې دياګرام

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A ? B$ $A \cup B$ (B تولنه A) x) د A سره B اړيکې لري

بيلګى

الف) M_1 دې د ځوانانو ډېرى وي، چې بکلوريا لري او M_2 دې د هغو ځوانانو ډېرى وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډېرئ ده، چي بکلوريا او مسلکي شهادتنامې ولري او يا دواړه شهادتنامې ولري٠

ب)

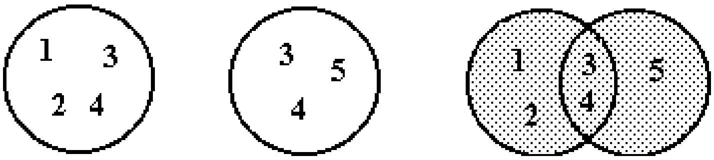
$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

يا په لاندى توګه پيژند او بيلګه: A او B دې دوه ډېرى وي د دې ډېريو تولنه داسي ليکو

B} ∈x∨A ∈B = {x | xUA

UA={1,2,3,4}   B={3,4,5}   A

B={1,2,3,4,5}



تل په ټکو ټکي شوې ټکيډيرى ټولنديرى په ګوته کوي٠

پ – خيره ۲ ٠ ۲ دوه په هواره کې ټکيډيرى په ګوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) ټکيپردۍ دي٠ ب) ګډ ټکی لري٠

پ) اړيکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره څيرې په لاندې کې په بيلګو کې راغلې دي٠

د ټولنې لپاره کموتاتيو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسې دلته(لنډ: لړۍ) د ډيريو په ټولنه کی رول نه لوبوي

يادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ٠٠٠ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بيا دا سره جمعه کړو لکۀ

1 , 1+2,1+2+3,1+2+3+4+,1+2+3+4++..+….

نو دا لړيپرلپسې يا لنډ: لړۍ بولو(پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زياتو ډيريو ټولنه لړۍپرلپسی(لنډ: لړۍ) رول نه لري٠

اسوڅياتيو قانون باور لري٠

$$(M_1 \cup M_2) \cup M \ = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډيرۍ (د ډيريو غوڅی يا –متقاطع سټ) intersection

يادونه : دا کړی شو، چې د ډيرو ګډغوڅی وبولو(دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټيکوالی په کې نه شته)

پيژند:

ډيرۍ M د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 غوڅډيرۍ يا د تقاطع سټ ده(لوستل: M_1

غوڅ(پرې)په M_2 (لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ډیرۍ M ټول توکي د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M_2 توکی وي.

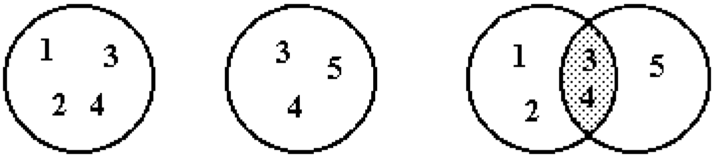
د غوڅډیرۍ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M_2 توکي دي (د ۱ ـمې بری د هم او هم په مانا یا د «او» په مانا)

یا دا پیژند :

د ډیریو A او B غوڅی $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

بیلګه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3, 4\}$



یادونه: دې پورته ډول دیاګرام ته د ون دیاګرام Venn-Diagram یا د Euler-Venn- Diagram وایی

بیلګې :

لومړۍ : یوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتیا څخه راځي، چې په M_1 یې په نخښه کوو. یوه بله ډله ، چې په M_2 یې په نخښه کوود کندهار او همغه د پکتیا زده کوونکي، چې په M سره یې ښایو، دي. د دې دواړو ډلو غوڅډیرۍ

$$M = M_1 \cap M_2$$

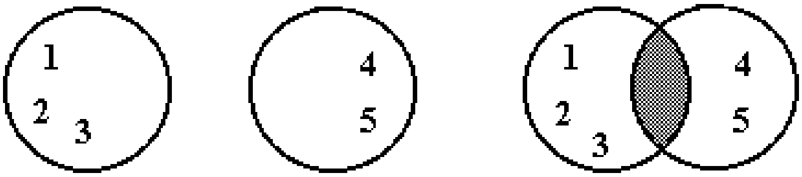
د پکتیا زده کوونکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

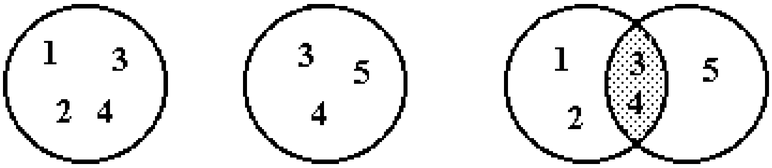
دويم:

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$
$$M = M_1 \cap M \ = \{r, l\}$$

دريم ځيره ۲ ۰ ۳ په هواره يا سطحه کې ښايي، چې الف) ګنون پردي دي



ب) يو بل سره ګډ ټکی لري



پ) اړيکی

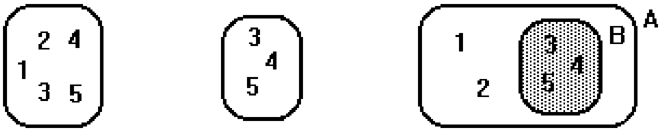
$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بيلګه:

A⊆ A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه ټکو باندې ټکي شوې ډېرۍ اصلي برخډېرۍ ده

دوه ډېرۍ، چې غوڅډېرۍ یې تشډېرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله پردۍ بلل کیږي

د غوڅډېرۍ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډېرۍ لپاره کموتاتیو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوڅیاتیو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډېرۍکارونو یا ډېرۍ عملیو یانې ټولنډېرۍ او غوڅډېرۍ لپاره دواړه دیستریبوتیو قانونونه پوره کیږي یا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د ګڼونو د شمیرکارونو یا عملیو لپاره یواځې یو دستریبوتیو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټولیزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند :

کمونډیرۍ یا تفریق سټ M_2 د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M کموالی یا فرق دۍ او

داسې یې لیکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د M_1 ډیرۍ کمه شوې

یا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډیرۍ M_1 توکي نه وي۰

لیکندود یالیکنډول :
$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A او B توپیرډیرۍ یاکمونډیرۍ یا تفریقډیرۍ له ټولو هغو توکوx جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دۍ

بیلګې :

لومړۍ : په یوه ټولګي کې M_1 د ټولو نارینه وو زده کړو ډیرۍ ده او M_2 دټولو زده کړو ډیرۍ (د نارینه وو او ښځینه وو) ، چې په شمیرپوهنه کې لس نمرې وړي۰

M_1 / M_2

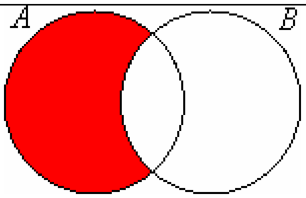
د هغو زده کړو ډیرۍ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦، ٧ ، ٨ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډیرۍ ده، چې په شمیرپوهنه کې یې لس نمرې وړي۰

که په ټولګي کې یواځې نارینه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

یا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A \backslash B$ (B بې له A) (x له A سره B اړیکې‌لري)

دویم :

$$M_1 = \{k,r,a,i\}, M_2 = u,r,s,e,l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k,a\}, M_2 / M_1 = \{u,s,a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلګي را په ګوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

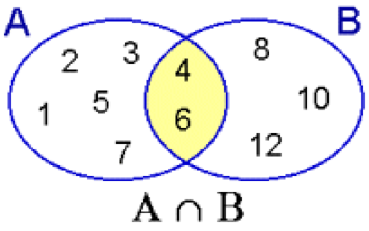
د یوې ډیرۍ یا سټ کمپلمنت یا پوره کوونکی :

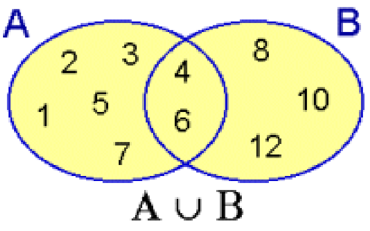
دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډیرۍ کی مو څیړلي۰ دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نورې دوه ځایزې کارونی یا عملیې دي۰

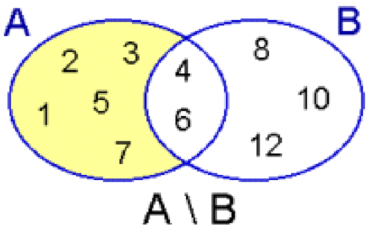
مورږ بنسټډیری په U او د ټولو هغو توکو ډیری، چېU کې پراته دي یاني دU توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یاني د M توکي نه دي پوره ډیری یا کمپلیمنت بولو او د $\bar{M}$ سره یې په نخښه کوو۰

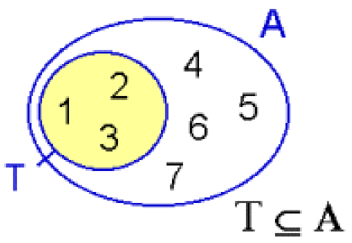
په لاندې څیره کې بیا د ډیرۍ غوڅې، - ټولنه او – کمون او برخډیرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زیات پام را اړوو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library









پیژند:

پوره کوونکی- یا تکمیلډیرۍ (یا د یوې ډیرۍ کمپلیمنت) د یوې ډیرۍ M پوره کوونکې ډیرۍ $\bar{M}$ تیک هغه توکي لري(د بنسټډیرۍ U څخه) ، کوم چې د M توکي نه وي۰

دوه ځله کمپلیمنټډیرۍ جوړول خپلې لومړنی وینا ته ځي ، یانې $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلګه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنی د توپیر او برګ کورنی اوسیږي۰ که دا دوه کورنی یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیرۍ یا تکمیلډیرۍ بلل کیږي یانې دا کلی پوره کوي۰

۲ . ٤ څیرونه mapping یا اړیکې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع كلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو٠

په دې برخه كې لومړى د ډيرئ ضرب كلمه پيژنو يا تعريفوو او بيا د ضرب كلمې كارونه څيړو٠

پيژند ۲ ٠ ۹ : د دواړو ډيريو M يو او 2 M ډيريضرب(اتيرانضرب) هم ورته وايي، يانې په x سره ځليږي يا ضربيږي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظيم يا ترتيب شويو توكو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډيرئ ده٠

بيلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظيم له مخې ځل په ډيريو كې كموتاتيو نه دئ دا په دې مانا، چې

په ټوليزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو رييلګڼونو ډيرئ وي٠ په هندسي مانا د كرښې د ټولو ټكو ډيرئ٠ RxR د ټولو رييلګڼونو جوړو ډيرئ ده، په هندسي مانا د هوارې يا سطحې د ټولو ټكو ډيرئ ده٠

پيژند ۲ ٠ ۱۰ :

د څيرونې F لاندې د دوه ډيريو د ضربډيرئ $M_2 \times M_2$ برخډيرئ پوهيږو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس د جوړه تنظيم شوو توکو ډيرۍ، چې $x \in M_1$ له يوه يا ډيرو توکو $y \in M_2$ سره تنظيم يا بهتره په باندې ځيره شي٠

داسی هم ويلی شو: د1 M توکي د2 M په يوه يا ډيرو توکو تنظيميږي يا ځيږه کيږي٠

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوريجنل يا اصلي توکی او y ځيره توکی بلل کيږي٠

د ټولو اصلي توکو ډيرۍ پيژندورشو يا تعريفورشو يا پيژنددډيرۍ يا تعريفډيرۍ بلل کيږي او د ټولو ځيږه توکو ډيرۍ د ځيږوني ډېرۍ، ارزښتورشو يا ارزښتډيرۍ بلل کيږي٠

بيلګی

$$M_1 = \{a,b,c,d\}, M_2 = \{1,2,3,4\}$$

د جدول په توګه دM يو توکو ځيږونه ونه يا ځيږه کوونه د M دوه په توکو

ځيږه توکی اصلي توکه يا ځيره کوونکی توکی

a -----------------------→ 1 , 2 ,5

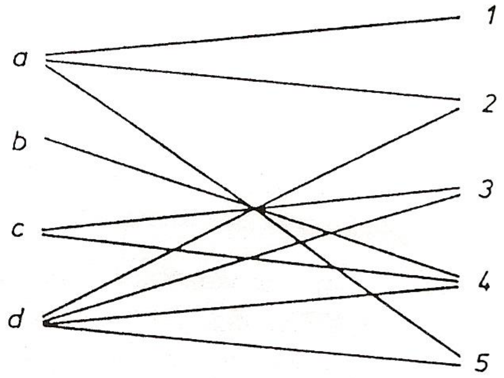
b -----------------------→ 4

c -----------------------→ 3,4

d -----------------------→ 2,3,4,5

يا دا لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځيرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

(د M يو او M دوه ډيريو د ټولو توکو جوړو ډيرۍ)

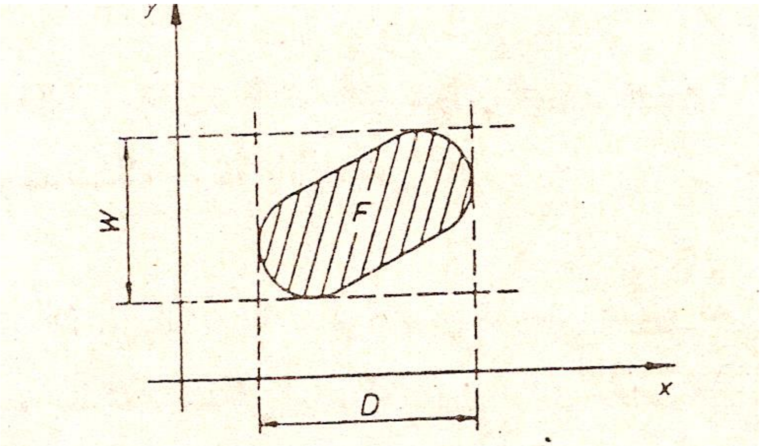


Bild 9.6 ځایره

دريم : هر پيدايښتي يا طبيعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې ځيره کيږي. داسې پيژند شوې يا تعريف شوې ځيره ونه په لاندې بڼه هم انځوريدلی شي.

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم N د پيدايښتي يا طبيعي ګڼونو ډيرۍ. پيژندډيرۍ يا تعريف- د ټولو پيدايښتي ګڼونوډيرۍ ده او ارزښتډيرۍ د ټولو جوړه ګڼونو ډيرۍ ده.

ځلورم : که M يو په يوه ښوونځي کې د ښوونکو ډيرۍ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګيو ډيرۍ وي نو ښوونکي، چې په ټولګيو کې درس ورکوي دا يوه ځېرونه ده. د ښوونکو ډيرۍ د ځانګړو ټولګيو په ډيرۍ کې

موږ د ځېره ونې ځلور حالتونه توپيروو:

پيژندونه(دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بيلګه کې په ځيره ونه F کې د1 M ، چې تعريفډيرۍ D سره برابر دۍ او M2 ، چې له ځيره ډيرۍ , W سره برابر دۍ ، توکي مو مخ ته پراته دي.

له يوې ځيرونې Fغږيږو د1 M په M2 باندې. دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دويمه بيلګه کې ، نو د يوې ځيره ونې F غږيږو له M1 په M2 کې (دلته دې

« په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د يوې ځيره ونې غږيږو د1 M په M2 کې دلته دې دريمه بيلګه په پام کې راواړل شي.

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د يوې ځيره ونې غږيږو له M1 په M2 باندې. دلته ځلورمه بيلګه د بيلګې په توګه راوړو. د دې نيونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګيو ته درس ورکوي.

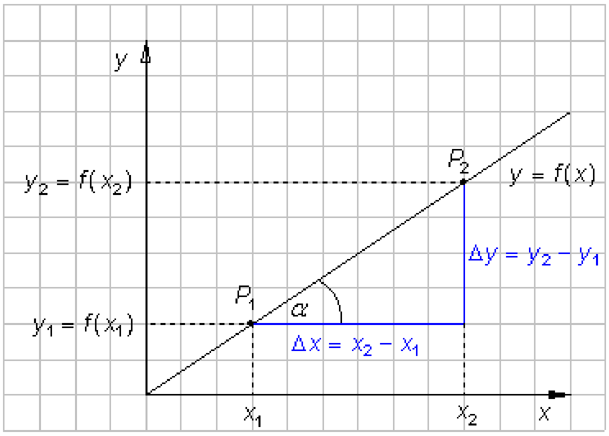
(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شايد ځيرې هم رانه شي، خو که لږ د شميرپوهنې سره بلد شو، بيا پرې پوهيدل ساده دي۰ زه مخ ته لرم، چې په دې هکله ليکلى کتاب، چې چاپ شوى نه دى دلته پر ليکه کړم، چې هلته بيا دا موضوع لږ غزيدلې ده۰

بېلګه ۲ ۰ ۵ : مونږ په هواره يا سطحه کې ځرګند شوي کړى د ډېريځل RxR په ځير د برابرونونو له لارې رانيسو(R د ريپلګنونو ډېرى د ګنګرښې ټکي دي(ګنونه دې وکتل شي))۰

الف) $y = 2x$ يوه ځيره ونه ده د R په R باندې ، ځکه چې باور لري

$$D=W=R$$



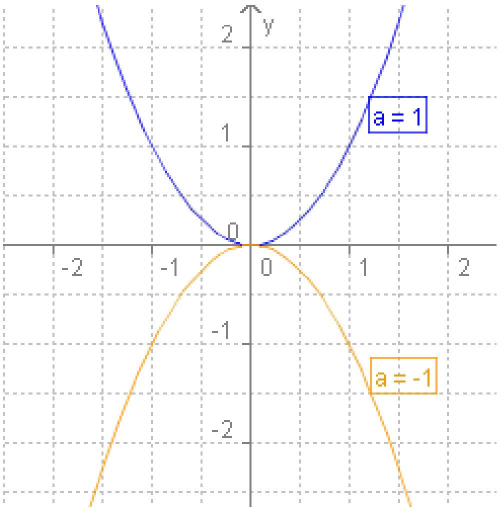
يادونه : په پورته ځيره کې برابرون $y = ax+b$ دى.

ب) $y = x^2$

يوه ځيره ونه ده د R په R کې ، ځکه چې باور لري

$$D = R,\ W = [0, \quad] \quad \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



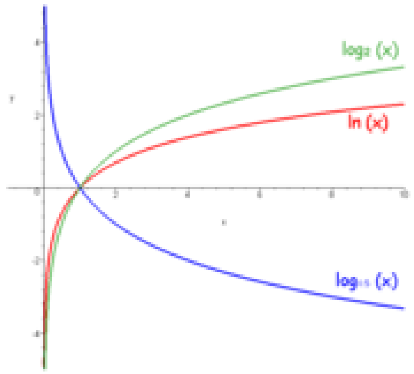
یادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ډول دی، چې b = 0 , c = 0 او a = 1 , a = -1
اینبول شوي دي.

پ) y = log x

یوه خیره ونه ده له R په R باندې » ځکه چې باور لري.

$D = (0,\infty) \wedge W = R$

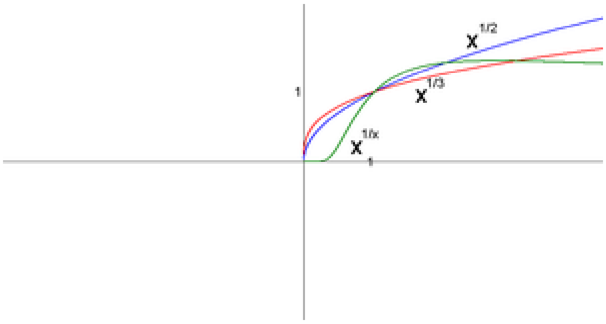


(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) $y=+\sqrt{x}$

یوه څیرونه ده له R په R ، ځکه چې باور لري

$D=W[0,\infty]$



یادونه : پورته د دويې ،دریمې او په x -مې ریښې په مانا دی

څیرې له ویکي څخه په مننه راکښته شوي دي٠

پیژند ۲ ٠

یوه څیره ونه E یواځنی بلل کیږي٠ که هر $x\in D$ په ټیک یوه $y\in W$

باندې څیره شي٠ دا په دې مانا، چې هر $x\in D$ ټیک یووار په $y\in W$

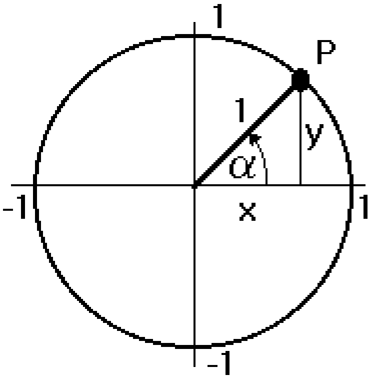
تنظیمډیرۍ یا جوړه ډیرۍ کې رامنځ ته کیږي٠ یوه یواځنی څیره ونه فنکشن

یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي٠

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنۍ څیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ٥ کې له الف تر ت پورې تولې څیروني فنکشنونه یا بلواک دی۰ د دې پر څنګ لاندې برابرون (یوونګردۍ یاني ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي څیره ۰) انځور شوې څیره ونه له R په R کې [1,1-]) D=W) فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه څیرې لري یاني که په تنظیمجوړه کې د څیره ونې لړي پرلپسې(لنډ:لړۍ) بدله شي، نو یوې پرڅنګ څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : څیره ونې F ته پرڅنګ څیرونه F^{-1} د تولو جوړو (x,y) ډیرۍ ده له سره ۰ $(x,y)\in F$

پیژند ۳ ۰ یوه څیره ونه یویواځنۍ بلل کیږي، که یواځنۍF او F^{-1} یوازنۍ څیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x\in D$ او $y\in W$ تیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د څیروني نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کووني (که څوک یو کالی یا رخت څیرېکوي)او څیره کووني توپیر، ځکه سره کیدی شي، چی هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ موږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰
ډیرۍ پوهنه د شمیرپوهنې سته ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وڅیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د يوه کتاب په څير هم وړاندې شي۰

٢ . ٥ تمرينونه

١ – د لاندې ډېرئ يا سټ توکي د شميرنې له لارې انځور کړئ

الف $\{x \mid x < 20\}$ او x لومړی عدد (لوستل: د ټولو عددونو x ډېرئ يا سټ، چې x لومړنی عدد او $x < 20$ دی).

ب- $\{x \mid x^2+x-6=0\}$

پ- $\{x \mid x > 0$ او $x^2+x-6=0\}$ دا په نوکانوکې ټول له کيڼ ښي لور ته لولو

ت) $\{x \mid x$ رييلګڼ او $x^2+1=0\}$ دا ټول له ښي کيڼې لور ته ولولی

٢ – د توکو x, y, z اړلرونوالی و ډيري M ته وښيئ !

الف) M د لمړنيو ګڼونو ډيرئ

$$x = 4 , y = 5 , z = 6$$

ب) M د لاندې مساواتو حلډيرئ (اوبيلډيرئ)

$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x = 0 , y = 2 , z = 3$$

پ) M د ريشنلګڼونو ډيرئ چې په اينټروال [3 ,3-] کې پراته دي

$$x = -2 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 1/3$$

ت) M د رييلګڼونو ډيرئ چې په اينټروال [3 ,3-] کې پراته دي

$$x = -4 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 3$$

٣ – د لاندې ډيريو ترمنځ کومې اسړيکې پرتې دي

الف) M_1 د ټول جفت ګڼونو ډيرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

او M_2 د ټولو ټولګټونو ډيرۍ

ب) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$, حلونو (اوبيو) ډيرۍ

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ) M_1 د ټولو ګنو ډيرۍ چي پر ۶ ويشل کيږي.

او M_2د ټولو ګنونو ډيرۍ چي په ۳ ويشل کيږي !

او M_3د ټولو ګنو ډيرۍ چي په ۱۲ ويشل کيږي!

۴ – د ډيرۍ $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډيري ورکړی!

۵ – د لاندي ډيريو څخه ټولنډيرۍ ، غوڅډيري او دواړه ټوټډيري جوړ کړی !

الف) $M_2 = \{m,a,u,l,t,i,e,r\}$, $M_1 = \{ k,a,m,e,l\}$

ب) $M_2 = \{ 3 ,6 ,9, \ldots \}$, $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$

پ) $M_2 = \{x \mid x^2-3x+2 = 0\}$, $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0\}$

۶ – د يوه ډيرۍ M او د تشډيري $\emptyset$ ټولنډيرۍ، غوڅډيرۍ او توپيرډيرۍ جوړ کړی!

۷ – د يوه ډيرۍ M او خپل همدي ډيرۍ ټولنډيرۍ ، غوڅډيرۍ او توپيرډيرۍ جوړ کړی!

۸ – وي دي $M_2 = \{ 3 , 6 , 8\}$ $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$

$M_4 = \{ 6 , 12 , 18 \}$, $M_3 = \{0 , 2 ,4 ,6 \}$

جوړ کړی : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$!

۹ – جوړ کړی

الف) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ) $M \setminus \emptyset$

ب) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$
$$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$$
$$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\},\ M_1 \setminus M_2 = \emptyset$$

له دې پورته څخه M_1 او M_2 وټاکی !

۱۱ – وي دي

الف) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ب) $M_1 \subset M_2$,

وټاکی: $M_1 \setminus M_2$!

۱۲ – وي دی M_1 , M_2 (د نيمواز) اينتروال تکي ډيري:

$$M_1 = \{-3 , 3\} , M_2 = [1 , 7]$$

وټاکی

الف) $M_1 \cup M_2$ ب) $M_1 \cap M_2$ پ) $M_1 \setminus M_2$

ت) $M_2 \setminus M_1$ ټ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دي $M_2 = \{\{a , b\}$, $M_1 = \{1 , 2 , 3\}$

الف) د $M_1 \times M_2$ څل جوړ کړی

ددې لاندې ب) تر ت) برخی تمرين لپاره دي ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول څيرونی دي

$$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$$
$$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$$
$$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\} ,$$
$$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$$
$$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$$

په ټولو حلنونو (اوبيو) کی F_1 تر F_5 ورکړی .

پ) په څټ څيرونه ورکړی

ت) د څيرونو F_1 څخه تر F_5 پورې، کوم يواځنی او کوم حتی يويواځني دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . دحقیقي اعدادو (-ګڼونو) سره د شمیرلو بنسټیزې نښلونې

(ترڼی، کارونی یا عملیي)

۳ . ۱ د اعدادو د سیستم جوړښت

۳ . ۱ . ۱ طبیعی اعداد یا -ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتیا درلوده٠ له دې امله یې پرمخ ودیینه کې هڅې وکړې، چی له ډیری (سیټ) (د لیکنې په دننه کې ډیری پوهنه هم څیرلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چی دا ډیری تشریح کړای شي او د انسانانو او چاپیریال(طبیعیت) د پرلپسې اخ او ډب په نتیجه کې د ګڼ یا عدد وی(کلمه یا لغات) راپیداشوی، چې د عدد یا ګڼ کلیمې پربنسټ د رینتینو شیانو څرګند څومره والي (کمیت)Quantitative ترلاسه کړي٠ د طبیعی اعداد و څخه په ګڼلو یا که غواړې شمیرلو کې ګټه اخستل کیږي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ الف د طبیعي عددونو(پیداینبتي گنونو) جوړښت

پیژند (تعریف)۳ ۰ ۱:

الف) ټول طبیعی اعداد د ډیری په څیر یوه ټولګه جوړوي او د طبیعی اعدادو ډیری یا سټ په نامه یادیږي یا یې طبیعی اعداد بولو او په N او همداسې °N سره یې په نخښنه کوو۰

ډیر پای طبیعي اعداد شته ، ځکه چې په هر طبیعی عدد پسی راتلونکی طبیعی عدد هم شته دی (یعنی په هرڅومره لوي طبیعی عدد پسی راتلونکی طبیعی عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کیږي)۰

ب) دطبیعي ګڼونو(اعدادو) اکسیوماتیکيAxiomatic جوړښت

اکسیوم جمله ده، چی اوبیونه (حل) نه غواړي او همداسی منل کیږي۰ دا چی جمله ، اکسیوم څه دي په لومړی برخه یانې سم اند (منطق) کې دې وکتل شي۰

طبیعی عدد کلمه د جیوسیپې پیانو(Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز۰کال) اکسیومونو پر بنسټ لاندې پیژند لري یا په لاندې توګه تعریف کیږي:

۱ – د صفر ګڼ یو پیداینبتي ګڼ دئ

۲ - د هرطبیعي عدد یا ګڼ m لپاره یو یواځنی ټاکلی طبیعي عدد n شته، چې سملاسي(ترلی) د m پسی ګڼ دئ، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^\wedge$

دلته $m^\wedge$ د m پسې سملاسې یا ترلی ګڼ یا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبیعي عدد زیات له زیاته په یوه طبیعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دئ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ – هيڅ طبيعي عدد نه شته، چې پسې راتلونکی پيداينښي عدد يې صفر وي.

٥ – که طبيعي عددو ډېرۍ M صفر د توکي په څير ولري او که له هر طبيعي عدد m سره د هغه پسې تړلی راتلونکی عدد يا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبيعي عددونه خوندي لري يا په بل ډول » ټول طبيعي اعداد په کې ځاي دي.

يادونه: ځنې ادبياتو کې، د پيانو سيستم کې، د صفر په ځای ۱ ليکل شوی. په دې حالت کې بيا صفر ته د طبيعي عدد يا ګڼ په څير نه کتل کيږي. که بيا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبيعي ا عدادو ډېرئ يا –ستې يې د صفر سره بولو.

۱ . ۱ ب : د طبيعی اعدادو يا ګڼونو انځورونه او سيستمونه:

طبيعي اعداد په نخښو (دې ته په الماني کې Zifferوايي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څيرو، دی) انځوريږي. د دې لپاره چې دا لړ ځای ونيسي، نو د لويو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنيو سره يوځای کيښول شوې دي. دا چې څرنګه يوه د عدد يا ګڼ نخښه له بل توپيريږي، په لاندې ډول يې د زياتون يا جمعي سيستم او ځای سيستم کې ښايو.

په زياتون سيستم کې هر بنسټيز ،،ځای،، يو ،، ځای ارزښت،، لري. د څيفرونو زياتون د يو په بل کې د ورزياتشوي بنسټيز څيفر پخپله هغه عدد يا ګڼ ورکوي. بيلګه يې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنسټيزو څيفرونو جوړ شوی(ترې لاندې لسيز د اعدادو سيستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څيفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پيل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

رومي عددونه:	M	D	C	L	X	V	I
عربي عددونه:	1000	500	100	50	10	5	1

طبيعي عدونه له دې امله يو د بل ترڅنګ ليکو چې کم ځای ونيسي لکه د بيلګې په توګه:
CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کې، که بنسټيز کوچني ګڼنخښې لکه C , V , I د لوي ګڼنخښې و کيڼ لور ته وليکل شي نو دا مانا لري چې دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی.
د بيلګي په توګه: XC = C - X .

بيلګې: **الف:** MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768

ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځايسيستم: په ځاي سيستم کې هره بنسټيزه نخښه يو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئيز ځاي سيستم (پوزيشن سيستم (Positionssystem)): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئيزځای سيستم کې په دې ډول ده چې د يوه ورکړشوي ستې په بنسټ(g ∈N) $g \geq 2$ هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوريدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + ... + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټيزې ګڼنخښې a_i، g د $i = 0,1,2,...,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چې $a_k \neq 0$ وي په کار راځي يا اړتيا ورته شته.

ليکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} .....a_1 a_0$$

که د بدليدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کيږي، نو بهتره به وي چې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندي ډول وليکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کي ګڼل په لسيز سيستم (ګڼځای ارزښت) باندې کيږي، چې تل داسي نه وه. لکه په افغانستان کي چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسيز سيستم کی ګڼځای «ارزښت» لري چې انځور شي، مګر په لرګی کی ځای ارزښت نه لري چې کرښه چيرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون يا تعداد څخه پور څرګنديږي.

بل د ګڼلو سيستم . لکه د مخه مو چی تر پام لاندې ونيوه، د ګڼلو رومي سيستم دی چی نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډك، زياتونسيستم(جمعی –) څرګنديږي.

بيا هم غواړو چی دا په لاندې ډول ځانګړی کړو:

۱ – هره لاندې نخښبه I, X, C کړای شي چی زيات ترزياته ۳ ځله(۳ واری) په يو ګڼ کی پرله پسی يا څنګ تر څنګ راشی

۲ – هره، د ګڼ نخښبه V, L, M خورا زياته يو ځل څنګ تر څنګ په يوه ګڼ کی راتلی شي.

۳ – که بنستيز نخښبه I, X او يا ....__-- ددې نخښبو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښبو V, X, L, C, D يا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې يا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کميږي .

زياتون او کمون (جمعه او منفي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – په هرګڼ انځورونو (Zahlendarstellung) کی کیدی شي چې یواځې یو بستيز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: 1098 = MXCVII مګر نه IMIC
۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمې نخښې په کار واچول شي.

عربي ګنونه : دا ګنونه، چې موږ ورسره بلد یو، د لسيز سيستم ګنونه دي، چې عربي ګنونه بلل کيږي. دا د ګڼلو لسيز سيستم عربو د هند څخه راوړی چې په دولسمه پيړۍ کې يې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګنونه له صفر (۰) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر 9 پورې، چې

ځيفر ورته واي (همغه عربی صفر دی) چې دلته ترې بنستيز ګنونه پوهيدل کيږي.

لکه چې ګوته مو ورته ونيوه زياتونسيستم نور ارزښت نه لري، څکه چې د یو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښی زياتون باندې انځور کيږي. د ځای سيستم سره د ګنونو انځورول ساده دي.

تعريف ۱ . ۱ ب : په يو «ځاي ارزښت سيستم» کی هغه ګڼ لوي دی چې زيات ځايونه ولري، که چيرې د ګڼ د ځايونو شمير سره برابر وي (مساوي وي) نو هغه ګڼ ستر دی چې له کيڼی لورې يی نخښنه لويه وي.

لسيز – يا لسګونی سيستم: لسيز سيستم هغه ځای ارزښت سيستم دی چې له انځورونی يی څرګنديږي. په لسيز سيستم کی د ګڼ انځورولو نخښی، لکه د مخه مو چې انځور کړې، ۹،۸،۷،۶،۵،۴،۳،۲،۱،۰ دي. ۱۰ ګڼ د لسيز سيستم بنستيزه نخښنه ده. دا چې نور ګنونه نه انځوريږي، نو ځای هلته ډك دی چې پرله پسی (ترتيب يانظم)
د ۰ تر ۹ يعنی له 0 تر 9 ګنونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پسې جګ ځای يوون (واحد) د په کار اچول شووګڼخښنو ګڼون (تعداد يا شمير) دی، خمور په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونيوله، د پای (نه لايتناهی) ډيري (set , die Menge) ((امه برخه دې وکتل شي)) غړو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفايت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او ۹ داسی نور. تولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډيری N ويل کيږي. ددې لپاره ليکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, ...\}$$

موږ ګڼونه په کوچنيو لاتينی ټکو يا حروفو ښايو لکه a ,b,c, ... n . دا رېښتوني

(رېښتينوالی يا واقعيت) چی n دې يو طبعي ګڼ وي، داسی ليکل کيږي $n \in N$ يا $n \in N^*$ (ويل کيږي چی: n د طبعي ګڼونوډيري N يا*N توکی دی(لنډ n د N يا *N ځخه دی)) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (ځيفر) توپير ته پام وي.

موږ دګڼونو ټاکلو لپاره بلد يا اشنا د نځنبډيري لسيز سيستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نځنبو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول يو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}\,.10^{n-2} + ..+ a_2\,.10^2 + a_1.10 + a_0\,10^0$$

$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو ځيفرونو ډيري هم انځوريدی شي. د بيلګي په توګه په اينفورماتيك (Infrormatik) کی، چی د دوالسيستم (Dualsystem) (دوئيز سيستم) ځخه کار اخستل کيږي. ددې لپاره دوه ګڼځښبي (ځيفرونه) ليکل کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسیز او دوه ئیز سیستمونو لمړني ګڼونه یو د بل ترڅنګ کښل شوي:

دوه ئیز سیستم	لسیز سیستم
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4

په ټولیزه توګه(عمومي توګه) دلته یو څیفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ یو طبیعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_na_{n-1} \ldots a_2a_1a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 , \; a_i \in N$$

بیلګه ۱ . ۱ :

$$59 = 1.32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$$
$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

یا دونه :: څه لنډ لنډیزونه

د طبیعي اعدادو ډیرۍ یا سټ داسی په نخښنه کوو:

د پیدایښتي یا طبیعی ګڼونو ډیرۍ $N = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$

دپیدایښتي ګڼونو ډیرۍ د صفر سره $N^\circ = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ه کتابونو کی دا د صفر نخښه په لاندې برخه کی راځي۰

۳ ۰ ۱ ۰ ب د طبیعي اعدادو یا ګڼونو انځورونه:

طبیعي اعداد په نخښو انځوریږي۰ دا عددونه یا ګڼونه د ځان لپاره یو سیستم لري، چی هغه زیات یې موږ نه څیرو۰ زموږ لپاره غوره هغۀ عربی اعداد یا ګڼونه دی۰

یا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد یو د لسیز ځایستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل۰ دا کورونه (خوني یا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نیوی شي او بیا یې هر ځاي یو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سیستم« دی۰ لومړي کور ته یویز، دوم ته لسیز، دریم ته سلیز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي۰

انځورونه یا څیفرونه یې دي : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټیز ګڼونو نخښی دي، نور یې په کورونو یا ځایسیستم باندې روښانه کیدی شي۰

پیژند ۳ ۰ ۱ ۰ ب :

په یو» ځاي ارزښت سیستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډیر ځایونه ولري۰ که چیرې د ګڼ د ځایونو یا کورونو ګڼون (تعداد) سره برابر وي۰ نو بیا هغۀ ګڼ لوي دی، چی کیڼ لور یې ګڼنخښه لویه وي۰

۳ ۰ ۱ ۰ پ : طبیعي اعدادو کې د شمیرنې بنسټیز قوانین

اوس په لاندې ډول د پیدایښت ګڼونو، په ټولیزه توګه د رییل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري(معتبر) بنسټیز د شمیرنې قوانین وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : د انډول (نظم یا ترتیب یا لوي واړه ترتیب(Anordnung) بنسټيز قوانين:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کی یا د نخښی خوله کی عدد یا ګڼ لوي دی او د وتلی کونج یا لوي کونج >که نخښه یا داسی کونجکی یا څټ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دی۰ که ګڼونه یا اعداد ١٥ او ٢٣ ولرو نو د لویواړه اړیکی داسی لیکو، یانې که 15 < 23 ولرو نو ترې څرګندیږي، چی عدد١٥ له عدد ٢٣ کوچنی دی .

د دوه طبيعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړيکو څخه ټيک یوه اړيکه باور لري»

$a < b \quad , a = b \quad , a > b$

٢ ـ ٢١ =٢١ که د ٢١ په ځاي توری ولیکو هم a = a به وي اينه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ريفليکسيويتي Reflexivity)

٣ – له a = b => (لاس ته راځي) b = a (سيومتري، انډول، ورته وابي (Symmetry)

د انعکاسي (اينه ونيز – یا هندارونيز) برابروالی یانی که چيري دا عددونه ورباينه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابريږي۰ که انعکاسي(اينه ونيز)برابر نوم ورته کيږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به يې همغه سيومتري وبولو۰

٤ ـ له a = b او b = c => (لاس ته راځی) a = c (ترانزيتيوTransitivity)

ترانزيتيو ګورو، چی یو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، څکه چی دا ګڼونه يو د بل سره په واکوالي تړلي یا له يو څخه وبل ته ځی یا وړل کيږي۰

٥ – له a < b اوb < c => (لاس ته راځی) یا a < c یا $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

وړانديز : که چيری دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتين نومونو وليکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به وي، خو له شمیرپوهنی پرته مانا باندی یې هم پوهیدنه ښه او اړینه ده۰

ب : د زیاتون (جمع) Addition n. بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو ، دوه یا څو ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیداینښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه(عملیه) «زیاتون یت جمعه » بولو، ځکه، چې ګڼونه یو په بل زیاتیږي۰

پیژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون (جمع) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی یا

۱۰ + ۱۸ = ۲۸

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتیږي، نو له دې امله یې «زیاتېدونی» (ما تراوسه زیاتووني بللي، خو فکر کوم،چې زیاتیدوني یې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کیږي ۰ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وایه ۰ + زیاتوننخښه ده او = برابروننخښه (مساوات علامه) بولو

دجمعې یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو a او b لپاره تل یو زیاتون (جمع) a + b شته دی

۲ - یواځنوالی : له a' = a او b' = b څخه لاس ته راځي: a'+b' = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAWکموتاتیو- یا بدلون قانون دی:a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوځیاتیو - سره ګډېدنې قانون. لرو (a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – یا همغږیزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $a < b$ څخه لاس ته راځي $a+c < b+c$

يادونه : په $a+b=c$ کې a او b زياتېدوني $a+b$ زياتون او c زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه : په زياتون کې لاندی زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپيلی توکی: په N° کی يو توکی شته، چی که د هرپيدايښتي توکی سره په زياتون يا جمعه کی ور زيات شي همغه توکي ورکوي۰ دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپيلی توکی کړی شو نالوريز وبولو ،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولی يا د زياتون ارزښت همغه پاتيږي، همداسې ناړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې وبولی۰

پ : د کمون (تفريق)Subtraction بنسټيز قوانين

پيژند:د پيدايښتي ګڼونو a او b لپاره، چې $a>b$ وي، يواځی يو x شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو ټيک يواځني شته دي(موخه x دی)

نومه ونې: b کميدونی يا مفروق (تراوسه مې کمونی بللی) a ترې کمونی يا مفروق منه $a +b$ کمون او x کمون- يا تفريق ارزښت بلل کيږي يا بولو :

موږ پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونخښی ليکو، چی ساده يې ونومو:

$20 – 10 = 10$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کی موږ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه یې ۱۰ ده، نو له دی امله یې داسی نوموو:

تر مخ یادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، ځکه، چی ترې کمیږي(ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کموونی« یا کمیدونی(ع۰ مفروق) دا بل لس یې «کمون ارزښت» یا د کمون لاس ته راوړنه(لنډ: لاس ته راوړنه یا کمون) (ع ۰ حاصل تفریق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

ت : د ځل (ضرب) Multiplication بنسټیز قوانین:

۱ - د دوه پیدایښتي ګڼونو a او b لپاره د پیدایښتي ګڼونو په ډیری کې تل یو ځل a.b شته دی. د a.b لپاره داسې هم لیکو ab په پورته کې a او b ځلووني (ضریبونه) او ab=x « ځل ارزښت » یا ځل(حاصل ضرب) دی۰

وایي چی ضرب وهلو ته وایي او د جمع (که جمعي) لنډه طریقه، چی۰۰۰۰وي یا د زیاتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پیژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راویستلي وي۰

که ووایو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کیلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

لیکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کیلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضریبونو څخه به هم ځلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له a = ´a او b = ´b څخه لاس ته راځي a´b´ = ab (یواځیتوب)

۳ - لرو ab = ba کموتاتیو – یا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوشیاتیو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ویشونې- یا دیستریبوتیو قانون Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګتیتوالي یا یوغږیزوالي قانونMonotony

ټ – د ویش بنستیز قانون Division

پیژند٣ ٠ ٢ :

که د دوه طبیعي عددونو a اوb لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانی صفر نه وي یو طبیعي عددx شته، چی برابرون (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا b/a د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چی ماتګې(کسر) یې هم بولو

١ – که $a / b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي ، نو یواځنی شته دی(یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ویش ارزښت، b ویشونی یا ویشه وونی دی، ځکه چی په یوځه ویشل کیږي او a پرویشونی بلل کیږي، ځکه، چی څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم ، حاصل تقسیم ۰

ګورو چی له قاسم یا مقسوم او همداسی د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- یا پرې ویشونی ، ویشه ونی اوویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهوړ دي، خو په خواشینی به وه وایم، چی تراوسه په شمیرپوهنه کی ورسره نابلد یو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وویشو، نو هر یوه ته درې کتابچې رسیږي۰ ګورو، چې ۱۲ په یو څه ویشلکیږي، نو ویشونی یې ښه نوم دی۰ دا ۱۲ په څلور ویشل کیږي پر ۰۰۰ ویشل کیږي، نو له دې امله څلور پر ویشونی بولو، درې یې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسیم وایه، له دې امله ورته ویش ارزښت وایو او دا کارونه یا عملیه خو ویش بلل شوی۰

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ تولګنونه یا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبیعي عددونوa او bکمون یا تفریق (x= b-a) تیک او تیک هلته یا هلته او هلته د طبیعي عددونو ډیری یا سټ کی شته، چې وي : $a \le b$

د شمیرپوهنې نخښو باندې داسې لیکل کیږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \le b$$

انګریزي یې if and only if تیک او تیک هلته یا هلته او هلته(دا شننه یا وینه پورته د شمیرپوهنې نخښې ته ده)۰

که هغې نخښې ته وګورو، نو هم لاندې ترې څرګندیږي، له ښی لور کیڼ لاس ته راځی او په څټ(برعکس) له کیڼ لور ښی لاس ته راځی۰ یا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځی او په څټ۰

تولګنونه یا تام اعداد هم د انسانانو د اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي ، یا منځ ته راوړل شوي۰که چیرې سپین د خړ ۱۰۰ افغانیپوروړی وي او سپین ورته اتیا افغانۍ ورکړي، نو سپین بیا هم شل افغانی پوروړی پاتیږي، دا په دی ما، چی ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ ګورو، چی ۲۰ – یو پیداینتي ګڼ یا طبیعي عدد نه دی۰یا $80 - 100 = -20$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترېکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه يې طبيعي عدد نه دی۰ اوس يوه د اعدادو بلې ډيری پيژند ته اړ کيږو، چی هغه د ټولګڼونوډيری ده او دا د طبيعي عددونو او د طبيعي عددونو کمي(منفي) او صفر سره يوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي(په ډيری کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګڼونو ډيری ده او داسې يی ليکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots \}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پيداينښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو يا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پيداينښتي ګڼونو مخنخښه په کموننخښه يا منفي نخښه باندې سنبالوويانې (کيدی شي زموږ هيوادوال د څټ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زياتی يا کمی ښايي د ګڼ کيڼ لور ته ليکل کيږي، چې دا ما مخنخښه ليکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شميرقوانين په Z کې هم باور لري

د ټولګڼونوډيری

$$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

د مخه مو شميرقوانين، چې د پيداينښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګڼونو لپاره هم باور لري

د کمون يا تفريق بنسټقوانين (پسی يا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګڼونو يا تام اعدادو a او b لپاره يو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چیa+x=b برابرون باوري دی

د ويش تيوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجز یې لپاره خورا ګټور دئ باور لري

الف) یو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦) ویشونی دئ، که د اخر ځیفر یا کور (له اخره(موخه تری ښی لور دئ) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنستیزو ځیفرونو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦ ۰۰۰ویشونی وي) په دوه ویشونی ګڼ جوړه (جفت) نومیږي او بل ډول یی ناجوړه(طاق) بلل کیږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهیدلی شو

ب) یو ګڼ په ٥ (٢٥ ، ١٢٥ ، ٦٢٥ ، ۰۰) ویشونی دئ، که د اخر(له ښي لور) بنستیز ځیفر (د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنستیز ځیفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ (٢٥، ١٢٥ ، ٦٢٥ ۰۰۰) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وایې او موږ یې شاید لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ ولیکم، خو بیا دې هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دئ ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي۰

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنستیز ه ګڼونخښو(ځیفرونو) زیاتون پوهیږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونیول شي۰

بیلګۀ : د 126 پروت زیاتون یا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت) یو ګڼ په 11 ویشونی دئ که د هغه ګڼ الترنیري(نخښه بدلونکی) پروت زیاتون۰ پر 11 ویشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

الترنيري پروت زياتون، چی پروت کمون هم ورته وايی له بنستيزو ځيفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زياتون څخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ،۰۰۰ زياتون کمون پوهيږو ، بی له دې، چی ځاي ارزښت يې په پام کی ونيول شي يا په بل ډول، که د ناجوړه کور زياتون څخه د جوړه د زياتون کم کړو۰

بيلګه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ويشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چی الترنيري زياتون يانی ۱۱ = ٤ – ۱۵ يې په ۱۱ ويشونی دی۰

ټ) يو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که (د ګڼ له اخر څخه جړ.ړشوي) د درېګوني ګڼونو زياتون پر ۳۷ وېشونی وي.

بيلګه:

37|20216352448 ځکه چې 37|1036 ⇔(20+216+352+448)|37

ث) يو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ويشوړ دی، که د هغه (د ګڼ له لخ څخه جوړ) درېګونی الترنيري زياتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشونی وي.

بيلګې : 37604 | 7 ځکه چې 567 | 7 ⇔(604-37)|7

13 | 9679293889 ځکه ، چې 13|1209 ⇔ (889-293+709-96) |13

ج) يو ګڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر څخه جړشوی) دوهګونی الترنيري زياتون په ۱۰۱ وېشونی وي.

بيلګه:

101|7930630669 ځکه چې 101|202 ⇔(79+03-63+06-69)|101

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : که پیداښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت يې هر ګڼ وي او که پېداښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ویشي بې له پاتي یانې ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دی.

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ت) خوراغټ ګډ پرویشونی او خورا کوچنی ګډ زیاتځله

یا بزرګترین قاسم مشترک و کوچکترین مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرلیک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دي ورکړ شوي وي، سملاسي یې په لومړنیو ګڼونو توټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنیوګڼونو ځله وونو هر یوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانیسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان(په خپل ځای کې دې وکتل شي) یا جګګڼ بې ټیټ یا کم وي . یانې

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ یانې ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي یانې د دواړو ګڼونو پروېشونی

دی او خورا غټ پروېشونی هم دی. یانې ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پروېشونی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ : ۵۲ د یورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دی.

داسې ګڼ ، خوراغټ ګډ پروېشونی، بولو (لنډ ونه یې : غ ګ و)

هغه ګڼ، چې د دوه یا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته خورا ,,

غټ ګډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ ګ و) وایو. یا

(بزرګترین عامل (مقسوم علیه) مشترک)Greatest commom divisor(g c d)

اوس بیا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله ووني، له هر څخه یو چې په جګ توان وي

یانې خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بیا یې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ یانې ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زیاتځله دی (یانې ګډ په دواړو

وېشل کیږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دی. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زیاتځله(څو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (یانې ګډ) زیاتځله (ګډ څو واره) دی

لنډ یې : خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډونه یې: خ ګ ځ) یا
(کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالاضعاف الاقل)Least common multiple(l.c.m.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران هيوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر يا بيخي پوهوړ او ساده وي.

وړپسې داسې مخ ته ځو:

دا چې موږ په پيدايښت يا طبيعي ګڼونو کې له شميرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پيژند ورکوو:

پيژند(تعريف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې ټولګڼونه وي۰ وايو چې « ګڼ a ګڼ bويشي» (او يا هم a د bپروېشونې دئ او يا همa د b څو برابره (زياتځله) دئ) که يو ټولګڼ u شته يا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره ليکوa|b (وايو، چې ګڼ aګڼ b ويشي ، خو اړيين يا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼ ورسره وويل شي۰

که a د bپرويشونی نه وي، نو د دې لپاره ليکوa|/b(دا نخښه /| دې د نه ويشونی لپاره ومنل شي)

بيا ليکو، چې : پيدايښتي ګڼونه، چې په ۲ ويشل کيږي جوړه (جفت) ګڼونه بلل کيږي او که نه نو ناجوړه (طاق) ګڼونه بلل کيږي۰ د صفر ګڼ د پيدايښتي ګڼونو په ډيرى کې يو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې يا اوبيونې د دې ويشکلمی لپاره يو څو ساده شميرقاعدې را يوځاي کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کيږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه يا زړه پورې ټولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

(۱) 1 $\pm$ او a$\pm$ ويش (دا په نامه « ساده» پرويشوني دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۲) د ۱ پروېشونی ۱ او ۱ - دي

(۳) تل باور لري، چې 0 | a او a | 0 یوائی په هغه حالت کې باور لري، چې a = 0 وي

(٤) له a|b او b|c <= a|c

(٥) له a|b لاس ته راځي: ac|bc ۰که c |= 0 وي ، نو د دې په څېټ هم باوري

دي۰ دا په دې مانا چې، که ac|bc وي، نوa|b هم باور لري۰د ګڼونو

لیکدود له مخې، که نړیوالجال ته پورته شو داسې لیکو، که نه دا پورته بسیا

کوي: $c \neq 0, a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$

(٦) لهa|b او c|d څخه لاس ته راځي او په څېټ ac| bd لنده لیکنه یې(که نج ته پورته شوه): $a \mid b, c \mid d \Leftrightarrow ac \mid bd$

(۷) له a | b او b| a لاس ته راځي $a = \pm b$

(۸) له a |b اوa|c څخه لاس ته راځي a|(bx+cy) د ټولو ټولګڼونو x او y لپار

(۹) ټیک هلته a|b کله چی وي|b| | |a|،

(۱۰) که a | b او b = 0 نه وي نو باوري دي - | b| < a < |b|

حل (اوبی) : (۱) له a1 = (-a)(-1) = a لاس ته راځي

(۲) له a0 = 0 لرو a | 0 . که وي a | 0 , نو یو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چی وي a = 0u

او له کومی چی لاس ته راځي a = 0 .

(۳) ساده دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۴) که a | b او b | c , نو تږولګنونه u او v د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دې لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس $a | c$.

(۵) که a|b ، پس يو تږولګن u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$ سره، د کوم څخه چی لاس ته راځي ac | bc . د $c \neq 0$ لپاره دا اخرڅنځیر په څټ کيدی هم شي.

(۶) د a|b , c|d او (۵) څخه لاس ته راځي چی ac|bc او bc|bd ، د (۴) له مخی ac | bd .

(۷) د a | b او b | a څخه د تږولګنونو u او v موجوديت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره. برسيره پر دې لاس ته راځي $a(uv) = a$, پس $a=0$ يا $u=v=\pm1$. په لمړي حالت کی د a | b له امله $b = 0$, پس $a = b$. په دوم حالت کی $a = \pm b$ دی.

(۸) د تږولګنونو u , v لپاره دي $au = b$ او $av = c$ ، نو له دې $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځی، پس $a | (bx+cy)$ د تږولو تږولګنونو x او y لپاره.

(۹) وي دې a|b . له a | b ، a| |a| او |b| | b څخه او د (۴) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چی |b| | |a| . په څټ: که |b| | |a| باورلری، نو د |b| | |a| ، |a| | a او b| |b| څخه په ورته ډول لاس ته راځي a | b .

(۱۰) دی a | b ، پس د (۹) هم |b| | |a| . که $b \neq 0$ وي ، پس يو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چی $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

که b|a د تږولګنونو a,b لپاره د $b \neq 0$ سره، نو يو يواځنی معلوم ګڼ q شته (د a او همداسی د b «کومپليمنت پرويشونی» بلل کيږي)، چی لرو $a = bq$.

په تړلیزه توګه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۳ ۰ ۲ (د ویش الګوریتم): a اوb دې تولګنونه وي۰ د $b \neq 0$ سره ۰ نو یواځني تاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شمیرلکیدونکي تولګنونه q اوr (چې د a پرb ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتی بلل کیږي، شته دی،د کومو لپاره چی باور لري: $a = bq + r \ \wedge \ |0| \leq r < b$

هر یو تولګن کم له کمه ساده پرویشونی لري یعنی ± 1 او پخپله د دې تولګن زیاتیز(مثبت) او کمیز(منفي)۰ دې پرویشؤنو ته «سادهٔ پرویشونی» وایو۰

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو تولګن، چې یواځی او یواځې ساده پرویشونی ولري موږ ورته لومړنی ګنونه وایو او دا لومړنی یا پریم ګنونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړی ګڼ د پیدایښتي ګنونوتوکی دی۰

هریو تولګن، چی لومړنی ګڼ نه وي د لومړنیو ګنونو په ځلونو(ځله وونو)(ضریبونو) توټه یا تجزیه کیدی شي۰

بیلګی :

1 - $240 = 24 \,.\, 10 = 3 \,.\, 8 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2^4 \cdot 3 \,.\, 5$

2- $2310 = 2 \,.\, 1155 = 2 \,.\, 3 \,.\, 385 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 77 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11$

$3750 = 25 \,.\, 15 \,.\, 10 = 5 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^4$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګنونو کی ګڼ ۲ د دواړو پر ویشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګنونو پرویشونی دی یانی $2.3 = 6$ برسیره پردې ګڼ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګنونه ویشي او شاید په دې ګنونو کی یو خورا غټ ګډ پرویشونی هم وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته درېواړو بیلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په ځیر خوندي دي یانې دا ګڼونه ویش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګڼونو غ۰ګ۰پ دی

پیژند ۳ ۰ پ :

a او b دې ټولګڼونه وي او d دې یو مثبت یا زیاتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2) t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرویشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کیږي d لپاره داسی لیکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرویشونی(لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کیږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a او b پروېش پردي بلل کیږي یانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر وویشل شي.

یادونه : په زیاتو ادبیاتو کي لنډونه په درېتورو کیږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرویشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

یادونه: ما د خورا غټ ګډ پرویشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړاندیز لري، نو زه یې ضرور په پام کی په پوره خوښی نیسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبیاتو کي بزرګترین قاسم مشترک او کوچکتریب مضرب مشترک وایي او ذوالاضعاف الاقل یې هم بولي۰

یادونه : که چیرې d او *d دواړه د a او b غ ګ پ وي، نو له پورته پیژند څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی $d^* \mid d$ او $d \mid d^*$ ، نو د $d \geq 0$, d^* له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله به وښايي ، چې داسې غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ ۰ ۳ :
په خوښه ټولګډونو a اوb لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو ټولګډونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل(اوبې): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون (په پام کی دې وي چی د (a , b) تعریف په a او b کی سیومتریك دی) له امله اجازه لرو چی $b \neq 0$ ونیسو.
موږ اوس رکورسیف (rekursiv) (دا په دې مانا چی د مخه غړي څخه وروستی یعني وریسی غړی لاس ته راوړلکیږي)
ټولګډونه......,r_{-1}, r_0, r_1, r_2 او .... q_1, q_2 په لاندې ډول تعریفوو: وي دې , $r_{-1} = a$
$r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \neq 0$ لپاره ټولګډونه r_i , q_i داسی تعینوو چی $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $o \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چی له جملی (۱ . ۳) څخه ممکن کیدی شي . باید یو نه منفی ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چی لرو $r_n \neq 0$ مګر $r_{n+1} = 0$, چی بی له دې بیا یوه نه پای د طبعي ګڼونو لویدونکی یا کمیدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چی ناشونی(ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شیما ته لاربشودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

....

....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا مساوات د شکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسې) لاس ته راځي:

$$r_n \mid r_{n-1} , r_n \mid r_{n-2} , \dots r_n \mid b , r_n \mid a$$

دا په دې مانا چې r_n د a او b یو غ ګ و دی. t دې د a او b یو بل غ ګ و وي، نو په دې حالت کې که دا پورته مساوات له پورته شکته ولولو، نو یو په بل پسې لرو

$$t \mid r_0 , t \mid r_1 , t \mid r_2 ,\dots, t \mid r_{n-1} , t \mid r_n$$

دا په دې مانا چې $\mid r \mid$ د a او b غ ګ و دی.

هر د دې ګنونو r_i د ($-1 \le i \le n$) سره، په ځانګړې ډول r_n او ددې سره (a , b) یو د a او b لایني کمبینیشن دی، په لاندې ډول $au + bv$, چې u او v ټولګنونه دي.

$r_{-1} = a$ د

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د یوه i لپاره د $1 \le i \le n$ سره، که یو د a او b یو لایني کمبینشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پیداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د یوې داسې r_i د ځای په ځای کولو له لارې هم ، چې په دې ډول د ایندکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. (پای)

یادونه : د غ ګ پ د ښوونې متود ، چې پورته او په لاندې بیلګه کې راوړل شي د اویکلید الګوریتم"Euklid Algorithmus„ د یوې ګڼیزې دندې یا کارونې (عملیې) شیماتیکي اوبیونې(حل) متود په نامه یادیږي، نو له دې سرهx او y هم له a څخه

$d = ax + by$ اکسپلیځیتExplizit (لاتین: څرګند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي.

بیلګه:

غوښتنه $d = (2124 , 1764)$. د اویکلید الګوریتم کارونې له لارې لرو:

$$2124 = 1 . 1764 + 360$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دی

د دې لپاره ، چې d له x او y سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) . 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه د a او b لپاره لاندې مهمه پیژند نخښه یا نخښونه لاس ته راځي

یادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکارېږي، چې ګرانو لوستونکو ته یې بی له اوبیونې

وړاندې کړم، دا جملې په ختېه کې د ګنونوتیوري دنده ده، چې په ګنونتیوري کې بیا د ښوونې سره ښوول کیږي۰

جمله۳ ۰ ۹ :

a او b دې ټولګنونه وي. د a او b یو ګډ پرویشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دی کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a او b ټولګنونو سره انځور کړاي شو۰ په ځانګړې ډول a او b هلته او هلته ویشپردي دي، که ټولګنونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + by = 1$$

اوبيونه : د شرايطو ضرورت سم د لاسه له ۳ ږ ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرايط پوره کيږدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، ګڼونتيږي پورې اړه لر او دلته يې نه ښايو.

جمله : ۱۰ . ۳

a او b دې تولګنونه وي۰ د a او b هر ګډ پرويشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b يو ګډ پرويشونی هلته اوهلته غ ګ پ دئ چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

ليما۳ ۰ ۱۱(جمله ګئ)(اويکليد): په خوښه تولګنونو aاو b او c لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعريف۲ ت : $a_1 , a_2 , ... a_n$ دې تولګنونه وي $(n \geq 1)$, او d دې يو نه منفي تولګڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d \mid a_i$ د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره

ب : له $t \mid a_i$ څخه د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره لاس ته راځي $t \mid d$.

نو d د $a_1,...., a_n$ غ ګ و بلل کيږي او د d لپاره هم داسې ليکو $(a_1 , ... , a_n)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a_n , ... , a_1 لپاره د داسې غ ګ و يواختتوب په ۴ . ۵ کې کتل کيدی شي او د موجوديت لپاره يې لرو :

> جمله ۴ . ۱۳ : د خوښې تولګنونو a_n , ... , a_1 لپاره ($n \geq 1$) غ ګ و موجود او d د a_n , ... , a_1 خطي (لايتي) کمبينيشن دی دا په دې مانا چې
>
> $$d = a_1x_1 + ... + a_nx_n$$
>
> د مناسبو تولګنونو x_n , ... , x_1 لپاره .

يادونه : له دې بيا لاس ته راوړل کيدی شي:

$$(a_1 , ... , a_n) = ((a_1 ,..., a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولګنونو a_n , ... , a_1 د ($n \geq 1$) لپاره . سړی کړی شي چې د $a_1,...,a_n$ غ ګ و پل په پل د اويکليد الګوريتموس له لارې پيدا کړي، چې دلته يې د اوبې يا حل ثخه تيريږو .

د اوبې يا حل لپاره يې د n په لور د پوره ايندکشن ثخه کار اخستل کيږي چې په ۸ –امه برخه کې څيړل شوی دی.

بيلګې:

۱ - ګنونه 240 او3750 غ ګ پ 30 = 2.3.5 لري

۲ – لرو 408 او748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس غ ګ پ دی: 17 . 2<2> = (408,748) يا دا لاندې که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^2.17 = 68$$

۳ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ 6 = (30.66.114) دی، ځکه، چې
30 = 2.3.5

او 66 = 2.3.11 او 114 = 2.3.19 دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرويشونی نه لري دا موږ پرويشپردی بولو، ځکه، چې دي:

65 = 5.13 /\ 54 = 2.3.3.3

خورا کوچنی ګډ زياتځلی(کوچکترين مضرب مشترک)

موږ په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زياتځله (لنډ: ک ګ ز) کليمې په ځيرنه پيل کو۰ دا کلمه و غ ګ پ يوه دوه ييزه يا دوه ګونی يا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي ټوليز پيژند ورکوو

تعريف ۳ . ت : $a_1 ,....., a_n$ دې ($n \geq 2$) ټولګڼونه وي، او v دې يو داسی نه منفی ټولګڼ وي، د کوم لپاره چی باور لري:

الف – $a_i | v$ د $n , ... ,, i = 1$ لپاره

ب – له $a_i | w$ څخه د $i = 1 , ... , n$ لپاره لاس ته راځي $v | w$.

نو v د $a_1 , ... , a_n$ کوچنی ګډ زياتځله(لنډ : ك ګ ځ) بلل کيږي او داسې يې ليکو:

$$v = [a_1 , ... , a_n]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (د دوه ګڼونو لپاره)

a او b دې تولګڼونه وي او v دې یو داسې نه کمیز یا نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

(۱) $v|a$ او$v|b$

(۲) له $a|w$ او $b|w$ څخه لاس ته راځی $v | w$

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کیږي او په لاندې توګه یې لیکو

$$v = [a,b]$$

جمله :

په خوښه تولګڼونو $a,b,c,\dots,n$ لپاره ک ګ ز شته دی او دا یواځنی دئ

$$[a,b,c,\dots,n]$$

یادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونولاس ته راوړو:
دتولګڼونو ($n \geq 3$) $a_1 , \dots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\dots,a_n] = [[a_1 ,\dots,a_{n-1}], a_n]$
او هم $|a_1a_2| = [a_1 , a_2] (a_1 , a_2)$

لاس ته راوړنې (داهم په همدې مانا مګر د جملی په څیر دی): د په خوښه تولګڼونو a , b , c لپاره باور لري: له $a | c , b | c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab | c$

د ګڼتیوري بنسټیزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژنده :

يو ټولګڼ $n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کيږي، که له ساده پرويشونv بل پرويشونی ونه لري٠

لومړي ګڼونه لاندې غوه خويونه لري.:

ليما (لکه کوچنی جمله): که p يولمړی ګڼ وي او $p \mid a_1 \ldots a_n$ د ټولګڼونو $a_1, \ldots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه يوه i د $1 \leq i \leq n$ سره.

حل (اوبی): حل يی د ايندوکشن له لارې صورت نيسی، چی ددې لپاره بايد ۸ - امه برخه کتل شوي وي.

د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او ليما دې $n - 1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بيا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځی چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مخته تيرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \ldots a_{n-1}$ وي ، نو داسې دی $p \mid a_i$ د يو i لپاره چې $1 \leq i \leq n-1$ وي د ايندکشن د نيونې په بنسټ.

د لومړنيو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتيوري بنسټيزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه (د ګڼونتيوري بنسټيزه جمله):

هر يو پيداينتي (طبيعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تيب پورې، په يوائني او يوائني (يويوائنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په يوائی يو ډول ليکل کيدی شي او بس٠ کيدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضريبونه همغه دي)) ډول د لومړنيو ګڼونو ځل په څير ليکل کيدی شي٠

اوبی : ښوونه د n په لور ايندکشن له لارې مخ ته بيايو (برخه ۸ دې ودې کتل شي) د $n = 1$ لپاره باور لري، که. لکه معمول ، 1 د طبعي ګڼونو د تش(خالي) ځل په څير تعريف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library

شوي وي. موږ اوس ټول د n پرویشونی $t > 1$ په نظر کي نیسو. کم له کمه یو داسی ګڼ شته لکه n . که p د دې پرویشونو کوچنی پرویشونی وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بیا p یو پرویشونی q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چی q د n پرویشونی وي، نو دا به د p تعریف رد کړي. دا چی $n / p < n$ د ایندونکشن نیوتي په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د څل په څیر لیکل کیدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2..p_r = p'_1p'_2...p'_s$ د n دوه ډوله د لمړیوګڼونو د څل په څیرلیکنه .
له $p_1 \mid p'_1...p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 \mid p'_i$ د یو i د $1 \leq i \leq s$ سره . د نمړې بدلولو له لارې دې وي $p_1 \mid p'_1$. داچي بیا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2...p_r = p'_2....p'_s$
، له کومو چی د ایدکشن له نیونی لرو $r - 1 = s - 1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتیب بدلون) هم $p_i = p'_i$ له $2 \leq i \leq r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټیزې جملی د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

جمله : هر طبعی ګڼ n په ټیك یو ډول په لاندې فورم انځوریدلی شي
$n = \prod_p p^{\nu_p}$ (د ν_p ، $\nu_p = 0$ یواځي د پای ډیرو p لپاره).(ν نیولو ...)
چیرته چی p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګیدونکې لړۍ پرلپسې کې څغلي.

یادونه: د عملي شمیرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ یې صفر وي تیریدل کیدی شي، لکه : $n = 28 , n = 2^2.7$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره
لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a , bc) = 1$ ، نو هم $(a , bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی یا حل : نیولی دي وي چې $(a, bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد $(a,b)=(a,c)=1$ سره تضاد دی.

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $\|a\| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $\|b\| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو a | b هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \le \beta_p$

لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورتوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}, \quad [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړني ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګڼونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلمونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه٬ اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینبه نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورېزېشونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}\ ,\ [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنۍ او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ ځخه سم د لاسه له دوو ځخه زیاتو تولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو ځو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینبه نیسي:

جمله: ناپاي ډیر لومړني ګڼونه شته٠

حل(اوبی) : موږ جمله ناسیده یا ناسمه ښایو (۸ –امه برخه دې وکتل شي) او نیسو چې پایڅیر لمړی ګڼونه p_1 , p_2 , p_3 , ...,p_r موجود دي. ګڼ $N = p_1p_2...p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په یوه لمړي ګڼ p ویشونکی دی. د نیونی له مخی لرو $p = p_i$ د $1 \leq i \leq r$ سره . د $P|N$ او $p \mid p_1p_2....p_r$ له امله لاس ته راځي $p \mid 1$.کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله باید ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : د ميلاد څخه پخوا د « اريتوتنس غلبيل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دي متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~
~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~
37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~
~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ 57 ~~58~~ 59 ~~60~~ 61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~
~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ 71 ~~72~~ 73 ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~
~~78~~ 79 ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ 83 ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ 89 ~~90~~ ~~91~~
~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ 97 ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

۳ . ۱ . ۲ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

(لاتين: عاقلانه يا هوښيار اعداد يا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبياتو کې داسی ګڼونه او ايراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه يا ديږي، کله يې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چې دا همداسې يانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک يې هوښيار ګڼونه بولی هم خوښه يې او يا مات ګڼونه ، خو دلته راڅيو Ratio nهوښيار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی٠

يادونه : که / ولرو يانې که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چېa په b ويشل کيږي٠ که ولرو≠ نود نابرابرووننخښنه ده٠ دا په دې مانا، چې b له 0 سره برابره نه ده٠ د دوه ګڼونود a او b ويش x = b / a د ټولګڼونو په ډيرۍ کې تل هلته شته دی، چې a د b ټولګنيز څو ځله وي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره، چی بیا هم ویشa : b (دلته هم b پرa ویشل کیږي) کیدونی شي» سره له دې، چی ویش تل په ټولګنونوکی پیژند نه لري یا تعریف نه دی یا صورت نه نیسي« باید د ټولګنونو ډیری ماتګنونو(کسر) ډیری‌ته پراخه شي، چی د لومړي حل لپاره افاده یا ویینه b/a سومبولیک مانا لري، د نوو ګنونو په څیر نیسو او په ټولګنونو یې ور زیاتوو، نو هغهٔ ګنونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګنونه وایو۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دی

cb / ca هلته باور لري، چې $c \neq 0$ دټولګې اوa |b د ماتګې په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګنونو ډیری، چې په Q سره ښایو د ټولګنونو ماتګنو b/a چې $a \neq 0$ اوa او b د ټولګنونو له ډیری وي، د ټولګنونوپراخوالی دی او ټول د مخه تیر بنسټیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنسټیز قانون ته داسې پراخیدلی شي

ټ : د ویش(تقسیم) بنسټیز قانون(دوام)

۲ - د دوه راشنل ګنونوa ، $a \neq 0$ او b لپاره یواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون یا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګنونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلی

بیلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غن, راسیږي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دی، یاني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ یا $\frac{1}{2}$

دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګنونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

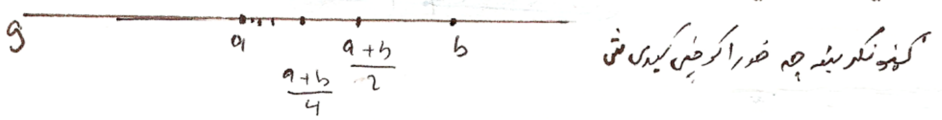
(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ٤ - رييل ګڼونه (Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په ريښتوني شته يا موجود)

د ريښنلګڼ په بنسټ هغه ورځني تيوريکي اړتياوي چې د شميرعمليو بې بنديزه (نامحدود) په کار اچولو يا استعمال ته موجود وي حل يا اوبې شوې او همدارنګه عملي اړتياوي چې اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ريښنلګڼ له لارې کيدی شي چې د کرښې اوږدوالی ټيك ورکړ شي يا په همدې مانا : په هرڅومره وړوکې ګڼونکرښه انتروال کې هم ناپای زيات ګڼونه، چې په ټکو يا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بيا په يوه کرښه کې هر ټکی د ريښنلګڼ په ذريعه نه شي ښودل کيدی يا په بل عبارت د کرښې هر ټکی د ريښنلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چې د «ايريښنلګڼونو»په نامه ياديږي، کيدی شي د يوه پريوديکي(periodische) (د ګڼونو کړۍ نه شليږي) ناپای لسيزمات له لارې وښوول شي.
د بيلګي په توګه د مربع د نيمي(قطر) x اندازه چې د مربع يو اړخ ۱ وي نه شي کيدی چې په ريښنلګڼ وښوول شي. د پيتاګوراس د جملې په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$, پس $x = \sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریبلګڼ کلیمه یوه ژوره کلیمه ده چې د پوهیدلو لپاره یې «پولی» (لیمس lim) ته اړتیا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کې به تر څېړنې لاندې ونیول شي.

ډیر اینتروالبندیدل چې په همغه یوه ټکی راځرخي مساوي(ورته) ارزښته (Äquivalent لاتین :مساوي ارزښته) لیدل کیږي

ریبلګڼډیری R چې په ریشنلګڼډیري د ایریشنلګڼډیري ورزیاتول دي چې له ۱ . ۱ . ۱ تر ۳ . ۱ . ۳ برخې پورې ټول بستزقوانین په کې باور لري. د ریبلګڼ له لارې دکرښې ټول ټکي په بر کې نیول کیدی شي. په دې ډول ریبلګڼونه ټولی د شمیرلو او اندازه کولو اړتیاوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د ریبلګڼ حل یا اوبې نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتیا پیښیږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کې به تر څېړنې لاندې ونیول شي.

یا دا لاندې په لنډه توګه:

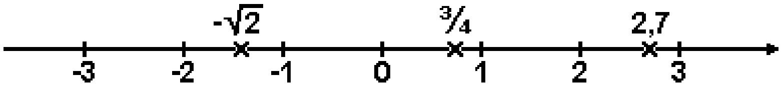
موږ ګڼونه یا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګڼونه نه دي یانی که موږ د ۲ ګڼ ریښه(جذر) ونیسو، نو داسی یو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسمیزه توګه پاي ته نه شي رسیدی یانی پریودیکی (تل بیرته راګرځیدونی یا پسی نور هم پراخیدونی) دي۰ داسی ګڼونو ته ایراشنل ګڼونه وایو۰

تل بیرته راګرځیدنیز (periodi(cal تل بیرته راګرځیدوني ,Period د ګڼونو ځنځیر نه شلیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایراشنل – یا نانسبي عددونه یاګڼونه Irational numbers

د راشنل او ایراشنل ګڼونوټولنی ته رییل ګڼونه وایو(دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیری پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) .۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیداینتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي یانې ریل ګڼونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابیلشوی(له نورو -) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د رییل ګڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیرو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په رییلګڼونو کی څلور بنسټیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (وییني) سره شمیرنه (نوکان اینسوول)۰ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا ځلووني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه۰

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندي (مخرج المشترک) جوړول۰ د داسی ماتلاندی(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نومونې: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)

د زیاتون او کمون بنستیزو قوانینو څخه لاندې لاس ته راځي

$$- (-a) = a \, , \; . \quad a - b = a + (-b),$$

$$(a+ b + c \ldots -c -d- \ldots) + (e+f + \ldots -g-h- \ldots) = a+b+ \ldots -c-d- \ldots +e+f+ \ldots -g-h- \ldots$$

دا دا مانا لري، چی که چیرې د نوکانو دباندې زیاتوننخښه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ویستلو کې ګڼ خپله مختخښه نه بدلوي۰ که د نوکانو د باندی کموننخښه (منفي نخښه) وي، نو د ګڼونو له نوکانو ایستلو په حال کی د نوکانو دننه نخښی بدلیږي۰ یانی کموننخښه زیاتوننخښه او زیاتوننخښه کموننخښه کیږي۰ بیلګه یې لاندې ګورو

$$(a +b+ \ldots -c-d- \ldots)-(e+f+ \ldots -g-h-..)= a+b+ \ldots - c-d- \ldots ..-e-f- \ldots \ldots +g+h+ \ldots$$

په همدې ترتیب کیدی شي نوکان هم ځاي پرځای شي۰

دلته باید مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چی په ګڼکرښه د صفر څخه د یوه رییلګڼ واټن په ګوته کوي،

د کوم لپاره چی لیکو :

مطلق عدد یا - ګڼ یا بي اړیکو ګڼ   (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زیاتیزه او کمیزه نخښه یا مثبت او منفي نه لیکل کیږي یا یون(واحد) هم ورسره نه وي، دا ټیک او ټیک یو ګڼ ښایج او بس۰

$$|a| = a \;\; ; \;\; a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a| = 0 ; a = 0

| a| = -a ; < 0

ياني كه a زياتيزه يا مثبت وي،نوa پخپله ليكواو كه a كميزه يا منفي وي، نوa- ليكواو كه a صفر وي نو د هغه لپاره 0 ليكو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخښى قوانين باور لري:

$$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , (-a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab$$

كه چيرته ډير نوكبندونه راگرځيدلى وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځى

بيلگه:

$$(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac – ad + bc –bd)(e-f-g)$$

$$= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-bdf+bdg)$$

د ځانگړي حالت په توگه د بينوم پيژندل شوى فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a – b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې تیک دي.

دا په لاندې ډول کارولکیږي :

بیلګه ۱ . ۳ :

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2 .$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2.$$

$$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2v)(4u - 2v)$$

۳ . ۲ . ۳ ویش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د $a = 0$ لپاره کوم مفهوم نه لري. پر صفر ویش ناشونی دی.

په ویش کی نوکبندول د زیاتون، کمون او ځل په څیر ساده نه کیږي. په ویش کی د زیاتون په ډول لیکل شوی هر توکی په ماتلاندې ویشل کیږي:

بیلګه ۳ . ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

یا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې لاس ته راوړنې(نتيجې) ته سرې د ګډو ځلوونو يا فاکتورونو يا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسيدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(a - 2b + 4c)$$

له دې ځايه کيدی شي، چې د بولينوم وېش بيل شي

بيلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \ \text{Rest} \ 5c \ \text{باقي} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \quad \text{لپاره} \ ab \neq 0,$$

د يوه زياتو يا چمعې وېش په يوه چمعه، کيدی شي د بينوم جکلې له لارې صورت ونيسي

بيلګه ۳ . ۶ :

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \quad \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b \quad \text{لپاره} \ a \neq -b.$$

بيلګه ۳ . ۷ :

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b \quad \text{لپاره} \ a \neq -b.$$

بيلګه ۳ . ۸ :

$$\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax \quad \text{لپاره} \ ax \neq by,$$

دلته هم وېش د پاتې يا باقي سره شونی دی.

بيلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$:

باقي يا پاتې b^2

له دې لاس ته راځی او په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b} \quad a\neq b,$$

بیلګه ۱ . ۱۰

$(16u^2-v^2):(4u+\sqrt{2}v)=4u-\sqrt{2}v$ Rest v^2 باقي $\Leftrightarrow$

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}v}$$

$$=4u-\sqrt{2}v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}v}$$

د $4u \neq -\sqrt{2}v$ لپاره

فورمال ور د دوه پولینومونو ویش دی (برخه ۱۲ دي انډول(پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0}=P_n(x):Q_m(x),$$

که د ماتباندي پولینوم درجه د ماتلاندي پولینوم درجې لوي یا مساوي وي($n\geq m$).

موږ نیسوچی: $a_n\neq 0, b_m\neq 0$ او $Q_m(x)\neq 0$.

د دواړو ویشو« ټوټه ویشو» (پارځیالویش(Partialdivision)) دا دي چي دا

د $P_n(x):Q_n(x)$ ویش په لاندي ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\text{Polynom 1}+\frac{\text{Polynom 2}}{Q_m(x)},$$

چیرته چي د پولینوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجي څخه کوچنی ده.

دي هدف ته په لاندي ډول رسیږو

۱ – سرې یواځې د جګ نظم غړي $a_nx^n : b_mx^m$ ویشي او له دي سره یوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}:Q_m(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+F(x) \qquad *$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – سړی (*) په ماتلاندې پولینوم $Q_m(x)$ ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راخي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چی د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل پولینوم $P_n(x)$ له درجی n څخه کم له کمه په یوکوچنی وي . د ګنونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چی $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – ټوټه ویش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعمالیږي، د لاندنی نتیجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چیرته چي د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجي کوچنی وي.

د ټوټه ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلګه ۲ . ۱۱ . لمړی دې د ټوټه ویش ۱ او۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلګه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$P_3(x)$: $Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2 (3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 + F(x)$ $6x^3 - 4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) -(a_3 / b_1) x^2Q(x) =$	$9x^2 -3x +1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x +1) : (3x - 2)$

بیلگه ۱۳ . ۱۲ : د تیرته ویش بیلگه ۱ . ۱۱د F (x) غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو چی د لیکنی شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x):Q_1(x) = (9x^2-3x+1):(3x-2) = 3x+G(x)$$

$$3x.Q_1(x) = (9x^2-6x)$$

پاتي = $3x+1$ یاباقي

$$G(x)= (3x+1):(3x-2)$$

له دې لاندې نتجه لاس ته راځي :

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)=2x^2+3x + G(x)$$

$$G(x) = (3x+1):(ex-2) = 11 +H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x-2$$

یاباقي = 3 = پاتی

$$H(x) = 3 : (3x-2)$$

پس باور لري

$$(6x^3+5x^2 - 3x+1) : (3x-2) = 2x^2+ 3x+1 + 3/(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تول توته ویش کیدی شي په لاندي ډول مخ ته یوړل شي .

(1) (4) (7) (۱۰)

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$$

(2) $\underline{6x^3-4x^2}$

(3) $-9x^2-3x+1$

(5) $\underline{9x^2-6x}$

(6) $3x+1$

(8) $\underline{3x-2}$

(9) 3

دلته (i) د پرلپسی پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

(1) (4) (7) (10)

$$(18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1):(3x^2+x-1) = 6x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x^2+x-1}$$

(2) $\underline{18x^4 + 6x^3 - 6x^2}$

(3) $9x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

(5) $\underline{9x^3 + 3x^2 - 3x}$

(6) $3x^2 + x + 1$

(8) $\underline{3x^2 + x - 1}$

(9) 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ٤ ماتشميرنه (كسرشميرنه)

د مات m/n كلمه د لومړي ځل لپاره د ټولګڼونو m,n څخه د ريشنلګڼونو انځورونو لپاره تعريف شوې۰ كيدى شي، چې دا كلمهa/b ته، چې a او b رييل ګڼونه دي، وغزول شي۰

بايد په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بيلګي په توګه:

ويش(a/(b-c تيک هلته مفهوم لري، چې b≠c وي۰ ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښايي

لكه a : b او يا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم بايد b |=0 وي.

په اخر كې بايد په ګوته شي، چې مات لاندى – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ كيدى شي او هم دواړه۰ دا بايد دلته هم په پام كې وي، چې هيڅ يو ماتلاندې ګڼ بايد صفر نه وي يانې دلته بې له اولنى ماتباندې نور يو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر كيدى دا موږ د ماتو مات (كسرالكسر) بولو۰

بيلګې:

$$a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 \quad ,$$

$$(a/b) : c = (a/b) / c \quad b|=0, c|= 0$$

$$(a/b): (c/d) = (a/b) / (c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0$$

يا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c},b\neq 0,c\neq 0,...,\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},b\neq 0,c\neq 0,d\neq 0$$

په ځو واره ماتګې کې باید اصلي ماتکرښه څرګنده پيژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټيکوالی مخه نيول شوي وي. په ټوليزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}\neq\frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هريو ماتګې b|=0, a / b په يوه ګڼ c |= 0 پراخيدی او همداسې لنډيدی شي

يانې ماتلاندې او ماتباندې په يوه ګڼ c ځليدی يا ويشل کيدی شي او دا کړنلار په اصلي

ګڼ کې تغير نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c},b\neq 0,c\neq 0$$

د ماتګې لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګې ساده کړي.

د بيلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3},\frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c};a\neq 0,y\neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې يواځنی فکتور يا ځلوونی يا ضريب لنډيدی شي او نه زياتوونی د بيلګې په توګه لاندې ماتګې

(c) ketabton.com: The Digital Library

(a+c):b+c) چې b≠- c وي نه شي لندیدی دا (a+c) : (b+c) = a:b

باور لري،چې b |= 0, c = 0 \/ -c |= a, a = b

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اړیین دی، چې ډیر ماتګښونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، څکه چې یواځې هغۀ مات یو په بل زیاتیدی یا یو له بل کمیدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه : $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$

که چیرې پرښت یا برعکس ماتګښونهa / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زیاتوو او یا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې باید راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو ښخه دی۰ د بیلګي په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل باید ماتګښونو ګښلو کې ماتلاندې سره څل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بیلګه باندې ښایو

بیلګه: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي، چې اصلي ماتلاندې)ا۰م۰ل (وټاکل شي

ا ۰ م ۰ ل ۰ 97200= 2.3.5.6.15.36 =

کيدی شي، چې ا۰م۰ل۰ د لومړنيو ګڼونو څل په څير هم وليکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3۰. 3.۰2۰36 = 2

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړکې يا لوړ جګګې يا لوړ طاقت لومړي څلووني رانيول کيږي۰ چې ګڼل خورا ساده کوي۰

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=$$

$$\frac{90-60+36-30+12-5}{180}=\frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار څنګه د ماتو په ټوليزه افاده استعماليدی شي لاندې بيلګه يی ښايي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بيلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې يواځې د لاندې لپاره موخه ور دی $a\neq 0 \wedge b\neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره يانې

$$a\,b(ab)(a^2b).(ab^2)=a^3.b^3$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

a = a

b = b

ab = a b

$a^2 . b = a^2 \quad b$

$ab^2 = a \quad b^2$

دا ا۰م۰ل۰ په لاندې توګه دی $= a^2 \quad b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۳ ۰ ۱٦ : د وېينې يا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a\neq 0, a\neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

a^2 - 1 = (a-1)(a+1)

a^2-4 = (a-2) (a+2)

$(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)$

دا پورته لاس ته راوړنه ا۰م۰ل۰- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مات ماتباندې صفر دیپه دې ډول په پورته پیل کې ورکړ شوې افاده یا وینه د صفر پیچلې لیکلو بیلګه ده او بس۰

د ځل او ویش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, b\neq \wedge d \neq \Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}; b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0 \Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بیلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بیلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, \forall |a|\neq|b|$$

یادونه: په پورته لیکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم باید راغلي وی٠ دلته اړیین د ګڼونو شمیرقوانین دي او د ګڼونو پیژندل٠ د ګڼؤنو اړیکې د خوندیونې له لارې

$N \subset Z \subset Q \subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمیر قوانین، چې هغه زیاتون ، کمون ، ځل ، ویش دئ او د ویش په بنسټ ماتشمیرنه٠ دا باید په همغه ساده ډول زده کړای شي٠

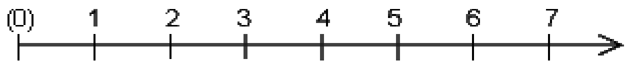
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړیین د ګڼونو شمیرنقوانین په لاندې توګه راالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهیدنه بسیا کوي٠

ګڼونډیرۍ (لنډه ټولګه)

پیدایینتي – یا طبیعي ګڼونډیرۍ

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پیدایینتي ګڼونو انځورونه

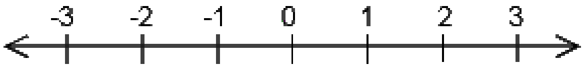


(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګڼونو ډيرى

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

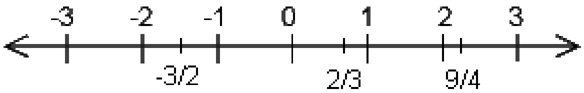
د ټولګڼونو ډيرۍ انځورونه په يوه کرښه



د راشنلګڼونو ډيرۍ

$$Q = \{\frac{p}{q} \mid p, q \mid Z \wedge q \neq 0\}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسميز يا پريوديکی ګڼ په څير ليکل کيدۍ شي

د ماتو سره شميرنه

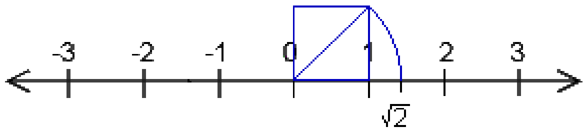
د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زيات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بيا يې هم ترمنځ نور ګڼونه يا ځايونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دى او دې ګڼونو ته مو ايراشنل ګڼونه وويل ۰ لکه چې يو راشنلګڼ نه دۍ

راشنل او ايراشنلګڼونه رييل ګڼونه جوړوي

د رييل ګڼونوډيرۍ يا حقيقي اعدادو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رییلګڼونو ډیرۍ د ګڼونکرښی تولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکرښه کې روښانه ده



په رییلګڼونوکې بی له بندیزونو شمیرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې باید صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونلپاره باور لري

شمیرډولونه لومړۍ پوړۍ

Addition:زیاتون یا جمعه

زیاتوونی +زیاتونی = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون $a + b = b + a$

د زیاتون اسوڅیاتیو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زیاتون ته د یوه بی اغیزه یا ناپیلی توکی شتون $a + 0 = a$

مخامخ – یا په څټ ګن یا برعکس عدد $a + (-a) = 0$

Subtraktion:کمون

د زیاتون په څټ کارونه یا عملیه ۰ ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوړی

ضرب یا ځل: فاکتور (ځله وونی ضریب) ۰ فاکتور(ځله وونی) ځل
.د زیاتون تکرار، بیلګه $4 + 4 + 4 = 3\cdot4 = 12$

د ضرب یا ځل کموتایتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب یا ځل اسوشیاتیو قانون$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

دستریبوتیو قانون $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلي توکي شتون(بي اغیزه توکی یې که وبولو هم بده به نه وي)

$a\cdot1 = a$

په څټ ارزښت یا برعکس قیمت$a\cdot(1/a) = 1$

یو ضرب ټیک هلته صفر دئ، چي د صرب یو ضریب صفر وي $a\cdot0 = 0$

ویش:
ویشونی : پرویشونی = ویش (لوستل یې له ښي وکيڼ لورته)

ویش د ضرب یا ځل په څټ کارونه ده) $a:b=c$

$a\cdot x = b \Leftrightarrow x = b:a$

د بېلګې په توګه z.B.: $4\cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ تمرينونه

۱ – د اعدادو يا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ يا سټ کې د عدد a او عدد bلپاره د شميرلو څلور قاعدې يا لارې باور لري؟

يادونه: دلته دې ترې کمونی يا مفروق منه او وېشونش يا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونی يا مفروق او پروېشونی يا مقسوم عليه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او يو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو يا ګڼونو او څخه تفرسق، ضر ب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتيجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ يادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ييز سيستم کې لاندې ګڼونه يا اعداد انځور کړی!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – لاندې رښتوني یا راشنل اعداد د کوټیو کې اچوني یا کوټی وني له لارې په نږدې ۵ ځایونږ ټیک پیدا کړی.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زیاتیزو او ځلیزو (د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړی

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بینوم فرولونه

۳ . ۱ – د بینوم فرمولونه وکاروی یا استعمال کړی او د شونتیا سره سم یې ساده کړی

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې وييني يا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکميلوني له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضريبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې وييني يا افادې په ضريبونو توټه کړئ او تر شوونتيا پورې يې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$
d) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$
c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان $(n=1,2,3,\ldots)$ له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
c) $(1 - 2n)^3$
d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ا رزښتونه له شمیره وباسئ، کوم چې ... a,b, یې نه شي نیولی یا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$
c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$
c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشمیرنه یا کسرشمیرنه

۶ . ۱ – لاندې کسرونه صورت او م خرج یعني د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنیو ضریبونو یا ځلوونو له لارې لنډ کړئ

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$
b) $\frac{2\,730}{5\,005}$
c) $\frac{20\,520}{2\,280}$
d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا کوچنی ګډ زاتځلی (ذ الاضعافالاقل) پیدا کړئ

په لاندې کې und د او په معنا دی

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نومیزو یا برابرمخرج کسرونو شمیرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7}-\frac{1-6}{7}+2\frac{1}{7}-7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5}-\frac{4-5}{5}-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26}+\frac{5-3}{13}+3\frac{33}{39}-0\cdot\frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a}-\frac{a-1}{a}-\frac{1-a}{a}$
c) $\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{1-2ab}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنوميزو کسرونو جمعه او تفريق، په مخرج يا ماتلاندې کې ضريبونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نوميزو ماتونو(کسرونو) جمعه او تفريق(زياتون او کمون)، جمعه مخرج يا ماتلاندې کې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره يو په بل پسې ورکړشوي ارزښت ځای په ځای کړئ‌او دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(کسرونه) سره يوځای کړئ! بيا په ټوليزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړئ او هغه ارزښتونه لرې کړي، چې د a د اخستلو يا نيولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$	د a=1,2,3 سره
b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$	د a=3,4,5 سره
c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$	د a=2,3,4 سره
d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$	د a=2,3,4 سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$

c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0{,}25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو يا کسرونو ضربونه(يا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېينو يا افادو برعکس يا په څټ ارزښتونه پيدا کړئ.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.7.4. a) $\dfrac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}}$

b) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1}{\frac{a^2+b}{b}-\frac{a+b^2}{a}}$

c) $\dfrac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}}$

d) $\dfrac{\frac{a}{1-a}+\frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a}-\frac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}}$

b) $\dfrac{\frac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-\frac{1}{ab}}{\frac{x}{a}-\frac{1}{b}}$

c) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$

d) $\dfrac{\frac{1}{16a^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}+\frac{1}{2b}}+\dfrac{\frac{1}{16a^2}-\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}-\frac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\frac{1}{1-ab}}{1-\frac{1}{1-ab}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\frac{a}{a-b}}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\frac{b}{a}}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه یا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ (که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.8.2. a) $\frac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\frac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\frac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\frac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\frac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\frac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\frac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\frac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0,4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\frac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\frac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\frac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\frac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\frac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\frac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\frac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\frac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\frac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\frac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (1-) سره شمیرنه

الف- ورکړشوی دې وي$a(b-c)/c$. $a=-1$ځای په ځای کړی او داسې لاس ترې راغلي کسر یا مات لپاره مختلف لیکدودونه ورکړی.

ب – ورکړي دې $(5c-3b-a)/(1-a)$ وي په صورت او مخرج (ماتباندې او ماتلاندې) کې (1-) له نوکانو راوباسی او دا عدد لنډ کړی.

پ – کسر یا مات $(b^2-a^2)/(-a-b)$ د (1-)سره پراخ کړی او ساده یې کړی.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج یا ماتلاندې کې (1-) له نوکانو راباسی او دا وبینه یا افاده ساده کړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ۰ توان (پوتنخ) او ریښه (جذر)   Potenz , Wurzel (Root)

په دې برخه کې د توان او جذر یا ریښې قوانین ترڅیړنې لاندی نیسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې یا استعمال چټکتیا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو۰ دا مشوره کیږي، چې ریښه دې په پوتنخ واړول شي، چې د اکسپوننت - یا جګعدد یې نسبي یا راشنل وي۰ د دې فورمال ټیک کره د ګڼلو قوانینو په څنګ کې د باوري کیدو لپاره باید په نیونو(فرضیو) هم ژور فکر وشي۰

د ریښې پیژند د خلاف یا پر څټ عملیو مخه باید نیول شوي وي، چې د هغې له مخې رادیکاند (ریښه ویستونی یعنی هغه ګڼ، چې ریښه یی وېستلکیږي یا نیول کیږي،د ریښی نخښې لاندی ګڼ او هم د ریښی ارزښت نامنفي اعداد (ناکمیز ګڼونه) وي۰ د توان زړه پورې ریل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دی یا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نیونه یا فرضیه شوي وي۰

٤ ۰ ۱ توان (پوتنخPotenz) په ټولګڼیز یا تام عدد په جګ یل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ٤ ٠ ١:

د يوه په خوښه ريل ګڼ توان لاندې موږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پوهيږو٠ د دې لپاره ليکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ $n = 1,2,3,\ldots$

اکسپوننت(جګګڼ، لنډ: جګ) اوb د پوتنخ يا توان ارزښت بلل کيږي٠

د بيلګي په توګه

$$a = a \,,\ a^2 = a\,.\,a \,,\quad a^3 = a.a.a$$

(4,1) د $n = 0$ لپاره کره ټاکل کيږي $a^\circ = 1$ د $a \neq 0$ سره

د پيژند يا تعريف پر بنسټ (او د څه بنديزونو په ځلورديوالی کې، چې لاندې شوي) ښوول کيدی شي، چې د خوښې يا زړه پورې رييلګڼونو $a,b \in R$ او $m,n \in N^*$ نامنفی ټولګڼونو اکسپوننت يا جګګڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};\ldots\ldots\ldots\ldots(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};\ldots\ldots\ldots\ldots(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته د توان اړيکې د توليځيز مثبت جګړ يا اکسپوننت لپاره باور لري، کيدئ شي، چې توليځيونو ته وغزول شي، که چيرې پيژند ورکړو يا تعريف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n = 1, 2, 3, ..., ..a \neq 0, ...(4,7)$$

دا پورته د توان قوانين د توليځيز جګ(اکسپوننت) لپاره بی بنديزونو يواځې د نه ورکيدونکو رييل بنسټونو ياني د $a \neq 0$ او $b \neq 0$ لپاره باور ي دي . په (4,5) کې بيا بنديز $n \geq m$ اړيين نه دی.

د توان قوانين کيدئ شي په ښه بدلونکو افادو يا وييونو وکارول- يا استعمال شي.

بيلګه 4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2} = (4abx^{-2}y]^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

بيلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3} = \frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

بيلګه 4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}} =$$

$$= \frac{a^5(3-a) + a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}} =$$

$$= \frac{3a^5 - a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - 2a^5 - a^3}{a^{m+1}} = \frac{a^3-1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوتنځ زياتون او کمون کې بايد پام وي، چې يوازې د برابر پوتنځ ګڼونه يو له بل سره زياتيدی او يو له بل کميدی شي٠

بيلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بيلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بيا ګوته نيسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخښې کې دې توپير وشي٠ پوتنځ له مثبت - يا زياتونمخنخښې سره تل مثبت يا زياتيز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترځ کې، چې پوتنځ د منفي - يا کميز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زياتيز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - يا کمون ارزښت لري٠

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n},....,(-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1},...,(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ۰ ۲ – ريښه او توان له ريشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پيژند ٤ ۰ ۲

د يوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ريښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره ليکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, ...(4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0..............................(4,9)$$

دلته a راديکاند Radikand ، يا ګڼ، چې رېښه (جذر) يې نيولکيږي(موږ دا

رېښه نيووني يا رېښه ويستونی بولو) او n درېښې جګ(اکسپوننت) اوb د

رېښې ارزښت يا رېښه ارزښت بلل کيږي.

بايد پردې ټينګار وشي، چې رېښه يوازې د نامنفی راديکاند يا رېښه ويستوني (رېښه نيووني) $a \geq 0$ راوستل کيږي يا نيول کيږي او پخپله په لاندې توګه يو نامنفي - يا ناکميز ارزښت لري يانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کوني لپاره لاندې يادونې شوي دي:

۱ – د جوړه ... n = 2,4,6, لپاره د a<0 سره رېښه b په رېيلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي يا ناکميز يانې زياتيز ګڼ دی.

۲ – د جوړه او مثبت - يا زياتيز برابرون $b^n = a$

په خته په رېښتوني دوه رېيل اوبيوني ياحلونه لري د بيلګي په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يانې $n = 2$ او $a = 4$ اوبيونې

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي۰ د دې لپاره، چې د راديکاند د شميرلو کارونې يواځنۍ سرته ورسولی شو، بايد د يوې اوبيونې لپاره پريکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . $n= 1 , 3 , 5$ او $a\geq 0$ لپاره

$$b^n = a$$

تل يواځني زياتيز(مثبت) اوبی يا حل لري يانې $b\geq 0$

٤ – د ناجوړه n او کيمز يا منفي a لپاره $b^n = a$

تل يواځني يو منفی اوبی يا حل لري۰ يانې $b < 0$ د بيلګي په توګه دا $b^3= -8$ يواځې

اوبی $b = -2$ لري.

په هر صورت بايد د جوړه... $n=2,4,6$ ګڼونو لپاره $a\geq 0, b\geq 0$ وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به يا ريښه شته نه وي او يا به يواځنی اوبی نه لري، يانې څو اوبی به شته وي

د ناجوړه يا طاقو... $n = 1,3,5,$ لپاره کيدی شي، چې له دواړو غوښتنو تير شو۰ دلته به يواځې تاوان يا زيان دا وي، چې د ټولو ممکن حالتونو لپاره به بيل بيل د ريښې د قوانينو غوره کولو ته اړ کيږو۰ له بلې خوا به ريښی د قوانينو ترتيبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ايښول شوي بنديزونه nقوانينو لپاره ستونځمن وي۰ له دې امله د ناجوړه ريښو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننت غوره کوو او د يواځني يو اوبی لپاره 2- د 8- = b^3 او نه $-2=\sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2=-\sqrt[3]{8}$ ليکو٠ په دې اړوند او د ياده شوو نيونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2}=a,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,10)$$

څلوری ريښه يا مربع ريښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقيقي اعدادو يا - ګڼونو a لپاره تعريف شوي٠ د نامثبت يا نازياتيز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بيا د (4,10) اوبی منفي يا متيز وي، کوم، چې نيونه $b \geq 0$ نفي کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د (10 , 4) ښول شويو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي يا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2, \sqrt{4}=\sqrt{(-2)^2}=-2$$

ياني د 2- = 2 سره٠

د (10 , 4) ټيک داسې ليکل کيدی شي:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\{a, a \geq 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,11)$$

$$=\{-a \quad , a \leq 0 \qquad\qquad (4,11)$$

د ريښې يا جذر له پيژند (9 , 4) , (8 , 4) سره سم کيدی شي، چې لاندې باوري د ريښې قوانين وليکل شي د.... $n = 1,2,3$ او $a , b \geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,12)$$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}, b>0\ldots\ldots(4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a}=\sqrt[n.m]{a^{n+m}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته د (4,15),(414),(413,),(4.12) ترمنځ بايد لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهيدنه نه رامخ ته کوي ۰ دلته پيژندل کيږي، چې د ريښې قوانين د پوتنځقوانينو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي۰ په رښتيا چې دا د پوتنځقوانينو لاس ته راتلى شي، که پوتنځ د ريشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعريف شي يا يې لاندې پيژند ورکړ شي۰

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m ....(4,16)$$

د... $a \geq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1 , 2 , 3\ 4 \ldots$ لپاره

د بيلګې په توګه (۱٦ ، ٤) په لاندې ډول ليکل کيږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړيکې (4,16) کيدى شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چيرته، چې (4,17) په ټينګه - يا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0.....................(4,17)$$

بې له بنديزونو د خوښې جګو n او m لپاره د پوتنځقوانين (4, 2) تر (4,6) باور لري، خو يواځې هلته، چې نه ورکيدونو بنسټونو يانې $a>0, b>0$ نيونه شوې وي۰

د ريښې شميرلو لپاره بايد اساساً د(4,16) له مخې ريشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتيا لرو، چې د پوتنځ او ريښې سره شميرلو د قوانينو استعمال نيونې تل و ازمايلى شو۰ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفيتوب کمونوالى يا نامنفيوالى يا مثبتتوب(مثبتوالى يا زياتونوالى) پريږدو، چې لاندې ناسم پاي کيدډول وښايو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{-a} = (-a)^{1/2} = (-a)^{2/4} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{a^2} = a^{2/4} = a^{1/2} = \sqrt{a}$$

برابرون یوازې د دې ساده حالت0 = a لپاره شته دی یا باور لري، د |a|=0 یا $a \neq 0$ لپاره a-او یا a منفي دي دا په دې مانا، چې a یا-a پیژند نه لري یا تعریف نه دی۰

د توان قوانین د توان سره شمیرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بیلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بیلګو کې دا تراوسه د شمیر بنسټیز قوانین ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کیدی شي۰ شمیرنه یې لږ وخت نیسي، که غواړی پخپله یې یو ځل وشمیری۰

بیلګه ٤ ۰ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{6}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2,2361$$

بیلګه ٤ ۰ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}} : \frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}} = \{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\} : \{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\} =$$

$$= a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})} = a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}} = \frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بیلګه ٤ ۰ ٨

$$8.\sqrt[3]{343} - 4.\sqrt[3]{125} + 5\sqrt[3]{8} - 5\sqrt[3]{729}$$

$$= 8.\sqrt[3]{7^3} - 4\sqrt[3]{5^3} + 5.\sqrt[3]{2^3} - 5.\sqrt[3]{3^6} = 8.7 - 4.5 + 5.2 - 5.9 = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ٤ ۰ ۹

$$
\begin{aligned}
&5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}\\
&=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=\\
&=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=\\
&=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۰

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=\\
&=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|
\end{aligned}
$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شمیرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې ریښې له منځه یوسو (د ماتلاندې ریشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې یوه ریښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور یا ځلوونې په څیررامنځ ته شي، نو دا د وظیفې لپاره یوازې اړیین ده چې (m < n (m , n >0 او $m,n \in Z$ په پام کې راوړو

کارونه یا عملیه په لاندې ډول اجرا کیږي(N*|= 0 , a > 0)

$$
Z\Big/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},\text{..........}(4,18)
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ٤ ۰ ۱۱

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورى- يا مربع ريښې زياتون يا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بينوم فرمول استعمال سره له $a > 0$ او $b > 0$،چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},\ldots(4,19)$$

بيلګه ٤ ۰ ۱۲

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بيلګه ٤ ۰ ۱۳

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۴ . ۳ توان(پوتېنځ) د حقيقي – يا رييل جګ (اکسپوننت) سره

دلته دا په ګوته کوو يا دې دا ويل شوي وي، چې د توان ټول قوانين له (4,2) تر (4,7) دې په خوبنه حقيقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بنديزه ټيک د مثبت بنسټ لپاره. يعنې a,b>0 ، برسيره پردې دې بايد توان $a^{\alpha}; a > 0$ د ناريښتوني يا ايراسنل عدد α لپاره تعريف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که α يو ايراشنل – يا رينبتونى عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انتروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\propto = \{a_{n;} a'_{n}\}$. دلته $a_{n;} a'_{n}$ هوښيار يا راشنل اعداد دي.

بيا نو

$$\beta = \{a^{a_n}; a^{a'_n}\} \qquad (4,20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غږي يې (۴،۲) لاندې تعريف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپير، چې

$$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$$
$$2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$$
$$2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$$
$$2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415}$$
$$2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143}$$
$$\vdots$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $\sqrt[10000]{2^{1412} < 2^{\sqrt{2}} < \sqrt[10000]{2^{14143}}}$

٤ ، ۳ تولګه : د a>0, b>0 رييل او $m, n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n \neq 0)$ ييلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته موضوع تر دې ځايه بسيا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړيين وو، هغه به بيا په ګډه ورزياتوو

۴ . ۵ . تمرينونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفريق يا زياتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څير يې وليکئ

a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$ d) $-(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$

b) $(3a+2b)x^4 - x^4(2b-3a) + x^4(3a+2b)$

c) $4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او ويش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زياتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاريتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشميرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګې يا جګعدد سره، د کميزو يا منفي اکسپوننتونو سره شميرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\dfrac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\dfrac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\dfrac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\dfrac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\dfrac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\dfrac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\dfrac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\dfrac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\dfrac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \dfrac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\dfrac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \dfrac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\frac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \frac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\frac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرليطو لاندې کيدی شي لاندې عددونه د يوه مربع – يا څلوری ريښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ - د ريښنو جمعه او تفريق)زياتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\frac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

b) $\frac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\frac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

d) $\frac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\frac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\frac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\frac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د ريښنو يا جذرونو ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.1. a) $\sqrt{3\cdot7}\cdot\sqrt{3\cdot5}\cdot\sqrt{5\cdot7}$ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}:\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$ c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او رېښې رېښه وېستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$ d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$ c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}}:\frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج رېښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۰ ۵ لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترڅیرنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوې، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوې وي څیړو ۰

۵ ۰ ۱ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم تر څیړنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څیړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وي ۰د لوګاریتم $c = \log_b a$ پیژند لپاره د یوه زیاتیز ـ یا مثبت عدد a یوه زیاتیز ـ یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه c لپاره

$$b^c = a \,; a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې b د هغه په توان یا پوتنخ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, ...(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x = 16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: د $2 = \log_x 36$ سره یو ارزښت لري، نو لرو x²=36 x=6

ب : د $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ سره یو ارزښت لري، $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو $x = 2$

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : د $x = \log_5 125$ سره، یوارزښت لري، $5^x = 125 = 5^3$

نو $x = 3$

ب: د $x = \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{16})$ $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو $x = 4$

۳ ۰ ۱ ٤ الف د $5 = \log_3 x$ سره یو ارزښت لري، نو $3^5 = x$ $x=243$

ب : د $-5 = \log_2 x$ سره یو ارزښت لري، نو لرو $2^{-5} = x$ $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2 = \log_x(-6)$ تعریف نه دی یا پیژند نه لري۰

ب : $x = \log_{-5} 125$ پیژند نه لري یا تعریف نه دی

پ: $\log_1 x$ پیژند یا تعریف نه دی

له (5,1) او (5,2) څخه لاس ته راځي

$$a = b^{\log a} ,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,3)$$

$$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,4)$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکیږي

$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ...(5,5)$$

د lga لوګاریم ته لسیز لوګاریتم وایي او lna ته پیداینتي یا طبیعي لوګاریتم وایي(e وروسته څیړو) زیات وخت د لشمیز لوګاریتم لپره داسې هم لیکو:

$$c= \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ باید وکارول شي۰

۵ ۰ ۲ د لوګاریتم قوانین

د لوګاریتم د پیژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کیدی شي د پوتنځ د قوانینو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاریتم قوانین رابیل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاریتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زیاتیز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ...(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, ...(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1,2,..., ...(5,10$$

د پوتنځ قوانینو له مخې د دې فرمولونو راوستل یو د وړاندیز وړ د لوګاریتم ژورې څیړنې لپاره تمرین ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b (x.y) = \log_b x + \log_b y, ... (5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) څخه لرو

$$c_1 = \log\ x, c_2 = \log_b y, c = \log_b (x+y), ... (5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1} = x, b^{c_2} = y, b^c = x.y, ... (5,13)$$

له(5,13) او د پوتنخ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c = x.y = b^{c_1}.b^{c_2} = b, \Rightarrow c = c_1 + c_2, ... (5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې څخه د لوګاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه ښت۰

بیلګه ۵ ۰ ۲

$$\log \frac{2\sqrt{a+b}\, a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log(a+b) + 3\log a + 2\log b - \frac{1}{3}\log c - 2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ ۰ ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کینۍ اړخ کې لوګاریتم ځاي لري، چې د ټولوa,b,c تعریف دئ او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دېa+b>0 (د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې0 < c (د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ (د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)
د کینۍ اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د a = 2 . b = -1 , c = 1 لپاره تعریف دئ۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا ځیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چېLog بې ځایه دئ ۰ د دې لپاره، چې د ځیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b\neq 0$ پر ځاي په ټینګه یا کره,b>0 وغوښتل شي ۰

په بیلګه۵ ۰ ۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

a+b>0,   a-b>0

نو بیا0 <(a+b)(a-b) = a²-b² او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، bلپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شيa > - b , a > b له امله هم و|a >|b ته راغونډ شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته دې هم ګوته نيولې وي، چې لوګاريتم په يوه بنسټ b يوه بل لوګاريتم يوه په خوښه بل بنسټd ته د شميراوړون د شميرنې اړول كيدى شي $(b>0, b\neq 1, d>0, d\neq 1, a>0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاريتم نيول و بنسټd ته لرو:

د $\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), ...(5,15)$

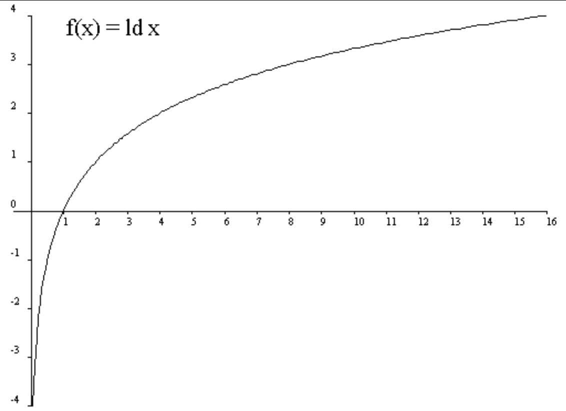
لسيز لوګاريتم اړول په پيداينتي يا طبيعي لوګاريتم او په څټ لپاره ليكو b=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); …………………(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$\lg a = (\lg e)(\ln a), ...(5,16)$

$\ln a(\ln 10)(\lg a) = 2,30429 \lg a, ...(5,17)$

	د لوګاريتم فنكشن يا بلواک او دياګرام يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د یوه ځل لوګاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښې لوګاریتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاریتم یو په بل بدلیدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نخښهٔ وروسته بینارځایونه ó او لسمیزسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

	binär	dezimal
2^{-1}	0,1	0,5
2^{-2}	0,01	0,25
2^{-3}	0,001	0,125
2^{-4}	0,0001	0,062.5
2^{-5}	0,0000.1	0,031.25
2^{-6}	0,0000.01	0,015.625
2^{-7}	0,0000.001	0,007.812.5
2^{-8}	0,0000.0001	0,003.906.25
2^{-9}	0,0000.0000.1	0,001.953.125

۵ ۰ ۳ ټولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېړ بلواک دی

$x = \log_b n \iff b^x = n$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$

$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$

$\log(x.y) = lox + \log y, \log \frac{x}{y} = lodx - \log y,$

$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} \frac{1}{n} \log x, n = 1,2,3,....$

$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$

$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259 \lg a$

۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0{,}04$ d) $10^x = 0{,}0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم
قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg\sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln\sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a + n \lg (a+b) + n \lg (a-b)$

c) $\lg a - \frac{1}{2}\lg b + \frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

3.1. a) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

b) $x = 2 \cdot 10^{2\lg 2}$

c) $x = 3 \cdot 10^{-2\lg 3}$

d) $x = \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$

b) $x = \sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

c) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

d) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x = \ln\frac{7,63}{\sqrt{e^3}}$

b) $x = \ln\frac{0,23}{2e^2}$

c) $x = \left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

d) $x = \left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ۰ ګونومتري (کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چې د کونجکچ چټکتیاته (ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په څیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چې د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ۰ زه به کوښښ وکړم چې ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په څیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

٦ ۰ ١ بنسټیزه هندسه

٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی(خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا ټیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره له دې هم هڅه کيږي چې ټکی او کرښه ليدوړ وګرځول شي لکه څنګه چې په ۴ . ۱ - امه برخه کی پيښ شوي. دلته کرښي په g ښوول شوي او غشی يی ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پرېښول کيږي يعني نه انځوريږي، که دا مو و ناريښتياو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کيدی شي د دوه کرښو غوڅځاي په ځير ونيوله شي) ځيرې په غور وګورئ

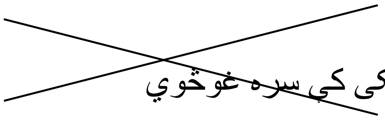
وړانګه ray A

کرښه g

(stright line

بند کرښه یا ټوټه کرښه Line segment

A B



دوه کرښې په ټکی کې سره غوڅوي

د بيلګي په توګه لاندې ويناوې باور يا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې يوه کرښه ټاکل کيږي(پورته ځيره وګورئ)، چې دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي يا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرګي او په يوه هواره کی پرتی کرښی يو بل ټيك په يوه ټکي کی سره غوڅوي (پورته ځيرو کې کتل کيږي)

يوه وړانګه s_1 له يوې لور په يوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او يوه پايکرښه له دوه ټکو A او B بنده يا راګير کرښه ده)

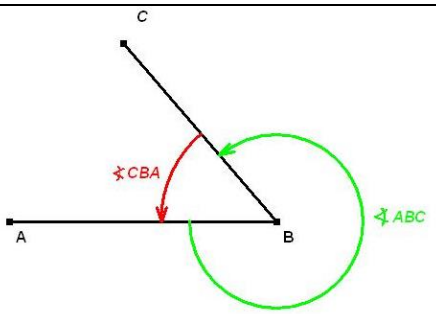
(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . ۱ . ۲ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه s_1 د خپل پیلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي s_2 (ځیره ۴ . ۲الف) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، s_1 او s_2 پښنی او په همدې ډول د S کونج α (الفا) ککره بلل کیږي.

که څرخون د ساعت نخښي په څټ یا مخامخ وې نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسی کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یی منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کې سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

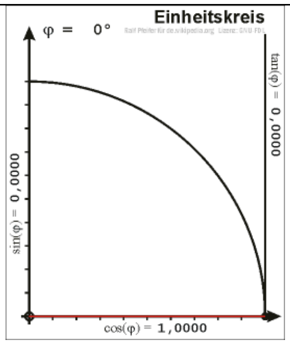


کیدی شي چی یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a^\circ \qquad (6.1)$$

په داسی حال کی چی ولاړکونج، کوم چی یو په بل ولاړې کرښي $g_1 \wedge g_2$ (او ته دي پام وي) یی جوړوي، له 90° سره مساوي وښایو(لاندي ځیره ، که نورېځیرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چی کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چی کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b \qquad (6.2)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته یونګردۍ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردۍ لینده په وړانګه(شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بي نومه ګڼ په ځیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګڼلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردۍ) r = 1 (کی انځوروړ دی، چیرته چی دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي (ځیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د 360° کونج د یوونګردۍ چاپیرى) محیط(په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass (درجکچ (او)ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a,.....(4,3)$$

پام : په پورته ځیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦۰ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که ځیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي۰.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه ښه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقي او ثانیي نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاړی، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي۰

بیلګه .٦. ۱ :

کونج a = 47°12'36“ دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دځیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقي او ثانیي دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12’=720“

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس په ټولیزه توګه $720'+36'' = 756''$ له دې لاس ته راځی

$1'=(1/3600)°$ (<=)

له دې وروسته په همدې توګه $756.(1/3600)°=0,21°$

له دې لاس ته راځي : $a=47°12'36''=47,21°$

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د(٦ . ٣) پسی باور لري $b=0.017453.47,21=0,826$

دلته څیرې راځي، خو د دې څیرو په ځاي به موږ په پورته څیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي۰

بیلګه ٦ . ٢ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګنیز سیستم(ځاي ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخی لرو

$a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701°$ د $0,701°$ اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

$0,701° = 0,701.60' = 42,06'$, $0,06' = 0,06.60=3,6''$

پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6''$

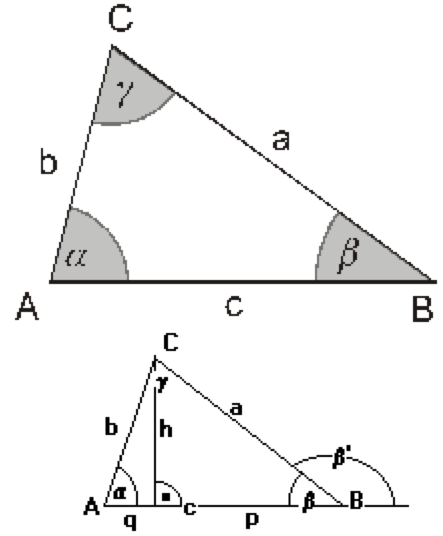
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته داسی لوستل کیږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقیقي او ۶ ، ۳ ثانیي

٦ . ۱ . ۳ دریګوډی

یادونه: موږ دلته بیا د نومونو(نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیږو. هغه هواره چی له کرښو راګیر وي دلته له درې کرښو یا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه یا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي یا۰۰۰ ګوټې او یا ۰۰۰ګوډي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبي نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته یو کونج چي له دباندې ورته کتل کیږي او د یوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاریږي. موږ په ورځنی یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی ګوډ دی. که یو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وییلی. که څوك په یوه ګوټه کی ناست وي نو وایي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا ګوډ نه وایي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .

په ټولیزه توګه په یوه سطحه یا هواره کی له پرتو کرښو g2 , g2 , g1 څخه یو مثلث یا دریګوډی جوړیږي، چی ګوډونه یی C . B . A ، اړخونه یی c. b. a او کونجونه یی α, β, γ دي (د مثلث دننه کونجونه یا زا ویې او دباندې ګوډونه دي، چې موږ یط په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ څیرې دې وکتل شي



(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کیږي

- په دریګوډي کې د کونجونو زیاتون 180° درجې دی یا π دی

- یو دباندنی کونج د په نه پراته دنننی کونجونو د زیاتون سره مساوي ده، له دې امله د یوه دریګوډي د دباندنیو کوجونو زیاتون 360° یا 2π دی·

- د یوه دریګوډي د اړخونو نیمي په یوه ټکي کې یو بل سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دریګوډي » دروندټکی یا دثقل مرکز « دی. اړخنیمي یو بل په تناسب د۱ : ۲ پرې کوي یا په پښتو:

د اړخونو ځانڼیونه یې۱ :۲ ده) په ځیره کې وګورئ) د یوه دریګوډي منځولاړې یو بل په یوه داسې ټکي کې سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپیر ګردي) هغه ګردئ یا دایره چې دریګوډی په خپل دننه کې نیسي یا بهتره، د دریګوډي خوندیګردئ(منځټکی دئ)·

د یوه دریګوډی کونجنیمي یو بل په یوه ټکي کې سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دننه ګردئ) ګردئ چې د دریګوډي په دننه کې ده یا ګردئ یا دایره کې خوندي دریګوډی (منځټکی دئ) لاندې کې بې ځیره شته) د یوه دریګوډي جګې یا د ارتفاع کرښې په یوه ټکي کې سره غوڅوي.) ځیرې ټولې لاندې کتل کیږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې ځیرې اړه لري، چې تکرار راځي، خو پروا نه لري·

Höhenschnittpunkt (H), Orthocenter د جګیو غوڅټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

(*U*) **Umkreismittelpunkt** circumcenter ·د دباندنی- یا په راتاو ګردی منځټکی

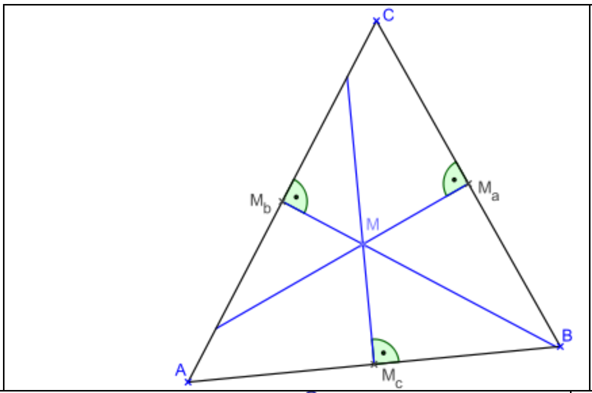
Seitensymmetralen), seid symetry ·د اړخسیومتریو غوڅټکی

(*I*) **Inkreismittelpunkt** den inscribed circle, incircle ·د دننه ګردی منځټکی

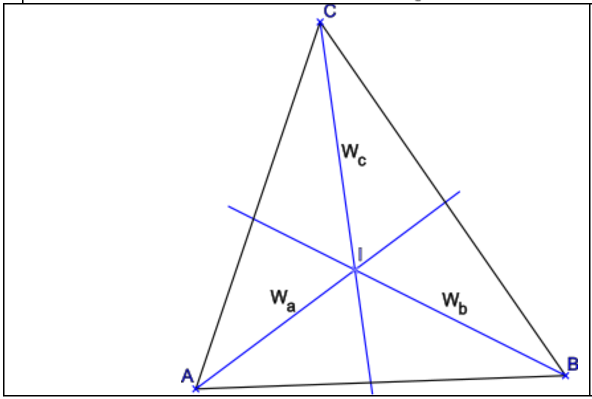
r Winkelsymmetralen · د کونجسیومتري

r (*S*) **Schwerpunkt** centroid · درونددټکی

Seitenhalbierenden) median ·اړخنیمی

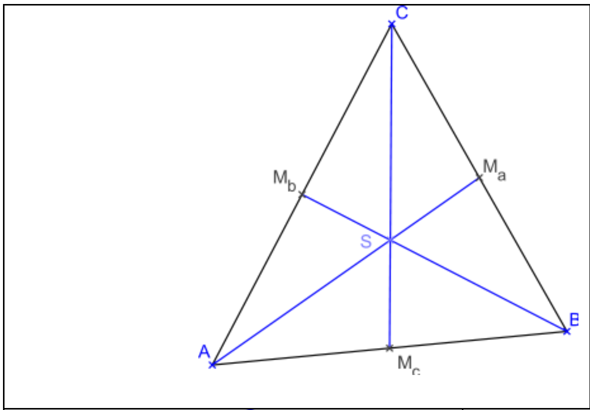


مخامخ خیره کې مثلث یاد دریګوډي په منځ عمود یا - ولاړې کربنې ښايي

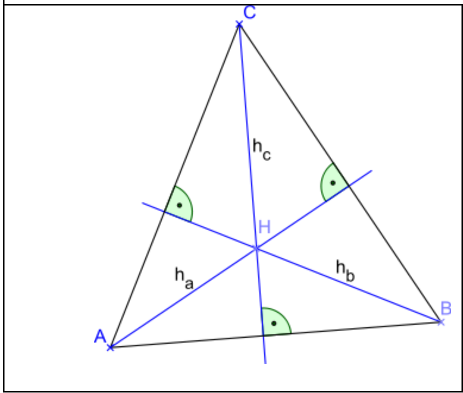


دامخامخ مثلث هغه کربنې ښايي، چې کونج نیموي او موږ يې کونجنیمی (ناصف الزاویه) بولو (په پورته خیره په نیم اړخ ولاړې کربنې دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

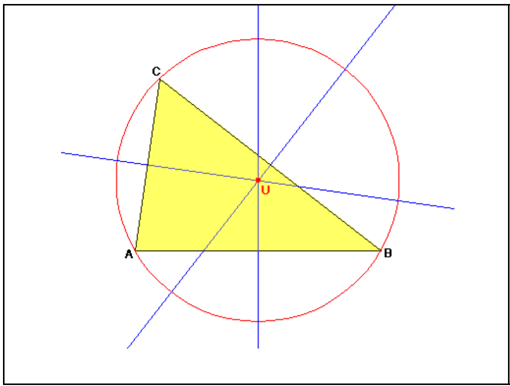


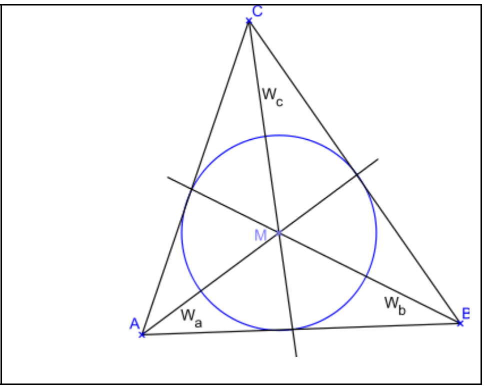
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له کونج څخه اړخ نیموي۰ موږ یې اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو۰



لاندې څره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له کونج په اړخ ولاړې دي۰ دا د اړخ جګوالی په ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللې دي۰

په پورته څیره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی یې د خوندې ګردی یا دننه ګردی منځټکی هم دی



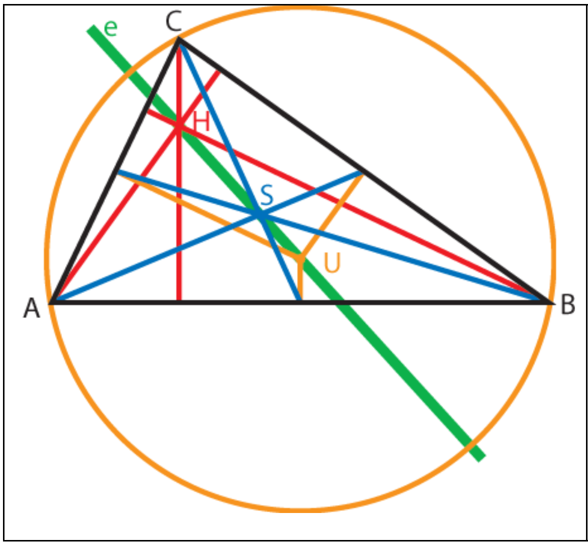


(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کینه ځیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوښتکی یې د په راتاو ګردی یا چاپېرګردی منځټکی دی۰

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه ټکی کې سره غوڅوي۰

که د یوې درېګوډی د منځولاړو په غوښتکي یوه ګردی داسی ووهل شي، چې د ګردی کږه درېګوډئ له یوه ګوډ ځخه تیره شي، نو دا ګردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو ځخه هم تیریږي۰ که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځټکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردی په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځټکی له درېګوډی دباندې پروت دی۰



که درېګوډی ABC وي ، S دروندټکی، U د چاپیریالګردی منځپکی ، او H د جګیو غوڅپکی وي، نو کرښه په لاندې ځاننیونه یا تناسب پراته دي :دا په لاندې ځیره کې کتل کیږي ۰

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

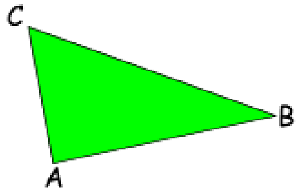
۶ . ۱ . ۴ برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهتCongruence and Similarity

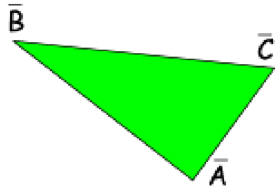
دوه دریګوډي ABC او A'B'C' یو بل سره کونګروراینځ یا برابر پېووني دي یانې براربارزښته دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ABC ≡ A'B'C'

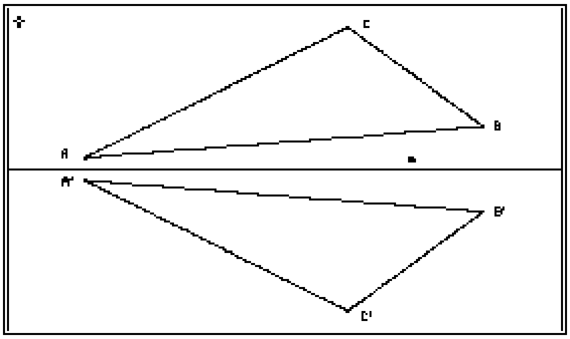
(4.4) که وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي(وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هندارونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې ځیر)





که دریګوډي سره کونګروانیڅ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي ټوټو (اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

په ښټ یی هم باور لري S اړخ او W کونج په ګوته کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

جملې: دریکوډي ټیك هلته کونګروا‌ینځ دي چې یو بل سره مساوي شي په

۱ - دري اړخونو کې SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کې SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کې SSW

۴ - یوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي WSW,

د دې جملو په څټ هم باور لري، دا په دې مانا چې که دریګوډي په کونګروا‌ینځ جملو کې ورکړشوو اصلي برخو کې سره برابر وي، نو دا کونګروا‌ینځ دي. د کونګروا‌ینځ جملو په بنسټ کیدی شي په ځانګړي توکه دریګوډیجوړښت سرته ورسول شي، کوم چې د کونګروا‌ینځ جملو کارونی په څیر لیدل کیدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چې په همغو یا اړوند درې کونجونو کې یو بل سره برابر وي او د همغو یا اړوند اړخونو تر منځ یی تناسب یا ځاننیونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګروا‌ینځ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دریګوډي ټیك هلته یو بل ته ورته دي که یو دبل سره برابر وي، په :

۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نیونی یا تناسب کی

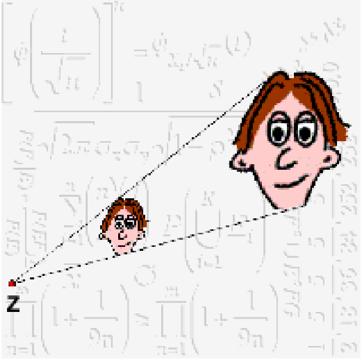
۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب یا ځاننیونه کی

۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

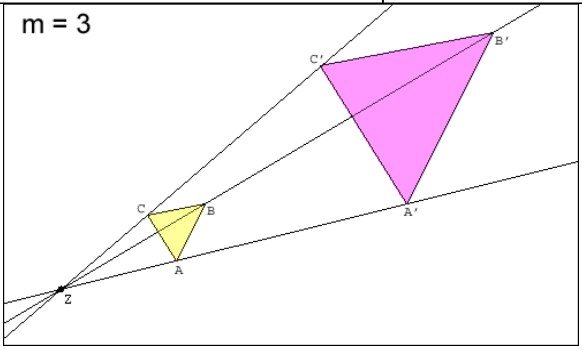
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مخامخ څيرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په يوه کرښه وتړی او د يوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غبرګه کرښه وباسی، نو دوه ورته درېګودي لاس ته راځي

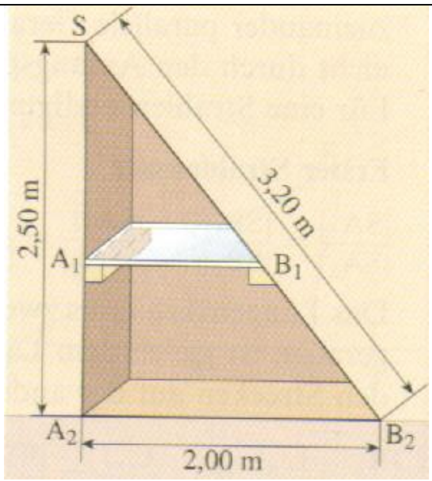


په لاندې څيره کې کښل شوي دريګودي ورته دي، دا په دې مانا چي باور لري:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

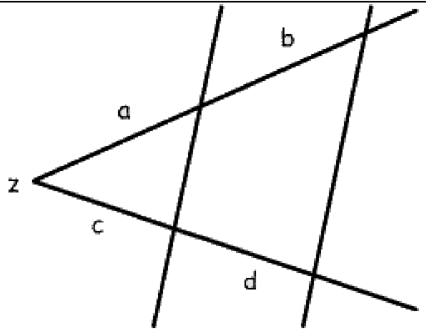
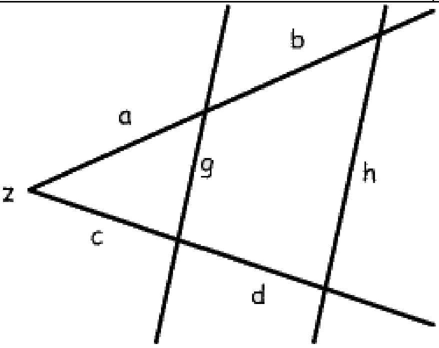


د ورته جملو سره خپلواني جملی د وړانګو جملی دي:

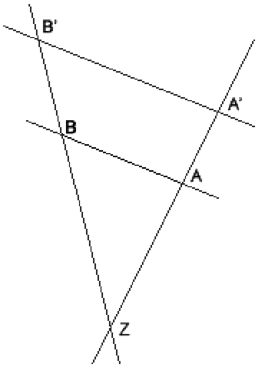


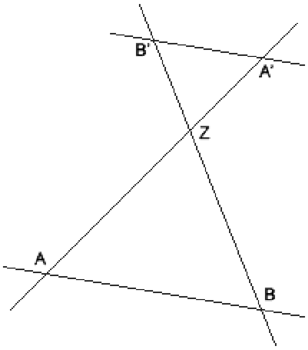
په دې پورته څيره کې دربګودي يو بل ته ورته دي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د وړانګې لومړۍ جمله: دوه له یوه ټکی وتلې وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې یې لاندې اړیکی سره لري. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)}$
	د وړانګې دویمه جمله: که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکی لري، دا ته والي له جملو ده. ټکی چې ځنګهدي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو $\frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)}$ $\frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)}$

یا دالاندې، چې هرڅه یې روښانه دي





(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

(دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوې څیره دې ګران لوستونکي وکاږي)

که درې په یوه ټکي کې پریکیدونکی کرښي g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی(کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګي په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څیرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

. 1 OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2

دا په دې ماناچی په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیوی سره پرتی دي:

. 2 A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2

دا په دې مانا چی: په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چی په وړانګه پرتی دي.

۳ - A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3

دا په دې مانا چی: په غبرګو پرتی کرښي په همغه برخوکی یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څیر رامنځ ته شي یا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c اوهمداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوډی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څیړني لاندې نیسو

- 1 $a > c$

موږ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونجالف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردبلینده کاږو د a

په کچه چی د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوڅوي)

څیره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

- 2 $a < c$

دلته درې امکاناته شته دی(د دې درې امکاناتو څیره وکاږی)

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه هغوټکو کي پرې کوي،
په کومو کی چی اوبی یواځنی نه دی٠

۲ . ۲ : ګردبلینده د α ازاده پښه لمسوي٠

۲ . ۳ : ګردبلینده د α اندازه پښه نه غوڅوي .

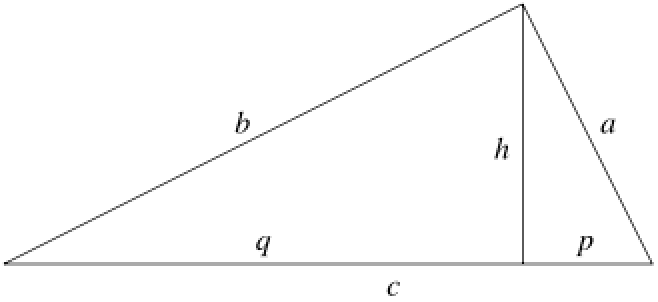
۳) $a = c$

ګردبلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کي پرې
کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$
نیونه په دریم کونګرواینځ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ ۰ ۵ .ولاړکونجیز دریګوډی مثلث قایم الزاویه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلفو دريګوډيو څخه موږ په لاندې برخه کی ولاړ کونجيز دريګوډی ترڅيړنی لاندې نيسو .په ولاړکونجيز دريګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ هوپوتينوزې) Hypotinuse(بلل کيږي، نور دواړه اړخونه کاتيتونه يو: کاتيت (Katheten)بلل کيږي. هغه ولاړکونجيز دريګوډي ته روځنی يا ورسره بلدې يا مروجی په نخښه کونه يا لنډ په نخښونه به له څيرې ۴ . ۱۳ څخه واخلئ



په ولاړکونجيز دريګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړيکی باور لري چی دلته يی بی له اوبی)ښوونی(راوړو:

يادونه : په ولاړګوډيز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پينې ولاړ اړخونه، چې غوښتونی کونج ته مخامخ مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او يا په دې لاتين نوموونو يانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پيتاګوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجيز دريګوډي کی د هيپوتينوزې مربع هواره د دواړو کاتيتو د مربع هوارو زياتون سره برابر يا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکاتیتو(د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع)) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د کاتیت مربع هواریزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددې کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

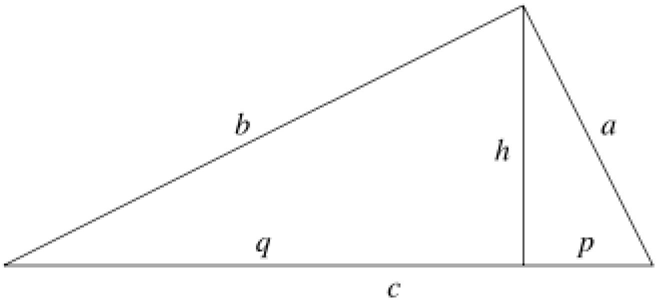
$$a^2 = p.c \ , \ b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتیزې په جګي مربع هواریزمساوي ده د هیپوتینوزې (لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q \ . \ p \qquad (6.\ 7\ )$$

یا په لاندې کې لنډ بیا ورکړ شوي



لنډ: (ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پیتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اويکليد د کاتيتونو(پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

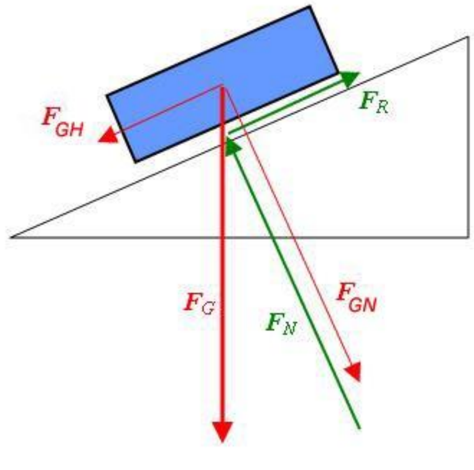
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اويکليد جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بيلګه ۴ . ۴ : (ځيره نه ده کبنل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکج فکر وکړي٠ دا يوه فزيکي دنده هم ده(ځيړه وکبنل شوه، نخښې هم لړ بدلې دي)) د يوه بدن د وزن G تجزيه ځرګندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزيك له مخی هغه ټکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي (KSP =)چی په يوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په يوه کبنته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نيغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه FN)تجزيه کيږي. د بنوولو ده چی، دريګوډي د ABC KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دريګوډي سره ورته دی

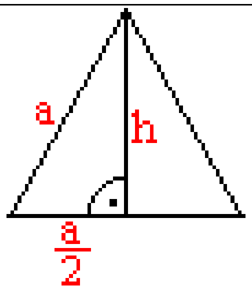
	يادونه: په ليکنه کې زور يا توان د لاندې ځيړې سره داسې بدلو:شين تنيا د مستطيل شکل G دی $F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$ ګوډونه : له پورته ګوډ A کبنته بنی لور ته ګوډ C کبنته کيڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج α ، په ګوډ B کونج β

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې G||AC څغلي، نو FH او G یو کونج α جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه دریګوډي په دې برسیره په ولاړکونج کې یو بل ته ورته دي۰

یادونه : داسې بیلګې، چې ثیره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې ثیرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي۰ زما زړه نه شي، چې له لیکلو یې تیر شم۰

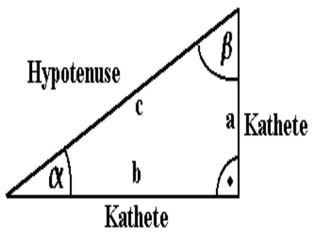
بیلګه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کی دې (لاندې ثیره) جګی و شمیرل شي .د ٦ . ۴ (له مخی لرو) جګی په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نیمی هم دی، دا په دې دریګوډي کې وکاړی)

	$h^2 = a^2 - (a/2)^2$ $h^2 = a^2 - a^2/4$ $h^2 = (3/4)a^2$ $h = (\sqrt{3}/2)a$

٦ . ۲ په ولاړکونجیز دریګوډي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چې یوه ولاړکونجیز دریګوډي کې جوړیږي(لاندې ثیره). که د کونج α مخامخ اړخ یا ـکاتیت a gegkathete د مخامخ اړخ په ثیر وښایو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دریګوډي کی لاندې اړخځانیوني منځ ته راځي یا جوړیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$$

د وړانګو جملو له امله دا اړيکي يا تناسب يوائې د کونج   په واك کی دی. که په پام کی ونيول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړيکی ليکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې ليدل کيږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پيداکولو لپاره دوه ګڼجدولونه پوره دي يا بسيا کوي   .ورپسي يا ددې په تعقيب پيژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6,10)$$

برسيره پردې د پيتاګوراس د جملی په پام کی نيولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots (6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

٦ ۰ .۳ په يوونگردئ كی د كونج فنكشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه كی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ يوائي د ليديدونكو)Konkrete(اړختناسبونو لپاره په يوه ولاړكونجيز دريگوډي كی ځاي په ځاي دي. دا ويناوې يوائي يا په ځانگړې توگه د $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (0 < \alpha < 90°)$ لپاره تعريف دي. كه د α خپلواك واريابل په ځير ونيسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنكشنونه راپه گوته كوي چی په برخه ۱۵ كی انځور دي او كوجنفنكشنونه بلل كيږي. په ياده شوې برخه كی) ځيرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعريفونو پراخوالی په زړه پورې كونجونو لپاره ممكن شي، نودا مو د يوون گردي باندې مخ نخښی په واك كی كرښو ته لاربښودوي .د لته ټولی كرښی) د لته به له كرښو ځموږ مطلب پاى كرښی وي(، چی پخپله او يايی پرويكشن يا پريوستون يا پريوتنه په وړانگو s1 او s2 پروت وي زياتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی كرښي او يايي پرويكشنونه پريوستونونه چی په وړانگو s'1 او s'2 پرتی وي كمون مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې ځيرو كښلو سره كيدی شي تعريفونه ۸ . ۴ (د په خوښه كونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha = \overline{QP}, \cos\alpha = \overline{OP}, \tan\alpha = \overline{AD}, \cot\alpha = \overline{BE}; ....(6,13)$$

د كونج α لپاره چي په لومړي ځلورمه يا كوادرانت Quadrant (لاتين: د كواوردیناتسیستم ځلورمه كی پروت دئ(لاندې ځيره له كينې و ښی لورته كښته دا په فرمولونوكې كارول شي توري ساده اينوول كيږي۰ په ځيرو كې شنې كرښې د ساين دي او سرې كرښې كوساين دئ او كونجونه ټول په ترتيب له يوه سره پهالف سره په نخښه كيږي، چي د دې لارې تانجنت او كوتانجنت هم پيدا دي او توري هم اينوولی شو)، دا تعريفونه د هغو تعريفونو سره سر خوري، كوم چی په ولاړكونجيز دريگوډي كی تر ځيرنی نيول شوي دي .په پام كی دې وي چی كونج α په لينده اندازه كی د گرديليندې اوږدوالي AP سره مساوي دئ، چيرته چی په زيات ځرخون له 2 ځخه لوييدلی هم شي .برسيره پر دې له تعريفونو) ۱۳ . ۴ (ځخه لاس ته راځي، چی ساين-او كوساين فنكشنونه، پريود :°360) 2 (periode (تل تكراريدونكی ، بيرته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځیدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پریود(180°) لري .

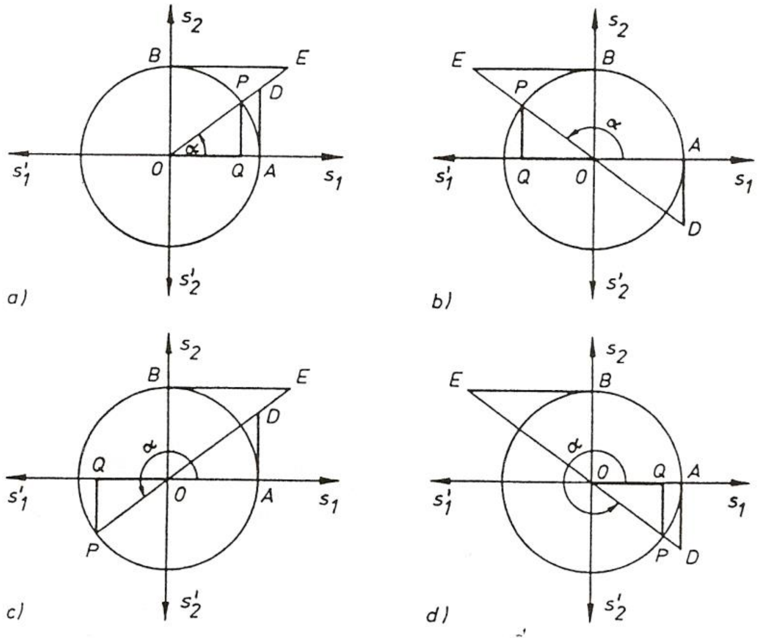


Bild 4.17

پس لرو

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha;......................(6.14)$$
په
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

ټولیزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha;......................(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو ټولګښونو ....3 , 2, 1,0,1-,2-,3-.. = k لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخښنه

	لومړۍ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$	دریمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$	څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
cotx	+	-	+	-

برسیره پر دي لاندې اړیکی باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha, \quad \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha \qquad (4.16)$$
$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha, \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446^\circ$ لپاره پیداکوو. دا چی α په درجی اندازه ورکړ شوي ده، نو اومشالتریا سویچ بدون) دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library

جبشمیري اړونه ده، پهٔ غوښتل شوي فنکشن کی) په « DEG » سموو او بیا
لاندې ورکوني کوو.
په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

1. $\sin \alpha = a$, 2. $\cos \alpha = a$,
3. $\tan \alpha = a$, 4. $\cot \alpha = a$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري $-1 \le a \le 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.
یو «بنستیزوبی یا بنستیز حل» α د هر تمرین د جبشمیرني سره په لاندې ډول یا
همداسی تکموترتیب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چې α په درجه اندازه یا لینده
اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو)

1. [a] [F] [sin]   2. [a] [F] [cos]
3 [a] [F] [tan]   4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په ځپ فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بیاد α هر بنستیزحل په درجه یا لینده کچ څرګندیږي.
د $a = -0{,}55$ لپاره لاندې بنستیزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33{,}367013° = -0{,}58236,$
2. $\alpha_0 = 123{,}36701° \quad = 2{,}1531606,$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3.\ \alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$$
$$4.\ \alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

$$1.\ \sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$$
$$2.\ \cos\alpha = \cos(-\alpha)$$

او په ورته توګه،، فرعي یا ځنګیز حل یا اوبی،،

$$1.\ \beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$$
$$2.\ \beta_0 = -\alpha_0$$

لاس ته راشي

د لیدیدونکي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چې :

$$1.\ \beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$$
$$2.\ \beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$$

د α ټول حلونه د (۴ . ۱۵) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

1\. und 2. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$

$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$

3\. und 4. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$

بیلګه ۴ . ۹: لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودې شمیرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۴ . ۱۰ : په بیلگه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لويې دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن 700 N وي (دلته N د Newton لپاره دی چې وزن پرې اندازه کیږي) او مائلې هوارې مایلکونج $\beta = 28°$ وی؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\text{ N} \cdot \sin 28°$$
$$= 700\text{ N} \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\text{ N}.$$

$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\text{ N} \cdot \cos 28°$$
$$= 700\text{ N} \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\text{ N}.$$

۴. ٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په ټولیز یا عمومي درېگوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جملهد څیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

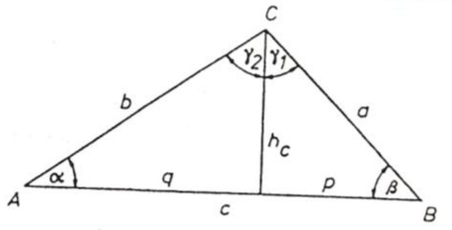


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توگه ښوول کیدی شي، چې په عمومي توگه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (4.17)$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز درېگوډی کښل کیږي(پورته او لاندې څیرې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د څیرې ۴ . ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$
\begin{aligned}
h_c^2 &= b^2 - q^2 \\
h_c^2 &= a^2 - p^2 \\
\hline
a^2 &= b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q, \\
a^2 &= b^2 + (c - q)^2 - q^2, \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b \cos \alpha,
\end{aligned}
$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$ لرو او همداسې:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.
\end{aligned}
\qquad (4.18)
$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دی .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره څیره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوي، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسی په ABCدریګوډي کی، $F1 = c, F2 = a$ او ss - 180° = ss' معلوم دي، α

او $R = b$ لټوونکی یا غوښتونکی لویي دي؟

د کوساین جملی (۱۸ . ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosss$$

همداسی یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2\cos(180° - ss')$$

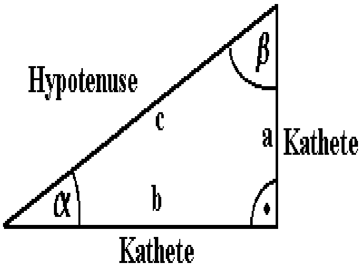
او د ساین له جملی (۱۷ .۶) لاس ته راځي

له کومو چی α تاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو٠

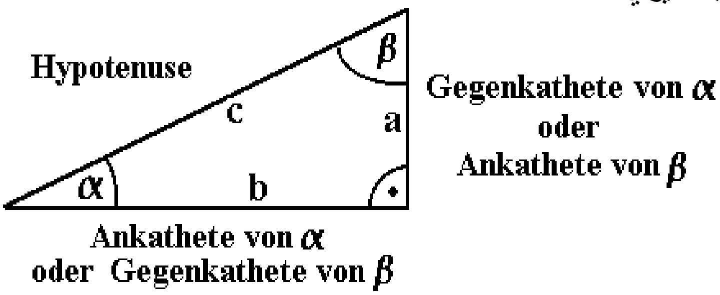
۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو٠

	مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډۍ ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څڼ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي۰



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي۰ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي۰ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیرۍ ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ۰

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

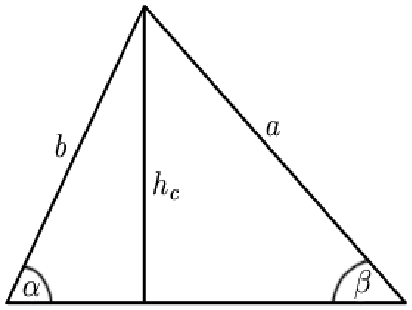
$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملي له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : (دا ځیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)

	$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$ په h_c پسې یې اوبی کوو $h_c = b \cdot \sin\alpha$ د برابر اینبوني له لارې لاس ته راځي $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$ که په $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ وویشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ راځي

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیداینتي توګه ځګی h_a او یا h_b لاس ته راکوي

د کارونې بیلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$$a = 5,4\,\mathrm{cm} ، b = 3,8\,\mathrm{cm} ، \alpha = 73°$$

دا نورې لویې دې په دربګوډي کی پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\text{cm} \cdot \sin 73^\circ}{5{,}4\,\text{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونیوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سطته شته ، یانې

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبې په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي٠

او نو ګاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\text{cm} \cdot \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\text{cm}}$$

دکوساین جمله

په تریګونومتري کې کوساینجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړیکې ښايي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ٠ ۹) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپیتاګوراس جملې له مخې لرو:

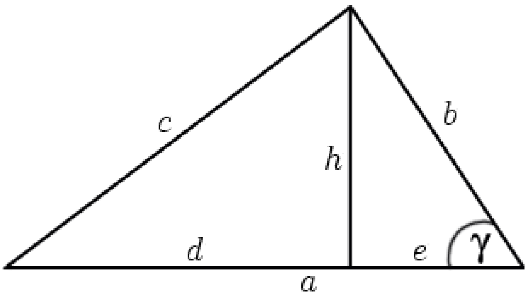
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي کی

- دری اړخونه (SSS) یا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیداکولی شو

ښوونه :



د دریګوډي په کیڼ لور د پیتاګوراس قضیه استعمالوو، چې د c^2 لپاره یوه شمیرافاده یا – وبینه پیداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلوری یا مربع باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنې اړخ لپاره د پيتاګواراس قضيي استعمال ځخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

(د بينوم فرمول)

د پيتاګوراس جملې له مخې د کيڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پيداشوي شميرويينې يا- افادې سره زياتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b}\left(\frac{ankathet}{Hypotenuse}\right)$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$\underline{\underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بيلګه:

يو دربېګوډیABC ، جې اړخونه يې ځرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9 \text{ cm}$ ،

$b = 2{,}8 \text{ cm}$

$c = 3{,}5 \text{ cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\text{cm})^2 + (3{,}5\,\text{cm})^2 - (2{,}8\,\text{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\text{cm} \cdot 3{,}5\,\text{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

Common formularکډ وډ فرمولونه

Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کتمتوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیاتون او کمون کتمتوالیSum and difference identities

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

دوه برابره کونج کې ګتمتوالي Double-angle identities

$$\sin 2A=2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{2\cot A}{\cot^2 A-1}=\frac{2}{\cot A-\tan A}$$

د نیم کونج ګتمتوالی Half-angle identities

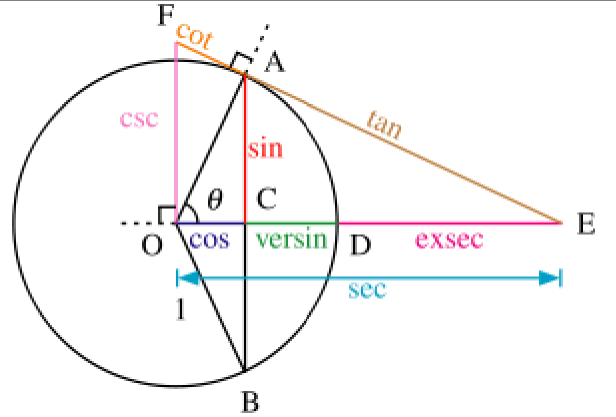
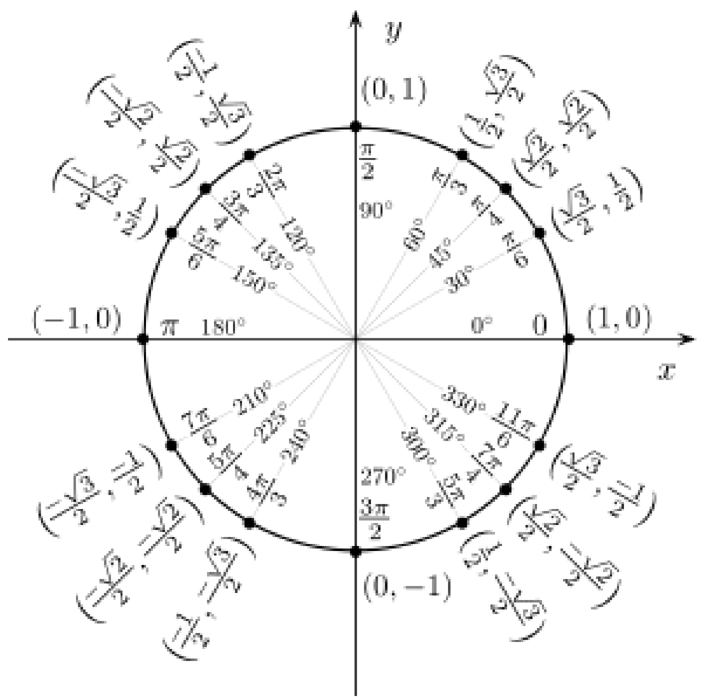
$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

List of trigonometric identities د تریګونومتریکي کتمتوالي لیست

	نوره ژوره څیرنه دلته نه کړو، دې ته ګوته نیسو، چې په لاندې څیره کې تریګونومتریکي فنکشنونه روښانه دي
	د یوه کونج θ ټول تریګونومتریکي فنکشنونه په *O* باندې د یوې یونګردی ترم له لارې ورکول کیدی شي (یونګردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښه شوي) مخامخ: یوونګردی(یووالي یا واحد ګردی) The <u>unit circle</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

Notationلیکنښه

دا لاندې لیکنښه یا - ډول د ټولو تریګونومتریکي – یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین ، تانجنت ، کوتانجنت ، سیکانت، کوسیکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي$\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

:پيژند Definitions

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راګرځیدنه ، سیومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

:په یوون(یووالي-) ګردۍ یا دایره کې ساده لیدل کیږي

Periodicity تل بیرته راګرځیدنه

ساین ، کوساین ، سیکانت، کوسیکانت تل بیرته راګرځیدنه 2π ده(پوره ګردۍ) (تکرار دۍ)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبیرته راګرځیدنه π لري(نیمګردۍ یا نیمدایره) :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

Symmetry سیومتري

د تریګونومتریکي فنکشنونو لپاره سیومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x,\ x \to \pi/2 - x$ ،یا $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x), & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\
\cos(-x) &= \cos(x), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\
\tan(-x) &= -\tan(x), & \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cot(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x) \\
\cot(-x) &= -\cot(x), & \cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \tan(x), & \cot(\pi - x) &= -\cot(x) \\
\sec(-x) &= \sec(x), & \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \csc(x), & \sec(\pi - x) &= -\sec(x) \\
\csc(-x) &= -\csc(x), & \csc\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sec(x), & \csc(\pi - x) &= \csc(x)
\end{aligned}$$

بدلون : د $\pi/2$ او π بدلون دی

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\
\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\
\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x) \\
\cot\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x), & \cot(x + \pi) &= \cot(x) \\
\sec\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\csc(x), & \sec(x + \pi) &= -\sec(x) \\
\csc\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sec(x), & \csc(x + \pi) &= -\csc(x)
\end{aligned}$$

د پیتاګوراس کتمټوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پیتاګوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زیاتوننخښي په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کي

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کيڼ لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په ځت

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کيږدو د پيتاګوراس يا موفريي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

د نیمکونج فرمول Half-angle formular

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ریښي لاندې ماتباندې او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پیتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لرو

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

نو لرو:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

د ځل و زیاتون ته کټمټوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

د زیاتون- و- ځل ته کټمټوالی (برابرون) Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کیږدو نو لرو

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم درېګوډي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیمګردی یا نیمدایره $\text{if } x+y+z=\pi = \text{half circle},$ =که

$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x.\tan y.\tan z$ نو یا او

$\text{and } \sin(2x)+\sin(2y)+\sin(2z) = 4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$

تریګونومتریکي په څتوالی Trigonometric conversions

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخې اړیکی لري. داسې اړیکی د په څټ اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندګی وکړي ، او arcψ دې د ψ په څټ وي، داسې چې ψ(arcψ(x)) = x ، نو φ(arcψ(x)) کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم x په څیر ووېلی شي یا افاده شي.

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

cot	sec	csc	Tan	cos	sin	φ \ ψ
$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	x	sin
$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\sqrt{1-x^2}$	Cos
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	Tan
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	sec
x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	cot

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

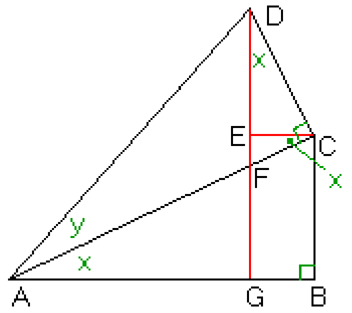
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلایي نسبت φ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جیومتریکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs



sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)

په مخامخ ځیره کې کونج x د ولاړکونجیز درېکوډي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوډیز درېکوډي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندې ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC. کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$= \frac{DG}{AD}$$

$$= \frac{EG+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Using the above figure:د پورته ځيرې ځخه کار اخلو

$$\cos(x+y)$$

$$= \frac{AG}{AD}$$

$$= \frac{AB-GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

د $\sin(x-y)$ او $\cos(x-y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کيږي، که د $\cos(x+y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه وپيژنو

$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$

که په فمرول $\sin(x+y)$ کې د y په ځاي -y کيږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساين جوړه او کوساين ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو

$$\cos(x + (-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته) د زیاتون)جمع(تیوریم(، له کومو یی چې دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چې فرمولونه په کي راټول وي(کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x\pm y)=\sin x.\cos y\pm\cos x.\sin a;........................(6,19)$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x.\cos y\mp\sin x.\sin y;.........................(6,20)$$

$$\sin 2x=2\sin x.\cos x;\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;....................(6,21)$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x.\tan y};.....................(6.22)$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};...........................(6,23)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};..............................(6,24)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

موږ له څیرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته ځو، او ځاي په ځای کوو $\gamma_1 = x$ ، $\gamma_2 = y$ ،
نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 . \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$

$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته ګوته ونیسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلګه ۴ . ۱۳ – لاندې وېینې یا افادې دې ساده شي

$$a)\ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له کوم چې $y=\sqrt{2}\,\sin\alpha$ لاس ته راځي

$$b)\ y=\cos(\frac{3}{2}x+\pi)$$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x+\pi)=\cos\frac{3}{2}x\cdot\cos\pi-\sin\frac{3}{2}x\cdot\sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi=-1,\ \sin\pi=0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y=\cos(\frac{3}{2}x+\pi)=-\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \text{ ist.}$$

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad 0\le\alpha\le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}}=|\sin\frac{\alpha}{2}|=\sin\frac{\alpha}{2}\quad(\text{wegen } 0\le\alpha\le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنستیزه هندسه یا ځمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لينده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسيما يا دسيمال يا لسميز او سمساګيسيمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړې شميرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1.a) $15°$	b) $225°$	c) $105°$	d) $277{,}5°$
1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3.a) $4{,}24°$	b) $70{,}9°$	c) $31°\ 17'\ 20''$	d) $228{,}1923°$
1.1.4.a) 5,19	b) 0,22	c) 2,31	d) 1

۱ . ۲ – یو درېګوټی له $a = 4{,}5$ cm , $b = 12{,}2$ cm او $c = 11{,}7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا درېګوټی جوړ کړی ! د اړخونو نیمونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیمونکي او جګې، همداسی یي ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی(یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې درېګوټی جوړ کړی

a) $a = 11{,}7$ cm , $b = 9{,}2$ cm , $\gamma = 43{,}5°$

b) $c = 16{,}1$ cm , $\alpha = 84{,}6°$ $\beta = 51{,}9°$

وښايي چی ولی دواړه درېګوټي ورته دي

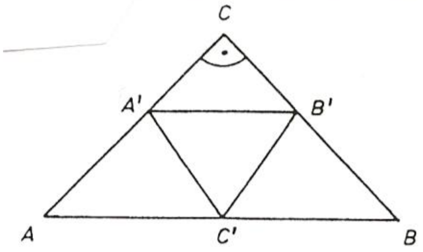


Bild 4.20 ځيره

۱ . ۴ – یو مساوي پښيز، ولاړکونجيز درېګوټي ABC ته یو مساوي اړخيز درېګوټی A'B'C' داسی په دننه کی ورکړ شوی چی $\overline{A'B'} \,//\, \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (ځيره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

ورکړی $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

(c) ketabton.com: The Digital Library

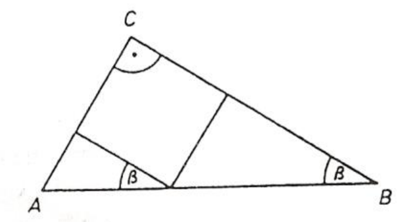


Bild 4.21

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د خیري ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع اړخونه وشمیری

الف) له کاتتو څخه

ب) له هیپوتینوزبېرخو څخه

۲ . د جبشمیرنی سره د ارزښتونوټاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړی:

a) $\alpha = 47{,}15°$, b) $\alpha = -390°$, c) $\alpha = 7{,}784$, d) $\alpha = 13{,}195$

۲ . ۲ – کونج β دې د $\sin\beta = a$, $\cos\beta = a$, $\tan\beta = a$, $\cot\beta = a$ څخه د

a) $a = 0{,}8290$, b) $a = -0{,}2907$, c) $a = -2{,}145$, d) $a = 0{,}8660$

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کی دې د الفا په ځاي بیتا ولیکل شي !!!)

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز ($\gamma = 90°$) دریګوډي کې معلوم دي

الف) $a = 3$ cm , $b = 4$ cm ، ب) $a = 5$ cm , $c = 12$ cm

کوم ازښتونه $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې ($\gamma = 90°$) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیری ، لاندې لوبيي موړ ته معلومي دي:

a) $a = 50$cm , b) $a = 40$cm , c) $b = 70$ cm , d) $c = 65$ cm

$b = 78{,}1$ cm $\alpha = 43°36'$ $\alpha = 18°55'$ $\beta = 59°\,29'$

۳ . ۳ – وشمیری ! h_c , A او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه ($\alpha = \beta$, $a = b$):

a) $a = 66$cm , b) $c = 22{,}4$ cm , c) $a = 38{,}9$ cm , d) $c = 30{,}3$ cm

$c = 130$ cm $\alpha = 47{,}8°$, $\gamma = 33{,}3°$ $\gamma = 48{,}2°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) درې قوې دې د زوریا قوت $F_1 = 167{,}5N$, $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه یو دریګوډی جوړوي. د دې دریګوډي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوي دي؟

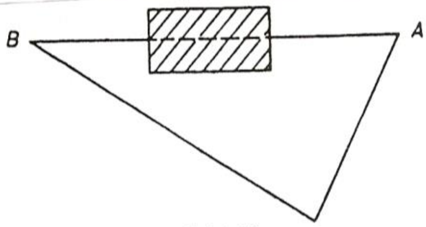


Bild 4.23
ځاکره

پ) دوه ټکي A او B چې یوه کور یې مخه پټه کړې وي، یو له بل څومره لرې دي، که $\overset{\frown}{BC} = 75{,}25\ m$, $\overset{\frown}{AC} = 51{,}75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'45''$ وي (ځیره ۴ . ۲۳)

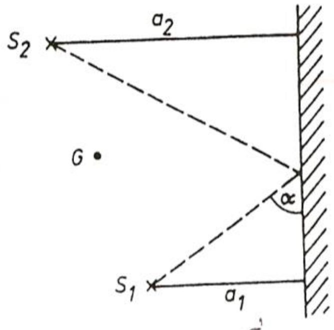


Bild 4.24
ځاکره

ت) د دوه یخ هاکي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ یو د مخالف ټیم لوبغاړی G ولاړ دی. S_1 په داسې ډول توپ و S_2 ته وهي چې توپ په یوه دیوال ولږېږي. (ځیره ۴ ، ۲۳ وګورئ).
د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لریوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له دیوال $a_1 = 2{,}5m$ همداسې $a_2 = 6{,}5\ m$ وي او توپ د یوه دې دیوال سره په یوه کونج $\alpha = 42°$ ولږېږي.؟

۵ . د تریګونومتریکي یا دریګوډیزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشمیري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشمیرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښايې:

5.2.1. a) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$　　b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1+\tan^2 \alpha} = 1$　　d) $1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$　　b) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

c) $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$　　d) $\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$　　b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$　　d) $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$　　b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2}$　　d) $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

5.2.5. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$

c) $\sin \alpha + \sin (\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin (\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6,5\pi + \alpha) = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$i^2 = -1$ (7 , 4)

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) ټولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)i =z یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د ټولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې ډول د څلورې پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2/4$$

لاس ته راځی یالرو=>

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x + p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیوني یا حلونه منځ ته راوړي۰

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځای پر ځای کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi \, , \, i^2 = -1; \, a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرۍ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, ... (7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي٠ لنډ کنجوګیري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ... (5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کیږي، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اینبول شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سرې د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې:$i^2 = -1$

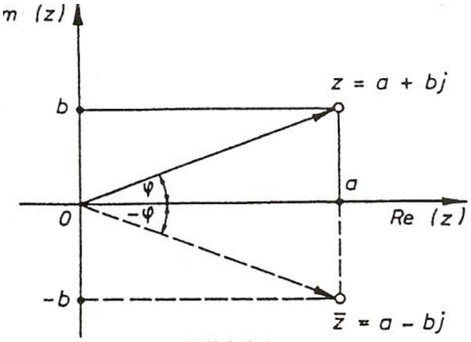


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطڅې ریبلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته يېایماجینار برخه وایې لکه څنګه، انځور شوي دي٠ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي٠(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کارونی یا عملي يې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځني وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(-z2) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

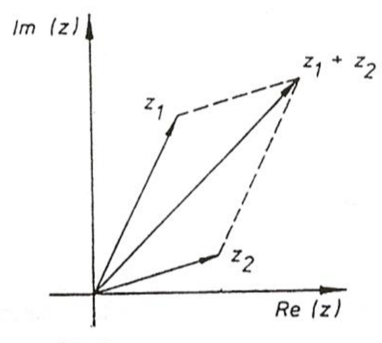


Bild 5.2 (7.2 څېره)

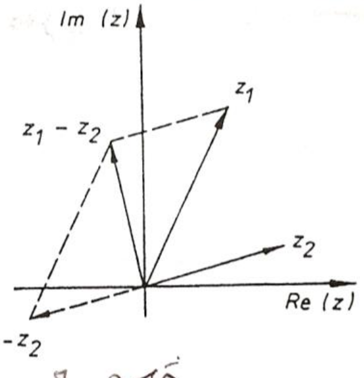
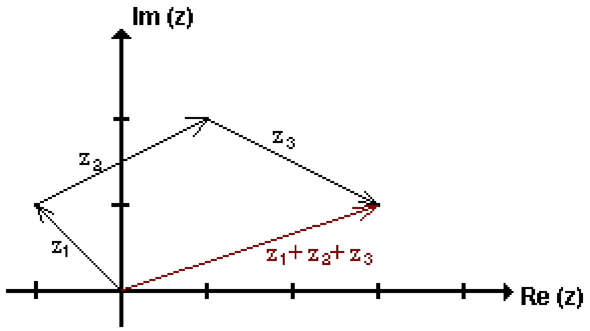


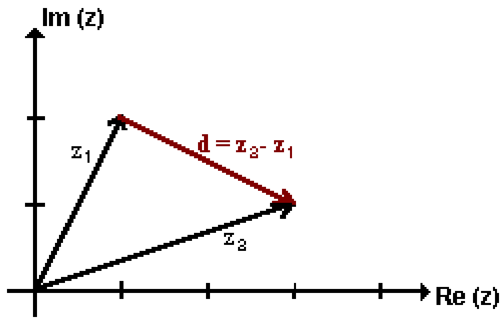
Bild 5.3 (7.3 څېره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا لاندې:



په پورته او لاندې څیرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي٠



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي٠

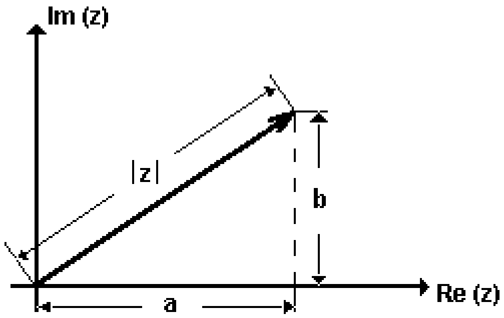
دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي٠ مخامخ څیره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په درې ګوډي کې د اړخونو څاننیونه یا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|, ...(7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$z_1+z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اینوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2$$
$$= a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2(-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \qquad (7,20)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي. دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z_2} = \bar{z}_1.\bar{z}_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7, 22)$$

۷ ۰ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\, i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسی لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|},\left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right)=\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوېمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}=\frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2}=\frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i=\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د Z1 او Z2 لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1:Z_2=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2-3i}{3+2i}=\frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)}=\frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2}=\frac{13}{13}i=-i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z=1-i$ b) $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

c) $z=2(1-\sqrt{3}i)$ d) $z=-1-i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

١ . ٢ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای
ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

٢ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

٢ . ١ – د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

٢ . ٢ - د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22 + 5i) + (2 + i)$ b) $(3 + 2i) - (5+2i)$

c) $(1+2i) - (1+2i)$ d) $i -(1-2i)$

٣ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

٣ . ٢ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i) . (3-2i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i) . (3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i} . \sqrt{3-\sqrt{7}i}$

٣ . ٢ – وشمیرئ

a) $(x + y\,i)\,(2x + yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a - 3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a + 5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63\ +\ 16i}{4\ +\ 3i}$

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لانديې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\, x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\, x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\, x + 1 = 0$

d) $16\, x^2 + 8\,(i + 1)\, x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د ګڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته رااچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي٠ په جملو کېد دې ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه تړنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د رښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی یا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځی٠ د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې يې څیرو

۸ ۰ ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه (ثبوت) کې سرې له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې رښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي٠

دا وینا B هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه رښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)(د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیاارزښت په جدول کې) له یوې رښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ ـم جدول)٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \ge 1$

غوښتنه B : $6x+3 \ge 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې رښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \ge 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی$3x \ge 3$: د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \ge 6$ د 3x زیاتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \ge 3x+6.$$

بیلګه:

د یوه ناټیک اوبیونې یا حل کارونه (متود)

د ښوونې دی $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \ge ab$$

$$a^2+b^2+2ab \ge 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \ge 0$$

$$(a-b)^2 \ge 0$$

لاس ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \ge 0$ بې بندیزه رښتیا دي۰ مګر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو $b \ge 0, a \ge 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له رښتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی(سیده ښوونه) او په ناسداږه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څېړنې لاندې ونیول شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده۰ وینا یعني نفيې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده۰ (د ثبوت د

رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده۰

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفيې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورې یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځی

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورې وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کينه لور د څلورئ ٠ مربع په بڼه ليکل کيدی شي او هيڅکله له صفر څخه نه شي کوچنی کيدی٠ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتيا دی يا غلط دی، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتيا دی يانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتيا دی ٠

۲ – غوښتنه B :د ۲ رېښه يا جذر $\sqrt{2}$ ايرشنل دی

اوبيونه يا حل : د غوښتنې نفيې ده، چې : د ۲ رېښه $\sqrt{2}$ ريشنل ګڼ دی (د ريشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو بايد بيا دوه تولريشنل ګڼونه q, p, د q≠0 سره شته وي، چې دا باوري شي:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

له دې پورته برابرون سره p^2 يو جوړه((جفت) ګڼ دی٠ نو له دې امله p هم يو جوړه ګڼ دی، ځکه چې يواځې د جوړه ګڼ مربع يا څلورئ جوړه کيدی شي $p=2p'$ له مربع يا څلورئ کولو او پر ځای اېښوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p'^2،$$

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو ځلوری یا مربع ګڼ دی٠ په دې پسې لرو p او q پر ۲ ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی٠ که پرویشپردي ټول ګڼونه p اوq له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي٠

۸ ٠ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ n0 (صفر باید لږ د ن د ښنی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي ګڼونو لپاره باوري کیدی شي٠ یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي٠

بیلګه ۱ :

د ټولو $0 \geq n$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بیلګه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري $1+3+5+\ldots 2n+1) = n^2$

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینځیپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که یوه وینا دn= n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په ښنه کې‌لیکل شوی) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې په ترتیب د اینډکشن ښوونه په دوه پلونو یا قدمونو سرته رسیږي

۱ - د اینډکشن پیل

ښوول کیږي، چې دا وینا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د اینډکشن پل

اوس باید یو ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه وښوول شي٠ له دې امله د اینډکشن پل یا له برخه پلونو جوړ دئ

۲ الف: د اینډکشن نیونه :

نیول کیږي، چې وینا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نیونه په V فرمولبند کیږي

یادونه V د نیونې لپاره ځاي پرځاي کیږي یا راوړل کیږي٠

۲ ب – د اینډکشن غوښتنه:

غوښتل کیږي، چې دا وینا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو٠ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي لیکو

۲ ج – د اینډکشن ښوونه :

ښوول کیږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: $A \Rightarrow B$

بیلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^0 = 1 > 0$

۲ ٠ ۱ ٠ V ته :

$2^k > k$

و ۲ ٠ ۲ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2^{k+1} > k+1$

۲ ۰ ۳ له B <= V : له $2^k > k$ او $1 < 2$ څخه د زیاتون له امله لاس ته راځي :

$2+2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بیلګه ۲ :

۱ ۰ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1° = 1$

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ B <= V ته: له نیونې څخه د زیاتوون 2k+1 زیاتونې او له دې د ښي خوا د یوه بینومځلوری(-مربع) په څیر انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښی خوا انځورونې څخه د بینوم څلوری(-مربع) لاس ته راځی :

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

یادونه : د V او B پر ځاي کړی شو، چې نیونه او غوښتنه ولیکو، یانې موږ درې څه لرو، چې نیونه غوښتنه او ښوونه ده۰ په هغه ورسره بلد ډول یې ښوونه د یوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی یا اوبیونه بللی(اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي یا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم یو، لکه ملګوبی، خړوبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شمیرپوهنې سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، کۀ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بیا د ترنې په ډول ورسره مل کړو۰ ستاسو وړاندیزونو ته هم سترګی په لار یم۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښایي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تیرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښایي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل ګڼ دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}.$

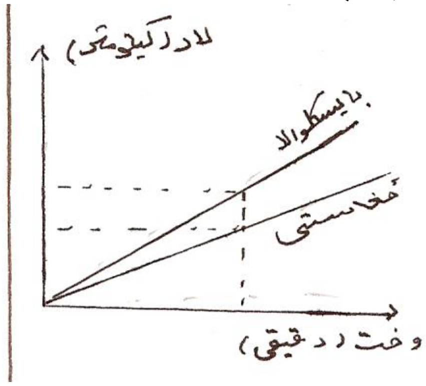
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ ۰ کرښیز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پیل بیلګه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چی په ګراف کی کښل شوی دی(که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړۍ کی ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلو متره په ګړۍ کي ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې يادېږي، په همغه نامه نه يادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون يا مساوات په نامه وبولو .

وخت) په دقيقه (په t ښايو لار) کيلومتر(په s ښايو د لارانځورونی څخه په ګراف کی څرګندېږي چی بايسکلځغلوونکی له ۶۰ دقيقو وروسته ۱۵ کيلو متره ځغليدلي يعني 15km /hاو پلی ۱۰ کيلو متره يعني 10km/h

غواړود هرڅه لمړی وښايو چی هر يو له يونيم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بيا دويمي پوښتني ته ځواب ورکوو.

بايسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 kmځغليدلی وي او پلی به 2.10km=20kmځغليدلی وي بايسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km

15.tkm=لار وهلي وي. دلته وخت t خپلواك اوړيدونی يا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړيدونی يا ناپيژندونکی يعني د t په واك کی دی. دا کليمي به بيا د فنکشن او څيرونو په برخو کی پوره تر څيړني لاندې ونيول شي. د بايسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r يې ښايو برابرون داسی ليکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بايسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بايکلځغلولو وخت دی طبعآ زياتيز يا مثبت دی ورته دپلي چی په lيي ښايو وهلي لار هم تاکل کيږي،يعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پيل ټکي له 1,5 ساعته يو له بل څومره لرې دي. وهل شوې لار :

د بايسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$

د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقيب له 1,5 ساعته وروسته دواړه يو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاينيز- يا کرښيز مساوات :

د کرښيز مساوات فرمول د يوې اوښتونې يا مجهولې x سره داسی دی

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقيقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبيونه (حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقيقي اعداد وښوول شي چی که په پورته (۱ . ۹) برابرون يا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرايط پوره کړي. د حقيقي اعداد و بنسټيز قانون (۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کیدی شي چی د حقیقي عددد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چی مساوات زخمي شي. داچی ویش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو لیکل کیږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; ....(9,2)$$ ....

دا د (۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی٠که په څټ یا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیروو

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بیا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم ښه په څتوالی تشکیلوي ، نو په دې حالت کی حقیقي عدد x شته نه دی چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بیا برابرون (۱ . ۹) لاندې شکل نیسي

0.x = 0

دا برابرون بیا د ټولو ریيلګڼونو xلپاره پوره (ډك) دی. یا برابرون پوره کوي.

دا بیا داسی هم لیکل کیږي : (په خوښه bel) = xپس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره یواځنی ټاکلې اوبیونه (۹ .۲) لريد A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبیونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر ریيلګڼ x اوبیونه یا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د یوې اوښتونې یا مجهولی سره د ریيل برابرونونو د ګڼلو ټوله تیورې خوندي ده .

یو لاینیز برابرون (مساوات) (یو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرونونو ترمونو زیاتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سرې په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف په لور زیاتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته رااړوي، دا د II . 2 بنسټیز قانون له مخی یو ورته فورمبدلون یا بڼه بدلون دی)(د اوبي یا حل ډیری تغیر نه دی خوړلی) د بیلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زیات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1; .... (9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کیڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسې لیکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم یا بڼه یو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2} x = \frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کیدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د a1 |=0 په حالت کی په a1 وویشل شي:

$$x = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}$$

بیلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b-ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي.

ددې لپاره چی د ماتلاندې ښخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرون ترتیبیږي او راټولیګی، xله نوکانو ښخه راوځي

$$a^2bx + a^3x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د $a \neq 0$ له امله کیدی شي په a^2 وویشل شي (a+b)x=2b

دا د لاینیز برابرونونو بنسټیزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که ($a + b \neq 0, (a \neq -b)$ وي ، نو(x = 2b /(a + b

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوګونی یا یواځنی اوبیونه یا حل دی
که(a = -b) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبیون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زیاتي اوبیونې یا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د نیونی یا فرضیي له امله چی باید $b \neq 0$ وي، موجود نه دی.
پام:
په دې هکله زیاتې بیلګی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب یا ځله ووني په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی یا متحولې ولري، همغهسی شمیرل کیږي، لکه په ریبلعددونو کې۰
دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چیرې اړیینې وې او یا ګرانو لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلګي به هم راوړم او که چیرې کوم د شمیرپوهنې مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅیږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي څښتن غوښتل۰ زه دومره یادونه کوم، چې په دې هکله زما د شمیرپوهنې بنستیز کتاب کې زیاتې بیلګي راوړل شوي، خو نه پوهیږي، چې دا کتاب به چا ته ورسیږي او که نه

بیلګه 9 . ۲ :
برابرون (x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c =1 یواځې
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دی.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې)
سره ځل کوو: 6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x) =6abc
ورپسی نور، په لاندې ډول، د څرګندو شمیرلارو یا ـ قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$

$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$

$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بیرته د لاینې مساوات (۹ . ۱) بنستیزه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات یواځنی حل دی.
د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره د $0x=0$ له امله هر ریبل کې x اوبیونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره x په خوښه
دلته د ځیرل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول یی لاینیزوالی یا لاینیزتوب پیژندل کیږي، په څنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرینځیپ) کی کربنیز یا لاینیز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مګر په لاینیز مساوات یا برابرونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چی د ناپیژندونکو ضریبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زیات وخت په x هم شرطونه ایښول کیږي.
ددې لپاره لاندې کی درې ساده بیلګې راوړو:

بیلګه ۹ . ۳ :
برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$
د لومړي ځل لپاره ځلوری برابرڼ یا مربع مساوات دی، ځکه چی ځلوری(مربع) غړي لري. د یو له بل ځلولو یا ضربولو وروسته ځلوری غړي له منځه ځي. یو لاینې مساوات د یوې ځانګړي سره سره پاتي کیږي:

$$24x^2 -32x-27x+36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x +3x -x^2 -9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x -a) / (x-b) = 1$ یواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بیا لرو: $2x-a=x-b \Rightarrow x=a-b$
د $x \neq b$ له امله باید باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a-b$ لري او پرته له دې $(a = 2b)$ حل نه لري.

بیلګه ۹ . ۵ :
مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$
یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري . $x = a + b -c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځي هلته حل دی، کله چی $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځي د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b -c$ لري، په غیر له دې $(a+b=c)$ حل یا اوبیونه نه لري

بیلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څیړنه:

$$\frac{b^3c^2x-\frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3}-\frac{a^2x-\frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc}+\frac{abcx-\frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2}=0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تکرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$
$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$
$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$................ = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دئ

که برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوکانو یو له بل ځلولو راتول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونو یا ضریبونو $(A = 89a^2b^3c^2 \neq 0)$ څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$x = 1 / a^2b^3c^2, \; abc \neq 0$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چی مات لاندې یي له ځلونو جوړ وو، غواړو چی اوس داسی ماتونه وڅیړو چي مات لاندې یي له زیاتونونو جوړ وي، چی د نوکانو له لارې په ځلوونو توټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي .

بیلګه ۹ . ۷ :

برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$. :

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پيداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$

$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$

$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$

$$a^2bx - b = b.(a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندی)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي يو يا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بنديږي(، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$

$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$

$$.............2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$

$$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

$$...................................x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $0 \neq ab$ لپاره(دا د نيونو له لارې تل پوره دی)که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نيولی شي، بی له هغو چی په بنسټيزو نيونو کی له نيونو د باندې ساتل شوي وي) يعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د xمطلقه ارزښت د کېونو $a = b$ د په څېټ ارزښت سره نه شي مساوي کيدی .د x لپاره نيول شوې نيونی د حل ورکولو کی بايد په پام کی نيول شوي وي دا په دې مانا چي بايد تل پوره وي:

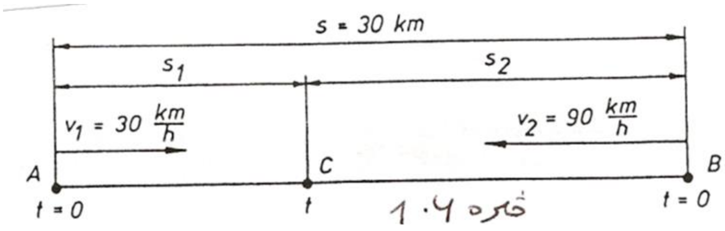
$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بيلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډې تمځايونه Aاو B يو له بل 30km لرې دي. د A څخه يو بارګاډی په ساعت کی د ديرش کيلومتره 30km/h په يوه ثابت سرعت يا چټکتيا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوزیږي. د Bڅخه یو تیز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزیکي لويي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځانیوني لپاره څیره څېره وکاږئ



پوښتنه » چیرته « د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لارs1) یا د Bلریوالي وC څخه(د تیزګاډي D لار s2) سره وشمیرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دئ کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو. دلته درې اوړېدوني یا مجهولی مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو ماروني یا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\ t \ \ , s_2 = 90\ t \ \ , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه(واحدونه) پرېښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو)!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو یا مساواتو سره چی حل به یی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولی مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کیدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که ولیکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي .s2 = 30 - x دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30\text{-}x) / 90$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاینیز ټاکنبرابرون یا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کیدی شي:

$30x = 30 - x$, $4x = 30$ $x = 7,5$

نو لرو

$s_1 = 7,5$ km , $s_2 = 22,5$ km , $t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15$ min

که ولیکو $s2 = x$ ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي یا بهیر نیسي:

$s_1 = 30 - x$, $t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

, $x = 22,5$

$s_2 = 22,5$km , $s_1 = 7,5$ km , $t = (22,4/90)h = 1h/4 = 15$ min

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتوني یا ناپیژندونی په څیر وټاکو، نو بار لري یا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90 x = 30$

$20x = 30$

$x = 30 / 120 = 1/ 4$, $t = (1 /4)h = 15$ min

$s1 = 30t = 30 /4$ km$=7,5$km

$s2 = 90 t = 22,5$ km

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د $0,25$ h$= 15$ min حرکت وروسته په $7 , 5$ km لریوالی یو بل سره مخامخ کیږي

بیلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځې د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بیلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څیړنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.خ. تکرار شي.

$$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 .a . b^4 .c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 . 3^2 . 5.a^3.b . c$$

$$5400\ a^2b^2c^2 = 2^3 . 3^3 . 5^2.a^2b^2c^2$$

اصلي ماتلاندي لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 . 5^3 .a^3b.c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ضل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل خلولو راتول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندې یې له خلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅیړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په خلونو توټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي: $ab \neq 0$ ، $|x| \neq 1 / a^2$.

اصلي مات لاندې (ا م ل) په لاندې ډول پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندي مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چي یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي) ، لنډونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) &= a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1) \\ 2a^2bx-a^2+a^2b^2x-b^2 &= a^4b^2x^2+a^2b^2x+2ab^2x-3b^2-a^4b^2x^2+b^2 \\ 2a^2bx-2ab^2x &= a^2-b^2 \\ 2ab(a-b)x &= (a+b)(a-b) \\ x &= \frac{a+b}{2ab} \end{aligned}$$

د $b \ne a$ او $ab \ne 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چي په بنستیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي(یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنهونو $a = b$ د په ځتې ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

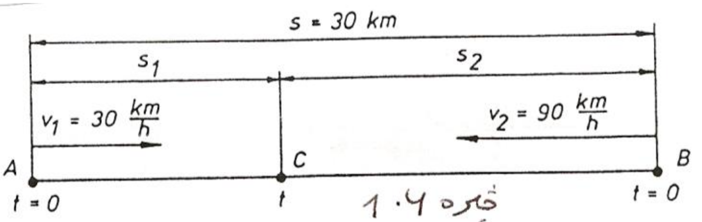
د x لپاره نیول شوي نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي؛دا په دې مانا چي باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \ne (a+b) / 2ab$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. دB څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویې یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t اوv سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



څیره ۶ . ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزګاډي D لار s_2) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو s_1 , s_2 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوری ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , \ s_2 = 90\,t \ , \ s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه پریښول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا درې مجهولې s_2 , s_1 او t دی د درې مساواتو سره چې حل به يې په ۶ الف او يا همداسې په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دي چي د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چی دا مساوات په يوې مجهولی مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کيدی شي s_2 , s_1 او t وټاکل شي. که وليکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنيو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30-x) / 90$$

لايني ټاکنمساوات د x لپاره دي، چی ساده حل کيدی شي:

$$30x = 30 - x , \; 4x = 30$$

$$x = 7,5$$

$$s_1 = 7,5 \text{ km}, \quad s_2 = 22,5 \text{ km}, \quad t = \frac{7,5}{30} \text{h} = \frac{1}{4} \text{h} = 15 \text{min}.$$

نو باور لري:

که s2=x کيږدو،نو شميرنه په لانې ډول ځغلي يا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x, \quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90},$$

$$3(30 - x) = x,$$
$$90 = 4x,$$
$$x = 22,5,$$

$$s_2 = 22,5 \text{ km}, \; s_1 = 7,5 \text{ km}, \quad t = \frac{22,5}{90} \text{ h} = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومي په څير وټاکل شي، يعني x=t ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$
$$20 x = 30,$$
$$x = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}, \quad t = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ min}.$$
$$s_1 = 30 t = \frac{30}{4} \text{ km} = 7,5 \text{ km},$$
$$s_2 = 90 t = 22,5 \text{ km}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15min خوزښت(حرکت) وروسته په 17,5km کې یو بل سره مخامخ کیږي.

۹ . ۲ تمرینونه

۱ . ناکرښیز یا نالاینیز مساوات د یوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ a او b نتیجه یې د ازمایئ! د مجهولو ضریبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b یې نه شي غوره کولی یا نیولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره یواځنی حل لري، حل نه لري او یا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رویه د نورو مجهولو ضریبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ –بې له کسرونو یا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضریبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3(6\frac{1}{2}+x)-\frac{7}{3}(2x-\frac{19}{2})-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴ . ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$

b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$

d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج یا مات لاندې کې یې ناټکلي ضریبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$

b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$

d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶,۱ – کسرمساوات یا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ . شي تمرينونه

۱ . ۷ . ۱ – که د یوه ګڼ څلور ځله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۲ – که د یوه ګڼ څلورځله او ۴ زیاتون ددې ګڼ او ۱۴ زیاتون سره برابر وي ، نو هغه ګڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د یوه ګڼ څلورمه برخه او پنځه ځله ۴۲ ګڼ ورکوي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۴ – که د یوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه ګڼ وویشل شي چی ۴ ترې کم شوی او ۱۱ لاس ته ترې راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟

۱ . ۷ . ۵ – د یوه ګڼ پنځه ځله او د ۳ زیاتو دوه ځله لوي دی. لکه د دې ګڼ دري ځله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۶ – د یوه ګڼ څلورځله او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی لکه د دې ګڼ دوه ځله او ۸ . دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د یوه ګڼ شپږ ځله او د ۵ کمون یا توپیر چی د دې ګڼ په څلور ځله او ۵ زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۸ – د یوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته ترې راځي. دا ګڼ څه نومیږي.

۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسی په دوه ګڼونو بیل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چی د مربع توپیر یی ۱۲۵ شي.

۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یی ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسي تناسب کی دي، یا یو بل ته داسي ځانونه نیسی . که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتی یي ۷ دي. دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاینیونکي ګڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي، نو یو دوه ځاینیونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځایګڼونو سره مګر په څټ ترتیب سره.

۱ . ۷ . ۱۳ – یو زدکړی غواړي د یوه ګڼ څخه مربع ریښه د یو په بل کی بندولو پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو ګڼ د ریښی په خیر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکي، چې مربع یې په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه ریښه ټاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ریښې مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ریښه یې غواړو پیدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – یو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسې حال کې چې نورو ډلې 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول 2 / غړي په بر کې نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلې څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – یو نفر په درې ورځو کې مجلې په داسې شمیر خرڅوي: په لمړی ورځ 1 / 9، دومه ورځ 1 / 6 او په دریمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمایي دوه کمي د ځان سره لري. هغه څومره مجلې د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – یوه میلمه د یوه زدکوونکي څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« څما پلار چې درې میاشتې پخوا یې خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، څما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زیات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د یوه زدکوونکي پلار څلورنیم ځله زوړ دی لکه د هغه ځوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د یو اویاکلن نیکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په یوه معما کې یو زدکوونکی د ې بل ته وایي: « که زه لما سره بټوه کې پیسو سره ۵،۲ افغانی ور زیاتي کړم ، زیاتون یې له ۵ سره ځل یا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا توپیر په 11 وویشم نو نتیجه یې ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کې څومره پیسی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسی تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوي دي،
دریم دوه ځله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي
مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اومیګا) ، په دې پروت شپانونك
۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) یوګوني مقاومتونه څومره لوي دي، ب
برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۲۰.۷ – د دوه غبرګ چالان عمومي مقاومت (ماته متآسفانه په افغانسان کی د
فزیك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چي په هدف به پوه شو) دی
a) 1000Ω , b) 2000Ω
یو مقاومت 4000Ω دی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت a) $12k\Omega$, b) 300Ω وي؟

. ۲۱ . د دريې غبرګو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت الف) $12k\Omega$
ب) 300Ω وي؟

. ۲۲ په اوبو کي یو د لرګي منډه باید څومره لوي وي، چی د لمبیدو استعداد
یی ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرګي خاص وزن یا کلکوالی (د فرمول څخه
معلومیږي چی دا څه شی دی) $4\frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشين لپاره ۴۰ ليتره ګډوډ د سونګ مواد لري.
څومره تيل او څومره بنزين په ټانك کی موجوددي که ګډونه يې وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونی کينول کيږي.
دا چی د مخه خرکې شوی او تل همغه واټن په يوه متر کوچنی شي ، نو په
سرك بيا ۲۰ ونی زياتی کينښنول کيدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته
څومره لوېي دی؟

۷ . ۲۵ د بايسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵
کيلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په يوه پله چی اوږدوالی يې
متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کی ، دا وروسته وړونکی د پروسېرکلني وړونکی څخه يوه نيمه
دقيقه وروسته په ځغاسته پيل کوي. د څو کيلو متره وروسته دی کړی
چی لمړني ځغليدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره
ثانيه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانيه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت ميله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په
ځغاسته پيل کوي. ځغليدونکی د پيل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي.
برخه نيوونکی په منډه پيل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو
وخت توپير څومره دی، که غږ رسيدنه په نظر کی ونه نيول شي او د غږ
سرعت ۳۴۰ متره په ثانيه کی وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ کومبيناتوريك - د بينوم جمله

کومبيناتريک څخه په شميرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې يو ګڼ ، پل ځاي بدلو
څومره والبشاي او که څو ګنونهخپل ځاي بدل کړې دا څنګه ليکل کيږي٠ د ځای بدلون
شميرنه ده
او د هغې ډولونه٠
په ۰ ۱ ۰ ۱ او ۰ ۱ ۰ ۲ برخو کی به د شميرپوهنی مرستندوي مواد د بينوم
جملی(۳.۱۰)
برخه(او کومبيناتوريك (۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتيت کليمي او بينوميالکوايفيڅينت
(بينوم ځلوني) پيل شي .

۱۰ . ۱ فاکولتيت Die Fakultät, factorial

پيژند ۱۰ . ۱ :
د !nسومبول (ويل کيږی n « فاکولتيت «) لاندې سړی له1 تر n پورې ګنونو ضرب
پوهيږي، يعنی $n! = 1.2....(n-2).(n-1).n$ برسيره پر دې تعريفوو: $0! = 1$

د فاکولتيت له پيژند څخه څرګنديږي، چی $(n+1)! = n!.(n+1)$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:
په افغاني ادبیاتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتیت په ځاي فاکتوریال لیکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کلیمه یا پښتو ، ځله وونی،، زیات کاره ولی، هیله ده چی تاسو به یی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی۰

بیلګی :

الف !n : د 5 = n لپاره په دې ډول دی: 120 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = !5

ب : په دې ډول دی : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$

پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بینوم ځلوونی یا ضریبونه

پیژند: ۱۰ . ۲

د سیمبول $\binom{n}{k}$ (وییل کیږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهیدل کیږي چی هر یو k ځله وونی یا ضریبونه یا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k}\frac{n+1-i}{i}$$

برسیره پر دې دا هم په کلکه کره کیدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ یو پیدایښتي یا طبعي ګڼ دئ او د ماتلاندې او مات باندې ګڼونو ګڼون یا تعداد ښايي،په مات لاندې کي د لومړيو k پیدایښت یا طبیعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رییل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دئ. دوم فاکتور1 - n ، دریم n-2 تر k –م

فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اویلر(leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سویسي ګڼپوه، فزیکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړې ځل لپاره پیل شو، له دې امله ورته د اویلر سومبول وایي پرتله یا مقایسه برخه ۱۰ . ۳ (. که څوك دیوه

بینوم پوتنځ یا توان شمیري) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سیمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چی د یوا-
ځنیو زیاتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بینوم ضریب یا بینوم ځلهووني ویل کیږي.

بیلګی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ ،} \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعریف نه دی ، ځکه چی 3 / 1 پیدأیښتي یا طبعي ګڼ نه دی.

د بینوم ضریبونو یا ځلونوخویونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ - د $n<k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$

که n یو طبعي ګڼ وي او له k کوچنی وي، نو صفر په ماتباندې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سرى د $(n-k)!$ سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k ولیکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کېڼ اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په څیر ولیکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون ګډ فاکتورونه چی په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)+n(n-k)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ۱ افاده یا وینه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله وونې په ځیر ولیکل شي، لاندې بینومیال یا بینوم ځلوونی (ضریب) تعریفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بینوم جمله

د بینوم لاندې سرې د دوه توکو (ګنونو) زیاتون پوهیږي. یعني: x+y
د بیونم جمله موږ ته ښایي چې څنګه د یو بینوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چې پیدایښتي ګڼ n یې ایکسپوننت یا جکګڼ یا لنډ جګ وي، د زیاتون په څیر پر مخ بیول کیږي. که د x + y بینوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اکسپوننت لپاره شمیرو، نو لاندې نتیجه لاس ته راوړو :
پاسکال دریګوډی

$$(x+y)^0=\dots\dots\dots\dots\dots\dots 1$$
$$(x+y)=\dots\dots\dots\dots\dots\dots x+y$$
$$(x+y)^2=\dots\dots\dots\dots\dots x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=\dots\dots\dots\dots x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=\dots\dots\dots x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5=\dots\, x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې د زیاتونونو پرمخبیولوکی یو قانونیت لیدل کیږي. د زیاتونو ګڼون(شمیر، تعداد) د بینوم د اکسپونښت څخه په یو لوي دی . ټول زیاتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په داسی ډول چی د x اوy پوتنځ زیاتون په n برابریږي او په دې ډول د x پوتنځ په کمیدلو) د y پوتنځ په زیاتیدلو دx په اکسپونښت په ترتیب پرلپسی
n , n-1, ...1 , 0
د yاکسپونښت په ترتیب 0,1 n-1,n..,دي. د بینوم پوتنځ کوایفځینتونه داسی په نامه پاسکال Blaise Pascal(۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه(ګڼوندریګوډی جوړوي .

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کیڼ-ښي پرتوګڼونوزیاتون دی، چی بي له کړاو د نورو اکسپونښتویا په جګو n = 7,8, ... لپاره پرمخ بیول کیدی شي. د ډیرو لویو اکسپونښتو n لپاره بیا هم دالار له کړاو ډکه ده لیونارد اویلرLeonhard Euler د کومبیناتوریك فکرونو کی د کوایفیځینتونو یووني یا یوونوالي یا بهتره یوونوالیز ستروکتورونه یا جوړښتونه وپیژندل. په n -م n (د بینوم جګ یا اکسپونښت (لیکه اوK- م ځای، n ,.... , 1 , 0 = k کی ولاړ ضریب دفورم څخه دی) له کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اویلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بینوم ضریب په
ځیر رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دریګوډی د اویلر سومبول استعمال په ځیرولیکل شي نو لاس ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\binom{0}{0}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\ldots\ldots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\ldots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\ldots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داويلر سومبول كى د فاكتور پرځاي ، چې ګڼونه دى ، سومبول $\binom{n}{k}$ ليكل كيږي.

يادونه : ما كله a,b او كله بيا x,y ليكلي، دا په يو ډول ليكنه ښكلې ښكاريږي، خو زه كله كله داسې ستونځې لرم .

په ۱۰ . ۲ برخه كى د بينوميالكوايفيڅينت لپاره ښوول شوو خويونو ۲ په بنسټ د پاسكال دريكوډي منځنى محور ته سيومتري پراته كوايفيڅينته سره مساوي دي. داچى هر كو- ايفيڅينت ورباندې پورته كوايفيڅينتونو زياتون سره مساوي دى په ۳ كى وښوول شو) د تمرين وظيفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله) مقايسه(شي) د اويلر سيمبول په استعمال

د يوه بينوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زياتون پرمختګ د يوه طبيعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول ليكلو ته اجازه راكوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۱ (د بینوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندوکشن پیل : (n = 0)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + ... + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ایندکشن نیونه : (n = k)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + ... + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + ... + \binom{k+1}{k}ab^n$$

$$+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دایندکشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + ... + \binom{k}{k}ab^k$$

$$+\binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + ... + \binom{k}{k-1}ab^k + + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که يو د بل سره (يو د بل لاندې په څنګ يا كږې پرتی) برابر پوتنځ يا توان ځلونه د اويلر فرمول يا سومبول د زياتونخويونو د استعمال له لارې سره راټول (يوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{0} = \binom{k+1}{1}, \binom{k}{2} + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{2}, \ldots, \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = \binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زياتون ضريبونه وليكل شي نو غوښتل شوې اړيکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}, \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بینوم له جملی د يوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}(-b)^i$$

بيلګي:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

۱۰ . ۴ کومبیناتوريك:

کومبیناتوريك د يوې ډيرۍ د پای غړو يوځای درولو يا راوړلو ترتيب قوانينو سره سر او کارلري. کيدی شي د ټولو غړو يا يوې برخي يوځاييولو په څير راوړل شي، په يوځاييولو کی کيدی شي د غړو ترتيب يو رول ولوبوي او يا هم نه، او همدارنګه په رابوځاييولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي د غړو تکرار راشی او يا هم نه. له دې امله د يوځاييولو يا ټولګی دری ډولونه توپيروو(Komplexion هم ورته وايي)، په نامه پرموتيشن، واريیشن، کمبينيشن (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چې په لاندې برخو کی يو په بل پسی څيړل کيږي او په اخرنی جدول کی به ليديدونکی څرګند شي يا ليدوړو ښوول شي

۱۰ ۰ ۱۱۰٤ پرموتيشنPermutare

(لاتين: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پيژند ۱۰ . ۳ :

د n غړو يو پرموتيشن (ځاي بدلون)بې له تکرار داسی »يوځاي درول« دي، په کوم کی

چي n غړي په يوه د زړه پوري ترتيب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتيبونه

تل د مختلفو پرموتيشنونو يا ځايبدلونونو په مانا ده

بيلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتيشن

الف : 1 2 دی 12 21

ب : a , m دی a m m a

۲ - د درې غړو پرموتيشنونه

الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایې ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیداینتي ده، چې د پښتو لیکسیکایې ترتیب پجه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کڼ کښته لور ته بیا بیرته پورته

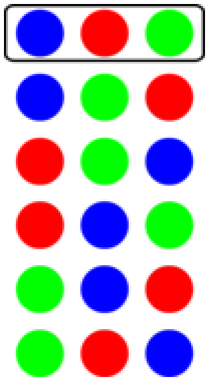
amsu	masu	samu	uams
amus	maus	saum	uasm
asmu	msau	smau	umas
asum	msua	smua	umsa
aums	muas	suam	usam
ausm	musa	suma	usma

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ (ا ت ج ګ دي:دلته طبعآ له ښي وکيڼ لورته ترتيبيږي(

اتجګ	تاجګ	جاتګ	ګاتج
اتګج	تاګج	جاګت	ګاجت
اجتګ	تجاګ	جتاګ	ګتاج
اجګت	تجګا	جتګا	ګتجا
اګتج	تګاج	جګات	ګجات
اګجت	تګجا	جګتا	ګجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلګی په ډول له ځلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دي مانا چی د ليکسکا لغاتو ترتيب ته »کتې متې« (ورته) دی، چی د غړو پيدايښتي لړی مخته پرته وي (په تورو، په ګڼونوکطبعی يو په بل پسي). دبيلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دې غړو) يا تورو(جوړ شوي پرموتيشنونه) لغاتونه(maus همدا رنګه saum په دي ترتيب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ (کی د ځلورو تورو ا ، ت ، ج ، ګ پرموتيشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی يي تاګج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی يي جتاګ ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته دربې غونډارو لپاره نظم یا ترتیب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که لیکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي لیکو :$6! = 720$

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو Pn ګڼون (شمیر یا تعداد) ، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $P_n = n!$

اوبنونه : د پوره ایندکشن له لارې :

داینډکشن پیل : $(n = 1):\quad P_1 = 1! = 1$

د ایدکشن نیونه : $(n = k):\quad P_k = k!$

د ایندکشن غوښتنه : $(n = k+1):\quad P_{k+1} = (k+1)!$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په !k پرموتیشنونو کی د ځل په څیر یو(k+1) -ام غړی راځي. دا (k+1) - ام غړی کیدی شي له لومړې تر (k+1) - ام ځاي پورې ودریږي، داسی چی د (k+1) -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن k+1 پرموتیشنونه د k+1 غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\,(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلګه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسی (دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شئ) کی لس زدکوونکی په یوه لیست کی خپل نومونه لیکلی شي ؟

اوبی یا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ •

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتيبونه، د کومو څخه چی i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کيږي،

د i = 1 , 2 , ... ,k لپاره، نو پرموتيشن د تکرار) د تکرارسره پرموتيشن(سره نوميږي . د غړو شمير په پرموتيشن کی بيا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

بيلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتيشن په کوم کی چی غړی a يو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کيږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دي ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتيشن، په کوم کی چی a دوه ځله، غړی b دري ځله رامنځ ته کيږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندې ډول دی

aabbb ababb abbab abbba
baabb babab babba
bbaab bbaba bbbaaa

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتيشن ګڼون يا تعداد $P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)}$ ، له کومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کيږي ، په لاندې ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه يا اوبيونه: که په پرموتيشن کی n = n1 + n2 + ...+ nk (دلته دې ګڼونه دn اينډکس کې ومنل شي) غړو يو له بل توپير لرودی (مختلف وي) ، نو n! پرموتيشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچی د ni غړو لپاره ni!
پرموتيشنونه موجود دي، نو ni پرموتيشنونه د يوه پرموتيشن په څير رايو ځاي کيږي،

دا په دې مانا چی د!n شمير په $n_i!$ بايد وويشل شي (i = 1 . ..., k)

بيلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتيشن، په کوم کی چی لومړی (n_1-1)- ځله او دويم (n_1-2)- ځله رامنځ ته کيږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتيشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دويم (n2 = 3) -ځله رامنځ ته شي، دی

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ واريیشن اوښتنه يا بدليدنه Variation :

تعريف ۱۰ . ۵:

د n غړو واريشن (بدليدنه يا اووښتنه Variation) لاتين(بدلونه اووښتنه تغيرونه يا بيا تغيرونه) و k -ام ټولګي ته(وهرې k ټوټی ته، n ≤ k) هر له k غړو يوځانکول (بوځاي درول، يوځاي ليکل) دی، کوم چی د n غړو د لړۍ پرلپسی په نظر کی نيولو سره جوړيږي..

بيلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c واريیشن و دويم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ab	ba	ca
ac	bc	cb

۲ - د ځلورو غړو c , b , a , d واریيشنونه و ۲ - م ټولګي ته دي:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

د ځلورو غړو c , b , a , d واریيشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دې

dab	cab	bac	abc
dac	cad	bad	abd
dba	cba	bca	acb
dbc	cbd	bcd	acd
dca	cda	bda	adb
dcb	cdb	bdc	adc

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واریيشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

51	41	31	21	12
52	42	32	23	13
53	43	34	24	14
54	45	35	25	15

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو واریشنونه و n -ام تولګي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا برابر کیږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو و k -ام تولګي ته د واریشنونو ګڼون (تعداد) $V_k^{(k)}$ دی :

$$V_k^{(k)} = n(n-1).(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبنونه : د مکلمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې) ایندکشن په k اړه لري، n ځاي په ځاي دی یا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ایندکشن پیل :(k = 1)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټیك (صحیح) دی ، ځکه چی له n غړوکیدی چی له یوه غړی جوړ واریشنونه جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : (k = k0) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت:):(k0 +1 = k)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دایندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واریيشن لپاره، په دې واریيشن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی n - k0 غړو شمیر دی .که په ترتیب یو له دې n - k0 غړو د دې k -م تولګی واریشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې یو د k+1 تولګي n - k0 واریشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واریشنونو $v_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واریشنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0)=\frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې یود n - k0 غړو ورزیات په یو بل ځای کیښوولی وی، نو یود k+1 ټولګي واریيشن به یی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دی. دا سړی په بیلګه ۲ (k =3= n = 4, k = 2 , k) باندې لیدوړ کولی شي)

بیلګي:

۱ - د درې غړو واریيشنونو شمیر و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)}=\frac{3!}{(3-2)!}=6$

۲ - د څلور غړو واریيشنونو شمیر و دوم ټولکی ته دی: $v_4^{(2)}=\frac{4!}{(4-2)!}=12$

د څلور غړو واریيشنونو شمیر ودریم ټولګي ته دی: $v_4^{(3)}=\frac{4!}{(4-3)!}=24$

۳ - د پنځه غړو واریيشنونو شمیر ودوم ټولګي ته دی: $v_5^{(2)}=\frac{5!}{(5-2)!}=20$

پیژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واریيشنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی یوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واریشنونه د تکرار سره نومیږي یا بلل کیږي.

بیلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واریيشنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

aa	ba	ca
ab	bb	cb
ac	ba	cc

۲ - څلور غړو a , d , c , b د دويم ټولګی واریيشنونه د تکرار سره دي:aa

	ba	ca	da
ab	bb	cb	db
ac	bc	cc	dc
ad	bd	cd	dd

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دریم ټولګي واريیشنونه دي(دا لاندې ولاړ ترتيب له کيڼ وښي لور ته دی، خو په لاندې کې په څټ شوی)

111	211	311
112	212	312
113	213	313
121	221	321
122	222	322
123	223	323
131	231	331
132	232	332
133	233	333

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام تپولگي د واریيشنونو شمیر $V_{W_n}^{(k)}$

$V_{W_n}^{(k)} = n^k$ د تکرار سره دی: $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل (k = 1) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحح دی، ځکه چی له n غړو څخه n واریيشنونه،چی هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه (k0 = k) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه (k0+ 1 = k): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د (k0 + 1) -ام درجی واریيشنونه د nk واریيشنونو چی k0 – امه درجه واریيشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چی له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دې، چی په واریشنونو بی له تکرار شوې ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمیر $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ واریيشنونه دی.

بیلگي :

۱ - د درې غړو و دوم تپولگي ته د واریيشنونوشمیر له تکرار سره دی

$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$

۲ - د څلور غړو و دوم تپولگی ته د واریيشنونو شمیر له تکرار سره دی

$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۳ - د درې غړو و دریم تولګي ته ض واریشنونو شمیر له تکرار سره دی

$$V_{W3}^{(3)} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کربنی یوځای کیږي.

د یوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښو شمیر دی

$$V_{W2}^{(1)} + V_{W2}^{(2)} + V_{W2}^{(3)} + V_{W2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبینیشن (Kombination (لاتین: یو بل سره تړل)

تعریف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام تولګي ته (n > k) یو کمبنیشن هغه دی چی هر یو له k غړو یوځاي دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نیولو سره، جوړوي.

کمبینیشن له واریېشن منځ ته راځي، که چیری نظم په پام کی ونه نیول شي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم تولګي ته کمبینیشن په لاندې ډول دی:

ac bc

ac .....

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم تولګي ته کمبینیشن په لاندې ډل دی

ab bc cd

..... ac bd

ad ....

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې څلو غړو ودریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي:

bcd abc

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي(لاندی هم باید له کیڼ لاندې لورته په ښی لور لیکل شوي وی)

345 234 123

235 124

245 125

134

135

145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اوریېشنونو شمیر دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبینیشنونه له واریېشنونو په دې توپیریږي، چی ترتیب په نظر کی نه نیول کیږي، دا بیا دا مانا لري چی ټول د k غړو k! پرموتیشنونه په یو کمبینیشن کی یوه ته یوځاي کیږي

.له دې امله لرو :
$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینشنونو شمیریا ګڼون دئ

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دئ د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دئ

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دئ

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمیر دئ

الف (یو شپږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : یو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تیپ عددونه د یوه ۴ عددونوګروپ څخه بوځای کیږي، چی له ایستل شوو شپږ عددونو (۴ تیک یا صحیح) او دوه عددونه(۲ پاتی عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبینیشن، په کوم چې یواځنې غړي k - ځله تکراروي، کمبینیشنونه د تکرار سره نومیږي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینشنونه دي.

aa ....

ab ...... bb

ac bc cc

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي

aa ....

ab .... bb

ac .... bc cc

ad bd cd dd

۳- د درې غړو 1 , 2 , 3 و دریم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي(لاندې لیکنه باید له کینې لور پیل وی، خو دلته له ښی لور پیل شوی وکینې لور ته)

111 221 331

112 222 332

113 223 333

123

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تکرار سره د کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی(چې په k د پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نخښه وي . (نخښه شپږ اړخیز) ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لوېږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،واریيشن،کمبینیشن ټولکه

داا	د په پا یوې برخی راټولونه م کی نیولو شوو غړو		د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه
	له نظم تیریدنه	نظم په پام کی نیونه	
	کمبینیشن	واریيشن	پرموتیشن
د ټول غړي یوله بل توپیر لري	د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	د n غړو واریيشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$	دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګڼون $P_n = n!$
له تکرار سره	د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$	د n غړوواریيشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)} = n^k$	د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,\ldots n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!\ldots.n_k!}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ – لاندې فاکولتی وشمیرئ

الف) 7! ، ب) 3!.5! ، پ) 6! / 4!.I0!

۲ – لاندې ویشونه ساده کړئ

a) (n+1)! / (n-2)! b) (2n)! / n! c) n! / 2n!

۳ – لاندې افادې وشمیرئ!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\dfrac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زیاتونونه وشمیرئ!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونی (استعمال) په بنسټ وګنئ!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2-y/3)^4$ e) $(2\quad a+3\quad b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده کړئ!

a) $(-1+a)^2-(1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

c) $(\quad ab-1)(-a-\quad ab)+ab$

۷ – د بینوم په یو ځل یی بیل (تجزیه) کړئ!

a) $25a^2+10\,ab+b^2$ b) $(49a^2-42a+9$

c) $169a^2-130\,ab+25b^2$ d) $2x+2.\quad 6xy+3y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ - الف) د غړو ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ پرموتیشنونه په لکسیکوګرافي نظم ولیکی!

ب) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو ځایونو کی« fahne » او« hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر» دی.

۹ - الف) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟

ب) څومره پنځهٔ ځیفري ګڼونه د پنځه ځیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟

پ) د غړوa,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ – الف) د غړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکی، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.

ب) د دې پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګڼی!

۱۱ - څومره تنظیم شوي جوړې د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ – د څلورم ټولګي څومره مختلف واریشنونه د

الف) بي له تکرار

ب) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟

۱۳ – یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرځونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دی. څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو ځل سوری شي؟

۱۴ - له شپږ غړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دي،

الف) بي له تکرار

ب) له تکرار سره؟

۱۵ - یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ - څومره مختلفی ازمایني ممکن دي که په یوه تولید کی له هر ۲۰ یوه وازمایل شي؟

۱۷ - په موټرو ترافیك تختبی په لاندې توګه یوځای شوی : یوه د ځای نښونه ډله د تختبی الف بی پسی څلور ګروپ یا ډله راځي، چې له څیفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د یوې کره ټاکلی الف بی پیژندنښی یا ترافیکی تختبی ممکن دي؟

۱۸ - د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه ، د رنګونی له لارې یو له بل توپیریدی شي ، که څلور رنګ نښونی ولرو؟

۱۹ - د منډې یوه میچ په اخرکی شپږ پاتی منډې وهونکی برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟

۲۰ - په څومره ډوله

الف) اته مختلفی مرغلرې،

ب) درې سرې، څلور شنی، یوه زرغونه مرغلره

ترتیبیدلی شي؟

۲۱ - څومره تلفونونه کیدی شي وتړل شي کی یواځي پنځه ځایزه نمره موجود وي؟ څومره تلفون تړل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځایزې وي او په 0 پیلکیدنه یی اجازه ونه لري؟

۲۲ - د درې شپږسترګیو (یا -اړخیزو) سره (څیره مکعب دی اومخونه له یوې تر شپږ سترګو باندې په تختبه دي، ماته یې د پښتو نوم نه راځي او االماني یی Würfel دی) څومره مختلفی اچونی ممکن دي، چې ټولې شپږسترګې مختلفې سترګې ګڼون وښایي؟

څومره مختلفې اچوني له درې شپږسترګیو سره ممکن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ کرښيز-، خطي – يا لاينيز الجبر

يادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بيا دې ته ګوته نيول شوي وي ، چې څه به تکرار
وي، خو هغه لاتين متل دى، چې » تکرار د زدکړې مور ده .«
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چې n اووښتونې يا مجهولى يا
ناپيژندونکى لري، وقف ده، چيرته چې m د برابرونونو ګڼون يا تعداد n د
ناپيژندونکو يا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او يا کوچنى کيدى
شي
په ۱۱ . ۱ برخه کى د دوه ناپيژندونکو يا مجهولو سره د برابرونونو سيستمونه تر
څيړنى لاندې نيول کيږي، چې د ښوونځي شميرپوهنى تکرار دى، مګر دلته د
برابرونونو سيستمونه د ناټاکلوځلونو يا ضريبونو يا فاکتورونو سره هم راوړل کيږي،
چې د حالتونو توپيريدنه يې اړيينه ده٠
دا راوړنى به په ۱۱ . ۲ برخه کى درې ناپيژندونکو يا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کى
په خوښه زياتوناپيژندونکو ته وغزيږي، په ټولو برخو کى پل په پل د ديترمينانت کليمه او
د ګاوس الګوريتم د کار ډګر ته را اچول کيږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجينو برابرونونو سيستم ځانګړي ځوابونه په بر کى نيسي٠
يادونه : ولې لاينيز برابرونونه او نه کريز يا بندکرښيز يا خطى؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ د برابرونونو له څيرې پوهيږو، چۀ دا يوه کرښه ورکوي، چې لاتين يا کۀ غواړئ انګريزي يې لاين نوموليٴ د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسې منځپانګې سره يې توپير وي،نو موږ هم ورته له دې امله لاينيز وايو٠

۱۱ . ۱ . لاينيز برابرون د دوه ناپيژندونکو سره

داسې يو مساوات د دوه ناپيژندونکو سرهکيدي چې په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11.1)$$

دلته کيدی شي چې ناپيژندونکی لويي x او y په خوښه رييل ګنونه وي چې يو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. يا په بل عبارت : x او y واريابلی(اووښتونکی يا لنډ: اووښتونې) دي، برابرون (۱۱ . ۱) لاينيز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چې د هغي څيره په y,x کواوردينات کی ناپای کرښه ده(۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)

ځانګړی حالت : a = 0 يا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي يا په ګوته کوي چې د y - محوراو همداسې د x - محور سره غبرګه د ه .

که دا (۱ . ۱۱) برابرون د دواړو نايژندونکو يا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات يا ټاکنبرابرون ونيول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ددې مسئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهيدل غوښتونکی وي.

د (۱ ٠ ۱۱.) برابرون اوبيونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x ,y) ډيری ده، چې(۱۱.۱) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱) د y په لور داسې ځوابوو.

$$y = - (a/b)\, x + c/b \qquad (11.2)$$

کيدی شي چې x په خوښه وټاکل شي اوy له (۲ . ۱۱) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چې ناپاي ډيرې اوبيونې يا حلونه لاس ته راځی يعني د اوبيونې ډيری يا اوبيډيری L په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = - (a/b)\, x + c/b \} \qquad (11.3)$$

داسې لوستل کيږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډيری ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون)٠

ددې لپاره لنډ ليکل کيږي: د (۱۱ . ۱) برابرون اوبی يا حل y = -(a/b)x+c/b ،د خوښی x ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

طبعآ کیدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نیسو، نو د لته
د برابرون (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښهy ٠

دا چي په لاندې کی موږ د درېو یا ډیرو ناپیژندونکو یا نامعلومو برابرونونو سره سر
او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپیژندونکې د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه
د $x_1, x_2, x_3, ...$ سره .
ددې په نخښونو سره کیدی شي چی په څرګند ډول وښایو:
لاندې برابرون د دوه ناپیژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, ...(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دې مانا چی i = 1 , 2, 3٠٠٠ ناپیژندونکو یا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه
کیښوول کیدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, ...(11,5)$$

په خوښه x_2

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; ....(11,6)$$

x_1

په خوښه

د 0 = b =0.x1+ 0.x2) 0 = a1 =a2 = b(لپاره ناپای ډیر ځوابونه

د په خوښه

$$x_1, x_2, ...(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$

لپاره

$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$

په ځتوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.
نوټ : دلته

∞^i

دا مانا لري چې د ناپیژندونې یا مجهولی

x_i

لپاره i = 1,2.. په خوښه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاینیز برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سره
د دوه برابرونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1a_{12}x_2 = a_1$$

$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;..................(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کیدی شي چې په اوبښتونو یا واریابلو x 1 اوx2کی د بلواکبرابرون یا فنکشنمساوات په ځیر ونیول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښې یو بل غوڅې کړي نو دا د مساواتو په سیستم (۸ . ۱۱) کی د کرښو یوګونی(بهتره : یوګونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی) اوبیونه ده یا حل دی.
که دواړه کرښې یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چې د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخې ټیك یا فقط مساوات I یا مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډیر

∞^1

ځوابونه موجود دي.
داسي هم کیدی شي چې فورمال

∞^2

رامنځ ته شي، که ټول

$a_{ik} \wedge a_i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څیړو. دا څیړو چی، که دا برابرون اوبیونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کیږي، چي کربښه I اوکربښه II غبرګي ځغلي مګر یو په بل نه وي پرتی.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپیژندونکو یا اووښتونو سره، کیدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - یو یواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دئ (اصلي حالت)

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دئ پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لري)

۳ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابره دی)

۴ - ناپاي ډیر ځوابونه موجود دي.

(ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي)

د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپیژندونکی لري، کیدی شي په اسانتیا وپیژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دئ.

په سیستمونو کی چي درې یا زیاتي واریابلی یا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پیژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنګه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پیل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پیدا کړو. دلته باید دري بنسټیز د مساواتسیستم د ځواب کاردودونه)متودونه(تکرار شي:

۱ . د برابر یا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

دواړه برابرونونه د یوې نامعلومی په لور اوبی کیږي(د بیلګي په توګه د x دوه په لور(، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابرون د یوې نامعلومي سره منځ ته راځي۰

۲ - یو د بل پر ځاي کینولو متود:

برابرون یا مساوات د یوې ناپیژندونکې (د بیلګي په توګهx دوه) په لور ځواب کیږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کیږي، په دې ډول د یوې ناپیژندونې برابرون منځ ته راځي (د بیلګي په توګه دx یو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سړی یو ټاکلی څو برابره (کیدی شي چی کمیز یا منفي هم وي) د II برابرون د I برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسی چي یوه ناپیژندونی بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نیتجي سره بیا دا بله ناپیژندوني څیړي. دا د داوړو نامعلومو(ناپیژندونو) لپاره کیداي شي . دا متود دبرابرونونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چی د دیترمینانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .
دا متود په درې ځانګړو برابرونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول څلورځلوني(ځله ووني یا ضریبونه) بایدله صفر توپیر ولري یعني $a_{ik} \neq 0$ که چیرې یو $a_{ik} = 0$ د بیلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لرودی:

$$I.............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;......a_{11} \neq 0$$
$$II....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;..........(11,9)$$

دلته نو
$a_{21} = 0$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجي څخه يي چی په I کی کښیښودل شوې وی x_1 هم معلومیدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوریتم په استعمال بیا برابرون د درېګوډي شکل باندې اړول کیږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :

سیستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4

II x1 - 2x2 = -5

دا سیستم یواځنی یوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړیکی نه لري

سیستم ۲

2x1 + 3x2 = 4

II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانۍ ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دئ . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښایی او په دې ډول د مساواتو اوبیونې ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بي ډیله څرګنده ده چی برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په څټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چی II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$
$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$
$$-(7/2)x_2 = -7$$
$$x_2 = 2;\Rightarrow$$
$$x_1 = 2-(3/2).2$$
$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځاي کینولوکاروونه (عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کی ځاي په ځاي کیږي٠

$$II'::;........x_1 = 2x_2 - 5$$
$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$
$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$
$$7x_2 = 14$$
$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ) د زیاتونکاروونه: x_1 له منځه ځي، که (-2) ځله د II برابرون و I ته زیات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$I:................2x_1+3x_2=4$
$(-2)II:........-2x_1+4x_2=10$
$I-2II:....................7x_2=14$
$...................................x_2=2$

کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II څخه x1 وشمیرل شي:
$x_1=2x_2-5=4-5=-1$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي
x2
له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$2.I:............4x_1+6x_2=8$
$3.II:............3x_1-6x_2=-15$
$-------------------$
$2.I+3.II:........7x_1..........=-7$
$........................x_1.............=-1$

یادونه : په پورته کي یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته اینسول کیږي، پو هیږ.و، چې چیرته ټکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :
سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف (مساوي اینوولو:
I' : x1 = 2 -(3/2).x2
II': x1 = 2 -(3/2)x2
2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x
0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته
$x2$
په خوښه. دا په دي مانا چی
$x2$
هر ارزښت نیوی شي ۰ له I' څخه ناپای ډیر ځوابونه لاس ته راځي
$x1 = 2 - (3/2)x2$ او $x2$ په خوښه.

ب) د بل په ځاي اینوولومتود: $I' \quad x1 = 2-(3/2)x2$,
په II کی اینول کیږي

$$II' \quad 4.(2-(3/2)x2) + 6x2 = 8$$
$$8-6x2+6x2 = 8$$
$$0.x2 = 0 \quad x2$$
په خوښه له II' لاس ته راځي
$I' : x1 = 2 - 3/2\ x2$ $x2$ په خوښه

پ) د زیاتون متود یا لار یا طریقه:
$$2.I \quad 4x1 + 6x2 = 8$$
$$II \quad 4x1 + 6x2 = 8$$
$$II - 2.I : \ 0x1 + 0x2 = 0$$
که یوائی دا مساوات په نظر کي ونیول شي ، نو x1 او x2په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چی د x1 او x2 ترمنځ په I یا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یوائي یوه ناپیژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:
$$x1 = 2-(3/2)x2$$
$x2$په خوښه
په همدې ډول:
$$x2 = 4/3 -(2/3)x1 ,$$
دلته $x1$ په خوښه ټاکل کیږي

بیلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$I': \quad x1 = 2 -(3/2)x2$

$II': \quad x1 = 5/2 -(3/2)x2$

$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$

$0.x2 = 1/ 2$

دا یو په ځتوالی یا تضاد دی، ځکه چې هیڅ یو رییل ګڼ x2 نه شته چې دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي لیکلو عملیه: $I': \quad x1 = 2 - (3/2)x2 \quad ,$

په II کی دی په ځای شي

$II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$

$8 - 6x2 + 6x2 = 10$

$0.x2 = 2$

دا مخامخوالی یا په ځتوالی یا تضاد دی ، پس ځواب نه شته.

پ) د زیاتون متود:

$2 . I \qquad 4x + 6x = 8$

$II \qquad 4x + 6x = 10$

$2.I - II \qquad 0.x + 0.x = -2$

په ځتوالی یا تضا د دی ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پېښتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم یا بڼه برابرونسیستم ورکړ شوی:

$I \qquad x /(a+b) +y/(a-b)$

$II \qquad x /(a-b) +y/(a+b)$

دا ټيك هلته موخه ور یا هدفمند دی چې $a =| b$ او $-a =| b$ وي، یعنی $|b| =| |a|$ وي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود ترلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کیدی شي.
لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:
د I ځل له (a+b)/ 1 او II ځل له (a-b)/ -1 څخه وروسته دا لرو:

$$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$$

$$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$$

له دې سره د y دواړه ځله وونې یاضریبونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په څټ) نخښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توګه مو یو برابرون د یوې ناپیژندونکی سره مخ ته پروت دی:

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له (a+b)/ 1 او IIله (a-b)/ -1 سره ځل شي کیدی شي: چی y په ورته ډول وشمیرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپيژندونکی مساوي دي، کومی چی ځموږ د څیړنی لپاره بي مفهومه دئ.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو څیړو چی کوم حالت توپير د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات) * (تر څیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

.1 a = 0 , b |= 0

مساوات)*(داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

. 2 a |= 0 , b = 0

برابرون(*)(په دې حالت کی داسی دئ.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په ښتوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو $y = a - x$, دلته x په خوښه دئ

3 . $a=b=0$

دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دئ.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د $(3x-2y)(2x-3y)$ سره ځلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لويي x , y راپیدا کړو . موږ ځاي پر ځاي کو

$u=1/(2x-3y)$,$v=1/(3x-2y)$

او لاس ته راوړو:

$$11u+18v=13 \iff 11u+18v=13$$

$$27v-2u=1 \qquad -2u+27v=1$$

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$$33u+54v=39$$

$$4u-54v=-2$$

$$37u=37$$

$$u=1 \Rightarrow v=1/9$$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$$1=1/(2x-3y) \iff 2x-3y=1$$

$$1/9=1/(3x-2y) \iff 3x-2y=9$$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $x = 5$, $y = 3$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ . ۱ . ۳ دویمه درجه دیترمیناتې او د کرامر قاعده

که په ټولیزسیستم(11.8) باندې د زیاتون متود استعمال شي، نودx2د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{12}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ (وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - {}_{21}.I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};\ x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ldots\ldots\ldots(11,12)$$

که د ارزښتونه په (11 . 8) کی ځای په ځای شي نو تصدیقیږي، چې(11 . 12) په ریښتینی د (11, 8) ځواب دی. له (11 . 10) تر (11 . 12) سړی په واقعیت یا رښتونی کی د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي(لارښودوي.)

پیژند ۱۱ . ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه رییلو ګڼونو $a_{ik}, (i,k=1,2)$د د ۲ -امه درجه دیترمینانت لاندې ، لاندینی ګڼ پوهیږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};\ldots\ldots\ldots\ldots(11,13)$$

د اصلي دوه کونجتړي یا دیاګونال (قطر) د توکوځل، ترې کم(منفی) د څنګ یا فرعی دوه کوجنتړي(قطر) د توکو ځل(یا) د اصلي دوه کونجتړې یا قطر د توکو ځل څخه د څنګ یا فرعي دوه کونجتړې د توکو ځل کمیږي یا منفی کیږي)

یادونه : دا اوس او وروسته دیترمینانت بڼه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په دیترمینانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (11 . 13) کی د xi ځلهووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په (11 . 8) سیستم کی . د (11.13) دیترمینانت له دې امله د (11 8) (له ماڅخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدلیږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شمیرپوهنیزه ناسمي منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو (ضرییونو) دیترمینانت بلل کیږي.

که په (11. 13) کی لومړی (درز، ستن یا مته یا ولاړه لیکه یا-کیله) د دیترمینانت ولاړه لیکه(په ځای) چی د xi ځله ووني یا ضریبونه دی د (11 . 8) برابرونسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 ولیکل شي نو(په x1 اړونده) لاندې دیترمینانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_2 & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{22} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه یا نمره دې) ۱۱،۱٤ (وېپه همدې ډول که د) 11 . 13 (دیترمینانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې دیترمینانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21};\ldots\ldots\ldots\ldots(11,15)$$

که له (11 . 10) تر(11 . 12) پورې له (11 . 13) تر (11 . 15) پرتله یامقایسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۱ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو یا ضریبونو دیترمینانت لپاره په (11. 13) کی

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سیستم (11 . 8) یوائځنی ټاکلی ځواب لري

x1=D1/D ; x2 = D2/D /11,17)

په داسی حال چی D1 او D2 د (11 . 14) او (11 . 15) له مخی شمیرل کیږي.
د (11 . 10) او (11 . 11) له امله لرو

جمله ۱۱ . ۲ :
که په (۱۱ . ۱۳) کی د ځلونو دیترمینانت D لپاره باوري وي

(11,18) 0 = D

او د کم له کمه یوې ډیترمینانتD1 یا D2 لپاره په (11 ,14) یا (11 , 15) باوري وي

D1|=0 V D2 |=0 (11,19)

نو (11 . 8) سیستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون یی یو د بل سره مخامخ دي (تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :

باوري دي

$$D=D1=D2=0 \qquad (11.20)$$

نو يو له برابرونونو I يا II زياتي دی) دواړه برابرونونه يو بل ته اړ دی يا د بل په واك کی دي(او د ۱۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعماليدلی شي يا کار ترې اخستل کيدی شي.

د ښوونبيلګو په څير دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلګي (۱۱ . ۱ . ۲ برخه) کارول شوي سيستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونکي په ديترنمنانتو ځواب کړي، که چيرې ما دا کار سرت ونه رساوه۰.

بيلګه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-3=-7 \neq 0$$

پس يواځنی ټاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -8+15=7 \neq 0; D_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -10-4=-14$$

له دې امله باوري دی

x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,

بيلګه۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 24-24=0; D_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپاي ډير ځوابونه موجود دي) بيلګه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بيلګه ۱۱ . ۸ : د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D = 2 3 =12 -12 = 0

او ورپسی

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی ځواب نه شته(د D2 = 4 |=0له شميرلوکيدی شي، چی تيرشو)

بيلګه ۱۱ . ۹ :

موږ بالاخره غواړو چي په بيلګه ۱۱ . ۴ کی ورکړ شوی مساواتسيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی D , D1 او D2 شميرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$........................=\frac{a^2-2ab+^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}=-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت ab |= 0 :

دلته دیترمینانت D |= 0 او دا د برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x=\frac{D_1}{D}=\left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right):\left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right)=\frac{2b}{a^2-b^2}.\frac{(a^2-b^2)^2}{4ab}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د D1 = D2 له امله)

دوم ۱ حالت a=0,b|=0 : دلته D = 0 مگر

D1 = D2 |= 0

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته D = D1 = D2 = 0

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلگه ۱۱ . ۴ کي ښوول شوي .

دوم ۳ حالت a = b = 0 :

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو سیستم دې د لاندې بريالي فورم بدلولو   وروسته دبيلا بيلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دې يو د بل سره پرتله يا مقايسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$
$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

١١ . ١ . ٤ د ګاوس الګوريتم

په ١١ . ١ . ٢ . برخه کي ځېړل شوو متودو ټيك په نظر نيولو سره (برابرو ليکلو- په ځاي - او د زياتون عمليه) ، کره پوهيدلی شو چی ددې په مرسته ټوليز د برابرونسيستم (11 . 8)

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=a_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=a_2$$

په يوه درېګوډيز جوړ سيتسم

$$a_{11}x_1+a_{22}x_2=a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2=a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بيا خورا ساده ځواب کيدی شي

١ . که 0 =| a22 وي، نو لاس ته راځي:

الف)   x2=a2/a22

ب) برسيره پر دې که $a_{11}\neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=
(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)

٢ . که 0 = a22 او 0 =| a2 وي نو ځواب موجود نه دی يا نه شته

٣ . که 0= a22 او 0 = a2 وي، نو ٢- م برابرون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بيا ا. برابرون د ١١ . ١ . ١ برخی متود په مرسته ځوابولی شي.

د (11 . 8) سيستم د ځواب پرابلم په دې ډول کميرﻱ، چی دا سيستم په دريګوډی بڼه يا – ځيره واړوي . هغه الګوريتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس الګوريتم دی. يا (11 . 8) سيستم دريګوډی ځيره لري او يا ټول aik د صفر سره برابر نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی (11 . 8) سیستم په روځنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

		x1	x2	RS
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II	a21x1+a22x2= a2	a21	a22	a2

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پرېښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - ځله له I برابرون څخه کم شي ، نولرو

....		x_1	x_2	Rs
I	$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$	a_{11}	a_{12}	a_1
II'	$0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$	0	$a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$	$a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$

که II' لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

		x1	x2	RS
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II'	b22x2 = b2		b22	b2

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که 0 =| b22 وي ، نو x2 له II' اوx1 لهI لاس ته راځي.
-که 0=| b22 = 0 , b2 وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که b22 = b2 = 0 وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی لهI
او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریګوډیځیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پریږدو او له II څخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له 'II لاس ته راځي $x2 = 2$
او له I څخه لاس ته راځي. $x1 = 2 -(3/2)\ x2 = -1$

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (ځیږو. دلته د لمړی لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	10
II'=II-2.I	0	0	2

سیستم۲

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	8
II'=II-2.I	0	0	0

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I)
موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په ځیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅیړل شي

دوم واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II+(2/3).I	7/3	0	-7/3
1.	2	1	-1

اول واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II-(1/2).I	0	-7/2	-7
2.	-1	2.	2

ځلورم وایانت

	x1	x2	Rs
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I=I-2.II	0	7	114
-1 1.	-1	1.	2

دریم واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I'= I+(3/2).II	7/2	0	-7/2
2.	2	2.	

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا څلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوې، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب) له II' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

$$x2= -7 / (-7/ 2) =2$$

ت) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$$x = (1/ 2)(4 - 3.2) = -1$$

واریانت ۲ :

ا) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له 'II څخه دې x1 وشمیرل شي

پ (له 'II لرو: 1- = x1

ت) له I څخه لرو: x2 = 2

واریانت (امکان) ۳

ا) له II څخه دې x2 وشمیرل شي

ب) له 'I څخه دې x1 وشمیرل شي

پ) له 'I لرو 1- = x1

ت (له II لرو x2 = 2

واریانت (امکان) ۴

ا) له II دې x1 و شمیرل شي

ب) له 'I څخه دې x2 وشمیرل شي

پ (له 'I لر x2 = 14 / 7 = 2

ت) له II لرو:

$x1 = -5+2.2 = -1$

ټولی څلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واریانت کی په ټولګښونو شمیرنه کیږي، »مخته وونه« یا مخوونه(برتري) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زیات برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سرهره

که څوک له دوه زیات برابرونونه د دوه اوښتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توګه باید په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه x1, x2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توګه حل نه لري. یوائې په ځانګړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څیړو او بیا د ګاوس الګوریتم له لارې.

بیلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

$$
\begin{array}{llll}
a)\ I & x1 + 2x2 = 3 & b)\ I & x1 + 2x2 = 3 \\
II & 2x1 - x2 = 1 & II & 2x1 - x2 = 1 \\
III & 3x1 + x2 = 2 & III & 3x1 + x2 = 4
\end{array}
$$

له I او II څخه د څرګندو یا معلومومتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی ځل یوائنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

له a) او b) څخه لرو $x_1 + 2x_2 = 1$ که دا ارزښتونه په III کی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په a) کې : $1.1+3.1 = 4 \neq 2$, په b) کی : $1.1 + 3.1 = 4$

نو سیستم a) ځواب نه لري او سیستم b̂) یواځني ټاکلی ځواب لري

یعني $x_1=x_2=1$

بیلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بیلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوت اوس د ګاوس د الګوریتم له لارې ځواب کوو.

a)

	x1	x2	RS
I	1	2	3
II	2	-1	1
III	3	1	3
II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=II-3.I	0	-5	-7
III"=III'-II'	0	0	-2

b)

	x1	x2	RS
I	1	2	3
II	2	-1	1
III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5
III=III-3.I	0	-5	-5
III=III'-II'	0	0	0

په a) کی تضاد پیژندلکیږي ($III':0.x_1+0.x_2=-2$) ځواب نه شته یا وجود نه لري .

په b) کی تضاد مخ ته نه دی پروت .($III':0.x_1+0.x_2=0$) له II' څخه لرو:

$x_2 = 1$ او له I څخه لاس ته راځی : $x_1=3-2.1=1$

۱۱ . ۲ لاینیزبرابرونتسیستم د درې ناپیژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ ۱ یو برابرون د دري ناپیژندونکو سره

مو ږ یو مساوات د دري ناپیژندونکو سره تر څیړني لاندې نیسو:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2+ a_{13}x_3 = a_1 \quad (11 . 21)$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

$$I .\quad a_{11}=a_{12}=a_{13}=0 \quad (11 . 22)$$

دلته x_1 , x_2 او x_3 یو له بل پوره خپلواك ټاکل کیدی شي. ویل کیږي چی ناپاي ډیر ځوابونه مخ ته پراته دي (x_1 په خوښه، x_2په خوښه او x_3په خوښه)

$$2.\quad a_{11}=a_{12}= a_{13}= 0 ,a_1 \neq 0 \quad (11 . 23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$$0x1+0.x2+0.x3 = a1 \,|= 0$$

اوبيونه نه شته.

۳- د کم له کمه يوه ځلجوړې i , k لپار دې aik |= 0 وي. (بي د ټوليز وبنديزونو يا عموميت د محدود والی دې a11|=0 وي (. كيدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاكل شي (ناپاي ډير ځوابونه)، او لاس ته راځي

x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3) په خوښهx1 او x3 (11,24)

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپيژندونکو سره

لاندي د دوه برابرونسيستمونه د درې اوښتونو يا ناپيژندونكو سره

$$a11x1+a12x2+a13x3=a1 \qquad (11,25)$$

$$a21x1+a22x2+a23x3= a2 \qquad (11,25)$$

موږ دا را ويستلي حالتونه ، چيرته چی د ټولو i, kلپارهaik= 0 ، په پام کی نه نيسو. دا حالت هم په پام کي نه نيسو چی دوم برابرون د لومړي په څير وي (ناپاي ډير ځوابونه. او يا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي يا ښتوالي يا تضاد كی وي (ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پيژندونکي دي. موږ په يوه بيلګه کی دا اصلي حالت څيړو چی يو ناپيژندونكي يا نامعلوم (د بيلګي په توګه x3) په خوښه ټاكل كيږي او دا نوري دوه ناپيژندونکی يا اووښتونې (x1 او x2) يواځنی لاس ته راځي، او يا يواځنی ورکول كيدی شي (ناپاي ډير ځوابونه).

بيلګه ۱۱ . ۱۵:

x1 x2 x3 RS

---

1 1 1 3 I x1+x2+x3=3

II x1+2x2+3x3=6 1 2 3 6

II'=II-I 0.x1+x2+2x3=3 0 1 2 3

له II' لاس ته راځي

$$x2 = 3 -2x3$$

له I ځخه لاس ته راځي

$$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, \; x1= x3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې لاس ته راځي
.په خوښه x_3 ,$x_1=x_3, x_2 = 3 - 2x_3$

۱۱ . ۲ . ۳ دريمه درجه ديترمينانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه يا معادلې يا مساوات د درې ناپيژندونکو سره څېړو

$$\text{I} \qquad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3= a_1 \qquad (11 . 26)$$
$$\text{II} \qquad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= a_2 \qquad (11,26)$$
$$\text{III} \qquad a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3= a_3 \qquad (11,26)$$

له دې سيستم څخه کيدی شي چی د ۱۱ . ۱ . ۲ برخی د برابر ليکلو او يو د بل په ځای ليکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زياتونتيورم (-قضيه) فکر غواړي او د دريمي درجي ديترمينانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سيستم ځواب پيدا کولو لپاره هڅوي

پيژند ۱۱ . ۲:
رييل ګڼونو aik (i,k = 1,2,3 (يو درې درجه منظم د ديتمرمينانت سيستم

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};..................................(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی رييلګڼ پوهيدلی شي):

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32)}) - a_{12}(a_1a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{33});............(11,28)$$

له دې سره د دريمی درجي ديترمينانت شميرنه د دوهمی درجی ديترمينانت په شميرنه بدله شوه. ۱۱ . ۲ تعريف او په ځانګړې توګه) 11 .28 (فرمول په لاندې ډول توضيح کيدی شي:
پيژند ۱۱ . ۳ : په (11 . 27) کی د ديترمينانت D لاندېديترمينانت Aik لاندې هغه دومه درجه ديترمينانت پوهيدلی شو، چی د D ديترمينانت i- می ليکی او k - م درځ يا متې د لرې کولو يا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي(زه د ماتريکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې دا لیکې او مټې یا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پیښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه یې پسې لیکل شوې)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کیدی شي چې د ۱۱ . ۲ دیترمینانت په دې فورم ولیکل شي

پیژند ۱۱ . ۴ :
د دریمی درجي دیترمینانت D لاندې، چې په (11 . 27) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پو هیدل کیږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زیاتون عملیي څخه، چې دلته نسبت د دوه ناپیژندونکو مساواتو ته چې دوه ناپیوندونکی لري، روښانه ده، د (11 . 26) څخه لاس ته راوړل کیږي:

Dx1 = D1 , Dx2 = D2 , Dx3 = D3 (11 . 29)

په داسی حالت کی چی Di داسي لاس ته راځي چی د ځله وونودیترمینانت (11 . 28) کی سړی i - م درځ یا ستن یا مټه د (11. 26) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; \ldots\ldots (11,30)$$

موږ دا نتیجه بي له ښووني ورکوو.
له (۱۱ . ۲۹) څخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :
که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونودیترمینانتو(۱۱). ۲۷ ،په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$D \neq 0$ (11 . 31)

با وري وي ، نو (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم یواځنی ځواب لري

$; x1=D1/D$ $;x2=D2/D$ $x3=D3/D$ 11,32)

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $|Di| = 0$ کم له کمه د یوه i ($i = 1,2,3$) لپاره وي، نو د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم ځواب نه لري (په (۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D1 = D2 = D3 = 0$ وي، نو په (۱۱ . ۲۶) کی کم له کمه یو برابرون له ضرورته زیات دی او دا (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم کیدي شي چي د ۱۱ . ۲ . ۲ متودونو بانديې ځواب شي (وړاندیز دیٔ چی د ګاوس الګوریتم له متود ; چی په ۱ . ۲ . ۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بیلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندې سیستم

I x1 -x3 = -2

II x1 +x2 -x3 = 0

III 2x1 - x2 = 0

کی دیٔ

$$D=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}-0.\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}+(-1).\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}=-1-0-1.(-1-2)=2$$

$$D_1=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\0&1&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}-0\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}=2;$$

$$D_2=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\1&0&-1\\2&0&0\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}-(-2)\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}-1.\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}=4:$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&-2\\1&1&0\\2&-1&0\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}1&0\\-1&9\end{vmatrix}-0.\begin{vmatrix}1&0\\-1&0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو يواځنی ټاکلی ځواب موجود دی.

$x1=D1/D=2/2=1,\ x2=D2/D=4/2=2\ ,x3=D3/D=6/2=3$

بيلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سيستم

$$\begin{array}{ll} I & x1 + x2 + x3 = 0 \\ II & x1 \quad -x3 = 0 \\ III & 2x1 + x2 \quad =1 \end{array}$$

کي دی.

دا بيلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښايي ، چې اوبيونه نه شته ۰ دې ته بايد ګوته ونيسم، $D = 0$ او $D1= -1 \neq 0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوريتم

د ګاوس الګورتيم لومړی د (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم لپاره استعماليږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې دري ناپيژندونکي لري او همدارنګه د زياتو مساواتو سيستم لپاره چې دري ناپيژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوريتم موخه په دې کی پرته ده چی (11 . 16) سيستم د ورته بدلونفورم له لارې په دريګوډيفورم را اوړي.

$$\begin{array}{lll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 & (11 . 34) \\ II & b22x2+b23x3=b2 & \\ III & c33x3=c3 & \end{array}$$

بنسټيز حالت : که $a11 \neq 0, b11 \neq 0, c11 \neq 0$ وي نو يو په بل پسی سرِی کړی شي چی له III $x3$, او له II $x2$, وشميري. مګر په (11 . 34) کی ځانګړي حالتونه هم پيژندل کيږي:

-که $c3 \neq 0, c33=0$ وې، نو يو په ښتوالی يا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که$c3=c33=0$ وی، نو III له ضرورتزيات دی سرِی يواځی I او II څيړي.

- که$c33=c3=0$او برسيره پر دې $a11 \neq 0, b11 \neq 0$ وي، نو $x3$ په خوښه ټاکل کيدی شي او $x2$له II او $x1$ له I چی $x3$ ته اړ وي، شميرلکيدی شي (ناپای ډير ځوابونه)

-برسيره پر دې که $b22=b23=0\ , b2 \neq 0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چی $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$وي ، نو II له ضرورت زيات دی او له $a11 \neq 0$ کيدی شي چی $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي، او $x1$له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي چې x2 او x3 ته اړ (په واك کې یا تابع) وي (ناپاي ډېر ځوابونه ځوابونه) .
که ټول ځلونه او د مساواتو ښی خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د ګاوس الګوریتموس د دري ناپیژندونکو(11 . 26) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دی
لومړی پل (قدم) : نیسو چې په (11 . 2 6)کی 0 =| a11 دی. دا د نمرې بدلولو په بنسټ همیشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چې ټول aik = 0 وي) .
دلته I ورکول کیږي، او له II د I دا a21/a11 - ځله او له III دا a31 / a11 - ځله د I کموي. ددې څخه لاندې سیستم لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} &I \quad a11x1+a12x2+a13x3=a1 \\ &II \quad b22x2+b23x3=b2 \\ &III \quad c33x3=c3 \end{aligned} \qquad (11 . 35)$$

دویم پل (قدم) : د b22 |=0 نیوني سره په 'II او 'III باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره سم د ګاوس الګوریتم استعمالیږي : سړی 'II بي تغیره پریږدي اوله'III دا b32/b22-ځله د 'II کموي، له دې راپیداکیږي

$$\begin{aligned} &I \quad a11x1+a12x2+a13x3=a1 \\ &II \quad b22x2+b23x3=b2 \\ &III \quad c33x3=c3 \end{aligned} \qquad (11 . 37)$$

د ګاوس د شیما فورمالیتي سره سم بیا دا شکل غوره کي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3
II' = II-(a21/a11)I		b22	b23	b2
III' = III-(a31/a11)I		b32	b33	b3
III'' = III' - (b32/b22)II'			c33	c3

$$x3 = c3 / c33$$

$$x2=(1/b22)(b2-b23x3)$$

$$x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سیستم ۰(مقایسه بیلګه ۱۱ . ۱۶)

I $x1 \quad -x3= -2$

II $x1 + x2-x3 = 0$

III $2x1 \quad -x2 \quad = 0$

د ګاوس الګوریتم سره په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	-1	-2
II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0
II'= II - I	0	1	0	2
III'= III - 2.I	0	-1	2	4
III'' = III' + II'		0	2	6

$x3=6/2=3$

$x2=2$……………………

$x1=-2+x3=-2+3=1$

بیلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷ (دا سیستم

I $x1 + x2- x3 \quad = 0$

II $x1 \quad -x3 \quad = 0$

III $2x1+ x2 \quad = 1$

د ګاوس د الګوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	0
II	1	0	-1	0
III	2	1	0	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

II'=II-I	0	-1	-2	0
III'=III-2.I	0	-1	-2	1
III''=III'-II'	0	0	0	1

دلته دی "0 = 1 " تضاد. سیستم نه اوبی کیږي یا حل نه لري.

بیلگه ۱۱ . ۲۰: (مقایسه یا پرتله بیلگه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

I x1 +x2+x3 =3
II x1+2x2+3x3=6
III 2x1+3x2+4x3=9

په لاندې ډول د گاوس په الگوریتم اوبیونه ده

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	3
II	1	2	3	6
III	2	3	4	9
II'=II-I	0	1	2	3
III'=III-2I	0	1	2	3
III'' = III'-II'	0	0	0	0

=x3 په خوښه
x2 = 3 -2x3
x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3=x3

۱۱ . ۳ په خوښه ډېر مساوات ، په خوښه ډېر ناپیژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاینیز سیستم برابرونونو په لار ښونی پیل کوو m (برابرون د nناپیژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1 \quad ....(11,37)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$
$$..$$
$$...$$
$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوښه یا ازاد پرېږدو چی د برابرونونو ګڼون (تعداد) m د ناپیژندونکوn د ګڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرګندو دندو یا وظایف موږ دلته له ځلور ناپیژندونکو څخه نه پورته کیږو او یواځی لاندې دوه متودونه څیړو

۱۱ ۰ ۳ . ۱ دn - م درجی دیترمینانت او د کرامر قاعده

پیژند ۱۱ . ۵ :
د n رییل ګڼونو aik یوه منظم سیستم n- م درجي دیترمینانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};.........................(11,38)$$

لاندې سرې لاندنې رییل ګڼ پوهیږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې دیترمینانت Aik د (n-1) - م درجی دیترمینانت ده، چی پاتیږي، که په Dکیi - مه لیکه اوk - م درځ ، مټه یا ستن (لیکه او درځ چی aikپه کی ولاړ وی) په کربښه لرې کړي یا کربښه پرې تیره کړي، یعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجی دیترمینانت شمیرل و- (n-1)-ام درجی دیترمینانت شمیرلو ته راتیتیږي .
په ځانګړي توره د ځلورمی درجی دیترمینانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}; A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}\,etc$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو) په) 11 . 37 (کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

$$Dx1=D1,Dx2=D2, ...Dxn= Dn \qquad (11 . 42)$$

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت) ۱۱ . ۳۸ (کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .
د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره (پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰)

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots (11,43)$$

له(11 . 42) ثخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):
د ځله ونې یا ضریب دیترمینانت (۱۱,۳۸) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په (۱۱ . ۳۷) د m = n سره) باوري دی

$D |= 0$ (اصلي حالت) (44 . 11)

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري(حل لري

$$x1=D1/D,x2=D2/D,...,xn=Dn/D. \quad (11 . 45)$$

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري . که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیونې لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو)

بیلګه ۱۱ . ۲۱:
لا ندې سیستم دې حل شي

I	x_1		$+x_3$		$= 0$
II	$2x_1$	$+x_2$		$+x_4$	$=0$
III		x_2		$-x_4$	$= 4$
IV	x_1	$-x_2$	$-x_3$	$+x_4$	$= -2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&2\\0&1&0&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&0&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&2\\0&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&2\\4&1&0&-1\\-2&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&2\\4&1&-1\\-2&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&-1\\-2&1\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}4&1\\-2&-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&0&0&2\\0&4&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&2\\4&0&-1\\-2&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0&2\\0&4&-1\\1&-2&1\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}4&0\\-2&-1\end{vmatrix}+\left|2\begin{vmatrix}4&-1\\-2&1\end{vmatrix}\right|+2\begin{vmatrix}0&4\\1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&2\\0&1&4&-1\\1&-1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&4&-1\\-1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-1\\-2&1\end{vmatrix}+\left|2.\begin{vmatrix}1&4\\-1&-2\end{vmatrix}\right|=4-2+2(-2+4)=6$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&0\\0&1&0&4\\1&-1&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&0&4\\-1&-1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&4\\1&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4\\-1&-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}1&4\\-1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;\ x_2=\frac{-12}{-6}=2;\ x_3=\frac{6}{-6}=-1;\ x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چی د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغي له مخی څرګندولی شو چی کوم حل)ځواب(مخ ته پروت دی .
دا په لاندې بیلګه څرګندوو

بیلګه ۱۱ . ۲ ۲ :
که په بیلګه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II -2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV-I	0	1	-2	1	-2
III" = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV" = IV' +II'	0	0	-4	3	-2
IV"' = IV" + 2.II"	0	0	0	-3	6

x4 = -2
x3=1/2(4+3.(-2))= -1
x2=0+(-1)(-2)= 2......
x1 = -(-1) = 1 ....

بیلگه ۱۱ . ۲۳:
دا برابرونسیستم

I x1 +x2 +x3 +x4=4
II x1 -x2 -x3 +x4=0
III 3x1 -x2 -x3 +x4=2

حل یا اوبیونه ی نه لرې، لکه د گاوس له شیما څخه چې لیدل کیږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2
II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10
III'' = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2

دلته III" په ښتوالی یا تضاد خوندي لري " 0 = 2- "

بیلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4

II x1 -x2 -x3 +x4= 0

III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4

IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10

V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چی oe1 (ناپای ډیر) اوبیونې لري

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8
II' = II-I	0	2	- 2	0	-4
III'= III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV -I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II"= II'+2.IV'	0	0	2	6	8
III'=III'+4.IV'	0	0	4	12	16
V" = V' +2.IV'	0	0	2	6	8
III''' = III"-2.II'	0	0	0	0	0
V'''=V"-II	0	0	0	0	0

ګورو چې III''' او V''' تضاد نه لري. سړی کړي شي چې x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 "II له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 'IV او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4 په خوښه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4 ، په خوښه x4 ټاکو

او x3=4-3x4 په خوښه x4 ټاکو

یادونه : هغه ګڼ یا نوره هم ښه هغه ځلهووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي۰

سړی د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په 'III او 'V پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغې چې په 'II اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په 'III او 'V لیکو مو کرښه تیره کړې وی) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځي له کرښی 'II جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سیستم بلل کیږي

$$\begin{aligned} &I \quad a11x1+a12x2+a13x3= 0 ....\\ &II \quad a21x1+a22x2+a23x3= 0 \quad (11.46\\ &III \quad a31x1+a32x2+a33x3= 0 ....\end{aligned}$$

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$$x1=x2=x3=...=xn=0 \qquad (11. 47)$$

که د ځلوونو د یترمینانت (۱۱ . ۳۸) لپاره 0 =| D باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۱. ۸ : يو هوموګين مساواتسيستم يواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري وي

بيلګه ۱۱ . ۲۵ :

دا هوموژين برابرونسيستم

I $x1 \quad +x3=0$

II $x1 \; -x2 \quad =0$

III $x1 \; +x2 +x3=0$

د

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-1+(1+1)\neq 0$$

له امله يواځنی ساده اوبيونه $x1=x2=x3=0$ لري.

بيلګه ۱۱ . ۲۶:

دا هموګين مساواتسيستم

I $x1 \quad +x3 = 0$

II $x1 +x2 \quad = 0$

III $x1 +x2 +x3 = 0$

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=-1+1=0$$

د

له امله ناساده اوبنونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوريتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې د RS پاتې- يا باقي سيستم په معنا دی.

x1 x2 x3 RS

---

0 0 1 I 1

0 II 1 -1 0

0 III 0 1 1

II'=II-I 0 -1 -1 0

III' = III 0 1 1 0

II'' = II + III' 0 0 0 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چې II"تضاد نه لري x3په خوښه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I ځخه لاس ته راځي x3-=x1نوx3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نوx3 په خوښه

. تمرينونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چې ورسره بلد يو-پوهيږو او يا هم

۱ – کرښيز مساواتسيستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرينونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو ځخه کار اخستلس شي، چې بيايې و ازمايو. د لته دې د زياتون يا جمعې قانون او همداسې د ګاوس الګوريتم ته لومړيتوب ورکړ شي ا و د ديټرمينانت سره شميرنه دې يوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$ b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$ d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$ b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$ d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$ b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$

$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$

d) $4 + y = x$

$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$
$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$
$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y} = 3$

$\frac{15}{x}-\frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2}+\frac{3x_2}{2} = 3$

$3x_1 + x_2 = 2$

b) $\frac{2x_2-5x_1}{6}+\frac{x_1}{6} = \frac{x_2-2x_1}{3}$

$\frac{5-3x_1}{3}-\frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12}-\frac{3x_1-4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1+3x_2}-\frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$

$\frac{5}{3x_1-2x_2}+\frac{6}{4x_1+3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1-2)+4(2x_2+\frac{3}{2}) = 0$

$5(x_1+3)-3(x_2-\frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1 + 4x_2 = 8$
$5x_1 - 2x_2 = 9$
$7x_1 - 8x_2 = 10$

b) $6x_1 - x_2 = 1$
$9x_1 + 2x_2 = 5$
$3x_1 - x_2 = 1$

c) $5x_1 - 3x_2 = -3$
$3x_1 + 5x_2 = 5$
$3x_1 - 1{,}8x_2 = -1{,}8$
$0{,}9x_1 + 1{,}5x_2 = 1{,}5$

d) $2x_1 - 3x_2 = 10$
$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$
$x_1 - 1{,}5x_2 = 5$
$0{,}5x_1 - 0{,}75x_2 = 2{,}5$

۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x_1 + x_2 = a$
$ax_1 - x_2 = b$

b) $3x_1 - 2x_2 = 5a$
$2x_1 - 3x_2 = 5b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2 - 4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2 + 2b^2}{4a^2 - b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شمیرنه

۱ . ۳ . ۱ کوم دوه اعداد لاندې خویونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع یا څلورئ کمون(تفریق) یې په ۱۰۰ لوییږي، په داسي حا لي جي ضرب یې په۳۲۵ زیاتیږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه یا زیاتون دومره لوي دی، لکه د تفریق مربع یې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د یا تفریق یې ۹۹ دی، وښایئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګڼونو څخه هر یو یې په 2 لویږي، نو ګڼونه ځانونه نیسي
لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونوڅخه 3 کم شي ، نو داسی لاس
ته راغلی ګڼ ځان نیسی لکه : 3 : 2 . دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ،
نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګڼونو شومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره ځل یا
ضرب شي، نو د ځلونو زیاتون بی 2222 دی. هر یو له دې ګڼونوڅومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی.
دواړه ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دریکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پړیکشن
یا پریوستون یی د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د
دریګوډي اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمخ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی
جوړوي . له X څخه چې له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm
دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لري دی نسبت و X ته ، دواړه مخ
کلی X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلی دیوال،
چی 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی
کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځی اوږده د هوارې
دننه په $100\ m^2$ زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خوندي کوي او دوه وتللارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګې په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ . ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1 / 4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړې درې بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړې ۷ بوتله او له دوم درې بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 الماني مارکه(DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود 450 m^3 اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل درې دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی 40 m^3 اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته 60m^3 اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یو ځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم درې ورځي کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 5 / 1 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ اړتیا دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۶ . د یوې ګردۍ په چاپیري چې ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقیې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقیقې، که هغوي یو د بل په خټ لور حرکت وکړي، هر بدن په یوه ثانیه کې څومره واټن تې کوي یا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په یوه ګردۍ چې چاپرې یې ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانیوکې. د دواړو بدنونو سرعت څومره دی، که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم وی؟

۲

. کرښیز مساوات سیستمونه د درې مجهولو سره ۲ .

۱ – مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

a) $x + y = 14$
$x + z = 15$
$y + z = 16$

b) $x_1 - x_2 = 4$
$x_1 + x_3 = 18$
$x_2 - x_3 = 6$

c) $x_1 + x_2 = 6{,}6$
$x_1 - x_3 = 2{,}6$
$x_2 - x_3 = 2$

d) $x + y + z = 25$
$3x - 2z = 1$
$20y - 16z = 0$

e) $2x + 3z = 13$
$3x - 4y = 3$
$5y - 6z = 9$

f) $12x + 24y - 42z = 30$
$4x + 8y - 14z = 10$
$6x + 12y - 21z = 15$

g) $5x + 3y + 2z = 207$
$5x - 3y = 37$
$3y - 2z = 19$

h) $x_1 + x_2 - x_3 = 17$
$x_1 - x_2 + x_3 = 13$
$-x_1 + x_2 + x_3 = 14$

i) $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11$
$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$
$6x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 39$

j) $4x + 4\frac{1}{2}y - 6\frac{3}{4}z = 20$
$2\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z = 5\frac{2}{3}$
$1\frac{2}{3}x + 1\frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}z = 3\frac{1}{3}$

k) $\frac{2}{5}x - y = 0$
$\frac{2}{3}x - z = 1$
$-\frac{2}{3}y + z = 2$

۲ . ۲ – مساوات سیستمونه د ناټاکلو ضریبونو سره

a) $x_1 + x_2 = 2c$
$x_1 + x_3 = 2b$
$x_2 + x_3 = 2a$

b) $x_1 + x_2 = 2(a + b)$
$x_1 + x_3 = 2(a + c)$
$x_2 + x_3 = 2(b + c)$

c) $ax + by - z = 1$
$ax - by + z = b$
$-ax + by + z = a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\begin{aligned} ax + y - cz &= 2a \\ -ax + y + cz &= 2c \\ ax - y + cz &= 2ac \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 2a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= 2b \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 0 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{2}{a} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{2}{b} \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= a \\ y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} &= b \\ z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= c \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} \frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} &= a + b \\ \frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} &= b + c \\ \frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} &= c + a \end{aligned}$

۳ . په خوښه زيات مساوات د په خوښي زياتو مجهولو سره

a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 0,5x_1 + x_2 + 1,5x_3 - 0,5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 0,5x_2 + x_3 &= 1 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 &= 10 \\ 6x_1 + 0,5x_2 + 5x_3 + x_4 &= 9 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 21 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 &= 19 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 &= -24 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 3 \end{aligned}$

هوموجين مساوات سيستمونه:

a) $\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 20x_1 - 10x_2 + 15x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 9x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاينيز- يا ناکرښيز- يا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چې د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره يوارزښته (اکويوالنت) نه وي ، نالاينيز – يا ناکرښيز مساوات بلل کيږي او عمومي فورم يې په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \qquad (12 . 2)$$

دلته F (x) په x کې يوه ناکرښيزه يا ناخطي وېينه يا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چې ټول د xارزښتونه پيدا شي د کومو لپاره چې (12 . 2) باوري وي. بايد په پام کې ونيول شي چې ايا يواځې رييل ارزښتونه پيدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چې پيدا کړو. د بېلګې په توګه لاندې ناکرښيز يا لاينيز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رييل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چې د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره يې مساوات باوري کيږي .ددې په څېټ يا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رييل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دې وکتل شي)، بلکه لاندې ايماګينار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وکتل شي) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړيکو ته پاملرنه وشي: اړيکو $y=F(x)$ ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندونې بولم(ښه نومه ونه يې اوښتونې ده) په څېټ یا برعکس (2 . 12) یو ټاکنمساوات دی او x هلته یوه ناپیژندونکی یا اوښتونی دی.

د (2 . 12) برابرون یا مساوات اوبیونې یا حل ته د برابرون د F (x) صفرځای یا د مساوات F(x)=0 جذر یا ریښه هم وايي.

هغه برابرون یا مساوات چې په (۲ . ۱۲) فورم نه دئ ورکړ شوی کیدی شي چې په دې لاندې فورم واړول شي. د بیلګې په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$ او f(x)=g(x)

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کیږي

F(x)=f(x)-a.g(x)=0 او F(x)= f(x)-g(x)= 0

د نالاینیزو برابرونونو لپاره د لاینیزو برابرونونو په څیر راغونده (اختمامیه، رابنده، راتړلی) تیوري نه شته. په پولیزه یا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخی چې د صفرځاي معلومیدی شي. باید په نومریکو (numerischen Methoden) متودونو یا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې یا تقریبي ډول پیداشي

نالاینییز برابرونونه په دوه ټولګیو ویشل کیږی: الجبري او تراسځندنت چې په دې او راتلونکی څپرکي یا لکه چې ما استعمال کړې برخه کی یی څیړو، چې اوبیونې یی روښانه افاده شوې (explizit لاتین: واضح یا روښانه ، افاده شوی، اکسپلیځنت) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څیړل کیږي چې په لاندې نورمال فورم یا – بڼه اړول کیدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0 ....(12,3)$$

دلته په (2 . 12) کی یو نالاینیز بلواک یا – فنکشن (F (x د یوه n - م درجی پولینوم په څیر مخ ته پروت دی . موږ په (۲ . ۱۲) کی د ضریبونو(ځله وونو) لپاره یواځی رییل ګڼونه پریږدو (په دې مانا چې ځلونه یواځي رییل وي، یواځی رییل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په (۱۲ . ۳) کی کېږ اړخ ته n - م درجه پولینوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 ....(12,4)$$

ته ټول ریشنل (- ریښتونی) بلواک یا فنکشن هم وایي، ځکه چی د ریشنل شمیرله عملیو زیاتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واریابلی او ai د رییل ضریبونو، ځلونو یا فاکتورونو باندې د ویش کارونی کارولو (عملي استعمال) له لارې منځ ته راځي .ټولیز برانرون یا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0 ....(12,5)$$

کیدي شي په bn|= 0 ویش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاینیزفنکشن یا ۰ بلواک F (x) په (۱۲ . ۲) باندې په واریابلي یا اوونښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمیر کاروني یا عملیي او بالاخره دویش کارونه وکارول شي یا اجرا شي او رییل پارامتر (Parameterپه شمیرپوهنه کې ثابت (همغۀ) او یا مرستندویه لوي ده) تشکیل شي نو فنکشنونو ته بیا مات ریشنل فنکشنونه ویل کیږي. دا تل د دوه پولینومونو یا ریشنل فنکشنونو د ویش په څیر انځوروړ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ....(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) یا (۱۲ . ۳) برابرون اړول وړ دي . دا باید په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳) لپاره یواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چیرې د نالاینیزبلواک یا - فنکشن جوړولو کی د ریشنل شمیرعملیو تر څنګ د توان (متې، په جګ) یا پوتنځ کول او جذر نیولوته هم اجازه ورکړل شي نو بیا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږیږ. یعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ویل کیږي او (۱۲ . ۲) برابرون بیا الجبري برابرون بلل کیږي ، دا ډول مساوات هم کیدی شي چی په (۱۲ . ۳) فورم واړول شي.

هره n - مه ریښه یا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (G(x) افادې يا وييني له منځه وړل کيدی شي, که چيرې څوك دا برابرون په يوه خوا راوړي او بيا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي يا د n پوتنځ يا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په څرګندو يا معلومو بيلګوڅيړل کيږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځيرنه د (۱۲ . ۳) فورم برابرونونو ته راکښته کيدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - مى درجي برابرون هم بلل کيږي. ټول نالاينيز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسڅيندنت برابرون بلل کيږي . د ترانسڅيندنت رابرونونو درې تيوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاريتمي برابرونونه ، او ګونومتريکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر څيړني لاندې ونيول شي.

۱۲ . ۲ څلوری(مربع-) مساوات په توان(مټ، جګ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاينيزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان يا مټ (په جګ ۲ هم ويل کيږي) برابرونونه دي چی څلوری يا مربع برابرونونه بلل کيږي .د دې ټوليزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; ....(12,8)$$

په b2 يي ويش په لاندې ډول يو ورته ارزښته (اکويوالنت äquivalent) نورمالبڼه يا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_b; a_0 \neq b_0 / b_2); ....(12,9)$$

ددې حل د څلوری پوره کونې يا مربعتکميل څخه په ګټه د بينوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a / 2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a^2{}_1}{4}; ....(12,10)$$

په دې ډول کيدی شي چی (۱۲ . ۹) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$$x^2+a1x+a0=(x+a1/2)^2+a0-a1^2/4 = 0 <=>$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[x+a_1/2]^2=(a_1^2/4)-a_0 \qquad (12,11)$$

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2>4a_0 \quad (12,12)$$

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,13)$$

یا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ . ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بینا تل نا کمیز یا نامنفي ګڼ پوهیدل کیږي، چی څلوری یا مربع یی a ده) . له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) څخه ریيل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم لیکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توګه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پوهیدل کیږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2
په ریښتونی څلوری برابرون یا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0\Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0\Leftrightarrow a_1^2=4a_0;.............(12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لارې تیك یو ریيل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a\ \ /2;.................................(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیوني (۱۲ . ۱۸)څخه غږیږو.

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};...................(12,20)$$

له دې څخه هم چی په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};...................(12,21)$$

نو لاندې جمله ىی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د څلوری یا مربع) په توان یا جګ د ۲) برابرونونو د اوبیوني فرمول) د څلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) x²+a1x+a0=0

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټیک دوه ځوابونه لري

د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساوتو لپاره ښوول کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۲ (د وییتا(Vieta)جمله) :

که x1 او x2 د څلورڼ - یا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) اوبیونې وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,23)$$

حل : (۱۲ . ۲۳) فرمول په دریواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې څخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د (۱۲ . ۲۲) فرمول د تصدیق لپاره د بینوم دریم فرمول او $i^2 = -1$ استعمال څخه په په (۱۲ . ۱۲) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په (۱۲ . ۱۷) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲ . ۱۹) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ویبتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کیږي یا تصدیقیږي

جمله ۱۲ . ۳ :

یو ۲ درجبیز پولینوم کیدی شي چی په دوه لاینې فاکتورونو یا ضریبونو یا ځله وونو بیل یا ټوټه یا تجزیه شي:

$$x^2+a_1x+a_0=(x-x_1)(x-x_2);\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2x^2+b_1x+b_0=b_2(x-x_1)(x-x_2);\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,25)$$

چیرته چي x1 او x2 د څلوری برابرونونو یا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبیونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) څخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نیولو سره لرو

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+a_1x+a_0=$$

$$=\frac{1}{b_2}(b_2x^2+b_1x+b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ څخه دې ته راځول کیږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره رییل اوبیو څخه خبرې وکړو(وغږیږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2+a_1x+a_0=(x-x_1)^2;a_1^2=4a_0;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲) .(۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کیدی شي چی د فنکشن

$$y=p_2(x)=x^2+a_1x+a_0$$

ځیرو یا شکلونو (ګراف) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټیزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که xهرڅومره کوچنی شي)که x د کمیز ناپای په جګ یا توان شي) اوهمدارنګه x هرڅومره لوي شي (که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوییږي (ستریږي یا غټیږي) ، ځکه چیx^2 نسبت و x ته په توان یا قوي جګیږي له ټولو پولو(yد ناپای لور ته ځي)۰ د دې ډول پولو کره پیژند یا تعریف په ۱۹ - برخه کي لوستل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۲) حالت کی د x - محور په داړو ريیلو ځایونو x1 او x2 کی غوڅیږي؛ په (۱۲ . ۱۷) حالت کی په x1 = x2 ځای کی يي لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت کی ګډ ټکي ورسره نه لري یا نه وررسیږي (پرتله څیره . ۱۲ . ۱)

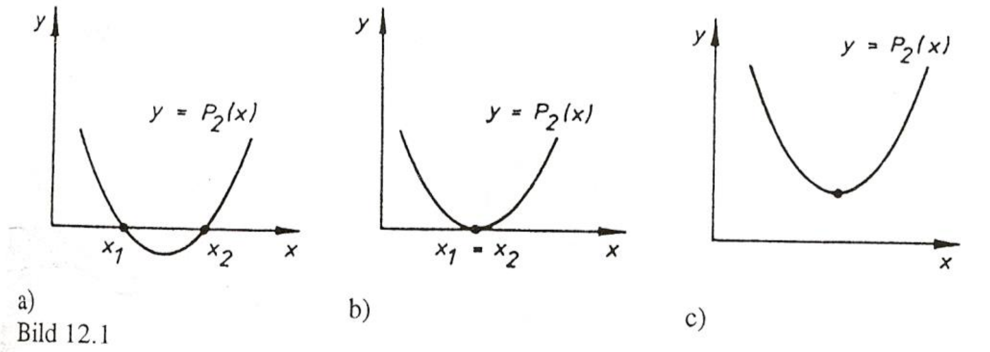


Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، (۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بیلګو روښانه شي.

بیلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

$a1 = -1 , a0 = -6$ او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی یاتعقیب څخه باوري کیږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3 - 2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله (۱۲ . ۱۷) حالت مخ ته لرو ۰ دوه ئیز رییل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱ څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1 = x2 = 2$

جمله ۱۲ . ۳ :

په لاندې ډول باوري کیږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$

$$a_1=-4=-(x\ \ +x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$,$a0=13$ او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت (۱۲ ، ۱۹) مخ ته لرو.

د کونیوګیرت(کنجوګیري) کمپلکس جوړه اوبیونو یا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې بڼه یا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$$

$$\Rightarrow x\ \ =2+3i;x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$

$$a_1=13=x_1.x\ \ =(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د جملی ۱۲ . ۳ له مخې داسی دی

$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسی (۱۲. ۹) اوبی په ښکاره ډول ساده کيږي، که يو ځلی a0 اويا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو $x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ څلوری(مربع-)برابرون چی په نورمالبڼه

مخ ته نه دي پراته

که يو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو بايد په دې بڼه واړول شي.

بليګه ۱۲ . ۴ :

$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$

$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$

$-x^2-2x-4=x^2-8x$

$x^2-3x+2=0$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$

$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول يا ناپيژندلی يا اوړيدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو بايد په صفر ويش ناممکن يا ناشونوالی په پام کې ونيول شي.

بيلګه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$

ټیك هلته مانا لري، چی وي $2x^2+2x-4 \mid=0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کیږي او بیا ازمائل کیږي، چي ایا د ماتلاندې شرایط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$

$$-x^2 = -4$$

$$x_{,2} = \pm 2; x = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پیل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانګړي برابرونونه ، چی په څلوری یا مربع برابرونونو بیرته بدلیدلی شي

د n - مي درجی مساواتو(۱۲ . ۳) یو څو ځانګړي حالتونه کیدی شي چی د څلوری برابرونونو یا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي یا اوبی شي۰ دا ځانګړی حالت موجود دی یا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0 \qquad (12, 27)$$

دn- می درجی برابرون بیا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,28)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots(12,30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : په پورته کې له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون یو څلوری - یا مربع برابرون دی، چی د جملي ۱۲
. ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی یا حل لري $x = 0$ چی دا (n-2)- ځله رامنځ ته
کیږي $x3 = x4 = ... = xn=0$

بیلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبیونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; ....(12,32)$$

یو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ یا جفت
- وي

n = 2k   (12 . 33)

او فقط (ټیك) ځله ووني یا کوایفیڅینتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; ....(12,34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; ....(12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره د y لپاره څلوری برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12, 36)$$

د لاندې ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k/2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0};......................(12,37)$$

د(۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1;..........................(12,38)$$

ټولې اوبیونې وڅیرلی شي، چی د $k = 1$ لپاره ساده دی، د $k = 2$ لپاره(بیکوادرات برابرون) (د څلوری یا د مربع مربع) یا د ریبلو $y1$ او $y2$ لپاره د تراوسه څرګندو میتودو سره تل کیدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټولیزه توګه ستونځی لري.

بیلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بیکوادرات برابرون $x4 + 5x^2 - 6 = 0$ کیدی د سوبستیچیوشن یعنې بدلون له لارې $y = x^2$ په څلوری برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ ۱ په بنسټ لرو .

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چی د بیرته بدلون(-سوبستیچیوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 , x^2 = -9$$

لاندې اوبی یا حل لري

$$x1 = 2 , x2 = -2 , x3 = 3i , x4 = -3i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسیستمونه چی بیرته په ځلوری برابرونونو بد لید لی شي

یوه د نالاینیزو مساواتسیستمونو لړی کیدی شي چی په ځلوری برابرون یا مربع مساواتو بیرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بیلګي راوړو.

بیلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$

$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کیږي، $y = 1 - x$، او دا حل په دوم برابرون کی اینوول کیږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$

$$x = 3, x_2 = -2$$

د (۱۲ ، ۴۰) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2, y2 = 3$$

نو دا نه لاینیز برابرون لاندي اوبیونې لري

$x1 = 3, y1 = -2$ او $x2 = -2, y2 = 3$

بیلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سیستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی یواځي د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وریا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو(ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کیږي:

$$y + x = xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کیږي

$$y = 1 - ax \qquad (12,43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کی اینسول کیږی یا ځای په ځای کیږي

$$1 - ax + x = x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2 - ax + 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی (۱۲ . ۴۴) برابرون مخامخوالی لري یا په ښتوالی لري یا تضاد لاس ته راکوي » $1 = 0$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴) ښخه لاس ته راځی $x^2 - x + 1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه باید په پام کی ونیول شي:

د $a > 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو , $a > 4$ او د $a < 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \qquad (12, 46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ریل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12.47)$$

په دې پوروې د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وازمایيل شي چی د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول) نابرابر په صفر دي . تل x1 > 1 /2 دی. که x2 = 0 وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هیڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی
که y1= 0 یا y2 = 0 وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم*لرو* $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$
په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) سر ه سم، دوه

مختلف رییل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي
x2, y2 . او x1 , y1
د

1/4-1/a=0 <=> a=4 (12 , 49)

لپاره(۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲، ۴۴) ډبل رییل حل لري

x1 = x2 = 1 /2 (12,50)

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت ډبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

y 1 = y2 = 1 - 4. (1 /2) = -1

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ . ۱۹) یو ریل، ډبل ګڼلی حل موجود دی

x1=x2=1/2 , y1=y2= -1 (12 , 51)

د

1/4-1/a < 0 <=> 1/a > 1/4 (12 , 52)

لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د a > 0 لپاره (۱۲ ، ۵۲) د a<4 کتمت (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کتمت دی (له دې امله په ښتوالی یا تضاد) .
نو د(۱۲ ،۵۲) باور لري، د

0 < a < 4 (12 , 53)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره . په دې حالت کی (۱۲ ، ۴۴) کونجوګيري کمپلکس اوبيونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\ x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \qquad (12.54)$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخی په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\ y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \qquad (12,55)$$

له دې ارزښتونو هيڅ هم صفر کيدی نه شي .پس په يوځاي شوي یا راټوله توګه لرو: برابرونسيستم (۱۲ ، ۴۱) د $a = 0$ لپاره اوبی نه لري، د , $a < 0$ په همدې ډول $a >$ 4لپاره دواړه ريل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د $a = 4$ لپاره رييل ډبل ګنلي اوبۍ (۱۲ ، ۵۱) او د $4 > a > 0$ لپاره دوه کونجوګيري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ، (۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲ . ۳ دريمه درجه مساوات یا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې n- (ام (درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سيستم جملو ته ورته جملی د دريمی درجی مساوات لپاره ځيړو.
د دريمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3 + a2x^2 + a1x + a0 = 0 \qquad (12,56)$$

دا پولينوم

$$y = P3(x) = x^3 + a2x^2 + a1x + a0 \qquad (12, 57)$$

لاندې بنستيز خويونه لري: که x ډير لوي شي يعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی دx^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بيړه جګيږي او بيا همداسې و x ته هم . که a1 او a2 کميز يا منفي هم وي نو y به د لويو x- ارزښتونو لپاره زياتيز یا مثبت وي. داچي x^3 د کميز x - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول
x->-o د y -> -o
لپاره .د دې ډول »پولوارزښت یا ليمس« لپاره کره تعريفونه بيا په ۱۹ برخه کی په پراخه توګه څيړل کيږي .د يو-x ارزښت) خورا کوچنی هم کيدی شي (شته چی د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره $y < 0$ وي اود یو x - ازښت) چی خورا لوي هم کیدی شي) ، د کوم لپاره چی $y>0$ دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ باید د مساوات (۱۲ . ۵۶) یو رییل اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلګو کی سړی کړی شي چی په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائیلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توګه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلګی:

بیلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 -4x + 12 \qquad (12 , 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

X = 0 , 1 , -1 , 2

Y = 12 , 6 , 12 , 0

په دې توګه یو رییل صفرځاي پیدا شو

$$x 1 = 2 \qquad (12 , 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شیما په بنسټ یو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چی بیا د مټ(توان= لوړولو ته اړتیا نه پیدا کیږي او پولینومونو د فنکشن ارزښت ساده پیدا کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 +(11 / 2) x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad (12 . 61)$$

د صفرځاي پیداکولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰)مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي)ترتیب شي وشمیرل شي (، ځکه چی هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

X = 0 , 1 ,1 / 2

Y = -9 , 16 ,   0

نو

$$x1=1/2 \qquad (12 , 62)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) یو رییل صفرځای دی

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12,63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3

Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لارې لاندې رییل صفرځای لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12,64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \qquad (12,65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1

Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځای لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12,66)$$

په ټولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چی د دریم درجی برابرونسیستم (۱۲ . ۵۶) لپاره تل یو رییل اوبی یاحل x1 شته دی. دا یو واقعیت دی چی بي له شوونی یی لیکو، چی دا پولینوم (۱۲، ۵۷) بي له پاتي په لاینیز فاکتور (x - x1) ویشل کیدی شي او یو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دريمه درجه برابرون (۱۲ . ۵۶) کم له کمه يو رييل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.............(12,67)$$

دلته نو بيا نور د دريمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلورئ برابرون يا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کيدی شي چی لاندې جمله فرموليندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دريمه درجه برابرون دري اوبيوني يا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad (12 , 68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - دري رييل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی (موجود دي)

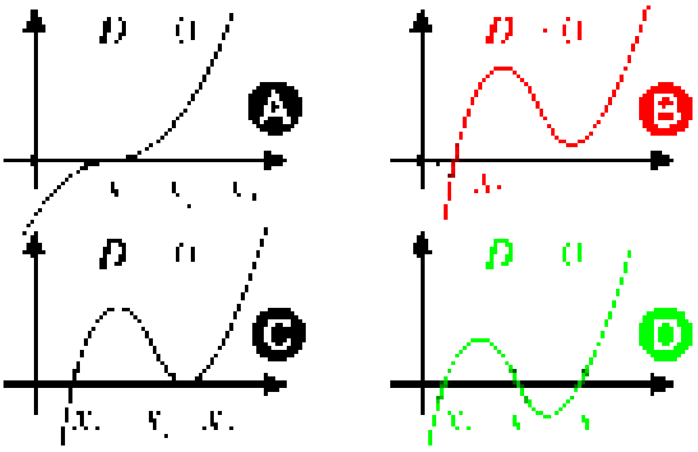
۲ - يو رييل حل x1 او ددې سره مختلف يو ډبل رييل حل x2=x3شته دی .

۳ - يو رييل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - يو رييل حل x1 او يوه جوړه کونجوګيرت کملکس اوبيونې يا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څيره د ټولو راشنل فنکشنونو(۱۲ . ۵۷) تيپيکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښايي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د بنې اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کیدی شي د دریمی درجي پولینومو لپاره د وییتا جمله تصدیق کړي چې د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دریمي درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اوبیوني وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$

$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$

$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx2 او x3 اوبیوني ولټول شي.

بیلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . . ۲ ۴ . برخي له مخي د پارشل Partial- (ټوټه-(ویش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$..\underline{x^3+2x^2}$$

$$........-x^2-4x+12$$

$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$

$$..............-6x+12$$

$$..............-6x+12$$

له x² - x - 6 = 0 څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو ریيلو ځوابونو سره
، $x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$
او داسی دی:

$$x^3-3x^2-4x+12 = (x-2)(x-3)(x+2)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخی اوبی
$x1 = 1/2$
لري او داسی دی:

$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا (□) له $x^2+6+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه ریيل حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل ریيل حل سره، یعنی لرو , $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دی

$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د(۱۲ . ۶۴) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$

له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسی دی

$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵) برابرون د (۱۲ . ۶۶) برابرونونو له مخی ځواب $x1 = 1$ لري، او داسی دی

$$(x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملی ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه ریبل حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) \quad =(x-1)(x^2-4x+13)$$

۱۲ . ۴ د ریښی (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کی د ریښی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرګند شو چی ځنګه د ریښی برابرون په ریشنل برابرونو اوله دې سره n- می درجي برابرونو بدلیدلي شي۰ دا دې دلته د بیلګو په څیر پاتي وي. یواځي ریبل اوبیونې به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :

د ریښي برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4} =16;............................(12,72)$$

ډیر ساده کیدی شي چی په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4} =9; \sqrt{2x+4} =3; 2x+4 =9; 2x =5; x =5/2;........(12,73)$$

د ازمایلو لپاره که (۱۲ . ۷۳) برابرون په (۱۲ . ۷۲) برابرونونو کی خوندي شي، نو څرګندیږي چی دا د x-ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4} =7+3.3 =16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۲ . ۱۵:

د ريښې برابرون يا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0;..........(12,74)$$

کيدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3;..........................(12,75)$$

د ازمايني لپاره، که (۱۲ . ۷۵) د پيل په برابرون (۱۲ . ۷۴) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون (۱۲ . ۷۴) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره يا په دې تعقيب د پيل برابرون ځواب نه لري.) داسي کيدی هم نه شي، ځکه چي تل $2x + 19>0$ دی)۰

دا ساده بيلګی موږ ته را ښايي چی بايد د ريښی مساواتو حل تل وازمايل شي چی ايا په ريښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شميرل شوي ارزښتونه په پيل مساوات کی کيږدي چی ايا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل يواځي د ازمايلو لپاره نه دی چي ګوندې تيك يا صحيح شميرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب يو اړيين سما نديز پل يا ضروری منطقي پل دی .

په ټوليزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f(x) = g(x) \qquad (12,76)$$

په يو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x) = G(x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته يا يو څه ور زيات شي ، يا تری کم شي، ياداوړه خواوې په يوه ګڼ ځل (ضرب) شي او يا وويشل شي (په دې حال کی بايد پرويشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ويشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ريښی لاندې راشي او يايه توان پورته شي نود پيل برابرون (۱۲ ، ۷۶) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په څټ (برعکس، مخامخ). کيدی شي چی اړول شوی برابرون (۱۲ . ۷۷) زيات ځوابونه ولري نسبت و پيل برابرون (۱۲ ، ۷۶) ته . دا به په لاندې بيلګه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۶:

د ریښي یا جذر برابرون یا مساوات

x-x-1=2x-1 (12 . 78)

څلورې یا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بیا څلورې یا مربع کولو سره سړی یو مربعمسوات لاس ته راوړي

x(x-1) = 0 (12 , 79)

چې لاندې اوبی یا ځواب لري :

x1 = 0, x2 = 1 (12 . 80)

دا د (۱۲ . ۷۹) اوبیونې دي، مګر باید و ازمایل شي چې ایا دا د (۱۲ . ۷۸) اوبیونې هم دي که نه.

د x = 0 لپاره په (۱۲ . ۷۸) کې دوه ریښی نه دې تعریف یا ددوه ریښو پېژند نه شته، نو x = 0 د (۱۲ . ۷۸) اوبیونه نه ده .

د x = 1 لپاره لاس ته راځي 1 - 0 = 1

له دې امله x = 1 د پیل بیلګی (۱۲ . ۷۸) یوګونی ځواب یا اوبی دی .

بیلګه ۱۲ . ۱۷:

د ریښی برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,............(12,81)$$

کیدی شي چې په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} =>$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} =>$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;.........(12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برابرون یا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, ...(12,83)$$

د ټولونورو x لپاره $x^2-4x+3| = 0$ دی ، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2 - 7x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x3 = 0, x4 = x1 = 3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پیل برابرون ډکوي.(باوري کوي، پوره کوي)

د $x = 3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله $x = 3$ د پیل برابرون یا مساوات (۱۲ ۸۱) اوبی یا حل دی . د

$x3 = 0$ او $x2 = 1,$

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون (۱۲ . ۸۱)

اوبی حل $x = 3$ (12 . 85)

یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدټاکلو ضربیونو سره

1.1.1. a) $x^2 - 4 = 0$ b) $3x^2 + 27 = 0$

c) $x^2 - 9x = 0$ d) $5x^2 = 125\, x$

1.1.2. a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$ b) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

c) $(x - 6)(x + 5) = 0$ d) $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سیتم، کوم مو مربع مساوتو ته لاربښودوي یا بیایي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$ b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مي درجې ځانګړي مساوات، چې‌په مربع مساوات بيرته اړول کيدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو يا معلومو ضريبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو يا نامعلومو ضريبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a-b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a+b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مي رجې مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$ b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$ d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د x او هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$ b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$ d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګڼونه څان داسې نيسي لکه 1 : 3 . ددې ګڼونو د مربع زياتون ۱۵۶۰ دی. دا ګڼونه څه نوميږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د درې يو په بل پسې ګټونو د لوي ګڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنيوګټونو د مربعو زياتونونږ. دا ګټونه څه نوميږي يا کوم دي؟

پ) د کوم مثبت ګڼ لسرڅله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت) مات 1/4 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزيه کړی، چې لاندې زياتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ يې لاس ته راشي.

۶ . ۲ . الف) په يوه برابر برقجريان کی مقاومت په ديرش اوم Ω 30 لوييږي، په کوم کې چې د برققوه په همغه د 220 V (وولټه) شپانونګ په پنځه امپير (1,65A) کوچنی‌شي . مقاومت او برققوه څومره دي؟

ب) دوه سيخونه چې مقاومت يې Ω 60 يو له بل توپير لري،چې يوه د غبرګ چالانولوعمومي مقاومت Ω22,5 کړي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

۶ . ۳ . الف) يوه د بايسکلځغلوني لار چې ۲۲۵ کيلو متره اوږده ده، د يوه موادو موټر څخه په درينيم ساعته لنډ وخت کې وهل کيږي،چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بايسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بايسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دي؟

ب) د سپورت جشن کې يو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپيل څخه يونيم ساعت وروسته له يوه بايسکلسپورتي څخه وروسته کيږي، کوم چې له مخامخ کيدو, نيم ساعت وروسته B ته رسيږي، او سملاسي بيرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسيږي په کوم کې چې ځغاستی و B ته رسيږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لرې ده؟

پ) دوه ډبډبي ځغاستي،يوبل باندې نيغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور،په ډبډبيو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانيه کی، دوم څلور متره په ثانيه کی دي دوي له ۳ ثانيو وروسته يو ۳۵ متره لريوالی يو له بل لري، دوي يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لروده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت) د ګاډي يو لاين د موټرځغاست سرك لمړۍ برخې سره غبرګ غزيدلی. د يوه موټر ځغاستي پيل کې د يو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشينونه په همغه چګوالي دي، که موټرځغاستی منظم تعجيل او يو تعجيل د $10m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72\ km/h$ دی؟

ټ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لایپخیږ څخه د دیساو په لور بایسکل ځغلیدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له دیساو څخه د لایپخیږ په لور راتلونکی بایسکل ځغاستی سره مخامخ کیږي. ورستنی ۱۰۰ دقيق د مخه ديساو ته راځي لکه دوم ولایپخیږ ته. د دیساو او لایپخیږ ترمنځ لرېوالی یا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړنچیز دریګوډي کې ، کاتیتې څانونه داسې يوبل سره نیسي لکه 3:4 ، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب) د يوه ولاړکونچیز دریګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتیتو زیاتون يې ۱۷ سانتیمتره اود يوې کاتیتې او هيپوتينوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ) د يوه سمکونچیز (ولاړکونچیز) دریګوډي کاتیتې څومره لويي دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتيمتره وي ، د دریګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت) د يوه ولاړګوډي نیمی (قطر) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لويږي. د سمکونچیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدي ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري.
د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاړ اړخ)

ټ) د یوې ګردی وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګرد کې دننه ځای مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا ځوندي مربع اړخ)

ج) د یوې ګردی نیمی باید څومره لوي، کهٔ دننه منځشوی مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګي څخه لوي وي؟

ح) که د یوې ګردی نیمی (قطر) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردی هواره دوه برابره کیږي. د ګردی سرچینې نیمی څومره لویه ده؟

خ) د یوه نیمغونډي نیمی څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشه کی یې ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د دریمي او څلورمي درجې مساوات

2 . 1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیری، چې د لاندې مساتو حلونه یا اوبیونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازماېښت وکړی!

۳ . ۱ – ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا ځلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\dfrac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\dfrac{4}{5}$ d) $\dfrac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{7}-\dfrac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\dfrac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\dfrac{16-\sqrt{x}}{2}-\dfrac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\dfrac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\dfrac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\dfrac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\dfrac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\dfrac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\dfrac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $\left|\sqrt{3x+7}\right|+\left|\sqrt{4-x}\right|=3$

3.1.10. a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\dfrac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۲ – ربينه مساوات د نامعلومو ضريبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x} = a$ b) $\sqrt[3]{x} = b$

c) $a - \sqrt[3]{x} = b$ d) $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$

3.2.2. a) $\sqrt{x - a} = b$ b) $\sqrt[3]{a - x} = b$

c) $\sqrt[4]{a^4 + x} = a$ d) $\sqrt[6]{a^6 - x} = b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - \sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$

b) $(a - \sqrt{x})\,(b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})\,(d + \sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax} - b}{\sqrt{ax} + b} = \dfrac{3\sqrt{ax} - 2b}{3\sqrt{ax} + 5b}$ d) $\dfrac{2a + 3\sqrt{bx}}{3a + 2\sqrt{bx}} = \dfrac{3b + 2\sqrt{ax}}{2b + 3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c + d}$ d) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a\sqrt{x} + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c\sqrt{x} + d}$

3.2.5. a) $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$ b) $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$

c) $\sqrt{x + a} = a - \sqrt{x}$ d) $\sqrt{x + a^2} - \sqrt{x} = b$

3.2.6. a) $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \dfrac{b}{\sqrt{b - x}}$ b) $\sqrt{x + a} - \sqrt{5x - 3a - 4b} = \dfrac{2b}{\sqrt{x + a}}$

c) $\sqrt{x + a} - \sqrt{x - a} = \dfrac{x + a - b}{\sqrt{x + a}}$

d) $\sqrt{3a - 2b + 2x} - 2\sqrt{3a - 2b - 2x} = \dfrac{a + 2b + 2x}{\sqrt{3a - 2b + 2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{3x^2 - 1} - \sqrt{3 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ ، ۳ – مساوات سیستمونه، چې ریښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$, $\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$, $x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$, $x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$, $y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$, $y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسڅندنت برابرونونه یا ـ مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دې ته ګوته نیول شوې وه، چی دلته یواځي هغه ترانسځندنت مساوات څېړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي.
دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتې اوبیونې یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیونې پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,1)$$

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په ځتې یا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b ....(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دی

$$l \text{og}_b x = c ....(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخې لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $: \log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بنې اوبیونه په لاندې ټولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c ....(13,5)$$

دلته (f(x یوه الجبري وبینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2 (x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$ (همداسی) $x^2+x+6=2^3=8$

او لاندې اوبیونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2};x_1=-2;x_2=1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کینې لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وبینه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}....................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه ریښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،

د کوم له څلوری یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515;x_2=-8,515$$

ټیك دا $x1=9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)]=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وبینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني
که $1<(b+3)/(b-2)$ وي.
د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$
له دې لرو $-2<3$دا د ټولو b لپاره پوره دی
د. $2 \le b$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 > b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .
له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $2 \le b$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وینې یا افادې دي. د بدلون کاروايي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x)....................................(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه $y1,y2,..$ په (۱۳,۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳,۵) لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,......... \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳,۹) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په ځلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .

د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره

له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$$x_1 = 10^2=100 \quad \text{او} \quad x_2 =10^{-1}= \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$

د $x>0$, مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندې $(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره حل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$

$$, \quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$

$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې ځلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0 \ , \ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1=lox_1=5; y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5; x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو b سره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4} + \log_4\sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \quad\ldots\ldots(13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13,15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وييني يا افادي(f (x اکسپوننتونه ياجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b,a>0 ,a|=1,b>0 \qquad (13 . 16)$$

په دې ډول د لوګاريتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b ....(13,17)$$

د کومو ځوابونه چی د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دی.

بيلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې ځلوری برابرون یا مربع مساوات ته بيايي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2 , x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چی د پيل برابرون اوبيونې يا ځوابونه هم دي۰

بيلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 , x_2 = -4$$

بيلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کيدی شي چې ناپيژندونکی د اکسپوننت يا په جګ څخه د دوه واره لوګاريتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \qquad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې ځایه

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کيڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننټونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;..................................(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13 . 19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وبینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0\ ;..................................(13,20)$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13 . 21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبيونو $y_1, y_2, y_3;$............... لپاره بايد

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 .... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بيلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کيدی شي چی د بدلون $y = 3^x \, (y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون يا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بيرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 . \lg 3 = \lg 1 = 0, \; x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2 . \lg 3 = \lg(-2)$ اوبيونه نه لري

بيلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} .... (13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} .... (13,26)$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};..............................(13,27)$$

له دې ځخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow-2\sqrt{y(y-1)}=0=>y(y-1)=0$$

$$y_1=0;y_2=1$$

$y_2=1$ ټيك (۱۳ ، ۲۷) پوره كوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1 \qquad ....(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاریتمولو ځخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پیلبراورن پوره کوي۰

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ ځخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتمولو له لارې لاس ته راځي

$$\ln^2 x-\ln x+1=\log_2 8=3$$

که کیږدو $y=\ln x$ ، نو دا ځلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x=-1 , \ln x=2, x1=e^{-1}=1/e , x2=e^2$

۱۳ . ۳ ګونومتریکي- یا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګونومتري ساده برابرون لاندې څېره لري

$$\sin x=a , \cos x=a \quad (13 . 29)$$

$$\tan x=a , \cot x=a, \quad (13 . 30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه (۱۳ . ۲۹) ځوابونه لري ، که $-1 \le a \le 1$ باور ولري، نور ارزښتونه sin x او cos x نه شي غوره کولی(پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشميرني سره د تکمو يا ګوټکونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) یو ځواب لاس ته راځي

د(۱۳، ۲۹) لپاره

a F sin a F cos

د (۱۳،۳۰) لپاره

a F tan a 1/x tan

دا چي tan x او cotx پریودې همداسی 180°لري او په یوه اينتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180°لري د(۱۳ ۳۰) ټيك یو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x0 د(۱۳ . ۳۰) یو ځواب وي) چی د بيلګي په توګه د جبشميرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ... -3, -2, -1, 01, 2, 3, ...; .... (13,31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په (۱۳ ، ۳۱) کی د بيلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30^o + k.180^o$$

د کونجونو فنکشنونه sin x او cos x پريودې(تل بېرته راګرځېدنه يا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د جبشمیرني سره یوه اوبیونه x_0 پیداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x=-x_0$ هم یو حل دی، او $x=-x_0$ د cos x = a په حالت کی یو بل اوبی

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د (۱۳ ، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....;..................(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°;..(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....;..................(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°;..(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: (په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427°

(په لینده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427

د) ۱۳ . ۳۲ (،) ۱۳ ، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13,833427 + k.360° = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657° + k.360 = 2,9001 + k.6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشمیروني سره مومو

x0 = 133,00013° = 133° = 2,32125.

د (۱۳ ، ۳۴) او (۱۳ . ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k.360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4{,}843000$ حل په جبشمیرنې پیداکوو

$x_0 = -59{,}999988° = -60° = -1{,}04718$

له دې امله د) ۱۳ . ۳۱ (له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$x_k = -60° + k.180° = -1{,}04718° + k.3{,}14159$

بیلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4{,}843000$ ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرنې سره داسی

$x_0 = 11{,}666677° = 11{,}67° = 0{,}203675$

لاس ته راځي. په دې توګه د (۱۳ . ۳) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11{,}67° + k.180° = 0{,}203675 + k.3{,}14159$

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرګندومتودو یا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a , \quad \cos f(x) = a \qquad (13 . 36)$$

$$\tan f(x) = a \quad , \cot f(x) = a \qquad (13 . 37)$$

دلته کیدی شي چی $f(x)$ الجبري او یا ترانسځیندنته افاده ويکه بدل (سوبستیتوتي) شي

$$y = f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y = a , \cos y = a \qquad (13 . 39)$$

$$\tan y = a , \cot y = a \qquad (13 . 40)$$

دا کیدی شي د جملی ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې $y3, y2, ,y1 , ...$ وي .

د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د $f(x) = yi , \; i = 1,2,3,...$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360° , k = ...,-3,-2,-1, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$, $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبښوني (حلونهو په توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90° + 3k.360° + 120° = 210° + 3k.360°$$

$$\overline{x}_k = 3y_k + 120° = 450° + 3k . 360° + 120° = 570° + 3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x, \sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x, ...) \qquad (13 . 42)$$

دلته که د بیلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13 . 43)$$

د ۴ . ۵ برخې تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2y^2$$ (usw. لراى نور

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳)، په y ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13 , 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې y1 , y2 .y3.... وي. نو بیاد(۱۳.۴۳)سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin x = y_i, i=1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چی په (۴۲ . ۱۳) کي ښول شي ، وازمایل شي، چی ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۴۲ . ۱۳) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x), ...) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سړی بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:

برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د (۴۲ . ۱۳) ، (۴۴ . ۱۳) سره ځان په رینه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \Leftrightarrow \pm \sqrt{1-y^2} = 1-y \Leftrightarrow 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0, y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي ، چی د y2=1 لپاره برابرون (۵۰ . ۱۳) او له دې سره سم برابرون (۴۹ . ۱۳) تل پوره دي. د دې په څېږ یا خلاف y1 فقط د (۵۰. ۱۳) حل دی ، که د

رینې له مخه زیاتیز یا مثبت نخښه وي. دا حالت یوائې هلته مخ ته پروت دی، چی cos x>0وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۵۱ . ۱۳) سره برابرون (۴۶ . ۱۳)حل یا اوبی شي او

حل یا اوبونه یی په (۴۹ . ۱۳) کی کیښول شي:

$$\sin x = y_1 = 0, x_k = k\pi; \quad k=...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1, x_k = \pi/2 + 2k; \quad k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (۱۳ . ۵۲) په (۱۳ . ۴۹) کېښوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځي جفت ګڼونه دي($x\pi = 2k\pi$) که(۱۳ . ۵۳) په (۱۳ . ۴۹) کېښوول شي، نو لاس ته راځي

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د (۱۳ . ۴۹) ټولې اوبیونې په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k\ ,\ x_k = \pi/2 + 2k\ ;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,...\quad (13\ .\ 54)$$

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0$ (13.55)

سره کیدی شي د ریښی مساوات ځخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳,۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \quad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$,

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad y_2 = -1. \quad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad x_k = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1,\quad \bar{\bar{x}}_k = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60° \\ 180° \\ 300° \end{Bmatrix} + k \cdot 360° = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول ارزښتونه x وشمیری، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره یې ازمایل یا ازماېښت اړیندی.

۱ - لوګاریتمي مساوات یا برابرونونه

1.1. a) $\log_4 (x + 1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$
c) $\lg \sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln (x - 1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg (2x + 5) - \lg (3x + 1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$
c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg (x - 1)^2 = 6 \lg 2$

1.3. a) $\lg (x - 1) + \lg 3 = \lg (x^2 - 1)$
b) $\lg (x + 1)^2 = \lg 2 + \lg (x + 1) + \lg (x - 1)$
c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg (x + 4)$
d) $\lg (x - 2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg (x + 1)$

1.4. a) $\lg x + \lg (x + 1) + \lg (x - 1) = \lg 24$
b) $\lg 3 + 2 \lg x = \lg (4 + x^3)$ c) $\lg (152 + x^3) - 3 \lg (x + 2) = 0$
d) $2 \lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg (a - \frac{1}{a}) = \lg (1 - \frac{1}{a}) + \lg (1 + \frac{1}{a})$
b) $\lg (ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$
c) $\lg x - \lg \frac{x}{abx - 1} = \lg (a - 1) + \lg (a + 1)$
d) $\log_a (2x + 1) = \log_a (x - 1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$
c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg (x^2 + 1) = 2 \lg^{-1} (x^2 + 1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$
c) $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1 - x)} + 5 \lg (1 - x) = 6$

1.8. a) $2\lg \lg x = \lg (3 - 2 \lg x)$ b) $\log_2 (x - 14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 (3x - 26)$
c) $4 \log_3^3 5x - 7 \log_3 15 x + 7 = 0$ d) $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25\lg x}$

c) $x^{\log_5(5x)-4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$

c) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$ d) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0$ b) $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$

c) $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1$ d) $\dfrac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$

۲ ـ اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$

c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$

c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$

c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$

c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$

e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$

g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $7^{2x+1}-3^{x-1}=7^{2x+3}-3^{x+1}$ b) $2^{x+1}-3^{x}=2^{x+3}-3^{x+2}$

c) $3^{2x-1}-5^{3x-2}=3^{2x+1}-5^{3x+2}$ d) $5^{2x}-3\cdot 5^{x}+2=0$

e) $5^{4\sqrt{x}}-6\cdot 5^{2\sqrt{x}}+5=0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}}-2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}+2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-2=0$

g) $3^{x+1}-2=9^{x}$

h) $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^{x}+5^{x-1}+5^{x-2}$

i) $2\cdot 3^{x+3}+7\cdot 3^{x-2}=493$ j) $3^{\sqrt{x}}-3^{1-\sqrt{x}}=\frac{26}{3}$

k) $33\cdot 2^{x-1}-4^{x+1}=2$ l) $3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}=5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3}+2\cdot 5^{x-2}=5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}}-5^{3-\sqrt{x}}=20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}}+0{,}5+9=28\cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x}-17\cdot 2^{-(x+2)}+1=0$

e) $2^{x^2}+2^{1-x^2}=\frac{9}{2}$ f) $12\sqrt[2x]{3}-\sqrt[x]{3}=27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}}-7\cdot\sqrt{3^{x-60}}=162$

i) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$

2.8. a) $\frac{3^{x}+3^{-x}}{3^{x+1}-1}=\frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x}+1}{2^{x}-4^{x}}=6$

c) $4+\frac{2}{3^{x}-1}=\frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x}+10}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x}=x$

۳ ـ ګونومتریکي ـ یا کونجکچیز مساوات

3.1. a) $\tan x=\frac{1}{2}$ b) $\sin x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x=\frac{2}{5}$ d) $\tan x=-1$

3.2. a) $\sin(2x-\frac{\pi}{2})=0{,}309$ b) $\cos(2x-\frac{\pi}{3})=0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{10})=0{,}809$ d) $\cos(x+\frac{\pi}{3})=0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\,\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$
j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$
k) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$
l) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x - 3\sin x\cos x = 0$
b) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$
c) $\tan^3 x + \tan^2 x\ \ 3\tan x - 3 = 0$
d) $\tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 0$
b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$
c) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 1$
d) $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$
e) $1 - \sin x = \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$
f) $2\sin^2\frac{x}{2} = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$
g) $1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0$
h) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$
i) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$
j) $1 - \sin x\cos x + \sin x - \cos x = 0$
k) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$
l) $\sin x\cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$
m) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$
n) $(\cos x)^{\sin x} = 1$
o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

۱۴ . ۱:نابرابرون(نامساوات)

۱۴ . ۱ . ۱ بنسټیزې کلیمی او شمیرقوانین

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنخښنی $<, \geq, >$ او $\leq$ له لارې یو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کی به نابرابرونونه تر څیړنی لاندې ونیول شي، چی یوه یا دوه ریيلی واریابلی یا اوښتونی ولري . یو نابرابرون د دوه واریابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښايي، د هغو سره چی واریابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګندډي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دئ ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واریابل یا اووښتونې یی غوره کولی شي او په ترم کی د هغي ځاي په ځاي کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونی وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډیري L کی سره راټولیګي.
په لاندې برخه کی به ډیر د وینامنطق(ویناسم اندیز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ (او د ډیري عملیو سومبولونه) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شمیرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونیول شي(مقایسه برخه ۳)، دلته دې a , b , c او dریيل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c,$ (14,1)

$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c$ (14,2)

$a:b<b:c$ (14,2)

$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c$ (14,3)

$a:c>b:c$ (14,3)

$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c$ (14,4)

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په شا کیږي یا که غواړئ برعکس کیږي. د بیلګي په توګه $3 < 4$ مګر که داوړه خواوې د 1 - سره ځل شي نو لاس ته راځي $-3 > -4$

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښنو > سره باور لري دا په دې مانا چی$a \le b$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز (مثبت)دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښنه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$a.b>0 \Leftrightarrow$ (14,5)

$\Leftrightarrow a:b>0\ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0),$ (14,5)

$a.b<0 \Leftrightarrow$ (14,6)

$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0).$ (14,6)

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \neq 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې توپیریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$a.b \ge 0 \Leftrightarrow (a \ge \wedge (a \ge 0) \vee (a<0 \wedge b<0)$ (14,7)

$a:b \ge 0 \Leftrightarrow (a \ge 0 \wedge b>0) \vee (a \le 0 \wedge b<0)$ (14,8)

۱۴ . ۱ ۱الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :

یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلګڼونوR برخه ډیر) ده۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو اینتروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشي ، د ګڼکرښې یوه ټاکلې برخه ده، چې له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینتروال کې دننه وي یا خونديږ وي نو د بند

اینتروال څخه غږیږو او که اینتروال پورې اړه ونه لري، واز اینتروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینتروالونه.
د اوبیډیرۍ په ورکولو سره په ګڼکرښې باندې، لاندې د انیتروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینتروال مختلف تیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده.

1. $(a,b) = \{x \,|\, a < x < b\}$ واز اینتروا ، اخر تخري په اینترول اړه نه لیر
2. $[a,b] = \{x \,|\, a \le x \le b\}$ بند اینتروال ، اخر توري په اینتروال ئوري اړه لري
3. $[a,b) = \{x \,|\, a \le x < b\}$ ښي واز اینتروال
4. $(a,b] = \{x \,|\, a < x \le b\}$ کیڼ واز اینتروال
5. $(a,\infty) = \{x \,|\, x > a\}$ښي لورته ناپاي او کیڼ لور ته واز اینتروال
6. $[a,\infty) = \{x \,|\, x \ge a\}$ښي لور ته ناپای او کیڼ لور ته بند اینترال
7. $(-\infty,b) = \{x \,|\, x < b\}$ښي لور ته واز او کیڼ ورته ناپاي اینتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \,|\, x \le b\}$ ښي لور ته بند او کیڼ لورت ناپاي اینتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینتروال ، ټول ریيلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیرۍ
11. $\varnothing$ تشډیرۍ

لاندې اینتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیرۍ هم په اینتروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیرۍ ټولنه ورسره جوړوي.

1. $[-\infty,b] = \{x \,|\, x \le b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \,|\, x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \,|\, x \ge a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a, \infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty, \infty] = \mathbb{R}^+$

Alternative notationپورته ته الترناتیو یا بدیلي لیکنښه

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنښهٔ په لاندې ډول ورکو لکیږي

$]a,b[= \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

$[a,b[= \{ x \mid a \leq x < b \}$

$]a,b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$

یادونه : داپورته د اینتروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انیتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\}$

نیم و از اینتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\leq b\}$

نیم واز اینتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\leq x<b\}$

واز اینتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اینتروال : (-oe,b]={x|x≤b}

کښ بند ناپای اینتروال : [a,oe)={x|x≥a}

ښی واز ناپای اینتروال :۰ (-oe,b)={x|x<b}

کین واز ناپای اینتروال :۰ (a,oe)={x|x<b}

ناپای اینتروال : {x د ګنګرښی تکی دی|x}=(oe، -oe)

بیلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستیزه ډیری Rکی د لاندې برابرون پیژندډیری غوښتنه منځ ته رااچوو.

$x - 2 = 1 + 7 - x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : د دې ترم T1(x) = x - 2 پیژنددیری ده:

D1 = [2 , oe)

په همدې توګه د ترم T2(x)=1+7-x پیژنددیری ی ده: (D2 =(-oe,7

د برابرون دپیژنددیری لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \cap D_2 = [2,\infty) \cap (-\infty, 7] = [2, 7]$$

لاندې ځیره وګورې(متاسفانه، چې ښه ځېره نه شم کښلی)

۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعد ې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چی یوه اوښتونې یا مجهوله ولري، او اوبیونې یی په ټولیزه توګه د اینتروالونو له لارې انځوریږي.

(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو 5x-6<4+9x دواړو لورو ته 6 + 9x- ورزیاتوو، نو لرو 10 > 4x- دواړه خواوې په 4 - ویشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي x > -5/2

د اوبیونې ډیر یا اوبیدیری : (L=(-5/2,oe

که په یوه غوښتونکی حل یا ویش کی ځله وونی، همداسي پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مخنخښي په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو اوبیدیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چی وي، باید په پام کی ولرل شي، چی یواځي هغه د نابرابرون شمیرل شوي د x - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول بی سملاسي (په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیدېری یا برخحلدیری کیدی شي چی د غوځدیری په څیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیری شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوځدیری جوړښت، کیدی شي چی د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په څیر په ګڼوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیدیری د برخ اوبیدیري یوه د یوګونو حالتونو ټولندیری ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

$$(3x-5)(x-2)<4(x-2)$$

که په (x-2) باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د $x > 2$ لپاره $(x-2)>0$

د $x = 2$ لپاره $(x-2)=0$

د $x < 2$ لپاره $(x-2)<0$

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته بڼه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x-5 \leq 4 <=> 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځي هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځي هغه x د

$$x \in (2,\infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیدیري لرو:

$$L_1 = (2,\infty) \bigcap (-\infty,3] = (2,3]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم حالت:

$$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$$

د لته په (x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.

د x = 2 ارزښت لیکلو ربښتیا وینا 0 ≥ 0 لاس ته راځي او له دې امله

L2 = {2 }

دریم حالت:

$$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$$

د 0 > 2 - x له امله د (۱۴ . ۳) له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کې راوړل شي:

$$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$$

د برخه اوبیډیریو ټولنې څخه ټول اوبیډیر) لاس ته راځي:

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$$

نو ټولې اوبیونې هغه x دي د کومو لپاره چې لرو: 3 > x >2

په لاندې بیلګو کې نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

(3x-1)/(2x+4)<2

د شرایطو 0=|2x+4له مخې، دا په دې مانا چې 2=| x د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د x>-2 لپاره 0<(2x+4)

د x<-2 لپاره 2<(2x+4)

سره سم یواځې دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

ځیره ۱۴ ۱ الف: دا ځېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبیډیری روښانه شو۰

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی۰

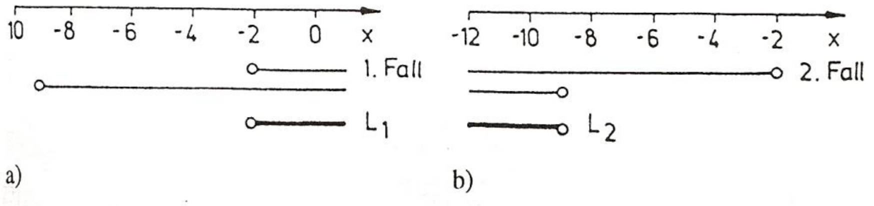


Bild 14 1

ځیره ۱۴ ا ب : دلته هم ګنونوکرښې شته، چۀ په هغې کې دا اوبیډیری روښانه کاږل شوي دي۰ ، که ځیره مې ونه کاږله، نو داکار بج ګران لوستونکی هم وکولای شي۰

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چی په (۵.۱۴) تر (۱۴ . ۸) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښايي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګې راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښنته شوي، له دې امله یې لیکښه د مخکنۍ لیکښې سره توپیر لري. دا لاندې لرو .

$$ax + b \ > 0, \qquad a \neq 0$$
;

$$x^2 - 5 < 0$$
;

$$|2x - 5| \leq x + 10$$
;

دلته اوبیونې اینتروالونه دي. ښول کیږي، چې اوبیډیرۍ څنګه پیداکیږي او د دې لپاره

اړیین شرایط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه ګڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواي د کمیز ګڼ سره ځل شي یا په کمیز ګڼ وویشل شي، نو مخنخښه تغیر خوري. که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښج یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرون بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نخښه غوره کوي او یا دواړه
- موږ 1.9:1(اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلسټ یا اوبیډیرۍ

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبیډیرۍ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ <u>1.9:2</u>(اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \Longleftrightarrow x^2 < 5 \Longleftrightarrow |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روانښه تشیرح لپاره یا شننې لپاره
یو د حالت توپیر رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا یا
ورته $x > -\sqrt{5}.$ نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \Longleftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبیډیرۍ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مورږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x-5 \leq x+10 \quad x \leq 15, \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x-5 \geq 0 \quad x \geq \frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \geq 5 \quad \Longleftrightarrow$$

(i) که وي $2x-5 \geq 0;$ نو دی $|2x-5| = 2x-5,$ او مورږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 15.$$

(ii) $2x-5 < 0.$ نو دی $|2x-5| = -(2x-5)$ او لرو

$$-2x+5 \leq x+10, \quad x \geq -\frac{5}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad -3x \leq 5 \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x-5 < 0 \quad x < \frac{5}{2}. \quad \Longleftrightarrow \quad 2x < 5 \quad \Longleftrightarrow$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیری له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې يو څو تمرينونه ورکړ شوي، کۀ ګران مينه وال يې غواړې تمرين کړي۰

لاندې نابرارونونه اوبی کړئ

(i) , $\frac{3}{x+5} < 2$

(ii) , $\sqrt{x^2+x+2} > x$

(iii) . $|x+5| > |x-2|$

بيلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$, $x|=-6$; $x |= 3$

د اصلي ماتلاندې $(3-x)(x+6)$ سره د حٔل له امله بايد بيا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونيول شي. شرايط، د کومولِه مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کيدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې وميندل شي:

$$(3-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6> \vee (3-x)<0 \wedge x+6<0$$

$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x>-6) \vee (x>3 \wedge x<-6) \Leftrightarrow -6<x<3$$

نو (۱۴ . ۶) شووني کوي يا ممکنه وي، چی هغه ورشو(ساحه يا ډيری يا نه هم شهچاپيريال) پيدا کړو چيرته چی اصلي مات لاندې کميز يا نفي دئ:

$$(3-x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3-x) >0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$$

$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x>3$$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کي لرلو سره شميرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز ځله وونی یا مثبت فاکتور $(3-x)(x+6)$ سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6\geq 6-2x \Leftrightarrow x\geq 0 \Leftrightarrow x\in[0,\infty),$$

$$L_2=(-6,3)\cap[0,\infty)=[0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x<-6 \vee x>3) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-6)\cup(3,\infty)$

دا چی د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په ځټ (چپه یا برعکس(تاسیر لري:

$$x+6\leq 6-2x \Leftrightarrow x\leq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)$$

$$L_2=[(-\infty,-6)\cup(3,\infty)]\cap(-\infty,0)=(-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $: L=L_1\cup L_2=[0,3)\cup(-\infty,-6)=(-\infty,-6)\cup[0,3)$

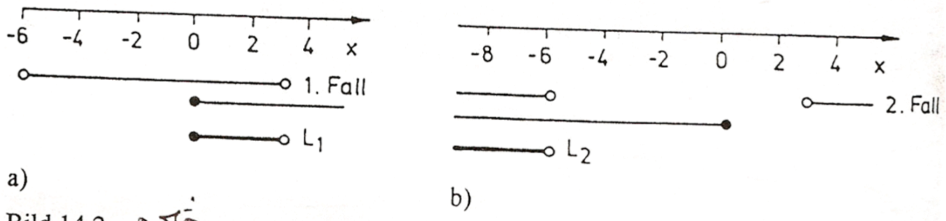


Bild 14.2 ځیره

د ځلوری برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د ځلوری ترم ځل انځورونی ځخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کي نیولو سره دx^2 د مخ (کیڼ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چی دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چی د اړیکنخښي په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولووروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x1=4 , x2=1/2$$

$$x^2-\frac{9}{2}x+2>0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2})>0 \Leftrightarrow (x>4\wedge x>\frac{1}{2})\vee(x<4\wedge x<\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x>4\vee x<\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د (۱۴ . ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېرى : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسيره دې په ياد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کرېږ کښلو له مخې هم حل کيدی شي، په ځانګړي ډول هلته، چې اړوند مربع شکل رېيل حل نه لري۰ بالاخره پهپای کې د وېش د مختښې راوړلو يوه بيلګه ښايو.

بيلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\le 0,\ x\ne\frac{2}{3}$.

حل (۱۴,۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2}\le 0 \Leftrightarrow (x\ge -5 \wedge x<\frac{2}{3}) \vee (x\le -5 \wedge x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\le x<\frac{2}{3}.$$

د سيستم حل ډېرى يا حل سټ: $L=[-5,\frac{2}{3})$.

۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسيستم د يوې ناپيژندونکی يا مجهولی يا اوښتونې سره

د يوه نابرابرون سيستم اوبيډيرى L د يوګونو نابرابرونونو اوبيډيريو غوځډيرى ده . ګټور يا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په يوه برابرونسيستم کی په نمره کړی شي ، ددې لپاره چې دا يوګوني (دا په دې مانا چې يو يو) اوبی کړی شو.

بيلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\ge 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\ge 3-x \Leftrightarrow x\le 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سيستم اوبيډيرى: L دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۴ . ۸

$$-2 < \frac{4x-10}{x-1} < 3, x \neq 1$$

د داسې نابرابرون ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دي:

$$I. -2 < \frac{4x-10}{x-1}$$

$$II. \frac{4x-10}{x-1} < 3$$

د همغه فاکتور(x-1) سره د حل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرګ د لیدوړ بڼی سره وڅیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :
(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

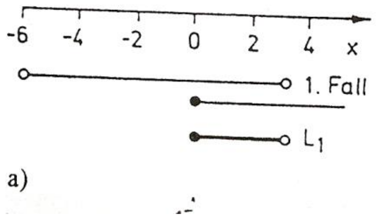
....I..II

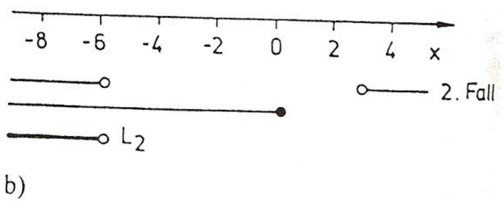
	I	II
$1.Fall^{(1)}$ $x \in (1,\infty)$	$-2x+2 < 4x-10$ $\Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in (2,\infty).$ $L_{I_1} = (1,\infty) \cap (2,\infty) = (2,\infty)$	$4x-10 < 3x-3$ $\Leftrightarrow x < 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty,7).$ $L_{II_1} = (1,\infty) \cap (-\infty,7) = (1,7)$
$2.Fall^{(2)}$ $x \in (-\infty,1)$	$-2x+2 > 4x-10$ $\Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty,2).$ $L_{I_2} = (-\infty,1) \cap (-\infty,2) = (-\infty,1)$	$4x-10 > 3x-3$ $\Leftrightarrow x > 7 \Leftrightarrow x \in (7,\infty).$ $L_{II_2} = (-\infty,1) \cap (7,\infty) = \varnothing$
	$L_I = L_{I_1} \cup L_{I_2}$ $= (-\infty,1) \cup (2,\infty)$	$L_{II} = L_{II_1} \cup L_{II_2}$ $= (1,7)$

د LI او LII غوڅېدیزی جوړول بیرته کیدی شي چې د یوګونو اوبیدیریوګنوړانګه باندې د لیدنی شي)(څیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیدیری:

$$L = L_I \cap L_{II} = (2,7)$$





(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو(ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیډیرۍ د یوه اوبیډیرۍ $R^2 = R \times R$ برخډیرۍ ده، چې د هوارۍ په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په څیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دی. په دې برخه کی به موږ یواځي د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \; (\geq 0 \,, <0, \leq 0) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو x , y او ثابتو ځله وونو(ضریبونو)

$a,b,c \in R$

سره د شرایطو $|a|=0 \vee |b|=0$ سره سم تر څیرنی لاندې ونیسو.

که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چی د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم (۱۴ . ۹) ، چی ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیډیرۍ په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو(د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پریښوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځاي شوي، نو راټولونکی کرښه د اوبیډیرۍ پورې اړه نه لري او کیدی شي یواځي ټوټه ټوټه کرښی (پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چی د ډیرۍ ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیرۍ پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د y په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چی په یوه کره نیولي x په روښانه توګه د لویو y - ارزښتونو لپاره پوره دی نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چی د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنی نیمی هوارې ټول ټکی اوبیډیرۍ L جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴)

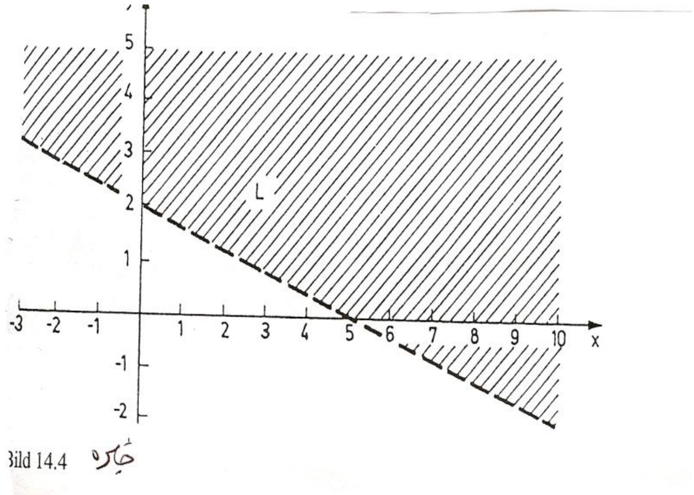
دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون (۱۴ . ۹) کی د مخه نیسي چي $|b|=0$ دی. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دی، چی د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چی په کرښه ax+bx+c=0
نه وي پروت٠

ازمايو چي ايا دا نابرابرون په اړونده نيمه هواره کی باور لري او يا نه.که ممکن وي نو د شميرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0) ټاکو. دا په بيلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا ريښتيا وينا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبيډيری پيداشوی ځاي (ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسيا کوي) تصديقوي.
دلته يوه ځيره کښل کيږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ږدو او بيا کرښه باسو٠ په کواوردينات کې د هوارې هغه برخه، چې اوبيډيری ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابيډيری ده٠

د يوه نابرابرونسيستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کيږی او بالاخر ه بي د يوګونو اوبيډيريو غوځډيری نيول کيږي يا جوړيږي.



بيلګه ۱۴ . ۱۰:
I . 2x+y<6
II. 4x-y>0

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبيډيري LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د (0 , 0) سيده برابرون باوري دي، نو دلته بايد يو بل ټکی د بيلګي په توګه (0 , 1) کيښنول شي، کوم چی د په ښتوالي يا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې امله اوبيډيرئ LII کی نه دئ پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف(. ش ۱۴ . ۵ ب دسيستم حلډيرئ L ښايي چي له دوه نيمکرښو بنديږي يا له دوه نيم کرښومحدوديږي.
د وړانديزارزښت لري چی د تمرينونو په خپلواك كار كولو کی د غوښتونکو اوبيډيريو L د يوګونو نيمهوارو غوځډيرئ حتي تر غاړې پورې رنګينه يا كرښی كرښی راوكښل شي، چی په دې ډول يی يو كواورديناتسيستم د انځورولو لپاره بسيا وكړي .ش ۱۴ . ۵

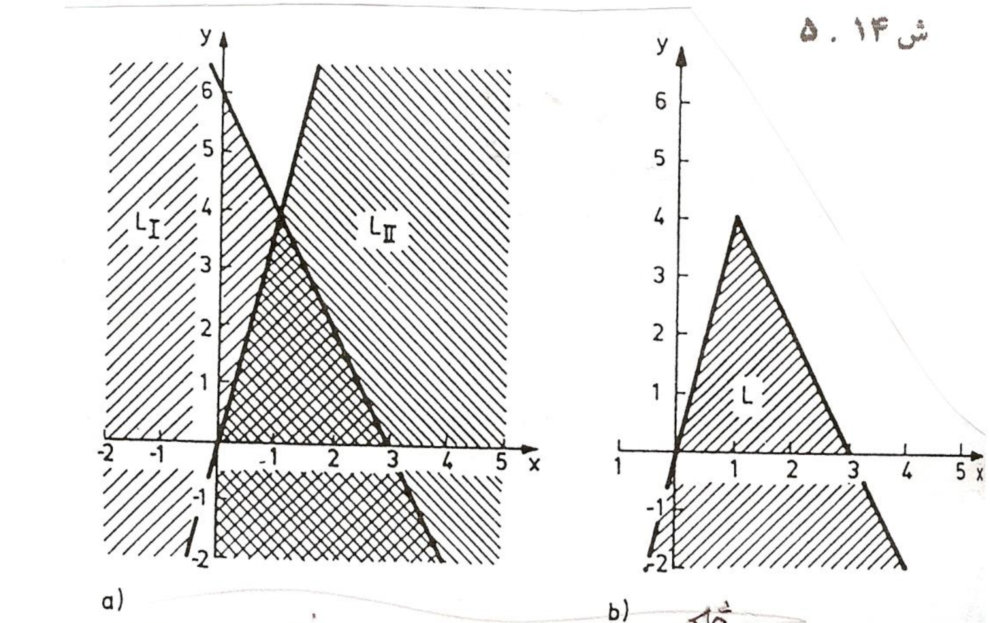


Bild 14.5

بيلګه ۱۴ . ۱۱:

I . x-3y-6<0 II. -x+y+1<0
III. x-6<0

دا اوبيډيرئ په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ كرښي
د پورته نابرابرونسيستم له مخځ د هر نابرابرون لپاره كرښه كشل كيږي، په يوه كواورديناتسيستم كې او بيا د هوارې هغه برخه، چې درېواړه كرو كې رابنده منهواره وي، هغه يې اوبی دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

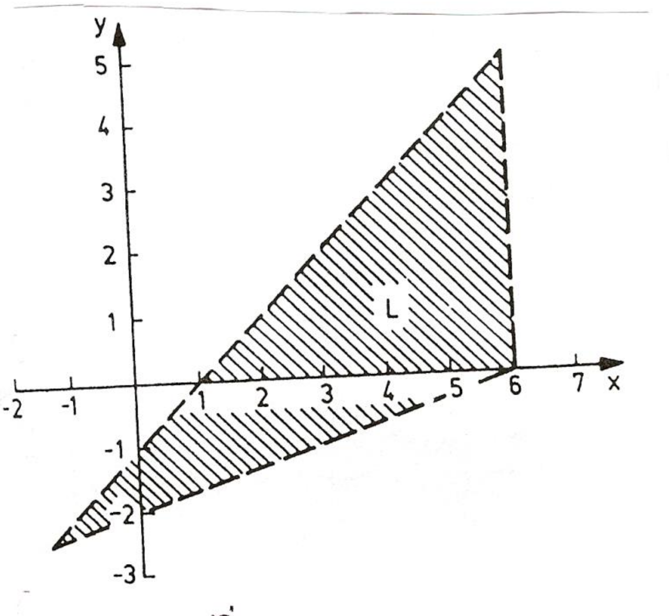


Bild 14.6 خاکره

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براورن یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه څرګنده ده چی د یوه رییل ګڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیریږي۰ داسی دئ:

$$T(x) = T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) \geq 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

$$T(x) = -T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) < 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چی د مطلقه ارزښت لرې پرېښول شي، یا د نورو ترمونو سره په ټرلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په (۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چي په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پریښول کیږي چی ځانونه په قاعده کي په اینتروال وښايي، کوم چی دیسیونکت(پردي) برخه ډیری د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چی (T(x ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چی د کنترول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb ریيل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي۰

$$|a \,.\, b| = |a| \,.\, |b|$$

د $b| = 0$ لپاره $\quad |a : b| = |a| : |b|$

۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چی ایا دا اوبیونې په نیول شوي یا فرض شوي اینتروال کي پراته دی او که یوائي د اوبې په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوبیوني اوبیډیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوبیونې شونی یا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم
کی انځوریږي .
د دواړو فنکشنونو غوځټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبیونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

(14,11) د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

(14,11) د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

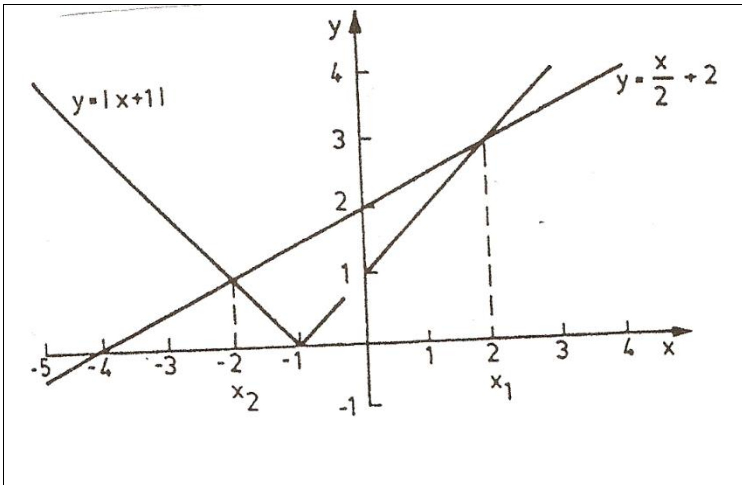
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیډیری $L = \{-2, 2\}$



په داسی حال کی چی د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$, ګرافیکی انځورونه، په ځرګند ډول یوه کرښه ده، کیڼ اړخ، $y = |x+1|$ د (۱۴ . ۱۱) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.
اوبی : کیدی شي په ځ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شوونې یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښنه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت ځرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینتروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|1-x|-|2x+3|=1$$

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د $x<1$ لپاره $|1-x|=1-x$

د $x>1$ لپاره $=-1+x$

او(لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د $x>-3/2$ لپاره $|2x+3|=2x+3$

د $x<-3/2$ لپاره $=-1x-3$

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

	$x<-3/2$	$-3/2<x<1$	$x>1$
$\|-1+x\|$	$1-x$	$1-x$	$-1+x$
$\|2x+3\|$	$2x+3$	$-2x-3$	$\|2x+3\|$

له دې امله د برابرون اوبې کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x\in(-\infty,-3/2)$$

$$1-x-(-2x-3)=1\Leftrightarrow x+4=1\Leftrightarrow x=-3\in(-\infty.-3/2)\Rightarrow x_1=-3$$

دم حالت:

$$x\in[-3/2,1]$$

$$1-x-(2x+3)=1\Leftrightarrow -3x-2=1\Leftrightarrow x=-1\in(-\infty.-3/2)\Rightarrow x_2=-1$$

دریم حالت:

$$x\in(1,\infty)$$

$$-1+x-(2x+3)=1\Leftrightarrow -x-4=1\Leftrightarrow x=-5\notin(1,\infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په څټ یا تضادکی دی، چی $x3 = -5$

یواځي ښکارندډوله اوبی دی(دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په څیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبډیری : $L = \{-3,-1\}$

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې څرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي. د کينِ اړخ يا لور مطلقه ارزښت خپلواك يا ازاد ښودل کيدی شی چی ټوټه ټوټه د مخه تيرشوي شميرنو په بوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقيبيږي:

د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

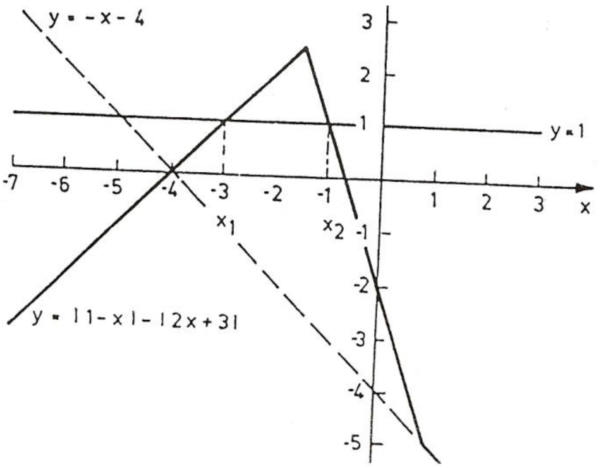
د $-2/3< x < 1$ لپاره $|1-x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - يا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شميرل شوو اوبيونو پرتلې له پرتلې مقايسي ښيره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښايي، چی دواړه کرښي ريښتيا د $x < -3/2$

او $-3/2< x < 1$-لپاره رښتيا هره يوه بله يوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره يو بل نه پريکوي. په دريم حالت کی د اړوند کرښی ټوټی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرټکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په ښير حل د نيول شوي اينتراوال د باندې دی ښيره (شايد داښيره هم ښيره نه شي، کۀ کرانو مينه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګټور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه ښيره بايد ريشی او يا راغلی وي، يا راغلې وی۰



که د مطلقه ازښت نخښنی په يوه ځلوري - يا مربع ترم کی له منځه وړل کيږي، نو کيدی شي چی د مخنخښني غوښتل شوي ښيرنی چي په برخه ۱۴. ۱ . ۲ کی تر ښيرني نيول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بيلګه ۱۴ . ۵ دې مقايسه شي)

بيلګه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x^2 -6x + 5 | = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

$|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$ لپاره $x<1 \vee x>5$ د (14,12)

$|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$ لپاره $1<x<5$ د (14,12)

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2 = 0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5,65 \in [5,\infty)$, $x_2 = 3 - \sqrt{7} = 0,35 \in (-oe , 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

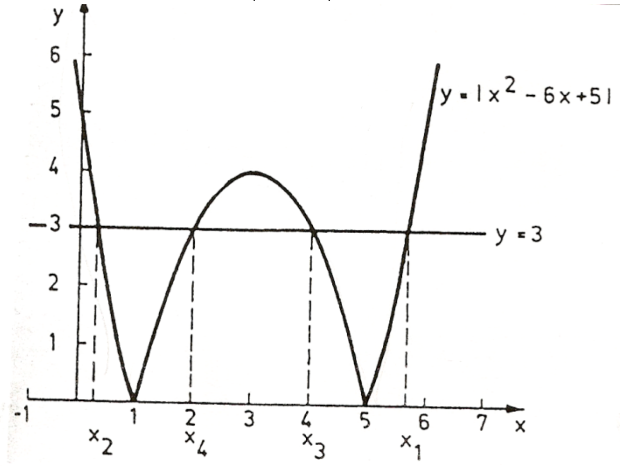
$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

$L \Rightarrow x_3=4 \in (1 , 5)$, $x_4= 2 \in (1 , 5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیدیری: $L = \{3 - \sqrt{7}; 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

څیره ۱۴ . ۹ د ګراف له لاری اوبی ښایي. کیڼ لور $y=|x^2-6x+5|$ د (۱۴ . ۱۲) له امله د پارابوللیندو څخه یوځاي کیږي. څیره ۱۴ . ۹



څیره ۱۴. ۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبې کې ، په کوم کې چې n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$, $i = 1,2,...n$ منځ ته راځي، 2^n حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دئ ، کوم چې موجود دی ، چې د ترم د $T_i(x)$ تیپ یا بڼی وي چې یا

$T_i(x)$ >0 او یا $T_i(x)$ 0> راکوي، یعنی د دوه توکو د وارییشن امکاناتو ټولګي ته (پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰)

قاعدې سره سم 2^n برابرونونه منځ ته راځي، چې په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیوني $x_1,x_2,x_3,......$ ولرودئ شي. یواځی دا باید وازمایل شي ، چې ایا دا اوبې xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.

د دې ټولیزې تګلار پسی موږ په بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د

T1(x)=1-x, T2=(2x+1)

سره، په لاندې $2^2 = 4$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0:\quad (1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$$

$$2.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0:\quad (1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د3- = x1=1, x2لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرونو کی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چې بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دئ

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : |7-3x|>2

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت:

$$7-3x\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,7/3]$$
$$7-3x\geq 2 \Leftrightarrow x\in(-\infty;5/3]$$
$$L_1=(-\infty,7/3]\cap(-\infty,5/3)=(-\infty,5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x<0 \Leftrightarrow x\in(7/3,\infty)$$
$$-7+3x\geq 2 \Leftrightarrow x\in[,\infty)$$
$$L_2=(7/3,\infty)\cap[3,\infty)=[3,\infty)$$
$$\Rightarrow$$
$$L=L_1\cup L_2=(-\infty,5/3]\cup[3,\infty)=R\setminus(5/3,3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کیږي:

بیلګه ۱۴ . ۱۶: |x-5|<|x+1|

د یوګونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنخښی:

د 5 < x لپاره |x-5|= x–5

د 5 > x لپاره |x-5|=-x+5

او

د 1 ≥ x لپاره |x+1|=x+1

د 1- ≤ x لپاره |x + 1| = -x - 1

په یوه لید وړ توګه په لاندې توګه راټولیګي رایوځاي کیږي یا راغونډیږي :

	X > -1	-1≤ x<5	x≥ 5
|x-5| =	-x+5	-x+5	x-5
|x+1|=	-x-1	x+1	x+1

لومړی حالت: $x\in(-\infty,-1)$

|x-5|<|x+1|<=>-x+5<-x-1 <=> 0<-6

د هر x<-1 نابرابرون یوې ناریښتیا وینا ته لاربښودوي، چی په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چي: L1 = Ø

دوم حلات $x\in[-1,5)$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x-5|<|x+1| \iff -x+5<-x-1 \iff x>2 \iff$

$x \in [2,\infty]$

$L_2 = [-1,5) \cap (2,5) = (2,5)$

دریم حالت: $x \in [5,\infty)$

$|x-5| < |x+1| \iff x-5 < x+1 \iff 0<6$

هر $x \geq 5$ نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: $L3 = [5, oe)$

حلډیری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,5) \cup ([5,\infty) = (2,\infty)$

بیلګه ۱۴ . ۱۷: $|x^2-4x-21|<24$

د $x^2-4x-21 \geq 0 \iff x<-3 \lor x \geq 7$

او $x^2-4x-21<0 \iff -3<x<7$

څخه لاس ته راځي:

د $x<-3 \lor x \geq 7$ لپاره $|x^2-4x-21| = x^2-4x-21$

د $-3<x<7$ لپاره $= -x^2+4x+21$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-3] \cup [7,\infty)$

$|x^2-4x-21|<24 \iff x^2-4x-21<24 \iff x^2-4x-45<0$

$\iff -5 < x < 9 \iff$

$x \in (-5,9)$

$L_1 = [(-\infty,-3] \cup [7,\infty)] \cap (-5,9) = (-5,-3] \cup [7,9)$

دویم حالت: $x \in (-3,7)$

$|x^2-4x-21|<24 \iff -x^2+4x+21<24 \iff x^2-4x+3>0$

$\iff x < 1 \lor x > 3 \iff$

$x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty),$

$L_2 = (-3,7) \cap [(-\infty,1)] \cup (3,\infty) = (-3,1) \cup (3,7)$

او بیډیری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5,1) \cup (3,9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې به په یوه بیلګه کې داسې نامساوات وڅیړو، په کومه کې چې مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کې منځ ته راشي.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د (۱۴ ، ۱۰) له مخې د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) له مخې په هر وخت کې د همغه ترم مخنخښه باید په پام کې ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د $x < -1/2$ لپاره $|1+2x| = -1-2x$

او

د $x < 1$ لپاره $(1-x) > 0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کې ګنوړانګه سره بیله یا توټه کیږي، داسې چي په راتلونکو ګڼلو کې یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

	$X<-1/2$	$-1 \leq x<1$	$x>1$
$\lvert 1+2x \rvert$	$-1-2x>$	$1+2x$	$1+2x$
$=1-x$	>0	>0	<0

لومړی حالت: $x \in (-oe, -1/2)$

$$-1-2x \leq 1-x \iff x \geq -2 \iff$$

$$x \in [-2 , oe)$$

$$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [-2 , oe) = [-2 , -1/2)$$

دویم حالت $x \in [- 1/2,1)$:

$$1+2x < 1- x \iff x<o \iff x \in (-oe,0]$$

$$L_2 = [-1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1-x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو سټ(اوبیډیری):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لاینی ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

(۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه ښي لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بڼی(۱۴ . ۹) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1| > x-2x-4$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1 < 0$ لپاره $= x + y - 1$

لومړی حالت: $-x -y +1 > 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff -x-y+1 > x-2y-4 \iff -2x+y+5 > 0$

$L1 = \{(x,y) | -x-y+1 \geq 0, -2x+y+5 > 0\}$

دوم حالت: $x-y+1 < 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff x+y-1 > x-2y-4 \iff 3y+3 > 0 \iff y < -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1\}$$

له دې سره L1 او L2 د اوبيډيرئ دوه نابرابرونونو غوڅډيرئ ده او کيدی شي، لکه څنګه يو نابرابرون د يوه ګراف سره انځور شي (ځيره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبيډيرئ بيرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبيډيريو ټولنديرئ ده۰ (ځيره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)۰

که په يوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې يا – ويينې د (۱۴ . ۱۳) بڼی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نيولو سره ځلور حالتونه يو له بل توپير کيدی شي.

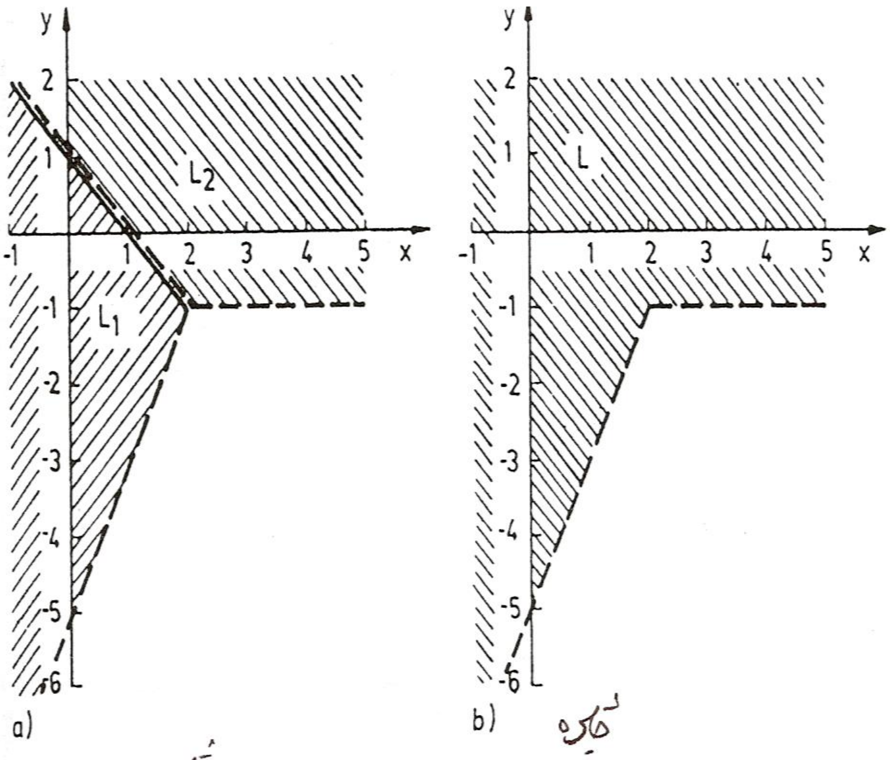


Bild 14.10 ځېره

تمرينونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې نامساواتو حلډېرۍ پیدا کړئ

1. a) $8x-3<2x+9$ b) $5-7x\le 3x-10$

c) $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{1}{2}+\frac{x}{9}$ d) $3(3x-2)\ge 4(3-2x)$

e) $\frac{8x-5}{5}\le\frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}x>\frac{5}{4}x+\frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9}+6x\ge 2(\frac{5}{6}+3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8}-6)<\frac{x}{6}-\frac{x}{8}+1$

2. a) $(3x+1)(2x-1)<(5x-3)(2x-1)$

b) $(8x-9)(3x+2)\ge(2+7x)(2+3x)$

c) $(7x-3)(5-7x)>(3-7x)(5x+3)$

d) $(5+2x)(7-5x)\le(10+4x)(2-3x)$

e) $x^2-x-6\le 2x+4$ f) $x^2+5x-6>3-3x$

g) $x^2+3x\ge -2x-6$ h) $x^2-4x+4<4x-8$

3. a) $\frac{3}{2x-4}\le 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x}\ge 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2}<2$ d) $\frac{5x+3}{x}<-2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2}>5$ f) $\frac{9-3x}{x-3}>-3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3}<3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1}\ge 12-\frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4}\le\frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x}>\frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3}<\frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1}\le\frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{3x+1}{x-2}>4$ f) $\frac{x-3}{1-6x}-\frac{2x+1}{4x+3}\ge-\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{3x-3}\ge 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x}-\frac{2-6x}{1-3x}<\frac{3}{8}\cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x-3)(3x-2)<0$ b) $(x+3)(7-x)\le 0$

c) $x^2+4x+3\ge 0$ d) $x^2-8x+7\le 0$

e) $x^2+4x+5<0$ f) $x^2-6x+10>0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$

6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \le 0$

c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \ge 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$

g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4} \le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \le 0$

8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$

c) $8(x - 2) \ge \frac{20}{x+1} + 3(x - 7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x - 6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرې وټاکئ

9. a) $2 + x \ge 2x - 7$
$5(x - 3) \ge 2(x - 3)$

b) $x + 6 < 14 - 3x$
$6 + 7x \ge 3x + 5$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$

d) $x + \frac{1}{3} \le 2x - \frac{7}{6}$
$5(x - \frac{3}{2}) \le 2x - 3$

10. a) $x^2 - 3x < 0$
$2(x + 2) < 4x - 1$

b) $x^2 + 6x + 8 < 0$
$2(x + 2) > x + 3$

c) $x^2 - 9 < 0$
$x + 2 > 2(x - 1)$

d) $x^2 - 3x + 3 > 0$
$4(x - 1) < 2(x + 1)$

11. a) $x^2 - 4x - 5 \le 0$
$x^2 + 6x - 16 < 0$

b) $x^2 + 2x - 8 < 0$
$x^2 - 3x - 4 > 0$

c) $x^2 - 5x > 0$
$x^2 - 9 > 0$

d) $x^2 - 6x + 5 < 0$
$x^2 + 8x + 15 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. a) $3x+2>2x+1>3(x-4)$ b) $-1<\frac{7x-3}{8x-5}<1$

c) $2<\frac{5x+1}{2x-1}<5$ d) $1<\frac{x^2+4x+5}{x+1}<4$

13. a) $3-x<2-4x$ b) $x+5>\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}$

$x+3<\frac{1}{2}(x+1)$ $4(x-1)<13-\frac{1}{4}x$

$\frac{x}{2}>x+\frac{1}{2}$ $2x-1>x+6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاوېرۍ په کارتیزې کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکې انځور کړۍ.

14. a) $y\geq-\frac{3}{2}x+3$ b) $y<-\frac{2}{3}x+2$

c) $x<2y+2$ d) $x>-y+3$

e) $4x-5y>12$ f) $-3x-8y\leq 24$

g) $2(y-3)\leq 6(x-1)$ h) $5x-y+2>3y-3x-10$

15. a) $2x+3y>-6$, $x-y<2$ b) $3x-y>3$, $x+y>4$

c) $x>1$, $x+2y<4$, $y+3>x$ d) $x-4y-6\leq 0$, $2x+y-3\leq 0$, $y-5\leq 0$

16. a) $-2<x+y<2$, $-2<x-y<2$ b) $x>2$, $-3<y<2+x$, $x+y<5$

c) $x^2-y^2\leq 0$ d) $(2x+y+1)(3y-x-1)>0$

د لاندې نامساواتو حاوېرۍ د شمیرلو او همداسې ګرافیکې لارې پیداکړۍ.

17. a) $|x-3|=5$ b) $|x+2|=7$

c) $|1-\frac{x}{2}|=x+\frac{5}{2}$ d) $|x+3|=|3x-4|$

e) $|x-4|=|2x+3|$ f) $|9-3x|-|2x-1|=4-2x$

g) $|2-3x|-|x+1|+|2x+2|=3$ h) $|x-3|-|3x-4|+|2x+1|=6$

18. a) $|x^2-2x-8|=7$ b) $|8-2x^2|=6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلډېرۍ پیدا کړۍ

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلډېرۍ په یوه په یوه کواوردیناتسیستم کې انځور کړۍ او ا نځور یې وکاږۍ

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ فنکشنونه(بلواك يا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د تابع(بلواك) او بیا زیاته د فنکشن په نامه ځموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، ځما په اند یا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی ځموږ د څیړلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریيلی واریابلی ریيل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن) د ریيلو ګڼونو ډیری باندې ، د یوې ډیرۍ $D \subseteq R$ یوه یواځنی څیرونه ده. D دپیژند ډیری نومیږي .

د ټولو ارزښتونو ډیرۍ چي y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژنددیری یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .

د ي وې قانونمندۍ f له مخی هر $x \in M$ یواځني یوه $y \in W$ باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کې به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴).

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته : د $x<0$ لپاره $y=|x|$
دلته $D=R,W = [0,\infty)$ د $x>0$ لپاره $y=x^2$
پام دې وي چی په داسی حالت کې له کیڼ و ښئ لور ته یا ګډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دی ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیځیت(واضح)روښانه و څرګند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ او ۱۵ . ۲ چی په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: y =f(x) که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل F(x,y)=0 دی او فنکشن ایمپلیځیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به 2y-x-1=0 D=R,W=R,فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپلیځیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیځیت شنینیزه بڼه (ایمپلیځیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیځیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلګی په توګه :
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیځیت حل کیدونکی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)

$$x = \varphi(t) \quad , \; y = \Psi(t)$$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: $x=2t\ ,y=t+1;\ -oe< t <oe$ به یوه پارامتري انځورونه وی او $x = t\ ,\ y = t/2 + 1$ به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X ....-2	-1	0	1	2	
Y 2	0,5	1	1,5	2	

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....-3	2	-1	0	1	2	3 ...
Y....3	2	1	0	1	4	9 ...

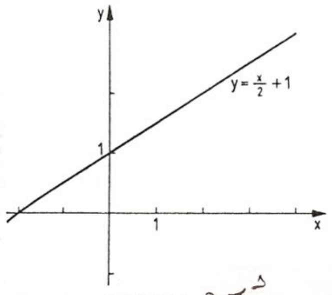


Bild 15.1 ځاره

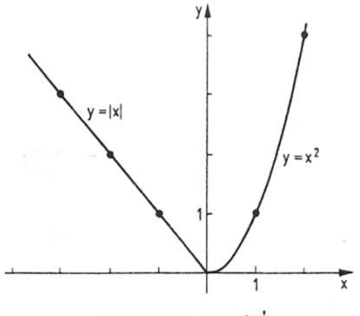


Bild 15.2 ځاره

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټي) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرښې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي .

څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال]a,b[کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پوري ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1) \leq f(x2)$ $(f(x1)>f(x2))$
که د برابروننخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټیږدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینتروال] a,a-[کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي
$f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$
د جوړه فنکشنونو ځیري اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي) دلته هم ځیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي) بیا هم ځیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

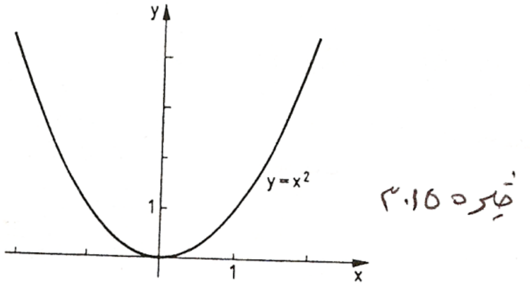
بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3$,$D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دئ :

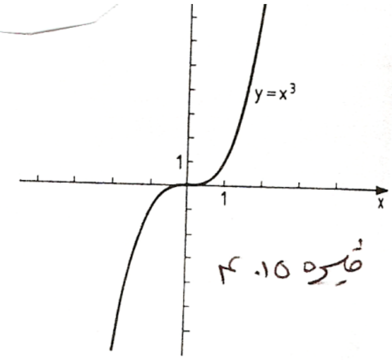
$(-x^3) = -x^3$

بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2$,$D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دئ:

$(-x)^2 = x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library





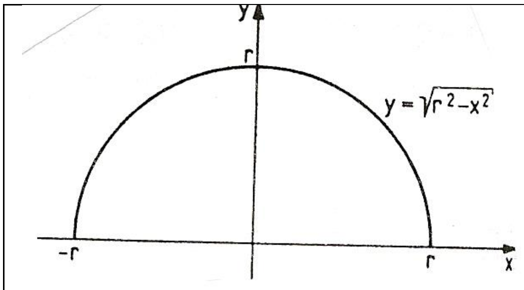
د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D (پیژندډیرۍ ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که
یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري :

$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بیلګه ۱۵ . ۵:

	فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$ بند یا راګیر(محدود)(زه به دا له دې وروسته بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی ځیره ده $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \le r$ ش . ۱۵ . ۵

پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p) = f(x)$$

د دورانی یا تل راکځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي۰

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\, x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (ځیره ۱۵ . ۱)

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 , \quad x2 = -2$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶)

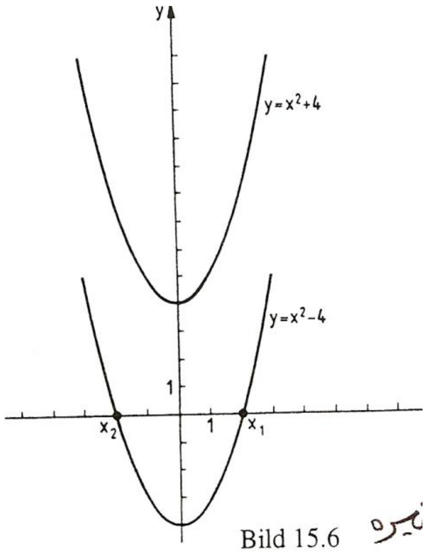


Bild 15.6 ځیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D$, $y \in W$ y =f(x),

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (= y f(xیو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ځنګیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړئ مروجه ځیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیزندونکی دي د y=f(x) په څټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په څټ فنکشن سره کټمټ(- ورته) identic دی۰ د په څټ یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$
کرافیکی ځیره y = x په کرښه د y =f(x)(هندارونه) یعنی په هنداره کی ځیرونه او لنډ یی: هندارونه) ده۰

بیلګي ۱۵ ، ۱ ته :

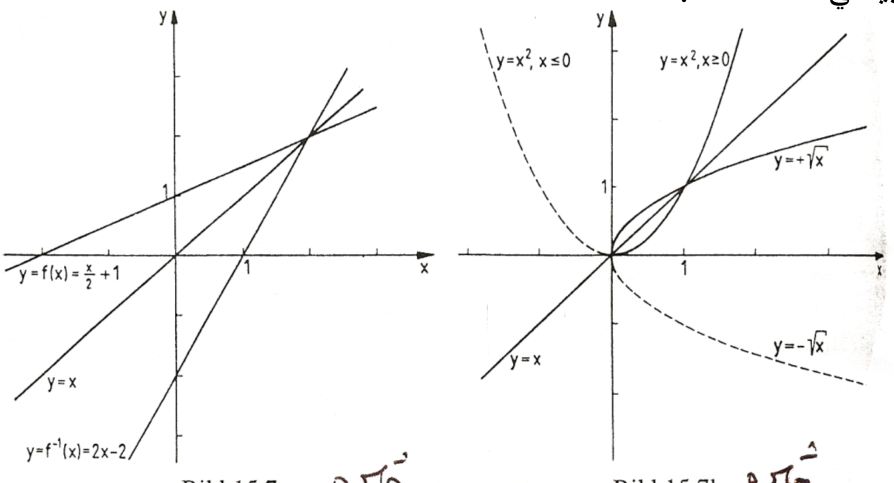


Bild 15.7a ښایره

Bild 15.7b ښایره

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په څټ فنکشن داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سړی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ښيره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن
$x \in D$ $y = x^2$,
ښیرره ش ۱۵ . ۳) په ښځکیدونکی دي یا په ښځکیدونکی نه دی.
هر $y \in W$ =[0,oe] پورې دوه[-oe,oe] = $x \in D$ اړه لري، یعنی x=+yاو x=-y
مګر y= x^2کلك مونوتون جګیدونکی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2, x\geq 0$
ته چپه- یا په ښتې فنکشن y=+ x دی، او $y = x^2$, $x < 0$ ته چپه- یا په ښتې فنکشن y = x -دی. (ښیره ۱۵ . ۷ ب) .
په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په ښتې فنکشن
$y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ښیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړدوله خویونو له مخی وښیړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي فنکشنونه) وښیړل شي. د فنکشنونو ښیړل به د هغو ځانګړدوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه ($n = 1$) یالاینې فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینې فنکشنونو ځیره(ګراف) یوه کرښه ده چي په y = n کی دy - محور غوڅوي ($x = 0$) او جګوالی $m = \tan\alpha$

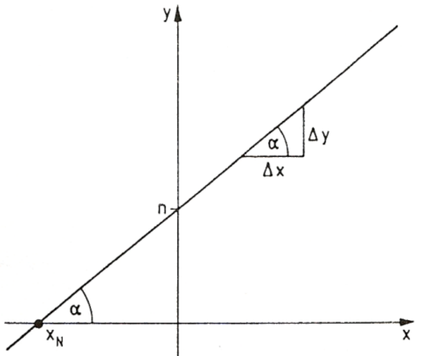


Bild 15.8 ځیره

لري (ځیره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي، دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي ($y = 0$ لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښی برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي یو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرتټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا نوره بنه غږځتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$y=ax^2+bx+c , a \neq 0$ (15 .3)

د مربع فنکشنونو ځیره) ګراف (پارابول دئ چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیڅینت) ځله ووني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بنه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر ځیرني لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(ځ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q$ (a=1 , b=p , c=q) (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د څلورئ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2$ (15,5)

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په

$q - p^2 /4$ راکښل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ئ ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:

$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$

(ځ،۱۵ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. $y = ax^2$ (a|=0,b=0, c = 0)

د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $1 < |a|$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:

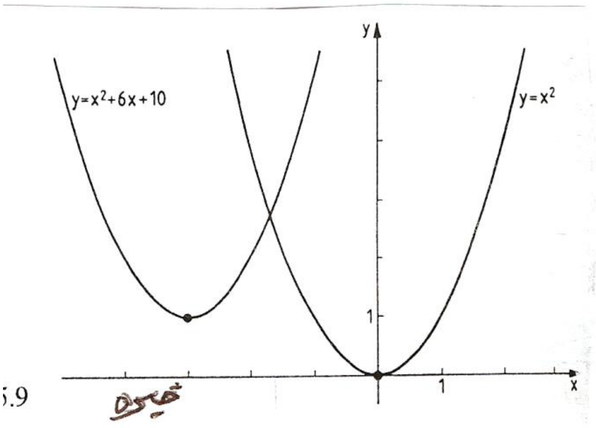
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(ځ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$



.9

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,(a=-1/2, b=1, c=4)

دککرۍ کواوردینات:

$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$

دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

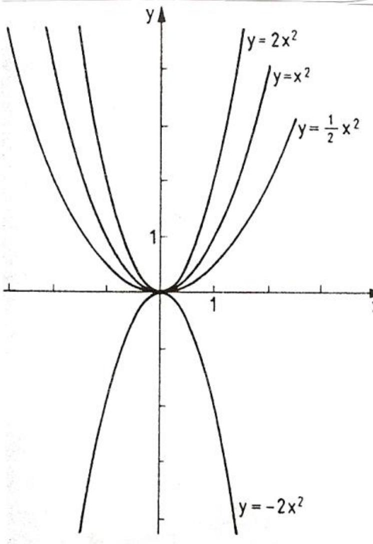


Bild 15.10

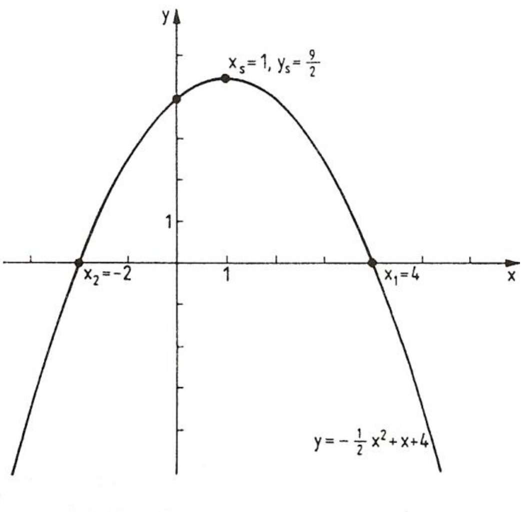


Bild 15.11

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.

وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :

صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چی دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي.

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته :

د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چی برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

فنکشن $y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو

چي د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Hornerschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کيدی شي له دې بڼی سره په لاندې ډول وشميرل شي:
a3 له x1 سره ځل کيږي، دې سره a2 زياتيږي، زياتون يی له x1 سره ځل، او a1 ور زياتوو، زياتون د x1 سره ځل او a0 ور زياتوو. دا د عمليوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شيما (د هورنرشيما) له لارې په ليدوړ ډول مخ ته بيايو (ځرکندوو)

ځلونه يا ضريبونه		a_2	a_1	a_0
منځنی ځلونه		a_3x_1	$(a_3x_1+a_2)x_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$
منځنی زياتون	a_3	$a_3x_1+a_2$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$

ددې شيما پوهيدل لږ نابلد دی او ځه فکر غواړي، خو پرې پوهيدل له نورو مساواتو ځخه روښان دی.

بيلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x_1 = -2$ او $x_2 = 5$ ځخه شميرل کيږي.
يادونه: دا د هورنر شيمت زما په دې اوسنی د برينکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی).
اوبيونه) :

	1	-2	-14	-5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	7 = f(-2)
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	0=f(5)

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځايونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې ددریمې درجې ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چې د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګې ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کې ولاړ دی. د هورنرشیما له لارې د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړۍ کې د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او$0 = f(x1)$ چې د $(x-x_1)$سره د ځلونې له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتې صفر ځایونه د ځلورۍ – یا مربع برابرنې د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمې درجې فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2,,..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیځینت یا ځله
ووني لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y=2x^5-6x^3-20x^2-8x+80$ درې صفرځایونه
$x_1=x_2=2, x_3=-2$
لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په
څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم
لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
x_1 = 2		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
x_2 = 2		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
x_3 = -2		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $2x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$
لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي
$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چی د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرني له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفیرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره (f(x تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty} [a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه دoe په لور ځي) .

که n جوړه او a_nکمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_nکمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$
$$n,m\in N_0;a_k,b_i\in R;Q_m\neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیږي، که $n<m$ وي او نااصلي مات دی
که $n\geq m$ ۰ نااصل مات فنکشن کیدی شي چي د پولینوم ویش له لارې تجزیه
(ټوټه) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریښتونی ماتی برخی د زیاتون په څیر
ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې
فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$پاتی (باقي) سره. پس لرو:
$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره یو صفرځاي لري، که $x = x0$وي نو باور لري:
$P_n(x_0)=0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x=x_L$لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0)=0$ او $Q_m(x)=0$
د $x=x_P$ لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P)\neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بیلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتباندي- او ماتلاندې فکشنونو ټوټي کولو وروسته په لاندې فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دئ، مګر مات لاندې صفر نه دئ (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دئ (قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپاى په لور ځي چی د قطبځای (ټيك ناپای ځای بللکيږي) xpکی کږه داسيمپټوټي کرښي $x = xP$ ته نزدې کيږي .د يوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې 0 / 0 شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ يعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ويش ځخه لاس ته راځی:

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ځيره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کيږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نيسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه يی د صفر په لور ځي، لکه ټولريشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن ځيره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولريشنلبرخی ته نزدې کوي.

بيلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: (y = x /(x²+1 د 0 = x0 په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول
یا قطب نه لري رییل اوبیونه نه لري) او دx -> ± oe لپاره دx- محور (y = 0)
د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: (y=(x²+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2 صفرځایونه(x²+2x-3 =0) په 3-= x1
او x1=1 کی لري . تشځای نه لري او په 2- = x3 کی قطب لري دا په دې مانا چی x =
2-اسیمپتوتی دی، او د x ±oe لپاره فنکشن y = x اسیمپتوتي کيږي)دا سیمپتوتی
کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} .... (15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګې n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګې
nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګې n لپاره ټولی کرښې د تعریف ډیری(-) = D
oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oeاو ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري. (څیره
۱٤ الف ۱۵) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe
او(W = (-oe,oe دي او (1-,1-) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴
ب)۰

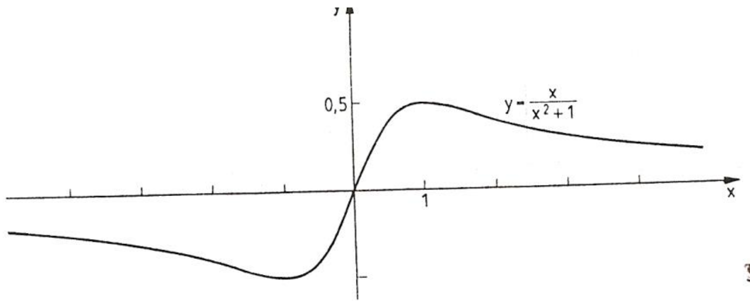


Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library

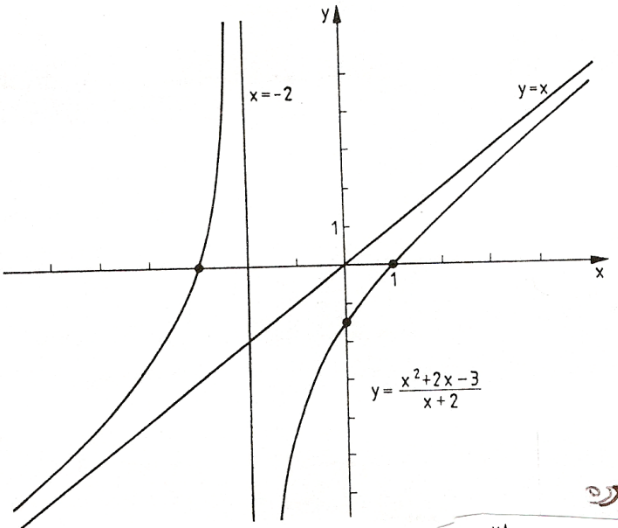


Bild 15.13

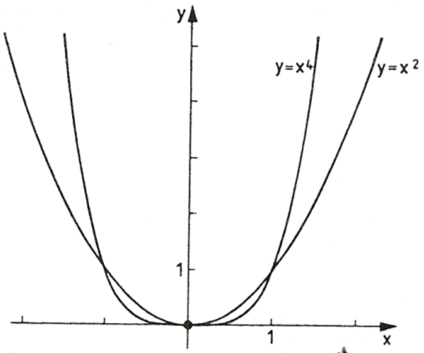


Bild 15.14a

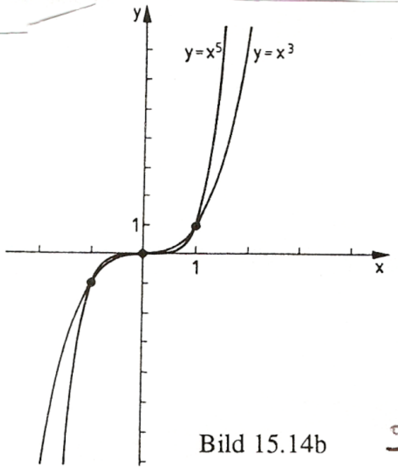


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دی په x = 0 کی د یوه قطب او y = 0 کی یوې اسیمپتوتی په ځیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز n لپاره ټولی کرې د پیژند دیري

D = (-oe,oe)\{0} د ارزښت دیري(W = (0,oe لري اوګډتکي (1,1), (-1,1)

؟؟؟ ځیره ش. ۱۵,۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون (کمیز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0 او(W=(-oe,oe او(1-،1-) (1,1) ګډ تکی دی (ځیره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه ځیرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

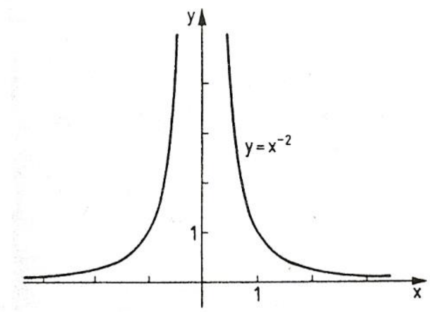


Bild 15.15a

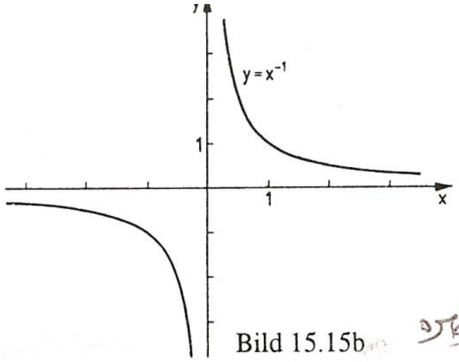


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اینتروال په پام کی ونیول شي.(پرتله بیلګه(بیلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کینې وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- یا پر ښت فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ , n \in N \setminus \{1\}\ , D = [0,\infty), W = [0,\infty) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15,8_b)$$

او رینبه فنکشن نومیږي (پیژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کیدی شي و

ریشنل ایکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $x^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[n]{x})^m\ x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ریشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ , a \in Q\ , x > 0 \qquad (15.8c)$$

نو د ریښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په ځیر وپوهیدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرښت بیرته پوتنځ فنکشن دی.
ټولیز پوتنځ فنکشن پیژند د رییل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رییلګڼونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R\ , x > 0 \qquad (15.8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$, $x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښتې فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$, $x \geq 0$

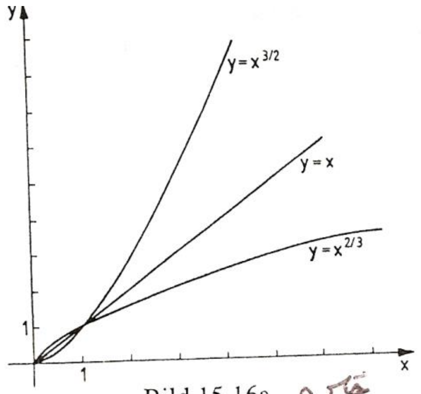


Bild 15.16a ب)

(ښیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}$, $x > 0$

ښیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2$, $x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائځی د ناکمیز رادیکاندو رینه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښتې فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښتې کیدونکی وی، $D = [0,oe)$ کی پر ښتې فنکشن $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری(دی، په داسی حال کی، چی د$y= x^3$ پرښتې فنکشن د[$D= (-oe,0$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$y=a^x, a > 0, a \neq 1$..................................(15,9)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کيږي۰
(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

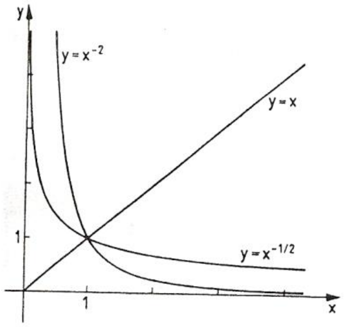


Bild 15.16b

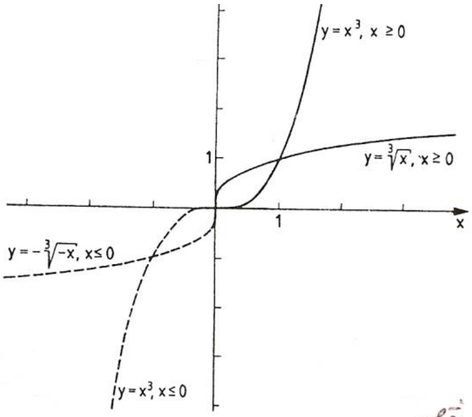


Bild 15.17

پورته دوه څيرې دې پام کې ونيول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پېژندديری(D=(-oe,oe) او ارزښتديری(W=(o,oe)
لري. د $a^0 = 1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کږو ګډ ټکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹)
په کلکه يو غږيز- یا مونوتونجګيدونکی
دی اود x->oe سره د x - محور ته
اسيمپوتيك ورنزدې کيږي .د 0<a<1
لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لويږي
او ځان د oe -> x سره د x -محور ته
اسيمپتوتيك نزدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشنونو يو څو بيلګې
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10)
په څيره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

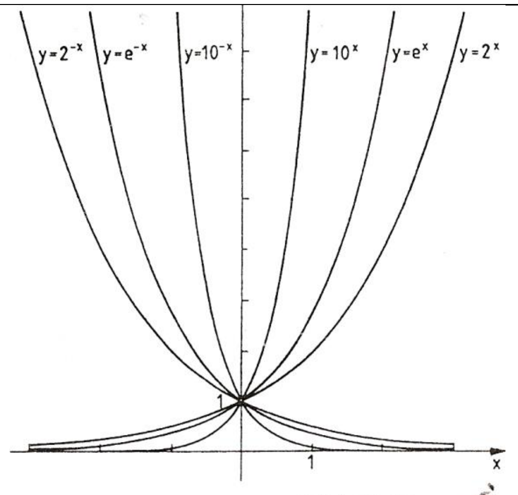


Bild 15.18

پېژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$y = \log_a x\ ,\ a > 0\ ,\ a \mid= 1$ (15.10)

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګوری) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژندډیری $D = (0.oe\ \ )$ او د ارزښتډیری($W=(-oe,oe\ \ )$ لري.

د $y = \log_a x$ کرېږ د ګرږو $y=a^x$ هنداورنه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکی$(1,0)$) د ټولوکرږو ګډ ټکی دی (څیره شته دی)

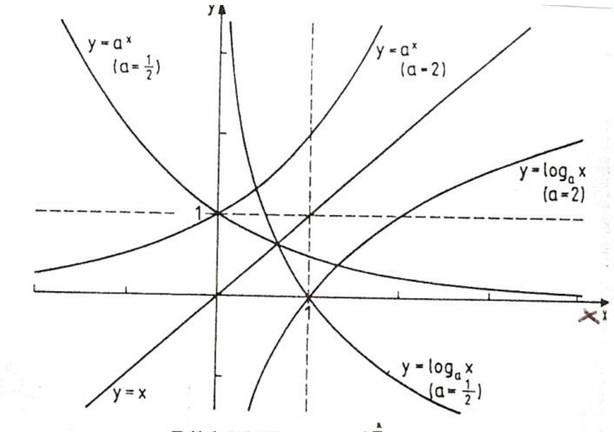


Bild 15.19 څېره

د $a>1$لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x \to 0$لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د $x>0$لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر یی یعني $y = \log_a x$

د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي .

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10} x = \lg x\ ,\ y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریگونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

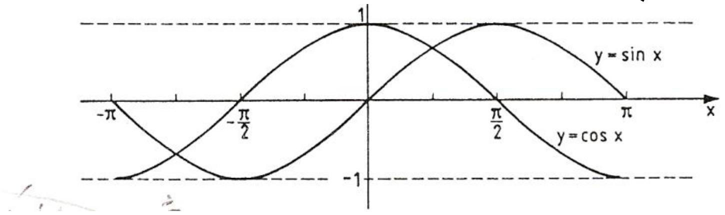
y=sinx ;D=R,W=[1,1]..$(15,11_a)$

$y = \cos x; D = R, W = [-1,1]$...$(15,11_b)$

$y = \tan x = \sin x / \cos x; D = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}, W = R, k \in Z$....$(15,11_c)$

$y = \cot x = \cos x / \sin x; D = R \setminus \{k\pi\}, W = R, k \in Z$..........$(15,11_d)$

د دې کرووتگلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریگونومتریکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریگونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه y=sinx , y= cosxپریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin(x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi) = \cos x , k \in Z$

لاندې فنکشنونه پریود π لري

y=tanx , y=cotx .دا په دې مانا چي

$\tan(x + k\pi) = \tan x, \cot(x + k\pi) = \cot x , k \in Z$

د تریگونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k \in Z$

د y=tanx, $k \in Z$ $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ y=sinx لپاره او د y = cot x , y = cos x

لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري یعني y = tan x

په $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ او y = cot x په $x_k = k\pi$, $k \in Z$ کی.

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلگي په توگه

(c) ketabton.com: The Digital Library

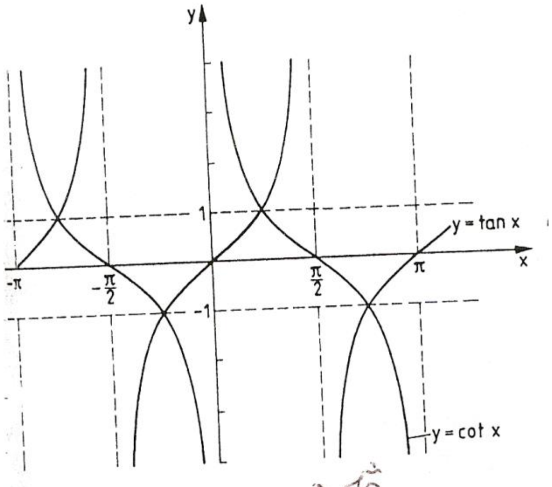


Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ كي مونوتون جګيدونکی دئ او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خويونه په يوه پوره پريودې کی تکراريږي. پس ويلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګيدونکی يا پورته کيدونکی دئ

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لويدونکی دئ، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کيدونکی دی٠

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لويدونکی دئ

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګيدونګی دئ

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګيدونکی دی ،

په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځايونه د مونوتوني اينتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ايتروالونه واز اينتروالونه دي.د ساين فنکشنونه د بيلګي په توګه د وخت په پريوديکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوينګونګ: رپيدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واريابل په t نخښه کيږي .فنکشن

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کیږي.

یادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پیژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی یا ځنځیري فنکشن دی. موږ ترڅیرني لاندې نیسو چې د سا ین فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واریابل tاو زیاتوونکی د ساین فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږېڅیره باندې څه تاسیر اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثیر په فنکشن $y = a . \sin t$ د $y = \sin t$ فنکشن ارزښت باندې غزول یا راکشول دی که ($|a| > 1$)او یا پړسول دي که
$|a| < 1$)وي $y= a.\sin x$ فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت
$y = \sin t$ دی، چیرته چی برسیره پردې د $a < 0$ لپاره په t - محور یوه
اینه څیرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) ($a = 2 , a = 1 / 2$)
په فنکشن کی a امپلیتودې Amplitude(جګوالی(نومیږي او د
شوینګنګ Schwingungرپیدنی پراخوالی یا ښه : سور باندې تاثیر اچوي.
څیره شته

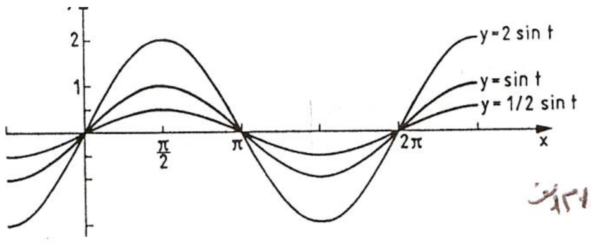
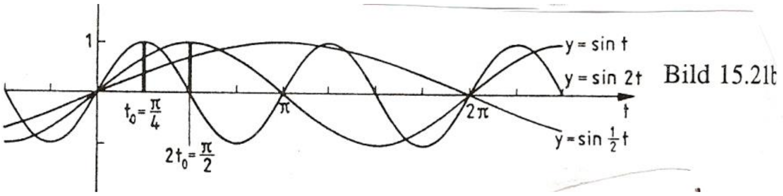


Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې یو وختني غزول که $|\omega|<1$ یا پړسول که $|\omega|>1$ وي تاثیر اچوي.چیرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسیره پردې یو په y- محور اینونه هم ده.
د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ یوه فنکشن ارزښت، د$y = \sin t$ خپلواك ω -ځله ، یعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څیره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کیږي، دا په پریودې تاثیر اچوي او $y = \omega t$
پریودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور $\varphi>0$ او یا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چی د $y=\sin t$ ولپاره٠

د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(څیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

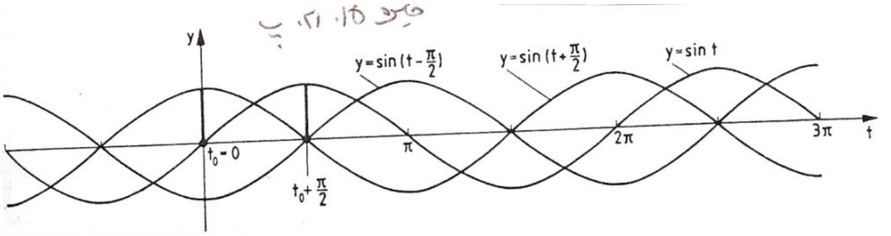
$$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$$

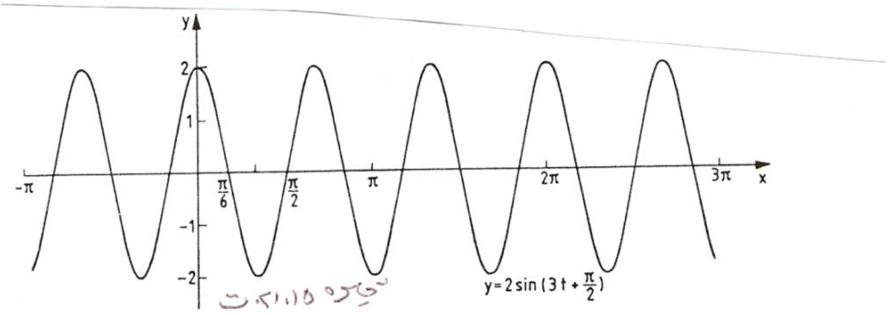
په فنکشن

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a . \sin\omega\,(t + \frac{\varphi}{\omega})$$

کی φ چی فازې نومیږي یو د راکښنلو تاثیر په کره $y = a.\sin\omega t$

د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.





(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin (3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپلیتود a = 2 لري، پریودې یی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کې د sint و کینې لورته راکښل شوی دی.

ځېړه ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$

د تریګونومتري فنکشنونو(یواځني) په معکوسوالي یا په ځنوالي کی مورږ په ځانګړو یوغېړیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند .۱۵ ۰ ۱۴ :
(پام: ځیرې له تشریح د مخه راغلې، بله لار نه وه)

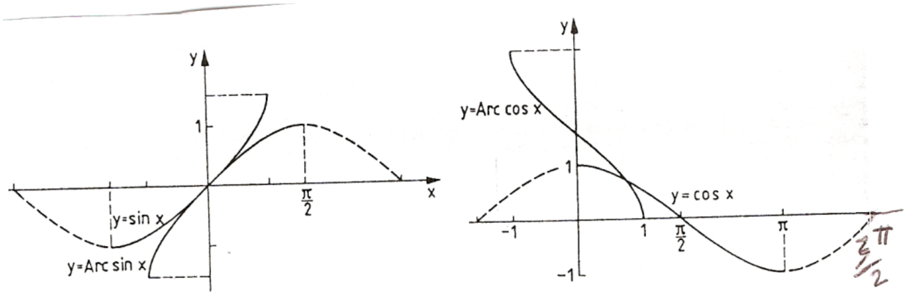


Bild 15.22 Bild 15.23

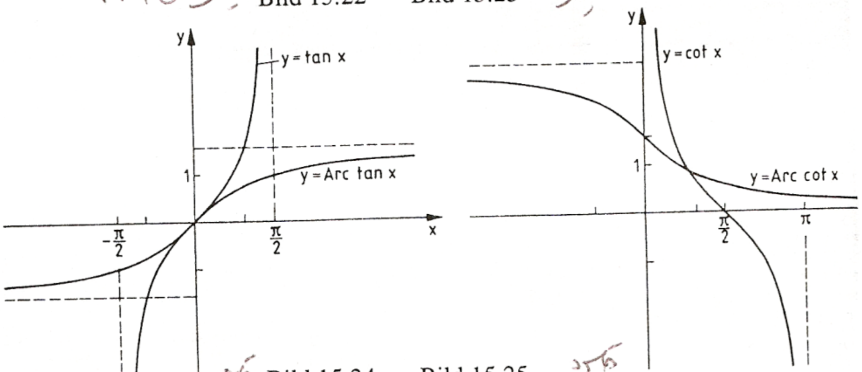


Bild 15.24 Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. $y = \sin x$, $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $W = [-1, 1]$ (15.12a)

2. $y = \cos x$, $D = [0, \pi]$, $W = [-1, 1]$ (15.12b)

3. $y = \tan x$, $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $W = \mathbf{R}$ (15.12c)

4. $y = \cot x$, $D = (0, \pi)$, $W = \mathbf{R}$ (15.12d)

پرخښ یا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \operatorname{Arc}\sin x$, $D = [-1, 1]$, $W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (15.13a)

2. $y = \operatorname{Arc}\cos x$, $D = [-1, 1]$, $W = [0, \pi]$ (15.13b)

3. $y = \operatorname{Arc}\tan x$, $D = \mathbf{R}$, $W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (15.13c)

4. $y = \operatorname{Arc}\cot x$, $D = \mathbf{R}$, $W = (0, \pi)$ (15.13d)

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایترو‌الونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځیري (تړلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $z \in W$لپاره یو فنکشن $y= f(z)$ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x تړلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي٠

یادونه : یو تړلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه $z = f(x)$

د$x \in D, z \in W$لپاره او $w=h(z)$ د$z \in W,w \in W^*$لپاره

او$y=f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،

نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو تړلی فنکشن دئ

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : په ترړلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په ترړلي فنکشن $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی
پ : د
$, y = \cos w \quad w = \sqrt{z} \quad , \quad z = 2x + 4,$
سره ترړلي فنکشن $y = \cos\sqrt{2x+4}$ لاس ته راځي
ت : په ترړلي فنکشن $y=\text{Arctan}1/(x-1)$ کی$z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\text{Arctan } w$ دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :
ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$$

او

$$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942;y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1 \; ; \; w=1/z=1/1=1$

$$y=\text{Arctan}w=\text{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که$f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو ترړلی یا ناترړلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت وي او(Arc sin f(x همداډول(Arc cosf(x تیك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري یا تعریف دي

بیلگه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحلیلي ویناو لپاره دې تعریفدیري پیداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

رادیکاند باید کمیز یا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 <=> x^2 \geq 3 <=> |x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D = (-oe , - 3] \cup [3 ,oe]$

ب)($y=lg(x+2)+1/(3+2x-x^2$ له لمړي زیاتونی کی باید Numerus > 0 نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 <=> x > -2$ ،

پس($D1=(-2,oe$

په دوم زیاتوني کی باید مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځایونه

له $3-2 x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

د فنکشن تعریفدیری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفدیري وي یعنی د D1 او D2

غوڅدیری: $D=D_1 \cap D_2 = (2 ,oe) \backslash \{2; -1\}$

پ) $y = Arc sin (x-1)/5$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفدیري په پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 <=> -5 \leq x-1 \leq 5 <=> -4 \leq x \leq 6 => D=[-4,6]$

ت($y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)}$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 <=> x^2<4 <=> x>2$ یا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځوروني ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y=2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۲ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړئ، او که ممکن وي نو مونوتونو اینتروالونه په تعریفدیریو بیل (تجزیه) کړئ، یا لوټه کړی.

a) $y=2x-3$ b) $y=-2x+3$ c) $y=x^2$

d) $y=-2x^2$ c) $y=2x^2+1$ f) $y=|x|$

۴ – پریکړه وکړئ چې لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y=x$ b) $y=x+1$ c) $y=x-1$

d) $y=2x^2$ e) $y=2x^2+1$ f) $y=(x-1)^2$

g) $y=x^2/2$ h) $y=x^5$ i) $y=|x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په خپ فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1, \infty)$, $W = [0, \infty)$,   d) $y = x^3/2$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

۷ – لاندې لايني فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0{,}4x - 1{,}6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x + 1{,}5)$

d) $y = 2$ e) $3x - 3y - 7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پیدا شي. او صفرځایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3)   (5,5)   b) (1,1) او (3,7)   c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 - 10x + 12$ f) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2/4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګټل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګټل شي. فنکشنونه د ګراف د خلفورم باندې انځور شي

a) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5$; $x_1 = 1/5$ $x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x$; $x_1 = -2$ $x_2 = 0{,}2$

d) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2\ 32x + 40$; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6$; $x_1 = 1{,}5$ $x_2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه وړکړ شي :

a) $y=\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y=\frac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y=\frac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y=\frac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y=\frac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځایونه دې وګټل شي، پول. تشځایونه او د 8 ± <- x لپاره ځان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څپ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y=2^{x-1}$, $D=R$, $W=(0,\infty)$ b) $y=2^x-1$, $D=R$, $W=(-1,\infty)$

c) $y=\log_3 x$, $D=(0,\infty)$, $W=R$ d) $y=\ln(x-1)$, $D=(1,\infty)$, $W=R$

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشنونه:

a) $y=(x-1)^2$ b) $y=x^2-1$ c) $y=(x+1)^2+1$

d) $y=x^2-4x+5$ e) $y=4x^2$ f) $y=(1/4)x^2+x/2+1$

۱۴ – ترلي فنکشنونه $y=f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$y=f(w)$, $w=h(z)$, $z=g(x)$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتدپریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y=e^{(x+1)^2}$ b) $y=\left(e^{x+1}\right)^2$ c) $y=\lg\sqrt{2x-3}$

d) $y=\sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y=\tan\sqrt{x-3}$ f) $y=\sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y=\sqrt{\tan x-3}$ h) $y=\tan\sqrt{x}-3$ i) $y=\operatorname{Arc}\sin x^2+$

j) $y=[\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y=\ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y=\sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y=\sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y=\operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$y = f(v),\ v = h(w),\ w = (g(z)),\ z = k(x)$

بیل کړی (د تعریف– او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندې شننيزويا سپړنيز (تحليلي) افادو لپاره تعريفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$ f) $y = \ln(2x + 5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x - 4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهني پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهني ستر کتاب : د شميرپوهني برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسي د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې څنو ځايونو غزېدلي او څني ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شميرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کربنيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

<u>Bonn (Germany):</u>

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره :

دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دويمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درۍ ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میړي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library