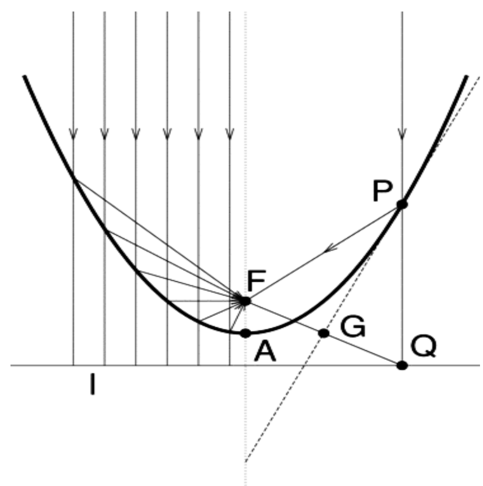
Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(رياضي)

ستركتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرڼي شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: د شمیرپوهنه ستر کتاب(لومړۍ برخ)

لیکونکی: ډاکتر ماخان،، میری،، شینواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپریدو لړۍ

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولته

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندویې ټولنې تخنیکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې لیکونکي یا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیوادوالو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لرې. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي ډپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي ډپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترمانوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي ډپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنير او ډپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپيرۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

۱ . ۰	د شمیرپوهنې سم اند یا منطق	۱
۱ . ۰ ۱	پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه	۱
۱ . ۰ ۲	د شمیرپوهنې سم اند بنستیزه کلیمې	۳
۱ . ۰ ۳ . ۰ ۱	ثابتې ، اوونتونې یا واریابلې ، ترمونه	۳
۱ . ۰ ۲ . ۰ ۲	وینا	۵
۱ . ۰ ۲ . ۰ ۳	د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ	۷
۱ . ۰ ٤	وینا فورم یا ۰بڼه او کوانتورونه	۱۳
۱ . ۰ ٥	اړیین او پوره کیدونکي شرطونه	۲۸
۱ . ۰ ٦	د شمیرکلیمه یا د لغاتو	۳۱
۱ . ۰ ۷	برابرون او نابرابرون	۳۳
۱ . ۸	تمرینونه	۳۸
۲ . ۰	ډیر ی پوهنه	۳۹
۲ . ۰ ۱	د ډیرئ پوهنې کلیمه	۴۰
۲ . ۲	د ډېریو ترمنځ اړیکې	۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

	برخدېرۍ	۴۶
	د یوې ډېرۍ توان یا تواندېرۍ (توانسټ)	۴۸
۲ ۰ ۳	په ډیرۍ کې کارونې یا عملیې(۱)	۵۰
	غوڅدېرۍ یا متقاطعدېرۍ	۵۲
	د یوې ډېرۍ یا سټ کمپلیمنت	۵۷
۲ ۰ ٤	څیرونه	۵۸
	تمرینونه	۶۷
۳ ۰	د رییل ګڼونو سره د شمیرلو بنسټیزې...	۷۰
۳ ۰ ۱	د ګڼونو- یا اعدادو سیستم جوړښت	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱	پیداینټي یا طبیعي ګڼونه	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ الف	د پیداینټ یا طبیعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ب	د پیداینټ ګڼونو انځورونه او شمیرنه	۷۲
۳ ۰ ۱ ۰ پ	د شمیرنې بنسټیز قوان ین	۷۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	الف د ویش تیوري	۸۶
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب	غټ ګډ پرویشونی(بزګترین مقسوم علیه ...)	۸۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ ۰ ۱ ۰ ٤	رییلګڼونه	۱۰۸
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشمیرنه	۱۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳	تمرينونه	۱۳۰
٤ ۰	پوتنځ يا توان ، ريښه يا جذر	۱۴۱
٤ ۰ ۱	توان د ټولګنيز په جګ يا اکسپوننت	۱۴۱
٤ ۰ ۲	ريښه او توان د راشنل اکسپوننت يا جګګن سره	۱۴۴
٤ ۰ ۳	توان د ريېلګڼ اکسپوننت يا جګګڼ سره	۱۵۱
٤ ۰ ٤	ټولګه	۱۵۲
۵ ۰	لوګاريتم	۱۵۸
۵ ۰ ۱	د لوګاريتم کليمه	۱۵۸
۵ ۰ ۳	ټولګه	۱۶۶
٦ ۰	ګونومتري	۱۶۹
٦ ۰ ۱	بنسټيزه ځمکچپوهنه يا هندسه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۱	ټکی او کرښه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۲	کونج	۱۷۱
٦ ۰ ۱ ۰ ۳	درېګوړۍ	۱۷۴
٤ ۰ ۱ ۰ ٤	کونکروانيڅ او ورته والی	۱۷۸
٦۰ ۱ ۰ ۵	ولاړکونجيز دريګوړۍ	۱۸۴
٦ ۰ ۲	په ولاړکونجيز دريګوړۍ کې د ...	۱۸۸
٦ ۰ ۳	په يوونګردۍ کې د کونج بلواک ..	۱۹۰
٦ ۰ ٤	د ساين او کوساين جملې	۱۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ۰ ٥	تریګنومتریکي کټمټوالی	۲۰۵
۶ . ۵	تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
۷ ۰	کمپلکس ګڼونه	۲۲۲
۸ ۰	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۲۳۵
۸ ۰ ۱	سیده ښوونه	۲۳۵
۸ . ۲	ناسیده ښوونه	۲۳۷
۸ ۰ ۳	د پوره اینډکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
۹	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
۹ ۰ ۱	لاینیز برابرون	۲۴۴
۱۰	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
۱۰ ۰ ۱	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
۱۰ ۰ ۲	د بینوم ځله ونه	۲۶۷
۱۰ ۰ ۳	د بینوم جمله	۲۷۰
۱۰ ۰ ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۱	پرموتیشن	۲۷۵
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۲	واریيشن	۲۸۰
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۳	کمبینیشن	۲۸۶
۱۰ ۰ ٤ ۰ ٤	د پرموتیشن، واریيشن او	۲۹۱
۱۱ ۰	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲ . ۴	د ګاوس لګوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلورئ ئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۰۲ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وییتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلورئ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱۲	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
٤ ۰ ۱۲	د ریښي برابرونونه	
۱۳	ترانسځیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱ ۰ ۱۳	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۲ ۰ ۱۳	اکسپوننشل- یا په جګګېږ برابرونونه	۳۸۰
۳ ۰ ۱۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه	۳۹۶
۱ ۰ ۱ ۰ ۱٤	بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین	
۱ ۰ ۱٤ الف	اینتروال	۳۹۷
۲ ۰ ۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱٤	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
٤ ۰ ۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
۲ ۰ ۱٤	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱ ۰ ۲ ۰ ۱٤	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
۲ ۰ ۲ ۰ ۱٤	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۳ ۰ ۲ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰
۱ ۰ ۱۵	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶
۱ ۰ ۱٦ کرښه ۴۶۶
۲ ۰ ۱٦ ګردۍ ۴۷۵
۳ ۰ ۱٦ ایلیپسې ۴۸۲
٤ ۰ ۱٦ هیوپربول ۴۸۷
۵ ۰ ۱٦ پارابول ۴۹۲
٦ ۰ ۱٦ ټولګه ۴۹۴
۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲
۱ ۰ ۱۷ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲
په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲
۲ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹
۳ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲
٤ ۰ ۱۷ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷
۵ ۰ ۱۷ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....
۱ ۰ ۵ ۰ ۱۷ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱
۲ ۰ ۵ ۰ ۱۷ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴
۵ ۰ ۱۷ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸	پرلپسې او پرلپسې لړۍ	۵۳۳
۱۸۰۱	پیل	۵۳۳
۱۸۰۲	د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه	۵۳۴
۱۸۰۲۰۱	مونوتوني پرلپسې	۵۴۲
۱۸۰۲۰۲	اریتمیتیکي پرلپسې	۵۴۵
۱۸۰۲۰۳	هندسي پرلپسې	۵۴۷
۱۸۰۲الف	لړۍ	۵۵۰
۱۸۰۲ الف ۰۱	هندسي لړۍ	۵۵۵
۱۸۰۲ الف ۲	اریتمیتیکي لړۍ	۵۵۷
۱۸۰٤	د پرلپسې او لړیو د پولې ...	۵۵۸
۱۹	د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه	۵۷۸
۱۹۰۱	بنسټیزې کلیمې	
	د پولو یا حدونو خویونه	۵۸۶
	د راشنل، کسري یا نسبتي	۵۹۲
	د مثلثاتي یا درېکوډي کچ توابعو پولې	۵۹۶
	ناپرېکیدنې	۶۰۴
۱۹۰۲	په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې	
۱۹۰۳	د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه	۶۱۰
۱۹۰٤	د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځپرکي ټولګه ۶۱۶
۲۰ دفرنځیالشمیرنه ۶۲۶
د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت) ۶۲۶
په یوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸
د لحضوی(سترګورپ) تغیر... ۶۳۰
کمښتوبش (تقسیم تفاضل؟) ۶۳۱
دفرنشلوبش یا رابیلیدنه یا مشتق ۶۳۳
کمښتوبش او مشتق یا رابیلیدنه ۶۳۶
د x_o په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳
د تانجنت پیژند او خویونه ۶۴۷
د تانجنت او عمود یا ولاړ ټولیز مساوات ۶۵۰
په بیدیا کې جګوالی ۶۵۲
۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت یا جګیدنې غوره والی
۲۰۲۰ د فرنځیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې ۶۵۶
د درېګوډیزو یا مثلثاتي ۶۶۲
د اکسپوننشل یا په جګ توابعو.... ۶۷۰
د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې ۶۷۶
د ایمپلیځیت توابعو مشتف ۶۸۳
د بنسټیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

	ټولګه	۶۸۸
	د يوې تابع د مشتق قابليت	۶۹۱
	د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق	۶۹۸
۲۰ .۳	د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه	۷۰۱
	د رول قضيه	۷۱۰
	د وايرشتراس قضيه	۷۱۱
۲۰.٤۰	افراطي ارزښتونه او اوړونټکی	
	د دفرنشل منځ ارزښت قضيه	۷۱۲
	يوعبړيزې توابع	۷۱۵
	ځای اړوند افراطي ټکي	۷۲۰
	د انعطاف – يا اوړونټکی	۷۲۴
	د کوږ يا منحني بحث يا خبرې	۷۳۳
	ناټاکلي حدونه يا پولې	۷۴۶
	د برنولي او د لو پيتال	۷۵۰
۲۰ ۰ ۵	د غټو ګټو پرابلم	۷۵۷
	تمرينونه	۷۶۷
	په ټوټه کسرونو ټوټه کونه	۷۷۸
۲۱	انتيګرالشميرنه	۷۸۷
	پيلراوړنه	۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنستیزه یا لومړنی تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنی تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال ځخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالوني قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالوني لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲
	د انتیګرالشمیرنې استعمال	۸۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه ۸۸۸

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مهربان او بخښونکي خدای(ج) په نامه

سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چې پیل لري نو پای هم باید ولري، د داسې یوه کار پیل او پای ته ځما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چې مېړښت یې زما لپاره هم ناشونې دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چې په یوه کار پیل وکړي، څکه چې سملاسي ورته څرګندیږي، چې په هیڅ شي کی څموږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوي په جوړښتیزه لور، په وراني کی مو د نړۍ سرکښې ځانته ګټلی.
موږ ګورو چې په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چې تراوسه حتی هغه بنسټیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چې مسلك ته اسانتیاوې پیښوي. له کومه ځاي چې ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅې هم نه دي کړي او ستونځي یې نه دي ګاللي، چې دلته طبعاً افراد ملامت نه دې، بلکه څموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنې او همدا ډول د کلتور او ژبې د ودې دنده د حکومتونو ده، چې څموږ په هیواد کی څموږ حکومتونو خپل ځانونه د دې کار جوګه نه دې ګڼلي، کیدی شي چې ووایو چې په ریښتینې یې ددې کار مخه هم نیولی ده، چې په افغاني ژزبه دې څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار څکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چې زه په مسلکي اړخ کی یواځې، په علمي توګه په الماني ژبه پوهیږم، د انګلیسي سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

نومونه چی له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچي په ښوونځي کي څما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمي په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومی او یا کومي چي ماته معلومی دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکی ښکاریدلی .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتی څانګکی لري. دا چی څما په فکر دا متآسفانه نه یواځي زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبی په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چی په دې بنسټیزه توګه په درسي او تمریني ډول سرته رسیږي.

نن نړی او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چی پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستوځوبیو (د ستونځو حل باندې) پیل نه دی کړی ، که دا په هره څانګه کی هم وي. څموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چی په ټولو پوهنو کی تغبنتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کی د پوهیدلو بنسټیزه ریښه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعی (پیداینښتی) یعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك، بیله شمیر پوهنی یې وده او په پوهیدنه ناشونی ده. شمیرپوهنه له بلی خوا یواځنی خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کی ونیوه او لیکل یې د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متأسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسې یوه کتاب لیکنې مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسې لیکنې څخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چې څموږ د هیواد ستنځي نوزې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چې خپلې د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم
- د لیکونکې راهڅونې دلیلونه یا د شوق رابیدارول
- د داسې کتاب لیکنه په هغه وخت کې شوني کیږي، چې د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یې هم نه لرم چې پیسې وګټم.

– وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چې له دې د مخه مې په سیاسي هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس مې خپل مسلك ته رامخه شوه.

– ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلې ټولنې او د خپلې ټولنې د خلکو سره مینه ولرې او په همدې ډول، د خپلې ټولنې او د ټولنې د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چې یوائې د خوبونو رینبتیا کولو لپاره په داسې کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځې په پوره مینه په غاړ واخستلې او دا کار مې په پوره مینه سر ته ورساوه.
- په دې برسیره لیکونکی دې وظیفې ته هم باید شعوري وي، چې دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسې لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غېروالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خو د داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیو (ستونځو حل) په خاطر، چی موږ افغانان یی په ځانګړې توګه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځي د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یې ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځې:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

۱ – دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری څخه نیول شوې، زیندی شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندی پاتی شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چی دا کرښی دا مطلب نه لري، چی ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کمیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پرینښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپرینښوولو حق څوک نه لري، نه دولت او نه افراد . دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوک باید ګیله من نه وي.

افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشی یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژبه یواځی د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کی پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لارښودې او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهی د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبی پرمخوده یو بل باندې سیده او په ځټ اغیز من دي، چی ولس وروسته پاتی وي، ژبه یی وروسته پاتی ده او که یوه ژبه وروسته پاتی وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کي سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد ځان کی نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چی کم له کمه بنسټیزې کلیمی په افغاني واړوم، چی دا کار می په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله می زیات فکر هم په کار اچولی چی مسلکي بنسټیزې کلیمي په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چی ټاکل شوي، داسی نومونه دي، چی د هغه شي ماهیت په کی روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چی په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.

په پوهنه کی له بلی ژبی تیریدنه ناشونی ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چی افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځي هلته کیږي، چی یوه ژبه له پوهنی وروسته پاتی وي.

د پوهنیزې ودې سره ژبی ته د نورو ژبو لغات راننوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چی که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهانی مروجه لغاتو ولیکم.

دا چی افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم زیندی شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبی ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبی د زیندی څخه خلاسون یا د افغاني ژبی څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغي باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوك د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسې یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.
دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولي، چې هغه مې په ټول کتاب کې شاید اصلاح کړې نه وي، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځې نه پیښبوي لکه د بیلګې په توګه: ما لمړی ګڼپوهنه لکیلې وه، چې وروسته مې شمیر پوهنې بانديې واړوله. شاید په ټولو ځایونو کې مې نه وي شمیرپوهنه کړې. دریګوډي ما لمړی دریکونجی لیکلی وو، چې دا هم شاید د کتاب په اوږدوکې نه وي اصلاح شوی، داسې نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چې د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځې ه پیښبوي.

۲ – تخنیکي ستونځې:
د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځي، چې څمور لپاره د داسې کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکې ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودي، نو له دې امله مې د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته مې سریښ کړې، چې کله کېږي هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چې دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکې او چاپوونکې به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښي څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطې به شوي وي،، خو په پوهیدلو کې به ستونځې پیښې نه کړي، د هغې بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم څنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.
ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

حرکت کی برکت ایښوولی دی.
لنډه دا، چی ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملګرو په فشار ما ، څما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیدایښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
ځنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنستیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځاي کړم.
ما د بنستیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي څیړل شوی.
څما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اومه اتمه او نهمه برخه څمونږ په هیواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیري پوهی سره اشناییته هم خورا ضرور ده

شپږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کي د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.

ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراګټوره مشوره هم راکړې.

زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاتړ کاوه، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یی کله کله ویل، چی ګوندې پیسی می باید ګټلی وی ، خو په دې پوهیږي، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنګه شوه نو ویل به یي چی نور دا د چرګانو ټونګي باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن ښاپیری څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی ښه تکړه ورته د لوي خداي(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

المان د پنځم ټولګی ښځه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی تړلی چاپ ته ورکړي شي.
زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.
که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په څانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چې د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. ځما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما ځخه لټ بل څوک نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

افغاني ، يوناني او الماني الف بي

ا ب پ ت ټ ث ج چ

څ ځ ح خ د ډ ذ

ر ړ ز ژ ږ ص ض ط

ظ ع غ ف ك ګ ق ل

م ن و ه ي ى ې ئ ۍ

يوناني الف بی

Α α	*Α α*	Alpha
Β β	*Β β*	Beta
Γ γ	*Γ γ*	Gamma
Δ δ	*Δ δ*	Delta
Ε ε	*Ε ε*	Epsilon
Ζ ζ	*Ζ ζ*	Zeta
Η η	*Η η*	Eta
Θ ϑ	*Θ ϑ*	Theta
Ι ι	*Ι ι*	Iota
Κ κ	*Κ ϰ*	Kappa
Λ λ	*Λ λ*	Lambda
Μ μ	*Μ μ*	My
Ν ν	*Ν ν*	Ny
Ξ ξ	*Ξ ξ*	Xi
Ο ο	*Ο ο*	Omikron
Π π	*Π π*	Pi
Ρ ρ	*Ρ ϱ*	Rho
Σ σ	*Σ σ*	Sigma
Τ τ	*Τ τ*	Tau
Υ υ	*Υ υ*	Ypsilon
Φ φ	*Φ φ*	Phi
Χ χ	*Χ χ*	Chi
Ψ ψ	*Ψ ψ*	Psi
ω ω	*Ω ω*	Omega

↑ اومیګا د پښتو دینه ↑ په الماني کې دینه

الماني الف بي

A a	𝒜 𝒶	𝔄 𝔞
B b	ℬ 𝒷	𝔅 𝔟
C c	𝒞 𝒸	ℭ 𝔠
D d	𝒟 𝒹	𝔇 𝔡
E e	ℰ ℯ	𝔈 𝔢
F f	ℱ 𝒻	𝔉 𝔣
G g	𝒢 ℊ	𝔊 𝔤
H h	ℋ 𝒽	ℌ 𝔥
I i	ℐ 𝒾	ℑ 𝔦
J j	𝒥 𝒿	𝔍 𝔧
K k	𝒦 𝓀	𝔎 𝔨
L l	ℒ 𝓁	𝔏 𝔩
M m	ℳ 𝓂	𝔐 𝔪
N n	𝒩 𝓃	𝔑 𝔫
O o	𝒪 ℴ	𝔒 𝔬
P p	𝒫 𝓅	𝔓 𝔭
Q q	𝒬 𝓆	𝔔 𝔮
R r	ℛ 𝓇	ℜ 𝔯
S s	𝒮 𝓈	𝔖 𝔰
T t	𝒯 𝓉	𝔗 𝔱
U u	𝒰 𝓊	𝔘 𝔲
V v	𝒱 𝓋	𝔙 𝔳
W w	𝒲 𝓌	𝔚 𝔴
X x	𝒳 𝓍	𝔛 𝔵
Y y	𝒴 𝓎	𝔜 𝔶
Z z	𝒵 𝓏	ℨ 𝔷

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیزي نخښې

مساوي	$=$
نامساوي (نوروکتابونو کې)	$\neq$ ($=$)
کوچنی له	$<$
لوي له................	$>$
کوچنی یا مساوي له	$\leq$
لوي یا مساوي له	$\geq$
ډیر کوچني	$\ll$
ډیر لوي	$\gg$
ورته یا متناسب............	$\sim$
کونګروا‌ینځ	$\cong$
همداسی یا ښايي یا په ګوره کوي	
کتېمتې..................	$\equiv$
غبرګ	$\parallel$
ناغبرګ.................	$\nparallel$
ولاړ په	$\perp$
دریګوډی	$\triangle$
ګردی	$\bigcirc$
نیمی یا قطر.............	$\oslash$
کونج	$\angle$
د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج	$\angle(g,h)$
کرښه، له A و B ته	$\overline{AB}$
له A و B ته لوریزه کرښه.....	$\overrightarrow{AB}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیندہ.................... AB

مطلقه ارزښت د .... |a|

ایماجینار یوون(واحد)....... i

د اویلرګڼ = ...2,7182818 e

پي د لودولف ګڼπ= ...3, 14149

د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي ->

ناپای................... œ

د x فنکشن یا په واك چې بلواك مو بللی f(x)

(لوستل یي (f د x یا د f, x لنډ : fx)

د x څیرونه په f(x) : لیکو: f(x) ~~→~~x

f : x →

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن h(x); g(x)

لیمس یا پوله............... lim

تریګونومتریکي بلواك	ساین	sin
	کوساین	cos
	تانجنت	tan
	کوتنجنت...........	cot
څیکلومتریکي بلواك	ارکوس ساین.........	arc sin
	ارکوس کوساین	arc cos
	ارکوس تانجنت	arc tan
	ارکوس کوتانجنت.....	arc cot

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیدایښتي لوګاریتم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس ګڼونه........... C

رییلګڼونه .... $\mathbb{R}$

ټولګڼونه .... Z

نامنفي ټولګڼونه یا

طبعي ګڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي ګڼونه .... $\mathbb{N}$

تعریفډیری .... D

ارزښتډیری........... W

حلډیری L

د ډیري A پوتنخډیری P(A)

ډیري............. M,N,A,B

تشډیری .... ∅

برخه ډیری............

پورته یا لویډیری (چې بل ډیری خوندي لري)

ټولنډیری............ ∪

غوڅډیری .... ∩

د A کومپلیمنت ..... CA , A'

د ډیریو ورته والی ...... A~B

د ډیریو خل.......... A × B

لوستل B اتیران A یا - ضُل -

توپیرډیری : A بي له B ده A\B

دلته: a د b پرویشونی ده یا a b ویشي a | b

د a او b غتې ګډه ویشونی (لنډ : غ ګ و) ggt(a,b)

د a او b کوچني ګډه زیاتخله (لنډ : ك ګ خ) kgv(a,b)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته : a د M توکی دی .... $a \in M$

او a د M توکی نه دی .... $a \notin M$

ټولنخښه (د ټولو x لپاره باور لري) $\forall$

د موجودیت نخښه: یو x موجود دی $\exists$

کونیونکشن A او B لیکو $A \wedge B$

دیسینکشن A یا B لیکو $A \vee B$

(کله کله الترناتیو)

ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي $A \Rightarrow B$

نیګیشن یا نه والی $\neg$

د A او B وېناو ورته والی یا اکویوالنت $A \Leftrightarrow B$

له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.

ماتریکس......... A نورو کتابونو کي $\|A\|$

دیترمینانت $|A|$

د a څخه n–امه ریښه $\sqrt[n]{a}$

د x اکسپونتشلبلواك

د n – فاکولتیت یعنی n!=1.2.3....n $n!$

بینومخلوونې $\binom{n}{p}$

لوستل:n په p باندې

له a تر b واز اینتروال $]a,b[$

$= \{ x \mid a < x < b \}$

له a تر b بند اینتروال $[a,b]$

$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

کیڼ واز اینتروال $]a,b]$

$= \{ x \mid a < x \leq b \}$

ښی واز اینتروال $[a,b[$

$= \{ x \mid a \leq x < b \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زياتون نخبنه (سيګما) $\sum_{i=1}^{n}$

که د زياتونښخبنه داسې وي

لوستل: له $i = 1$ تر n پورې

څلنخبنه (پي) $\prod_{i=1}^{n}$

که داسې ليکل شوي وي

لوستل: له $i = 1$ تر n پورې

پرموتيشن يا بدلون

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چې اند(فکر) یا وی(لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس(۳۸٤ تر ۳۲۲ ز ۰ ک۰ ا)) له خوا کیښول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دئ او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله خته کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دئ نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې(متن) لرودئ شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمې به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیداینتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشونې ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهنی(علم) لپاره بسیا نه کوي، څکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور(په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګرېتې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.
په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک اینوولو (ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنی ژبی ویناود څخه ګټه اخلي٠

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده٠

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي٠

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی اینوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي٠

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره (متصور؟) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسې په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغهٔ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښونې دبنسټیزو نخښؤ څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندی ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ .

۱ ۰ ۲ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمې

۱ ۰ ۲ ۰ ۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکې او د شیانو تړنې په نخښنو(سومبولونو) انځوریږي.

۱ – شمیرپوهنیزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې (علامې): دا د یوه کره ټاکلې مانا لپاره نخښې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، π ,e او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د یوې ورکړ شوې ډیرۍ یا سټ (په ډیرۍ پوهنه کی روښانه کیږي) داسې په زړه پورې توکی لپاره یوه نخښه ده، کومه چې د اووښتونویا متحولو بنسټسټ یا-ډیرۍ بلل کیږي، دا په لاتین تورو په نخښه کیږي او کله کله په اندکس(ز۰ایندکسونو) یا پیژندنخښه index (ز۰ پیژندنخښې Indices) چې ایندکس د تورو پښو ته راځي په نخښه کیږي۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړیکنخښې : دا د شیانو اوګڼونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نخښې دي لکه $<$, $>$، $=$, $\leq$, $\geq$,

- د نښلونو،کارونو، تړنو یا عملیونخښې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-) ، ځل-(ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library

- تخنیکي نخښې : لکه سیمیکولوم („ „)، نوکان ( ) او نور ډولونه یې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واریابلی(اووښتونې), ثابتی او د هغوي یوځاي ایښودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکی نخښو یوځاي ایښوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځی۰

(۱) ثابتي((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتیزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړیدونی یا واریابلې او ترمونه

بیلګه :

الف : د 3.(1 + 2a) – a + 144 یوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 3a – 6= 11x).(12 – b) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یواځې ثابتې (همغه)، اووښتونې(متحولې، واریابلې) نښلونې او تخنیکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړیکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پورې که واریابلی ولرې پیژندډیرۍ یا تعریفستټ هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو یا متحولو اصلی بنستستټ یوه برخډیرۍ او یا هغې سره برابر برخه سټ یا - ډیرۍ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنسټډیرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې یا عملیې اجرا شي، که چیرې اووښتونې یا واریابلې د پیژندډیرۍ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو(اکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

$$T(x); T(x,y)$$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتونې یا متحولې نه لري په Tسره په نخښه کوو او

لیکو: T=126 + 3/4 یا $T=126+\frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتوني یا متحولې x لري یاني T(x) = 10 + 2x د ۰
اووښتونو بنسټیزی یا –ډېرۍ دې یا د طبیعي اعدادو ډېرۍ N°وي

تعریفډیرۍ د بنسټیزی سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتوني یا واریابلی x پهٔ ځاي

یو پیدایښتې ګڼ یا طبیعي عدد 2 کیږدو، نو د ترم ارزښت دی : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x یا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دی چې دوه متحولې لري او په T(x,y) سره یې په نخښه کوو۰ د اووښتونو یا
متحولو بنسټیزی دې د پیدایښتي یا طبیعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعریفډیرۍ
N° ده۰ د y لپاره N (پیدایښتی ګڼونډیرۍN° تعریفډیرۍ لپاره ترم نه دی تعریف
یاپیژند نه لري)

د x = 0 لپاره ترم نه دی تعریف یا پیژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x یا $T(x,2y)=\frac{x+2y}{x}$

ارزښتشمیرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده :4 = 2 / (2+6) = T(2,3)

یادونه: د ګڼونو لپاره دې دریمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼونډیرۍ ورکړ
شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې انسان د خپل چاپیریال د ټولو شیانو او پیداېښتونو سره لاس په ګریوان دئ، نو پوښتنې او هيلې رامنځ ته کيږي،غوښتنې لري او ويناوې کوي، په کومو ويناو کې،

چې شيان او رېښتونی(واقعيتونه) بيرته هنداره (منعکس) کيږي يا په يوه څه يا شي، چې وينا کيږي، نو موخه ترې د هغه څه رېښتون حالت يا ځانښيونه ده۰ يوه وينا په واقعيت کې ټيک هلته رېښتيا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت يا بهتره شي ځانښيونه په رېښتونې شته يا موجود وي، په بل حالت کې دا وينا ناريښتيا (غلطه) ده. موږ نيسو، چې دا څه دې په شميرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پريکړه دې پرې کيدی شي۰

پژند(تعريف) ۱۰۱ :

وينا د يوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دئ)، د هغۀ بيرته هندارونه يا منعکسونه ده۰ (دا په دې مانا، چې وينا يو شی په وينا کې همهغسې ښايي لکه څنګه چې دئ له دې امله شي هندارونه يامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کيږي يا په همدې ډول په نخښه کيږي۰

يا په بل عبارت وينا د کليمو داسې هدفمند يوځايوالی يا يوځاي ايښوول دي، چې د يوه شی حالت (ځانښيونه) يا شکل او د شيانو رېښتونې اړيکی بيرته هنداره يا منعکسوي او موخه وردئ، چې د هغه دريښتياوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

يا په بل ډول :

د وينا لاندې سرې يو ژبنی يوون، يا يووالی (واحد unit ,Einheit)پوهيږي، کوم چې د شي اړيکی (د شي څرنګوالی) بيانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وينا په کومه ژبه، په پيداښتي (طبيعي) او که په مصنوعي ژبه ويل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وينا د طبيعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځني ډول: يوه وينا يوه جمله ده يا فرمول دئ، چې يا رښتيا او يا نارښتيا ده۰ داسې هم ويل کيږي، چې وينا يو «رښتياارزښت » ،، رښتيا يا نا رښتيا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنې : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړې د وینا « ریښتیا ارزښت»(رښښتیا یا ناربښتیا) دئ· نور خویونه په راتلونکې کې نه څیړل کیږي·

ویناوې د لاتین په لویو تورو A , A* په نخښه کوو او داسې نور·

۱ · ۲ · ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینڅیپ جمله

هره وینا یواځې یو ممکن « ریښتیا ارزښت» لرودئ شي، دا په دې نامه، چې وینا یا ریښتیا ده او یا ناریښتیا. (د دریم نه والی اصول یا پرینڅیپ)·

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دئ. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنۍ افاده یا وییینه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چې د وینا‌ارزښت حتمآ باید څرګند یا معلوم نه وي· که بالاخره ټوله پوهنه د رښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم موږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چې د هغه شي حالت (ځانښیونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چې پریکړه وشي·

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کیږي، د رښتیا ویناو ټولګی او د ناربښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف)·

که وینا ریښتیا وي، نو ریښتیا ارزښت یې ریښتیادئ او په w سره یې ښایو، که وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا دئ

تکرار : هره جمله، چې « ریښتیا ارزښت» (ریښتیا یا نا ریښتیا) ولري، وینا بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیز سم اند(منطق) د ویناو سره سر او کار لري..

بیلګې:

غونډاله (جمله)

الف : » د کابل سین د کونړ له سین سره ګډیږي«ریښتیا وینا ده٠

ب : 3 + 4 = 7 ریښتیا وینا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا ناریښتیا- یا ناتیک وینا ده٠(د اعدادو په برخه کې لومړنې اعداد یاګڼونه کتلکیدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو یې ؟ « نه شي کیدی یو ریښتیا ارزښت باندې تنظیم شي٠ له دې امله وینا نه ده٠

نورې بیلګې :

ویناوې دي:

(دپیتاګوراس (فیثاغورس) جمله٠

د کاتیتونو یا د یو بل سره ولاړو یا عمودو اړخونو یا ضلعو مربعګانو (څلوریو) زیاتون(جمعه) د هیپوتینوزې(اوږده اړخ قایمې زاویې ته مخامخ ضلعه یا قطر) د څلورئ یا مربع سره برابر دئ.

نورې بیلګې :

سرک لوند دئ

ټول سپي خطرناک دي

3 > 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځاي یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسیډ CO_2 وښايي

د دي پرخښ یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار NaCl; ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنګ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیدایښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دریو بی له پاتې (باقي) نه ویشل کیږي

د وینا «ریښتیا ارزښت » ریښتیا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنی ښار دئ

3 < 5 پنځه له دریو کوچنی دئ

ټول لومړني اعداد یاګنونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دئ

هره یوه له دې ویناو « ریښتیا ارزښت » نا ریښتیا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوړه وایو۰

په لاندې کې به وڅیرو، چی ویناوې شته، چې نورې ویناوې د خپلې برخی په څیر په ځان کې خوندې(لنډ : خوندي) لري۰ داسې ویناوو ته یوځاېشوې یا یوځای ایښول شوې یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړئ ! مرکبې ویناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بیلګه راوړو » کۀ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشوړ وي، نو داعدد یا ګڼ په 3 ویشوړ دی، یانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ویشوړ ده له دې لاس ته راځي، چی پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ویشوړ دی۰

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشوړ یا ټوټه کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي۰

لکه : سپین غر یوه خورا جګه څوکه لري

یوه بله بیلګه د یوځای شوې(ځنځیري) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي۰

څرګنده ده، چی دواړه ساده جملې د برخویناو په څیر یوځاي شوي ویناوې دي: » سپینغر خورا خواریکښ دی« همدا ډول » هغه (سپیغر) پوهیږي، چی نور کارته وهڅوي«۰

دا ویناوې کیدی شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیاارزښت یې همغه پاتې شي۰

د بیلګي په توګه:

۱ - سپینغرخورا خواریکښ دی۰ یا هغه پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چی هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی۰

۳ - دا چی سپینغر پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي ، نو سپیغر خورا خواریکښ دی۰

٤ – سره له دې، چی هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دی۰

ګورو، چی په دې ډول یو له بل توپیریدونکی تړلې یا ځنځیري، یا یوځاي شوی ویناوې جوړیږي، چی په خپله رښتیاارزښت کی یو له بل توپیر کیدی نه شي۰ د دوي توپیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوي یو له بل سره تړلو ځرنګوالي له لارې مخ ته پروت دئ یا رامنځ ته شوی دئ٠
په لاندې کې به ممکنه« ویناترنه» (یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر ځیرنې لاندې ونیول شي.

پیژند ۱ ۰ ۲ :

یوه «ویناترنه» یا یو «ویناتراو» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنۍ ویینې(افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډیرو وینا ؤ ځخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

موږ د سم اند یا منطق ستپرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یې یواځې او یواځې د «برخویناو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي٠

بیلګی

الف: سپین ډیر خواریکښ دی، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي٠

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي٠

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمي ولید٠

۱ ۰ ۲ ٤ ویناترنه یا وینابلواک (- فنکشن یا – تابع)

د ویناترنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که څوک د ترنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځاي شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځاي غواړو «ریښتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپیژنو. موږ پریکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو (ویناواریابلو یا وینا اووښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه p,q,r,... او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. موږ دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاینیونکی(یوځائیز یا یوګوني) بلواک یا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه٠

یادونه: د بلواک یا تابع کلمه وروسته څیړل کیږي، دلته د بلواک یا فنکشن پرځاي ویناتړنه یا عملیه بسیا کوي. دا ځنی ویونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي یې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وینا تړاو یا ویناتړنی(عملیې) «نه والی»: دیوی ویناP نه والی هغه وینا ده، چې هلته او یوائی هلته د ریښتیا ارزښت ناریښتیا لري، چیP ریښتیا ارزښت ریښتیا ولري٠

موږ د وینا P نه والی نفی په Pنه سره ښایو ، شمیرپوهنیزه نخښونه یې په لاندې توګه ده ¬P په یوه جدول کې ریښتیا فنکشن یا ریښتیابلواک کې داسی څرګند وو(دا چې زه کله کله هغه شمیرپوهنیز سومبول د نه p لپاره ¬P نه شم لیکلی، نو دا به همغسې p نه ولیکم.

P	Pنه یا ¬P
w	F
f	w

د یوې وینا P تکرار نه والي یا بیا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې یې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

p	p¬	p¬ ¬
w	f	w
f	w	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه واره نه والی د همغې لومړنی وینا رښتیاارزښت لري

په پیداینښتي ژبه کی نه والی په«نه» یا « نا » خپل رښتینوالی مومي٠ «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی٠ دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی٠

نه والی ته بیلګه : د وینا A ¬ نه والی : "7 < 3" وینا نهA ده: دا چی A رښتیا ده، نو A ¬ نارښتیا ده٠

ترنه(عملیه) یا کنجنکشن Conjunction (لاتین: ترنه، دلته د « او (and)» ترنه یا تړاو):

وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څېټ یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼې لپاره بیلګی دي لکه پوښتني، امرونه او نظرونه یاعقیدې:
۱ – هوا څنګه ده ؟

۲ - کورته لاړ شه

۳ – شین یو ښه رنګ دی٠

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتونې لري، اړیکنځښی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي٠ یوه د نخښو لړی کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګې په توګه

3 + x <5 د بنسټیزورشو N کې نه ریښتیا ده او نه ناریښتیا٠ دا له دې امله وینا نه ده٠ که چیرې د واریابلې یا اووښتونې یا متحولې پر ځاي ٠ او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا ترې منځ ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ځاي يې نور د پيداينښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بیا ناريښتيا ويناوې منځ ته ترې راځي٠

دا چې اووښتونې یا متحولې د بنسټډيرۍ یا بنسټ ستې ځخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک یا ازاده اووښتونې(متحولې) په نامه يادېږي٠

پيژند :

یوه وینابڼه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اوښتونې(متحوله) لري او د

- د دې اووښتونې په ځاي د بنسټيزې ورشو یا ساحې او یا
- د دې اووښتوني ترلو ځخه د کوانتيفيکاتورونو(کوانتورونو) په مرسته یوه وینا جوړيدی شي.

يادونه :

که په لاندې کې د تړاو یا تړني کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه یاکنجنکشن conjunction دی٠ له ګرامر سره په توپير، چې هلته تړنه یا تړاو يو « تړونټکی، تړاولغات» ښايي په سم اند کې تړنه يو ځرګند(دوه ځايلرونکی یا دوه ځاييزيا نوره هم ښه دوه ګونی) جملې تړل یا په بل عبارت دوه ځاينیونکې (نوره هم ښه : دوه ییز یا دوه- ګونی) فنکشن یا تابع(بلواک) تعريفوي یا پيژنی٠

د « او» تړنه او نخښه يې $\wedge$

پيژند ۱ ٠ ۳ :

$p\wedge q$ دوه ویناوې p او q يانې د «او » يوځايوالیp او q يواځې او يواځې هلته یو رښتيا ارزښت رښتيا لري، چې p اوq دواړه رښتيا ارزښت رښتيا ولري٠ که له دې ځخه يوه وينا هم نارښتيا وي، نو بيا د « او » تړنه نارښتيا ده ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترړنې نخښنه ددوه ویناو qاو p ترمنځ لیکل کیږي p/\q او ویل کیږي p او p
موږ د « او » ترړنه په لاندې جدول کې روښانه کوو یا انځوروو:

یادونه: په لاندې کې w رښتیا او f نارښتیا په معنا دي

p/\q	q	p
w	w	w
f	f	w
f	w	f
f	f	f

د « او » ترړنې ته بیلګه :

د دوه رښتینو ویناو د A وینا : ,, 7 < 3 ,, او د B وینا : 3 یو لومړنی ګڼ دی رښتیا وینا A /\ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

یادونه: موږ ګران لوستونکي به سره یوځاي فکر وکړو، چې دا پریمګنونه لومړي او که لومړني ګنونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګنونه لومړنی نه دي۰ دا ځکه لومړي ګنونه دي، چې له دوي له زیاتون او یا کمون څخه لومړی ګنونه جوړیږي۰ موږ به یې زیاتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ویناو دا ترړنه یا کنجنکشن، چې مختلف رښتیاارزښتونه ولري یانې د A وینا: 3 ,, 7 < ,, (رښتیا او د B وینا: « ۳ یو جوړه ګڼ دی (نارښتیا)، نو A/\B وینا : چې ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « (نارښتیا) ده۰ دا ویناترړنه ویناارزښت نارښتیا لري۰

د دوه ویناو د « او» ترړنه دA وینا: 7 < 3 او د B وینا « ۳ یو جوړه ګڼ یا جفتعدددی» یوه نارښتیا وینا ده : ۳ یو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ومو لیدل، چی د « او » ترڼه او یا کنجنکشن په ورسره بلده (عادي) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټۍ «پېښېدځاي» پیداکړ او دا پېښېدنه يې پېټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » ترڼه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پېټپېټکي کې « که سپین پېټ شي او هوسۍ د هغه د پېښېدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښايي»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پېښېدو ځاي پیدا کړ« او » دا پېښېدځاي يې پېټ واسته۰

۱) هلمند موړ(بډا) شو او هیواد يې پرېښود ۰

۲) سره له دې، چی برلین کوچنۍښار دی‌هلته د منی د المپیک لوبې کیږي

۳) ۱۵ ګڼ جوړه دی، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونی‌دی

په ټولیزه توګه د « او » ترڼه هلته ربښتیا ارزښت ربښتیا لري، چی د جملی ټولی برخې ربښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا ترڼه کې کیدی شي زیاتې وینابرخی سره په ترڼه « او » وتړل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او بری يې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» ترڼه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « ترڼه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله ترڼه» تل ژوروالی ته راهڅوي: باید جوته شي، چی ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»ترڼی پیژند یا تعریف یواځنی دی او دا ⋁ د یا ترننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p اوq ترمنځ ځایول کیږي p⋁q او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول څرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

p	Q	p∨q
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتیږي، چې دیسجنکشن یا د « یا » تړنه p∨q یو داسې رښتیاتابع (-بلواک یا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رښتیا فنکشن رښتیا اخلي، کله چې کم له کمه د « یا » تړنې یو غړی د رښتیا ارزښت رښتیا ولري یا واخلي۰ که د دیسجنکشن دواړه غړي نارښتیا وي نو p∨q هم نا رښتیا دی۰ دا د رښتیا فنکشن کې د ځایونې « یا» څخه بل څه نه دي۰ یوه د «نه خوندیکونې» یا « نه ځایونې» یا « په برکې نه نیونې» د « یا » ویینه یا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « یا۰۰۰ او یا ۰۰۰» لیکل کیږي۰

بیلګه (د « یا » تړنې ته):

د دوه رېښتینو ویناو د « یا» تړنه د A وینا: ,, 7 < 3,, اود B وینا: « ۳ د ٦ پرویشونی دی» یوه رښتیا وینا A∨B ده : «۳ له ۷ کوچنی دی او د ٦ پرویشونی هم دی»۰

د دوه ویناو تړنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وینا ,, 7 < 3 ,, رښتیا او د B وینا: ,, 7 =3 ,, (نارښتیا) ، نو A ∨ B ده، چې 7 < 3 یا 7 = 3 دا وینا تړنه د رښتیا ارزښت رښتیا w لري۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه نارښتیا ویناو د « یا »(" Or") تړنه:

د A وینا : "7 > 3 " او د B وینا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دئ یوه نارښتیا وینا A∨B ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دئ»

الترناتیوAltenative یا انتیوالنځ Antivalenz ویناوې : دا د » یا « ویناتړنه باید د « یا ... او یا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتیا ده، که چیرې دواړه ویناوی رښتیا وي٠

بیلګه : (دوه الترناتیو ویناو ته ، چې رښتیا وي)

د وینا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دئ» د الترناتیو په نامه داسې دئ « ۳ یا له ۷ کوچنئ دئ او یا یو لومړی ګڼ دئ» نارښتیا دئ٠

بیلګی : (نه والي، کنجنکشن، دیسجنکشن ته)

یادونه: په لاندې w (Wahr) د رښتیا او(Falsch)f د نارښتیا لپاره کارول شوي.:

ویناتړاو

A	π پي تولګڼ دی	f
B	π ایراشنل ګڼ دی	W
C	صفر له پي π کوچنی دی	W
D	π پي له دری کوچنی دی	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\underline{A}$	π تولګڼ نه دی	W
$\underline{C}$	π کوچنی برابر له صفر	F
$A \vee C$	π تولګڼ او له صفر لوي دی	f
$B \wedge C$	π ایراشنل او له صفر لوي دی	W
$A \vee C$	πپي تولګڼ یا له صفر لوي دی	W
$A \vee D$	π تولګڼ یا له ۳ کوچنی دی	f

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغۀ فرمول دیٔ

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم۰ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دیٔ، یانې د » او یا « امکان شته۰ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرځلاو شیانو باندې باید بند وي۰ یانې دوه نرخونه باید ورنه کړای شي۰

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځیره دې یې په پام کې راولی۰ په شالت یا سرکت الجبر کې د کجنکشن یا د »او« ترنې« رینتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه ترل شوي دي،

Bild 7.1

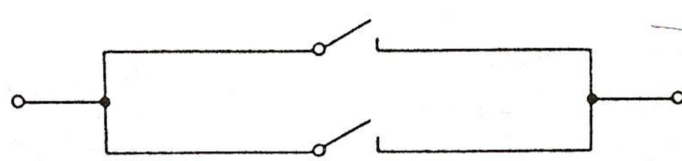


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس ربښتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستۍبیلګه په ګوته کوي، چې داسی یوځاي شوې ویناوې جوړیدۍ شي، په کومو کې چې له یو زیات ترونې موجود وي٠

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملی کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی (ربښتیا - بلواک یا ربښتیا فنکشن » نهp p∨ دۍ٠ د دې لپاره هم د ربښتیاارزښت فنکشن ورکول کیږي٠ د ربښتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا p نه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp∨p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دۍ

د یوې وینا نه والی

p	Pنه	p∨pنه
w	f	W
f	w	w

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکیک کوونکي نه ده یوه وینا نهp∨p تل ربښتیا ده، بې له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم ربښتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغې ربښتیابلواک کټمټ یا identisch(identic) ربښتیا دۍ(دا په دې مانا، چې که د ویناؤوښتونکې یا واریابلې ته هر ربښتیاارزښت ورکړ شي یاني ربښتیا یا نارښتیا تل د ربښتیا ارزښت ربښتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغو ربښتیاارزښت بلواک کټمټ نارښتیا دۍ (دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتونې په هره وینا ارزښت وینا نارښتیا ارزښت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction (د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

رښتیاارزښت دې د وییني یا افادې نه$(p \vee q)$ لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د نه$p \vee q$ رښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویيني یا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه رښتیا بلواک یا – قنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه رښتیا - (او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکې جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو ـوینا تړنه) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعاً همغه نه پاتیږي، لکه

د بې نوکانو عملیې.

ایمپلیکیشن implication (لاتین: ورراګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې« که...، نو سره تنظیم یا ترتیب شي ایپلیکیشن سومبول=> چې دا سومبول د دواړو ویناو Aاو B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدیډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion (لاتین: پاي لاس ته راوړنه) وایي. د دوه ویناو ایمپلیکیشن تیک هلته نارښتیا دی، چې پریمیسس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي. په بل ډول رښتیا دی.

د دوه ویناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرګندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول =>

P	q	p=> q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسی یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ویناو A اوB تیک هلته یو نارښتیا یوځاي شوې ویناچې په p=/>qسره ښایو).

کله چې لومړبرخه وینارښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوتري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا وینې په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځيدلی شي. په ښکاره ډول د بيلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلويزيون کتلو ته کورته راځي.

ناريښتيا ده، که د جملي لومړئ برخه ربښتياوي او دويمه نارښتيا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بيلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې څلورمه کرښه سره يو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملي ربښتيا همداسې نا ربښتيا وي) پرابلمونه نه پيښوي، په دې حالت کې ټوله وينا ربښتيا ده، که لومړئ برخه وينا نارښتيا او معکوس دويمه برخه ربښتياوي، نو په دې حالت کې به د بيلګې په توګه جمله نارښتيا ونه ليدل شي(که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلويزيون ليدلو ته راشي)، نو بيا د دوه ارزښتوالي پرينځيپ له مخې يواځې دا ارزښت ،، ربښتيا،، باقي پاتې کيږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg (p \vee \neg q)$ ټيک بيرته بيا(بيرته) د ايمپليکيشن د ربښتيا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې يې: q که p، او يا هم p ، د q لپاره پوره کيدونکی شرط دی(په بل ډول يې: qد p لپاره اړيين شرط دی)

ورته والی :يوارزښتوالی(برابرارزښتوالی) Äquivalent

که دوه ويناوې qاو p خپله ترنه په » ټيک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که»، تنظيم کړي، دې ته ورته والی يا ايکويوالنت وايي۰ د ايکويوالنت سومبول دی ≈ د دواړو ويناو pاوq ترمنځ دا سومبول پروت دی p ≈q په دې مانا، چې p ټيک هلته که q ۰ ايکويوالنت سومبول يې په دواړو خواو ايمپليکيشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ويناو ايکويوالنت ټيک هلته ربښتيا دی، که دواړه ويناوې ربښتيا يا دواړه ويناوې نارښتيا وي۰

دا شي څرنګوالی يا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

p	q	P⇔q
w	w	W
w	f	F
f	w	F
f	f	W

سیده او مخامخ یا په ځېښ دې په دې مانا وي، چی له p څخه q لاس ته راځی او په ځېښ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی٠

۱ ٠ ۳ د وینابلواکو یا ـفنکشنونو ترمنځ اړیکې

د دوه ویناو تړنه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د ویناو رښتیاارزښت د تړنویناارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي٠ دا د یو ویناارزښت جدول له لارې ځرګندیدی شي٠ ومو لیدل، چی ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی٠ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چی سره یوارزښته دي٠

p	q	p ⇔ q	p=>q	q ⇒ p	(p ⇒ q) (q ⇒ p)
W	w	w	w	w	...........W
w	*f*	f	f	*w*	.........*f*
F	*w*	*f*	*w*	*f*	.........F
f	*f*	w	w	*w*	.........*w*

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p <=> q) <=> (p => q)(q => p)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ورته والي ویناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې یو بل سره بدل کړو یانی د یوه ځاي د بل سره بدل کړو۰ له دې ښخه پیچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کیږي۰

د دې ورته والی ویناتړنې غوره بیلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$

$$(2)......(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او دیسجنکشن لپاره دیستریبوتیو قانون:

$$(3) \quad [p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

$$(4) \quad [p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

۱ ۰ ٤ وینافورم یا - بڼه او کوانتورونه

وینا سم اند په لاندې ډول ساده ټولیز کیدی شي۰ د بیلګي په توګه که مختلف شیان همغه خویونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وویلي - - یا افاده کړای شو: دلته د ویناو پر ځاي د وینافورم ښخه خبري دي، یا غږیږو۰ دا داسی ژبنی وینې یا افادې دي، چې د شیانو لپاره واریابلی یا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته یوه وینا شي۰ بیلګي یی په لاندی ډول دي

لومړی : xپر دوه ویشونی دئ »

دویم : » z یو هوار ځلورګوډی(ځلورضلعي) » دئ۰

دریم : «u له v ښخه لوي » دئ او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته رښتیا یا نارښتیا وینا لاس ته راځي۰ که په دویم کی دz پرځاي «ډیرګوډی» (کثیرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو یوه رښتیا وینا لاس ته راځي۰

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو یوه نارښتیا وینا لاس ته راځی۰ دریم یوه اړیکه(ریلیشن(ده، چې هلته د انفرادیو د اینسولو ترتیب هم یو رول لري۰ دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا رښتیا وینا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي۰د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل۰(له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وایي۰

بیرته داسی لیکو P(x), Q(z), R(u,v)

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بڼې ځخه وینا جوړوي۰ چې کوانتیفیکیشن Quantifikationبلل کیږي۰ دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بڼی افراد همغه خویونه ولري، چې ټولوینا (Allaussage) ورته وایو۰یاچې په پوښتل شوي چاپریال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خویونه ولري، دې ډول وینا ته موږ د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وایو۰ زموږ په بیلګه کې یی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پیداینښتی یا طبیعي) ګڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کیږي

پنځم : ټولې څلورۍ (مربع) هوارې ډیرګوډۍ یا کثیرالاضلاع دي۰

د ټولکوانتور یا ټولوینا لپاره نخښه $\forall$

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتونوینا لپاره نخښه $\exists$

یادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څیر ده په پام کې دې وي، چی د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې (ویاریابلی یا مجهولی) ورکول کیږي۰

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی یي لولو، چی یوx په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځه ۱ : $\forall z \in Q(x)$

دا داسې لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دئ (یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه)

دا سومبول ∃ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰۰۰ شته»د وینابنې او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیرئ کې، په کوم کې چې کم له کمه یوه داسې اووښتونې ځاي په ځایونه شته وي کومه چې وینابنه رښتیا وینا کوي۰

بیلګې (د رښتیا شتون - موجودیت وېناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل : یو داسې رییل ګڼ یا عدد x له(په) R (کې) شته ،د کوم لپاره چې0 =x+1 باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیرئ یا ریل ا عدادو سټ R توکی دئ او ∈ په دې مانا دی، چې توګي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$$x^2 + 4x = 0$$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x= 0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلګڼونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (2، -2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$$\exists x \notin R: x^2+1=0$$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې وینابنې هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډیرۍ یا واریابلډیرۍ ټولو توکو لپاره رښتیا وینا شي۰

بیلګه: وینابنه « x په 2 ویشونی دئ » د جوړه ګڼونو هریوه لپاره رښتیا ارزښت لري په

دا سومبول $\forall$ په دې مانا دئ، چې « د ټولو x لپاره» د وینابنې او په همدې پورې اړوند د وینا متحولو ډېرئ یا سټ (وینااووښتونډیرۍ یا واریابلډیرۍ) ترنه له دې سومبول سره یوه Universalaussage یونیورزالوینا یا ټولوینا منځ ته راځي۰ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتونډیرۍ) هر توکی لپاره د وینابنې څخه یوه رښتیا وینا جوړیږي۰

جمله : (دUniversalaussage یونیورزال- یا ټولیزې وینا یا ټولوینا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 | x$$

(د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ویشونی دئ)

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو رییلاعدادو x لپاره, کوم چې له یوه لوي وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د ناربنتیا ټولیزې وینا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وینا ناربنتیا ده، ځکه چې دا د $1 \le x \le 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وینا د ټولو ریل عددونو لپاره باور نه لري۰

۱ ۰ ۵ اړین – یا ضروري- او پوره کیدونکي شرطونه

د ایمپلیکیکشن سومبولA=>B («کهA نوB » « له A څخه Bلاس ته راځي»)یا په بل ډول : که A باور ولري، نوB هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شميرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته٠

الف) « A د B لپاره پوره کيدونکی شرط دی»

ب) « B د A لپاره يو اړيين يا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف) وايي، چې د A ربښتينوالی د B ربښتينوالی ځان پسی لري يانی له آ څخه ب پوره کيږي يا له يوه څخه وبل ته رسيږو يا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کيدنو لپاره نيونه(فرضيه) ده او ب شرط پوره کيدنه اړيينه يا ضرور ده، چې آ پوره شي٠

بيا : وينا باور لري٠

د B وينا د باور لرلو لپاره دا پوره دی يا پوره کيدونکی دی يا بسيا کوي، که د A وينا باور ولري

بيلګي د پوره کيدونکو شرطونو لپاره:

۱ – وينا A : « ګڼ n پر ٦ ويشونی دی»

وينا B : « ګڼ n پر ۳ ويشونی دی»

$$A => B$$

د دې لپاره پوره کيدونکی شرط دی يا بسيا کوي، چې يو رييل ګڼ n پر ۳ ويشونی دی، که دا پر ٦ ويشونی وي٠
که n پر ٦ ويشونی وي، نو پر ۳هم ويشونی دی ٠ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ويشونی وي، پر ٦ دې هم ويشونی وي٠ د بيلګي په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ويشونی دی ، مګر په ٦ نه دی ويشونی٠

۲ - وينا A : “n > 7„

وينا B :وي دې :n > 6

$$A => B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دا پوره کيدونکی دئ، چې يو رييلګۍ ن له ٦ څخه لوي دئ٠ که اړيکې، چې ن له ٦ لو دی، باور ولري

داسې رييلګنونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له٧ څخه لوي نه دي٠ د بيلګي په توګه ٥ ،٦ يا شپږ.نيم

د ب) فرمولبندي وايي، چې وينا ب باورلرل غوښتونکی يا اړيين يا ضرور دئ، د دې لپاره، چی وينا A باور ولري٠

که وينا B باور ونه لري نو وينا A هم باور نه لري ٠

بيلګی د اړيين(ضروري) شرطونو لپاره:

١ – د دې لپاره، چې يوګڼ n پر 6 وويشل شي، اړين(ضرور) ده، چې دا ګڼ پر3 ويشونی وي٠ يو ګڼ، چې پر3 نه وي ويشونی، نو پر ٦هم ويشونی نه دی٠

٢ - ويناA : » څلور ګوډی يوه څلوری يا مربع ده«

وينا B : » څلور ګوډی څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې يوه څلورګوډۍ يوه مربع(څلوری) ده دا خويونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه يې ولاړ نه وي، نو مربع يا څلوری نه ده که يوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړين نه ده، چې څلوری يا مربع دې وي٠

د برابروالي يا برابرارزښتي (ايکويوالنت) سومبول«

A<=> B

(په دواړو لورو ايمپليکيشن) لپاره په شميرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وايي، چې A دB لپاره يو ضروري او پوره کيدونکی شرط دئ٠ « دا وايي، چېA ټيک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

١ – ویناA : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دئ»

وینا B : « عدد n پر ٣ او ٢ ویشونی دئ»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دئ، که دا عدد پر٣ او ٢ ویشونکي وي٠

٢ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعي»

A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دئ ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه(ضلعې) ولري٠

١ ٠ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم(ترې پوهیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دئ؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې تیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي٠ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کي داسې نه ده٠

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د تیک څرګندې پوهنې یوه نه پرېښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله څه شی دی ؟

ټولې ربښتوني ويناوې په شميرپوهنه کې جملې بلل کيږي، چې د پيژندنې لپاره ښوونې يا ثبوت ته اړتيا لري ۰

اکسيوم Axium څه شی دی؟

بې ثبوته ربښتينې وينا ته اکسيوم وايي

شميرپوهنيزې يا د رياضي جملې زياتې نيونې(فرضيې) او ثابتول(غوښتنه،جوته ونه يا ښوونه) په بر کې- يا خوندي لري۰

که دا وينا داسې وي، نو پس داسې به هم وي۰ دلته که دا وينا داسې وي نيونه يا فرضيه ده او نو داسې هم ده۰ دا غوښتنه ده، چې بايد ثبوت يا وښوول شي۰

اکسيوم : ۱ طبيعي عدد دئ (پيانو Peano)

: ټکی هغه دئ، چې پر ويشونې نه وي يانې په ټکی ويشل بند دي۰ (Euklid)

: حتمي پيښه د پيښې امکان ۱ درجه لري۰

جمله: که درېګوډی ولاړکونجيز وي، نو(پس) د پيتا ګوراس (pythagoras) درسي جمله باور لري

: يو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، بايد ناجوړه(طاق) وي

: په اخره جمله کې نيونه(فرضيه) ده (که يو پريم عدد له ۲ لوي وي۰۰۰) او ثبوت يې (هر له دوه لوي عدد په دوه ويشل کيږي پس لومړی ګڼ نه شي کيدی، نو دا تل ناجوړه ياطاق دئ)په ځتوالي يا تضاد کې پيژندل کيږي۰
تل داسې نه ده، چې د جملې د ربښتينوالی ځخه دې د جملې په ځتوالی يا تضاد هم ربښتيا وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ۲٪ هم (رښتیا)

جمله: که ۲ ٪ پس ٦٪ هم (نارښتیا)

۰۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دننني کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دئ۰

په ځټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دننني کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته(هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځنې او یواځنې ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په ځټ) ولاړکونجیز دئ، کله چې دننني کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره ځخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي ځخه هر یو ځو کلن دئ؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دئ او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دئ یانی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کيږي او ساده کيږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \quad \vee \quad 22x +3 = 113$$

په کينې ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزيات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا ګڼې ۲۲ ځله x بيا ۱۱۰ کيږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده يانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ۵ کلن پلار ۳٤ کلن او نيکه ۷٤ کلن دی۰

که ترمونه $T^\wedge$ او T° د برابروننخښنی = باندې يو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابرون پيداکيږي: $T^\circ = T^\wedge$ ۰

که چيرې ترمونه په دې نخښو $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ او(نابرابروننخښنه =|) يو له بل سره وتړل شي يو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي يا مجهولو سره يوځاي شي، هغې ته د ويناقورم يا نوره هم ښه وينا ښه ويل کيږي۰

دا يا رښتيا يا نارښتيا وينا کيدی شي۰ که ناټاکلي، چې اوښتونې يې هم بولو(د بيلګې په توګه z , x , y) پر ځاي د بنسټيډيری ګڼونه وليکل شي۰ په برابرونپوهنه کې له پيژند – يا تعريفډيری څخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم يا بڼې يو برابرون يا نابرابرون رښتيا وينا کړي۰

د يو برابرون يا نابرابرون (مساوات يا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې ويناښه پيژند - يا تعريفډيری پورې اړوند وي او دا وينا ريښتينې کوي، اوبيډيری يا حلډيری L کې پروت دی يا د برابرون يا نابرابرون په ډکوونکو (پوره کوونکو) ډيريو پورې تړلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ريښتونې وينا ورکوي کټمټ يا (identisch, identic) وينا وايي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې :

الف) $5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $-4 = x$ لپاره رښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په ښت $3.4 = 48$ پس- $L = \{ -4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 => L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب) $x < 3 => L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی : الف) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیرکې سره برابر وي(یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیری ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي٠

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نابرابرون	براون
۱) وينافورم کې کيدی شي،چې خواوې سره بدلې شي	$T° < T^ \quad T^ > T°$ $2x < 6 \quad 6 > 2x$	$T°=T^ \quad T^ = T°$ $3x=5y \quad 5y = 3x$
۲) که وينافورم په دواړو خواوو همغه ترم زيات يا کم شي او د يوې ورزيات ترم پيژندډيرۍ خوندې وساتل شي يا ځاي کړي	$T^ < T° \quad =>$ $T^ \pm T° < T° \pm T^$	$T^ = T°=>$ $T^ \pm T° = T° \pm T^$
يا تغير ونه خوري۰ مخامخ يا کيڼ لوربيلګه کې تفريفډيرۍ تغير خوړلی	$3y < 4x \quad \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4y \pm 2x \quad < 4x \pm 2x$	$2z = 8 \quad =>$ $2z \pm 3 = 8 \pm 3$

پر ښت بيلګه

$2z=8 \; |=> \; 2z+3-z=8+3-z$

دا چې $z=4$ دې نوي ورزيات شوي

ترم $3-z$ نه دی تعريف يا پيژندنه

لري، ځکه چې $3 - z$ يو پيدايښتي يا طبيعي ګڼ نه دی

۳) د وينافورم دواړه $T^=T° \Leftrightarrow \quad T^.T > T°.T \quad T^ <T° \Leftrightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه کیدی شي چې	$T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow$	$T^\wedge.T = T^\circ.T$
له همغه مثبت ترم سره	$T^\wedge:T > T^\circ:T$	$\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$
ځل او یا په همغه ترم	که $T > 0$	که $T > 0$ وي
وویشل شي	$3y - 12 < 30z - 90$	$4x+2 = 10x-6$
	$\Leftrightarrow y - 4 < 10z - 30$	$\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x - 3$
	$\Leftrightarrow 4y - 16 < 40z - 120$	$\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x-30$
٤) د یوه برابرون	$T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow T^\wedge.T > T^\circ.T$	$T^\wedge = T^\circ \Leftrightarrow$
دواړه خواوې کیدی شي،	$T^\wedge < T^\circ$	$T^\wedge.T = T^\circ.T$
چې له یوه منفی ترم سره	$\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$	$\Leftrightarrow T^\wedge:T > T^\circ:T$
ځل شي یا دواړه خواوې په	$T < 0$	$T < 0$
همغه ترم وویشل شي.	$-2y < -4$	$3x = 12$
که په دې فورم کې	$\Leftrightarrow y > 2$	$\Leftrightarrow -9x = -36$
نابرابرونونه وي نو د	$\Leftrightarrow 10y > 20$	$\Leftrightarrow x = 4$

برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي

یادونه :

په ټولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه T یو او T دوه په لاندې توګه د ایندکس سره په نخښه کوي: T_1, T_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د ربښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د ربښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - (A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ډيرئ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډيرئ پوهنې يا سټ تيوري بايد خپل ځاي په شميرپوهنه او همدا ډول په نورو پيداينتي- يا طبيعی پوهنو کې نيولي وي، نو له دې امله د لنډ تير وخت را په دې خوا په پرمختللو هيوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځيو په ليکلوست کې پيل شوه، ځکه چې بې له ډيرپوهنې يا سټ تيوري شميرپوهنه بي مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې ليکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پيداينتي يا طبيعي ګڼونه يا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څيره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډيرئ يا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډيري پوهنې (سټ تيوري)په پرمختللو هيوادونو کې هم د شلمې پيړئ په دويه نيمه کې د ميندو او پلرونو لپاره ستونځې پيدا کړي، ځکه، چې دوي د ډيرئ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنيانو سره يې مرسته نه شوه کولی۰

د ډيرئ کلمه له عدددونو يا ګڼونو پخوانی ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښوولـه لکه اوس۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ یا ډېرۍ پیژندل کیږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، یا په یوه ټولګی کې میزونه او چوکی، یا لکه هغه نیزوږي، چې نیز راوړي او د سپین په پټي کې یې ډیرۍ ډیرۍ اچولي یا د هسکې مینې د ښوونځي په لسم ټولګی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکیو او میزونو سټ یا ډیرۍ۰

د ډېرۍ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډیرۍ له کلیمې سره اوس بلد شوي یو که څه هم تربیلو بیلو پردیو نومونو لاندې، چې زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته یوائځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چې د ډیرۍ څو مختلف پیژندونه یا تعریفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چې د ډیري پوهنې (سټ تیوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوګرځي۰

ډیرۍ پوهنه د شمیرپوهنې سټه جوړوي او د شمیرپوهنې ټولې څانګې په ډیرۍ پوهنه

ودانې دي۰ نن شمیرپوهنه بې له ډیرۍ پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه یې وزي۰

پیژند ۲ ۰ ۱

الف : ډیرۍ یا سټ د ټاکلو شیانو یا کلمو ټولګه (یوځایوالی، مجموعه) ده، چې

پخپله خوښه د یوې ټاکلې بنسټډیرۍ یا بنسټ سټ څخه ، چې د پیژندلشویو

اصولو یا کرکترېین له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شمیرپوه کانتور(1918 – 1845 George Cantor) پیژند:

زموږ د خیال یا لید څرګند ټاکلو ، ټیک یو له بل توپیرکیدونکو شیانو ټولګې

(یوځایټولولو یا مجموعې) ته ډیرۍ وایي او هر شي ته، چې ډیرۍ یې جوړه

کړې یا ډیرۍ ترې جوړه شوې وي، د ډیرۍ – یا سټ توکی وایی۰

(Set and elements of set ډیرۍ او د ډیرۍ توکی)

پ : د مختلفو شیانو ټولګې یوه یوون یا یووالی (واحد Einheit, unite) ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library

شميرپوهنه کې ډيرۍ وايي

يادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد يو يوون يا يووالى ښه نومه ونې دي٠ دا که څو واره وويل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلديږو٠

ت : ځرګند شيان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر ځيرنې لاندې نيول کيږي او د دې نخښو له امله يوځاي ټوليږي يا ټولګه جوړوي، ډيرۍ يا سټ تشکيلوي٠ ګډې نخښې کيدی شي ښکلا، کوچنيوالى او داسې نور وي٠

يادونه: د ګرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پيژندونو کې يې غوره او د پام وړ پيژند ياتعريف د جورج کانتور پيژند دی.

بيلګه :

ګڼونه يا عددونه، نومونه، او توري کيدی شي د ډيريو بيلګو په توګه راوړل شي٠

ګورو، چې د ډيرۍ يا سټ کلمه په شميرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډيرۍ د څنو شيانو زيات يوځاي کول موخه ده، د ځانګړو شرايطو لاندې.

په شميرپوهنه کې ډيرۍ په لويو لاتين تورو ليکل کيږي لکه ..A,B, او يا M,N, X,Y,.... د ډيريو توکي د لاتين په کوچنيو تورو ليکل کيږي، لکه ...a,b,c, او m,n,x,v,...

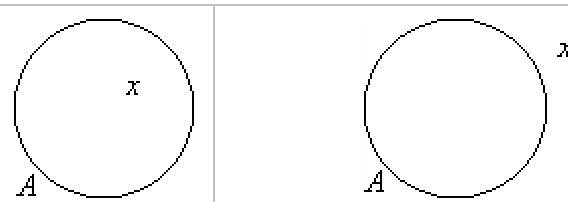
د دې لپاره، چې وپوهيږو، چې ايا توکی a د ډيرۍ A توکی دی که نه نو ليکو: $a \in A$

په پورته کې توکی a د ډيرۍ A توکی دی.

که a د A توکی نه وي ، نو ليکو: $a \notin A$ دلته a د ډيرۍ A توکی نه دی

دا پورته لينکدود له ښی وکيڼ لور ته هم ليکلی شو، چې پرلپسی لړۍ يې ساتلې پاتې شي٠ زه يې په څټ ليکنو سره ليکنيزې ستونځی لرم٠دا لاندې يې دياګرام دی، خو توکي يې بل ډول ليکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهيدلو ستونځ پيدا نه کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$a \notin A$ (a د A توکی دی) | $a \in A$ (a د A توکی نه دی)

ډيرۍ A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه يې ليکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډيرۍ يا سټ نخښه ده

يادونه : دا د ډيرۍ کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګريزي ده، په فارسي کې يې مجموعه بولي، چې ډيرۍ د شيانو مجموعه يا ټولګه ده او په الماني کې ورته مينګې Die Menge وايي. هغه بنسټيزه خبره يې په پيژند يا تعريف کې ده، که موږ يې چې هرڅنګه وبولو، خو د يو بل څخه کره توپيرکيدونکو شيانو ټولګی ته ... وايو. د ټکو پر ځاي ، چې هر څه ليکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو يې هغۀ مناسبه نوموه ونه ډيرۍ ده، دا د کوټې کوټې څخه يا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاريږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شميرپوهنه کې بايد وکارول شي. زه بيا په دې ټينګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی يا بل څوک يې که بل ډول بولی د انګريزي يا الماني يا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ دی. د سټ مانا که په ډکشنري کی وګورئ ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دی. ګوروچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زيات کاروي او وايي، چې ډېرۍ يا ډېرۍ خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ ۰ ۱

الف) M_1 (لوستل Mایندکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces ایندکش پیژند نخښې ته وايي) دې د لومړیو ګڼونو ډیر ئ (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دې د لاندې برابرونونو یا مساواتو د اوبیونو(حلونو) ډیرئ وي

(x+1)(x-2) = 0

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بیلګه ۲ ۰ ۲ :

الف) د مساوات (x+1)(x-2) = 0 حل ډیرئ M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو یاګڼونو ډیرئ M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$

ډیرئ لکه، چې ومو ویل د توکو د خویونو له لارې هم څرګندیدئ شي یا ورکول کیدئ شي.

M = { x | ... سره x د خوویونو}

(لوستل: M د ټولو x ډیرئ ده له خویونو ..... سره)

بیلګه ۲ ۰ ۳

الف) { د ټولو x سټ ، چې هلته x یو لومړنی عدد یا ګڼ دئ| M = { x

b) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشدیرۍ: ډیرۍ، چې کوم توکی ونه لري تشډیرۍ یا خالي سټ بلل کیږي او داسی یې لیکو: θ یا $\{\}=\varnothing$

دا دې د یوې ډیرۍ یا سټ سره، چې یواځی له صفر څخه جوړه ده، نه بدلیږي یانې

$$\{0\} \neq \{\} = \varnothing$$

بیلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x \in Z, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرون یا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډیرۍ

$$\{x|x^2+x-/4= 0\} = \{1/2 \;, -3/2\}$$

کوم ټولګڼ یا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګڼونو پیژند ته دې پام وي، چې د راشنلګڼونو برخډیرۍ ده۰دریمه برخه دې وکتلشي

بیلګه ۲ ۰ ۵ : د ز۰ کال د دویمې نیمایي میاشتو سټ یا ډیرۍ په Ju , aug sep , ok,no, de سره ښایو او لیکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو یا نوره هم ښه داسی لیکلی شو: $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بیلګه ۲ ۰ ٦ : ټول مندیزي، چې نن مازیګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون یا جماعت ته راغلي۰

بیلګه ۲ ۰ ۷ : د هغو میړو ، غواوو او وزو ډېرۍ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بیلګه ۲ : ۸ د ټولو هغۆ ګڼونو ډیرۍ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ویشي یانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې یې لیکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسې وايو، چې ډیرۍ یا سټ M د ټولو هغو توکو x ـ لکه پورته ـ جوړ شوې، چې ۳۰ ویشي او داسې یې لیکو: $M =\{ x \mid x$ د ۳۰ پرویشونی ګڼ$\}$

د ټولو پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیرۍ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې یې لیکو:

$$N = \{ 1,2,3,4....\}$$

دا نه پای لرونکی یا لایتناهي ډیرۍ(سټ) ده ، چې په لاندې ډول یې نخښه ده یا په لاندې ډول په نخښه کیږي: ∞

ګورو، چې په شمیرپوهنه کی موږ پر پای ګڼونو برسیره ناپای عددونو سره هم مخامخ یو۰

۲ ۰ ۲ د ډیریو ترمنځ اړیکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړیکی د برابروالی او خوندیونې یا خوندي لرنې (مساویوالی او یو په بل کې ځاي لرلو) اړیکې دي۰

پیژند ۲ ۰ ۲ دوه ډیري یا سټونه M_1 او M_2 یو د بل سره برابرې دي، یانې

$$M_1 = M_2$$

که چیرې د ډیرۍ یا سټ M_1 هر توکی د ډیرۍ یا سټ M_2 توکی هم وي او پر څټ یا برعکس هر د M_2 توکی د M_1 توکی هم وي۰

برابرې ډیرۍ برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګی په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دئ

برخډیرۍ(سبسټ subset)

پیژند ۲ ۰ ۳ :

یوه سټ M_1 د سټ یا ډېرۍ M_2 برخډیرۍ (لاندې ډیرۍ، خوندي ډیرۍ یا سب سټ) بلل کیږي یا M_1 په M_2 کې ځای ده یا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي ده، لیکندود یا لیکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډیرۍ M_1 هر توکی دسټ یا ډېرۍ M_2 توکی هم وي۰

کیدی شي، چې M_1 د M_2 سره برابر هم وي، که برابروالی یا مساوات نا شوني وي نو بیا د اصلي برخډیرۍ یا اصلي سب سټ څخه غږیږو۰

پیژند ۲ ۰ ٤ :

یوه ډیرۍ یا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډیرۍ ده او داسې یې لیکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

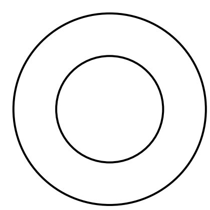
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 یو توکی د M_1 توکی نه وي۰

بیلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو M_1 په M_2 کې اصلی خوندي دی

ب) د ټولو څلوریو (مربعو) ډیرۍ د ټولوڅلورګوډیو(څلور اضلاعو) اصلي برخډیرۍ ده۰

پ) څیره ۱ ۰ ۱ په هواره یا سطحه کې ټکوډیرۍ ښایي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډیرۍ یا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څیره کې وګورو، نو یوه ګردۍ (دایره) M_1 په بله لویه M_2 ګردۍ کې خوندي ده۰

تشډیرۍ په هره ډیرۍ کې خوندي ده۰ هره ډیرۍ په خپل ځان کې د نااصلي برخډیرۍ په څیر خوندي ده۰

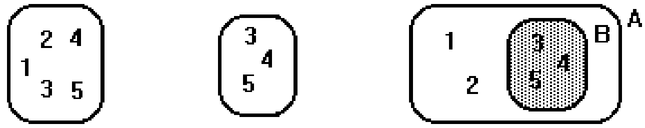
یا دا پیژند :

A⊆B که باور ولري : $x \in A \Rightarrow x \in B$

بیلګه:

A⊆A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډيرۍ، چې هيڅ توکی ونه لري تشډيرۍ بلل کيږي او داسې يی ليکو: $M=\theta=\{\}$

يادونه : پام دې وي، چې صفر ډيرۍ او تشډيرۍ سره بدلې نه شي يانې لاندې ته:
$\{\}=\theta\neq\{0\}$

د يوې ډېرۍ توان يا تواندېرۍ (توانسټ)

پيژند ۲ ۰ ٦ :

د يوې ډيرۍ M د ټولو برخډيريو ډيرۍ پوتنځډيرۍ یا په تواندیرۍ(-سټ) بلل کيږي او داسې يې ليکو:P(M) په تواندېرۍ توکي لري، چې هر يو يی بيا خپله ډيرۍ ده۰

بيلگه : د $M = \{ a,b.c\}$ ډيرۍ دا لاندې په تواندېرۍ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډيرۍ چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټيک n جگ 2n توکی لري يانی : n^{2n}

دا پورته د جملې په څير د پوره ايندکشن له لارې اوبی (حل-) کيدی شي(لومړۍ برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د گرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي يې۰

پيژند ۲ ۰ ۷ : د ډيرۍM زور |M| لاندې د ډيرۍ د توکو تعداد ياگڼون پوهيږو۰ که دوه ډيرۍ M اوN همغه زور ولري هغه ته يوزوريزه – يا برابرزوريزه ډيرۍ وايو او داسې يې ليکو: $|M| = |N|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرونونو یا مساواتو او خونديې ساتنو خویونه

الف) رفلکسیو- یا د انعکاس(هندارونیزې) اړیکيreflexivity

هغه اړیکي، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ ریښتوني وېناوې ورکړ شوي وي رفلیکسیویا انعکاسي اړیکي بلل کیږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خونديې لرل اړیکې رفلکسیو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هیڅ ډېرۍ د خپل ځان اصلي برخډېرۍ یا برخسټ نه شي کیدی۰

ب) سیومتریکې اړیکې Symetric relation

هغه اړیکې سیومتریک بلل کیږي، چې د شیانو ترمنځ چې کارول کیږي یا استعمالیږي یو له بل سره بدلیدلی شي۰

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خونديې لرل سیومتریکې اړیکې نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړیکی $M_2 \subset M_1$ نارښتیا یا ناټیک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزیتیویتي Transitivity یا وړون اړیکي

ترانزیتیویتي هغه اړیکې دي، چې له یوه نه وبل ته یې د وړلو امکان شته یا موجود وي۰

له L = M او M = N څخه لاس ته راځي L = N

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته داسې لولو: که M_1 د M_2 برخډیرۍ او M_2 د M_3 برخډیرۍ وي، نوله دې ځخه لاس ته راځی، چې M_1 د M_3 برخډیرۍ ده

برابونونه یا مساوات او په بل کې ځایه ونه یا خوندي ساتنه ترانزیتیو اړیکې یا خویونه دي

۲ ۰ ۲ په ډیرۍ کې کارونې یا عملیې

ټولنډیرۍ (د اتحاد سټ)

پیژند۲ ۰ ۸ :

د دوه ډیریو M_1 او M_2 ټولنډیرۍ(unionاتحاد سټ)، چې د ډیریو ټولنه ورته وایو ده:

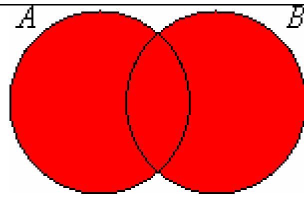
$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسې پوهیږو، چې M د ټولو هغو توکو ځخه جوړه شوې ډیرۍ یا سټ ده، چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکي هم خوندي ولري۰

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د M_1 یا M_2 توکی هم دئ (پرتله ۱ –مه برخه د یا سره پرتله) یانې دا د ټولنډیرۍ توکی د M_1 یا M_2 او یا د دواړو توکي دي۰

یا لاندې دیاگرام

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A ? B$ $A \cup B$ (B تولنه A) x) د A سره B اړیکې لري

بیلګې

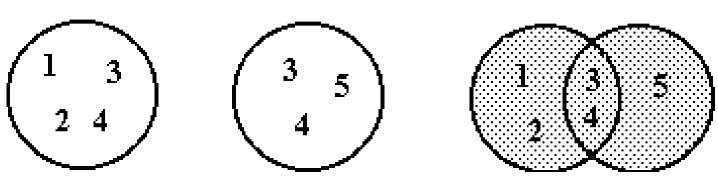
الف) M_1 دې د ځوانانو ډیرې وي، چې بکلوریا لري او M_2 دې د هغو ځوانانو ډیرې وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډیرئ ده، چې بکلوریا او مسلکي شهادتنامې ولري او یا دواړه شهادتنامې ولري.

ب)

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

یا په لاندې توګه پیژند او بیلګه: Aاو B دې دوه ډیرې وي د دې ډیریو تولنه داسې لیکو

B} ∈x∨A ∈B = {x | x∪A
∪A={1,2,3,4} B={3,4,5} A
B={1,2,3,4,5}



تل په ټکو ټکي شوې ټکیدیرې تولندیرې په ګوته کوي.

پ – څیره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې ټکیدیرې په ګوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) ټکیپردۍ دي٠ ب) ګډ ټکی لري٠

پ) اړیکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره څیرې په لاندې کې په بیلګو کې راغلې دي٠

د ټولنې لپاره کموتاتیو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسې دلته(لنډ: لړۍ) د ډیریو په ټولنه کی رول نه لوبوي

یادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ٠٠٠ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بیا دا سره جمعه کړو لکۀ

$$1\ ,\ 1+2,1+2+3,1+2+3+4+,1+2+3+4++..+....$$

نو دا لړیپرلپسې یا لنډ: لړۍ بولو(پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زیاتو ډیریو ټولنه لړۍپرلپسی(لنډ: لړۍ) رول نه لري٠

اسوڅیاتیو قانون باور لري٠

$$(M_1 \cup M_2) \cup M \ = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډیرۍ (د ډیریو غوڅی یا –متقاطع سټ) intersection

یادونه : دا کړی شو، چې د ډیرو ګډغوڅی وبولو(دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټیکوالی په کې نه شته)

پیژند:

ډیرۍ M د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M_2 غوڅډیرۍ یا د تقاطع سټ ده(لوستل: M_1

غوڅ(پرې)په M_2 (لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ډېرۍ M ټول توکي د ډېرۍ M_1 او ډېرۍ M_2 توکی وي٠

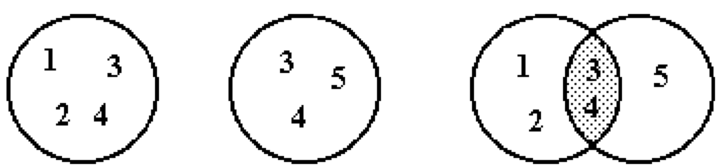
د غوڅډېرۍ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډېرۍ M_1 او ډېرۍ M_2 توکي دي (د ۱ ـمې برۍ د هم او هم په مانا یا د «او» په مانا)

یا دا پیژند :

د ډېریو A او B غوڅی $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بیلګه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3,4\}$



یادونه: دې پورته ډول دیاګرام ته د ون دیاګرام Venn-Diagram یا د Euler-Venn- Diagram وایی

بیلګې :

لومړۍ : یوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتیا څخه راځي، چې په M_1 یې په نخښه کوو٠ یوه بله ډله ، چې په M_2 یې په نخښه کوود کندهار او همغه د پکتیا زده کوونکي، چې په M سره یې ښایو، دي٠ د دې دواړو ډلو غوڅډېرۍ

$$M = M_1 \cap M_2$$

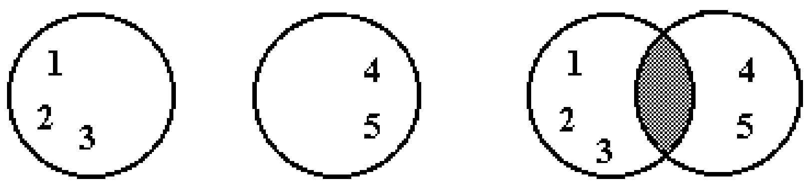
د پکتیا زده کوونکي دي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

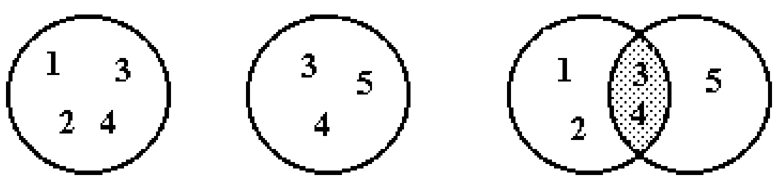
دویم:

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$
$$M = M_1 \cap M \ = \{r, l\}$$

دریم څیره ۲ ۰ ۳ په هواره یا سطحه کې ښايي، چې الف) ګنون پردي دي



ب) یو بل سره ګډ ټکی لري



پ) اړیکی

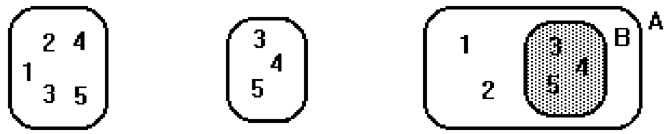
$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بیلګه:

A⊆ A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه ټکو باندې ټکي شوې ډېرئ اصلي برخډېرئ ده

دوه ډېرئ، چې غوځډېرئ يې تشډېرئ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونيوله پردئ بلل کيږي

د غوځډېرئ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډېرئ لپاره کموتاتيو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوځياتيو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډېرئکارونو يا ډېرئ عمليو يانی ټولنډېرئ او غوځډېرئ لپاره دواړه ديستريبوتيو قانونونه پوره کيږي يا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د ګڼونو د شميرکارونو يا عمليو لپاره يواځې يو دستريبوتيو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټوليزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند :

کمونډیرئ یا تفریق سټ M_2 د ډیری M_1 او ډیری M کموالی یا فرق دی او

داسې یې لیکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د M_1 ډیری کمه شوې

یا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډیری M_1 توکي نه وي۰

لیکندود یالیکنډول :
$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A اوB توپیرډیری یاکمونډیری یا تفریقډیری له ټولو هغو توکوx جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دئ

بیلګې :

لومړی : په یوه ټولګي کې د ټولو نارینه وو زده کړو ډیری ده او M_2 دټولو زده کړو ډیری (د نارینه وو او ښځینه وو) ، چې په شمیرپوهنه کې لس نمرې وړي۰

M_1 / M_2

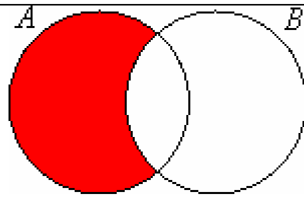
د هغو زده کړو ډیری ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډیری ده، چې په شمیرپوهنه کې یې لس نمرې وړي۰

که په ټولګي کې یواځې نارینه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

یا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A \backslash B$ (A بې له B) (x له A سره B اړيکې لري)

دويم :

$$M_1 = \{k,r,a,i\}, M_2 = u,r,s,e,l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k,a\}, M_2 / M_1 = \{u,s,a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون يا تفريق پيژند او بيلګي را په ګوته کوي په ټوليزه توګه باور نه لري:

$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

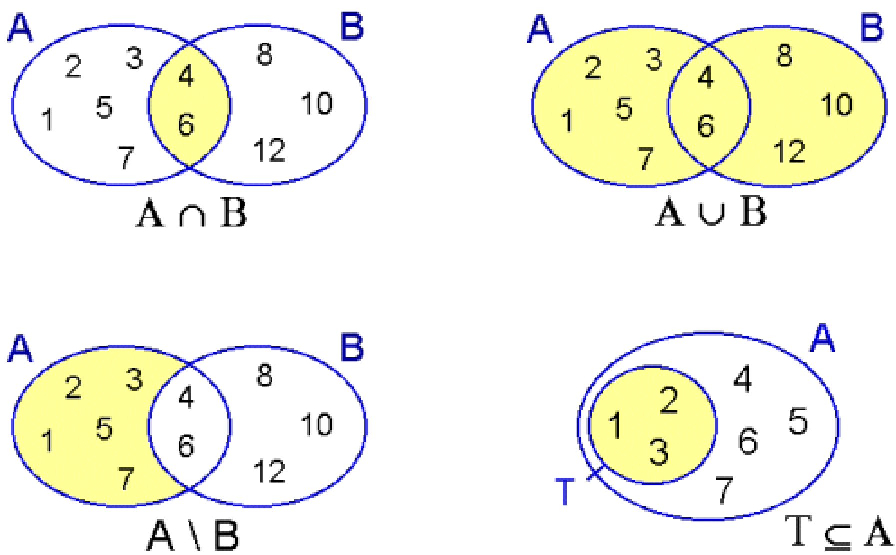
د يوې ډيرئ يا سټ کمپلمنت يا پوره کوونکی :

دا کارونه يا عمليه د نورو کارونو څخه توپير لري، چې په ډيرئ کی مو څيړلي٠ دا يوه يوځاييزه کارونه ده او دا نورې دوه ځايزې کارونی يا عمليې دي٠

مونږ بنسټډيرئ په U او د ټولو هغو توکو ډيرئ، چې U کې پراته دي ياني د U توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته ياني د M توکي نه دي پوره ډيرئ يا کمپليمنت بولو او د $\bar{M}$ سره يې په نخښه کوو٠

په لاندې څيره کې بيا د ډيرئ غوڅې، - ټولنه او – کمون او برخډيرئ ته د ګرانو لوستونکو لا زيات پام را اړوو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند:

پوره کوونکی- یا تکمیلډیرۍ (یا د یوې ډیرۍ کمپلیمنت) د یوې ډیرۍ M پوره کوونکې ډیرۍ $\bar{M}$ ټیک هغه توکي لري(د بنسټډیرۍ U څخه) ، کوم چې د M توکي نه وي۰

دوه ځله کمپلیمنتډیرۍ جوړول خپلې لومړنی وینا ته ځي ، یانې $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلګه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنی د توپیر او برګ کورنی اوسیږي۰ که دا دوه کورنی یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیرۍ یا تکمیلډیرۍ بلل کیږي یانې دا کلی پوره کوي۰

۲ ۰ ٤ څیرونه mapping یا اړیکې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو۰

په دې برخه کې لومړی د ډیرۍ ضرب کلمه پیژنو یا تعریفوو او بیا د ضرب کلمې کارونه څیړو۰

پیژند ۲ ۰ ۹ : د دواړو ډیریو M یو او2 M ډیریضرب(اټیرانضرب) هم ورته وایي، یانې په x سره ځلیږي یا ضربیږي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظیم یا ترتیب شویو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډیرۍ ده۰

بیلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظیم له مخې ځل په ډیریو کې کموتاتیو نه دی دا په دې مانا، چې

په ټولیزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو ریېلګڼونو ډیرۍ وي۰ په هندسي مانا د کرښې د ټولو ټکو ډیرۍ۰ RxR د ټولو ریېلګڼونو جوړو ډیرۍ ده، په هندسي مانا د هوارې یا سطحې د ټولو ټکو ډیرۍ ده۰

پیژند ۲ ۰ ۱۰ :

د څیړونې F لاندې د دوه ډیریو د ضربډیرۍ $M_2 \times M_2$ برخډیرۍ پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیری، چې $x \in M_1$ له یوه یا ډیرو توکو $y \in M_2$ سره تنظیم یا بهتره په باندې ځیره شي٠

داسی هم ویلی شو: د1 M توکي د2 M په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا ځېږه کیږي٠

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوریجنل یا اصلي توکی او y ځیره توکی بلل کیږي٠

د ټولو اصلي توکو ډیری پیژندورشو یا تعریفورشو یا پیژنددیری یا تعریفډیری بلل کیږي او د ټولو ځېږه توکو ډیری د ځېروني ډېری، ارزښتورشو یا ارزښتډیری بلل کیږي٠

بیلګی

$$M_1 = \{a,b,c,d\}, M_2 = \{1,2,3,4\}$$

د جدول په توګه دM یو توکو ځېرونه ونه یا ځېږه کوونه د M دوه په توکو

ځېږه توکی اصلي توکه یا ځیره کوونکی توکی

a -----------------------→ 1 , 2 ,5

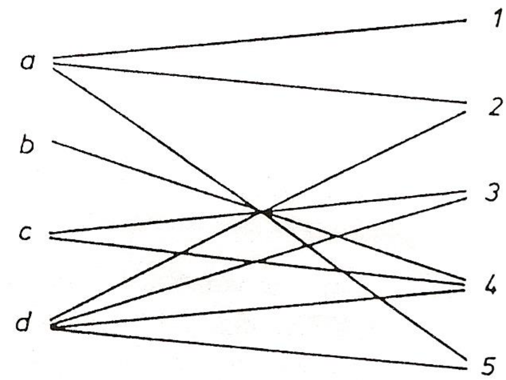
b -----------------------→ 4

c -----------------------→ 3,4

d -----------------------→ 2,3,4,5

یا دا لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

(د M يو او M دوه ډېريو د ټولو توکو جوړو ډيرئ)

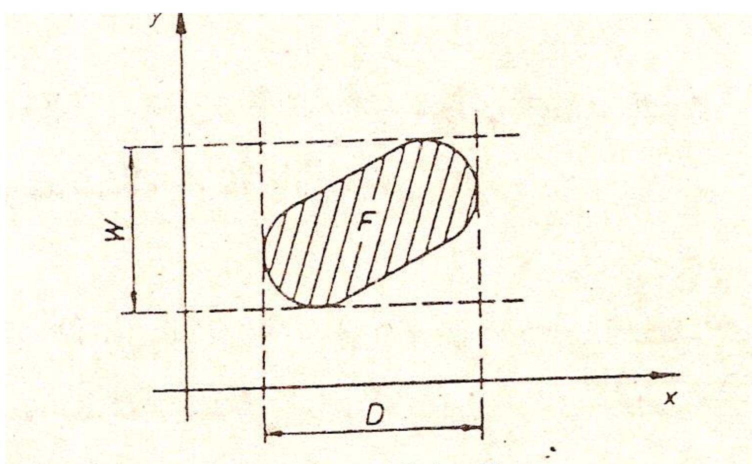


Bild 9.6 څېره

دريم : هر پيدايښتي يا طبيعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې څېره کيږي٠ داسې پيژند شوې يا تعريف شوې څېره ونه په لاندې بڼه هم انځوريدلی شي٠

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم N د پيداينښتي يا طبيعي ګڼونو ډيرۍ. پيژندډيرۍ يا تعريف- د ټولو پيداينښتي ګڼونوډيرۍ ده او ارزښتډيرۍ د ټولو جوړه ګڼونو ډيرۍ ده.

څلورم : که M يو په يوه ښوونځي کې د ښوونکو ډيرۍ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګيو ډيرۍ وي نو ښوونکي، چې په ټولګيو کې درس ورکوي دا يوه څېړونه ده. د ښوونکو ډيرۍ د ځانګړو ټولګيو په ډيرۍ کې

موږ د څېړه ونې څلور حالتونه توپيروو:

پيژندونه(دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بيلګه کې په څيره ونه F کې د1 M ، چې تعريفډيرۍ D سره برابر دۍ او M2 ، چې له څيره ډيرۍ , W سره برابر دۍ ، توکي مو مخ ته پراته دي.

له يوې څيرونې Fغبرګيرو د1 M په M2 باندې. دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دويمه بيلګه کې ، نو د يوې څيره ونې F غبرګيرو له M1 په M2 کې (دلته دې

« په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د يوې څيره ونې غبرګيرو د1 M په M2 کې دلته دې دريمه بيلګه په پام کې راوړل شي.

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د يوې څيره ونې غبرګيرو له M1 په M2 باندې. دلته څلورمه بيلګه د بيلګي په توګه راوړو. د دې نيونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګيو ته درس ورکوي.

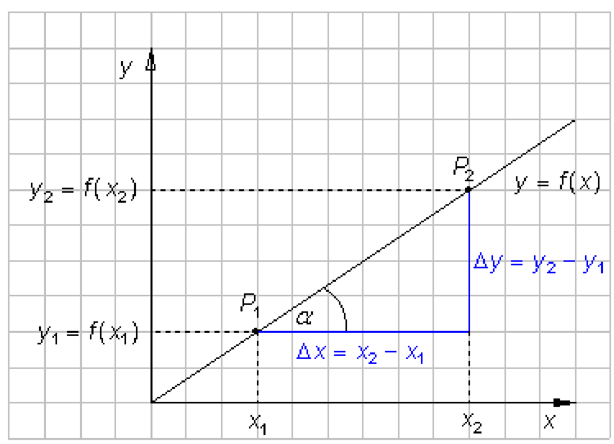
(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شاید څیرې هم رانه شي، خو که لږ د شمیرپوهنې سره بلد شو، بیا پرې پوهیدل ساده دي۰ زه مخ ته لرم، چې په دې هکله لیکلی کتاب، چې چاپ شوی نه دی دلته پر لیکه کړم، چې هلته بیا دا موضوع لږ غزیدلې ده۰

بیلګه ۲ ۰ ۵ : موږ په هواره یا سطحه کې څرګند شوي کړی د ډیریځل RxR په څیر د برابرونونو له لارې رانیسو(R د رییلګنونو ډیری د ګنکرښې ټکي دي(ګڼونه دې وکتل شي))۰

الف) $y = 2x$ یوه څیره ونه ده د R په R باندې ، ځکه چې باور لري

$D=W=R$



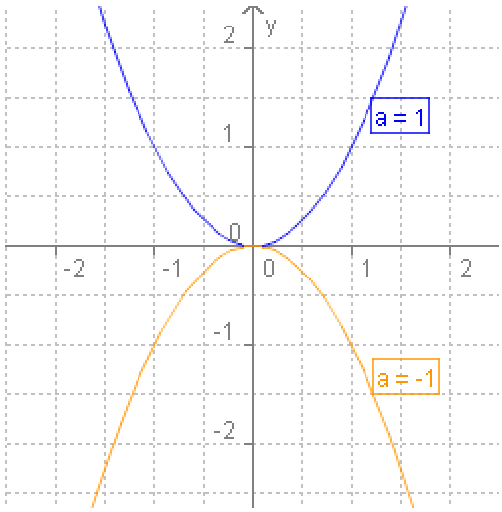
یادونه : په پورته څیره کې برابرون $y = ax+b$ دی.

ب) $y = x^2$

یوه څیره ونه ده د R په R کې ، ځکه چې باور لري

$D = R , W = [0, \infty]$

(c) ketabton.com: The Digital Library



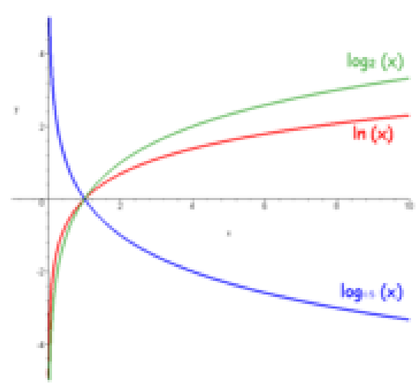
یادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ دول دی، چې $b = 0$, $c = 0$ او $a = 1$, $a = -1$ اینول شوي دي.

پ) $y = \log x$

یوه خیره ونه ده له R په R باندې » ځکه چې باور لري.

$D = (0,\infty) \wedge W = R$

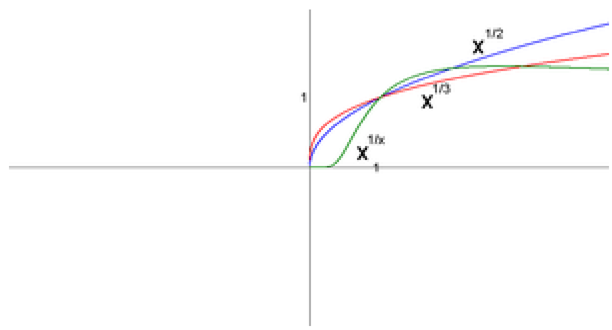


(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) $y=+\sqrt{x}$

يوه څيرونه ده له R په R ، ځکه چې باور لري

$D=W[0,\infty]$



يادونه : پورته د دويې ،دريمې او په x -مې ريښې په مانا دی

څيرې له ويکي څخه په مننه راکښته شوي دي٠

پيژند ۲ ٠

يوه څيره ونه E يواځنی بلل کيږي٠ که هر $x\in D$ په ټيک يوه $y\in W$

باندې څيره شي٠ دا په دې مانا، چې هر $x\in D$ ټيک يووار په $y\in W$

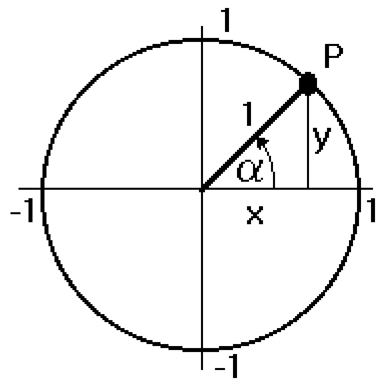
تنظيمډيرۍ يا جوړه ډيرۍ کې رامنځ ته کيږي٠ يوه يواځنی څيره ونه فنکشن

يا« بلواک» بلل کيږي او يا لکه تراوسه ورسره بلد يو يوه تابع بلل کيږي٠

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « يوازنی څيره ونه » بلواک يا فنکشن بولم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ۵ کې له الف تر ت پورې ټولې څیروني فنکشنونه یا بلواک دی۰ د دې پر څنګ لاندې برابرون (یوونګردی یاني ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي څیره ۰) انځور شوې څیره ونه له R په R کې [-1,1]) D=W) فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه څیرې لري یاني که په تنظیمجوړه کې د څیره ونې لړي پرلپسې(لنډ:لړی) بدله شي، نو یوې پرځښ څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : څیره ونې F ته پرځښ څیرونه F^{-1} د ټولو جوړو (x,y) ډیری ده له $(x,y)\in F$ سره ۰

پیژند ۳ ۰ یوه څیره ونه یویواځنی بلل کیږي، که یواځنیF او F^{-1} یوازنی څیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x\in D$ او $y\in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د څیروني نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کووني (که څوک یو کالی یا رخت څیرېکوي)او څیره کووني توپیر، ځکه سره کیدی شي، چی هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ موږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰
ډیری پوهنه د شمیرپوهنې سته ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وڅیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د یوه کتاب په څیر هم وړاندې شي٠

۲ . ۵ تمرینونه

۱ – د لاندې ډېرۍ یا سټ توکي د شمیرنې له لارې انځور کړئ

الف {x | x < 20 } x(لوستل: د ټولو عددونو x ډېرۍ یا سټ، چې x لومړنی عدد او x < 20 دی).
لومړی عدد او20

ب- $\{x|x^2+x-6=0\}$

پ-$\{x^2+x-6=0$ او0 $x| x> \{x$ دا په نوکانوکې ټول له کیڼ ښي لور ته لولو

ت) $\{x | x\}$ ریيلګڼ او $x^2+1=0\}$ دا ټول له ښي و کیڼ لور ته ولولی

۲ – د توکو x , y , z اړلرونوالی و ډیري M ته وڅیړی !

الف) M د لمړنيو ګڼونو ډيری

$x = 4 , y = 5 , z = 6$

ب) M د لاندې مساواتو حلډیری (اوبیلډیری)

$x^3 + x^2 - 6x = 0$

$x = 0 , y = 2 , z = 3$

پ) M د ریشنلګڼونو ډیری چې په اینتروال [3 ,3-] کی پراته دي

$x = -2 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 1/3$

ت) M د ریيلګڼونو ډیری چې په اینتروال [3 ,3-] کي پراته دي

$x = -4 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 3$

۳ – د لاندې ډیریو ترمنځ کومی اسپکی پرتی دي

الف) M_1 د ټول جفت ګڼونو ډیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

او M_2 د ټولو ټولګنونو ډيرۍ

ب) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$, حلونو (اوبیو) ډيرۍ

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ) M_1 د ټولو ګنو ډيرۍ چي پر ۶ ويشل کيږي.

او M_2 د ټولو ګنونو ډيرۍ چي په ۳ ويشل کيږي !

او M_3 د ټولو ګنو ډيرۍ چي په ۱۲ ويشل کيږي !

۴ – د ډيرۍ $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډيري ورکړۍ !

۵ – د لاندې ډيريو څخه ټولنډيرۍ ، غوڅډيري او دواړه ټوټډيري جوړ کړۍ !

الف) $M_1 = \{ k,a,m,e,l \}$, $M_2 = \{m,a,u,l,t,i,e,r\}$

ب) $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$, $M_2 = \{ 3 ,6 ,9,\dots \}$

پ) $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0\}$, $M_2 = \{x \mid x^2-3x+2 = 0\}$

۶ – د یوه ډيرۍ M او د تشډيري $\emptyset$ ټولنډيرۍ، غوڅډيرۍ او توپيرډيرۍ جوړ کړۍ !

۷ – د یوه ډيرۍ M او خپل همدې ډيرۍ ټولنډيرۍ ، غوڅډيرۍ او توپيرډيرۍ جوړ کړۍ !

۸ – وي دې $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8\}$

$M_3 = \{0 , 2 ,4 ,6 \}$, $M_4 = \{ 6 , 12 , 18 \}$

جوړ کړۍ : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$!

۹ – جوړ کړۍ

الف) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ) $M \setminus \emptyset$

ب) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$
$$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$$
$$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}, M_1 \setminus M_2 = \emptyset$$

له دې پورته څخه M_1 او M_2 وټاکئ !

۱۱ - وي دې

الف) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ب) $M_1 \subset M_2$,

وټاکئ: $M_1 \setminus M_2$!

۱۲ - وي دئ M_1 , M_2 (د نیمواز) اینتروال تکي ډیري:

$$M_1 = \{-3, 3\}, M_2 = [1, 7]$$

وټاکئ

الف) $M_1 \cup M_2$ ب) $M_1 \cap M_2$ پ) $M_1 \setminus M_2$

ت) $M_2 \setminus M_1$ ټ) $M_1 \times M_2$

۱۳ - وي دې $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{\{a, b\}$

الف) د $M_1 \times M_2$ ځل جوړ کړئ

ددې لاندې ب) تر ت) برخی تمرین لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول ځیرونی دي

$$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$$
$$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$$
$$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$$
$$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$$
$$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$$

په ټولو حلنونو (اوبیو) کی F_1 تر F_5 ورکړئ .

پ) په ځټ ځیرونه ورکړئ

ت) د ځیرونو F_1 څخه تر F_5 پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځني دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . دحقیقي اعدادو (ګڼونو) سره د شمیرلو بنسټیزې نښلونې

(ترنی، کارونی یا عملیي)

۳ ۰ ۱ د اعدادو د سیستم جوړښت

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ طبیعی اعداد یا ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتیا درلوده۰ له دې امله یې پرمخ ودیینه کې هڅې وکړې، چې له ډیری (سیټ) (د لیکنې په دننه کې ډیری پو هنه هم څیړلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چې دا ډیری تشریح کړای شي او د انسانانو او چاپیریال(طبیعت) د پرلپسې اخ او ډب په نتیجه کې د ګڼ یا عدد وی(کلمه یا لغات) راپیداشوی، چې د عدد یا ګڼ کلیمې پربنسټ د رینښتینو شیانو څرګند څومره والي (کمیت)Quantitative ترلاسه کړي۰ د طبیعی اعداد و څخه په ګڼلو یا که غواړې شمیرلو کې ګټه اخستل کیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ الف د طبيعي عددونو(پيداينتي ګنونو) جوړښت

پيژند (تعريف)۳ ۰ ۱:

الف) ټول طبيعی اعداد د ډيری په څير يوه ټولګه جوړوي او د طبيعی اعدادو ډيری يا سټ په نامه يادېږي يا يې طبيعی اعداد بولو او په N او همداسې N° سره يې په نخښه کوو۰

ډير پای طبيعي اعداد شته ، ځکه چی په هر طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد هم شته دی (يعنی په هرڅومره لوي طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کيږي)۰

ب) دطبيعي ګڼونو(اعدادو) اکسيوماتيکيAxiomatic جوړښت

اکسيوم جمله ده، چی اوبيونه (حل) نه غواړي او همداسی منل کيږي۰ دا چی جمله ، اکسيوم څه دي په لومړی برخه يانې سم اند (منطق) کې دې وکتل شي۰

طبيعی عدد کلمه د جيوسيپې پيانو(Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز ۰کال) اکسيومونو پر بنسټ لاندې پيژند لري يا په لاندې توګه تعريف کيږي:

۱ – د صفر ګڼ يو پيداينتي ګڼ دی

۲ - د هرطبيعي عدد يا ګڼ m لپاره يو يواځنی ټاکلی طبيعي عدد n شته، چې سملاسي(ترلی) د m پسی ګڼ دی، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^\wedge$

دلته $m^\wedge$ د m پسې سملاسې يا ترلی ګڼ يا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبيعي عدد زيات له زياته په يوه طبيعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ – هیڅ طبیعي عدد نه شته، چی پسی راتلونکی پیدایښي عدد یې صفر وي۰

٥ – که طبیعي عددو ډیری M صفر د توکي په څیر ولري او که له هر طبیعي عدد m سره د هغه پسی تړلی راتلونکی عدد یا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبیعي عددونه خوندي لري یا په بل ډول » ټول طبیعي اعداد په کې ځاي دي۰

یادونه: ځنې ادبیاتو کې، د پیانو سیستم کې، د صفر په ځای ۱ لیکل شوی. په دې حالت کې بیا صفر ته د طبیعي عدد یا ګڼ په څیر نه کتل کیږي. که بیا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبیعي ا عدادو ډیرۍ یا –سټ یې د صفر سره بولو.

۱ . ۱ ب : د طبیعی اعدادو یا ګڼونو انځورونه او سیستمونه:

طبیعي اعداد په نخښو (دې ته په الماني کې Zifferوایي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څیرو، دی) انځوریږي. د دې لپاره چې دا لړ ځای ونیسي، نو د لویو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنیو سره یوځای کیښول شوې دي. دا چې څرنګه یوه د عدد یا ګڼ نخښه له بل توپیریږي، په لاندې ډول یې د زیاتون یا جمعي سیستم او ځای سیستم کې ښایو.

په زیاتون سیستم کې هر بنسټیز ،،ځای،، یو ،، ځای ارزښت،، لري. د څیفرونو زیاتون د یو په بل کې د ورزیاتشوي بنسټیز څیفر پخپله هغه عدد یا ګڼ ورکوي. بیلګه یې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنسټیزو څیفرونو جوړ شوی(ترې لاندې لسیز د اعدادو سیستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څیفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پیل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

رومي عددونه:	M	D	C	L	X	V	I
عربي عددونه:	1000	500	100	50	10	5	1

طبیعي عدونه له دې امله یو د بل ترڅنګ لیکو چې کم ځای ونیسي لکه د بیلګې په توګه:
CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کی، که بنستیز کوچني ګڼنخښی لکه C , V , I د لوي ګڼنخښی و کیڼ لور ته ولیکل شي نو دا مانا لري چی دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی. د بیلګي په توګه: XC = C - X .

بیلګی: **الف:** MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768

ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځایسیستم: په ځاي سیستم کی هره بنستیزه نخښه یو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئیز ځاي سیستم(پوزیشن سیستم ((Positionssystem)): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئیزځای سیستم کی په دې ډول ده چی د یوه ورکړشوي ستی په بنسټ(g ∈N) g ≥ 2 هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوریدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \dots + a_1 g + a_0$$

دلته بنستیزي ګڼنخښی a_i، g د $i = 0,1,2,\dots,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چی $a_k \neq 0$ وي په کار راځی یا اړتیا ورته شته.

لیکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$$

که د بدلیدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کیږي، نو بهتره به وي چی په

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ډول وليکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کې ګڼل په لسيز سيستم (ګڼځاى ارزښت) باندې کيږي، چې تل داسې نه وه، لکه په افغانستان کې چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسيز سيستم کې ګڼځاى «ارزښت» لري چې انځور شي، مګر په لرګی کی ځاى ارزښت نه لري چې کرښه چيرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون يا تعداد څخه پور څرګنديږي.

بل د ګڼلو سيستم ، لکه د مخه مو چې تر پام لاندې ونيوه، د ګڼلو رومي سيستم دی چې نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډك، زياتونسيستم(جمعی –) څرګنديږي.

بيا هم غواړو چې دا په لاندې ډول ځانګړی کړو:

۱ – هره لاندې نخښه I, X, C کړاى شي چې زيات ترزياته ۳ ځله(۳ واری) په يو ګڼ کی پرله پسی يا څنګ تر څنګ راشی

۲ – هره، د ګڼ نخښه V, L, M ,خورا زياته يو ځل څنګ تر څنګ په يوه ګڼ کی راتلی شي.

۳ – که بنستيز نخښه I, X او يا ....__-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D يا M CXI تر مخ ځاى په ځاى شوې يا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کميږي .

زياتون او کمون (جمعه او منفي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – په هرګڼ انځورونې (Zahlendarstellung) کی کیدی شي چې یواځې یو بستیز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: MXCVII = 1098 مګر نه IMIC
۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمی نخښې په کار واچول شي.

عربي ګڼونه : دا ګڼونه، چې موږ ورسره بلد یو، د لسیز سیستم ګڼونه دي، چې عربي ګڼونه بلل کیږي. دا د ګڼلو لسیز سیستم عربو د هند څخه راوړی، چې په دولسمه پیړۍ کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر (۰) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر 9 پورې، چې

ځیفر ورته واي (همغه عربی صفر دی) چې دلته ترې بنستیز ګڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چې ګوته مو ورته ونیوه، زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، ځکه چې د یو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښې زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د ګڼونو انځورول ساده دي.

> **تعریف ۱ . ۱ ب** : په یو «ځاي ارزښت سیستم» کی هغه ګڼ لوي دی چې زیات ځایونه ولري، که چیرې د ګڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي(مساوي وي) نو هغه ګڼ ستر دی چې له کینې لورې یې نخښه لویه وي.

لسیز – یا لسګونی سیستم: لسیز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چې له انځورونې یې څرګندیږي. په لسیز سیستم کی د ګڼ انځورولو نخښې، لکه د مخه مو چې انځور کړې، ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ دي. ۱۰ ګڼ د لسیز سیستم بنستیزه نخښه ده.
دا چې نور ګڼونه نه انځوریږي، نو ځای هلته ډك دی چې پرله پسی (ترتیب یانظم)
د ۰ تر ۹ یعنی له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پسی جګ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شووګڼنځنبو ګڼون (تعداد یا شمیر) دی، څمور په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیري (set , die Menge ګڼو لیاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او ۹ –امه برخه دې وکتل شي)) غږو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او داسی نور. ټولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, ...\}$$

موږ ګڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا حروفو ښایو لکه a ,b,c, ... n . دا رینښتوني

(رینښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعي ګڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ (ویل کیږي چی: n د طبعي ګڼونوډیري N یا*N توکی دی(لنډ n د N یا *N څخه دی)) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (ځیفر) توپیر ته پام وي.

موږ دګڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د نځنبډیري لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نځنبو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}\,.10^{n-2} + ..+ a_2\,.10^2 + a_1.10 + a_0\, 10^0$$
$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو ځیفرونو ډیري هم انځوریدی شي. د بیلګي په توګه په اینفورماتیك (Infrormatik) کی، چی د دوالسیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) څخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه ګڼځنبي (ځیفرونه) لیکل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسيز او دوه ئيز سيستمونو لمړني ګڼونه يو د بل ترڅنګ کښل شوي:

لسيز سيستم	دوه ئيز سيستم
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100

په ټوليزه توګه(عمومي توګه) دلته يو څيفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ يو طبيعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 , \ a_i \in N$$

بيلګه ۱ . ۱ : $59 = 1.32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$

$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

يا دونه :: څه لنډ لنډيزونه

د طبيعي اعدادو ډيرئ يا سټ داسې په نخښنه کوو:

د پيدايښتي يا طبيعی ګڼونو ډيرئ $N = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$

دپيدايښتي ګڼونو ډيرئ د صفر سره $N^\circ = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ه کتابونو کی دا د صفر نخښه په لاندې برخه کی راځي۰

۳ ۰ ۱ ۰ ب د طبيعي اعدادو يا ګڼونو انځورونه:

طبيعي اعداد په نخښو انځوريږي۰ دا عددونه يا ګڼونه د ځان لپاره يو سيستم لري، چی هغه زيات يې موږ نه ځيرو۰ زموږ لپاره غوره هغهٔ عربی اعداد يا ګڼونه دی۰

يا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد يو د لسيز ځايستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل۰ دا کورونه (خوني يا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نيوی شي او بيا يې هر ځاي يو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سيستم« دی۰ لومړي کور ته يويز، دوم ته لسيز، دريم ته سليز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي۰

انځورونه يا ځيفرونه يې دي : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټيز ګڼونو نخښی دي، نور يې په کورونو يا ځايسيستم باندې روښانه کيدی شي۰

پيژند ۳ ۰ ۱ ۰ ب :

په يو» ځاي ارزښت سيستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډير ځايونه ولري۰ که چيرې د ګڼ د ځايونو يا کورونو ګڼون (تعداد) سره برابر وي۰ نو بيا هغهٔ ګڼ لوي دی، چی کيڼ لور يې ګڼنخښه لويه وي۰

۳ ۰ ۱ ۰ پ : طبيعي اعدادو کي د شميرنې بنسټيز قوانين

اوس په لاندې ډول د پيداينښت ګڼونو، په ټوليزه توګه د رييل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري(معتبر) بنسټيز د شميرنې قوانين وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : د اندول (نظم يا ترتيب يا لوي واړه ترتيب(Anordnung) بنسټيز قوانين:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کی یا د نخښی خوله کی عدد یا ګڼ لوي دی او د وتلی کونج یا لوي کونج >که نخښه یا داسی کونجکی یا څڼ یا ککره کې ليکل شوی عدد کوچنی دی۰ که ګڼونه یا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لویواړه اړیکی داسی ليکو، یانې که 23 > 15 ولرو نو ترې څرګندیږي، چې عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دی .

د دوه طبيعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړيکو څخه ټيک يوه اړيکه باور لري»

$a < b \quad , a = b \quad , a > b$

۲ - ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځاي توری وليکو هم a = a به وي اينه ونه يا هندارونه يا منعکسونه (ريفليکسيويتي Reflexivity)

۳ – له $a = b$ => (لاس ته راځي) $b = a$ (سيومتري، اندول، ورته وايي (Symmetry

د انعکاسي (ايينه ونيز – يا هندارونيز) برابروالی يانی که چيري دا عددونه وراينه يا هنداره يا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بيرته سره برابر دي يا برابريږي۰ که انعکاسي(اينه ونيز)برابر نوم ورته کيږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به يې همغه سيومتري وبولو۰

٤ - له $a = b$ او $b = c$ => (لاس ته راځی) $a = c$ (ترانزيتيوTransitivity)

ترانزيتيو ګورو، چې يو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، ځکه چې دا ګڼونه يو د بل سره په واکوالي تړلي يا له يو څخه وبل ته ځی يا وړل کيږي۰

٥ – له $a < b$ او $b < c$ => (لاس ته راځی) يا $a < c$ يا $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

وړانديز : که چيری دا پورته وي يا لغاتونه يا نومه ونی په همغه لاتين نومونو وليکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به وي، خو له شميرپوهنی پرته مانا باندی يې هم پوهيدنه ښه او اړيينه ده۰

ب : د زياتون (جمع) Addition n. بنسټيز قوانين

که چيرې له طبيعي اعدادو څخه يو ، دوه يا څو ګڼونه يو په بل زيات شي، نو يو پيدايښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه(عمليه) «زياتون يت جمعه » بولو، ځکه، چی ګڼونه يو په بل زياتيږي۰

پيژند: د همغه ډول شيانو يا يو څه يو په بل زياتيدلو ته زياتون (جمع) وايو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزيات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی يا

$$۱۰ + ۱۸ = ۲۸$$

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ يو پر بل زياتيږي، نو له دې امله يې «زياتېدونی» (ما تراوسه زياتووني بللي، خو فکر کوم،چې زياتيدوني يې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کيږي ۰ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وايه ۰ + زياتوننخښه ده او = برابروننخښه (مساوات علامه) بولو

دجمعې يا زياتون بنسټيز قوانين

۱ - د دوه طبيعي اعدادو a او b لپاره تل يو زياتون (جمع) a + b شته دی

۲ - يواځنوالی : له a' = a او b' = b څخه لاس ته راځي: a'+b' = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAWکموتاتيو- يا بدلون قانون دی:a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوشياتيو - سره ګډېدنې قانون. لرو
(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – يا همغږيزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $a < b$ څخه لاس ته راځي $a+c < b+c$

يادونه : په $a+b=c$ کې a او b زياتېدونې $a+b$ زياتون او c زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه : په زياتون کې لاندې زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپيلی توکی: په $N°$ کی يو توکی شته، چی که د هرپيداښتي توکی سره په زياتون يا جمعه کی ور زيات شي همغه توکي ورکوي۰ دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپيلی توکی کړی شو نالوريز وبولو،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولی يا د زياتون ارزښت همغه پاتيږي، همداسې نااړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې وبولی۰

پ : د کمون (تفريق)Subtraction بنسټيز قوانين

پيژند:د پيداښتي ګڼونو a او b لپاره، چې $a>b$ وي، يواځی يو x شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو ټيک يواځني شته دي(موخه x دی)

نومه ونې: b کميدونی يا مفروق (تراوسه مې کمونی بللی) a ترې کمونی يا مفروق منه $a+b$ کمون او x کمون- يا تفريق ارزښت بلل کيږي يا بولو :

موږ پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونخښی ليکو، چی ساده يې ونوموو:

$$20 - 10 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کی مورږ له ۲۰ لس کم کړل، چې لاس ته راوړنه يې ۱۰ ده، نو له دی امله يې داسی نوموو:

تر مخ يادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، ځکه، چې ترې کمیږي(ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کموونی« يا کميدونی(ع۰ مفروق) دا بل لس يې «کمون ارزښت» يا د کمون لاس ته راوړنه(لنډ: لاس ته راوړنه يا کمون) (ع ۰ حاصل تفريق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

ت : د ځل (ضرب)Multiplication بنسټيز قوانين:

۱ - د دوه پيداينښتي ګڼونوa اوb لپاره د پيداينښتي ګڼونو په ډيری کې تل يو ځلa.b شته دی. د a.b لپاره داسې هم ليکوab په پورته کې aاوb ځلووني (ضربيونه) اوab=x « ځل ارزښت » يا ځل(حاصل ضرب) دی۰

وايي چې ضرب وهلو ته وايي او د جمع (که جمعي) لنډه طريقه، چې۰۰۰۰وي يا د زياتون لنډه لار ده۰ ګورو، چې دا پيژند، چې وهل او دربول دي زمورږ لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پښتو ښه نوم دی، چې له دربولو مو ځانونه راويستلي وي۰

که ووايو، چې : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کيلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

ليکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کيلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چې د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، ځکه چې پښتو ده او له ضربيونو څخه به هم ځلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له $a = a'$ او $b = b'$ څخه لاس ته راځي $a'b' = ab$ (يواځيتوب)

۳ - لرو $ab = ba$ کموتاتيو – يا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوشیاتیو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ویشوني- یا دیستریبوتیو قانون
Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګټیتوالي یا یوغږیزوالي قانونMonotony

ټ – د ویش بنسټیز قانون Division

پیژند۳ ۰ ۲ :

که د دوه طبیعي عددونو a او b لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانی صفر نه وي یو طبیعي عددx شته، چی برابرون (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا b/a د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چی ماتګې(کسر) یې هم بولو

۱ – که $a / b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي ، نو یواځنی شته دی(یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ویش ارزښت، b ویشونی یا ویشه وونی دی، ځکه چی په یوځه ویشل کیږي او a پرویشونی بلل کیږي، ځکه، چی څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم ، حاصل تقسیم ۰

ګورو چی له قاسم یا مقسوم او همداسی د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- یا پرې ویشونی ، ویشه ونی اوویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهېږ دي، خو په خواشینی به وه وایم، چی تراوسه په شمیرپوهنه کی ورسره نابلد یو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ۱۲ کتابچې پر ځلورو زده کوونکو وویشو، نو هر یوه ته درې کتابچې رسیږي۰ ګورو، چې ۱۲ په یو څه ویشلکیږي، نو ویشونی یې ښه نوم دی۰ دا ۱۲ په ځلور ویشل کیږي پر ۰۰۰ ویشل کیږي، نو له دې امله ځلور پر ویشونی بولو، درې یې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسیم وایه، له دې امله ورته ویش ارزښت وایو او دا کارونه یا عملیه خو ویش بلل شوی۰

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ټولګنونه یا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبیعي عددونوa او bکمون یا تفریق (x= b-a) ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته د طبیعي عددونو ډیری یا سټ کی شته، چې وي : $a \le b$

د شمیرپوهنې نخښو باندې داسې لیکل کیږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \le b$$

انګریزي یې if and only if ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته(دا ښننه یا وینه پورته د شمیرپوهنې نخښې ته ده)۰

که هغی نخښی ته وګورو، نو هم لاندې ترې څرګندیږي، له ښی لور کیڼ لاس ته راځی او په څټ(برعکس) له کیڼ لور ښی لاس ته راځی۰ یا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځی او په څټ۰

ټولګنونه یا تام اعداد هم د انسانانو د اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي ، یا منځ ته راوړل شوي۰که چیرې سپین د خړ ۱۰۰ افغانۍپوروړی وي او سپین ورته اتیا افغانۍ ورکړي، نو سپین بیا هم شل افغانی پوروړی پاتیږي، دا په دی ما، چې ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ ګورو، چی ۲۰ – یو پیداینښتي ګڼ یا طبیعي عدد نه دی۰یا 20- = 100 – 80

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترېکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه يې طبيعي عدد نه دی٠ اوس يوه د اعدادو بلې ډيری پيژند ته اړ کيږو، چی هغه د ټولګڼونوډيری ده او دا د طبيعي عددونو او د طبيعي عددونو کمي(منفي) او صفر سره يوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي(په ډيری کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چي له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګڼونو ډيری ده او داسې يې ليکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{....-3,-2,-1,0,1,2,3.....\}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پيداينښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو يا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پيداينښتي ګڼونو مخنخښه په کموننخښه يا منفي نخښه باندې سنبالوويانې (کيدی شي زموږ هيوادوال د څټ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زياتی يا کمی ښايي د ګڼ کيڼ لور ته ليکل کيږي، چې دا ما مخنخښه ليکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شميرقوانين په Z کې هم باور لري

د ټولګڼونوډيری

$Z = \{ ....-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \}$

د مخه مو شميرقوانين، چې د پيداينښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګڼونو لپاره هم باور لري

د کمون يا تفريق بنسټقوانين (پسی يا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګڼونو يا تام اعدادو a او b لپاره يو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چی a+x=b برابرون باوري دی

د ويش تيوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجز یي لپاره خورا ګټور دي باور لري

الف) یو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦) ویشونی دی، که د اخر څیفر یا کور (له اخره(موخه تری ښی لور دی) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنستیزو څیفرونو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦ ۰۰۰ویشونی وي) په دوه ویشونی ګڼ جوړه (جفت) نومیږي او بل ډول یی ناجوړه(طاق) بلل کیږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهیدلی شو

ب) یو ګڼ په ٥ (٢٥ ، ١٢٥ ، ٦٢٥ ، ۰۰) ویشونی دی، که د اخر(له ښي لور) بنستیز څیفر (د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنستیز څیفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ (٢٥، ١٢٥ ، ٦٢٥ ۰۰۰) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وایې او موږ یې شاید لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ ولیکم، خو بیا دې هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دی ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي۰

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنستیز ه ګڼونخښو(څیفرونو) زیاتون پوهیږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونیول شي۰

بیلګهٔ : د 126 پروت زیاتون یا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت) یو ګڼ په 11 ویشونی دی که د هغه ګڼ الترنیري(نخښه بدلونکی) پروت زیاتون۰ پر 11 ویشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

الترنيري پروت زياتون، چی پروت کمون هم ورته وايی له بنستيزو څيفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زياتون څخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ، ۰۰۰ زياتون کمون پو هيږو ، بی له دې، چی ځاي ارزښت يې په پام کی ونيول شي يا په بل ډول، که د ناجوړه کور زياتون څخه د جوړه د زياتون کم کړو۰

بيلګه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ويشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چی الترنيري زياتون يانی ۱۱ = ٤ – ۱۵ يې په ۱۱ ويشونی دی۰

ټ) يو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که (د ګڼ له اخر څخه جرړشوي) د درېګوني ګڼونو زياتون پر ۳۷ وېشونی وي.

بيلګه:

37|(448+352+216+20)⇔ 37|1036 ځکه چې 37 |20216352448

ث) يو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ويشوړ دی، که د هغه (د ګڼ له لخ څخه جوړ) درېګونی الترنيري زياتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشونی وي.

بيلګې : 7|(604-37)⇔ 7 | 567 ځکه چې 7 | 37604

13| (889-293+709-96) ⇔ 13|1209 ځکه ، چې 13 | 9679293889

ج) يو ګڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر څخه جرشوی) دوهګونی الترنيري زياتون په ۱۰۱ وېشونی وي.

بيلګه:

101|(69-06+63-03+79)⇔ 101|202 ځکه چې 101|7930630669

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : که پيداښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت يې هر ګڼ وي او که پېداښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ويشي بې له پاتي ياني ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دئ.

۳ . ۱ . ۲ب) خوراغټ ګډ پرويشونی او خورا کوچنی ګډ زياتځله

يا بزرګترين قاسم مشترک و کوچکترين مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرليک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي يې په لومړنيو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنيوګڼونو ځله وونو هر يوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانيسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان(په خپل ځای کې دې وکتل شي) يا جګګڼ يې ټيټ يا کم وي . ياني

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ ياني ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي ياني د دواړو ګڼونو پرووېشونی

دئ او خورا غټ پرووېشونی هم دئ. ياني ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پرووېشونی دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ : ۵۲ د یورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دئ.

داسې ګڼ ، خوراغټ ګډ پروېشونی، بولو (لنډ ونه یې : غ ګ و)

هغه ګڼ، چې د دوه یا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته خورا,,

غټ ګډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ ګ و) وایو. یا

(بزرګترین عامل (مقسوم علیه) مشترک)Greatest commom divisor(g c d)

اوس بیا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله ووني، له هر څخه یو چې په جګ توان وي

یاني خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بیا یې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ یانې ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زیاتځله دئ (یانې ګډ په دواړو

وېشل کیږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دئ. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زیاتځله(څو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (یانې ګډ) زیاتځله (ګډ څو واره) دئ

لنډ یې : خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډونه یې: خ ګ ځ) یا
(کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالاضعاف الاقل)Least common multiple(l.c.m.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران هيوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر يا بيخي پوهوړ او ساده وي.

ورپسې داسې مخ ته ځو:

دا چې موږ په پيدايښت يا طبيعي ګڼونو کې له شميرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پيژند ورکوو:

پيژند(تعريف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې ټولګڼونه وي۰ وايو چې « ګڼې a ګڼې bويشي» (او يا هم a د bپرويشونې دئ او يا همa د b څو برابره (زياتځله) دئ) که يو ټولګڼې u شته يا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره ليکوa|b (وايو، چې ګڼې aګڼې b ويشي ، خو اړيين يا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼې ورسره وويل شي۰

که a د bپرويشونی نه وي، نو د دې لپاره ليکوa|/b(دا نخښنه /| دې د نه ويشونی لپاره ومنل شي)

بيا ليکو، چی : پيدايښتي ګڼونه، چی په ۲ ويشل کيږي جوړه (جفت) ګڼونه بلل کيږي او که نه نو ناجوړه (طاق) ګڼونه بلل کيږي۰ د صفر ګڼې د پيدايښتي ګڼونو په ډيری کې يو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې يا اوبيونې د دې ويشکلمی لپاره يو څو ساده شميرقاعدې را يوځاي کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کيږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه يا زړه پورې ټولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

(۱) ± 1 او $\pm a$ ويش (دا په نامه « ساده» پرويشونې دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۲) د ۱ پرویشونی ۱ او ۱ - دي

(۳) تل باور لري، چې 0 | a او a | 0 یوائی په هغه حالت کې باور لري، چې a = 0 وي

(٤) له a|b او b|c <= a|c

(٥) له a|b لاس ته راځي: ac|bc ٠که 0 =| c وي ، نو د دې په څېړ هم باوري

دي٠ دا په دې مانا چې، که ac|bc وي، نوa|b هم باور لري٠د ګڼونو

لیکدود له مخې، که نړیوالجال ته پورته شو داسې لیکو، که نه دا پورته بسیا

کوي: $c \neq 0, a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$

(٦) لهa|b او c|d څخه لاس ته راځي او په څېړ ac| bd لنده لیکنه یې(که ن ج ته پورته شوه): $a \mid b, c \mid d \Leftrightarrow ac \mid bd$

(۷) له a | b او b| a لاس ته راځي a = ± b

(۸) له a |b اوa|c څخه لاس ته راځي a|(bx+cy) د ټولو ټولګڼونو x او y لپار

(۹) ټیک هلته a|b کله چی وي|b| | |a|،

(۱۰) که a | b او b = 0 نه وي نو باوري دي |b| > a > |b| -

حل (اوبی) : (۱) له a1 = (-a)(-1) = a لاس ته راځي

(۲) له a0 = 0 لرو a | 0 . که وي a | 0 , نو یو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چی وي 0u = a

او له کومی چی لاس ته راځي a = 0 .

(۳) ساده دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۴) که $a \mid b$ او $b \mid c$ ، نو تولګنونه u او v د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دې لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس $a \mid c$.

(۵) که $a|b$ ، پس یو تولګنې u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$ سره، د کوم څخه چې لاس ته راځي $ac \mid bc$. د $c \neq 0$ لپاره دا اخرنتخیر په ښې کیدی هم شي.

(۶) د $a|b , c|d$ او (۵) څخه لاس ته راځي چې $ac|bc$ او $bc|bd$ ، د (۴) له مخې $ac \mid bd$.

(۷) د $a \mid b$ او $b \mid a$ څخه د تولګنونو u او v موجودیت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره . برسیره پر دې لاس ته راځي $a(uv) = a$ ، پس $a=0$ یا $u=v=\pm1$. په لمړي حالت کی د $a \mid b$ له امله $b = 0$ ، پس $a = b$. په دوم حالت کی $a = \pm b$ دی.

(۸) د تولګنونو u , v لپاره دي $au = b$ او $av = c$ ، نو له دې $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځي، پس $a \mid (bx+cy)$ د تولو تولګنونو x او y لپاره.

(۹) وي دې $a|b$. له $a \mid b$ ، $a| \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه او د (۴) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چې $|a| \mid |b|$. په ښې: که $|a| \mid |b|$ باورلری، نو د $a \mid |a|$ ، $|a| \mid |b|$ او $|b| \mid b$ څخه په ورته ډول لاس ته راځي $a \mid b$.

(۱۰) دی $a \mid b$ ، پس د (۹) هم $|a| \mid |b|$. که $b \neq 0$ وي ، پس یو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چې $|a| \le |b|$ لاس ته راځي.

که $b|a$ د تولګنونو a,b لپاره د $b \neq 0$ سره، نو یو یواځنی معلوم ګڼ q شته (د a او همداسی د b «کومپلیمنت پرویشونی» بلل کیږي)، چی لرو $a = bq$.

په تولیزه توګه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۳ ۰ ۲ (د ويش الګوریتم): a اوb دې ټولګټونه وي۰ د $b \neq 0$ سره ۰ نو یوائځني ټاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شمیرلکیدونکي ټولګټونه q اوr (چې د a پرb ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتی بلل کیږي، شته دی،د کومو لپاره چی باور لري: $a = bq + r \;\wedge\; |0| \leq r < b$

هر یو ټولګټ کم له کمه ساده پرویشونی لري یعنی $1 \pm$ او پخپله د دې ټولګټ زیاتیز(مثبت) او کمیز(منفي)۰ دې پرویشؤنو ته «سادهٔ پرویشونی» وایو۰

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو ټولګټ، چې یوائځی او یوائځي ساده پرویشونی ولري موږ ورته لومړنی ګټونه وایو او دا لومړنی یا پریم ګټونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړی ګټ د پیدایښتي ګټونوتوکی دی۰

هریو ټولګټ، چی لومړنی ګټ نه وي د لومړنیو ګټونو په ځلونو(ځله وونو)(ضریبونو) ټوټه یا تجزیه کیدی شي۰

بیلګی :

1 - $240 = 24 \,.\, 10 = 3 \,.\, 8 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2^4 \cdot 3 \,.\, 5$

-2 $2310 = 2 \,.\, 1155 = 2 \,.\, 3 \,.\, 385 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 77 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11$

$3750 = 25 \,.\, 15 \,.\, 10 = 5 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^4$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګټونو کی ګټ ۲ د دواړو پر ویشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګټونو پرویشونی دی یانی $2.3 = 6$ برسیره پردې ګټ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګټونه ویشي او شاید په دې ګټونو کی یو خورا غټ ګډ پرویشونی هم وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته درېواړو بيلګو کي ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څير خوندي دي ياني دا ګنونه ويش، چي له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګنونو غ۰ګ۰پ دئ

پيژند ۳ ۰ پ :

a او b دې ټولګنونه وي او d دې يو مثبت يا زياتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چي باور لري:

$$(1) d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2) t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرويشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کيږي d لپاره داسی ليکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرويشونی(لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کيږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a او b پروېش پردي بلل کيږي ياني له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چي دواړه ګنونه پر ووېشل شي.

يادونه : په زياتو ادبياتو کي لنډونه په درېتورو کيږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرويشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

يادونه: ما د خورا غټ ګډ پرويشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړانديز لري، نو زه يې ضرور په پام کی په پوره خوښی نيسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبياتو کي بزرګترين قاسم مشترک او کوچکتريب مضرب مشترک وايي او ذوالاضعاف الاقل يې هم بولي۰

يادونه : که چيرې d او *d دواړه د a او b غ ګ پ وي، نو له پورته پيژند څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی $d \mid d^*$ او $d^* \mid d$ ، نو د $d \geq 0, d^*$ له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله به وښايي ، چې داسي غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ ۰ ۳ :
په خوښه تولګټونو a اوb لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو تولګټونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل(اوبی): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون (په پام کی دې وي چی د (a , b) تعریف په a او b کی سیومتریك دی) له امله اجازه لرو چی $b \neq 0$ ونیسو.
موږ اوس رکورسیف (rekursiv دا په دې مانا چی د مخه غړي ځخه وروستی یعني وریسی غړی لاس ته راوړلکیږي)
تولګټونه$r_{-1}, r_0, r_1, r_2, \ldots\ldots$ او $q_1, q_2 \ldots\ldots\ldots$ په لاندې ډول تعریفوو : وي دې $r_{-1} = a$, $r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \neq 0$ لپاره تولګټونه r_i , q_i داسی تعینوو چی $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $o \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چی له جملی (۱ . ۳) ځخه ممکن کیدی شي . باید یو نه منفی ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چی لرو $r_n \neq 0$ مګر $r_{n+1} = 0$, چی بی له دې بیا یوه نه پای د طبعي ګڼونو لویدونکی یا کمیدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چی ناشونی(ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شیما ته لاربشودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

....

. . . .

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا مساوات د شکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسی) لاس ته راځي:

$$r_n \mid r_{n-1} , r_n \mid r_{n-2} , \dots r_n \mid b , r_n \mid a$$

دا په دې مانا چی r_n د a او b یو غ ګ و دی. t دې د a او b یو بل غ ګ و وي، نو په دې حالت کی که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسی لرو

$$t \mid r_0 , t \mid r_1 , t \mid r_2 ,\dots, t \mid r_{n-1} , t \mid r_n$$

دا په دې مانا چی $|r|$ د a اوb غ ګ و دی.

هر د دې ګڼونو r_i د ($-1 \le i \le n$) سره، په ځانګړي ډول r_n او ددې سره (a , b) یو د a او b لاینی کمبینیشن دی ، په لاندې ډول $au + bv$, چی u او v ټولګڼونه دي.

$r_{-1} = a$ د

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د یوه i لپاره د $1 \le i \le n$ سره، که یو د a او b یو لاینی کمبینشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پیداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د یوې داسی r_i د ځاي په ځاي کولو له لارې هم ، چی په دې ډول د ایندکشن له لاری غوښتنه لاس ته راځي. (پای)

یادونه : د غ ګ پ د ښوونې متود ، چی پورته او په لاندې بیلګه کې راوړل شي د اویکلید الګوریتم"Euklid Algorithmus,, د یوې ګڼیزې دندې یا کارونی (عملیې) شیماتیکي اوبیونې(حل) متود په نامه یادیږي، نو له دې سرهx او y هم له a څخه

$d = ax + by$ اکسپلیخیتExplizit (لاتین: څرګند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي.

بیلګه:

غوښتنه $d = (2124 , 1764)$ ۰ د اویکلید الګوریتم کارونی له لارې لرو:

$$2124 = 1 . 1764 + 360$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دی

د دې لپاره ، چېd له x او y سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) . 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه د a او b لپاره لاندې مهمه پيژند نخښه يا نخښونه لاس ته راځي

يادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکاريږي، چې ګرانو لوستونکو ته يې بی له اوبيونې

وړاندې کړم، دا جملې په خته کې د ګڼونوتيوري دنده ده، چې په ګڼونتيوري کې بيا د ښوونې سره ښوول کيږي٠

جمله٣ ٠ ٩ :

a او b دې ټولګڼونه وي. د a او b يو ګډ پرويشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دی کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a او b ټولګڼونو سره انځور کړاي شو٠ په ځانګړې ډول a او b هلته او هلته ويشپردي دي، که ټولګڼونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + by = 1$$

اوبيونه : د شرايطو ضرورت سم د لاسه له ۳ ېړ ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرايط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، ګڼونتېړي پورې اړه لر او دلته يې نه ښايو.

جمله : ۱۰ . ۳

a اوb دې ټولګڼونه وي۰ د a اوb هر ګډ پرويشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b يو ګډ پرويشونی هلته اوهلته غ ګ پ دئ چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

ليما۳ ۰ ۱۱(جمله ګۍ)(اويکليد): په خوښه ټولګڼونو aاوb اوc لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعريف ۳ ت : $a_1 , a_2 , ... a_n$ دې ټولګڼونه وي $(n \geq 1)$, او d دې يو نه منفي ټولګڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d \mid a_i$ د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره

ب : له $t \mid a_i$ څخه د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره لاس ته راځي $t \mid d$.

نو d د $a_1,...., a_n$ غ ګ و بلل کيږي او د d لپاره هم داسې ليکو $(a_1 , ... , a_n)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a_n , ... , a_1 لپاره د داسی غ ګ و یواځنتوب په ۳ . ۵ کی کتل کیدی شي او د موجودیت لپاره یی لرو :

جمله ۳ . ۱۳ : د خوښي تولګنونو a_n , ... , a_1 لپاره ($n \geq 1$) غ ګ و موجود او d د a_1 , ... , a_n خطي (لاینی) کمبینیشن دی دا په دې مانا چی

$$d = a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

د مناسبو تولګنونو x_n , ... , x_1 لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$(a_1 , ... , a_n) = ((a_1 ,..., a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولګنونوa_n , ..., a_1 د ($n \geq 1$) لپاره. سړی کړی شي چی د $a_1,...,a_n$ غ ګ و پل په پل د اویکلید الګوریتموس له لارې پیدا کړي، چی دلته یی د اوبی یا حل څخه تیریږو.

د اوبی یا حل لپاره یی د n په لور د پوره ایندکشن څخه کار اخستل کیږي چې په ۸ –امه برخه کې څیړل شوی دی.

بیلګې:

۱ - ګنونه 240 او3750 غ ګ پ 30 = 2.3.5 لري

۲ – لرو 408 او748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس غ ګ پ دی: 17 . 2<2> = (408,748) یا دا لاندې که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^2.17 = 68$$

۳ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ 6 = (30.66.114) دی، ځکه، چې
30 = 2.3.5

او 66 = 2.3.11 او 114 = 2.3.19 دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرويشونی نه لري دا موږ پرويشپردی بولو، ځکه، چې دي:

$$65 = 5.13 \quad \wedge \quad 54 = 2.3.3.3$$

خورا کوچنی ګډ زیاتځلی(کوچکترین مضرب مشترک)

موږ په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زیاتځله (لنډ: ک ګ ز) کلیمې په څېړنه پیل کو۰ دا کلمه و غ ګ پ یوه دوه ییزه یا دوه ګونی یا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي ټولیز پیژند ورکوو

تعریف ۳ . ت : $a_1 ,....., a_n$ دې ($n \geq 2$) ټولګڼونه وي، او v دې يو داسی نه منفی ټولګڼ وي، د کوم لپاره چې باور لري:

الف – $a_i \mid v$ د $i = 1 ,, ... , n$ لپاره

ب – له $a_i \mid w$ څخه د $i = 1 , ... , n$ لپاره لاس ته راځي $v \mid w$.

نو v د $a_1 , ... , a_n$ کوچنی ګډ زیاتځله (لنډ : ك ګ ځ) بلل کیږي او داسې يې لیکو:

$$v = [a_1 , ... , a_n]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند (د دوه ګڼونو لپاره)

a او b دې تولګڼونه وي او v دې يو داسې نه کميز يا نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

(۱) $v|a$ او $v|b$

(۲) له $a|w$ او $b|w$ څخه لاس ته راځی $v | w$

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زياتځله (لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کيږي او په لاندې توګه يې ليکو

$$v = [a,b]$$

جمله :

په خوښه تولګڼونو a,b,c,…,n لپاره ک ګ ز شته دئ او دا يواځنی دئ

$$[a,b,c,\ldots,n]$$

يادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونولاس ته راوړو:

دتولګڼونو ($n \geq 3$) $a_1 , \ldots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\ldots,a_n] = [[a_1 ,\ldots,a_{n-1}], a_n]$

او هم $|a_1a_2| = [a_1 , a_2] (a_1 , a_2)$

لاس ته راوړني (داهم په همدې مانا مګر د جملی په څير دی): د په خوښه تولګڼونو a , b , c لپاره باور لري: له $a | c , b | c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab | c$

د ګڼتيوري بنسټيزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژنده :

یو ټولګڼ $n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کیږي، که له ساده پرویشونv بل پرویشونی ونه لري۰

لومړي ګڼونه لاندې غوه خویونه لري.:

لیما (لکه کوچنی جمله): که p یولمړی ګڼ وي او$p \mid a_1 \dots a_n$ د ټولګڼونو $a_1, \dots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه یوه i د $1 \leq i \leq n$ سره.

حل (اوبی): حل یی د ایندوکشن له لارې صورت نیسی، چی ددې لپاره باید ۸ - امه برخه کتل شوي وي.

د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او لیما دې $n-1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بیا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځي چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مخته تیرې جملې لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \dots a_{n-1}$ وي ,نو داسې دی $p \mid a_i$ د یو i لپاره چې $1 \leq i \leq n-1$ وي د ایندکشن د نیونې په بنسټ.

د لومړنیو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتیوري بنسټیزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه (د ګڼونتیوري بنسټیزه جمله):

هر یو پیداینټي (طبیعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تیب پورې، په یواځني او یواځني (یویواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په یواځی یو ډول لیکل کیدی شي او بس۰ کیدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضریبونه همغه دي)) ډول د لومړنیو ګڼونو ځل په څیر لیکل کیدی شي۰

اوبی : ښوونه د n په لور ایندکشن له لارې مخ ته بیایو (برخه ۸ دې ودې کتل شي) د $n = 1$ لپاره باور لري، که، لکه معمول ، 1 د طبعي ګڼونو د تش(خالي) ځل په څیر تعریف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library

شوي وي. مونږ اوس ټول د n پرویشونی $t > 1$ په نظر کي نیسو. کم له کمه یو داسی ګڼ شته لکه n . که p د دې پرویشونو کوچنی پرویشونی وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بیا p یو پرویشونی q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چی q د n پرویشونی وي، نو دا به د p تعریف رد کړي. دا چی $n / p < n$ د ایندونکشن نیوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د ځل په څیر لیکل کیدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2..p_r = p'_1p'_2...p'_s$ د n دوه ډوله د لمړیوګڼونو د ځل په څیرلیکنه . له $p_1 \mid p'_1...p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 \mid p'_i$ د یو i د $1 \leq i \leq s$ سره . د نمرې بدلولو له لارې دې وي $p_1 \mid p'_1$. داچي بیا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2...p_r = p'_2....p'_s$ ، له کومو چی د ایدکشن له نیونی لرو $r - 1 = s - 1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتیب بدلون) هم $p_i = p'_i$ له $2 \leq i \leq r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټیزې جملی د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

جمله : هر طبعی ګڼ n په ټیك یو ډول په لاندې فورم انځوریدلی شي

$n = \prod_p p^{\nu_p}$ لپاره).(ν نیولو شتل کیږي) یواځي د پای ډیرو p (دې $\nu_p = 0$ ، ν_p

چیرته چی p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګیدونکې لړی پرلپسې کې ځغلي.

یادونه: د عملي شمیرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ یې صفر وي تیریدل کیدی شي، لکه : $n = 2^2.7$, $n = 28$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره

لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a , bc) = 1$ ، نو هم $(a , bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی یا حل : نیولی دې وي چې $(a, bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد $(a,b)= (a,c) = 1$ سره تضاد دی.

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو $a \mid b$ هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \leq \beta_p$

لاس ته راوړنې : وي دې a او b له 0 مختلف ګڼونه، $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ همداسی $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورټوټونه(تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}, \quad [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلمونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینښه نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورېدونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)} \;,\; [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړني ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو تولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینښه نیسي:

جمله: ناپاي ډیر لومړني ګڼونه شته۰

حل(اوبې) : موږ جمله ناسیده یا ناسمه ښایو (۸ –امه برخه دې وکتل شي) او نیسو چې پایډیر لمړي ګڼونه $p_1 , p_2 , p_3 , ..., p_r$ موجود دي. ګڼ $N = p_1p_2...p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په یوه لمړي ګڼ p ویشونکی دی. د نیونی له مخې لرو $p = p_i$ د $1 \le i \le r$ سره . د $P|N$ او $p \mid p_1p_2....p_r$ له امله لاس ته راځي $p \mid 1$.کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله باید ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د میلاد څخه پخوا د« اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دغې متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36
37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50
51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64
65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77
78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91
92 93 94 95 96 97 98 99 100

۳ ۰ ۱ ۰ ۳ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

(لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسې ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چې دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راڅیو Ratio nهوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی۰

یادونه : که / ولرو یانې که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چېa په b ویشل کیږي۰ که ولرو≠ نود نابرابروننخښنه ده۰ دا په دې مانا، چې b له 0 سره برابره نه ده۰ د دوه ګڼونود a او b ویش $x = b / a$ د ټولګڼونو په ډیری کې تل هلته شته دی، چې a د b ټولګنیز څو ځله وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره، چې بیا هم ویش$a : b$ (دلته هم b پر a ویشل کیږي) کیدونی شي» سره له دې، چې ویش تل په ټولګنونوکی پیژند نه لري یا تعریف نه دی یا صورت نه نیسي« باید د ټولګنونو ډیری ماتګنونو(کسر) ډیریته پراخه شي، چې د لومړي حٔل لپاره افاده یا وبینه b/a سومبولیک مانا لري، د نوو ګنونو په څیر نیسو او په ټولګنونو یې ور زیاتوو، نو هغهٔ ګنونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګنونه وایو٠ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دی

cb / ca هلته باور لري، چې $c\neq 0$ دټولګڼ او$a |b$ د ماتګڼ په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګنونو ډیری، چې په Q سره ښایو د ټولګنونو ماتګنو b/a چې $a\neq 0$ اوa او b د ټولګنونو له ډیری وي، د ټولګنونوپراخوالی دی او ټول د مخه تیر بنسټیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنسټیز قانون ته داسې پراخیدلی شي

ټ : د ویش(تقسیم) بنسټیز قانون(دوام)

۲ - د دوه راشنل ګنونوa ، $a\neq 0$ او b لپاره یواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون یا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګنونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلی

بیلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غن, راسیږي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دی، یاني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ یا $\frac{1}{2}$

دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګنونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

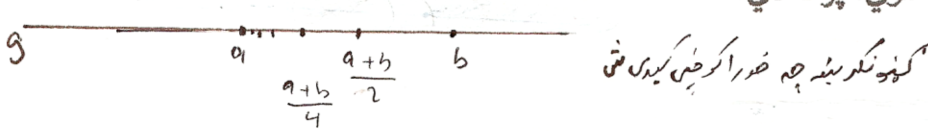
(c) ketabton.com: The Digital Library

۳۰۱۰۴ - رييل ګڼونه(Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په ريښتوني شته يا موجود)

د ريشنلګڼ په بنسټ هغه ورځنی تيوريکی اړتياوي چی د شميرعمليو بی بنديزه (نامحدود) په کار اچولو يا استعمال ته موجود وي حل يا اوبی شوې او همدارنګه عملي اړتياوي چی اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ريشنلګڼ له لارې کيدی شي چی د کرښی اوږدوالی ټيك ورکړ شي يا په همدې مانا : په هرخومره وړوکی ګڼونکرښه انتروال کی هم ناپای زيات ګڼونه، چی په ټکو يا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بيا په يوه کرښه کی هر ټکی د ريشنلګڼ په ذريعه نه شي ښودل کيدی يا په بل عبارت د کرښی هر ټکی د ريشنلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چی د «ايريشنلګڼونو»په نامه ياديږي، کيدی شي د يوه پريوديکي(periodische) (د ګڼونو کړی نه شليږي) ناپای لسيزمات له لارې وښوول شي.

د بيلګي په توګه د مربع د نيمي(قطر) x اندازه چی د مربع يو اړخ ۱ وي نه شي کيدی چي په ريشنلګڼ وښوول شي. د پيتاګوراس د جملی په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات

لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$, پس $x = \sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریبیلګڼ کلیمه یوه ژوره کلیمه ده چې د پوهیدلو لپاره یې «پولی» (لیمس lim) ته اړتیا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

ډیر اینتروالبندیدل چې په همغه یوه ټکی راځرخي مساوي(ورته) ارزښته (Äquivalent لاتین :مساوي ارزښته) لیدل کیږي

ریبیلګنډیری R چې په ریشنلګنډیري د ایریشنلګنډیري ورزیاتول دي چې له ۲ . ۱ . ۱ تر ۳ . ۱ . ۳ برخې پورې ټول بستزقوانین په کی باور لري. د ریبیلګڼ له لارې دکرښی ټول ټکي په بر کی نیول کیدی شي. په دې ډول ریبیلګنونه ټولی د شمیرلو او اندازه کولو اړتیاوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د ریبیلګڼ حل یا اوبی نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتیا پیښیږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

یا دا لاندې په لنډه توګه:

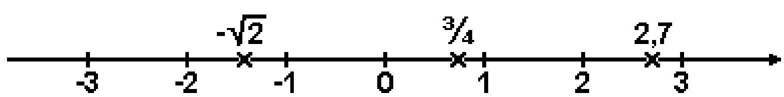
مورږ ګڼونه یا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګڼونه نه دي یانی که مورږ د ۲ ګڼ ریښه(جذر) ونیسو، نو داسی یو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسمیزه توګه پاي ته نه شي رسیدی یانی پریودیکی (تل بیرته راګرځیدونی یا پسی نور هم پراخیدونی) دي۰ داسی ګڼونو ته ایراشنل ګڼونه وایو۰

تل بیرته راګرځیدنیز (periodi(cal تل بیرته راګرځیدوني ,Period د ګڼونو ځنځیر نه شلیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایراشنل – یا نانسبي عددونه یاګڼونه Irational numbers

د راشنل او ایراشنل ګڼونوټولنی ته رییل ګڼونه وایو(دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیری پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) .۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیداینتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي یانې ریل ګڼونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابیلشوی(له نورو -) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د رییل ګڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیرو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په رییلګڼونو کی څلور بنسټیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (وییني) سره شمیرنه (نوکان اینسوول)۰ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا ځلووني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه۰

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندي (مخرج المشترک) جوړول۰ د داسی ماتلاندی(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نومونې: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)

د زیاتون او کمون بنسټیزو قوانینو څخه لاندې لاس ته راځي

$$- (-a) = a \; , \; . \quad a – b = a + (-b),$$

$$(a+ b + c \ldots -c –d- \ldots) + (e+f + \ldots -g-h- \ldots) = a+b+ \ldots -c-d- \ldots +e+f+ \ldots -g-h- \ldots$$

دا دا مانا لري، چې که چیرې د نوکانو دباندې زیاتوننخښنه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ویستلو کې ګڼې خپله مخنخښنه نه بدلوي۰ که د نوکانو د باندی کموننخښنه (منفي نخښنه) وي، نو د ګڼونو له نوکانو ایستلو په حال کی د نوکانو دننه نخښی بدلیږي۰ یانی کموننخښنه زیاتوننخښنه او زیاتوننخښنه کموننخښنه کیږي۰ بیلګه یې لاندې ګورو

$$(a +b+ \ldots -c-d- \ldots)-(e+f+ \ldots -g-h-..)= a+b+ \ldots - c-d- \ldots ..-e-f- \ldots \ldots +g+h+ \ldots$$

په همدې ترتیب کیدی شي نوکان هم ځاي پرځای شي۰

دلته باید مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چې په ګڼکرښه د صفر څخه د یوه ربیلګڼ واټن په ګوته کوي،

د کوم لپاره چی لیکو :

مطلق عدد یا - ګڼ یا بي اړیکو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زیاتیزه او کمیزه نخښنه یا مثبت او منفي نه لیکل کیږي یا یون(واحد) هم ورسره نه وي، دا ټیک او ټیک یو ګڼ ښایج او بس۰

$$|a| = a \;\; ; \;\; a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a| = 0 ; a = 0

| a| = -a ; < 0

یانې که a زیاتیزه یا مثبت وي،نو a پخپله لیکواو که a کمیزه یا منفي وي، نو a- لیکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 لیکو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخښی قوانین باور لري:

(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , (-a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab

که چیرته ډیر نوکبندونه راګرځیدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی

بیلګه:

(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac – ad + bc –bd)(e-f-g)

= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-) bdf+bdg

د ځانګړي حالت په توګه د بینوم پیژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې ټيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيږي :

بیلګه ۱ . ۳ :

$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$.

$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2$.

$16u^2 - 2v^2 = (4u + \sqrt{2}\, v)(4u - \sqrt{2}\, v)$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ویش

په پام دې کې ولرو، چې $b:a$ د $a = 0$ لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ویش ناشونی دی

په ویش کی نوکبندول د زیاتون، کمون او ځل په څیر ساده نه کیږي۰ په ویش کی د زیاتون په ډول لیکل شوی هر توکی په ماتلاندې ویشل کیږي:

بیلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

یا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې لاس ته راوړنې(نتيجې) ته سرې د ګڼو څلوونو يا فاکتورونو يا څېلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسيدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(\,a - 2b + 4c)$$

له دې خايه کيدی شي، چې د بولينوم وېش بيل شي

بيلګه ٣ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \ \text{Rest}\ 5c \ \text{باقي} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \quad \text{لپاره}\ ab \neq 0,$$

د يوه زياتو يا چمعي وېش په يوه چمعه، کيدی شي د بينوم جکلې له لارې صورت ونيسي

بيلګه ٣ . ۶ :

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \quad \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b \quad \text{لپاره}\ a \neq -b.$$

بيلګه ٣ . ٧ :

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b \quad \text{لپاره}\ a \neq -b.$$

بيلګه ٣ . ٨ :

$$\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax \quad \text{لپاره}\ ax \neq by,$$

دلته هم وېش د پاتې يا باقي سره شونی دی.

بيلګه ٣ . ٩ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$:

باقي يا پاتې b^2

له دې لاس ته راځی او په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱ . ۱۰

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b}$$ باقي $a\neq b,$

$(16u^2-v^2):(4u+\sqrt{2}v)=4u-\sqrt{2}v$ Rest v^2 باقي ⇔

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}v}$$

$$=4u-\sqrt{2}v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}v}$$

د $4u\neq-\sqrt{2}v$ لپاره

فورمال ور د دوه پولینومونو ویش دی (برخه ۱۲ دي انډول(پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0}=P_n(x):Q_m(x),$$

که د ماتباندې پولینوم درجه د ماتلاندې پولینوم درجې لوي یا مساوي وي($n\geq m$).

موږ نیسوچې: $a_n\neq0, b_m\neq0$ او $Q_m(x)\neq0$.

د دواړو ویشو« ټوټه ویشو» (پارځیالویش(Partialdivision)) دا دې چې دا

د $P_n(x):Q_n(x)$ ویش په لاندې ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\text{Polynom }1+\frac{\text{Polynom }2}{Q_m(x)},$$

چیرته چې د پولینوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجې څخه کوچنۍ ده.

دې هدف ته په لاندې ډول رسیږو

۱ – سرې یواځې د جګ نظم غړي $a_nx^n:b_mx^m$ ویشي او له دې سره یوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}:Q_m(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+F(x)$$ *

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – سړی (*) په ماتلاندې پولینوم $Q_m(x)$ ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چی د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل پولینوم $P_n(x)$ له درجی n څخه کم له کمه په یوکوچنی وي . د ګڼونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چی $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – تړوته ویش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعمالیږي، د لاندنی نتیجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چیرته چي د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجي کوچنی وي.

د تړوته ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلګه ۳ . ۱۱ . لمړی دې د تړوته ویش ۱ او۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلګه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$P_3(x) \quad : Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2 Q_1(x) = 2x^2(3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 2x^2 \quad + F(x)$ $6x^3 - 4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) - (a_3 / b_1) x^2 Q(x) =$	$9x^2 - 3x + 1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$

بيلگه ۱۲ . ۱۲ : د تېرې ويش بيلگه ۱ . ۱۱د F (x) غلطى ته دوام ورکوو، ترڅو چې د ليکنى شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) = (9x^2-3x+1):(3x-2) = 3x+G(x)$$

$$3x.Q_1(x) \quad = \quad (9x^2-6x)$$

ياباقي $\quad$ = $3x+1$ $\quad$ پاتي

$$G(x) = (3x+1):(3x-2)$$

له دې لاندې نتجه لاس ته راځي :

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2) = 2x^2+3x + G(x)$$

$$G(x) = (3x+1):(ex-2) = 11 + H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x-2$$

پاتى = $\quad$ 3 = ياباقي

$$H(x) = 3 : (3x-2)$$

پس باور لري

$$(6x^3+5x^2 - 3x+1) : (3x-2) = 2x^2 + 3x+1 + 3/(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تول توته ویش کیدی شي په لاندې ډول مخ ته یووړ شي .

(1) (4) (7) (۱۰)

$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$

(2) $\underline{6x^3-4x^2}$

(3) $-9x^2-3x+1$

(5) $\underline{9x^2-6x}$

(6) $3x+1$

(8) $\underline{3x-2}$

(9) 3

دلته (i) د پرلپسې پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

(1) (4) (7) (10)

$(18x^4+15x^3+0x^2-2x+1):(3x^2+x-1) = 6x^2+3x+1+\frac{2}{3x^2+x-1}$

(2) $\underline{18x^4+6x^3-6x^2}$

(3) $9x^3+6x^2-2x+1$

(5) $\underline{9x^3+3x^2-3x}$

(6) $3x^2+x+1$

(8) $\underline{3x^2+x-1}$

(9) 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ٤ ماتشمیرنه (کسرشمیرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د تولګڼونو m,n څخه د ریشنلګڼونو انځورونو لپاره تعریف شوې٠ کیدی شي، چې دا کلمهa/b ته، چې a او b ریبل ګڼونه دي، وغزول شي٠

باید په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بیلګي په توګه:

ویش(a/(b-c تیک هلته مفهوم لري، چې $b \neq c$ وي٠ ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښایي

لکه a : b او یا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم باید b |=0 وي.

په اخر کې باید په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ کیدی شي او هم دواړه٠ دا باید دلته هم په پام کې وي، چې هیڅ یو ماتلاندې ګڼ باید صفر نه وي یانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور یو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کیدی دا موږ د ماتو مات (کسرالکسر) بولو٠

بیلګې:

$$a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 \quad ,$$

$$(a/b) : c = (a/b) / c \quad b|=0, c|= 0$$

$$(a/b): (c/d) = (a/b) / (c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0$$

یا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c}, b\neq 0, c\neq 0, ..., \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$$

په ځو واره ماتګڼ کې باید اصلي ماتکرښه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټیکوالی مخه نیول شوي وي۰ په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}\neq\frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هریو ماتګڼ b|=0, a / b په یوه ګڼ c |= 0 پراخیدی او همداسې لنډیدی شي

یانې ماتلاندې او ماتباندې په یوه ګڼ c ځلیدی یا ویشل کیدی شي او دا کړنلار په اصلي

ګڼ کې تغیر نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c}, b\neq 0, c\neq 0$$

د ماتګڼ لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګڼ ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}, \frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c}; a\neq 0, y\neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یواځنی فکتور یا ځلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګې په توګه لاندې ماتګڼ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(a+c):b+c)$ چې $b \neq - c$ وي نه شي لنډیدی دا $(a+c) : (b+c) = a:b$

باور لري،چې $b \,|= 0, c = 0 \;\lor\; -c \,|= a, a = b$

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اړیین دی، چې ډېر ماتګنونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، څکه چې یواځې هغهٔ مات یو په بل زیاتیدی یا یو له بل کمیدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه : $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$

که چیرې پرڅښ یا برعکس ماتګنونهa / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زیاتوو او یا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې باید راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو څخه دی۰ د بیلګي په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل باید ماتګنونو ګڼلو کې ماتلاندې سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بیلګه باندې ښایو

بیلګه: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي، چې اصلي ماتلاندې)۱۰م۰ل (وتاکل شي

= 2.3.5.6.15.36= 97200 ۰ ل ۰ م ۰ ا

کيدی شي، چی ۱۰م۰ل۰ د لومړنيو ګڼونو ځل په ځير هم وليکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3۰. 3.۰2۰36 = 2

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړګڼ يا لوړ جګګڼ يا لوړ طاقت لومړي ځلووني رانيول کيږي۰ چې ګڼل خورا ساده کوي۰

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=$$

$$\frac{90-60+36-30+12-5}{180}=\frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار څنګه د ماتو په تولیزه افاده استعمالیدی شي لاندې بيلګه يې ښايي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بيلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې يوائ‌ى د لاندې لپاره موخه ور دى $a\neq 0 \wedge b\neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره يانې

$$a.b(ab)(a^2b).(ab^2) = a^5.b^5$$

نه ټاکي، نو له دې امله دى

a = a

b = b

ab = a b

$a^2 . b = a^2 \quad b$

$ab^2 = a \quad b^2$

دا ا۰م۰ل۰ په لاندې توګه دى $= a^2 \quad b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱٦ : د وييني يا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a \neq 0, a \neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

a^2 - 1 = (a-1)(a+1)

a^2-4 = (a-2) (a+2)

(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)

دا پورته لاس ته راوړنه ا۰م۰ل۰- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مات ماتباندې صفر دېپه دې ډول په پورته پيل کې ورکړ شوې افاده يا وينه د صفر پيچلې ليکلو بيلګه ده او بس۰

د ځل او ويش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, b\neq \wedge d\neq \Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}; b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0 \Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بيلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بيلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, \forall\ |a|\neq|b|$$

یادونه: په پورته لیکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم باید راغلي وی. دلته اړیین د ګڼونو شمیرقوانین دي او د ګڼونو پیژندل. د ګڼونو اړیکې د خوندیونې له لارې

$N \subset Z \subset Q \subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمیر قوانین، چې هغه زیاتون ، کمون ، ځل ، ویش دئ او د ویش په بنسټ ماتشمیرنه. دا باید په همغه ساده ډول زده کړای شي.

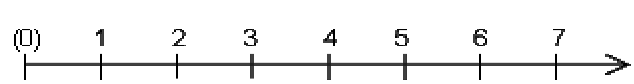
مور هغه د لومړي وار لپاره اړیین د ګڼونو شمیرنقوانین په لاندې توګه رالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهیدنه بسیا کوي.

ګڼونډیرئ (لنډه ټولګه)

پیدایښتي – یا طبیعي ګڼونډیرئ

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پیدایښتي ګڼونو انځورونه

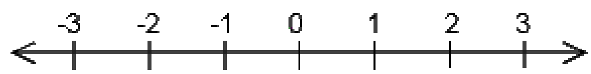


(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګنونو ډيرى

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

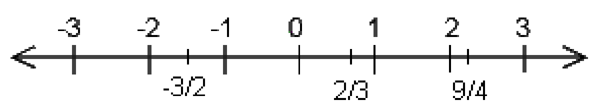
د ټولګنونو ډيرۍ انځورونه په يوه کرښه



د راشنلګڼونو ډيرۍ

$$Q = \{\frac{p}{q} | p, q | Z \wedge q \neq 0\}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسميز يا پريوديکی ګڼ په څير ليکل کيدئ شي

د ماتو سره شميرنه

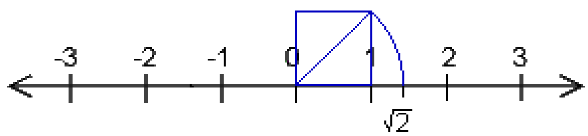
د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زيات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بيا يې هم ترمنځ نور ګڼونه يا ځايونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دی او دې ګڼونو ته مو ايراشنل ګڼونه وويل ۰ لکه چې يو راشنلګڼ نه دئ

راشنل او ايراشنلګڼونه رييل ګڼونه جوړوي

د رييل ګڼونوډيرۍ يا حقيقي اعدادو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رییلګنونو ډیرۍ د ګنونکرښی تولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګنونکرښه کې روښانه ده



په رییلګنونوکې بی له بندیزونو شمیرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې باید صفر نه وي او دا د هر ډول ګنونولپاره باور لري

شمیرډولونه لومړۍ پوړۍ

:Additionزیاتون یا جمعه

زیاتوونی +زیاتونی = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون $a + b = b + a$

د زیاتون اسوخیاتیو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زیاتون ته د یوه بی اغیزه یا ناپیلی توکی شتون$a + 0 = a$

مخامخ – یا په څټ ګن یا برعکس عدد$a + (-a) = 0$

کمون:Subtraktion

د زیاتون په څټ کارونه یا عملیه ، ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شميرډولونه:

دويمه پوړۍ

ضرب يا ځل: فاکتور (ځله ووني ضريب) · فاکتور(ځله ووني) ځل
د زياتون تکرار، بيلګه. $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$

د ضرب يا ځل کموتايتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب يا ځل اسوڅياتيو قانون$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

دستريبوتيو قانون $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

و ضرب ته د يوه ناپيلي توکي شتون(بي اغيزه توکی يې که وبولو هم بده به نه وي)

$a \cdot 1 = a$

په څټ ارزښت يا برعکس قيمت$a \cdot (1/a) = 1$

يو ضرب ټيک هلته صفر دئ، چي د صرب يو ضريب صفر وي $a \cdot 0 = 0$

ويش:
ويشونی : پرويشونی = ويش (لوستل يې له ښي وکيڼ لورته)

ويش د ضرب يا ځل په څټ کارونه ده) $a : b = c$

$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = b:a$

د بېلګې په توګه z.B.: $4 \cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ويش پيژند نه لري يا تعريف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ تمرینونه

۱ – د اعدادو یا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ یا سټ کې د عدد a او عدد b لپاره د شمیرلو څلور قاعدې یا لارې باور لري؟

یادونه: دلته دې ترې کمونی یا مفروق منه او وېشونش یا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونی یا مفروق او پروېشونی یا مقسوم علیه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او یو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو یا ګڼونو او څخه تفرسق، ضر ب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتیجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ یادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ییز سیستم کې لاندې ګڼونه یا اعداد انځور کړئ!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – لاندې ربښتوني یا راشنل اعداد د کوټیو کې اچوني یا کوټی وني له لارې په نږدې ۵ ځایونږ تیک پیدا کړئ.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زیاتیزو او ځلیزو (د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړئ

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$
b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$
d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بینوم فرولونه

۳ . ۱ – د بینوم فرمولونه وکاروئ یا استعمال کړئ او د شوننتیا سره سم یې ساده کړئ

a) $(-a + 3b)^2$
b) $(-1 + a)(a + 1)$
c) $(-a - b)(a - b)$
d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16\,(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4\,(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې ويينې يا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکميلونې له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24\,b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضريبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې ويينې يا افادې په ضريبونو توټه کړئ او تر شوونتيا پورې يې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b\,(a + 1)$
d) $8\,(7a - 5b) - 5c\,(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$
c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان (n=1,2,3,...) له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
c) $(1 - 2n)^3$
d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ا رزښتونه له شمیره وباسئ، کوم چې $a,b,...$ یې نه شي نیولی یا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$
c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$
c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشمیرنه یا کسرشمیرنه

۶ . ۱ – لاندې کسرونه صورت او م خرج یعني د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنیو ضریبونو یا ځلوونو له لارې لنډ کړی

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$
b) $\frac{2\,730}{5\,005}$
c) $\frac{20\,520}{2\,280}$
d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا کوچنی ګډ زاتځلی (ذ الاضعافالاقل) پیدا کړی

په لاندې کې und د او په معنا دی

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نومیزو یا برابرمخرج کسرونو شمیرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7}-\frac{1-6}{7}+2\frac{1}{7}-7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5}-\frac{4-5}{5}-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26}+\frac{5-3}{13}+3\frac{33}{39}-0\cdot\frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a}-\frac{a-1}{a}-\frac{1-a}{a}$
c) $\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{1-2ab}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنوميزو كسرونو جمعه او تفريق، په مخرج يا ماتلاندې كې ضريبونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نوميزو ماتونو(كسرونو) جمعه او تفريق(زياتون او كمون)، جمعه مخرج يا ماتلاندې كې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره يو په بل پسې وركړشوي ارزښت ځاى په ځاى كړئاو دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(كسرونه) سره يوځاى كړئ! بيا په تولیزه توگه د وركړ شوو كسرونو لاس ته راوړنې وركړئ او هغه ارزښتونه لرې كړي، چې د a د اخستلو يا نيولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$	د a=1,2,3 سره
b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$	د a=3,4,5 سره
c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$	د a=2,3,4 سره
d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$	د a=2,3,4 سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$

c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو يا كسرونو ضربونه(يا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېينو يا افادو برعكس يا په څټ ارزښتونه پيدا كړئ.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.7.4. a) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}}$ c) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}}$

b) $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1}{\dfrac{a^2+b}{b}-\dfrac{a+b^2}{a}}$ d) $\dfrac{\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{a+1}{a}}{\dfrac{a-1}{a}-\dfrac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}$ c) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)-\dfrac{1}{ab}}{\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{b}}$ d) $\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}+\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}+\dfrac{1}{2b}}+\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}-\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}-\dfrac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\dfrac{1}{1-ab}}{1-\dfrac{1}{1-ab}}$ c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a-b}}}$ d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه یا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ (که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$ c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$ d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.8.2. a) $\frac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\frac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\frac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\frac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\frac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\frac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\frac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\frac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0,4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\frac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\frac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\frac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\frac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\frac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\frac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\frac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\frac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\frac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\frac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (-1) سره شمیرنه

الف- ورکړشوی دې وي/ a(b-c) /c . a=-1ځای په ځای کړئ او داسې لاس ترې راغلي کسر یا مات لپاره مختلف لیکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج (ماتباندې او ماتلاندې) کې (-1) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر یا مات $(b^2 - a^2)$ /(-a-b) د (-1)سره پراخ کړئ او ساده یې کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج یا ماتلاندې کې (-1) له نوکانو راباسئ او دا وبینه یا افاده ساده کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ۰ توان (پوتنځ) او ریښه (جذر) (Potenz , Wurzel Root)

په دې برخه کې د توان او جذر یا ریښې قوانین ترڅیړنې لاندې نیسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې یا استعمال چټکتیا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو ۰ دا مشوره کیږي، چې ریښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - یا جګعدد یې نسبي یا راشنل وي۰ د دې فورمال ټیک کره د ګڼلو قوانینو په څنګ کې د باوري کیدو لپاره باید په نیونو(فرضیو) هم ژور فکر وشي۰

د ریښې پیژند د خلاف یا پر څټ عملیو مخه باید نیول شوي وي، چې د هغې له مخې رادیکاند (ریښه ویستونی یعنی هغه ګڼ، چې ریښه یې وېستلکیږي یا نیول کیږي،د ریښې نخښې لاندې ګڼ او هم د ریښی ارزښت نامنفي اعداد (ناکمیز ګڼونه) وي۰ د توان زړه پورې ریل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دی یا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نیونه یا فرضیه شوي وي۰

٤ ۰ ۱ توان (پوتنځPotenz) په ټولګڼیز یا تام عدد په جګ یل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ٤ ٠ ١:

د يوه په خوښه ريل ګڼ توان لاندې مورږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پوهيږو ٠ د دې لپاره ليکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ n = 1,2,3,…

اکسپوننت(جګګڼ، لنډ: جګ) اوb د پوتنځ يا توان ارزښت بلل کيږي٠

د بيلګي په توګه

$$a = a\ ,\ a^2 = a\ .\ a\ ,\quad a^3 = a.a.a$$

(4,1) د n = 0 لپاره کره ټاکل کيږي $a^\circ = 1$ د $a \mid= 0$ سره

د پيژند يا تعريف پر بنسټ (او د څه بنديزونو په څلورديوالى کې، چې لاندې شوي) ښوول کيدی شي، چې د خوښی يا زړه پورې رييلګڼونو $a,b \in R$ او $m,n \in N^*$ نامنفى ټولګڼونو اکسپوننت يا جګګڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;...(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;.................(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};..(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;............(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};..(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته د توان اړيکې د ټولګڼيز مثبت جګڼ يا اکسپوننت لپاره باور لري، کيدئ شي، چې ټولګڼونو ته وغزول شي، که چيرې پيژند ورکړو يا تعريف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n = 1, 2, 3, ..., ..a \neq 0, ...(4,7)$$

دا پورته د توان قوانين د ټولګڼيز جګ(اکسپوننت) لپاره بې بنديزونو يوائې د نه وركيدونکو رييل بنسټونو ياني د $a \mid= 0$ او $0 \mid= b$ لپاره باور ي دي . په (4,5) کې بيا بنديز $n \geq m$ اړيين نه دی.

د توان قوانين کيدئ شي په بڼه بدلونکو افادو يا وييينو وکارول- يا استعمال شي.

بيلګه 4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2} = (4abx^{-2}y)^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

بيلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3} = \frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

بيلګه 4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}} =$$

$$= \frac{a^5(3-a) + a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}} =$$

$$= \frac{3a^5 - a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - 2a^5 - a^3}{a^{m+1}} = \frac{a^3-1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوتنخ زياتون او کمون کې بايد پام وي، چې يوازې د برابر پوتنخ ګڼونه يو له بل سره زياتيدی او يو له بل کميدی شي٠

بيلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بيلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بيا ګوته نيسو، چې د بنسټ - او پوتنخ مخنخښې کې دې توپير وشي٠ پوتنخ له مثبت - يا زياتونمخنخښي سره تل مثبت يا زياتيز پوتنخ ارزښت لري، په دې ترڅ کې، چې پوتنخ د منفي - يا کميز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زياتيز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - يا کمون ارزښت لري٠

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ..., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ٠ ٢ – ريښه او توان له ريشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پيژند ٤ ٠ ٢

د يوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ريښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره ليکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, ... (4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0 .... (4,9)$$

دلته a راديکاند Radikand ، يا ګڼ، چې ريښه (جذر) يې نيولکيږي(موږ دا ريښه نيووني يا ريښه ويستونی بولو) او n دريښې جګ(اکسپوننت) اوb د ريښې ارزښت يا ريښه ارزښت بلل کيږي۰

بايد پردې ټينګار وشي، چې ريښه يواځې د نامنفی راديکاند يا ريښه ويستوني (ريښه نيوني) $a \geq 0$ راوستل کيږي يا نيول کيږي او پخپله په لاندې توګه يو نامنفي - يا ناکميز ارزښت لري يانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کوني لپاره لاندې يادونې شوي دي:

۱ – د جوړه $n = 2,4,6,...$ لپاره د $a<0$ سره ريښه b په ريبلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي يا ناکميز يانې زياتيز ګڼ دی۰

۲ – د جوړه او مثبت - يا زياتيز برابرون $b^n = a$

په ختِه په ريښتوني دوه ريبل اوبيوني ياحلونه لري د بيلګي په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یانې n = 2 او a = 4 اوبیونې

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي٠ د دې لپاره، چې د رادیکاند د شمیرلو کارونې یواځنۍ سرته ورسولی شو، باید د یوې اوبیونې لپاره پریکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . n= 1 , 3 , 5 او a≥ 0 لپاره

$$b^n = a$$

تل یواځني زیاتیز(مثبت) اوبی یا حل لري یانې b≥ 0

٤ – د ناجوړه n او کیمز یا منفي a لپاره $b^n = a$

تل یواځنې یو منفی اوبی یا حل لري٠ یانې b < 0 د بیلګي په توګه دا $b^3= -8$ یواځې

اوبی b = -2 لري.

په هر صورت باید د جوړه...n=2,4,6 ګڼونو لپاره a≥ 0,b≥ 0 وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به یا ریښه شته نه وي او یا به یواځنی اوبی نه لري، یانې څو اوبی به شته وي

د ناجوړه یا طاقو,...n = 1,3,5 لپاره کیدی شي، چې له دواړو غوښتنو تیر شو٠ دلته به یواځې تاوان یا زیان دا وي، چې د ټولو ممکن حالتونو لپاره به بیل بیل د ریښې د قوانینو غوره کولو ته اړ کیږو٠ له بلې خوا به ریښې د قوانینو ترتیبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ایښول شوي بندیزونه nقوانینو لپاره ستونځمن وي٠ له دې امله د ناجوړه ریښو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننت غوره کوو او د يوائځني يو اوبی لپاره 2- د 8- = b^3 او نه $-2=\sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2=-\sqrt[3]{8}$ ليکو۰ په دې اړوند او د يادو شوو نيونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2}=a,\ldots\ldots\ldots\ldots(4,10)$$

څلوری ريښه يا مربع ريښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقيقي اعدادو يا - ګڼونو a لپاره تعريف شوي۰ د نامثبت يا نازياتيز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بيا د (4,10) اوبی منفي يا متيز وي، کوم، چې نيونه $b \geq 0$ نفې کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د (10 , 4) ښول شويو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي يا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2, \sqrt{4}=\sqrt{(-2)^2}=-2$$

ياني د 2- = 2 سره۰

د (10 , 4) ټيک داسې ليکل کيدی شي:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\{a, a\geq 0,\ldots\ldots\ldots\ldots(4,11)$$

$$=\{-a \quad , a \leq 0 \qquad (4,11)$$

د ريښې يا جذر له پيژند (9 , 4) , (8 , 4) سره سم کيدی شي، چې لاندې باوري د ريښې قوانين وليکل شي د $n = 1,2,3\ldots$ او $a , b \geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ldots\ldots\ldots\ldots(4,12)$$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}, b>0\ldots\ldots(4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a}=\sqrt[n.m]{a^{n+m}}\ldots\ldots\ldots\ldots(4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}\ldots\ldots\ldots\ldots(4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته د (4,15),(414),(413,),(4.12) ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهېدنه نه رامخ ته کوي ۰ دلته پیژندل کیږي، چې د رېښې قوانین د پوتنځقوانینو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي۰ په رښتیا چې دا د پوتنځقوانینو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ریشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعریف شي یا یې لاندې پیژند ورکړ شي۰

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m ....(4,16)$$

د… $m = 1 , 2 , 3\ 4 …$, $n = 1,2,3,…$, $a \geq 0$ لپاره

د بیلګې په توګه (۱٦ ، ٤) په لاندې ډول لیکل کیږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړیکې (4,16) کیدی شي منفي $m = -1,-2,-3,…$ ته هم پراخه شي، چیرته، چې (4,17) په ټینګه - یا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0....................(4,17)$$

بې له بندیزونو د خوښې جګو n او m لپاره د پوتنځقوانین (2 ,4) تر (4,6) باور لري، خو یواځې هلته، چې نه ورکیدونو بنسټونو یانې $a>0, b>0$ نیونه شوې وي۰

د رېښې شمیرلو لپاره باید اساساً د(4,16) له مخې ریشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتیا لرو، چې د پوتنځ او رېښې سره شمیرلو د قوانینو استعمال نیوني تل و ازمایلی شو ۰ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفیتوب کمونوالی یا نامنفیوالی یا مثبتتوب(مثبتوالی یا زیاتونوالی) پریږدو، چې لاندې ناسم پاي کیدډول وښایو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{-a} = (-a)^{1/2} = (-a)^{2/4} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{a^2} = a^{2/4} = a^{1/2} = \sqrt{a}$$

برابرون يوازې د دې ساده حالت $a = 0$ لپاره شته دی يا باور لري، د $|a|=0$ يا $a \neq 0$ لپاره a-او يا a منفي دي دا په دې مانا، چې a يا-a پيژند نه لري يا تعريف نه دی۰

د توان قوانين د توان سره شميرلو، چې راشنل جگ لري، په لاندې بيلگو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بيلگو کې دا تراوسه د شمير بنسټيز قوانين ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو گرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کيدی شي۰ شميرنه يې لږ وخت نيسي، که غواړی پخپله يې يو ځل وشميری۰

بيلگه ٤ ۰ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{6}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2,2361$$

بيلگه ٤ ۰ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}} : \frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}} = \{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\} : \{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\} =$$

$$= a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})} = a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}} = \frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بيلگه ٤ ۰ ٨

$$8.\sqrt[3]{343} - 4.\sqrt[3]{125} + 5\sqrt[3]{8} - 5\sqrt[3]{729}$$

$$= 8.\sqrt[3]{7^3} - 4\sqrt[3]{5^3} + 5.\sqrt[3]{2^3} - 5.\sqrt[3]{3^6} = 8.7 - 4.5 + 5.2 - 5.9 = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ٤ ۰ ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بیلگه ٤ ۰ ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شمیرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې رینې له منځه یوسو (د ماتلاندې ریشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې یوه رینه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور یا ځلوونی په څیررامنځ ته شي، نو دا د وظیفې لپاره یوازې اړیین ده چې (m < n (m , n >0 او $m,n \in Z$ په پام کې راوړو

کارونه یا عملیه په لاندې ډول اجرا کیږي(N*|= 0 , a > 0)

$$Z\Big/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},.........(4,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ٤ . ١١

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورې- يا مربع ريښې زياتون يا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بينوم فرمول استعمال سره له $a>0$ او $b>0$،چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},...(4,19)$$

بيلګه ٤ . ١٢

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بيلګه ٤ . ١٣

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۴ . ۳ توان(پوتېنځ) د حقيقي – يا رييل جګ (اکسپوننت) سره

دلته دا په ګوته کوو يا دې دا ويل شوي وي، چې د توان ټول قوانين له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقيقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بنديزه ټيک د مثبت بنسټ لپاره. يعنې a,b>0 ، برسيره پردې دې بايد توان $a^{\alpha}; a>0$ د ناريښتوني يا ايراسنل عدد α لپاره تعريف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که α یو ایراشنل – یا ریښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انتروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\alpha = \{a_{n;} a'_n\}$. دلته $a_{n;} a'_n$ هوښیار یا راشنل اعداد دي.
بیا نو

$$\beta = \{a^{a_n} ; a^{a'_n}\} \qquad (4,20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غږي يې (۴،۲) لاندې تعریف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپیر، چې

$$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$$
$$2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$$
$$2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$$
$$2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415}$$
$$2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143}$$
$$\vdots$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $$\sqrt[10000]{2^{1412<2^{\sqrt{2}}<\sqrt[10000]{2^{14143}}}}$$

٤ ، ٣ تولګه : د a>0, b>0 رییل او $m, n \in N (n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n \neq 0)$ ییلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته موضوع تر دې ځایه بسیا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړیین وو، هغه به بیا په ګډه ورزیاتوو

۴ . ۵ . تمرینونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفریق یا زیاتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څیر یې ولیکئ

a) $(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a)\cdot(a-b)\cdot(a-b)$ d) $-(a^0 b)\cdot(a^0 b)\cdot(a^0 b)\cdot(a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b-6ab^2-15a^2b+6ab^2-7a^2b$

b) $(3a+2b)x^4-x^4(2b-3a)+x^4(3a+2b)$

c) $4(a-b)^2+2(b-a)^2-3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3-3(1-a)^3-15(a-1)^3+4(1-a)^3+3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1}\cdot 6x^{n+7}\cdot 9b^{x+1}}{3x^n\cdot 2b^{x+1}\cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1}\cdot b^{x+3}\cdot a^{3x-1}\cdot b^{x+3}}{a^{x-2}\cdot b^{3-x}\cdot a^x\cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1}\cdot a^{n+1}\cdot a^n}{a^0\cdot a^n\cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x}\cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x}\cdot b^{2n-x}}\cdot\frac{x^{3n+2}\cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3}\cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}}:\frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3\cdot x^{n+1}}{36c^3\cdot y^2\cdot z^{n-3}}:\frac{70a^3b^2\cdot x^{n+2}}{54c^2y^4\cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}}:\frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3\cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3\cdot 30x^n(a+1)^2}:\frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زياتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاريتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشميرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګڼ يا جګعدد سره، د کميزو يا منفي اکسپوننتونو سره شميرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\frac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\frac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\frac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\frac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\frac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\frac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\frac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\dfrac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\dfrac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \dfrac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\dfrac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرلیطو لاندې کیدی شي لاندې عددونه د یوه مربع – یا څلورۍ رېښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ - د رېښو جمعه او تفریق(زیاتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$
b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$
c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$
d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\dfrac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

b) $\dfrac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\dfrac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

d) $\dfrac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\dfrac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د رېښو یا جذرونو ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}:\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$ c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او رېښې رېښه وېستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$ d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$ c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}}:\frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – لاندې ماتونه يا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج رېښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ ۰ لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترڅېرنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوې، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوې وي څېړو ۰

۵ ۰ ۱ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم تر څېړنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څېړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وي ۰د لوګاریتم $c = \log_b a$ پېژند لپاره د یوه زیاتیز ـ یا مثبت عدد a یوه زیاتیز ـ یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه لپاره c

$$b^{c} = a \,;\, a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c=\log_b a; a>0; b>0; b\neq 1, ...(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x=16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16=2^4$

ب له $3^x=\frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2}=1/3^2=1/9=\frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: د $2=\log_x 36$ سره x²=36 یو ارزښت لري، نو لرو x=6

ب : د $-6=\log_x \frac{1}{36}$ سره $x^{-6}=\frac{1}{64}=\frac{1}{2^6}=2^{-6}$ یو ارزښت لري،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x = 2$ نو لرو

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : $x = \log_5 125$ د $5^x = 125 = 5^3$ سره، یوارزښت لري،

$x = 3$ نو

ب: $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ د $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو $x = 4$

۳ ۰ ۱ ٤ الف $5 = \log_3 x$ د $3^5 = x$ سره یو ارزښت لري، نو $x=243$

ب : $-5 = \log_2 x$ د $2^{-5} = x$ سره یو ارزښت لري، نو لرو $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2 = \log_x(-6)$ تعریف نه دی یا پیژند نه لري۰

ب : $x = \log_{-5} 125$ پیژند نه لري یا تعریف نه دی

پ: $\log_1 x$ پیژند یا تعریف نه دی

له (5,1) او(5,2) څخه لاس ته راځي

$$a = b^{\log a}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,3)$$

$$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,4)$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکيږي

$$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ...(5,5)$$

د lga لوګاریم ته لسیز لوګاریتم وايي او lna ته پيداينتي یا طبيعي لوګاریتم وايي(e وروسته ځيړو) زیات وخت د لشمیز لوګاریتم لپره داسې هم ليکو:

$$c = \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog ځو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ باید وکارول شي۰

۵ ۰ ۲ د لوګاریتم قوانین

د لوګاریتم د پيژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کیدی شي د پوتنځ د قوانینو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاریتم قوانین رابیل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاریتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زیاتیز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ...(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, ...(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1, 2, ..., ...(5,10$$

د پوتنځ قوانینو له مخې د دې فرمولونو راوستل یو د وړاندیز وړ د لوګاریتم ژورې ځيرنې لپاره تمیرن ښايي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b(x.y) = \log_b x + \log_b y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) څخه لرو

$$c_1 = \log\ x, c_2 = \log_b y, c = \log_b(x+y), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1} = x, b^{c_2} = y, b^c = x.y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c = x.y = b^{c_1}.b^{c_2} = b, \Rightarrow c = c_1 + c_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې څخه د لوګاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه ښټ۰

بیلګه ۵ ۰ ۲

$$\log\frac{2\sqrt{a+b}\,a^3b^2}{\sqrt[3]{c}\,(a+c)^2}$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log(a+b) + 3\log a + 2\log b - \frac{1}{3}\log c - 2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ ۰ ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس بايد وښايو، چې تر کومو شرايطو لاندې دا اړيکې باور لري۰

په بيلګه ۵ ۰ ۲ کې په کينې اړخ کې لوګاريتم ځاي لري، چې د ټولوa,b,c تعريف دی او لاندې برابرون پوره کوي يا ډکوي:

وي دې a+b>0 (د دې لپاره ، چې ريښه تعريف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بيا لوګاريتم اوبی يا حل نه لري۰

وي دې c > 0 (د دې لپاره چې ريښه تعريف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاريتم تعريف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ (د دې لپاره، لوګاريتم تعريف وي)
د کينې اړخ لوګاريتم په ځانګړي ډول د a = 2 . b = -1 , c = 1 لپاره تعريف دی۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون يا څيره بدلون ريښتونی کيدی نه شي، ځکه چېLog بې ځايه دی ۰ د دې لپاره، چې د څيرې بدلون ريښتونوالی ممکن شي، بايد د $b\neq 0$ پر ځاي په ټينګه يا کره b>0 وغوښتل شي ۰

په بيلګه۵ ۰ ۳ کې کينه خوا يواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

a+b>0, a-b>0

نو بيا a²-b² = (a+b)(a-b)> 0 او په دې بيلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاريتمونه هم تعريف دي۰ دا اړيکې د ټولو a ، bلپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي۰ دا کيدی شي a > b , a > - b له امله هم و|b|< a ته راغونډ شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته دي هم ګوته نیولې وي، چې لوګاریتم په یوه بنسټ b یوه بل لوګاریتم یوه په خوښه بل بنسټd ته د شمیراوړون د شمیرنې اړول کیدی شي $(b>0, b\neq 1, d>0, d\neq 1, a>0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاریتم نیول و بنسټd ته لرو:

$$\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), ...(5,15)$$

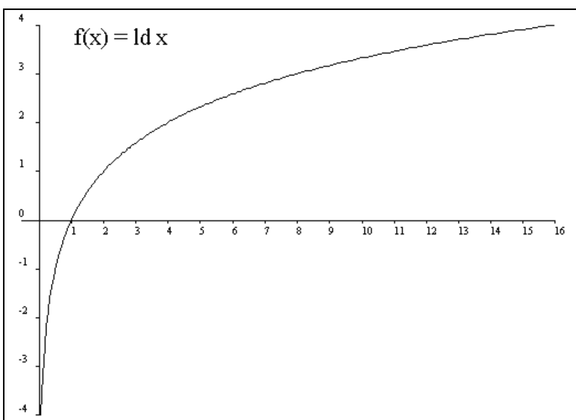
د

لسیز لوګاریتم اړول په پیدایینتي یا طبیعي لوګاریتم او په ځټ لپاره لیکو b=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); …………………(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$$\lg a = (\lg e)(\ln a), ...(5,16)$$
$$\ln a(\ln 10)(\lg a) = 2,30429 \lg a, ...(5,17)$$



د لوګاریتم فنکشن یا بلواک او دیاګرام یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د يوه ځل لوګاريتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاريتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ريښي لوګاريتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاريتم يو په بل بدليدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما يا لسميزمات نخښۀ وروسته بينارځايونه ó او لسميزسيستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

	binär	dezimal
2^{-1}	0,1	0,5
2^{-2}	0,01	0,25
2^{-3}	0,001	0,125
2^{-4}	0,0001	0,062.5
2^{-5}	0,0000.1	0,031.25
2^{-6}	0,0000.01	0,015.625
2^{-7}	0,0000.001	0,007.812.5
2^{-8}	0,0000.0001	0,003.906.25
2^{-9}	0,0000.0000.1	0,001.953.125

۵ ۰ ۳ ټولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېړ بلواک دی

$x = \log_b n \iff b^x = n$

د$a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log\frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log\sqrt[n]{x}\frac{1}{n}\log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429\ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259\lg a$$

۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0{,}04$ d) $10^x = 0{,}0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم
قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a+n\lg(a+b)+n\lg(a-b)$

c) $\lg a-\frac{1}{2}\lg b+\frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

3.1. a) $x=\lg 5\cdot\lg 20+(\lg 2)^2$

b) $x=2\cdot 10^{2\lg 2}$

c) $x=3\cdot 10^{-2\lg 3}$

d) $x=\left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x=\sqrt{10^{2+\lg 9}}$

b) $x=\sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

c) $x=\sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

d) $x=\sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x=\ln\frac{7{,}63}{\sqrt{e^3}}$

b) $x=\ln\frac{0{,}23}{2e^2}$

c) $x=\left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

d) $x=\left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ګونومتري (کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چې د کونجکچ چټکتیاته (ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په څیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چې د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ٠ زه به کوښښ وکړم چې ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په څیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

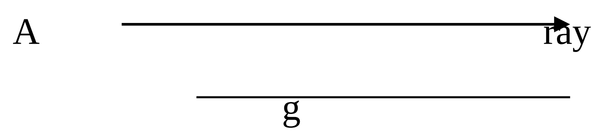
٦ ٠ ١ بنسټیزه هندسه

٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی(خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا ټیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره له دې هم هڅه کيږي چې ټکی او کرښه ليدوړ وګرځول شي لکه څنګه چې په ۴ . ۱ - امه برڅه کی پيښ شوي. دلته کرښي په g ښوول شوي او غشی يی ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پريښول کيږي يعني نه انځوريږي، که دا مو و ناريښتياو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کيدی شي د دوه کرښو غوڅځاي په څير ونيوله شي) څيرې په غور وګورئ

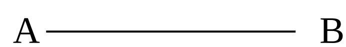


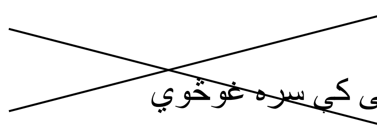
وړانګه

کرښه

(stright line

بند کرښه يا ټوټه کرښه Line segment





دوه کرښې په ټکی کې سره غوڅوي

د بيلګي په توګه لاندې ويناوې باور يا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې يوه کرښه ټاکل کيږي(پورته څيره وګورئ)، چې دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي يا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرګي او په يوه هواره کی پرتی کرښی يو بل ټيك په يوه ټکي کی سره غوڅوي (پورته څيرو کې کتل کيږي)

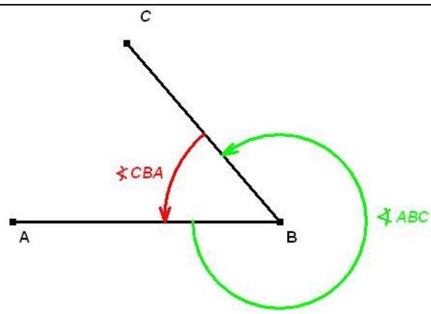
يوه وړانګه s_1 له يوې لور په يوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او يوه پايکرښه له دوه ټکو A او B بنده يا راګير کرښه ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

٦ . ۱ . ۲ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه s_1 د خپل پیلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي s_2 (څيره ۴ . ۲الف) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دنننی هواره، s_1 او s_2 پښنی او په همدې ډول د S کونج α (الفا) ککره بلل کيږي.

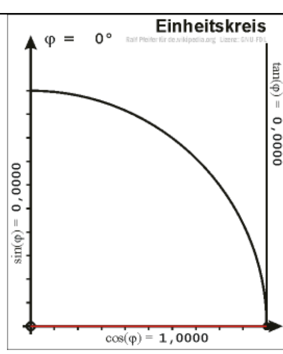


که څرخون د ساعت نخښي په څټ یا مخامخ وې نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتيزه او همداسی کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یی منفي- یا کميز کونج بلل کيږي.

په مخامخ ه کي سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

کيدی شي چی یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a°\qquad(6.1)$$



په داسی حال کی چی ولاړکونج، کوم چی یو په بل ولاړې کرښي $g_1 \wedge g_2$ (او ته دې پام وي) یی جوړوي، له 90° سره مساوي وښایو(لاندي څيره ، که نورېڅيرې و نه کښل شوې) . کيدی شي چی کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چی کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b\qquad(6.2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته یونګردۍ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کيدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردۍ لینده په وړانګه(شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بې نومه ګڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګڼلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردۍ) r = 1 (کې انځوروړ دی، چیرته چې دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي (څیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د 360° کونج د یوونګردۍ چاپیرۍ) محیط(په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass (درجکچ (او)ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, ...(4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦۰ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که ځیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي۰.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه ښه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقې او ثانیې نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاري، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي۰

بیلګه ٦. ۱ :

کونج a = 47°12'36" دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دڅیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقې او ثانیې دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12'=720"

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس په ټولیزه توګه $720'+36'' = 756''$ له دې لاس ته راځی

$1'=(1/3600)°$ (<=)

له دې وروسته په همدې توګه $756.(1/3600)°=0,21°$

له دې لاس ته راځي : $a=47°12'36''=47,21°$

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د(٦ . ٣) پسی باور لري $b=0.017453.47,21=0,826$

دلته ځیرې راځي، خو د دې ځیرو په ځاي به موږ په پورته ځیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ ځه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي۰

بیلګه ٦ . ٢ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګڼیز سیستم(ځاي ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخی لرو

$a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701°$ د $0,701°$ اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

$$0,701° = 0,701.60' = 42,06', \qquad 0,06' = 0,06.60=3,6''$$

پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6''$

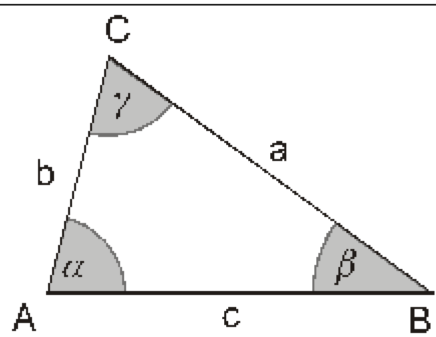
(c) ketabton.com: The Digital Library

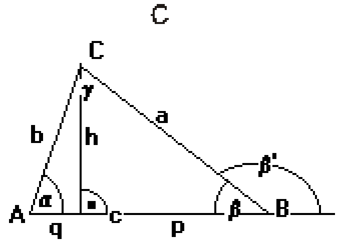
دا پورته داسی لوستل کیږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقیقي او ۶ ، ۳ ثانیي

۶ . ۱ . ۳ دریګوډی

یادونه: موږ دلته بیا د نومونو(نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیږو. هغه هواره چی له کرښو راګیر وي دلته له درې کرښو یا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه یا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي یا۰۰۰ ګوټي او یا ۰۰۰ګوډي بولو. څموږ ژبه او الماني تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبي نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته یو کونج چي له دباندې ورته کتل کیږي او د یوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاریږي. موږ په ورځنی یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی ګوډ دی. که یو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وییلی. که څوك په یوه ګوټه کی ناست وي نو وایي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا ګوډ نه وایي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .

په ټولیزه توګه په یوه سطحه یا هواره کی له پرتو کرښو g1 , g2 , g2 څخه یو مثلث یا دریګوډی جوړیږي، چی ګوډونه یی C . B . A ، اړخونه یی c. b. a او کونجونه یی α, β, γ دي (د مثلث دننه کونجونه یا زا ویې او دباندې ګوډونه دي، چې موږ یط په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ څیرې دې وکتل شي





(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کيږي

- په دريګوډي کې د کونجونو زياتون 180° درجې دی یا π دی
- يو دباندنی کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زياتون سره مساوي ده، له دې امله د يوه دريګوډي د دباندنيو کوجونو زياتون 360° يا π 2 دی٠
- د يوه دريګوډي د اړخونو نيمي په يوه ټکي کې يو بل سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دريګوډي » دروندټکی يا دثقل مرکز « دی. اړخنيمي يو بل په تناسب د۱ : ۲ پرې کوي يا په پښتو:

د اړخونو ځاننيونه يې۱ :۲ ده) په ځيره کې وګورئ) د يوه دريګوډي منځولاړې

يو بل په يوه داسې ټکي کې سره غوځوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپير ګردي) هغه ګردئ يا دايره چې دريګوډی په خپل دننه کې نيسي يا بهتره، د دريګوډي خونديګردی(منځټکی دئ)٠

د يوه دريګوډی کونجنيمي يو بل په يوه ټکي کې سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دننه ګردی) ګردئ چې د دريګوډي

په دننه کې ده يا ګردئ يا دايره کې خوندي دريګوډی (منځټکی دئ) لاندې کې بې ځيره شته) د يوه دريګوډي جګې يا د ارتفاع کرښې په يوه ټکې کې سره غوځوي.) ځيرې ټولې لاندې کتل کيږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې ځيرې اړه لري، چې تکرار راځي، خو پروا نه لري٠

د جګيو غوځټکی Orthocenter **Höhenschnittpunkt** (*H*),

(c) ketabton.com: The Digital Library

(*U*) **<u>Umkreismittelpunkt</u>** circumcenter ·د دباندنی- یا په راتاو گردی منځټکی

<u>Seitensymmetralen</u>), seid symety ·د اړخسیومتریو غوښتکی

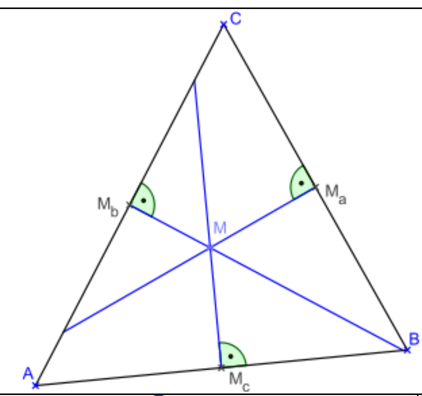
(*I*) **<u>Inkreismittelpunkt</u>** den inscribed circle, incircle ·د دننه گردی منځټکی

<u>Winkelsymmetralen</u> r · د کونجسیومتري

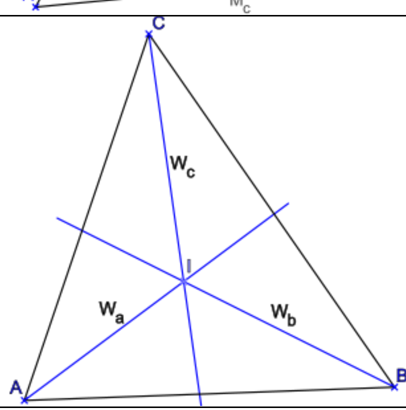
r (*S*) **<u>Schwerpunkt</u>** centroid · دروندټکی

<u>Seitenhalbierenden</u>) median ·اړخنیمی

مخامخ خیره کې مثلث یاد دریګوډي په منځ عمود یا - ولاړې کرښې ښايي

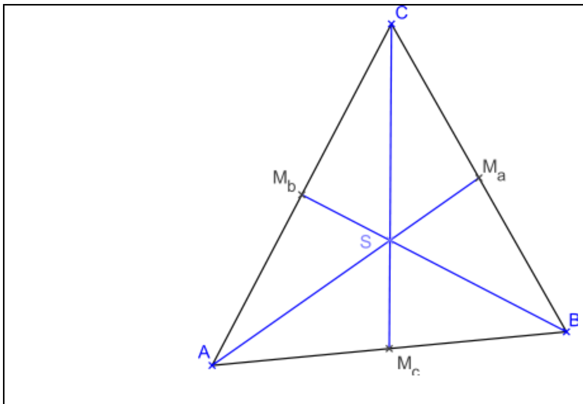


دامخامخ مثلث هغه کرښې ښايي، چې کونج نیموي او موږ يې کونجنیمی (ناصف الزاویه) بولو (په پورته خیره په نیم اړخ ولاړې کرښې دي)

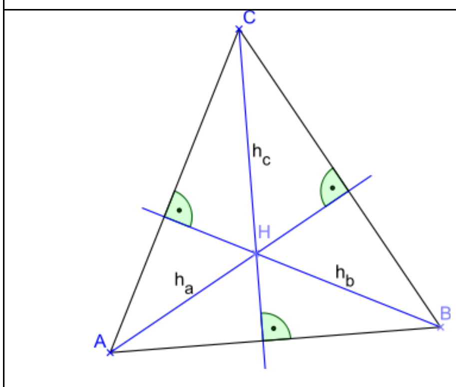


(c) ketabton.com: The Digital Library

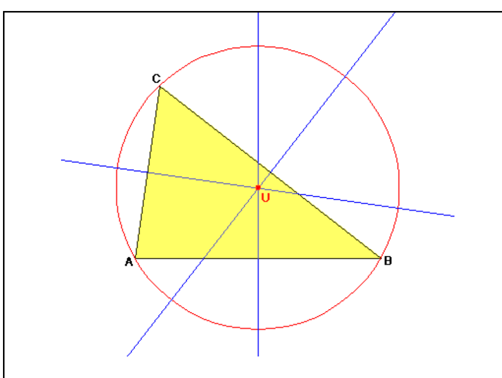
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له
کونج څخه اړخ نیموي٠ موږ يي
اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو٠

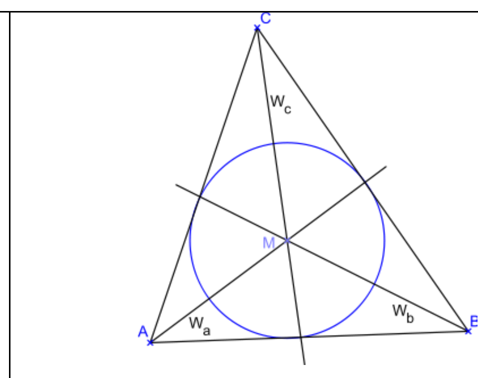


لاندې ځېره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له
کونج په اړخ ولاړې دي٠ دا د اړخ جګوالی په
ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللي دي٠



په پورته ځیره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی يي د خوندې ګردی یا دننه ګردی
منځټکی هم دی



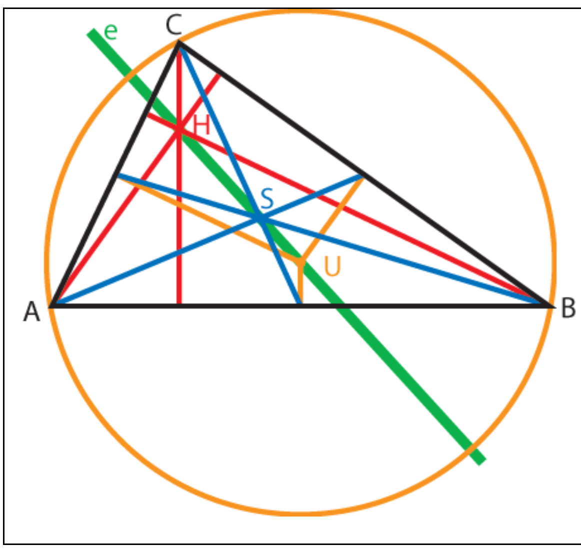


(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کینه خیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوخټکی یې د په راتاو ګردی یا چاپېرګردی منځټکی دی۰

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه ټکی کې سره غوځوي۰

که د یوې درېګوډی د منځولاړو په غوخټکي یوه ګردی داسې ووهل شي، چې د ګردی کره درېګوډئ له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا ګردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیریږي۰ که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځټکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردی په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځټکی له درېګوډی دباندې پروت دی۰



که درېګوډی ABC وي ، S دروندټکی، U د چاپیریالګردی منځپکی ، او H د جګیو غوځپکی وي، نو کرښه په لاندې ځانښونه یا تناسب پراته دي :دا په لاندې خیره کې کتل کیږي ۰

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

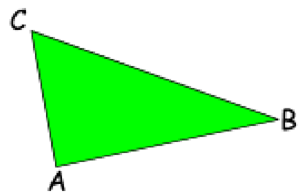
۶ . ۱ . ۴ برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهت Congruence and Similarity

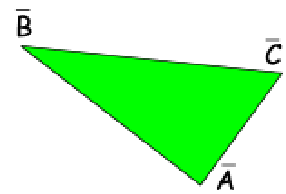
دوه دریګوډي ABC او A'B'C' یو بل سره کونګروا ینځ یا برابر پېووني دي یاني براربارزښته دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ABC ≡ A'B'C'

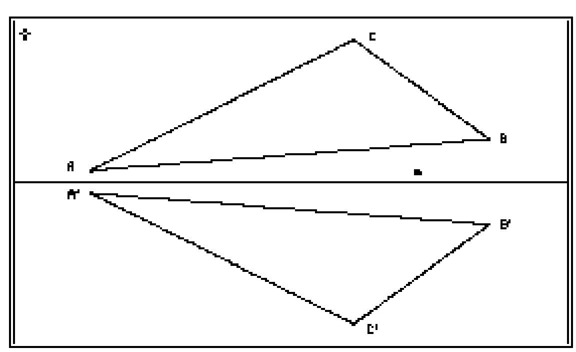
(4.4) که وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي(وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هندارونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې ځیر)





که دریګوډي سره کونګروانیڅ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي ټوټو (اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

.په ښت یی هم باور لري S اړخ او W کونج په ګوته کوي



(c) ketabton.com: The Digital Library

جملې: دريکوډي ټيك هلته کونګروانيڅ دي چی يو بل سره مساوي شي په

۱ - درې اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - يوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کې ,WSW

د دې جملو په ښتې هم باور لري، دا په دې مانا چی که دريګوډي په کونګروانيڅ جملو کی ورکړشوو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونګروانيڅ دي. د کونګروانيڅ جملو په بنسټ کيدی شي په ځانګړي توکه دريګوډيجوړښت سرته ورسول شي، کوم چی د کونګروانيڅ جملو کارونی په ښير ليدل کيدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چی په همغو يا اړوند درې کونجونو کی يو بل سره برابر وي او د همغو يا اړوند اړخونو تر منځ يی تناسب يا ځاننيونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګروانيڅ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دريګوډي ټيك هلته يو بل ته ورته دي که يو دبل سره برابر وي، په :

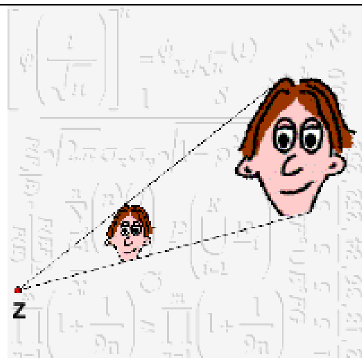
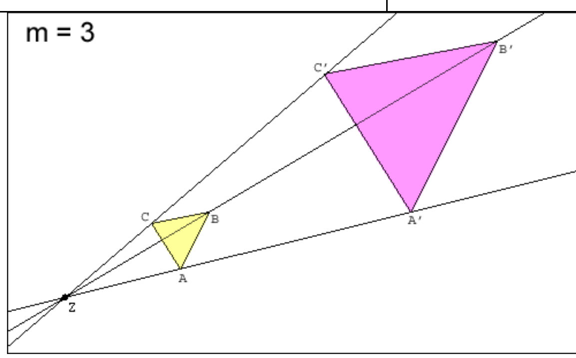
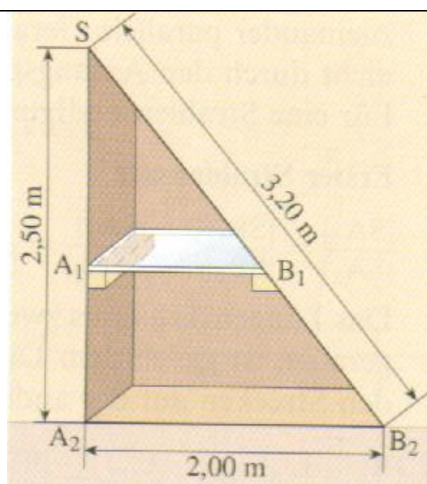
۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نيونی يا تناسب کی

۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب يا ځاننيونه کی

۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مخامخ ځیري ورته دي ، که د دي دوه کرښو پای سره په یوه کرښه وتړی او د یوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښي سره غبګه کرښه وباسی، نو دوه ورته درېګوډي لاس ته راځي	
په لاندي ځیره کي کښل شوي دریګوډي ورته دي، دا په دې مانا چي باور لري: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$	
د ورته جملو سره خپلواني جملی د وړانګو جملی دي:	

په دي پورته ځیره کي درېګوډي یو بل ته ورته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

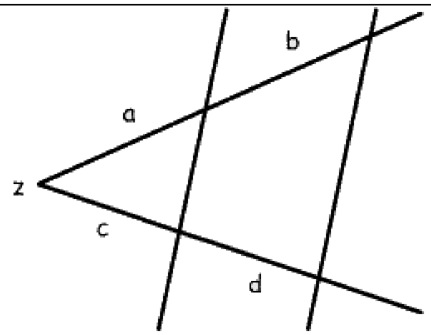
<table>
<tr>
<td>

د ورانګي لومړۍ جمله:

دوه له یوه ټکی وتلي ورانګي ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې یې لاندې اړیکی سره لري٠

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)}$$

</td>
<td>



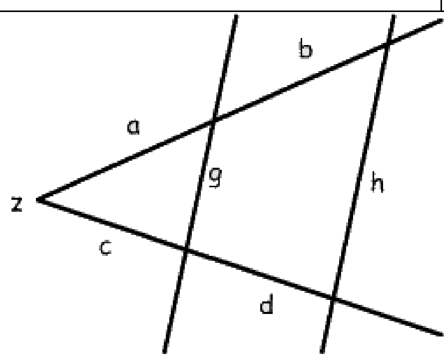
</td>
</tr>
<tr>
<td>

د ورانګي دویمه جمله:

که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکی لري، دا ته والي له جملو ده٠ ټکی چې څنګهدي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو

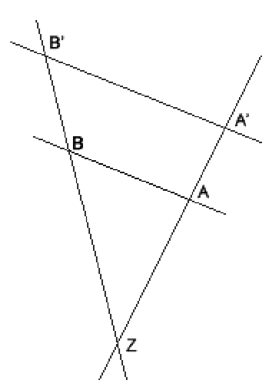
$$\frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)} \qquad \frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)}$$

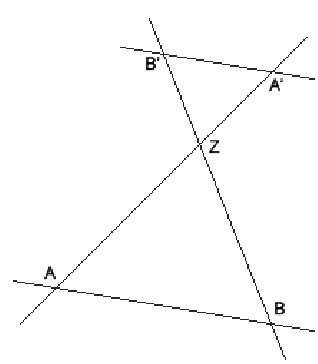
</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

یا دالاندې، چې هرڅه یې روښانه دي





(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

(دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوې څیره دې ګران لوستونکي وکاږي)

که درې په یوه ټکي کې پریکیدونکی کرښي g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی(کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګې په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څیرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

. 1 OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2

دا په دې ماناچې په وړانګو پرتي ورته برخې په مساوي تناسب یا ځاننیوی سره پرتی دي:

. 2 A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2

دا په دې مانا چې: په وړانګو پرتي ورته برخې په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چې په وړانګه پرتی دي.

۳ - A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3

دا په دې مانا چې: په غبرګو پرتی کرښي په همغه برخوکی یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څیر رامنځ ته شي یا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي   )

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c او همداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوډی جوړ شي. لاندې حالتونه تر ځیرني لاندې نیسو

1 - $a > c$

موږ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونج الف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردبلینده کاږو د a

په کچه چې د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوځوي)

ځیره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

2 - $a < c$

دلته درې امکاناته شته دی(د دې درې امکاناتو ځیره وکاږی)

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه هغوټکو کي پرې کوي،
په کومو کی چې اوبی یواځنی نه دی۰

۲ . ۲ : ګردبلینده د α ازاده پښه لمسوي۰

۲ . ۳ : ګردبلینده د α اندازه پښه نه غوځوي .

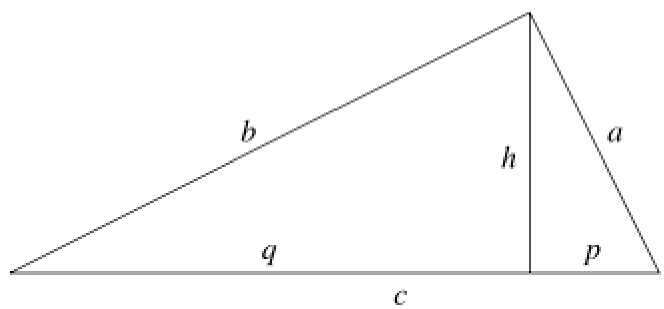
۳) $a = c$

ګردبلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کي پرې
کوي. دې لپاره چې حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$
نیونه په دریم کونګرواینځ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ ۰ ۵ .ولاړکونجیز دریګوډی مثلث قایم الزاویه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلفو دریګوډیو څخه موږ په لاندې برخه کی ولاړ کونجیز دریګوډی ترڅیرنی لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ هوپوتینوزې) Hypotinuse(بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت (Katheten)بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریګوډي ته روځنی یا ورسره بلدې یا مروجی په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له څیرې ۴ . ۱۳ څخه واخلئ



په ولاړکونجیز دریګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړیکی باور لري چی دلته یی بی له اوبی)ښوونی(راوړو:

یادونه : په ولاړګوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښي ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نومونو یانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پیتاګوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتینوزې مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکاتيتو(د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع)) جمله:

په ولاړکونجيز دريګوډي کی د کاتيت مربع هواريزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هيپوتينوزې او ددې کاتيت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

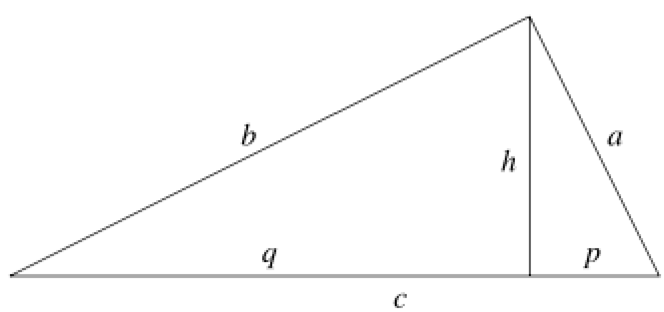
$$a^2 = p.c \, , \, b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجيز دريګوډي کی د هيپوتيزې په جګي مربع هواريزمساوي ده د هيپوتينوزې (لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q \, . \, p \qquad (6.\,7)$$

یا په لاندې کې لنډ بيا ورکړ شوي



لنډ: (ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پيتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اویکلید د کاتیتونو(پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

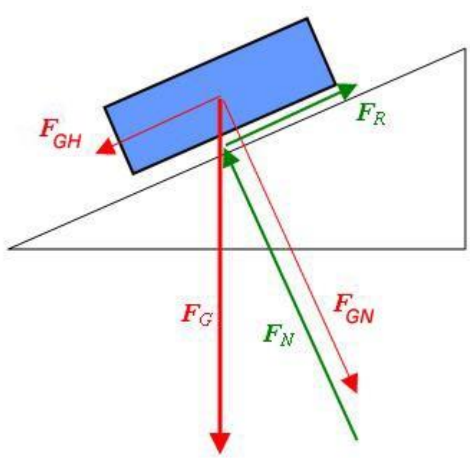
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اویکلید جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بیلګه ۴ . ۴ : (ځیره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکج فکر وکړي۰ دا یوه فزیکي دنده هم ده(ځېره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د یوه بدن د وزن G تجزیه ځرګندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزيك له مخی هغه ټکی دئ چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي) KSP =)چی په یوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په یوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نیغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه FN)تجزیه کیږي. د ښوولو ده چی، دريګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دريګوډي سره ورته دی

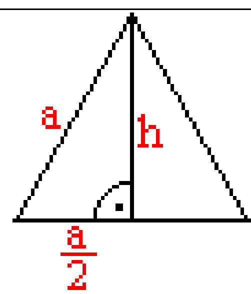
	یادونه: په لیکنه کې زور یا توان د لاندې ځېرې سره داسې بدلو:شین تنیا د مستطیل شکل G دی $F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$ ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کيڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج α ، په ګوډ B کونج β

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې G||AC ځغلي، نو FH او G يو کونج α جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه دريګوډي په دې برسيره په ولاړکونج کی يو بل ته ورته دي٠

يادونه : داسې بيلګې، چې ځيره يې نه شم ايستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې ځيرې پخپله وباسي، دا دې يو تمرين وي٠ زما زړه نه شي، چې له ليکلو يې تير شم٠

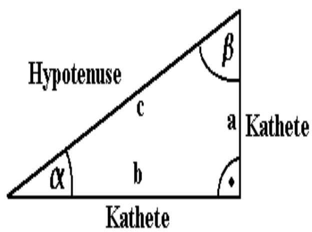
بيلګه ۴ . ۵ : په يوه مساوي اړخيز دريګوډي کی دې (لاندې ځيره) جګی و شميرل شي .د ٦ . ۴ (له مخی لرو(جګی په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نيمی هم دی، دا په دې درېګوډي کې وکارې)

	$h^2 = a^2 - (a/2)^2$ $h^2 = a^2 - a^2/4$ $h^2 = (3/4)a^2$ $h = (\sqrt{3}/2)a$

٦ . ٢ په ولاړکونجيز دريګوډي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چی يوه ولاړکونجيز دريګوډي کي جوړيږي(لاندې ځيره). که د کونج α مخامخ اړخ يا -کاتيت a gegkathete د مخامخ اړخ په ځير وښايو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجيز دريګوډي کی لاندې اړخځانئيوني منځ ته راځي يا جوړيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$$
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$$

د وړانګو جملو له امله دا اړیکي یا تناسب یوائي د کونج   په واك کی دی. که په پام کی ونیول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړیکی لیکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې لیدل کیږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پیداکولو لپاره دوه ګنجدولونه پوره دي یا بسیا کوي   .ورپسي یا ددې په تعقیب پیژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha};.....................(6,10)$$

برسیره پردې د پیتاګوراس د جملی په پام کی نیولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;.......................(6,11)$$
$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha};...........(6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳.۰٦ په یوونګردۍ کی د کونج فنکشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یواځي د لیدیدونکو (Konkrete
اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یواځي
یا په ځانګړې توګه د $0<\alpha<\frac{\pi}{2}(0<\alpha<90°)$ لپاره تعریف دي. که د α
خپلواك واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چی
په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی) څیرې
۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو
د یوون ګردي باندې مخ نخښی په واك کی کرښو ته لاربښودوي .د لته ټولی کرښی) د
لته به له کرښو ځموږ مطلب پای کرښی وي(، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون
یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی
کرښي او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون
مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ (د
په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha=\overline{QP}, \cos\alpha=\overline{OP}, \tan\alpha=\overline{AD}, \cot\alpha=\overline{BE}; \qquad (6,13)$$

د کونج α لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د
کواوردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی(لاندې څیره له کیڼ و ښی لورته کښته دا په
فرمولونوکې کارول شي توري ساده ایښوول کیږي۰ په څیرو کې شنې کرښې د ساین دي
او سرې کرښې کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه
کیږي، چي د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو)، دا
تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریګوډي کی تر
څیرنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج α په لینده اندازه کی د
ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چی په زیات څرخون له 2 څخه
لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو) ۱۳ . ۴ (څخه لاس ته راځي، چی ساین-او
کوساین فنکشنونه، پریود :360°) 2 (periode) تل تکراریدونکی ، بیرته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځیدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پریود(180°) لري .

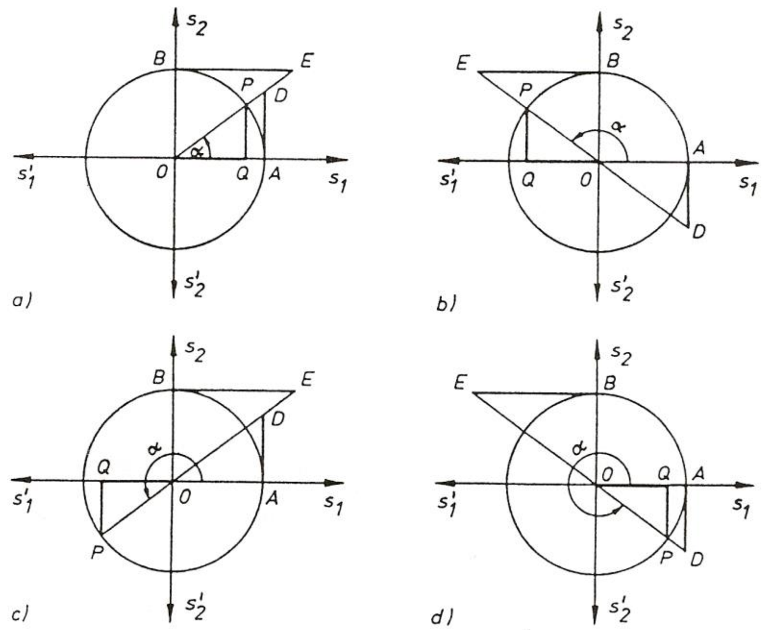


Bild 4.17

پس لرو

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha; ....(6.14)$$
پـه
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

ټولیزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha; ....(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو ټولګټونو ....3 , 2, 1,0,1-,2-,3-.. = k لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخښه

	لومړۍ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$	دریمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$	څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
cotx	+	-	+	-

برسیره پر دې لاندې اړیکی باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \quad , \quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos.\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \quad , \quad \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha \qquad (4.16)$$

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \; ,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \quad , \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پیداکوو. دا چی α په درجی اندازه ورکړ شوي ده، نو اومشالتریا سویچ بدون) دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library

جبشميري اړونه ده، پۀ غوښتل شوي فنکشن کی) په « DEG » سموو او بيا لاندې ورکوني کوو.
په همدې ډول تکمې وهو

جدول يا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل يا اوبی دی

1. $\sin\alpha = a$, 2. $\cos\alpha = a$,
3. $\tan\alpha = a$, 4. $\cot\alpha = a$

دلته تمرينونه ۱ او ۲يواځې هلته موخه ور يا هدفمند ي، چې باور ولري$-1 \le a \le 1$

او په تمرين ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نيولی شي.
يو «بنستيزوبی يا بنستيز حل»α_0 د هر تمرين د جبشميرني سره په لاندې ډول يا همداسی تکموترتيب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چېα_0 په درجه اندازه يا لينده اندازه کوو، نو په ورته ډول د سويچبدلون په "DEG" يا "RAD" باندې راولو)

1. [a] [F] [sin]   2. [a] [F] [cos]
3 [a] [F] [tan]   4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په ځتې فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بياد α_0 هر بنستيزحل په درجه يا لينده کچ څرګنديږي.
د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنستيزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33,367013° = -0,58236$,
2. $\alpha_0 = 123,36701° = 2,1531606$,

(c) ketabton.com: The Digital Library

3. $\alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$
4. $\alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

1. $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$
2. $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

او په ورته توګه،، فرعي یا څنګیز حل یا اوبی،،

1. $\beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$
2. $\beta_0 = -\alpha_0$

لاس ته راشي

د لیدیدونکي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چې :

1. $\beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$
2. $\beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$

د α ټول حلونه د (۱۵ . ۴) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

1. und 2. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$

$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$

3. und 4. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$

بیلګه ۴ . ۹: لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودې شمیرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۱۰ : په بیلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لويي دي، که په مايل هواره پروت بدن وزن 700 N وي (دلته N د Newton لپاره دی چی وزن پرې اندازه کيږي) او مائلی هوارې مايلکونج $\beta = 28°$ وی؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \qquad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ \text{N} \cdot \sin 28° = 700\ \text{N} \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ \text{N}.$$

$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \qquad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ \text{N} \cdot \cos 28° = 700\ \text{N} \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ \text{N}.$$

۴. ٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په ټوليز یا عمومي دريګوډي کی شميرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جملهد ځیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

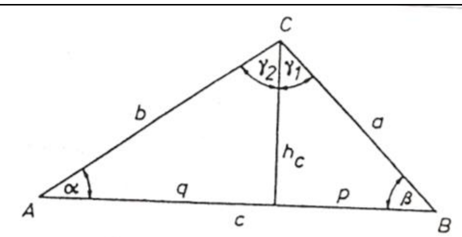


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \qquad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کيدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (4.17)$$

ځیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجيز درېګوډی کښل کيږي(پورته او لاندې ځیرې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ښوول کيدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ كونج - SSW يو اړخ او داړه پرې پراته كونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساين جمله

د ځیرې ۴ . ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$h_c^2 = b^2 - q^2$$
$$h_c^2 = a^2 - p^2$$
$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q,$$
$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b \cos \alpha,$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$ لرو او همداسې:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \qquad (4.18)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

د کوساين جله استعماليدی شي، که په يوه درېګوډي يا مثلث کې

- درې اړخونه يا ضلعې يا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند كونج يا زاويه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره كونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسيره له دوي جوړكونج هم معلوم دی .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره ځیره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوې، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسی په

ABCدریګوډي کی، $F1 = c, F2 = a$ اوss - $'ss = 180° - ss$ معلوم دي، α

او $R = b$ لتوونکی یا غوښتونکی لویي دي؟

د کوساین جملی (۱۸ . ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosss$$

همداسی یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2 \cos(180° - ss')$$

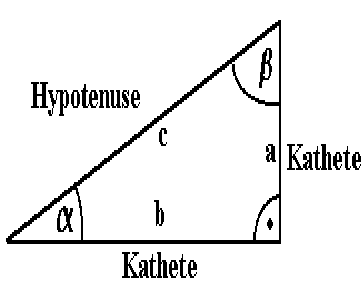
او د ساین له جملی (۱۷ .۶) لاس ته راځي

له کومو چی α تاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو٠

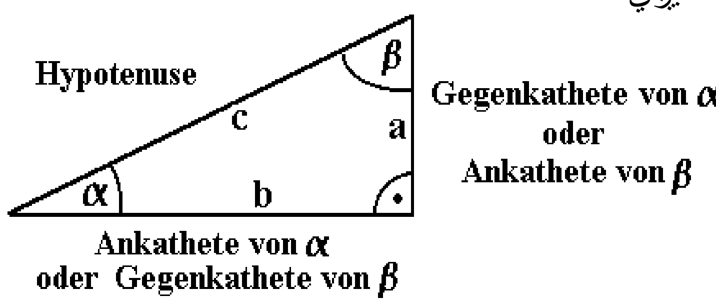
۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو٠

مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې دریګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډی ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څنډ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي۰



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي۰ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي۰ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیری ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ۰

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

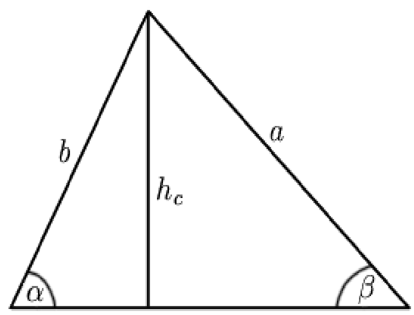
$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : (دا خیره دې ٦ ، ۱۸ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)

$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$ په h_c پسې یې اوبی کوو $h_c = b \cdot \sin\alpha$ د برابراینوني له لارې لاس ته راځي $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$ که په $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ وویشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ راځي	

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیداینښتي توګه ځګی h_a او یا h_b لاس ته راکوي

د کاروني بیلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$a = 5,4\,\text{cm}$ ، $b = 3,8\,\text{cm}$ ، $\alpha = 73°$

دا نورې لویې دې په درېګوډي کی پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\mathrm{cm} \cdot \sin 73^\circ}{5{,}4\,\mathrm{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونیوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، یاني

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي٠

او نو ګاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\mathrm{cm} \cdot \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\mathrm{cm}}$$

دکوساین جمله

په تریګونومتري کې کوساینجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړیکې ښایي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ۰ ۹) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپیتاګوراس جملې له مخې لرو:

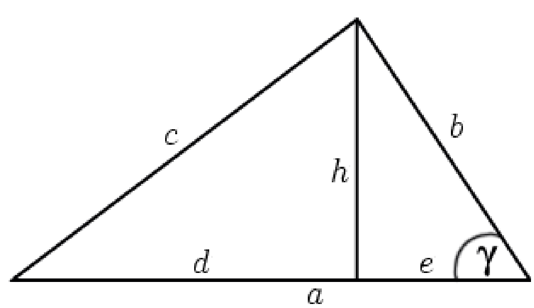
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) یا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیداکولی شو

ښوونه :



د درېګوډي په کيڼ لور د پیتاګوراس قضیه استعمالوو، چې د c^2 لپاره یوه شمیرافاده یا – وییینه پیداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلوری یا مربع باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي اړخ لپاره د پيتاګواراس قضيي استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

(د بينوم فرمول)

د پيتاګوراس جملې له مخې د کيڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پيداشوي شميرويينې يا- افادې سره زياتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b} \left(\frac{ankathet}{Hypotenuse}\right)$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بيلګه:

يو درېګوډیABC ، چې اړخونه يې ځرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9 \text{ cm}$ ،

$b = 2{,}8 \text{ cm}$

$c = 3{,}5 \text{ cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\mathrm{cm})^2 + (3{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}8\,\mathrm{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{opp}}$$

Common formularکډ وډ فرمولونه

Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کښمتوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Sum and difference identitiesزیاتون او کمون کتمتوالی

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

Double-angle identities دوه برابره کونج کې ګتمتوالي

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

Half-angle identities د نیم کونج ګتمتوالی

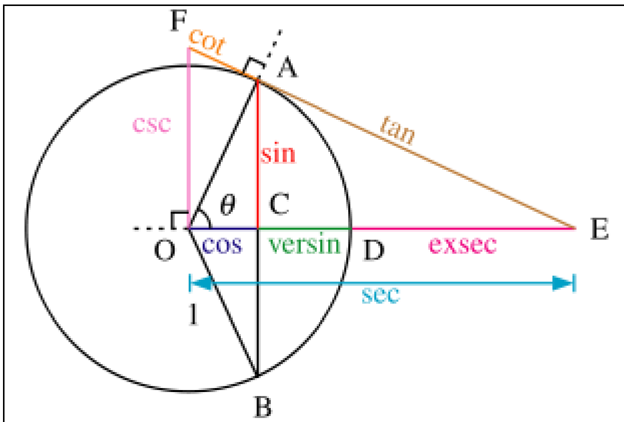
$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

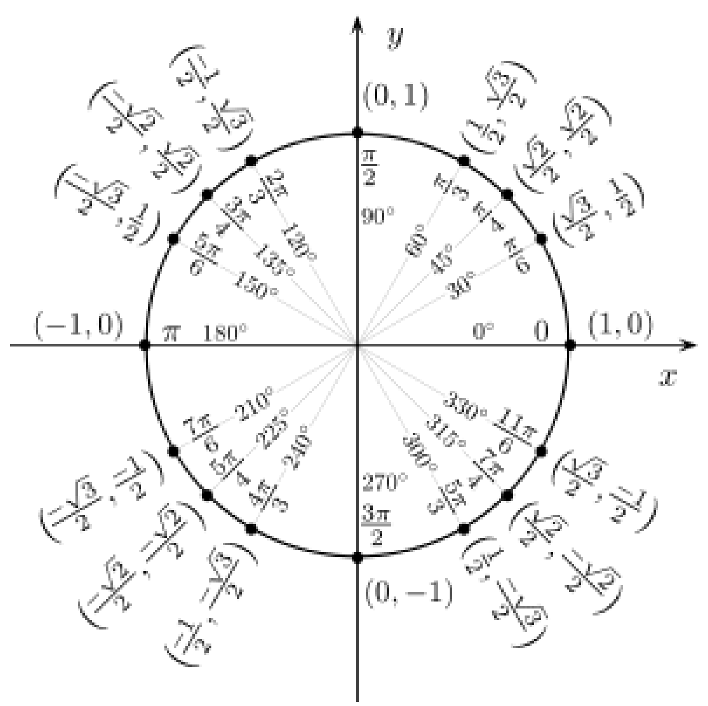
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د تریګونومتریکي کتمتوالي لیست List of trigonometric identities



نوره ژوره څیرنه دلته نه کړو، دې ته ګوته نیسو، چې په لاندې څیره کې تریګونومتریکي فنکشنونه روښانه دي



د یوه کونج θ ټول تریګونومتریکي فنکشنونه په O باندې د یوې یونګردی ترم له لارې ورکول کیدی شي (یونګردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښنه شوي)

مخامخ:

یوونګردی(یووالي یا واحد ګردی)

The <u>unit circle</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

Notationلیکنبڼه

دا لاندې لیکنبڼه یا - ډول د ټولو تریګونومتریکي – یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین ، تانجنت ، کوتانجنت ، سیکانت، کوسیکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي$\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

Definitionsپیژند:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راګرځیدنه ، سیومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

په یوون(یووالي-) ګردی یا دایره کې ساده لیدل کیږي:

Periodicity تل بیرته راګرځیدنه

ساین ، کوساین ، سیکانت، کوسیکانت تل بیرته راګرځیدنه 2π ده(پوره ګردی) (تکرار دی)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبیرته راګرځیدنه π لري(نیمګردی یا نیمدایره) :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

سیومتري Symmetry

د تریگونومتریکي فنکشنونو لپاره سیومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x, x \to \pi/2 - x$ ،یا $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x), & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\
\cos(-x) &= \cos(x), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\
\tan(-x) &= -\tan(x), & \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cot(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x) \\
\cot(-x) &= -\cot(x), & \cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \tan(x), & \cot(\pi - x) &= -\cot(x) \\
\sec(-x) &= \sec(x), & \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \csc(x), & \sec(\pi - x) &= -\sec(x) \\
\csc(-x) &= -\csc(x), & \csc\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sec(x), & \csc(\pi - x) &= \csc(x)
\end{aligned}$$

بدلون : د $\pi/2$ او π بدلون دې

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\
\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\
\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x) \\
\cot\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x), & \cot(x + \pi) &= \cot(x) \\
\sec\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\csc(x), & \sec(x + \pi) &= -\sec(x) \\
\csc\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sec(x), & \csc(x + \pi) &= -\csc(x)
\end{aligned}$$

د پیتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پیتاګوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زیاتوننخښي په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کي

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کیڼ لور " + "   وي، نو په ښي لور"-" راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کیږدو   د پیتاګوراس یا موفریي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \;\; = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \;\; = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

د نیمکونج فرمول Half-angle formular

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ريښي لاندې ماتباندې او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پيتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1-\cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نيمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$

نو لرو: $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

د ځل و زیاتون ته کټمتوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

د زیاتون- و- ځل ته کټمتوالی (برابرون) Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کیږدو نو لرو

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم درېګوډي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیمګردی یا نیمدایره $\text{if } x+y+z=\pi=\text{half circle},$ =که

او *نو یا* tan x + tan y + tan z = tanx.tany.tanz

$\text{and } \sin(2x)+\sin(2y)+\sin(2z)=4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$

Trigonometric conversions تریګونومتریکي په ځتوالی

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخي اړیکی لري٠ داسې اړیکی د په ځښ اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندګی وکړي ، او arcψ دې د ψ په ځښ وي، داسې چې ψ(arcψ(*x*)) = *x* ٠ نو φ(arcψ(*x*)) کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم *x* په څیر ووېلی شي یا افاده شي٠

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

cot	sec	csc	Tan	cos	sin	φ \ ψ
$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	x	**sin**
$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\sqrt{1-x^2}$	**Cos**
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	**Tan**
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**sec**
x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	**cot**

(c) ketabton.com: The Digital Library

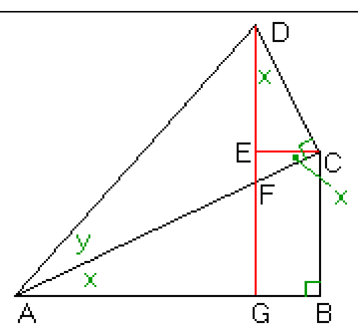
$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلایي نسبت φ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جیومتریکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs



$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

په مخامخ شیره کي کونج x د ولاړکونجیز درېکوډي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوډیز درېکوډي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندې ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC. کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$= \frac{DG}{AD}$$

$$= \frac{EG + DE}{AD}$$

$$= \frac{BC + DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

cos(*x* + *y*) = cos(*x*) cos(*y*) − sin(*x*) sin(*y*)

Using the above figure:د پورته څيرې څخه کار اخلو

$$\cos(x+y)$$

$$= \frac{AG}{AD}$$

$$= \frac{AB - GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

د $\sin(x - y)$ او $\cos(x - y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x - y)$ او $\sin(x - y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کيږي، که د $\cos(x + y)$ او $\sin(x - y)$ لپاره فرمولونه وپيژنو

$$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

که په فمرول $\sin(x + y)$ کې د y په ځاي -y کيږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساين جوړه او کوساين ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو

$$\cos(x + (-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته) د زیاتون)جمع(تیوریم(، له کومو یې چې دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چې فرمولونه په کې راټول وي(کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x \pm y) = \sin x.\cos y \pm \cos x.\sin a; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,19)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x.\cos y \mp \sin x.\sin y; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,20)$$

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,21)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x.\tan y}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.22)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,23)$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,24)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۱۲ :

$\mathrm{Cos}(x+) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

موږ له ځیرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته ځو، او ځاي په ځاي کوو $\gamma_2 = y$ ، $\gamma_1 = x$ ،
نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 .\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$

$$\cos(x+y) = \cos x .\cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته ګوته ونیسم، چې د ضرب او ویش تړاو نسبت و جمعې اړ تفریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلګه ۴ . ۱۳ – لاندې وییني یا افادې دې ساده شي

$$a)\ \ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له کوم چې $y = \sqrt{2}\ \sin\alpha$ لاس ته راځي

b) $y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi)$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x + \pi) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \text{ ist.}$$

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - (\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \le \alpha \le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنسټیزه هندسه یا څمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړئ شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1.a) $15°$	b) $225°$	c) $105°$	d) $277{,}5°$
1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3.a) $4{,}24°$	b) $70{,}9°$	c) $31°\ 17'\ 20''$	d) $228{,}1923°$
1.1.4.a) 5,19	b) 0,22	c) 2,31	d) 1

۱ . ۲ – یو درېګوډی له $a = 4{,}5$ cm , $b = 12{,}2$ cm او $c = 11{,}7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا درېګوډی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسی یي ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی(یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې درېګوډی جوړ کړی

a) $a = 11{,}7$ cm , $b = 9{,}2$ cm , $\gamma = 43{,}5°$

b) $c = 16{,}1$ cm , $\alpha = 84{,}6°$ $\beta = 51{,}9°$

وښایي چی ولی دواړه درېګوډي ورته دي؛

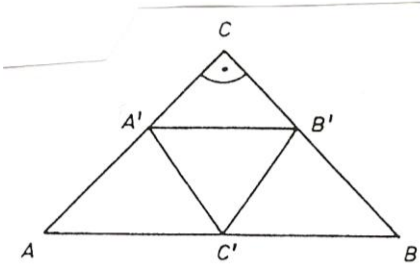


Bild 4.20 ځېره

۱ . ۴ – یو مساوي پښیز، ولاړکونجیز درېګوډي ABC ته یو مساوي اړخیز درېګوډی A'B'C' داسی په دننه کی ورکړ شوی چی $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (ځیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

ورکړی $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

(c) ketabton.com: The Digital Library

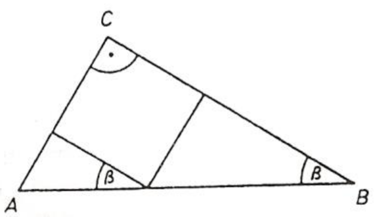


Bild 4.21

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د خیږي ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع اړخونه وشمیری

الف) له کانتو څخه

ب) له هیپوتینوزبېرخو څخه

۲ . د جېشمیرنی سره د ارزښتونوټاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړی:

a) $\alpha = 47{,}15°$, b) $\alpha = -390°$, c) $\alpha = 7{,}784$, d) $\alpha = 13{,}195$

۲ . ۲ – کونج ß دې د $\sin ß = a$, $\cos ß = a$, $\tan ß = a$, $\cot ß = a$ څخه د

a) $a = 0{,}8290$, b) $a = -0{,}2907$, c) $a = -2{,}145$, d) $a = 0{,}8660$

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کی دې د الفا په ځاي بیتا ولیکل شي !!!)

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز ($\gamma = 90°$) دریګوډي کې معلوم دي

الف) $a = 3$ cm , $b = 4$ cm ، ب) $a = 5$ cm , $c = 12$ cm

کوم ارزښتونه $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې ($\gamma = 90°$) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیری ، لاندې لویې موږ ته معلومې دي:

a) $a = 50$cm , b) $a = 40$cm , c) $b = 70$ cm , d) $c = 65$ cm

$b = 78{,}1$ cm $\alpha = 43°36'$ $\alpha = 18°55'$ $ß = 59° 29'$

۳ . ۳ – وشمیری ! h_c , A او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه ($\alpha = ß$, $a = b$):

a) $a = 66$cm , b) $c = 22{,}4$ cm , c) $a = 38{,}9$ cm , d) $c = 30{,}3$ cm

$c = 130$ cm $\alpha = 47{,}8°$, $\gamma = 33{,}3°$ $\gamma = 48{,}2°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) درې قوې دې د زوریا قوت $F_1 = 167,5N$, $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه یو درېګوډی جوړوي. د دې درېګوډي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوي دي؟

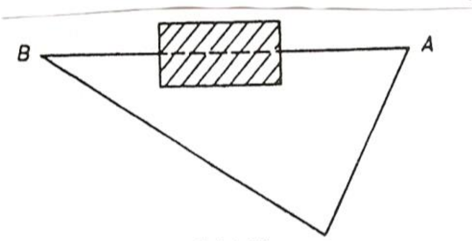


Bild 4.23 ځیره

پ) دوه ټکي A او B چې یوه کور یې مخه پټه کړې وي، یو له بل څومره لرې دي، که $\overline{BC} = 75,25\ m$, $\overline{AC} = 51,75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'45''$ وي (ځیره ۴ . ۲۳)

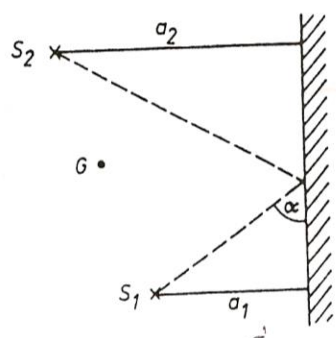


Bild 4.24 ځیره

ت) د دوه یخ هاکي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ یو د مخالف ټیم لوبغاړی G ولاړ دی. S_1 په داسې ډول توپ و S_2 ته وهي چې توپ په یوه دیوال ولږېږي. (ځیره ۴ ، ۲۳ وګورئ).
د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لریوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له دیوال $a_1 = 2,5m$ همداسې $a_2 = 6,5\ m$ وي او توپ د یوه دې دیوال سره په یوه کونج $\propto = 42°$ ولږېږي.؟

۵ . د تریګونومتریکي یا درېګوډیزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشمیري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشمیرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښايی:

5.2.1. a) $1 + \tan^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$ b) $1 + \cot^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$

c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1$ d) $1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$ b) $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$

c) $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\cot \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \dfrac{3 \tan\alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$ d) $\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3 \alpha - 3 \cot\alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2} \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2} \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$ d) $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

5.2.5. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \dfrac{1}{4} \sin 4\alpha$

b) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$

c) $\sin \alpha + \sin (\alpha + \dfrac{2\pi}{3}) + \sin (\alpha + \dfrac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6{,}5\pi + \alpha) = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکو : دا پورته د لاندې سره

$i^2 = -1$ (7 , 4)

د (7,1) ځاي نيسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رييل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ايماجينارګڼ imaginär(لاتين: فقط خيالي)يوون(واحد)وايو.

برابرون

$$x^2 + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کيدی شي په لاندې ډول وليکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, \ldots\ldots\ldots\ldots.(5,7)$$

اوس د ايماجينار ګڼ يوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,8)$$

ايماجيناريوون(واحد)z= i يو ځانګړی ايماجينارګڼ b=1 دی

د توليزې څلورۍ (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې ډول د څلوری پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

لاس ته راځی یالرو<=

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x + p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیوني یا حلونه منځ ته راوړي۰

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دی

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{p}{2}=a\in R,\sqrt{q-p^2/4}=b\in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبيونې يا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2}=a\pm bi;a,b\in R$$

د دې فورم يا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتين: پوره کوونکي - يا پوره کيدونکي-) بلل کيږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 =-1;\ a,b\in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډيرۍ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z}=a-bi,..................................(7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي٠ لنډ کنجوګيري کمپلکس ګڼ يا اوښتى ګڼ

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},..............................(5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنګه ايماجينار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رييل او ايماجينار برخه کې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1+b_1i=a_2+b_2i\Leftrightarrow a_1=a_2,b_1=b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موړ تل په پام کې لرو، چې $i^2 = -1$ اېښول شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سرې د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې: $i^2 = -1$

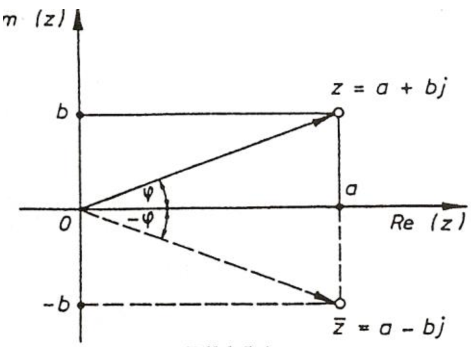


Bild 5.1

موړ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطځي ریبلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته يې‌ایماجینار برخه وایي لکه څنګه، انځور شوي دي٠ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي٠(موړ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځني وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ښېرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښنه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(-z2) په زیاتون)کیدی شي د ښېرې ۵ (په همدې توګه د ښېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

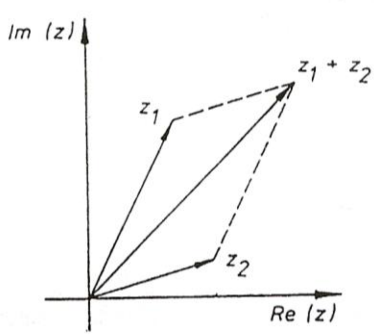


Bild 5.2 7.2 ښېره

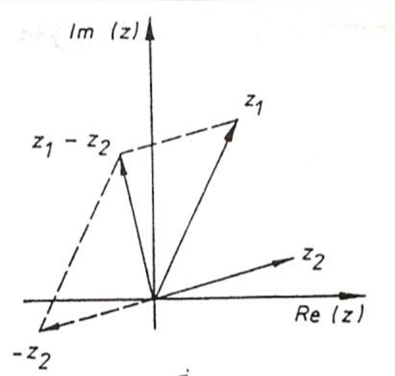
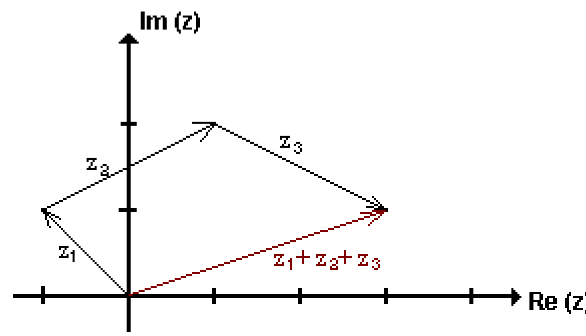


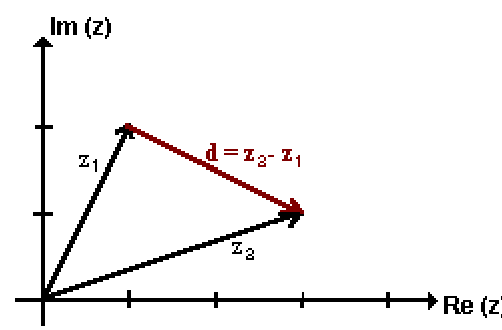
Bild 5.3 7 ښېره

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا لاندې:



په پورته او لاندې څېرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي۰



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي۰

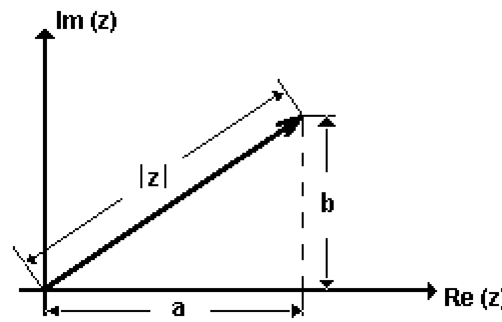
دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي۰ مخامخ څېره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$

په درې ګوډي کې د اړخونو ځانتیونه یا تباسب له امله باور لري

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اینوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \qquad (7, 20)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7,22)$$

۷ ۰ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسی لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right) = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوېمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د Z1 او Z2 لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3}\, i)$ d) $z = -1 - i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z|=\sqrt{2}$ b) $|z|<\sqrt{2}$ c) $|z|>\sqrt{2}$ d) $|z|=r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22+5i)+(2+i)$ b) $(3+2i)-(5+2i)$

c) $(1+2i)-(1+2i)$ d) $i-(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x+y\,i)\,(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج يا ماتلاندې حقيقي ورګرځوئ (a ، b حقيقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63\ +\ 16i}{4\ +\ 3i}$

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رايوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه يا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاريتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرينونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشميرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د کڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته رااچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي۰ په جملو کې‌د دې ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه تړنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د ربښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبې یا حل B له V او د دې تراوسه اوبې- یا حل شوو جملو لاس ته راځی۰ د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ ۰ ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه (ثبوت) کې سرې له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې ربښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي۰

دا وینا B هم ربښتیا ده، ځکه چې له یوې ربښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه ربښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)(د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د ربښتیاارزښت په جدول کې) له یوې ربښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن ربښتیا ارزښت ۲ ــم جدول)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې رښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی$3x \geq 3$: د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د 3x زیاتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \geq 3x+6.$$

بیلگه:

د یوه ناتیک اوبیونې یا حل کارونه (متود)

د ښوونې دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

لاس ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه رښتیا دي۰ مگر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو$a \geq 0, b \geq 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له رښتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی(سیده ښوونه) او په ناسداږه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو گټوره به وي، چې په لاندې توگه تر څېړنې لاندې ونیول شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده۰ وینا یعنې نفیې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دئ، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده۰ (د ثبوت د

رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده۰

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفیې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورئ یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځي

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورئ وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کينه لور د څلوری ۰ مربع په بڼه ليکل کيدی شي او هيڅکله له صفر څخه نه شي کوچنی کيدی۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتيا دی يا غلط دی، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتيا دی يانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتيا دی ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ ريښه يا جذر $\sqrt{2}$ ايرشنل دی

اوبيونه يا حل : د غوښتني نفيې ده، چې : د ۲ ريښه $\sqrt{2}$ ريشنل کڼ دی (د ريشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو بايد بيا دوه ټولريشنل ګڼونه q, p, د $q\neq 0$ سره شته وي، چې دا باوري شي:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

له دې پورته برابرون سره p^2 يو جوړه((جفت) ګڼ دی۰ نو له دې امله p هم يو جوړه ګڼ دی، ځکه چې يواځې د جوړه ګڼ مربع يا څلوری جوړه کيدی شي $p=2p'$ له مربع يا څلورئ کولو او پر ځاي اينوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p'^2،$$

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو ځلوری یا مربع ګڼ دی۰ په دې پسې لرو p او q پر ۲ ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی۰ که پرویشپردي ټول ګڼونه p او q له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي۰

۸ ۰ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ (n0 صفر باید لږ د ن د پښی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي ګڼونو لپاره باوري کیدی شي۰ یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي۰

بیلګه ۱ :

د ټولو $0 \geq n$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بیلګه : د ټولو $0 \geq n$ لپاره باور لري $1+3+5+\ldots 2n+1) = n^2$

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینځیپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که یوه وینا دn= n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په ښنه کېلیکل شوی) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې په ترتيب د ايندکشن ښوونه په دوه پلونو يا قدمونو سرته رسيږي

۱ - د ايندکشن پيل

ښوول کيږي، چې دا وينا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د ايندکشن پل

اوس بايد يو ايمپليکيشن يا لاس ته راوړنه وښوول شي۰ له دې امله د ايندکشن پل يا له برخه پلونو جوړ دئ

۲ الف: د ايندکشن نيونه :

نيول کيږي، چې وينا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نيونه په V فرمولبند کيږي

يادونه V د نيونې لپاره ځاي پرځاي کيږي يا راوړل کيږي۰

۲ ب – د ايندکشن غوښتنه:

غوښتل کيږي، چې دا وينا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو۰ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي ليکو

۲ ج – د ايندکشن ښوونه :

ښوول کيږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: $A \Rightarrow B$

بيلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^\circ = 1 > 0$

۲ ۰ ۱ ۰ V ته :

$2^k > k$

و ۲ ۰ ۲ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2^{k+1} > k+1$

۲ ۰ ۳ له B <= V : له $2^k > k$ او $2 > 1$ څخه د زياتون له امله لاس ته راځي :

$2+2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بيلګه ۲ :

۱ ۰ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1° = 1$

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ B <= V ته: له نيونې څخه د زياتوون 2k+1 زياتونې او له دې د ښي خوا د يوه بينومځلورى(-مربع) په څير انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښى خوا انځورونې څخه د بينوم ځلورى(-مربع) لاس ته راځى :

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

يادونه : د V او B پر ځاي کړى شو، چې نيونه او غوښتنه وليکو، يانې مور درې څه لرو، چې نيونه غوښتنه او ښوونه ده٠ په هغه ورسره بلد ډول يې ښوونه د يوه پارابلم حل دى، چې ما اوبى يا اوبيونه بللى(اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي يا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دى، چې ورسره بلد هم يو، لکه ملګوبى، خړوبى، چې موخه ترې همدا اوبى دى او په نورو ژبو کې هم همداسې دى)

دلته د شميرپوهنې سم اند درس ته د پاى ټکى ږدو، کهٔ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بيا د ترنې په ډول ورسره مل کړو٠ ستاسو وړانديزونو ته هم سترګى په لار يم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښایي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تیرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښایي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل ګڼ دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}.$

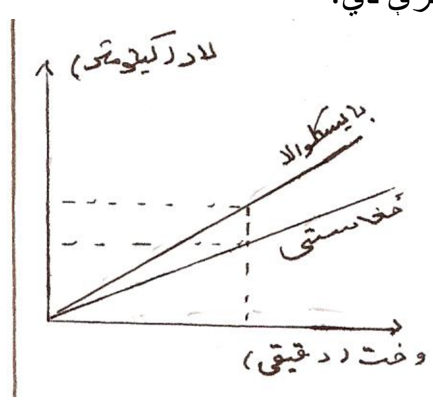
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ ۰ کرښیز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پیل بیلګه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چې په ګراف کې کښل شوی دی(که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړۍ کې ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلو متره په ګړۍ کې ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مورږ دلته، لكه په ځنو كتابونو كى چى د فنكشن د نامه لاندې يادېږي، په همغه نامه نه يادوو خو هدف به همغه وي كه دا د برابرون يا مساوات په نامه وبولو .
وخت) په دقيقه (په t ښايو لار) كيلومتر(په s ښايو د لارانځورونى ځخه په ګراف كى څرګندېږي چى بايسكلځغلوونكى له ۶۰ دقيقو وروسته ۱۵ كيلو متره ځغليدلي يعني 15km /hاو پلى ۱۰ كيلو متره يعني 10km/h
غواړود هرڅه لمړى وښايو چى هر يو له يونيم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بيا دويمي پوښتني ته ځواب وركوو.
بايسكل ځغلوونكى به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 kmځغليدلى وي او پلى به 2.10km=20kmځغليدلى وي بايسكل ځغلونكى به له tوخته وروسته t.15km
15.tkm=لار وهلي وي. دلته وختt خپلواك اوړيدونى يا نا پژندونكى او لار s بلواك اوړيدونى يا ناپيژندونكى يعني د t په واك كى دى. دا كليمي به بيا د فنكشن او څيرونو په برخو كى پوره تر څيړني لاندې ونيول شي. د بايسكل ځغلوونكي وهلې لار، چى په r يې ښايو برابرون داسى ليكو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بايسكل ځغلونكى وهلى لار، tچى د بايكلځغلولو وخت دى طبعآ زياتيز يا مثبت دى ورته دپلي چى په lيي ښايو وهلي لار هم تاكل كيږي،يعني د l وهلى لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چى دواړه له پيل ټكي له 1,5 ساعته يو له بل څومره لرې دي. وهل شوې لار :

د بايسكل ځغلوونكي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$

د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقيب له 1,5 ساعته وروسته دواړه يو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاينيز- يا كرښيز مساوات :

د كرښيز مساوات فرمول د يوې اوښتونې يا مجهولې x سره داسى دى

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقيقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبيونه (حل) دا مانا لري چى ټول هغه حقيقي اعداد وښوول شي چى كه په پورته (۱ . ۹) برابرون يا مساوات كې ځاى په ځاى شي، د مساوات شرايط پوره كړي. د حقيقي اعداد و بنسټيز قانون (۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کیدی شي چی د حقیقي عددد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چی مساوت زخمي شي. داچی ویش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو لیکل کیږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; ....(9,2)$$ ....

دا د (۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی۰که په څټ یا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیرو و

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بیا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم ښه په څتوالی تشکیلوي ، نو په دې حالت کی حقیقي عدد x شته نه دی چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بیا برابرون (۱ . ۹) لاندې شکل نیسي

0.x = 0

دا برابرون بیا د ټولو رییلګڼونو xلپاره پوره (ډك) دی. یا برابرون پوره کوي.

دا بیا داسی هم لیکل کیږي : (په خوښه x = (bel پس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره یواځنی ټاکلي اوبیونه (۹ .۲) لریږد A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبیونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر رییلګڼ x اوبیونه یا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د یوې اووښتونې یا مجهولی سره د رییل برابرونونو د ګڼلو ټوله تیورې خوندي ده .

یو لاینیز برابرون (مساوات) (یو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرونونو ترمونو زیاتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سړی په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف په لور زیاتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته راړوي، دا د II . 2 بنستیز قانون له مخی یو ورته فورمبدلون یا بڼه بدلون دی)(د اوبي یا حل ډیری تغیر نه دی خوړلی) د بیلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زیات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1; ....(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کيڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی ليکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کتمت (ورته) دی، که په لاندې فورم يا بڼه يو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x = \frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټيك هلته موخه ور يا هدفمند دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کيدلی شي ، که دا په a2 څل شي او د 0=| a1 په حالت کی په a1 وويشل شي:

$$x = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}$$

بيلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b-ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي.

ددې لپاره چی د ماتلاندې څخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرون ترتيبيږي او راټوليګی، xله نوکانو څخه راوځي

$$a^2bx + a^3x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د $a \neq 0$ له امله کيدی شي په a^2 وويشل شي (a+b)x=2b

دا د لاينيز برابرونونو بنسټيزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که ($a + b \neq 0, (a \neq -b)$ وي ، نو(x = 2b /(a + b

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوګونی یا یواځنی اوبیونه یا حل دی
که(a = -b) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبیون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زیاتي اوبیوني یا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د نیونی یا فرضیي له امله چی باید $b \neq 0$ وي، موجود نه دی.
پام:
په دې هکله زیاتې بیلګی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب یا څله ووني په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی یا متحولې ولري، همغهسی شمیرل کیږي، لکه په رییلعددونو کې۰
دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چیرې اړیینې وې او یا ګرانو لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلګي به هم راوړم او که چیرې کوم د شمیرپوهنې مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅیږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي ځښتن غوښتل۰ زه دومره یادونه کوم، چې په دې هکله زما د شمیرپوهنې بنسټیز کتاب کې زیاتې بیلګي راوړل شوي، خو نه پوهیږي، چې دا کتاب به چا ته ورسیږي او که نه

بیلګه 9 . ۲ :
برابرون $(x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c=1$ یواځي
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دی.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې)
سره ځل کوو: $6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x)=6abc$
وریسی نور، په لاندې ډول، د ځرګندو شمیرلارو یا ـ قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$
$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$
$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بیرته د لاینې مساوات (۹ . ۱) بنسټیښه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات یواځنی حل دی.
د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره د $0x=0$ له امله هر رییل کڼ x اوبیونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره x په خوښه
دلته د ځیرل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول یی لاینیزوالی یا لاینیزتوب پیژندل کیږي، په ځنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرینځیپ) کی کرښیز یا لاینیز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مګر په لاينيز مساوات يا برابرونونو اړول کيدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کې چې د ناپيژندونکو ضريبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زيات وخت په x هم شرطونه ايښول کيږي.
ددې لپاره لاندې کې درې ساده بيلګې راوړو:

بيلګه ۹ . ۳ :
برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$
د لومړي حل لپاره څلوری برابرون يا مربع مساوات دی، ځکه چې څلوری(مربع) غړي لري. د يو له بل څلولو يا ضربولو وروسته څلوری غړي له منځه ځي. يو لايني مساوات د يوې ځانګړي سره سره پاتې کيږي:

$$24x^2 -32x-27x+36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x +3x -x^2 -9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بيلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x -a) / (x-b) = 1$ يواځې هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بيا لرو: $2x-a=x-b \Rightarrow x=a-b$
د $x \neq b$ له امله بايد باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a-b$ لري او پرته له دې ($a = 2b$) حل نه لري.
بيلګه ۹ . ۵ :
مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$
يواځې هلته هدفمند دی چې $x \neq 0$ وي. ددې نيونو لاندې باور لري . $x = a + b -c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله يواځې هلته حل دی، کله
چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات يواځې د $a + b \neq c$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a + b -c$ لري، په غير له دې ($a+b=c$) حل يا اوبيونه نه لري

بيلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څيرنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی ټيك د $abc \neq 0$ لپاره يو هدف لري، بايد د اصلي مات لاندې پيدا كولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تكرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$
$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$
$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$................ = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دی

كه برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوكانو يو له بل ځلولو راټول، ترتيبونه او ويشنه د x تر څنګ ولاړو فاكتورونو يا ضريبونو $(A = 89a^2b^3c^2 \neq 0)$ څخه د نيونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړكيږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \ abc \neq 0$$

د دې وظيفي لپاره د حل نور امكانات نه شته.
تر اوسه مو هغه ماتونه وڅيړل چی مات لاندې يي له ځلونو جوړ وو، غواړو چی اوس داسی ماتونه وڅيړو چي مات لاندې يي له زياتونونو جوړ وي، چی د نوكانو له لارې په ځلوونو ټوټه كيدلي يا تجزيه كيدلی شي .

بيلګه ۹ . ۷ :
برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټيك د دې نيونو سره صدق كوي $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$. :

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پيداكوو

$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 -1)$

$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$

$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$

$a^2bx - b = b. (a^2x-1)$

$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$

اصلي ماتلاندى)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوكانو څخه راوتلو) چي يو يا څو غړى د نوكانو دباندې او نور په نوكانو كى بنديږي(، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$

$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$

$.............2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$

$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$

$$..................................x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $0 \neq ab$ لپاره(دا د نيونو له لارې تل پوره دى)كه $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نيولى شي، بى له هغو چى په بنسټيزو نيونو كى له نيونو د باندې ساتل شوي وي) يعني په مساوات كى ځاي ورته نه وي(. په دې حالت كى د xمطلقه ارزښت د كېنونو $a = b$ د په څېټ ارزښت سره نه شي مساوي كيدى .د x لپاره نيول شوې نيونى د حل وركولو كى بايد په پام كى نيول شوي وي دا په دې مانا چي بايد تل پوره وي:

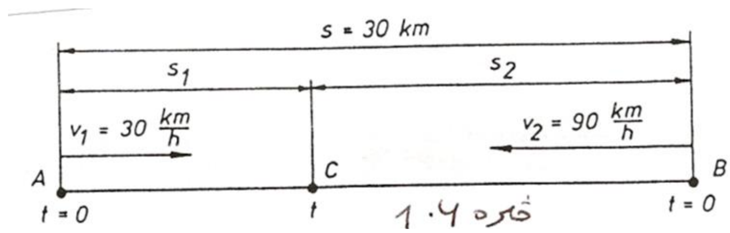
$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بيلگه ٩ . ٨ :

دوه ګاډې تمځايونه Aاو B يو له بل km30 لرې دي. د A څخه يو بارګاډى په ساعت كى د ديرش كيلومتره 30km/h په يوه ثابت سرعت يا چټكتيا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوزيږي. د Bڅخه يو تيز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به يو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزيکي لويې يو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځانتيوني لپاره ځيره ځېره وکاږئ



پوښتنه » چيرته « د دواړو ګاډو د يوځايوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کيدی شي د A څخه و C ته لريوالي(د بار کاډي لارs1) يا د Bلريوالي وC څخه(د تيزګاډي D لار s2) سره وشميرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو يوځايوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دئ کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانيدو تر يوځايکيدو وټاکو. دلته درې اوړېدوني يا مجهولی مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نيونی سره مناسب لاندې اړيکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو مارونې يا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\ t \quad , s_2 = 90\ t \quad , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی يونونه(واحدونه) پريښوول کيږي. او پريکړه کوو چی لار په کيلو متر او وخت په ساعت ښايو)!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو يا مساواتو سره چی حل به يی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چی دا مساوات په يوې مجهولی مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کيدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که وليکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي .s2 = 30 - x دا په لمړنيو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30-x) / 90$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاينيز ټاکنبرابرون يا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کيدی شي:

$30x = 30 - x$, $4x = 30$ $x = 7,5$

نو لرو

$s_1 = 7,5$ km , $s_2 = 22,5$ km , $t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15$ min

که وليکو $s2 = x$ ، نو شميرنه لاندې لار غوره کوي يا بهير نيسي:

$s_1 = 30 - x$, $t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

$x = 22,5$,

$s_2 = 22,5$km , $s_1 = 7,5$ km , $t = (22,4/90)h = 1h/4 = 15$ min

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتونې يا ناپيژندونی په څير وټاکو، نو بار لري يا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90x = 30$

$20x = 30$

$x = 30 / 120 = 1/4$, $t = (1/4)h = 15$ min

$s1 = 30t = 30/4$ km$=7,5$km

$s2 = 90t = 22,5$ km

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د $0,25$ h$= 15$ min حرکت وروسته په $7,5$ km لريوالی يو بل سره مخامخ کيږي

بيلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

يواځې هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نيونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا نو د $x \neq 0$ له امله يواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات يواځې د $a + b \neq c$ لپاره يواخنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غير له دې ($a+b=c$) حل نه لري.

بيلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څيړنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.گ.خ. تکرار شي.

$$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 . a . b^4 . c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 . 3^2 . 5 . a^3 . b . c$$

$$5400\, a^2b^2c^2 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . a^2b^2c^2$$

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 . 5^3 . a^3b . c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل ځلولو راټول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړ کیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفې لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندې یې له ځلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅیړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په ځلونو توټه کیدلې یا تجزیه کیدلې شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي: $|x| \neq 1 / a^2 \quad , \quad ab \neq 0$.

اصلي مات لاندې (ا م ل) په لاندې ډول پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 -1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چې یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي) ، لنډونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a^2 (2bx - 1) + b^2 (a^2 x - 1) &= a^2 b^2 x(a^2 x + 1) + b^2 (2ax - 3) - b^2 (a^4 x^2 - 1) \\ 2a^2 bx - a^2 + a^2 b^2 x - b^2 &= a^4 b^2 x^2 + a^2 b^2 x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4 b^2 x^2 + b^2 \\ 2a^2 bx - 2ab^2 x &= a^2 - b^2 \\ 2ab (a - b) x &= (a + b) (a - b) \\ x &= \frac{a + b}{2ab} \end{aligned}$$

د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنستیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي(یعني په مساوات کی ځای ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنهونو $a = b$ د په ځېږ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

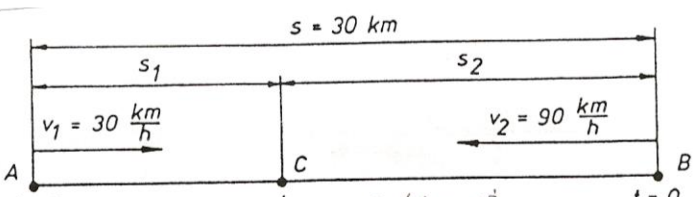
د x لپاره نیول شوي نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي،دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. دB څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لويي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t اوv سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څېره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



څېره ۶ . ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزګاډي D لار s_2) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو s_2 , s_1 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوري ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , s_2 = 90\,t \ , s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه پرینبوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دريې مجهولی s_2 , s_1 او t دی د دريې مساواتو سره چې حل به يې په ۶ الف او يا همداسې په برخه ۱۱ کې ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چې د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چې دا مساوات په يوې مجهولی مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کيدی شي s_2 , s_1 او t وټاکل شي. که وليکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنيو دوه مساواتو کې ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30-x) / 90$$

لاينې ټاکنمساوات د x لپاره دي، چې ساده حل کيدی شي:

$$30x = 30 - x \,, \; 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5 \text{ km}, \quad s_2 = 22{,}5 \text{ km}, \quad t = \frac{7{,}5}{30} \text{h} = \frac{1}{4} \text{h} = 15 \text{min}.$$

نو باور لري:

که $s2=x$ کيږدو،نو شميرنه په لانې ډول ځغلي يا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x, \quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90} \,,$$

$$\begin{aligned} 3\,(30 - x) &= x, \\ 90 &= 4x, \\ x &= 22{,}5, \end{aligned}$$

$$s_2 = 22{,}5 \text{ km}, \; s_1 = 7{,}5 \text{ km}, \quad t = \frac{22{,}5}{90} \text{ h} = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څير وټاکل شي، يعنې $x=t$ ، نو باور لري:

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= 30x + 90x = 30, \\ 20\,x &= 30, \\ x &= \frac{30}{120} = \frac{1}{4}, \quad t = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ min}. \\ s_1 &= 30\,t = \frac{30}{4} \text{ km} = 7{,}5 \text{ km}, \\ s_2 &= 90\,t = 22{,}5 \text{ km}. \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15min خوزښت(حرکت) وروسته په 17,5kmکې یو بل سره مخامخ کیږي.

۹ . ۲ تمرینونه

۱ . ناکرښیز یا نالاینیز مساوات د یوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ aاو b نتیجه یې د ازمایئ! د مجهولو ضریبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b یې نه شي غوره کولی یا نیولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره یواځنی حل لري، حل نه لري او یا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رویه د نورو مجهولو ضریبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ –بې له کسرونو یا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضریبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3(6\frac{1}{2}+x)-\frac{7}{3}(2x-\frac{19}{2})-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴. ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$ b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$ ؛

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$ d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج یا مات لاندې کې یې ناټکلي ضریبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$ d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶,۱ – کسرمساوات يا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ .   شي تمرينونه

۱ . ۷ ۱ – که د يوه ګڼ خلور خله او ۱۴ زياتون ۴۰ وي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د يوه ګڼ خلورخله او ۴ زياتون ددې ګڼ او ۱۴ زياتون سره برابر وي ، نو هغه ګڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د يوه ګڼ خلورمه برخه او پنځه خله ۴۲ ګڼ ورکوي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۴ – که د یوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه ګڼ وویشل شي چې ۴ ترې کم شوی او ۱۱ لاس ته ترې راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟

۱ . ۷ . ۵ – د یوه ګڼ پنځه ځله او د ۳ زیاتو دوه ځله لوي دی. لکه د دې ګڼ درې ځله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۶ – د یوه ګڼ څلورځله او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی لکه ددې ګڼ دوه ځل او ۸ . دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د یوه ګڼ شپږ ځله او د ۵ کمون یا توپیر چې ددې ګڼ په څلور ځله او ۵ زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نومیږي؟

.۱ ۷ . ۸ – د یوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څېر ارزښت لاس ته ترې راځي. دا ګڼ څه نومیږي.

۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسې په دوه ګڼونو بېل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چې د مربع توپیر یې ۱۲۵ شي.

۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یې ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسې تناسب کې دي، یا یو بل ته داسې ځانونه نیسي . که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتې یې ۷ دي. دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاینیونکي ګڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي، نو یو دوه ځاینیونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځایګڼونو سره مګر په څېر ترتیب سره.

۱ . ۷ . ۱۳ – یو زدکړی غواړي د یوه ګڼ څخه مربع ریښه د یو په بل کې بندولو پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو ګڼ د ریښې په څیر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکي، چی مربع یی په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه ریښه ټاکي ، کومه چی دوه له هغه لوي دی چی لمړی ټاکل شوی. ددې ریښي مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چی مربع ریښه یی غواړو پیدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – یو د سپورټ ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسی حال کی چی نورو ډلی 1 / 4 , 5 / 1 په همدې ډول 2 / غړي په بر کی نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – یو نفر په درې ورځو کی مجلی په داسی شمیر خرڅوي: په لمړی ورځ 9 / 1، دومه ورځ 6 / 1 او په دریمه ورځ 4 / 1 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمایي دوه کمي د ځان سره لري. هغه څومره مجلی د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – یوه میلمه د یوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« ځما پلار چی درې میاشتی پخوا یی خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، ځما د عمر څلورواره څخه 4 / 1 زیات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د یوه زدکوونکي پلار څلورنیم ځله زوړ دی لکه د هغه ځوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د یو اوباکلن نیکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په یوه معما کی یو زدکوونکی د ې بل ته وایي: « که زه لما سره بټوه کی پیسو سره ۵،۲ افغانی ور زیاتي کړم ، زیاتون یی له ۵ سره ځل یا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا توپیر په 11 وویشم نو نتیجه یی ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کی څومره پیسی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسی تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوي دي، دریم دوه ځله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اومیګا) ، په دې پروت شپانونک ۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) یوګوني مقاومتونه څومره لوي دي، ب برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۷.۲۰ – د دوه غبرګ چالان عمومي مقاومت (ماته متأسفانه په افغانسان کی د فزيك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چي په هدف به پوه شو) دی

a) $1000\,\Omega$, b) $2000\,\Omega$

یو مقاومت$4000\,\Omega$دی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت a) $12\,k\Omega$, b) $300\,\Omega$ وي؟

. ۲۱ . د دري غبرګو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت الف) $12\,k\Omega$

ب) $300\,\Omega$ وي؟

. ۲۲ په اوبو کي یو د لرګي منډه باید څومره لوي وي، چي د لمبیدو استعداد یی ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرګي خاص وزن یا کلکوالی (د فرمول څخه معلومیږي چی دا څه شی دی) $4\,\frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . ۲۳ د سونگموادو ټانك د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوډ د سونګ مواد لري. څومره تیل او څومره بنزین په ټانك کی موجوددي که ګډونه یی وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي. دا چی د مخه خرکړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په سرك بیا ۲۰ ونی زیاتی کینښنول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته څومره لوییي دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵ کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کی ، دا وروسته وړونکی د پروسړکلني وړونکی څخه یوه نیمه دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړی چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کربښي څخه لس متره شا ته ولاړدي. برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ کومبيناتوريك - د بينوم جمله

کومبيناتريک څخه په شميرپوهنه کي د دې لپاره کار خلي، چې يو ګڼ ، پل ځاي بدلو
څومره والبشاي او که څو ګنونهخپل ځاي بدل کړې دا څنګه ليکل کيږي۰ د ځای بدلون
شميرنه ده
او د هغي ډولونه۰
په ۱۰ ۱ ۰ ۱ او ۱ ۰ ۱ ۰ ۲ برخو کی به د شميرپوهنی مرستندوي مواد د بينوم
جملی(۳.۱۰)
برخه(او کومبيناتوريك (۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتيت کليمي او بينوميالکوايفيڅينت
(بينوم ځلوني) پيل شي .

۱۰ . ۱ فاکولتيت Die Fakultät, factorial

پيژند ۱۰ . ۱ :
د n!سومبول (ويل کيږی n « فاکولتيت «) لاندې سړی له1 تر n پورې ګنونو ضرب
پوهيږي، يعنی n ! = 1.2....(n-2).(n-1).n برسيره پر دې تعريفوو: 0! = 1

د فاکولتيت له پيژند څخه څرګنديږي، چی (n!.(n+1 = !(n+1) لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:

په افغاني ادبیاتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتیت په ځاي فاکتوریال لیکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کلیمه یا پښتو ، ځله ووني،، زیات کاره ولی، هیله ده چی تاسو به یی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی۰

بیلګی :

الف !n : د n = 5 لپاره په دې ډول دی: $5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$

ب : په دې ډول دی : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$

پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بینوم ځلووني یا ضریبونه

پیژند: ۱۰ . ۲

د سیمبول $\binom{n}{k}$ (وییل کیږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهیدل کیږي چی هر یو k ځله ووني یا ضریبونه یا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k}\frac{n+1-i}{i}$$

برسیره پر دې دا هم په کلکه کره کیدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ يو پيداينښتي يا طبعي ګڼ دئ او د ماتلاندې او مات باندې ګڼونو ګڼون يا تعداد ښايي،په مات لاندې کي د لومړيو k پيداينښت يا طبعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رييل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دئ. دوم فاکتور n - 1 ، دريم n-2 ترk –م

فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اويلر(leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سويسي ګڼپوه، فزيکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړې ځل لپاره پيل شو، له دې امله ورته د اويلر سومبول وايي پرتله يا مقايسه برخه ۱۰ . ۳ (. که څوك ديوه

بينوم پوتنځ يا توان شميري) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سيمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چې د يوا-

ځنيو زياتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بينوم ضريب يا بينوم ځلهووني ويل کيږي.

بيلګی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{3}{5} = 0 \text{ ،} \quad \binom{49}{6} = 13.983.816$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعريف نه دی ، ځکه چی 1 / 3 پيدأيښتي يا طبعي ګڼ نه دی.

د بينوم ضريبونو يا ځلونوخويونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ - د $n<k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$
که n یو طبعي ګڼ وي او له k کوچنی وي، نو صفر په ماتبانډې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی
۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سړی د $(n-k)!$ سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k ولیکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کېن اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په څیر ولیکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون ګډ فاکتورونه چی په ماتبانډې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ۱ افاده یا وبینه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله ووني په ځیر ولیکل شي، لاندې بینومیال یا بینوم ځلوونی (ضریب) تعریفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بینوم جمله

د بینوم لاندې سړی د دوه توکو (ګڼونو) زیاتون پوهیږي. یعني: x+y
د بیونم جمله موږ ته ښایي چې څنګه د یو بینوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چې پیدایښتي ګڼ n یی ایکسپوننت یا جکګڼ یا لنډ جګ وي، د زیاتون په ځیر پر مخ بیول کیږي. که د x + y بینوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اکسپوننت لپاره شمیرو، نو لاندې نتیجه لاس ته راوړو :
پاسکال دریګوډی

$$(x+y)^0=..................1$$
$$(x+y)=..................x+y$$
$$(x+y)^2=..............x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=............x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=.........x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5=....x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې د زياتونونو پرمخبيولوکې يو قانونيت ليدل کيږي. د زياتونو ګڼون(شمير، تعداد) د بينوم د اکسپوننت څخه په يو لوي دی . ټول زياتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په داسی ډول چې د x اوy پوتنځ زياتون په n برابريږي او په دې ډول د x پوتنځ په کميدلو) د y پوتنځ په زياتيدلو دx په اکسپوننت په ترتيب پرلپسی
n , n-1, ...1 , 0
د yاکسپوننت په ترتيب 0,1 n-1,n..,دي. د بينوم پوتنځ کوايفځينتونه داسی په نامه پاسکال Blaise Pascal(۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه(ګڼوندريګوډی جوړوي .

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کيڼ-ښي پرتوګڼونوزياتون دی، چې بي له کړاو د نورو اکسپوننتويا په جګو n = 7,8, ... لپاره پرمخ بيول کيدی شي. د ډيرو لويو اکسپوننتو n لپاره بيا هم دالار له کړاو ډکه ده ليونارد اويلرLeonhard Euler د کومبيناتوريك فکرونو کی د کوايفيځينتونو يووني يا يوونوالي يا بهتره يوونواليز ستروکتورونه يا جوړښتونه وپيژندل. په n -م n (د بينوم جګ يا اکسپوننت (ليکه اوK- م ځای، n ,.... , 1 , 0 = k کی ولاړ ضريب دفورم څخه دی) له کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اويلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بينوم ضريب په
څير رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دريګوډی د اويلر سومبول استعمال په څيروليکل شي نو لاس ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\dots\dots\dots\dots\binom{0}{0}$$

$$\dots\dots\dots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\dots\dots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\dots\dots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\dots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\dots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داويلر سومبول كی د فاكتور پرځاي ، چې ګڼونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ ليكل كيږي.

يادونه : ما كله a,b او كله بيا x,y ليكلي، دا په يو ډول ليكنه ښكلي ښكاريږي،
خو زه كله كله داسې ستونځې لرم .
په ۱۰ . ۲ برخه كی د بينوميالكوايفيځينت لپاره ښوول شوو خويونو ۲ په بنسټ د پاسكال
دريكوډي منځنی محور ته سيومتري پراته كوايفيځينته سره مساوي دي. داچی هر كو-
ايفيځينت ورباندې پورته كوايفيځينتونو زياتون سره مساوي دی په ۳ كی وښوول شو)
د تمرين وظيفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله) مقايسه(شي) د اويلر سيمبول په
استعمال
د يوه بينوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زياتون پرمختګ د يوه طبيعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول
ليكلو ته اجازه راكوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۱ (د بینوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندوکشن پیل : (n = 0)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ایندکشن نیونه : (n = k)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n$$

$$+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دایندکشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k$$

$$+\binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

كه يو د بل سره (يو د بل لاندې په څنګ يا كرېږ پرتی) برابر پوتنځ يا توان ځلونه د اويلر فرمول يا سومبول د زياتونخويونو د استعمال له لارې سره راټول (يوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{0}=\binom{k+1}{1},\binom{k}{2}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{2},\ldots,\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}=\binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زياتون ضريبونه وليكل شي نو غوښتل شوې اړيکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0},\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بينوم له جملی د يوه n -م پوتنځ دكمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-b)^i$$

بيلګي:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

۱۰ . ۴ كومبيناتوريك:

كومبيناتوريك د يوې ډيری د پای غړو يوځای درولو يا راوړلو ترتيب قوانينو سره سر او كارلري. كيدی شي د ټولو غړو يا يوې برخي يوځاييولو په څير راوړل شي، په يوځاييولو کی كيدی شي د غړو ترتيب يو رول ولوبوي او يا هم نه، او همدارنګه په راښوځاييولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

كيدى شي د غړو تكرار راشى او يا هم نه. له دې امله د يوځاييولو يا ټولګى درې ډولونه توپيروو(Komplexion هم ورته وايي)، په نامه پرموتيشن، واريېشن، كمبينيشن (Permutation, Variation, Kmobination) كوم چې په لاندې برخو كى يو په بل پسى څيړل كيږي او په اخرنى جدول كى به ليديدونكى څرګند شي يا ليدوړو ښوول شي

۱۰ . ۰ ٤ . ۰ ۱۱ **پرموتيشن**Permutare
(لاتين: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دى. لنډ: بدلون)
پيژند ۱۰ . ۳ :
د n غړو يو پرموتيشن (ځاي بدلون)بې له تكرار داسى »يوځاي درول« دي، په كوم كى
چې n غړي په يوه د زړه پورې ترتيب كى څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتيبونه
تل د مختلفو پرموتيشنونو يا ځايبدلونونو په مانا ده
بيلګى:

۱ - د دوه غړو پرموتيشن

الف : 1 2 دى 12 21

ب : a , m دى a m m a

۲ - د درې غړو پرموتيشنونه
الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دى:
ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایي ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیدایښتي ده، چې د پښتو لیکسیکایي ترتیب پجه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کڼ کښته لور ته بیا بیرته پورته

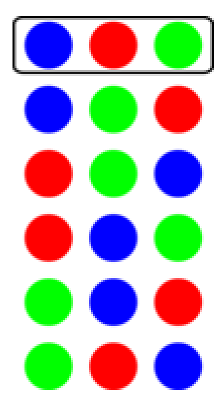
amsu	masu	samu	uams
amus	maus	saum	uasm
asmu	msau	smau	umas
asum	msua	smua	umsa
aums	muas	suam	usam
ausm	musa	suma	usma

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ (ا ت ج ګ دي:دلته طبعآ له ښي وکيڼ لورته ترتيبيږي(

اتجګ	تاجګ	جاتګ	ګاتج
اتګج	تاګج	جاګت	ګاجت
اجتګ	تجاګ	جتاګ	ګتاج
اجګت	تجګا	جتګا	ګتجا
اګتج	تګاج	جګات	ګجات
اګجت	تګجا	جګتا	ګجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلګی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دې مانا چې د ليکسکا لغاتو ترتيب ته »کتۍ متۍ« (ورته) دی، چې د غړو پيداينتي لړی مخته پرته وي (په تورو، په ګنونوکنطبعی يو په بل پسي). دبيلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دې غړو) يا تورو(جوړ شوي پرموتيشنونه) لغاتونه(maus همدا رنګه saum په دې ترتيب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ (کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ګ پرموتيشن ورکړ شوی چې ۸ -۱م ځا ي کی يي تاګج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی يي جتاګ ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته درې غونډارو لپاره نظم یا ترتیب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که لیکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي لیکو :720 = !6

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو Pn ګڼون (شمیر یا تعداد) ، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $P_n = n!$

اوښونه : د پوره ایندکشن له لارې :

داپندکشن پیل : $(n = 1):\quad P_1 = 1! = 1$

د ایدکشن نیونه : $(n = k):\quad P_k = k!$

د ایندکشن غوښتنه : $(n = k+1):\quad P_{k+1} = (k+1)!$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په !k پرموتیشنونو کی د ځل په څیر یو(k+1) -ام غړی راځي. دا (k+1) - ام غړی کیدی شي له لومړې تر (k+1) - ام ځاي پورې ودریږي، داسی چی د (k+1) -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن k+1 پرموتیشنونه د k+1 غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\,(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلګه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسی (دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شئ) کی لس زدکوونکی په یوه لیست کی خپل نومونه لیکلی شي ؟

اوبی یا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ •

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتیبونه، د کومو څخه چی i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کیږي،

د i = 1 , 2 , ... ,k لپاره، نو پرموتیشن د تکرار) د تکرارسره پرموتیشن(سره نومیږي . د غړو شمیر په پرموتیشن کی بیا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

بیلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتیشن په کوم کی چی غړی a یو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کیږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دي ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتیشن، په کوم کی چی a دوه ځله، غړی b دريځله رامنځ ته کیږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندي ډول دی

abbba abbab ababb aabbb
babba babab baabb
bbbaaa bbaba bbaab

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتیشن ګڼون یا تعداد $P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)}$ ، له کومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کیږي ، په لاندي ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه یا اوبیونه: که په پرموتیشن کی n = n1 + n2 + ...+ nk (دلته دي ګڼونه دn اینډکس کي ومنل شي) غړو یو له بل توپیر لرودی (مختلف وي) ، نو n! پرموتیشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچی د ni غړو لپاره ni! پرموتيشنونه موجود دي، نو ni پرموتيشنونه د يوه پرموتيشن په څير رايو ځاي كيږي،

دا په دې مانا چی د!n شمیر په $n_i!$ باید وویشل شي (i = 1 . ..., k)

بیلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتيشن، په كوم كی چی لومړی (n_1-1)- ځله او دويم (n_1-2)- ځله رامنځ ته كيږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتيشن، په كومو كی چی لومړی (n1=2) -ځله او دويم (n2 = 3) -ځله رامنځ ته شي، دی

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ واریيشن اوښتنه یا بدلیدنه Variation :

تعريف ۱۰ . ۵:

د n غړو واريشن (بدليدنه يا اووښتنه Variation) لاتين(بدلونه اووښتنه تغيرونه يا بيا تغيرونه) و k -ام ټولګي ته(وهرې k ټوټی ته، n ≤ k) هر له k غړو يوځانكول (نوځاي درول، يوځاي ليكل) دی، كوم چی د n غړو د لړی پرلپسی په نظر كی نيولو سره جوړيږي..

بیلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c واريیشن و دويم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ab	ba	ca
ac	bc	cb

۲ - د څلورو غړو d , a , b , c واريیشنونه و۲ - م ټولګي ته دي:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

د څلورو غړو d , a , b , c واريیشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دې

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واريیشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو واریشنونه و n -ام ټولګي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا برابر کیږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو و k -ام ټولګي ته د واریشنونو ګڼون (تعداد) $V_k^{(k)}$ دی :

$$V_k^{(k)} = n(n-1).(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبړونه : د مکلمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې) ایندکشن په k اړه لري، n ځاي په

ځاي دی یا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ایندکشن پیل :(k = 1)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټیك (صحیح) دی ، ځکه چی له n غړوکیدی چی له یوه غړی جوړ واریشنونه
جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : (k = k0) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت:):(k0 +1 = k)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دایندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واریيشن لپاره، په
دې واریيشن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی n - k0
غړو شمیر دی .که په ترتیب یو له دې n - k0 غړو د دې k -م ټولګی واریشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې یو د$k+1$ ټولګي $n - k_0$ واریشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واریشنونو $V_n^{(k)}$ وشي، نو لاندې واریینشونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0) = \frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې یو د $n - k_0$ غړو ورزیات په یو بل ځای کیښوولی وی، نو یو د$k+1$ ټولګي واریینشن به یی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دئ. دا سړی په بیلګه ۲ ($k=3$, $n = 4$, $k = 2$) باندې لیدوړ کولی شي)

بیلګي:

۱ - د درې غړو واریینشنونو شمیر و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)} = \dfrac{3!}{(3-2)!} = 6$

۲ - د څلور غړو واریینشنونو شمیر و دوم ټولکی ته دئ: $v_4^{(2)} = \dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$

د څلور غړو واریینشنونو شمیر ودریم ټولګي ته دئ: $v_4^{(3)} = \dfrac{4!}{(4-3)!} = 24$

۳ - د پنځه غړو واریینشنونو شمیر ودوم ټولګي ته دئ: $v_5^{(2)} = \dfrac{5!}{(5-2)!} = 20$

پیژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واریینشنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی یوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واریینشنونه د تکرار سره نومیږي یا بلل کیږي.

بیلګی: ۱ - د درې غړو a, b, c واریینشنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

aa	ba	ca
ab	bb	cb
ac	ba	cc

۲ - ځلور غړو a , d , c , b د دویم ټولګی واریېشنونه د تکرار سره دي:aa

	ba	ca	da
ab	bb	cb	db
ac	bc	cc	dc
ad	bd	cd	dd

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دریم ټولګي واریېشنونه دي(دا لاندې ولاړ ترتیب له کیڼ وښې لور ته دی، خو په لاندې کې په څټ شوی)

111	211	311
112	212	312
113	213	313
121	221	321
122	222	322
123	223	323
131	231	331
132	232	332
133	233	333

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام ټولګي د واریيشنونو شمیر $V_{W_n}^{(k)}$

$C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}43\\2\end{pmatrix}=13545$ د تکرار سره دی: $V_{W_n}^{(k)}=n^k$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل (k = 1) :

د $V_{W_n}^{(1)}=n^1$ لپاره صحیح دی، ځکه چی له n غړو څخه n واریيشنونه،چی هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه (k0 = k) : $V_{W_n}^{(k_0)}=n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه (k0+ 1 = k): $V_{W_n}^{(k_0+1)}=n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د (k0 + 1) -ام درجی واریيشنونه د nk واریيشنونو چی k0 – امه درجه واریيشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چی له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دې، چی په واریشنونو بی له تکرار شوې ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمیر $n^{k_0}.n=n^{k+1}$ واریيشنونه دی.

بیلګي :

۱ - د درې غړو و دوم ټولګي ته د واریيشنونوشمیر له تکرار سره دی

$V_{W_3}^{(2)}=3^2=9$

۲ - د څلور غړو و دوم ټولګی ته د واریيشنونو شمیر له تکرار سره دی

$V_{W_4}^{(2)}=4^2=16$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د درې غړو و دریم ټولګي ته ض واریېشنونو شمیر له تکرار سره دی

$$V^{(3)}_{w3} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښی یوځای کیږي.

د یوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښو شمیر دئ

$$V^{(1)}_{w2} + V^{(2)}_{w2} + V^{(3)}_{w2} + V^{(4)}_{w2} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبینیشن (Kombination (لاتین: یو بل سره تړل)

تعریف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته (n > k) یو کمبنیشن هغه دئ چی هر یو له k غړو یوځاي دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نیولو سره، جوړوي.

کمبینیشن له واریېشن منځ ته راځي، که چیری نظم په پام کی ونه نیول شي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډول دی:

ac bc

٠٠٠٠٠ ac

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډل دئ

ab bc cd

٠٠٠٠٠ ac bd

٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ ad

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې ځلو غړو ودریم تېولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي:

bcd abc

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دریم تېولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي(لاندی هم باید له کینې لاندې لورته په ښی لور لیکل شوي وی)

345 234 123

235 124

245 125

134

135

145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م تېولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام تېولګي ته د اوریېشنونو شمیر دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبینیشنونه له واریېشنونو په دې توپیریږي، چی ترتیب په نظر کی نه نیول کیږي، دا بیا دا مانا لري چی تېول د k غړو k! پرموتیشنونه په یو کمبینیشن کی یوه ته یوځاي کیږي له دې امله لرو :

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینشنونو شمیریا ګڼون دی

$$C_3^{(2)}=\binom{3}{2}=3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دی‌د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(2)}=\binom{4}{2}=6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(3)}=\binom{4}{3}=4$$

۴ - په لاتري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمیر دی

الف (یو شپږ $C_{49}^{(6)}=\binom{49}{6}=13983816$

ب : یو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)}=\binom{6}{4}\binom{43}{2}=13545$

۶ تیپ عددونه د یوه ۴ عددونوګروپ څخه بوځاي کیږي، چی له ایستل شوو شپږ
عددونو (۴ تیک یا صحیح) او دوه عددونه(۲ پاتی
عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبینیشن، په کوم چې یواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبینیشنونه د تکرار سره نومیږي.

بیلګي:

۱ - د دري غړو a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینشنونه دي.

aa ....

bb ab ......

cc bc ac

۲ - د ځلور غړو d , a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي

aa ....

bb ab ....

cc bc ac ....

dd cd bd ad

۳- د دري غړو 1 , 2 , 3 و دریم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي(لاندي لیکنه باید له کینې لور پیل وی، خو دلته له ښی لور پیل شوی وکینې لور ته)

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تکرار سره د کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی(چی په kد پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نخښه وي . (نخښه شپږ اړخیز) ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لوېږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۴ . ۴ د برموتیيشن،واریيشن،کمبینیشن ټولکه

داا	د په پا یوې برخی راټولونه م کی نیولو شوو غړو		د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه
	له نظم تیریدنه	نظم په پام کی نیونه	
	کمبینیشن	واریيشن	پرموتیشن
د ټول غړي یوله بل توپیر لري	د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $C_n^{(k)}=\binom{n}{k}$	د n غړو واریيشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $V_n^{(k)}=\dfrac{n!}{(n-k)!}$	دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګڼون $P_n=n!$
له تکرار سره	د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)}=\binom{n+k-1}{k}$	د n غړوواریيشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)}=n^k$	د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,\ldots n_k)}=$ $=\dfrac{n!}{n_1!.n_2!\ldots.n_k!}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ – لاندې فاکولتی وشمیرئ

الف) 7! ، ب) 3!.5! ، پ) 6! / 4!.I0!

۲ – لاندې ویشونه ساده کړئ

a) $(n+1)! / (n-2)!$ b) $(2n)! / n!$ c) $n! / 2n!$

۳ – لاندې افادې وشمیرئ!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\dfrac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زیاتونونه وشمیرئ!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونی(استعمال) په بنسټ وګټئ!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2 - y/3)^4$ e) $(2\ \ a+3\ \ b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده کړئ!

a) $(-1+a)^2-(1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

c) $(\ \ ab-1)(-a-\ \ ab)+ab$

۷ – د بینوم په یو ځل یی بیل (تجزیه) کړئ!

a) $25a^2+10\,ab+b^2$ b) $(49a^2-42a+9$

c) $169a^2-130\,ab+25b^2$ d) $2x+2.\ \ 6xy+3y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – الف) د غړو ۱ ، ۲، ۳ ، ۴ پرموتيشنونه په لکسيکوگرافي نظم وليکی!
ب) د a,e,f,h,n پرموتيشنونو په ځو ځايونو کی« fahne » او« hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کليمي دي چی دپښتو اړونه يی « بيرغ» او« بندر» دي.

۹ – الف) په څو ځايترتيب يا تنظيم کيدی شي ، شپږ کسه ځاي ونيسی؟
ب) څومره پنځهٔ ځيفري ګڼونه د پنځه ځيفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کيدی شي وليکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پيل کيږي ونه ليکل شي ؟
پ) د غړوa,b,c,d,f څومره پرموتيشنونه په c ، په de ، په cdef پيل کيږي؟

۱۰ – الف) د غړو a , b , c ټول پرموتيشنونه وليکی، په کومو کي چي a او b هره يوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کيږي.
ب) د دې پرموتيشنونو ګڼون يا شمير وګڼی!

۱۱ – څومره تنظيم شوي جوړې د الفبا د۲۶ (لاتين توري) تورو څخه جوړيدلی شي ؟

۱۲ – د څلورم ټولګي څومره مختلف واريېشنونه د
الف) بې له تکرار
ب) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟

۱۳ – يوه سوری کارت له ۸۰ سوريدرځونو چي هريو لس سوري لري، جوړ دی. څومره د سوريو يوځايليکل ممکن دي، که هر درځ ټيك يو ځل سوری شي؟

۱۴ – له شپږ غړو جوړ کمبينيشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دی،
الف) بې له تکرار
ب) له تکرار سره؟

۱۵ – يادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرين نه دی ليکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ – څومره مختلفی ازمایني ممکن دي که په یوه تولید کی له هر ۲۰ یوه وازمایل شي؟

۱۷ – په موټرو ترافیك نخښی په لاندې توګه یوځای شوی : یوه د ځای نښونه ډله د نخښی الف بی پسی څلور ګروپ یا ډله راځي، چی له څیفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د یوې کره ټاکلی الف بی پیژندنښی یا ترافیکی نخښی ممکن دي؟

۱۸ – د مختلفو اندازو او د خاممو ادو جوړ نلونه ، د رنګونی له لارې یو له بل توپیریدی شي ، که څلور رنګ نښونی ولرو؟

۱۹ – د منډې یوه میچ په اخرکی شپږ پاتی منډې وهونکی برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟

۲۰ – په څومره ډوله

الف) اته مختلفی مرغلرې،

ب) درې سرې، څلور شنی، یوه زرغونه مرغلره

ترتیبیدلی شي؟

۲۱ – څومره تلفونونه کیدی شي وتړل شي کی یواځي پنځه ځایزه نمره موجود وي؟

څومره تلفون تړل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځایزې وي او په 0 پیلکیدنه یی اجازه ونه لري؟

۲۲ – د درې شپږسترګیو (یا –اړخیزو) سره (څیره مکعب دی اومخونه له یوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته یي د پښتو نوم نه راځي او االماني یی Würfel دی) څومره مختلفی اچونی ممکن دي، چی ټولې شپږسترګې مختلفې سترګې ګنون وښایي؟

څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګیو سره ممکن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چې څه به تکرار وي، خو هغه لاتین متل دی، چی » تکرار د زدکړې مور ده .«
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چی n اووښتوني یا مجهولی یا ناپیژندونکی لري، وقف ده، چیرته چی m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی شي
په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر څیړنی لاندې نیول کیږي، چی د ښوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي، چی د حالتونو توپیریدنه یي اړیینه ده۰
دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی دري ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نیسي۰
یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ د برابرونونو له څیرې پوهیږو، چۀ دا یوه کرښه ورکوي، چې لاتین یا کۀ غواړئ انګریزي یې لاین نوموليٰ. د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسي منځپانګی سره یې توپیر وي،نو موږ هم ورته له دې امله لاینیز وایو.

۱۱ . ۱ . لاینیز برابرون د دوه ناپیژندونکو سره

داسی یو مساوات د دوه ناپیژندونکو سرهکیدي چی په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11.1)$$

دلته کیدی شي چی ناپیژندونکی لویي x او y په خوښه ریيل ګنونه وي چی یو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. یا په بل عبارت : x او y واریابلی(اووښتونکی یا لنډ: اووښتوني) دي، برابرون (۱۱ . ۱) لاینیز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چی د هغي څیره په y,x کواوردینات کی ناپای کرښه ده(۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)
ځانګړی حالت : a = 0 یا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي یا په ګوته کوي چی د y - محوراو همداسی د x - محور سره غبرګه د ه .
که دا (۱ . ۱۱) برابرون د دواړو نایژندونکو یا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات یا ټاکنبرابرون ونیول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ددې مسئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهیدل غوښتونکی وي.
د (۱۱. ۱) برابرون اوبیونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x ,y) ډیری ده، چی(۱۱.۱) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱) د y په لور داسی ځوابوو.

$$y = -(a/b)\,x + c/b \qquad (11.2)$$

کیدی شي چی x په خوښه وټاکل شي اوy له (۲ . ۱۱) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چی ناپاي ډیرې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځی یعني د اوبیونې ډیری یا اوبیډیری L په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = -(a/b)\,x + c/b \} \qquad (11.3)$$

داسې لوستل کیږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډیری ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون).
ددې لپاره لنډ لیکل کیږي: د (۱۱ . ۱) برابرون اوبی یا حل $y = -(a/b)x+c/b$ ،د x خوښی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

طبعآ کيدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نيسو، نو د لته د برابرون (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښهy ۰

دا چي په لانديې کی موږ د دريو يا ډيرو ناپيژندونکو يا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپيژندونکي د x, y , z .... سره په نخښنه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, ...$ سره .

ددې په نخښونو سره کيدی شي چی په څرګند ډول وښايو:

لانديې برابرون د دوه ناپيژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b, ...(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دې مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپيژندونکو يا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کيښوول کيدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1} x_2 + \frac{b}{a_1}, ...(11,5)$$

x_2 په خوښه

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2} x_1 + \frac{b}{a_2}; ....(11,6)$$

x_1

په خوښنه

د a1 =a2 = b = 0 (0.x1+ 0.x2= b = 0(لپاره ناپای ډير ځوابونه

د په خوښنه

$$x_1, x_2, ...(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$

لپاره

$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$

په ځتوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.

نوټ : دلته

∞^i

دا مانا لري چی د ناپيژندوني یا مجهولی

x_i

لپاره i = 1,2.. په خوښه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاینیز برابرونونه د دوه ناپيژندونکو سره

د دوه برابرونونو سیستم د دوه ناپيژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1 a_{12}x_2 = a_1$$
$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;..................(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کیدی شي چی په اوښتونو یا واریابلو x 1 اوx2کی د بلواکبرابرون یا فنکشنمساوات په څیر ونیول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښي یو بل غوځي کړي نو دا د مساواتو په سیستم (۸ . ۱۱) کی د کرښو یوګونی(بهتره : یوګونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی) اوبیونه ده یا حل دی.

که دواړه کرښي یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چي II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چی د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخي ټیك یا فقط مساوات I یا مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډیر

∞^1

ځوابونه موجود دي.

داسي هم کیدی شي چی فورمال

∞^2

رامنځ ته شي، که ټول

$a_{ik} \wedge a_i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څيړو. دا څيړو چی، که دا برابرون اوبيونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کيږي، چي کرښه I اوکرښه II غبرگي ځغلي مگر يو په بل نه وي پرتی.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپيژندونکو يا اووښتونو سره، کيدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - يو يواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دی (اصلي حالت)

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دی پروت (سيستم مخامخوالی يا تضاد لري)

۳ - ناپای ډير ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او يا د هغه څو برابره دی)

۴ - ناپاي ډير ځوابونه موجود دي.

(ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي)

د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپيژندونکی لري، کيدی شي په اسانتيا وپيژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دی.

په سيستمونو کی چي درې يا زياتي واريابلی يا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پيژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته بايد فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنکه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پيل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پيدا کړو. دلته بايد دري بنسټيز د مساواتسيستم د ځواب کاردودونه)متودونه(تکرار شي:

۱ . د برابر يا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

دواړه برابرونونه د يوې نامعلومی په لور اوبی کيږي(د بيلگي په توگه د x دوه په لور(، دواړه برابرې ليکي او په دې ډول يو برابرون د يوې نامعلومي سره منځ ته راځي٠

۲ - يو د بل پر ځاي کيښولو متود:

برابرون يا مساوات د يوې ناپيژندونکې (د بيلگي په توگهx دوه) په لور ځواب کيږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کيږي، په دې ډول د يوې ناپيژندونې برابرون منځ ته راځي (د بيلگي په توگه دx يو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د زياتون کارونه (جمع کولو عمليه):

سړی يو ټاکلی څو برابره (کيدی شي چی کميز يا منفي هم وي) د II برابرون د I برابرون يوه ټاکلي څو برابره سره زياتوي، داسی چي يوه ناپيژندونی بيا مخ ته نه راځی يا له منځه ولاړه شي. د نيتجي سره بيا دا بله ناپيژندوني څيري. دا د داوړو نامعلومو(ناپيژندونو) لپاره کيداي شي . دا متود دبرابرونونو د سيستم لپاره بنسټيز دی چی د ديترمينانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .
دا متود په درې ځانګړو برابرونسيستمونو باندې بايد وکارول شي، ټول څلورځلوني(ځله ووني يا ضريبونه) بايدله صفر توپير ولري يعني $a_{ik} \neq 0$ که چيرې يو $a_{ik} = 0$ د بيلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بيا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لرودی:

$$I............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;......a_{11} \neq 0$$
$$II....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;.........(11,9)$$

دلته نو
$a_{21} = 0$

بيا له II سيده راويستل کيدی شو او د نتيجي څخه يي چی په I کی کښيښودل شوې وی x_1 هم معلوميدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوريتم په استعمال بيا برابرون د درېګوډي شکل باندې اړول کيري .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :

سيستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4

II x1 - 2x2 = -5

دا سيستم يواځنی يوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړيکی نه لري

سيستم ۲

2x1 + 3x2 = 4

II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانئ ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دئ . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښايی او په دې ډول د مساواتو اوبيونې ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بي ډیله څرګنده ده چې برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په خټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چې II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$

$$-(7/2)x_2 = -7$$

$$x_2 = 2;\Rightarrow$$

$$x_1 = 2-(3/2).2$$

$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځای کینولوکاروونه (عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کی ځای په ځای کیږي٠

$$II':;.........x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$

$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ) د زیاتونکاروونه: x_1له منځه ځي، که (-2) څله د II برابرون و I ته زیات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I:................2x_1+3x_2=4$$
$$(-2)II:........-2x_1+4x_2=10$$
$$I-2II:....................7x_2=14$$
$$..................................x_2=2$$

کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II ځخه x1 وشمیرل شي:
$$x_1=2x_2-5=4-5=-1$$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال ځخه کیدی شي
x2
له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$$2.I:............4x_1+6x_2=8$$
$$3.II:............3x_1-6x_2=-15$$
$$-----------------------$$
$$2.I+3.II:........7x_1.........=-7$$
$$........................x_1.............=-1$$

یادونه : په پورته کې یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته اینسول کیږي، پوهیږو، چې چیرته ټکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :
سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف (مساوي اینوولو:
I' : x1 = 2 -(3/2).x2
II': x1 = 2 -(3/2)x2
2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x
0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته
$x2$
په خوښه. دا په دي مانا چی
$x2$
هر ارزښت نیوی شي ۰ له I' څخه ناپای ډیر ځوابونه لاس ته راځي
$x1 = 2 - (3/2)x2$ او $x2$ په خوښه.

ب) د بل په ځاي ایښوولومتود: $I' \quad x1 = 2-(3/2)x2$,
په II کی ایښول کیږي

$$II' \quad 4.(2-(3/2)x2) + 6x2 = 8$$
$$8-6x2+6x2 = 8$$
$$0.x2 = 0 \quad x2$$
په خوښه له II' لاس ته راځي
$I' : x1 = 2 - 3/2\ x2$ $x2$ په خوښه

پ) د زیاتون متود یا لار یا طریقه:
$$2.I \quad 4x1 + 6x2 = 8$$
$$II \quad 4x1 + 6x2 = 8$$
$$\overline{II - 2.I : \ 0x1 + 0x2 = 0}$$
که یواځی دا مساوات په نظر کي ونیول شي ، نو $x1$ او $x2$په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چی د $x1$ او $x2$ ترمنځ په I یا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یواځي یوه ناپیژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:
$$x1 = 2-(3/2)x2$$
$x2$په خوښه
په همدې ډول:
$$x2 = 4/3 -(2/3)x1 ,$$
دلته $x1$ په خوښه ټاکل کیږي

بیلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$$I' : \quad x1 = 2 -(3/2)x2$$
$$II' : \quad x1 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$0.x2 = 1/ 2$$

دا یو په ښتوالی یا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو رییل ګڼ x2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي لیکلو عملیه: $I' : \quad x1 = 2 - (3/2)x2$,

په II کی دی په ځای شي

$$II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$$
$$8 - 6x2 + 6x2 = 10$$
$$0.x2 = 2$$

دا مخامخوالی یا په ښتوالی یا تضاد دی ، پس ځواب نه شته.

پ) د زیاتون متود:

$$2 . I \quad 4x + 6x = 8$$
$$II \quad 4x + 6x = 10$$

$$2.I - II \quad 0.x + 0.x = -2$$

په ښتوالی یا تضا د دی ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پیښتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم یا بڼه برابرونسیستم ورکړ شوی:

$$I \quad x /(a+b) +y/(a-b)$$
$$II \quad x /(a-b) +y/(a+b)$$

دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی a =| b او a- =| b وي، یعنی |b| =| |a| وي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود ترلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کیدی شي.

لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:

د I ځل له (a+b)/ 1 او II ځل له (a-b)/ 1- څخه وروسته دا لرو:

$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$

$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$

له دې سره د y دواړه ځله وونی یاضریبونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په ځټ) نخښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توګه مو یو برابرون د یوې ناپیژندونکی سره مخ ته پروت دی:

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له (a+b)/ 1 او IIله (a-b)/ 1- سره ځل شي کیدی شي: چی y په ورته ډول وشمیرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومی چی ځمونږ د څیړنی لپاره بي مفهومه دی.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو څیړو چی کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات) * (تر څیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

1. a = 0 , b |= 0

مساوات)*(داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

2. a |= 0 , b = 0

برابرون(*)(په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په ښتوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو , $y = a - x$ دلته x په خوښه دی
3. $a=b=0$
دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دی.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د $(3x-2y)(2x-3y)$ سره څلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي x , y راپیدا کړو . موږ ځاي پر ځاي کو

$u=1/(2x-3y)$,$v=1/(3x-2y)$
او لاس ته راوړو:

$11u+18v=13$ <=> $11u+18v=13$
$27v-2u=1$ $-2u+27v=1$

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$33u+54v=39$
$4u-54v=-2$

$37u=37$
$u=1$ => $v=1/9$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$1=1/(2x-3y)$<=> $2x-3y=1$
$1/9=1/(3x-2y)$ <=> $3x-2y=9$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $x = 5$, $y = 3$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ . ۱ . ۳ دويمه درجه ديترميناتې او د کرامر قاعده

که په ټوليزسيستم(11.8) باندې د زياتون متود استعمال شي، نودx2د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{12}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ (وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - {}_{21}.I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې يواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};\ x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ldots\ldots\ldots(11,12)$$

که د ارزښتونه په (11 . 8) کی ځای په ځای شي نو تصديقيږي، چې(11 . 12) په ريښتينی د (11, 8) ځواب دی. له (11 . 10) تر (11 . 12) سړی په واقعيت يا ربنتونی کی د ديترمينانت کليمی په لور لاروی کوي(لارښودوي.)

پيژند ۱۱ . ۱: د يو منظم سيستم دوه ځله دوه رييلو ګڼونو $a_{ik}, (i, k = 1, 2)$ د

د ۲ -امه درجه ديترمينانت لاندې ، لاندينی ګڼ پوهيږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};\ldots\ldots\ldots\ldots(11,13)$$

د اصلي دوه کونجتړي يا دياګونال (قطر) د توکوځل، ترې کم(منفی) د څنګ يا فرعی دوه کوجنتړي(قطر) د توکو ځل(يا) د اصلي دوه کونجتړې يا قطر د توکو ځل ځخه د څنګ يا فرعي دوه کونجتړې د توکو ځل کميږي يا منفی کيږي)

يادونه : دا اوس او وروسته ديترمينانت بڼه د ماتريکس په څيره ليکل شوی، په ديترمينانت کې کرښې سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (11 . 13) کی د xi ځله ووني يا ضريبونه داسی ليکل شوي لکه په (11 . 8) سيستم کی . د (11.13) ديترمينانت له دې امله د (11 8) (له ماڅخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدليږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شميرپوهنيزه ناسمي منځ ته نه راولي) سيستم د ځلونو (ضريبونو) ديترمينانت بلل کيږي.

که په (11. 13) کی لومړی (درز، ستن يا متِه يا ولاړه ليکه يا-کيله) د ديترمينانت ولاړه ليکه(په ځای) چی د xi ځله ووني يا ضريبونه دی د (11 . 8) برابرونسيستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 ولیکل شي نو(په x1 اړونده) لاندې دیترمینانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{12} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه یا نمره دې) ۱۱،۱٤ (وي‌په همدې ډول که د) 11 . 13 (دیترمینانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې دیترمینانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,15)$$

که له (11 . 10) تر(11 . 12) پورې له (11 . 13) تر (11 . 15) پرتله یامقایسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۱ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو یا ضریبونو دیترمینانت لپاره په (11. 13) کی

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سیستم (11 . 8) یوائځنی ټاکلی ځواب لري

$$x_1 = D_1/D \quad ; x_2 = D_2/D \qquad /11,17)$$

په داسی حال چی D1 او D2 د (11 . 14) او (11 . 15) له مخی شمیرل کیږي.
د (11 . 10) او (11 . 11) له امله لرو

جمله ۱۱ . ۲ :
که په (۱۱ . ۱۳) کی د ځلونو دیترمینانت D لپاره باوري وي

$$0 = D \qquad (11,18)$$

او د کم له کمه یوې دیترمینانتD1 یا D2 لپاره په (14, 11) یا (11 , 15) باوري وي

$$D1|=0 \;\vee\; D2\ |=0 \qquad (11,19)$$

نو (11 . 8) سیستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون یی یو د بل سره مخامخ دي (تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :
باوري دي
D=D1=D2=0 (11 . 20)
نو يو له برابرونونو I يا II زياتي دئ) دواړه برابرونونه يو بل ته اړ دی يا د بل په واك کی دي(او د ۱۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعماليدلی شي يا کار ترې اخستل کيدی شي.
د ښوونبيلګو په څير دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلګي (۱۱ . ۱ . ۲ برخه) کارول شوي سيستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونکي په ديترنمنانتو ځواب کړي، که چيرې ما دا کار سرت ونه رساوه۰.
بيلګه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7\neq 0$$

پس يواځنی تاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\-5 & -2\end{vmatrix}=-8+15=7\neq 0; D_2=\begin{vmatrix}24\\1-5\end{vmatrix}=-10-4=-14$$

له دې امله باوري دی

x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,

بيلګه۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}23\\46\end{vmatrix}=12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix}43\\86\end{vmatrix}=24-24=0; D_2=\begin{vmatrix}24\\48\end{vmatrix}=16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپاي ډېر ځوابونه موجود دي) بيلگه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بيلگه ۱۱ . ۸ :   د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D =   2   3   =12 -12 = 0

او ورپسی

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی ځواب نه شته(د 0=| D2 = 4له شميرلوکيدی شي، چی تيرشو)

بيلگه ۱۱ . ۹ :

موږ بالاخره غواړو چي په بيلگه ۱۱ . ۴ کی ورکړ شوی مساواتسيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی   D , D1 او D2 شميرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$.........................=\frac{a^2-2ab+{}^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}=-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت $ab \mid= 0$:

دلته دیترمینانت $D \mid= 0$ او دا د برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x=\frac{D_1}{D}=\left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right):\left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right)=\frac{2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{4ab}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د $D1 = D2$ له امله)

دوم ۱ حالت $a=0, b\mid=0$: دلته $D = 0$ مگر

$D1 = D2 \mid= 0$

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته $D = D1 = D2 = 0$

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلګه ۱۱ . ۴ کي ښوول شوي .

دوم ۳ حالت $a = b = 0$:

-- --

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو وروسته دبیلا بیلو لارو
ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$
$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

١١ ، ١ ، ٠ ، ٤ د ګاوس الګوریتم

په ١١ . ١ . ٢ . برخه کې ځیرل شوو متودو ټیك په نظر نیولو سره (برابرو لیکلو- په ځاي - او د زیاتون عملیه) ، کره پوهیدلی شو چی ددې په مرسته ټولیز د برابرونسیستم (11 . 8)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه دربګوډیز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي
١ . که $a22 |= 0$ وي، نو لاس ته راځي:
الف) $x2=a2/a22$
ب) برسیره پر دې که $a_{11} \neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

$$x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=$$
$$(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)$$

٢ . که $a22 = 0$ او $a2 |= 0$ وي نو ځواب موجود نه دی یا نه شته
٣ . که $a22 =0$ او $a2 = 0$ وي، نو ٢- م برابرون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بیا ا. برابرون د ١١ . ١ . ١ برخی متود په مرسته ځوابولی شي.
د (11 . 8) سیستم د ځواب پرابلم په دې ډول کمیږي، چی دا سیستم په دریګوډی بڼه یا – ځیره واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس الګوریتم دی. یا (11 . 8) سیستم دریګوډی ځیره لري او یا ټول aik د صفر سره برابر نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی (11 . 8) سیستم په روځنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

		x1	x2	RS
I	$a11x1+a12x2= a1$	a11	a12	a1
II	$a21x1+a22x2= a2$	a21	a22	a2

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پرېښودل شي اود II برابرون $a11 / a21$ - ځله له I برابرون څخه کم شي ، نولرو

		x_1	x_2	Rs
I	$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$	a_{11}	a_{12}	a_1
II'	$0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$	0	$a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$	$a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$

که II' لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

		x1	x2	RS
I	$a11x1+a12x2= a1$	a11	a12	a1
II'	$b22x2 = b2$		b22	b2

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که $b22 \mid= 0$ وي ، نو x2 له II' او x1 لهI لاس ته راځي.
-که $b22 = 0 , b2 \mid=0$ وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که $b22 = b2 = 0$ وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی لهI او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسې لیکل او شیماتیك کیږی:

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریګوډیځیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پریږدو او له II څخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له II' لاس ته راځي x2 = 2
او له I څخه لاس ته راځي. x1 = 2 -(3/2) x2 = -1

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (ځیږو. دلته د لمړی لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	10
II'=II-2.I	0	0	2

سیستم۲

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	8
II'=II-2.I	0	0	0

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په ځیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅیړل شي

دوم واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II+(2/3).I	7/3	0	-7/3
1.	2	1	-1

اول واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II-(1/2).I	0	-7/2	-7
2.	-1	2.	2

څلورم وایانت

	x1	x2	Rs
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I=I-2.II	0	7	114
-1	1.	-1	1. 2

دریم واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I'= I+(3/2).II	7/2	0	-7/2
2.	2	2.	

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا څلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چې د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چې په هغه لیکه کی پرته ده چې چوکاټ شوي، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب) له II' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

x2= -7 / (-7/ 2) =2

ت) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

x = (1/ 2)(4 - 3.2) = -1

واریانت ۲ :

ا) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له 'II ځخه دې x1 وشمیرل شي

پ (له 'II لرو: -1 = x1

ت) له I ځخه لرو: x2 = 2

واریانت (امکان) ۳

ا) له II ځخه دې x2 وشمیرل شي

ب) له 'I ځخه دې x1 وشمیرل شي

پ) له 'I لرو -1 = x1

ت (له II لرو x2 = 2

واریانت (امکان) ۴

ا) له II دې x1 و شمیرل شي

ب) له 'I ځخه دې x2 وشمیرل شي

پ (له 'I لر x2 = 14 / 7 = 2

ت) له II لرو:

$x1 = -5+2.2 = -1$

ټولی ځلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په ځلورمه واریانت کی په ټولګټونو شمیرنه کیږي، »مخته وونه« یا مخوونه(برتري) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زیات برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سرهره

که څوك له دوه زیات برابرونونه د دوه اوښتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توګه باید په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه x1, x2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توګه حل نه لري. یوائې په ځانګړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې ځیړو او بیا د ګاوس الګوریتم له لارې.

بیلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

$$\text{a) } \begin{array}{ll} I & x1 + 2x2 = 3 \\ II & 2x1 - x2 = 1 \\ III & 3x1 + x2 = 2 \end{array} \qquad \text{b) } \begin{array}{ll} I & x1 + 2x2 = 3 \\ II & 2x1 - x2 = 1 \\ III & 3x1 + x2 = 4 \end{array}$$

له I او II ځخه د ځرګندو یا معلوممتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی ځل یوائنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

له) a او)b ښخه لرو1 = x1 + 2x2 که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په (a) کې :1.1+3.1 = 4 =| 2, په (b) کی : 1.1 + 3.1 = 4

نو سیستم (a) ځواب نه لري او سیستم ($\hat{b}$) یواځني ټاکلی ځواب لري

یعني x1=x2=1

بیلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بیلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوت اوس د ګاوس د الګوریتم له لارې ځواب کوو.

a)	x1	x2	RS	b)	x1	x2	RS
I	1	2	3	I	1	2	3
II	2	-1	1	II	2	-1	1
III	3	1	3	III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5	II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=II-3.I	0	-5	-7	III=III-3.I	0	-5	-5
III''=III'-II'	0	0	-2	III=III'-II'	0	0	0

په a) کی تضاد پیژندلکیږي (III':0.x1+0.x2=-2) ځواب نه شته یا وجود نه لري .

په b) کی تضاد مخ ته نه دی پروت .(III':0.x1+0.x2=0) لهII' ښخه لرو:

x2 = 1 او له I ښخه لاس ته راځی : x1=3-2.1=1

۱۱ . ۲ لاینیزبرابرونتسیستم د درې ناپیژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ یو برابرون د دري ناپیژندونکو سره

مو ږ یو مساوات د دري ناپیژندونکو سره تر ښیرني لاندې نیسو:

a11x1 + a12x2+ a13x3 = a1 (11 . 21)

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

I . a11=a12=a13=0 (11 . 22)

دلته x1 , x2 او x3 یو له بل پوره خپلواك ټاکل کیدی شي. ویل کیږي چی ناپاي ډیر ځوابونه مخ ته پراته دي (x1 په خوښه، x2په خوښه او x3په خوښه)

2. a11=a12= a13= 0 ,a1|=0 (11 . 23)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$0x1+0.x2+0.x3 = a1 \neq 0$

اوبیونه نه شته.

۳- د کم له کمه یوه ځلجوړې i , k لپار دې aik |= 0 وي. (بې د تولیز وبندیزونو یا عمومیت د محدود والی دې a11|=0 وي (. کیدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي (ناپاي ډیر ځوابونه)، او لاس ته راځي

$x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3)$ په خوښه x1 او x3 (11,24)

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپیژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسیستمونه د درې اوښتونو یا ناپیژندونکو سره

$$a11x1+a12x2+a13x3=a1 \qquad (11,25)$$

$$a21x1+a22x2+a23x3= a2 \qquad (11,25)$$

موږ دا را ویستلي حالتونه ، چیرته چی د ټولو i, kلپاره aik= 0 ، په پام کی نه نیسو. دا حالت هم په پام کي نه نیسو چی دوم برابرون د لومړي په ځیر وي (ناپاي ډیر ځوابونه. او یا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي یا ښتوالي یا تضاد کی وي (ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پیژندونکي دي. موږ په یوه بیلګه کی دا اصلي حالت څیړو چی یو ناپیژندونکي یا نامعلوم (د بیلګي په توګه x3) په خوښه ټاکل کیږي او دا نورې دوه ناپیژندونکی یا اووښتونې (x1 او x2) یواځنی لاس ته راځي، او یا یواځنی ورکول کیدی شي (ناپاي ډیر ځوابونه).

بیلګه ۱۱ . ۱۵:

			x1	x2	x3	RS
I	x1+x2+x3=3		1	1	1	3
II	x1+2x2+3x3=6		1	2	3	6
II'=II-I	0.x1+x2+2x3=3		0	1	2	3

له II' لاس ته راځي

$$x2 = 3 -2x3$$

له I څخه لاس ته راځي

$$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, x1= x3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې لاس ته راځي

$x_1=x_3, x_2 = 3 - 2x_3$, x_3 په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دريمه درجه ديترمينانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه يا معادلې يا مساوات د درې ناپيژندونکو سره څېړو

$$\text{I} \qquad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3= a_1 \qquad (11 . 26)$$

$$\text{II} \qquad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= a_2 \qquad (11,26)$$

$$\text{III} \qquad a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3= a_3 \qquad (11,26)$$

له دې سيستم څخه کيدی شي چی د ۱۱ . ۱ . ۲ برخی د برابر ليکلو او يو د بل په ځای ليکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زياتونتيورم (-قضيه) فکر غواړي او د دريمي درجي ديترمينانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سيستم ځواب پيدا کولو لپاره هڅوي

پيژند ۱۱ . ۲:

رييل ګڼونو a_{ik} ($i,k = 1,2,3$) يو درې درجه منظم د ديتمرمينانت سيستم

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};.................................(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی رييلګڼ پوهيدلی شي):

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32)})-a_{12}(a_1a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{33});............(11,28)$$

له دې سره د دريمی درجي ديترمينانت شميرنه د دوهمی درجی ديترمينانت په شميرنه بدله شوه. . ۱۱ . ۲ تعريف او په ځانګړې توګه) 11 .28 (فرمول په لاندې ډول توضيح کيدی شي:

پيژند ۱۱ . ۳ : په (11 . 27) کی د ديترمينانت D لاندېديترمينانت Aik لاندې هغه دومه درجه ديترمينانت پوهيدلی شو، چی د D ديترمينانت i- می ليکی او k - م درځ يا متې د لرې کولو يا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي(زه د ماتريکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې دا لیکې او مټې یا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پیښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه یې پسې لیکل شوې)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کیدی شي چې د ۱۱ . ۲ دیترمینانت په دې فورم ولیکل شي

پیژند ۱۱ . ۴ :

د دریمی درجي دیترمینانت D لاندې، چې په (11 . 27) کی ورکړ شوی دی،

دا لاندې ګڼ پوهیدل کیږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زیاتون عملیي ښخه، چې دلته نسبت د دوه ناپیژندونکو مساواتو ته چې دوه ناپیوندونکی لري، روښانه ده، د (11 . 26) ښخه لاس ته راوړل کیږي:

$$Dx1 = D1\ ,\ Dx2 = D2\ ,\ \ Dx3 = D3 \qquad (11\ .\ 29\ )$$

په داسی حالت کی چی Di داسي لاس ته راځي چي د ځله وونودیترمینانت (11 . 28) کی سړی i - م درځ یا ستن یا مټه د (11. 26) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; \ldots\ldots(11,30)$$

موږ دا نتیجه بې له ښووني ورکوو.

له (۱۱ . ۲۹) ځخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :

که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونودیترمینانتو(۱۱). ۲۷ ،په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$D \neq 0$ (11 . 31)

با وري وي ، نو (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم يوائخنی ځواب لري

; $x1=D1/D$; $x2=D2/D$ $x3=D3/D$ 11,32)

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $Di |= 0$ کم له کمه د يوه i (i = 1,2,3) لپاره وي، نو د (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم ځواب نه لري (په (۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D1 = D2 = D3 = 0$ وي، نو په (۱۱ . ۲۶) کی کم له کمه يو برابرون له ضرورته زيات دی او دا (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم کيدي شي چي د ۱۱ . ۲ . ۲ متودونو باندې ځواب شي (وړانديز دئ چی د ګاوس الګوريتم له متود ; چی په ۱ . ۲ . ۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بيلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندې سيستم

I x1 -x3 = -2

II x1 +x2 -x3 = 0

III 2x1 - x2 = 0

کی دئ

$$D=\begin{pmatrix}10-1\\11-1\\2-10\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}1-1\\-10\end{pmatrix}-0.\begin{pmatrix}1-1\\20\end{pmatrix}+(-1).\begin{pmatrix}11\\2-1\end{pmatrix}=-1-0-1.(-1-2)=2$$

$$D_1=\begin{pmatrix}-20-1\\01-1\\0-10\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1-1\\-10\end{pmatrix}-0\begin{pmatrix}0-1\\00\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}01\\0-1\end{pmatrix}=2;$$

$$D_2=\begin{pmatrix}1-2-1\\10-1\\200\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}0-1\\00\end{pmatrix}-(-2)\begin{pmatrix}1-1\\20\end{pmatrix}-1.\begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix}=4:$$

$$D_3=\begin{vmatrix}10-2\\110\\2-10\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}10\\-19\end{vmatrix}-0.\begin{vmatrix}10\\-10\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}11\\2-1\end{vmatrix}=6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یواځنی ټاکلی ځواب موجود دئ.

$x1=D1/D=2/2=1,\ x2=D2/D=4/2=2,\ x3=D3/D=6/2=3$

بیلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سیستم

$$\begin{aligned} &I && x1 + x2 + x3 = 0 \\ &II && x1 \quad -x3 = 0 \\ &III && 2x1 + x2 \quad = 1 \end{aligned}$$

کي دئ.

دا بیلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښايي ، چې اوبیونه نه شته ۰ دې ته باید ګوته ونیسم، $D = 0$ او $D1= -1 \neq 0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوریتم

د ګاوس الګورتیم لومړی د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپیژندونکي لري او همدارنګه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چې درې ناپیژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوریتم موخه په دې کی پرته ده چې (11 . 16) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریګوډیفورم را اوړي.

$$\begin{aligned} &I && a11x1+a12x2+a13x3=a1 \qquad (11 . 34) \\ &II && b22x2+b23x3=b2 \\ &III && c33x3=c3 \end{aligned}$$

بنسټیز حالت : که $a11 \neq 0, b11 \neq 0, c11 \neq 0$ وي نو یو په بل پسی سړی کړی شي چې له III $x3$, او له II $x2$, وشمیري. مګر په (11 . 34) کی ځانګړي حالتونه هم پیژندل کیږي:

-که $c3 \neq 0, c33=0$ وې، نو یو په ښتوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که $c3=c33=0$ وی، نو III له ضرورتزیات دی سړی یواځی I او II څیړي.

- که $c33=c3=0$ او برسیره پر دې $a11 \neq 0, b11 \neq 0$ وي، نو $x3$ په خوښه ټاکل کیدی شي او $x2$ له II او $x1$ له I چې $x3$ ته اړ وي، شمیرلکیدی شي (ناپای ډیر ځوابونه)

-برسیره پر دې که $b22=b23=0$, $b2 \neq 0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چې $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$ وي ، نو II له ضرورت زیات دی او له $a11 \neq 0$ کیدی شي چې $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي، او $x1$ له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي چې x2 او x3 ته اړ (په واك كې يا تابع) وي (ناپاي ډیر ځوابونه ځوابونه) .
كه ټول ځلونه او د مساواتو ښي خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دي.

د ګاوس الګوریتموس د دریو ناپیژندونکو(11 . 26) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دئ
لومړی پل (قدم) : نیسو چې په (11 . 2 6)کې 0 =| a11 دی. دا د نمرې بدلولو په بنسټ همیشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چې ټول aik = 0 وي) .
دلته I ورکول کیږي، او له II د I دا a21/a11 - ځله او له III دا a11 / a31 - ځله د I كموي. ددې څخه لاندې سیستم لاس ته راځي:

$$\begin{array}{ll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11.35) \\ II & b22x2+b23x3=b2 \\ III & c33x3=c3 \end{array}$$

دویم پل (قدم) : د b22 |=0 نیوني سره په 'II او 'III باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخې سره سم د ګاوس الګوریتم استعمالیږي : سړی 'II بي تغیره پریږدي اوله'III دا b32/b22-ځله د 'II كموي، له دې راپیداکیږي

$$\begin{array}{ll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11.37) \\ II & b22x2+b23x3=b2 \\ III & c33x3=c3 \end{array}$$

د ګاوس د شیما فورمالیتي سره سم بیا دا شكل غوره كي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3
II' = II-(a21/a11)I		b22	b23	b2
III' = III-(a31/a11)I		b32	b33	b3
III'' = III' - (b32/b22)II'			c33	c3

$$x3 = c3 / c33$$

$$x2=(1/b22)(b2-b23x3)$$

$$x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سیستم ۰(مقایسه بیلګه ۱۱ . ۱۶)

I x1 -x3= -2

II x1 + x2-x3 = 0

III 2x1 -x2 = 0

د ګاوس الګوریتم سره په لاندې ډول حل کیږي

x1 x2 x3 RS

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	-1	-2
II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0
II'= II - I	0	1	0	2
III'= III - 2.I	0	-1	2	4
III'' = III' + II'	0		2	6

x3=6/2=3

x2=2……………………

x1=-2+x3=-2+3=1

بیلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

I x1 + x2- x3 = 0

II x1 -x3 = 0

III 2x1+ x2 = 1

د ګاوس د الګوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	0
II	1	0	-1	0
III	2	1	0	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- --------------------

II'=II-I	0	-1	-2	0
III'=III-2.I	0	-1	-2	1
III''=III'-II'	0	0	0	1

دلته دی "0 = 1 " تضاد. سیستم نه اوبی کیږي یا حل نه لري.

بیلگه ۱۱ . ۲۰: (مقایسه یا پرتله بیلگه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

I $x1 + x2 + x3 = 3$

II $x1 + 2x2 + 3x3 = 6$

III $2x1 + 3x2 + 4x3 = 9$

په لاندې ډول د گاوس په الگوریتم اوبیونه ده

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	3
II	1	2	3	6
III	2	3	4	9
II'=II-I	0	1	2	3
III'=III-2I	0	1	2	3
III'' = III'-II'	0	0	0	0

=x3 په خوښه

$x2 = 3 - 2x3$

$x1 = 3 - x2 - x3 = 3 - (3 - 2x3) - x3 = x3$

۱۱ ۰ ۳ په خوښه ډیر مساوات ، په خوښه ډیر ناپیژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاینیز سیستم برابرونونو په لار ښونی پیل کوو m (برابرون د nناپیژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1..................(11,37)$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$

$$...$$

$$...$$

$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوښه یا ازاد پرېږدو چې د برابرونونو ګڼون (تعداد) m د ناپیژندونکو n د ګڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرګندو دندو یا وظایف موږ دلته له څلور ناپیژندونکو څخه نه پورته کیږو او یوائې لاندې دوه متودونه څیړو

۱۱ ۰ ۳ . ۱ د n - م درجې دیترمینانت او د کرامر قاعده

پیژند ۱۱ . ۵ :

د n رییل ګڼونو aik یوه منظم سیستم n- م درجي دیترمینانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};........................(11,38)$$

لاندې سرې لاندنې رییل ګڼ یو هیږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې دیترمینانت Aik د (n-1) - م درجې دیترمینانت ده، چې پاتیږي، که په Dکې i - مه لیکه او k - م درځ ، متِه یا ستن (لیکه او درځ چې aikپه کې ولاړ وی) په کرښه لرې کړي یا کرښه پرې تیره کړي، یعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجې دیترمینانت شمیرل و- (n-1)-ام درجې دیترمینانت شمیرلو ته راتیټیږي .

په ځانګړي توره د څلورمی درجې دیترمینانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}; A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}\,etc$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو) په) 11 . 37 (کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

Dx1=D1,Dx2=D2, ...Dxn= Dn (11 . 42)

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت) ۱۱ . ۳۸ (کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .
د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره (پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰)

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; D_2=\begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots(11,43)$$

له(11 . 42) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):
د ځله ونې یا ضریب دیترمینانت (۱۱,۳۸) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په (۱۱ . ۳۷) د m = n سره) باوري دی

D |= 0 (اصلي حالت) (11 . 44)

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري(حل لري

x1=D1/D,x2=D2/D,...,xn=Dn/D. (11 . 45)

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري .
که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیونې لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو)

بیلګه ۱۱ . ۲۱:
لا ندې سیستم دې حل شي

I	x_1		$+x_3$		$= 0$
II	$2x_1$	$+x_2$		$+x_4$	$=0$
III		x_2		$-x_4$	$= 4$
IV	x_1	$-x_2$	$-x_3$	$+x_4$	$= -2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}1010\\2102\\010-1\\1-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\10-1\\-1-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}212\\01-1\\1-11\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0010\\0102\\410-1\\-2-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}012\\41-1\\-2-11\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2-1\\-21\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}41\\-2-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1010\\2002\\040-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}002\\40-1\\-2-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}202\\04-1\\1-21\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}40\\-2-1\end{vmatrix}+\left|2\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}\right|+2\begin{vmatrix}04\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1000\\2102\\014-1\\1-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\14-1\\-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}+\left|2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}=4-2+2(-2+4)=6\right|$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1010\\2100\\0104\\1-1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}100\\104\\-1-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}210\\014\\1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}04\\-1-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}01\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;\ x_2=\frac{-12}{-6}=2;\ x_3=\frac{6}{-6}=-1;\ x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چی د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغي له مخی څرګندولی شو چی کوم حل)ځواب(مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بیلګه څرګندوو

بیلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بیلګه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II -2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV-I	0	1	-2	1	-2
III'' = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV'' = IV' +II'	0	0	-4	3	-2
IV''' = IV'' + 2.II''	0	0	0	-3	6

x4 = -2

x3=1/2(4+3.(-2))= -1

x2=0+(-1)(-2)= 2......

x1 = -(-1) = 1 ....

بیلگه ۱۱ . ۲۳:

دا برابرونسیستم

I x1 +x2 +x3 +x4=4

II x1 -x2 -x3 +x4=0

III 3x1 -x2 -x3 +x4=2

حل یا اوبیونه ی نه لرې، لکه د ګاوس له شیما څخه چی لیدل کیږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2
II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10
III" = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2

دلته III" په ښتوالی يا تضاد خوندي لري " 0 = -2 "

بيلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سيستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپيژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4
II x1 -x2 -x3 +x4= 0
III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4
IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10
V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چی oe1 (ناپای ډېر) اوبيوني لري

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8
II' = II-I	0	2	- 2	0	-4
III'= III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV -I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II"= II'+2.IV'	0	0	2	6	8
III'=III'+4.IV'	0	0	4	12	16
V" = V' +2.IV'	0	0	2	6	8
III''' = III"-2.II'	0	0	0	0	0
V'''=V"-II	0	0	0	0	0

ګورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سړی کړي شي چی x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 II" له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 IV' او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4 په خوښه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4 ، په خوښه x4 ټاکو

او x3=4-3x4 په خوښه x4 ټاکو

یادونه : هغه کڼ یا نوره هم ښه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي۰

سړی د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په III' او V' پوري اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په II' اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په III' او V' لیکو مو کرښه تیره کړې وی) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یوائې له کرښی II' جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګیڼ سیستم بلل کیږي

I a11x1+a12x2+a13x3= 0.............

II a21x1+a22x2+a23x3= 0 (11. 46

III a31x1+a32x2+a33x3= 0……………..……………………

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

x1=x2=x3=...=xn=0 (11. 47)

که د ځلوونو د یترمینانت (۱۱ . ۳۸) لپاره D |= 0 باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یوائې اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۱. ۸ : یو هوموگین مساواتسیستم یواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري وي بیلگه ۱۱ . ۲۵ :

دا هوموژین برابرونسیستم

I $x1 + x3 = 0$

II $x1 - x2 = 0$

III $x1 + x2 + x3 = 0$

د

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (1+1) \neq 0$$

له امله یواځنی ساده اوبیونه $x1 = x2 = x3 = 0$ لري.

بیلگه ۱۱ . ۲۶:

دا هموگین مساواتسیستم

I $x1 + x3 = 0$

II $x1 + x2 = 0$

III $x1 + x2 + x3 = 0$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

د

له امله ناساده اوبوونه هم لري دا په لاندې ډول د گاوس د الگوریتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- یا باقي سیستم په معنا دی.

x1 x2 x3 RS

---

0 0 1 I 1

0 II 1 -1 0

0 III 0 1 1

II'=II-I 0 -1 -1 0

III' = III 0 1 1 0

II'' = II + III' 0 0 0 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چی II"تضاد نه لري x3په خوښه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I
څخه لاس ته راځي x3-=x1نوx3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نوx3 په خوښه

. تمرينونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چې ورسره بلد يو-پوهيږو او يا هم

۱ – کرښيز مساواتسيستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرينونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو څخه کار اخستلس شي، چې بيايې و ازمايو. د لته دې د زياتون يا جمعي قانون او همداسي د ګاوس الګوريتم ته لومړيتوب ورکړ شي ا و د ديترمينانت سره شميرنه دې يوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$ b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$ d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$ b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$ d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$ b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$
$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$

d) $4 + y = x$
$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$
$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$
$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3$
$\frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2} + \frac{3x_2}{2} = 3$
$3x_1 + x_2 = 2$

b) $\frac{2x_2 - 5x_1}{6} + \frac{x_1}{6} = \frac{x_2 - 2x_1}{3}$
$\frac{5-3x_1}{3} - \frac{4x_2 - 1}{4} = \frac{6x_1 + 23}{12} - \frac{3x_1 - 4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1 + 3x_2} - \frac{1}{3(3x_1 - 2x_2)} = \frac{1}{6}$
$\frac{5}{3x_1 - 2x_2} + \frac{6}{4x_1 + 3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1 - 2) + 4(2x_2 + \frac{3}{2}) = 0$
$5(x_1 + 3) - 3(x_2 - \frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1 + 4x_2 = 8$
$5x_1 - 2x_2 = 9$
$7x_1 - 8x_2 = 10$

b) $6x_1 - x_2 = 1$
$9x_1 + 2x_2 = 5$
$3x_1 - x_2 = 1$

c) $5x_1 - 3x_2 = -3$
$3x_1 + 5x_2 = 5$
$3x_1 - 1{,}8x_2 = -1{,}8$
$0{,}9x_1 + 1{,}5x_2 = 1{,}5$

d) $2x_1 - 3x_2 = 10$
$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$
$x_1 - 1{,}5x_2 = 5$
$0{,}5x_1 - 0{,}75x_2 = 2{,}5$

۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x_1 + x_2 = a$
$ax_1 - x_2 = b$

b) $3x_1 - 2x_2 = 5a$
$2x_1 - 3x_2 = 5b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2-4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شمیرنه

۱. ۳. ۱ کوم دوه اعداد لاندې خویونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع یا څلورئ کمون(تفریق) یې په ۱۰۰ لوییږي، په داسې حا لې چې ضرب یې په۳۲۵ زیاتیږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه یا زیاتون دومره لوي دی، لکه د تفریق مربع یې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د یا تفریق یې ۹۹ دی، وښایئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګڼونو څخه هر یویې په 2 لوېږي، نو ګڼونه څانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونوڅخه 3 کم شي ، نو داسې لاس ته راغلي ګڼ ځان نیسي لکه : 3 : 2 . دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګڼونو څومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره ځل یا ضرب شي، نو د ځلونو زیاتون یې 2222 دی. هر یو له دې ګڼونوڅومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دریکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پږیکشن یا پریوستون یې د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمخ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چې له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لرې دی نسبت و X ته ، دواړه مخ کلي X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلي دیوال، چې 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنۍ کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځې اوږده د هوارې دننه په 100 m^2 زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خونديږ کوي او دوه وتللارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقي واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1 / 4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړي دري بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دي ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړي ۷ بوتله او له دوم دري بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 الماني مارکه(DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود $450\ m^3$ اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل دري دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی $40\ m^3$ اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته $60 m^3$ اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یوځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم دري ورځي کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 1 / 5 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ اړتیاوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۶ . د یوې ګردۍ په چاپیرې چې ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقیې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقیې، که هغوي یو د بل په خټ لور حرکت وکړي، هر بدن په یوه ثانیه کې څومره واټن تې کوي یا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په یوه ګردۍ چې چاپرې یې ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانیوکې. د دواړو بدنونو سرعت څومره دی، که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم وي؟

۲

۲ . کرښیز مساوات سیستمونه د درې مجهولو سره

۱ – مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

a) $x + y = 14$, $x + z = 15$, $y + z = 16$

b) $x_1 - x_2 = 4$, $x_1 + x_3 = 18$, $x_2 - x_3 = 6$

c) $x_1 + x_2 = 6{,}6$, $x_1 - x_3 = 2{,}6$, $x_2 - x_3 = 2$

d) $x + y + z = 25$, $3x - 2z = 1$, $20y - 16z = 0$

e) $2x + 3z = 13$, $3x - 4y = 3$, $5y - 6z = 9$

f) $12x + 24y - 42z = 30$, $4x + 8y - 14z = 10$, $6x + 12y - 21z = 15$

g) $5x + 3y + 2z = 207$, $5x - 3y = 37$, $3y - 2z = 19$

h) $x_1 + x_2 - x_3 = 17$, $x_1 - x_2 + x_3 = 13$, $-x_1 + x_2 + x_3 = 14$

i) $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11$, $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$, $6x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 39$

j)
$$4x + 4\frac{1}{2}y - 6\frac{3}{4}z = 20$$
$$2\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z = 5\frac{2}{3}$$
$$1\frac{2}{3}x + 1\frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}z = 3\frac{1}{3}$$

k)
$$\frac{2}{5}x - y = 0$$
$$\frac{2}{3}x - z = 1$$
$$-\frac{2}{3}y + z = 2$$

۲ . ۲ – مساوات سیستمونه د ناټاکلو ضریبونو سره

a) $x_1 + x_2 = 2c$, $x_1 + x_3 = 2b$, $x_2 + x_3 = 2a$

b) $x_1 + x_2 = 2(a + b)$, $x_1 + x_3 = 2(a + c)$, $x_2 + x_3 = 2(b + c)$

c) $ax + by - z = 1$, $ax - by + z = b$, $-ax + by + z = a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $ax + y - cz = 2a$
$-ax + y + cz = 2c$
$ax - y + cz = 2ac$

e) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

f) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{a}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{b}$

g) $x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a$
$y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b$
$z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$

h) $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a + b$
$\frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b + c$
$\frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c + a$

۳ . په خوبنه زيات مساوات د په خوبني زياتو مجهولو سره

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 &= 1 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 &= 10 \\ 6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 &= 9 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 21 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 &= 19 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 &= -24 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 3 \end{aligned}$$

هوموجين مساوات سيستمونه:

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 20x_1 - 10x_2 + 15x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 9x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . الجبري مساوات یا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاینیز- یا ناکرښیز- یا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چې د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره یوارزښته (اکویوالنت) نه وي ، نالاینیز – یا ناکرښیز مساوات بلل کیږي او عمومي فورم یې په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \qquad (12 . 2)$$

دلته F (x) په x کې یوه ناکرښیزه یا ناخطي وییینه یا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چې ټول د xارزښتونه پیدا شي د کومو لپاره چې (12 . 2) باوري وي. باید په پام کې ونیول شي چې ایا یواځي رییل ارزښتونه پیدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چې پیدا کړو. د بیلګې په توګه لاندې ناکرښیز یا لاینیز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رییل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چې د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره بې مساوات باوري کیږي .ددې په څېټ یا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رییل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دي وکتل شي)، بلکه لاندې ایماګینار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وکتل شي) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړیکو ته پاملرنه وشي: اړیکو y=F(x) ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندونې بولم(ښه نومه ونه يې اوښتوني ده) په ځښ یا برعکس (2 . 12) یو ټاکنمساوات دی او x هلته يوه ناپيژندونکی یا اوښتونی دی.
د (2 . 12) برابرون یا مساوات اوبیونې یا حل ته د برابرون د F (x) صفرځای یا د مساوات F(x)=0 جذر یا ريښه هم وايي.
هغه برابرون یا مساوات چې په (۱۲ . ۲) فورم نه دئ ورکړ شوی کیدی شي چې په دې لاندې فورم واړول شي. د بیلګې په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

f(x)=g(x) او $\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کيږي

F(x)=f(x)-a.g(x)=0 او F(x)= f(x)-g(x)= 0

د نالاینیزو برابرونونو لپاره د لاینیزو برابرونونو په څیر راغونده (اختمامیه، رابنده، راتړلی) تیوري نه شته. په پولیزه یا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخې چې د صفرځاي معلومیدی شي. باید په نومریکو (numerischen Methoden) متودونو یا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې یا تقريبي ډول پیداشي

نالاینییز برابرونونه په دوه ټولګیو ویشل کیږی: الجبري او تراسځندنت چې په دې او راتلونکی څپرکي یا لکه چې ما استعمال کړې برخه کې یی څیړو، چې اوبیونې یی روښانه افاده شوې (explizit لاتین: واضح یا روښانه ، افاده شوی، اکسپلیځت) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څیړل کیږي چې په لاندې نورمال فورم یا – بڼه اړول کیدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0 ....(12,3)$$

دلته په (2 . 12) کی یو نالاینیز بلواک یا – فنکشن (F (x د یوه n - م درجې پولینوم په څیر مخ ته پروت دی . موږ په (۱۲ . ۲) کی د ضریبونو(ځله وونو) لپاره یواځی رییل ګڼونه پریږدو (په دې مانا چې ځلونه یواځي رییل وي، یواځی رییل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په (۱۲ . ۳) کی کيږ اړخ ته n - م درجه پولينوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 ....(12,4)$$

ته ټول ريشنل (- ريښتونی) بلواک یا فنکشن هم وايي، ځکه چی د ريشنل شميرله عمليو زياتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واريابلی او ai د رييل ضريبونو، ځلونو يا فاکتورونو باندې د ويش کارونی کارولو (عملي استعمال) له لارې منځ ته راځي .ټوليز برانرون يا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0..................(12,5)$$

کيدي شي په bn|= 0 ويش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاينيزفنکشن يا ۰ بلواک F (x) په (۱۲ . ۲) باندې په واريابلي يا اووښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمير کاروني يا عمليي او بالاخره دويش کارونه وکارول شي يا اجرا شي او رييل پارامتر (Parameterپه شميرپوهنه کې ثابت (همغۀ او يا مرستندويه لوي ده) تشکيل شي نو فنکشنونو ته بيا مات ريشنل فنکشنونه ويل کيږي.
دا تل د دوه پولينومونو يا ريشنل فنکشنونو د ويش په څير انځوروړ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ....(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) يا (۱۲ . ۳) برابرون اړول وړ دي . دا بايد په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳) لپاره يواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چيرې د نالاينيزبلواک يا - فنکشن جوړولو کی د ريشنل شميرعمليو تر څنګ د توان (مټ، په جګ) يا پوټنځ کول او جذر نيولوته هم اجازه ورکړل شي نو بيا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږيږ. يعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ويل کيږي او (۱۲ . ۲) برابرون بيا الجبري برابرون بلل کيږي ، دا ډول مساوات هم کيدی شي چی په (۱۲ . ۳) فورم واړول شي.

هره n - مه ريښه يا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د G(x) افادې یا ویینې له منځه وړل کیدی شي, که چیرې ځوك دا برابرون په یوه خوا راوړي او بیا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي یا د n پوتنځ یا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په ځرګندو یا معلومو بیلګوڅیړل کیږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځیرنه د (۱۲ . ۳) فورم برابرونونو ته راکښته کیدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابرون هم بلل کیږي. ټول نالاینیز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسځیندنت برابرون بلل کیږي . د ترانسځیندنت رابرونونو درې تیوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاریتمي برابرونونه ، او ګونومتریکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر ځیرني لاندې ونیول شي.

۱۲ . ۲ ځلوری(مربع-) مساوات په توان(مټ، جګ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاینیزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان یا مټ (په جګ ۲ هم ویل کیږي) برابرونونه دي چی ځلوری یا مربع برابرونونه بلل کیږي .د دې ټولیزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; ....(12,8)$$

په b2 یې ویش په لاندې ډول یو ورته ارزښته (اکویوالنت äquivalent) نورمالبڼه یا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_b; a_0 \neq b_0 / b_2); ....(12,9)$$

ددې حل د ځلوری پوره کونې یا مربعتکمیل ځخه په ګټه د بینوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a / 2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a^2{}_1}{4}; ....(12,10)$$

په دې ډول کیدی شي چی (۱۲ . ۹) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$$x^2+a1x+a0=(x+a1/2)^2+a0-a1^2/4 = 0 <=>$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

[x+a1/2]²=(a1²/4)-a0 (12,11)

که وي

(a1²/4)-a0>0 <=> a1² -4a0>0 <=> a1²>4a0 (12,12)

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots(12,13)$$

يا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بينا تل نا کميز يا نامنفي ګڼ پوهيدل کيږي، چی څلوری يا مربع یی a ده) . له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) څخه رييل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم ليکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots(12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توګه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پوهيدل کيږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2
په رېښتونی څلوری برابرون يا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0\Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0\Leftrightarrow a_1^2=4a_0;\ldots\ldots(12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لارې تيك يو رييل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a\ \ /2;\ldots\ldots(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیوني (۱۲ . ۱۸)څخه غږیږو.

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};...................(12,20)$$

له دې څخه هم چی په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};...................(12,21)$$

نو لاندې جمله ېی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د څلوری یا مربع) په توان یا جګ د ۲) برابرونونو د اوبیوني فرمول) د څلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) $x^2+a_1x+a_0=0$

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټیك دوه ځوابونه لري

د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساوتو لپاره ښوول کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۲ (د وييتا(Vieta)جمله) :

که x1 او x2 د ځلورۍ - يا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) اوبيونې وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2; ....(12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); ....(12,23)$$

حل : (۱۲ . ۲۳) فرمول په دريواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې ښخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د (۱۲ . ۲۲) فرمول د تصديق لپاره د بينوم دريم فرمول او $i^2 = -1$ استعمال ښخه په په (۱۲ . ۱۲) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په (۱۲ . ۱۷) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲ . ۱۹) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وييتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کيږي يا تصديقيږي

جمله ۱۲ . ۳ :

يو ۲ درجبيز پولينوم کيدی شي چی په دوه لايني فاکتورونو يا ضريبونو يا ځله وونو بيل يا ټوټه يا تجزيه شي:

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = b_2 (x - x_1)(x - x_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,25)$$

چيرته چي x1 او x2 د څلورې برابرونونو يا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبيونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) څخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نيولو سره لرو

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + a_1 x + a_0 =$$

$$= \frac{1}{b_2}(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ څخه دې ته راځول کيږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره ريبل اوبيو څخه خبرې وکړو (وغږيږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲) .(۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کيدی شي چی د فنکشن

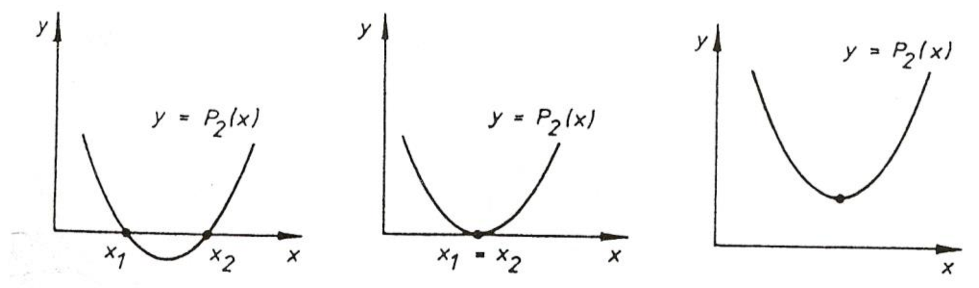
$$y = p_2(x) = x^2 + a_1 x + a_0$$

ځيرو يا شکلونو (ګراف) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټيزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که x هرڅومره کوچنی شي)که x د کميز ناپای په جګ يا توان شي) او همدارنګه x هرڅومره لوي شي (که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوييږي (ستريږي يا غټيږي) ، ځکه چیx^2 نسبت و x ته په توان يا قوي جګيږي له ټولو پولو(yد ناپای لور ته ځي)٠ د دې ډول پولو کره پيژند يا تعريف په ۱۹ - برخه کي لوستل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۲) حالت کی د x - محور په داړو ریيلو ځایونو x1 او x2 کی غوڅیږي؛ په (۱۲ . ۱۷) حالت کی په x1 = x2 ځای کی يي لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت کی ګډ ټکي ورسره نه لري یا نه وررسیږي (پرتله څیره . ۱۲ . ۱)



a) b) c)
Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، (۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بیلګو روښانه شي.

بیلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

a1 = - 1 , a0 = -6 او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی یاتعقیب څخه باوري کیږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3-2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله (۱۲ . ۱۷) حالت مخ ته لرو ۰ دوه ئيز رييل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱ څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1=x2=2$

جمله ۱۲ . ۳ :

په لاندې ډول باوري کيږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x\ +x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$,$a0=13$ او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت (۱۲ ، ۱۹) مخ ته لرو.

د کونیوګیرت(کنجوګيري) کمپلکس جوړه اوبيونو يا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې بڼه يا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\left.\right)4-13=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$$
$$\Rightarrow x\ =2+3i;x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x\ =(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د جملی ۱۲ . ۳ له مخې داسی دی

$$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسی (۱۲ . ۹) اوبی په ښکاره ډول ساده کیږي، که یو ځلی a0 اویا a1 ورك شي:

د $a0 = 0$ لپاره لرو $x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$

د $a1=0$ لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ څلوری(مربع-)برابرون چی په نورمالبڼه

مخ ته نه دي پراته

که یو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو باید په دې بڼه واړول شي.

بلیګه ۱۲ . ۴ :

$$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$$

$$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$$
$$-x^2-2x-4=x^2-8x$$
$$x^2-3x+2=0$$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$
$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول یا ناپیژندلی یا اوړیدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو باید په صفر ویش ناممکن یا ناشونوالی په پام کي ونیول شي.

بیلګه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$

تیك هلته مانا لري، چې وي $2x^2+2x-4 \;|=0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کیږي او بیا ازمائل کیږي، چي ایا د ماتلاندې شرایط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$

$$-x^2 = -4$$

$$x_{,2} = \pm 2; x \;\; = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8+4-4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پیل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانګړي برابرونونه ، چی په څلوری یا مربع برابرونونو بیرته بدلیدلی شي

د n - مي درجی مساواتو(۱۲ . ۳) یو څو ځانګړي حالتونه کیدی شي چی د څلوری برابرونونو یا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي یا اوبی شي۰ دا ځانګړی حالت موجود دی یا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = ... = a_{n-3} = 0 \qquad (12\,,27)$$

دn- می درجی برابرون بیا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; ....(12,28)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; ....(12,30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : په پورته کې له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون يو څلوري - یا مربع برابرون دی، چی د جملې ۱۲ . ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی یا حل لري $x = 0$ چی دا (n-2)- ځله رامنځ ته کیږي $x3 = x4 = ... = xn=0$

بیلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبیونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; ....(12,32)$$

یو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ یا جفت - وي

$$n = 2k \qquad (12 . 33)$$

او فقط (ټیك) ځله وونې یا کوایفیڅینتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; ....(12,34)$$

دلته داسی ځای په ځای کوو

$$y = x^k; ....(12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره د y لپاره څلورې برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12, 36)$$

د لاندې ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k/2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0};......................(12,37)$$

د(۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1;.........................(12,38)$$

ټولې اوبيونې وڅيرلی شي، چی د $k = 1$ لپاره ساده دی، د $k = 2$ لپاره(بيکوادرات برابرون) (د څلورې څلورې يا د مربع مربع) يا د ريپلو y1 او y2 لپاره د تراوسه څرګندو ميتودو سره تل کيدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټوليزه توګه ستونځی لري.

بيلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بيکوادرات برابرون $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$ کيدی د سوبستيچيوشن يعني بدلون له لارې $y = x^2$ په څلورې برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چی د بيرته بدلون(-سوبستيچيوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 \,,\; x^2 = -9$$

لاندې اوبی يا حل لري

$$x1 = 2 \,,\; x2 = -2 \,,\; x3 = 3i \,,\; x4 = -3i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسيستمونه چی بيرته په ځلوری برابرونونو بد ليد لی شي

يوه د نالاينيزو مساواتسيستمونو لړئ کيدی شي چی په ځلوری برابرون يا مربع مساواتو بيرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بيلګي راوړو.

بيلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$

$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کيږي، $y = 1-x$، او دا حل په دوم برابرون کی اينوول کيږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4+6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$

$$x = 3, x_2 = -2$$

د (۱۲ ، ۴۰) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2, \; y2 = 3$$

نو دا نه لاينيز برابرون لاندي اوبيونې لري

$x1 = 3, y1 = -2$ او $x2 = -2, y2 = 3$

بيلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سيستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی یواځي د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وریا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو(ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کیږي:

$$y + x = xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کیږي

$$y = 1 - ax \qquad (12, 43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کی ایښول کیږی یا ځای په ځای کیږي

$$1 - ax + x = x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2 - ax + 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی (۱۲ . ۴۴) برابرون مخامخوالی لري یا په ښتوالی لري یا تضاد لاس ته راکوي » $1 = 0$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴) ښخه لاس ته راځی $x^2 - x + 1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \text{.......................}(12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه باید په پام کی ونیول شي:

د $a > 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو , $a > 4$ او د $a < 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \quad (12, 46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ریل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{....................}(12.47)$$

په دې پوروې د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{.................}(12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وازمایيل شي چی د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول) نابرابر په صفر دي . ټل 1 /2 < x1 دی. که 0 = x2 وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هيڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی

که 0 =y1 یا 0 = y2 وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم‌لرو $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$

په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) سر ه سم، دوه

مختلف رییل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي

x2, y2 . او x1 , y1

د

1/4-1/a=0 <=> a=4 (12 , 49)

لپاره(۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲، ۴۴) ډبل رییل حل لري

x1 = x2 = 1 /2 (12,50)

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت ډبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

y 1 = y2 = 1 - 4. (1 /2) = -1

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ . ۱۹) یو ریل، ډبل ګڼلی حل موجود دی

x1=x2=1/2 , y1=y2= -1 (12 , 51)

د

1/4-1/a < 0 <=> 1/a > 1/4 (12 , 52)

لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د 0 < a لپاره (۱۲ ، ۵۲) د a<4 کتمټ (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کتمټ دی (له دې امله په ځتوالی یا تضاد) .

نو د(۱۲ ،۵۲) باور لري، د

0 < a < 4 (12 , 53)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره . په دې حالت کی (۱۲ ، ۴۴) کونجوګیري کمپلکس اوبیونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; ....(12.54$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخی په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; ....(12,55)$$

له دې ارزښتونو هیڅ هم صفر کیدی نه شي .پس په یوځاي شوي یا راټوله توګه لرو:
برابرونسیستم (۱۲ ، ۴۱) د a = 0لپاره اوبی نه لري، د , a < 0 په همدې ډول a >
4لپاره دواړه ریل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د a = 4 لپاره رییل ډبل ګڼلي
اوبۍ (۱۲ ، ۵۱) او د 0< a <4لپاره دوه کونجوګیري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ،
(۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲ . ۳ دریمه درجه مساوات یا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې n- (ام (درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د
مساواتو مربع سیستم جملو ته ورته جملی د دریمی درجی مساوات لپاره ځیږو.
د دریمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولینوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad (12 , 57)$$

لاندې بنستیز خویونه لري: که x ډیر لوي شي یعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$
نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی دx^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بیړه
جګیږي او بیا همداسې و x ته هم . که a1 او a2 کمیز یا منفي هم وي نو y به د لویو
x- ارزښتونو لپاره زیاتیز یا مثبت وي. داچي x^3 د کمیز x - ارزښت لپاره له صفر
کوچنی دی، نو په همدې ډول
x->-o د y -> -o
لپاره .د دې ډول »پولوارزښت یا لیمس« لپاره کره تعریفونه بیا په ۱۹ برخه کی په
پراخه توګه څیړل کیږي .د یو-x ارزښت) خورا کوچنی هم کیدی شي (شته چی د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره $y < 0$ وي اود یو x - ازښت) چې خورا لوي هم کیدی شي) ، د کوم لپاره چې $y>0$ دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ باید د مساوات (۱۲ . ۵۶) یو رییل اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلګو کی سړی کړی شي چې په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائیلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توګه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلګی:

بیلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 -4x + 12 \qquad (12 , 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$X = 0 , 1 , -1 , 2$

$Y = 12 , 6 , 12 , 0$

په دې توګه یو رییل صفرځاي پیدا شو

$$x 1 = 2 \qquad (12 , 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شیما په بنسټ یو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چې بیا د مټ(توان= لوړولو ته اړتیا نه پیدا کیږي او پولینومونو د فنکشن ارزښت ساده پیدا کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 +(11 / 2) x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad (12 . 61)$$

د صفرځاي پیداکولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰)مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي)ترتیب شي وشمیرل شي (، څکه چې هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$X = 0 , 1 ,1 / 2$

$Y = -9 , 16 , \quad 0$

نو

$$x1=1/2 \qquad (12 , 62)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) یو رییل صفرځای دی

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12, 63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3

Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لارې لاندې رییل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12, 64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \qquad (12, 65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1

Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12, 66)$$

په ټولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چې د دریم درجې برابرونسیستم (۱۲ . ۵۶) لپاره تل یو رییل اوبی یاحل $x1$ شته دی. دا یو واقعیت دی چې بي له شوونې یی لیکو، چې دا پولینوم (۱۲، ۵۷) بي له پاتي په لاینیز فاکتور ($x - x1$) ویشل کیدی شي او یو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دریمه درجه برابرون (۱۲ . ۵۶) کم له کمه یو رییل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.............(12,67)$$

دلته نو بیا نور د دریمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلورېبرابرون یا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کیدی شي چی لاندې جمله فرمولبندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دریمه درجه برابرون درې اوبیوني یا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad (12 , 68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - درې رییل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی (موجود دي)

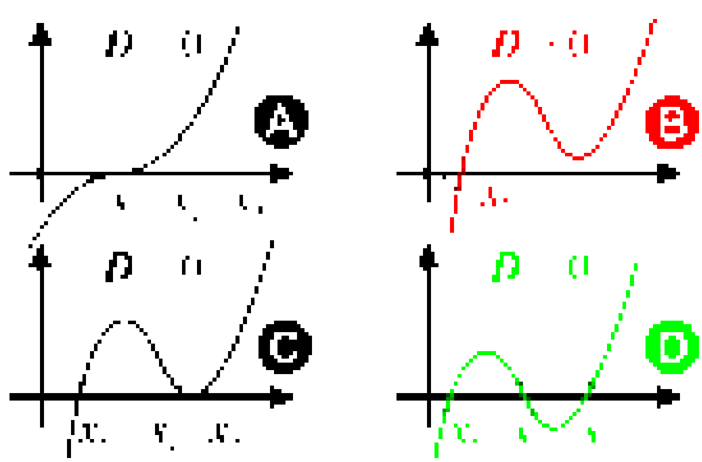
۲ - یو رییل حل x1 او ددې سره مختلف یو دېبل رییل حل x2=x3شته دی .

۳ - یو رییل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - یو رییل حل x1 او یوه جوړه کونجوګیرت کملکس اوبیوني یا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څیره د ټولو راشنل فنکشنونو(۱۲ . ۵۷) تیپیکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښایي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کیدی شي د دریمی درجي پولینومو لپاره د ویبیتا جمله تصدیق کړي چې د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دریمي درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اوبیوني وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$

$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$

$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx2 او x3 اوبیوني ولټول شي.

بیلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . . ۲ ۴ . برخي له مخي د پارشل Partial -(ټوټه-(ویش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$..\underline{x^3+2x^2}$$

$$........-x^2-4x+12$$

$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$

$$..............-6x+12$$

$$..............-6x+12$$

له x² - x - 6 = 0 څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو ریښو ځوابونو سره
، $x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$
او داسی دی:

$$x^3-3x^2-4x+12 = (x - 2)(x-3)(x + 2)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخی اوبی
$x1 = 1 / 2$
لري او داسی دی:

$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا (□) له $x^2 +6+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه ریښل حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل ریښل حل سره، یعنی لرو $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دی

$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د(۱۲ . ۶۴) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$

له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسی دی

$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵) برابرون د (۱۲ . ۶۶) برابرونونو له مخې ځواب $x_1 = 1$ لري، او داسې دئ

$$(x^3 - 5x^2 + 17x - 13):(x-1) = x^2 - 4x + 13$$

له $x^2 - 4x + 13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملې ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه ریيل حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x_1 = 1 ,\ x_2 = 2+3i ,\ x_3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = (x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) = (x-1)(x^2 - 4x + 13)$$

۱۲ . ۴ د ریښې (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کې د ریښی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرګند شو چې ځنګه د ریښې برابرون په ریشنل برابرونو اوله دې سره n- مې درجې برابرونو بدلیدلي شي. دا دې دلته د بیلګو په څیر پاتي وي. یواځې ریيل اوبیونې به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :

د ریښې برابرون

$$7 + 3\sqrt{2x+4} = 16; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,72)$$

ډیر ساده کیدی شي چې په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4} = 9; \sqrt{2x+4} = 3; 2x+4 = 9; 2x = 5; x = 5/2; \ldots\ldots (12,73)$$

د ازمایلو لپاره که (۱۲ . ۷۳) برابرون په (۱۲ . ۷۲) برابرونونو کې خوندي شي، نو څرګندیږي چې دا دx-ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7 + 3\sqrt{5+4} = 7 + 3.3 = 16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۵:

د ریښی برابرون یا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0;..........(12,74)$$

کیدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3;..........................(12,75)$$

د ازمایني لپاره، که (۱۲ . ۷۵) د پیل په برابرون (۱۲ . ۷۴) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون (۱۲ . ۷۴) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره یا په دې تعقیب د پیل برابرون ځواب نه لري.) داسي کیدی هم نه شي، ځکه چي تل $2x + 19 > 0$ دی)٠

دا ساده بیلګی موږ ته را ښایي چي باید د ریښی مساواتو حل تل وازمایل شي چي ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چي شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیږدي چي ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمایلو لپاره نه دئ چي ګوندې ټیك یا صحیح شمیرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب یو اړیین سما ندیز پل یا ضروری منطقي پل دئ .

په ټولیزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f(x)=g(x) \qquad (12,76)$$

په یو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x)=G(x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي ، یا تری کم شي، یاداوړه خواوې په یوه ګڼ ځل (ضرب) شي او یا وویشل شي (په دې حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ریښی لاندې راشي او یاپه توان پورته شي نود پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په څټ (برعکس، مخامخ). کیدی شي چی اړول شوی برابرون (۱۲ . ۷۷) زیات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) ته . دا به په لاندې بیلګه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۶:

د ریښې یا جذر برابرون یا مساوات

x-x-1=2x-1 (12 . 78)

څلورې یا مربع ته د جګولو له لارې دا بنه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بیا څلورې یا مربع کولو سره سرې یو مربعمسوات لاس ته راوړي

x(x-1) = 0 (12 , 79)

چې لاندې اوبې یا ځواب لري :

x1 = 0, x2 = 1 (12 . 80)

دا د (۱۲ . ۷۹) اوبیونې دي، مګر باید و ازمایل شي چې ایا دا د (۱۲ . ۷۸) اوبیونې هم دي که نه.

د x = 0 لپاره په (۱۲ . ۷۸) کې دوه ریښې نه دې تعریف یا ددوه ریښو پیژند نه شته، نو x = 0 د (۱۲ . ۷۸) اوبیونه نه ده .

د x = 1 لپاره لاس ته راځي 1 - 0 = 1

له دې امله x = 1 د پیل بیلګې (۱۲ . ۷۸) یوګونې ځواب یا اوبې دی .

بیلګه ۱۲ . ۱۷:

د ریښې برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,............(12,81)$$

کیدی شي چې په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بنه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} \Rightarrow$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;.........(12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برابرون یا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, ...(12,83)$$

د ټولونورو x لپاره $|x^2-4x+3| = 0$ دی ، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2 - 7x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x3 = 0, x4 = x1 = 3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمايل کيږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پيل برابرون ډکوي.(باوري کوي، پوره کوي)

د $x = 3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله $x = 3$ د پيل برابرون يا مساوات (۱۲ ۸۱) اوبی یا حل دی . د

$x3 = 0$ او $x2 = 1,$

لپاره ريښي پيژند نه لري يا تعريف نه دی، نو له دې امله د پيل برابرون (۱۲ . ۸۱)

اوبی حل $x = 3$ (12 . 85)

يواځني حل دی

۱۲ – تمرينونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدټاکلو ضربيونو سره

1.1.1. a) $x^2 - 4 = 0$ b) $3x^2 + 27 = 0$

c) $x^2 - 9x = 0$ d) $5x^2 = 125\,x$

1.1.2. a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$ b) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

c) $(x - 6)(x + 5) = 0$ d) $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضريبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سيتم، کوم مو مربع مساوتو ته لاربښودوي يا بيايي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$ b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مي درجې ځانګړي مساوات، چېپه مربع مساوات بیرته اړول کیدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو یا معلومو ضریبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو یا نامعلومو ضریبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a - b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a + b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مي رجي مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$ b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$ d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د xاو هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$ b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$ d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګنونه ځان داسې نیسي لکه 1 : 3 . ددې ګنونو د مربع زیاتون ۱۵۶۰ دی. دا ګنونه څه نومیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د درې یو په بل پسې ګڼونو د لوي ګڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنیوګڼونو د مربعو زیاتونونه. دا ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

پ) د کوم مثبت ګڼ لسرځله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت) مات 1 /4 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزیه کړی، چې لاندې زیاتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ یې لاس ته راشي.

. ۶ . ۲ . الف) په یوه برابر برقجریان کی مقاومت په دیرش اوم Ω 30 لوییږي، په کوم کې چی د برقوه په همغه د 220 V (وولتېه) شپانونګ په پنځه امپیر (1,65A) کوچنی‌شي . مقاومت او برقوه څومره دي؟

ب) دوه سیخونه چی مقاومت یی Ω 60 یو له بل توپیر لري؛ ځي یوه د غبرګ چالانولوعمومي مقاومت Ω 22,5 کړي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

. ۶ . ۳ . الف) یوه د بایسکلځغلونی لار چې ۲۲۵ کیلو متره اوږده ده، د یوه موادو موټر څخه په دریتیم ساعته لنډ وخت کې وهل کیږي،چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بایسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بایسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دی؟

ب) د سپورت جشن کې یو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپیل څخه یونیم ساعت وروسته له یوه بایسکلسپورتي څخه وروسته کیږي، کوم چې له مخامخ کیدو, نیم ساعت وروسته B ته رسیږي، او سملاسي بیرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسیږي په کوم کې چې ځغاستی و B ته رسیږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لري ده؟

پ) دوه ډبډبي ځغاستي یوبل باندې نیغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور په ډبډبیو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانیه کی، دوم څلور متره په ثانیه کی دي دوي له ۳ ثانیو وروسته یو ۳۵ متره لریوالی یو له بل لري، دوي یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لرووه، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت) د ګادي یو لاین د موټرځغاست سرك لمړی برخې سره غبرګ غزیدلی. د یوه موټر ځغاستي پیل کې د یو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشینونه په همغه جګوالي دي، که موټرځغاستی منظم تعجیل او یو تعجیل د $10m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72 \ km / h$ دی؟

ټ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لایپخیږ ځخه د دیساو په لور بایسکل ځغلیدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له دیساو ځخه د لایپځیږ په لور راتلونکی بایسکل ځغاستی سره مخامخ کیږي. ورستنی ۱۰۰ دقیق د مخه دیساو ته راځي لکه دوم ولایپځیږ ته. د دیساو او لایپځیږ ترمنځ لرېوالی یا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړنجیز دریځګوډي کې ، کاتیتې ځانونه داسې یوبل سره نیسي لکه 3:4 ، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب) د یوه ولاړکونجیز دریګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتیتو زیاتون یي۱۷ سانتیمتره اود یوې کاتیتې او هیپوتینوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ) د یوه سمکونجیز (ولاړکونجیز) دریګوډي کاتیتې څومره لویې دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتیمتره وي ، د دریګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت) د یوه ولاړګوډي نیمی (قطر) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لویږي. د سمکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري. د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاړ اړخ)

ټ) د یوې ګردۍ وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګرډ کې دننخاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا څونډي مربع اړخ)

ج) د یوې ګردۍ نیمی باید څومره لوي، که چې دننه منخشوې مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح) که د یوې ګردۍ نیمی (قطر) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردۍ هواره دوه برابره کیږي. د ګردۍ سرچیني نیمی څومره لویه ده؟

خ) د یوه نیمغونډي نیمی څومره دی، که د هغه د دېوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشه کی یې ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د درېمې او څلورمې درجې مساوات

2.1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیری، چې د لاندې مسااتو حلونه یا اوبیونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازماېښت وکړئ!

۳ . ۱ – ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا څلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\frac{4}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\frac{\sqrt{x}-3}{7}-\frac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\frac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\frac{16-\sqrt{x}}{2}-\frac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\frac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\frac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\frac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $|\sqrt{3x+7}|+|\sqrt{4-x}|=3$

3.1.10. a) $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $(\sqrt[3]{x}-1)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۳ . ۲ – ریښه مساوات د نامعلومو ضریبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x} = a$ b) $\sqrt[3]{x} = b$

c) $a - \sqrt[3]{x} = b$ d) $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$

3.2.2. a) $\sqrt{x-a} = b$ b) $\sqrt[3]{a-x} = b$

c) $\sqrt[4]{a^4 + x} = a$ d) $\sqrt[6]{a^6 - x} = b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - \sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$

b) $(a - \sqrt{x})\,(b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})\,(d + \sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax} - b}{\sqrt{ax} + b} = \dfrac{3\sqrt{ax} - 2b}{3\sqrt{ax} + 5b}$ d) $\dfrac{2a + 3\sqrt{bx}}{3a + 2\sqrt{bx}} = \dfrac{3b + 2\sqrt{ax}}{2b + 3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c + d}$ d) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a\sqrt{x} + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c\sqrt{x} + d}$

3.2.5. a) $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$ b) $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$

c) $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$ d) $\sqrt{x + a^2} - \sqrt{x} = b$

3.2.6. a) $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \dfrac{b}{\sqrt{b-x}}$ b) $\sqrt{x+a} - \sqrt{5x - 3a - 4b} = \dfrac{2b}{\sqrt{x+a}}$

c) $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \dfrac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$

d) $\sqrt{3a - 2b + 2x} - 2\sqrt{3a - 2b - 2x} = \dfrac{a + 2b + 2x}{\sqrt{3a - 2b + 2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = \dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{3x^2 - 1} - \sqrt{3 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ ، ۳ – مساوات سيستمونه، چې ريښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$, $\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$, $x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$, $x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$, $y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$, $y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسڅندنت برابرونونه یا ـ مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دي ته ګوته نیول شوي وه، چی دلته یواځي هغه ترانسځندنت مساوات څېړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي.
دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتي اوبیوني یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دي امله باید د اړول شوي برابرون ټولي اوبیوني په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دي د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیوني پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات
د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 ....(13,1)$$

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په ځېټ یا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b ....(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دی

$$\log_b x = c ....(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخې لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سې افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$:

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبیونه په لاندې ټولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c ....(13,5)$$

دلته f(x) یوه الجبري وېینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$ (همداسی) $x^2+x+6=2^3= 8$

او لاندې اوبیونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کیڼې لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وییڼه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x) + r_2.\log_2(x) + r_3.\log_b g_3(x) + ... = c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2} ....(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1) + \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3(x-1) = 2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه ریښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له ځلورئ یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

ټیک دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3) = \log_b(x-1) - 1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وبینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني
که $1<(b+3)/b-2)$ وي.

د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دې لرو $-2<3$دا د ټولو b لپاره پوره دی

د. $b \le 2$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \le 2$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وییني یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه ..$y1,y2$ په (۱۳,۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳,۵) لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳,۹) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2x-\lg x-2=0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په ځلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .
د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره
له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$$x_1 = 10^2=100 \quad \text{او} \quad x_2 =10^{-1}= \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$
د $x>0$, مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چی د اصلي ماتلاندې $(\lg x-1)(\lg x+1)$ سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$,\quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2x-3$$
$$0=3\lg^2x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې ځلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0 \;,\; y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1=lox_1=5; y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5; x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه برابرون کې لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو b سره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبې یا ځواب هم دی:

$$\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_4 \sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,14)$$

کیدی شي چې د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وييني يا افادي(f (x اکسپوننتونه ياځگځنونه وي، نو:

$a^{f(x)}=b, a>0, a|=1, b>0$ (13 . 16)

په دې ډول د لوګاريتمولو له لارې يو الجبري برابرون لاس ته راځي

$f(x)=\log_a b$..............................(13,17)

د کومو ځوابونه چی د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دی.

بيلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4}=4$

مو لاندې څلوری برابرون یا مربع مساوات ته بيايي (لاربنودوي)

$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$

د $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چی د پيل برابرون اوبيونې يا ځوابونه هم دي.

بيلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د يوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$x_1 + 1 = -3$, $x_2 = -4$

بيلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کيدی شي چي ناپيژندونکي د اکسپونتت يا په جګ څخه د دوه واره لوګاريتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \quad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنستونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c; ....(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13 . 19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وپینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x)سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)}) = 0 ;...................................(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13 . 21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو $y_1, y_2, y_3;$............... لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 .... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x \, (y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 . \lg 3 = \lg 1 = 0, \; x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2 . \lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} .... (13,25)$$

کې داسې بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} .... (13,26)$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};..............................(13,27)$$

له دې ځخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$
$$y_1=0; y_2=1$$

تیك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1 \qquad ....(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاریتمولو ځخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پیلبراږون پوره کوي٠
برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ ځخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

$$\ln^2 x-\ln x+1=\log_2 8 = 3$$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا ځلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x=-1 , \ln x=2, x1=e-1=1/e , x2=e^2$

۱۳ . ۳ ګونومتریکي- یا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګونومتري ساده برابرون لاندې څېره لري

$$\sin x=a\ ,\ \cos x=a \qquad (13\ .\ 29)$$

$$\tan x=a\ ,\ \cot x=a, \qquad (13\ .\ 30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه (۱۳ . ۲۹) ځوابونه لري ، که $-1 \le a \le 1$ باور ولري، نور ارزښتونه sin x او cos x نه شي غوره کولی(پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشميرني سره د تکمو یا ګوټکونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) یو ځواب لاس ته راځي

د(۱۳، ۲۹) لپاره

a F sin a F cos

د (۱۳،۳۰) لپاره

a F tan a 1/x tan

دا چي tan x او cotx پریودې همداسی 180°لري او په یوه اینتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180°لري د(۱۳ ۳۰) ټیك یو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x0 د(۱۳ . ۳۰) یو ځواب وي) چی د بیلګي په توګه د جبشميرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ... -3, -2, -1, 0 1, 2, 3, ...; .... (13,31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په (۱۳ ، ۳۱) کی د بیلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30° + k.180°$$

د کونجونو فنکشنونه sin x او cos x پریودې(تل بېرته راګځېدنه یا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالي اینتروال کې دوه حلونه لري. که چیرته د جبشمیرني سره یوه اوبیونه x_0 پیداشي، نو د sin x = a په حالت کې $x = -x_0$ هم یو حل دی، او $x = -x_0$ د cos x = a په حالت کې یو بل اوبي

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د (۱۳ ، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چې د بیلګي په توګه په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; ....(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°; ....(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; ....(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°; ....(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: (په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º

(په لینده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427

د) ۱۳ . ۳۲ (،) ۱۳ ، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13,833427 + k.360º = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657º + k.360 = 2,9001 + k .6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشمیروني سره مومو

$$x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.$$

د (۱۳ ، ۳۴) او (۱۳ . ۳۵) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k .360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4{,}843000$ حل په جبشمیرني پیداکوو

$x_0 = -59{,}999988° = -60° = -1{,}04718$

له دې امله د) ۱۳ . ۳۱ (له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$x_k = -60° + k.180° = -1{,}04718° + k.3{,}14159$

بیلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4{,}843000$ ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرني سره داسی

$x_0 = 11{,}666677° = 11{,}67° = 0{,}203675$

لاس ته راځي. په دې توګه د (۱۳ . ۳) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11{,}67° + k.180° = 0{,}203675 + k.3{,}14159$

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $2 > 1$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرګندومتودو یا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a\,, \quad \cos f(x) = a \qquad (13.36)$$

$$\tan f(x) = a\,, \quad \cot f(x) = a \qquad (13.37)$$

دلته کیدی شي چې $f(x)$ الجبري او یا ترانسځیندنته افاده ویکه بدل (سوبستیتوتي) شي

$$y = f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y = a\,, \cos y = a \qquad (13.39)$$

$$\operatorname{Tan} y = a\,, \cot y = a \qquad (13.40)$$

دا کیدی شي د جملې ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې $y_1, y_2, y_3, \ldots$ وي .

د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د $f(x) = y_i\,,\ i = 1,2,3,\ldots$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360°\ ,\ k = ...,-3,-2,-1,\ 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$, $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبوني (حلونهو په توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90° + 3k.360° + 120° = 210° + 3k.360°$$

$$\overline{x_k} = 3y_k + 120° = 450° + 3k\ .\ 360° + 120° = 570° + 3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x,$$
$$\sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x,\ ....) \qquad (13\ .\ 42)$$

دلته که د بیلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13\ .\ 43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2}\ ,$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}\ , \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}\ , \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}\ ,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2y^2\ \ (\text{usw.}$$

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳)، په y ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13\ ,\ 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې ....y3. y2 , y1 وي. نو بیاد(۱۳.۴۳)سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin x = y_i, i=1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چې په (۱۳ . ۴۲) کي ښول شي ، وازمایل شي، چې ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۱۳ . ۴۲) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x), ...) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سرې بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:
برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د (۱۳ . ۴۲) ، (۱۳ . ۴۴) سره ځان په ریښه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \iff \pm\sqrt{1-y^2} = 1-y \iff 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\iff 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0 , y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي ، چې د y2=1 لپاره برابرون (۱۳ . ۵۰) او له دې سره سم برابرون (۱۳ . ۴۹) تل پوره دي. د دې په څنګ یا خلاف y1 فقط د (۱۳ .۵۰) حل دی ، که د
ریښی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښنه وي. دا حالت یواځي هلته مخ ته پروت دی، چې $\cos x>0$وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۱۳ . ۵۱) سره برابرون (۱۳ . ۴۶)حل یا اوبی شي او
حل یا اوبنونه یی په (۱۳ . ۴۹) کی کیښول شي:

$$\sin x = y_1 = 0 , x_k = k\pi ; \ k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1 , x_k = \pi/2 + 2k ; \ k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (۵۲ . ۱۳) په (۴۹ . ۱۳) کینوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځي جفت ګنونه دي($x\pi = 2k\pi$) که(۱۳ . ۵۳) په (۱۳ . ۴۹) کینوول شي، نو لاس ته راځي

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د (۱۳ . ۴۹) ټولې اوبیونې په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k \,,\; x_k = \pi/2 + 2k \;;\; k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,... \quad (13.54)$$

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0$ (13.55)

سره کیدی شي د ریښنی مساوات ځخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له ځخه (۱۳،۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \quad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$,

$$y_1 = \frac{1}{2} \;,\quad y_2 = -1. \quad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې اینوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2} \;,\; x_k = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1, \quad \bar{\bar{x}}_k = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60° \\ 180° \\ 300° \end{Bmatrix} + k \cdot 360° = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره یې ازمایل یا ازماېښت اړیندی.

۱ - لوګاریتمي مساوات یا برابرونونه

1.1. a) $\log_4(x+1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg\sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln(x-1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg(2x+5) - \lg(3x+1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg(x-1)^2 = 6\lg 2$

1.3. a) $\lg(x-1) + \lg 3 = \lg(x^2-1)$

b) $\lg(x+1)^2 = \lg 2 + \lg(x+1) + \lg(x-1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg(x+4)$

d) $\lg(x-2) - \frac{1}{2}\lg 4 = \frac{1}{3}\lg 125 - \lg(x+1)$

1.4. a) $\lg x + \lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2\lg x = \lg(4+x^3)$ c) $\lg(152+x^3) - 3\lg(x+2) = 0$

d) $2\lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg(a - \frac{1}{a}) = \lg(1 - \frac{1}{a}) + \lg(1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg(ax) - \lg a + \lg\frac{b}{a} = \lg b + \lg\frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg\frac{x}{abx-1} = \lg(a-1) + \lg(a+1)$

d) $\log_a(2x+1) = \log_a(x-1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg(x^2+1) = 2\lg^{-1}(x^2+1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2)\log_5 x = 25^{\log_5\sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1-x)} + 5\lg(1-x) = 6$

1.8. a) $2\lg\lg x = \lg(3 - 2\lg x)$ b) $\log_2(x-14) = 1 + \frac{1}{2}\log_2(3x-26)$

c) $4\log_3^3 5x - 7\log_3 15x + 7 = 0$ d) $3\lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25 \lg x}$
c) $x^{\log_5 (5x) - 4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2 (4 \cdot 3^x - 6) - \log_2 (9^x - 6) = 1$
c) $\log_2 (9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$ d) $x (\lg 5 - 1) = \lg (2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2 [2 + \log_3 (x + 3)] = 0$ b) $\log_5 [\log_2 (\log_4 x)] = 0$
c) $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1$ d) $\dfrac{\lg x}{\lg (x+1)} = -1$

۲ ـ اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$
c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$
c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$
c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$
c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$
c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$
e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$
g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$ b) $2^{x+1} - 3^{x} = 2^{x+3} - 3^{x+2}$

c) $3^{2x-1} - 5^{3x-2} = 3^{2x+1} - 5^{3x+2}$ d) $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x} + 2 = 0$

e) $5^{4\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 = 0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2 = 0$

g) $3^{x+1} - 2 = 9^{x}$

h) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^{x} + 5^{x-1} + 5^{x-2}$

i) $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$ j) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$

k) $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$ l) $3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}} + 0{,}5 + 9 = 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x} - 17 \cdot 2^{-(x+2)} + 1 = 0$

e) $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2}$ f) $12\sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$

i) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

2.8. a) $\frac{3^{x} + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x} + 1}{2^{x} - 4^{x}} = 6$

c) $4 + \frac{2}{3^{x} - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x} + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x} = x$

۳ – ګونومتریکي – یا کونجکچیز مساوات

3.1. a) $\tan x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x = \frac{2}{5}$ d) $\tan x = -1$

3.2. a) $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0{,}309$ b) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 0{,}809$ d) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$ j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$ l) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x - 3\sin x\cos x = 0$ b) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

c) $\tan^3 x + \tan^2 x \;\; 3\tan x - 3 = 0$ d) $\tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 0$ b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 1$ d) $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$

e) $1 - \sin x = \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$ f) $2\sin^2\frac{x}{2} = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$

g) $1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0$ h) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$

i) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$ j) $1 - \sin x\cos x + \sin x - \cos x = 0$

k) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$ l) $\sin x\cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$

m) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$ n) $(\cos x)^{\sin x} = 1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

۱۴ . ۱:نابرابرون(نامساوات)

۱۴ . ۱ . ۱ بنسټيزې کلیمی او شمیرقوانین

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنخښی$<, \geq, >$ او $\leq$ له لارې یو د بل سره تړلي وي.

په لاندې کی به نابرابرونونه تر څیړنی لاندې ونیول شي، چی یوه یا دوه ریيلی واریابلی یا اوښتونی ولري . یو نابرابرون د دوه واریابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښایي، د هغو سره چی واریابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګنددي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دی ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واریابل یا اووښتونې یی غوره کولی شي او په ترم کی د هغي ځاي په ځاي کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونی وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډیري L کی سره راټولیګي.

په لاندې برخه کی به ډیر د وینامنطق(ویناسم اندیز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ (او د ډیري عملیو سومبولونه) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.

د نابرابرونونو سره شمیرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونیول شي(مقایسه برخه ۳)، دلته دې a , b , c او dرییل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c,$ (14,1)

$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c$ (14,2)

$a:b<b:c$ (14,2)

$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c$ (14,3)

$a:c>b:c$ (14,3)

$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c$ (14,4)

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په څټ کیږي یا که غواړئ برعکس کیږي. د بیلګي په توګه $3 < 4$ مګر که داوړه خواوې د 1 - سره ځل شي نو لاس ته راځي $-3 > -4$

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښو > سره باور لري دا په دې مانا چې$a \le b$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز (مثبت)دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$a.b>0 \Leftrightarrow$ (14,5)

$\Leftrightarrow a:b>0\ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0),$ (14,5)

$a.b<0 \Leftrightarrow$ (14,6)

$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0).$ (14,6)

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \mid= 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې توپیریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$a.b \ge 0 \Leftrightarrow (a \ge \wedge (a \ge 0)) \vee (a<0 \wedge b<0)$ (14,7)

$a:b \ge 0 \Leftrightarrow (a \ge 0 \wedge b>0) \vee (a \le 0 \wedge b<0)$ (14,8)

۱۴ . ۱ ۱الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :

یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د ریيلګڼونو R برخه ډیر) ده۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو اینتروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشي ، د ګڼکرښی یوه ټاکلی برخه ده، چی له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینتروال کی دننه وي یا خونډې وي نو د بند

اینتروال څخه غږیږو او که اینتروال پورې اړه ونه لرې، واز اینتروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینتروالونه.
د اوبیډیری په ورکولو سره په ګڼکرښی باندې، لاندې د انیتروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینتروال مختلف تیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده.

1. $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ واز اینتروا ، اخر تخري په اینترول اړه نه لیر
2. $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ بند اینتروال ، اخر توري په اینتروال ئورې اړه لري
3. $[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ ښی واز اینتروال
4. $(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ کینې واز اینتروال
5. $(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$ښي لورته ناپاي او کینې لور ته واز اینتروال
6. $[a,\infty) = \{x \mid x \geq a\}$ښي لور ته ناپای او کینې لور ته بند اینترال
7. $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$ښي لور ته واز او کینې ورته ناپاي اینتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\}$ ښي لور ته بند او کینې لورت ناپاي اینتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینتروال ، ټول رییلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیری
11. $\varnothing$ تشډیری

لاندې اینتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیری هم په اینتروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیری ټولنه ورسره جوړوي.

1. $[-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \mid x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \mid x \geq a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a, \infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty, \infty] = \mathbb{R}^+$

پورته ته الترناتيو يا بديلي ليکنبڼه Alternative notation

په نړيواله توګه يو بل ډول ليکنبڼۀ په لاندې ډول ورکو لکيږي

$]a,b[= \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

$[a,b[= \{ x \mid a \leq x < b \}$

$]a,b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$

يادونه : داپورته د اينتروال ډولونه د نړيوال جال څخه راکښته شوي، دا مې هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انيتروال : ٠٠٠٠ $[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\}$

نيم و از اينتروال :٠٠٠٠٠ $(a,b]=\{x|a<x\leq b\}$

نيم واز اينتروال :٠٠٠٠٠٠ $[a,b)=\{x|a\leq x<b\}$

واز اينتروال : ٠٠٠٠٠ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اينتروال : (-oe,b]={x|x≤b}

کښ بند ناپای اينتروال : [a,oe)={x|x≥a}

ښی واز ناپای اينتروال :٠ (-oe,b)={x|x<b}

کيڼ واز ناپای اينتروال :٠ (a,oe)={x|x<b}

ناپای اينتروال : {x د ګڼکرښی تکی دی|x}=(oe، -oe)

بيلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستيزه ډيری Rکی د لاندې برابرون پيژندډيری غوښتنه منځ ته راوچوو.

$x - 2 = 1 + 7 - x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : د دې ترم $T1(x) = x - 2$ پیژنددیری ده:

$D1 = [2 , oe)$

په همدې توګه د ترم $T2(x)=1+7-x$ پیژنددیری ی ده: $D2 =(-oe,7)$

د برابرون دپیژنددیری لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \cap D_2 = [2,\infty) \cap (-\infty,7] = [2,7]$$

لاندې ځیره وګورې(متاسفانه، چې ښه ځېره نه شم کښلی)

$D2=(-\infty;7]$

$D1=[2;\infty]$

۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعدې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چې یوه اوښتونې یا مجهوله ولري، او اوبیونې یې په ټولیزه توګه د اینتروالونو له لارې انځوریږي.

(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو $5x-6<4+9x$ دواړو لورو ته $-9x + 6$ ورزیاتوو، نو لرو $-4x < 10$ دواړه خواوې په 4 - ویشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي $x > -5/2$

د اوبیونې ډیر یا اوبیدیری : $L=(-5/2,oe)$

که په یوه غوښتونکی ځل یا ویش کی ځله ونی، همداسې پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مختخښي په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چې وي، باید په پام کې ولرل شي، چې یواځې هغه د نابرابرون شمیرل شوي د x - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول یی سملاسي (په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېرۍ یا برخحلډیرۍ کیدی شي چی د غوځډیرۍ په ځیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیرۍ شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوځډیرۍ جوړښت، کیدی شي چی د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په ځیر په ګڼوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیرۍ د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیرۍ ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

(3x-5)(x-2)<4(x-2)

که په (x-2) باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د x > 2 لپاره (x-2)>0

د x = 2 لپاره (x-2)=0

د x <2 لپاره (x-2)<0

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړۍ حالت:

$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته ښه بدلون څخه لاس ته راځي

$3x-5 \le 4 <=> 3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځي هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځي هغه x د

$x \in (2,\infty)$

سره د اوبیو یا اوبیونو په ځیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$L_1 = (2,\infty) \bigcap (-\infty,3] = (2,3]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم حالت:

$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$

د لته په (x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.

د x = 2 ارزښت لیکلو ربښتیا وینا $0 \geq 0$ لاس ته راځي او له دې امله

L2 = {2 }

دریم حالت:

$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$

د 0 < 2 - x له امله د (۱۴ . ۳) له مخی پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کی راوړل شي:

$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$

د برخه اوبیډیریو ټولنی څخه ټول اوبیډیر) لاس ته راځي:

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$

نو ټولې اوبیونې هغه x د ي د کومو لپاره چې لرو: 2< x < 3

په لاندې بیلګو کي نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

(3x-1)/(2x+4)<2

د شرایطو 0=|2x+4له مخی، دا په دې مانا چی 2=| x د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د x>-2 لپاره (2x+4)>0

د x<-2 لپاره (2x+4)<2

سره سم یواځې دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

ځیره ۱۴ ۱ الف: دا ځېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبېدېری روښانه شو۰

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی۰

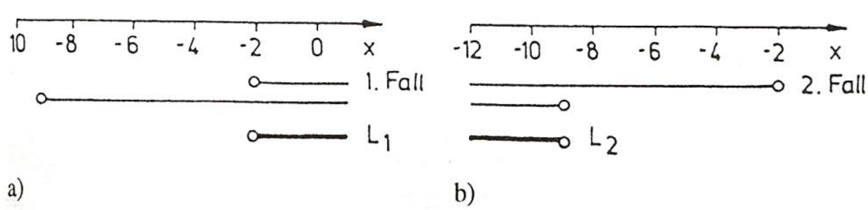


Bild 14 1

ځیره ۱۴ ا ب : دلته هم ګښونوکرښې شته، چۀ په هغې کې دا اوبېدېری روښانه کاږل شوي دي۰ ، که ځیره مې ونه کاږله، نو داکار بې ګران لوستونکی هم وکولای شي۰

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چی په (۵.۱۴) تر (۱۴ . ۸) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښایي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګې راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښنته شوي، له دې امله يې ليکښه د مخکنی ليکښنې سره توپير لري. دا لاندې لرو .

$$ax + b \ > 0, \qquad a \neq 0$$;

$$x^2 - 5 < 0$$;

$$|2x - 5| \leq x + 10$$;

دلته اوبيونې اينتروالونه دي. ښول کيږي، چې اوبيډيرى څنګه پيداکيږي او د دې لپاره

اړيين شرايط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه ګڼ زياتيدلی يا کميدلی شي
- که دواړه خواي د کميز ګڼ سره ځل شي يا په کميز ګڼ وويشل شي، نو مخنخښه تغير خوري. که زياتيز وي، نو دواړه خوا په توان کيدی شي او ريښج يې وستل کيدی شي، پام دې وي، چې برابرون بيا زياتيزه او که کميزه مخ نخښه غوره کوي او يا دواړه
- موږ 1.9:1) اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلسټ يا اوبيډيرى

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبیډیرۍ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ 1.9:2(اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \iff x^2 < 5 \iff |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روابنه تشیرح لپاره یا شنني لپاره یو د حالت توپیر رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا یا $x > -\sqrt{5}.$ ورته نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \iff -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبیډیرۍ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مورږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x-5\leq x+10,\quad x\leq 15,\quad \Longleftrightarrow$$

$$2x-5\geq 0 \quad x\geq\frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x\geq 5 \quad \Longleftrightarrow$$

(i) که وي $2x-5\geq 0;$ نو دئ $|2x-5|=2x-5,$ او مورږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2}\leq x\leq 15.$$

(ii)نو دئ $2x-5<0.$ $|2x-5|=-(2x-5)$ او لرو

$$-2x+5\leq x+10,\quad \geq -\frac{5}{3}\quad x\Longleftrightarrow \quad -3x\leq 5\quad \Longleftrightarrow$$

$$2x-5<0\quad x<\frac{5}{2}.\quad \Longleftrightarrow \quad 2x<5\quad \Longleftrightarrow$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3}\leq x<\frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیرئ له دې امله ده

$$\mathcal{L}=[-\frac{5}{3},\frac{5}{2})\cup[\frac{5}{2},15]=(-\frac{5}{3},15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو څو تمرینونه ورکړ شوي، کۀ ګران مینه وال یې غواړې تمرین کړي٠

لاندې نابرارونونه اوبی کړی

(i) , $\frac{3}{x+5} < 2$

(ii) , $\sqrt{x^2+x+2} > x$

(iii) . $|x+5| > |x-2|$

بیلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$, $x|=-6$; $x |= 3$

د اصلي ماتلاندې $(3-x)(x+6)$ سره د حٔل له امله باید بیا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونیول شي. شرایط، د کومولہ مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کیدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې ومیندل شي:

$(3-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6> \vee (3-x)<0 \wedge x+6<0$

$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x>-6) \vee (x>3 \wedge x<-6) \Leftrightarrow -6<x<3$

نو (۱۴ . ۶) شوونې کوي یا ممکنه وي، چې هغه ورشو(ساحه یا ډیری یا نه هم شهچاپیریال) پیدا کړو چیرته چې اصلي مات لاندې کمیز یا نفي دی:

$(3-x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3-x) >0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$

$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x>3$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کې لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز ځله ووني یا مثبت فاکتور (x+ 6)(3-x) سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6 \geq 6-2x \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,\infty),$$

$$L_2 = (-6,3) \cap [0,\infty) = [0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x < -6 \vee x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-6) \cup (3,\infty)$

دا چی د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس(تاسیر لري:

$$x+6 \leq 6-2x \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$$

$$L_2 = [(-\infty,-6) \cup (3,\infty)] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $: L = L_1 \cup L_2 = [0,3) \cup (-\infty,-6) = (-\infty,-6) \cup [0,3)$

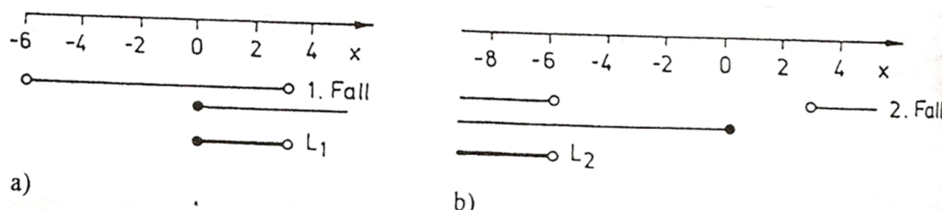


Bild 14.2 خاکره

د ځلورئ برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د ځلورئ ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کي نیولو سره دx^2 د مخ (کیڼ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x^2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چی دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چی د اړیکنخښي په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولوروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x_1=4 , x_2=1/2$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2}) > 0 \Leftrightarrow (x > 4 \wedge x > \frac{1}{2}) \vee (x < 4 \wedge x < \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x > 4 \vee x < \frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د (۱۴ . ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېرى : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسیره دې په یاد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کړې کښلو له مخې هم حل کیدی شي، په ځانګړي ډول هلته، چې اړوند مربع شکل رییل حل نه لري. بالاخره پهپای کې د وېش د مخنښې راوړلو یوه بیلګه ښایو.

بیلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\le 0,\ x\ne\frac{2}{3}$.

حل (۱۴،۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2}\le 0 \Leftrightarrow (x\ge -5\ \wedge\ x<\frac{2}{3})\ \vee\ (x\le -5\ \wedge\ x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\le x<\frac{2}{3}.$$

د سیستم حل ډېرى یا حل ست: $L=[-5,\frac{2}{3}).$

۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی یا مجهولی یا اوښتونې سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیډیرى L د یوګونو نابرابرونونو اوبیډیریو غوڅډیرى ده . ګټور یا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کی په نمره کړی شي ، ددې لپاره چې دا یوګوني (دا په دې مانا چې یو یو) اوبی کړی شو.

بیلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\ge 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\ge 3-x\Leftrightarrow x\le 2\Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0\Leftrightarrow(+1)(x-6)<0\Leftrightarrow -1<x<6\Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سیستم اوبیډیرى: Lدئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۱۴ . ۸

$$-2<\frac{4x-10}{x-1}<3, x\neq 1$$

د داسې نابرابرون ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دي:

$$I. -2<\frac{4x-10}{x-1}$$

$$II. \frac{4x-10}{x-1}<3$$

د همغه فاکتور(x-1) سره د ځل اړیین یا ضروری حالت توپیرېدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرګ د لیدوړ بڼی سره وڅېړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :
(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

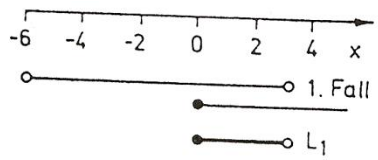
....I..II

	I	II
$1.Fall^{(1)}$ $x\in(1,\infty)$	$-2x+2<4x-10$ $\Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow x\in(2,\infty).$ $L_{I_1}=(1,\infty)\cap(2,\infty)=(2,\infty)$	$4x-10<3x-3$ $\Leftrightarrow x<7 \Leftrightarrow x\in(-\infty,7).$ $L_{II_1}=(1,\infty)\cap(-\infty,7)=(1,7)$
$2.Fall^{(2)}$ $x\in(-\infty,1)$	$-2x+2>4x-10$ $\Leftrightarrow x<2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2).$ $L_{I_2}=(-\infty,1)\cap(-\infty,2)=(-\infty,1)$	$4x-10>3x-3$ $\Leftrightarrow x>7 \Leftrightarrow x\in(7,\infty).$ $L_{II_2}=(-\infty,1)\cap(7,\infty)=\emptyset$
	$L_I=L_{I_1}\cup L_{I_2}$ $=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$	$L_{II}=L_{II_1}\cup L_{II_2}$ $=(1,7)$

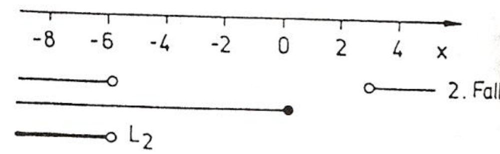
د LI او LII غوڅېدېری جوړول بیرته کیدی شي چې د یوګونو اوبېدیریوګنوړانګه باندې د لیدنی شي)(څېره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبېدیری:

$$L=L_I\cap L_{II}=(2,7)$$



a)



b)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو(ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیډیرئ د یوه اوبیډیرئ $R^2 = R \times R$ برخډیرئ ده، چی د هوارې په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دئ. په دې برخه کی به موږ یواځي د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \ (\geq 0 \ , <0, \leq 0 \ ) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو x , y او ثابتو ځله وونو(ضریبونو)

$$a, b, c \in R$$

سره د شرایطو $a|=0 \ v \ b \ |=0$ سره سم تر څیړنی لاندې ونیسو.
که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چی د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم (۱۴ . ۹) ، چی ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیډیرئ په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو(د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پرېښوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځاي شوي، نو راتلونکی کرښه د اوبیډیرئ پورې اړه نه لري او کیدی شي یواځي ټوټه ټوټه کرښی (پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چی د ډیرئ ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیرئ پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د y په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چی په یوه کره نیولي x په روښانه توګه د لویو y - ارزښتونو لپاره پوره دئ نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چی د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنی نیمی هوارې ټول ټکی اوبیډیرئ L جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴)

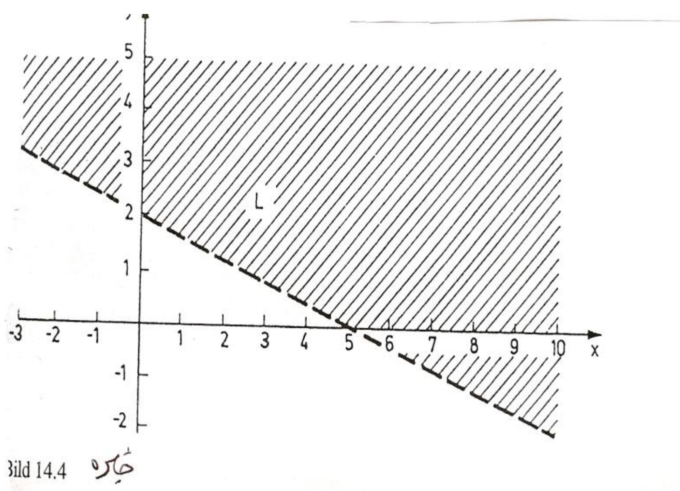
دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون (۱۴ . ۹) کی د مخه نیسي چي $b|=0$ دئ. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دئ، چی د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چی په کرښه ax+bx+c=0 نه وي پروت۰

ازمایو چي ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کی باور لري او یا نه.که ممکن وي نو د شمیرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0) ټاکو. دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا رینتیا وینا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبیډیری پیداشوی ځاي (ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسیا کوي) تصدیقوي.
دلته یوه څیره کښل کیږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ږدو او بیا کرښه باسو۰ په کواوردینات کې د هوارې هغه برخه، چې اوبیډیری ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابیډیری ده۰

د یوه نابرابرونسیستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کیږی او بالاخر ه بي د یوګونو اوبیډیریو غوځډیری نیول کیږي یا جوړیږي.



بیلګه ۱۴ . ۱۰:

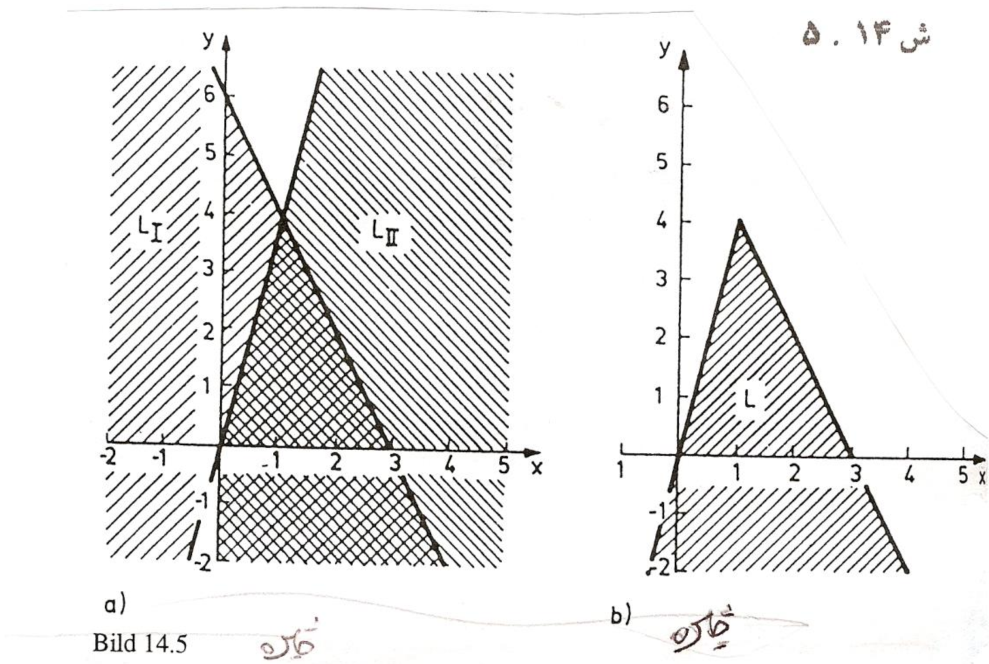
I . $2x+y<6$

II. $4x-y>0$

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبیډیري LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د (0 , 0) سیده برابرون باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلګي په توګه (1 , 0) کیښول شي، کوم چی د په څنوالي یا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې امله اوبیډیری LII کی نه دی پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف(. ش ۱۴ . ۵ ب دسیستم حلډیری L ښايي چي له دوه نیمکرښو بندیږي یا له دوه نیم کرښومحدودیږي.
د وړاندیزارزښت لري چی د تمرینونو په خپلواك كار کولو کی د غوښتونکو اوبیډیریو L د یوګونو نیمهوارو غوځډیری حتي تر غاړې پورې رنګینه یا کرښی کرښی راوکښل شي، چی په دې ډول یی یو کواوردیناتسیستم د انځورولو لپاره بسیا وکړي .ش ۱۴ . ۵



بیلګه ۱۴ . ۱۱:

I . x-3y-6<0 II. -x+y+1<0

III. x-6<0

دا اوبیډیری په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ کرښي
د پورته نابرابرونسیستم له مخۀ د هر نابرابرون لپاره کرښه کښل کیږي، په یوه کواوردینات سیستم کې او بیا د هوارې هغه برخه، چې دریواړه کرو کې رابنده منهواره وي، هغه یې اوبی دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

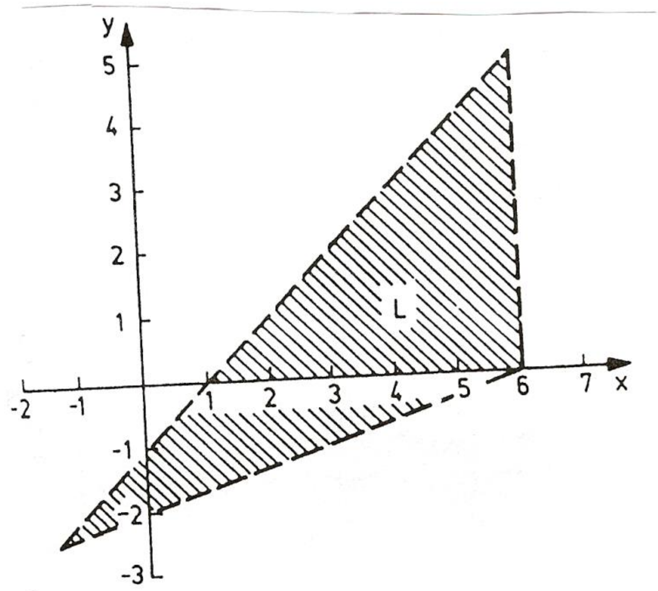


Bild 14.6 خاکه

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براورن یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر ریيلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه څرګنده ده چی د یوه ریيل ګڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیریږي٠
داسی دئ:

$$T(x) = T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) \geq 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

$$T(x) = -T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) < 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چی د مطلقه ارزښت لرې پرېښول شي، یا د نورو ترمونو سره په تړلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په (۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چي په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پرېښول کیږي چی ځانونه په قاعده کي په اینتروال وښايي، کوم چی دیسیونکت(پردي) برخه ډېرۍ د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چی (T(x ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چی د کنترول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رییل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي.

$$|a \,.\, b| = |a| \,.\, |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b|$$ د $b \neq 0$ لپاره

۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چی ایا دا اوبیونې په نیول شوي یا فرض شوي اینتروال کي پراته دی او که یواځي د اوبې په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوبیوني اوبیدیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوبیوني شونی یا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم
کی انځوریږي .
د دواړو فنکشنونو غوځټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبیونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

(14,11) د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

(14,11) د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

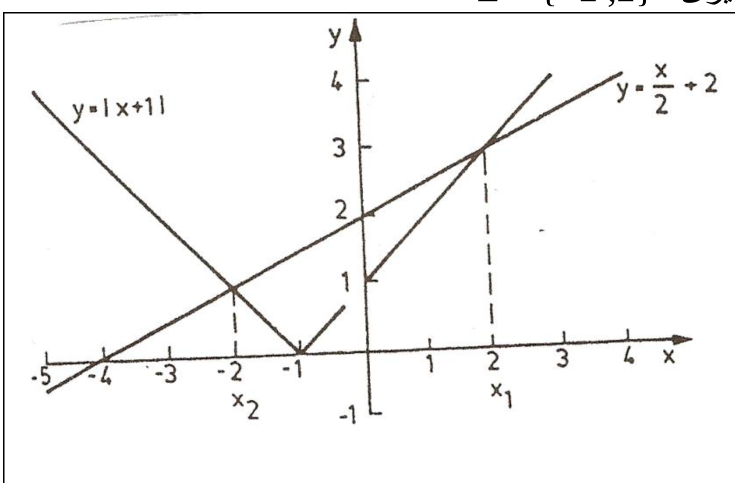
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیډیری $L = \{ -2, 2\}$



په داسی حال کی چی د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$, ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کیڼ اړخ، $y = |x+1|$ د (۱۴ . ۱۱) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.
اوبی : کیدی شي په ځ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شووني یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښنه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینتروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

|1- x|-|2x+3|=1

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د x<1 لپاره |1-x|=1-x

د x>1 لپاره =-1+x

او(لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د x>-3/2 لپاره |2x+3|=2x+3

د x<-3/2 لپاره =-1x-3

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

	x<-3/2	-3/2<x <1	x>1
|-1+x|	1-x	1-x	−1+x
|2x+3|	2x+3	-2x-3	|2x+3|

له دې امله د برابرون اوبې کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1 - x - (-2x - 3) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1 - x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1 + x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = -5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په څټ یا تضادکی دی، چی
x3 = -5

یواځي ښکارندډوله اوبی دی(دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په څیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبډیری : L = {-3,-1}

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې څرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي. د کینې اړخ یا لور مطلقه ارزښت خپلواك یا ازاد ښودل کیدی شی چی توټه توټه د مخه تیرشوي شمیرنو په ټوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقیبیږي:

د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

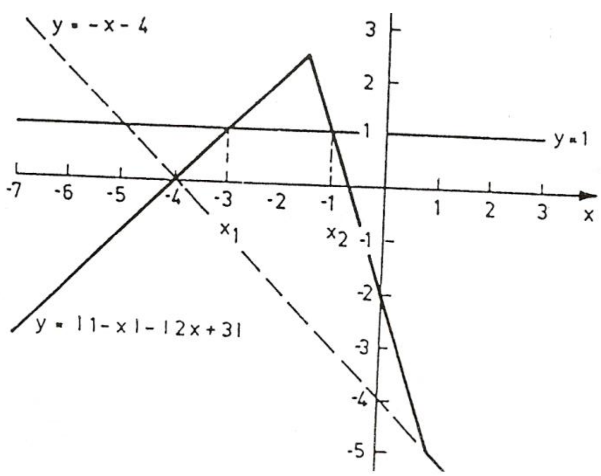
د $-2/3< x < 1$ لپاره $|1- x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - یا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شمیرل شوو اوبیونو پرتلې له پرتلې مقایسي ځیره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښایي، چی دواړه کرښې رېښتیا د $x < -3/2$

او $-3/2< x < 1$-لپاره رښتیا هره یوه بله یوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره یو بل نه پریکوي. په دریم حالت کی د اړوند کرښی ټوټی $y = -x-4$ د اوړدوالی پرتکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په ځیر حل د نیول شوي اینترا‌وال د باندې دی ځیره (شاید داځیره هم ځیره نه شي، کهٔ کرانو مینه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګټور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه ځیره باید ریښی او یا راغلی وي، یا راغلې وی۰



که د مطلقه ازښت نخښنی په یوه ځلوري - یا مربع ترم کی له منځه وړل کیږي، نو کیدی شي چی د مخنخښني غوښتل شوي ځیرنی چي په برخه ۱۴. ۱ . ۲ کی تر ځیرني نیول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بیلګه ۱۴ . ۵ دې مقایسه شي)

بیلګه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x^2 -6x + 5 | = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x < 5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2 = 0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5,65 \in [5, \infty)\ ,\ x_2= 3 - \sqrt{7} = 0,35 \in (-oe , 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

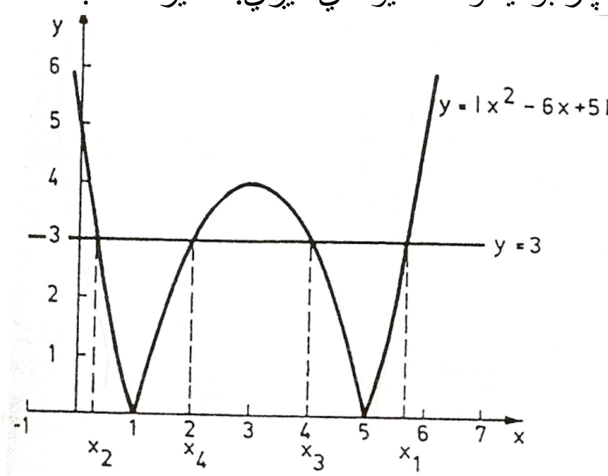
$L \Rightarrow x_3=4 \in (1 , 5)\ ,\ x_4= 2 \in (1 , 5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیدیری: $L = \{3 - \sqrt{7}); 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

خیره ۱۴ . ۹ د گراف له لاری اوبی بنایي. کینې لور $y=|x^2-6x+5|$

د (۱۴ . ۱۲) له امله د پارابوللیندو څخه یوځای کیږي. څیره ۱۴ . ۹



څیره ۱۴. ۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبې کی ، په کوم کی چی n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$, $i = 1,2,...n$ منځ ته راځي، 2^n حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دئ ، کوم چی موجود دی ، چی د ترم $T_i(x)$ د تیپ یا بڼی وي چی یا

$T_i(x)$ >0 او یا $T_i(x)$ 0> راکوي، یعنی د دوه توکو د وارییشن امکاناتو ټولګي ته (پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰)

قاعدې سره سم 2^n برابرونونه منځ ته راځي، چي په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیوني $x_1,x_2,x_3,......$ ولرودی شي. یوائی دا باید وازمایل شي ، چی ایا دا اوبې xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.

د دې ټولیزې تګلار پسی موږ په بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د

T1(x)=1-x, T2=(2x+1)

سره، په لاندې $4 = 2^2$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \ge 0 \wedge T_2(x) \ge 0:\quad (1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$$

$$2.\ T_1(x) \ge 0 \wedge T_2(x) < 0:\quad (1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \ge 0: -(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د3- = x1=1, x2لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرونو کی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چی بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دئ

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : |7-3x|>2

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت:

$$7-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$

$$7-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$

$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دويم حالت:

$$7-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$

$$-7+3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [, \infty)$$

$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$

$$\Rightarrow$$

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \setminus (5/3, 3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کيږي:

بيلګه ۱۴ . ۱۶: |x-5|<|x+1|

د يوګونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنخښی:

د x > 5 لپاره |x-5|= x–5

د x < 5 لپاره |x-5|=-x+5

او

د x ≥ 1 لپاره |x+1|=x+1

د x ≤ -1 لپاره |x + 1| = -x - 1

په يوه لید وړ توګه په لاندې توګه راټوليګي رايوځاي کيږي يا راغونديږي :

X > -1   -1≤ x<5   x≥ 5

|x-5| =   -x+5   -x+5   x-5

|x+1|=   -x-1   x+1   x+1

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1)$

|x-5|<|x+1|<=>-x+5<-x-1 <=> 0<-6

د هر x<-1 نابرابرون يوې ناريښتيا وينا ته لاربښودوي، چی په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چي: L1 = Ø

دوم حلات $x \in [-1, 5)$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x-5|<|x+1| \Leftrightarrow -x+5<-x-1 \Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow$

$x \in [2,\infty]$

$L_2 = [-1,5) \cap (2,5) = (2,5)$

دریم حالت: $x \in [5,\infty)$

$|x-5| < |x+1| \Leftrightarrow x-5 < x+1 \Leftrightarrow 0<6$

هر $x \geq 5$ نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: $L3 = [5, oe)$

حلډیری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,5) \cup ([5,\infty) = (2,\infty)$

بیلګه ۱۴ . ۱۷: $|x^2-4x-21|<24$

د $x^2-4x-21 \geq 0 \Leftrightarrow x<-3 \vee x \geq 7$

او $x^2-4x-21<0 \Leftrightarrow -3<x<7$

څخه لاس ته راځي:

د $x<-3 \vee x \geq 7$ لپاره $|x^2-4x-21| = x^2-4x-21$

د $-3<x<7$ لپاره $= -x^2+4x+21$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-3] \cup [7,\infty)$

$|x^2-4x-21|<24 \Leftrightarrow x^2-4x-21<24 \Leftrightarrow x^2-4x-45<0$

$\Leftrightarrow -5 < x < 9 \Leftrightarrow$

$x \in (-5,9)$

$L_1 = [(-\infty,-3] \cup [7,\infty)] \cap (-5,9) = (-5,-3] \cup [7,9)$

دویم حالت: $x \in (-3,7)$

$|x^2-4x-21|<24 \Leftrightarrow -x^2+4x+21<24 \Leftrightarrow x^2-4x+3>0$

$\Leftrightarrow x<1 \vee x>3 \Leftrightarrow$

$x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty),$

$L_2 = (-3,7) \cap [(-\infty,1)] \cup (3,\infty) = (-3,1) \cup (3,7)$

اوبیډیری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5,1) \cup (3,9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی به په یوه بیلگه کی داسی نامساوات وڅیړو، په کومه کی چی مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کی منځ ته راشی.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د (۱۴ ، ۱۰) له مخی د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) له مخی په هر وخت کی د همغه ترم مخنخښه باید په پام کی ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د $x<-1/2$ لپاره $|1+2x|=-1-2x$

او

د $x< 1$ لپاره $(1-x)>0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کی ګنوړانګه سره بیله یا توته کیږي، داسی چي په راتلونکو ګڼلو کی یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

	$X<-1/2$	$-1\leq x<1$	$x>1$
$\|1+2x\|$	$-1-2x>$	$1+2x$	$1+2x$
$=1-x$	>0	>0	<0

لومړی حالت: $x \in (-oe, -1/2)$

$$-1-2x\leq 1-x \Leftrightarrow x\geq -2 \Leftrightarrow$$

$$x \in [-2 , oe)$$

$$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [-2 , oe) = [-2 , -1/2)$$

دویم حالت: $x \in [- 1/2,1)$:

$$1+2x < 1- x \Leftrightarrow x<o \Leftrightarrow x \in (-oe,0]$$

$$L_2 = [-1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1-x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو سټ(اوبیډیرۍ):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لاینی ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

(۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه ښي لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بڼی(۱۴ . ۹) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1| > x-2x-4$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1 < 0$ لپاره $= x + y - 1$

لومړی حالت: $-x-y+1 > 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff -x-y+1 > x-2y-4 \iff -2x+y+5 > 0$

$L1 = \{(x,y) | -x-y+1 \geq 0, -2x+y+5 > 0\}$

دوم حالت: $x-y+1 < 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff x+y-1 > x-2y-4 \iff 3y+3 > 0 \iff y < -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1\}$

له دې سره L1 او L2 د اوبیډیرئ دوه نابرابرونونو غوڅدیرئ ده او کیدی شي، لکه څنګه یو نابرابرون د یوه ګراف سره انځور شي (څیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبیډیری بیرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبیډیریو تولندیرئ ده۰ (څیره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)۰

که په یوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې یا – وییني د (۱۴ . ۱۳) بنی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نیولو سره څلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.

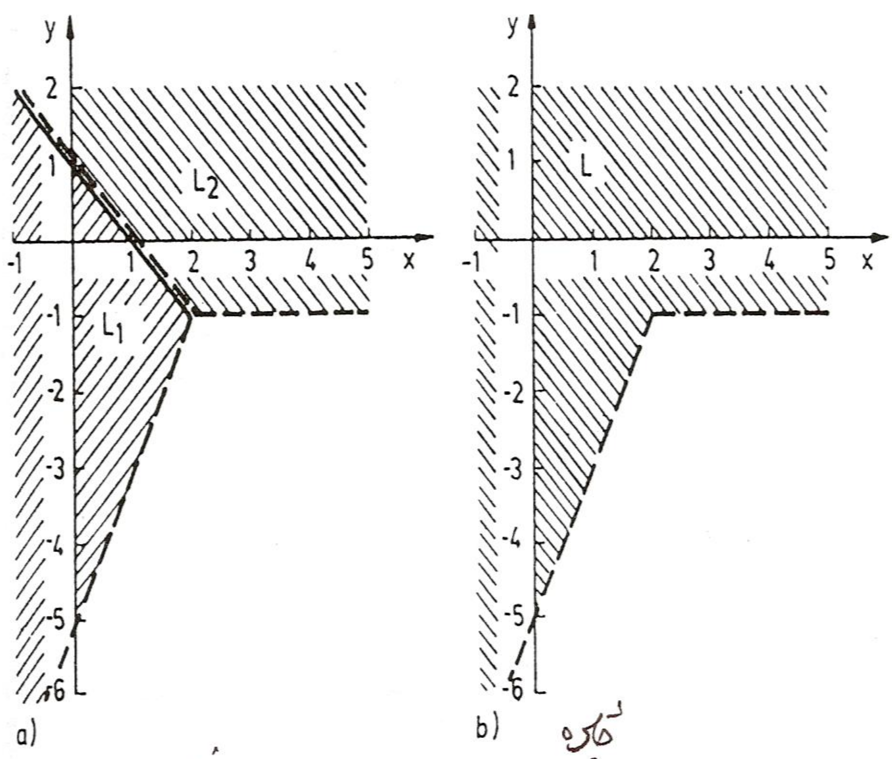


Bild 14.10 ځاره

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې نامساواتو حلډېرې پيدا کړئ

1. a) $8x - 3 < 2x + 9$ b) $5 - 7x \le 3x - 10$

c) $\frac{x}{2} - \frac{2}{3} > \frac{1}{2} + \frac{x}{9}$ d) $3(3x - 2) \ge 4(3 - 2x)$

e) $\frac{8x-5}{5} \le \frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x > \frac{5}{4}x + \frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9} + 6x \ge 2(\frac{5}{6} + 3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8} - 6) < \frac{x}{6} - \frac{x}{8} + 1$

2. a) $(3x + 1)(2x - 1) < (5x - 3)(2x - 1)$

b) $(8x - 9)(3x + 2) \ge (2 + 7x)(2 + 3x)$

c) $(7x - 3)(5 - 7x) > (3 - 7x)(5x + 3)$

d) $(5 + 2x)(7 - 5x) \le (10 + 4x)(2 - 3x)$

e) $x^2 - x - 6 \le 2x + 4$ f) $x^2 + 5x - 6 > 3 - 3x$

g) $x^2 + 3x \ge -2x - 6$ h) $x^2 - 4x + 4 < 4x - 8$

3. a) $\frac{3}{2x-4} \le 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x} \ge 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2} < 2$ d) $\frac{5x+3}{x} < -2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2} > 5$ f) $\frac{9-3x}{x-3} > -3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3} < 3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1} \ge 12 - \frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4} \le \frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x} > \frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3} < \frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1} \le \frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1} + \frac{3x+1}{x-2} > 4$ f) $\frac{x-3}{1-6x} - \frac{2x+1}{4x+3} \ge -\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2} + \frac{2x-3}{3x-3} \ge 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x} - \frac{2-6x}{1-3x} < \frac{3}{8} \cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x - 3)(3x - 2) < 0$ b) $(x + 3)(7 - x) \le 0$

c) $x^2 + 4x + 3 \ge 0$ d) $x^2 - 8x + 7 \le 0$

e) $x^2 + 4x + 5 < 0$ f) $x^2 - 6x + 10 > 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$

6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \le 0$

c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \ge 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$

g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4} \le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \le 0$

8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$

c) $8(x - 2) \ge \frac{20}{x + 1} + 3(x - 7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x - 6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرې وټاکئ

9. a) $2 + x \ge 2x - 7$, $5(x - 3) \ge 2(x - 3)$ b) $x + 6 < 14 - 3x$, $6 + 7x \ge 3x + 5$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$ d) $x + \frac{1}{3} \le 2x - \frac{7}{6}$, $5(x - \frac{3}{2}) \le 2x - 3$

10. a) $x^2 - 3x < 0$, $2(x + 2) < 4x - 1$ b) $x^2 + 6x + 8 < 0$, $2(x + 2) > x + 3$

c) $x^2 - 9 < 0$, $x + 2 > 2(x - 1)$ d) $x^2 - 3x + 3 > 0$, $4(x - 1) < 2(x + 1)$

11. a) $x^2 - 4x - 5 \le 0$, $x^2 + 6x - 16 < 0$ b) $x^2 + 2x - 8 < 0$, $x^2 - 3x - 4 > 0$

c) $x^2 - 5x > 0$, $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 - 6x + 5 < 0$, $x^2 + 8x + 15 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

12. a) $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$ b) $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$

c) $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$ d) $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$

13. a) $3 - x < 2 - 4x$
$x + 3 < \frac{1}{2}(x+1)$
$\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$

b) $x + 5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$
$4(x-1) < 13 - \frac{1}{4}x$
$2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاوېږی په کارتیزې کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکې انځور کړی.

14. a) $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$ b) $y < -\frac{2}{3}x + 2$

c) $x < 2y + 2$ d) $x > -y + 3$

e) $4x - 5y > 12$ f) $-3x - 8y \leq 24$

g) $2(y - 3) \leq 6(x - 1)$ h) $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$

15. a) $2x + 3y > -6$
$x - y < 2$

b) $3x - y > 3$
$x + y > 4$

c) $x > 1$
$x + 2y < 4$
$y + 3 > x$

d) $x - 4y - 6 \leq 0$
$2x + y - 3 \leq 0$
$y - 5 \leq 0$

16. a) $-2 < x + y < 2$
$-2 < x - y < 2$

b) $x > 2$
$-3 < y < 2 + x$
$x + y < 5$

c) $x^2 - y^2 \leq 0$ d) $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حاوېږی د شمیرلو او همداسې ګرافیکې لارې پیداکړی.

17. a) $|x - 3| = 5$ b) $|x + 2| = 7$

c) $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$ d) $|x + 3| = |3x - 4|$

e) $|x - 4| = |2x + 3|$ f) $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$

g) $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$ h) $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$

18. a) $|x^2 - 2x - 8| = 7$ b) $|8 - 2x^2| = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلېږی پیدا کړی

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلېږی په یوه په یوه کواوردیناتسیستم کې انځور کړی او ا نځور یې وکاږی

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ فنکشنونه(بلواك يا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کليمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چې ددې برخې په پيل کې دې کليمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کليمه کله د يواځنى ځيرونى، چې په هندسه کى خورا ډيره کارول کيږي يا استعماليږي ، کله د تابع(بلواك) او بيا زياته د فنکشن په نامه ځموږ په دې کار کى بلل شوې چې موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد يو، ځما په اند يا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولى وي. په لاندې کي به وګور چې خپلواکى او بلواکى ناپيوندونکى ځموږ د ځيړلو متن جوړوی

پيژند ۱۵ . ۱:

د يوې ريبلى واريابلى ريبل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن) د ريبلو ګڼونو ډيرى باندې ، د يوې ډيری $D \subseteq R$ يوه يواځنى ځيرونه ده. D دپيژند ډيرى نوميږي .

د ټولو ارزښتونو ډيرئ چي y يى د ځان لپاره غوره کولى شي، که x د پيژنددېرئ يا تعريف ډيري په دننه کى وځغلي، د ارزښت ډيری W بلل کيږي .

د ي وې قانونمندئ f له مخى هر $x \in M$ يواځني يوه $y \in W$ باندې تنظيميږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واريابل يا اووښتونى يا مجهوله بلل کيږي يا نوميږي او y بلواك واريابل يا اووښتونى بلل کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته : د $x<0$ لپاره $y=|x|$
دلته $D=R,W = [0,\infty)$ د $x>0$ لپاره $y=x^2$
پام دې وي چی په داسی حالت کي له کیڼ و ښې لور ته یا ګډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دئ ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیڅیت(واضح)روښانه و څرګند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ او ۱۵ . ۲ چی په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y =f(x)$ که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیڅیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به $2y-x-1=0$ $D=R,W=R$,فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپیلیڅیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیڅیت شنینیزه بڼه (ایمپلیڅیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیڅیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلګی په توګه : که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیڅیت حل کیدونکی نه دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځوروني ځانګړې بڼه پارامتري څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتوني یا واریابلې t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحې څخه)

$x = \varphi(t)\ , y = \Psi(t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oe به یوه پارامتري انځورونه وی او x = t , y = t/2 + 1 به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X ....-2	-1	0	1	2 ....
Y 2	0,5	1	1,5	2 .....

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....-3	2	-1	0	1	2	3 ...
Y....3	2	1	0	1	4	9 ...

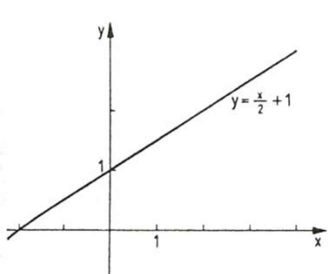


Bild 15.1 ځاره

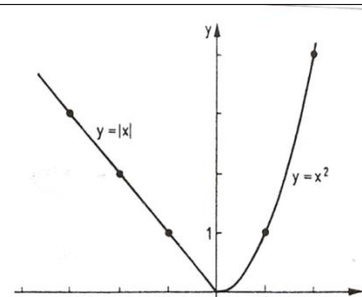


Bild 15.2 ځاره

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرږې له لارې، د هغه فنکشن انځوروني څخه عبارت ده ، چی د واریابلو

یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي .

څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال]a,b[کی هلته او هلته یا تیك هلته مونوتون جگیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1) \leq f(x2) \quad (f(x1)>f(x2))$
که د برابرونښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلگي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

و بیلگي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جگیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینتروال]-a,a[کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي
$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$
د جوړه فنکشنونو ځیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي) دلته هم ځیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي) بیا هم ځیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

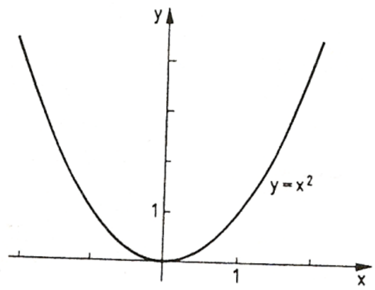
بیلگه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

$(-x^3) = -x^3$

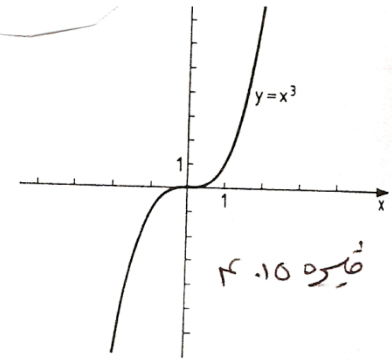
بیلگه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$(-x)^2 = x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۱۵. ۳



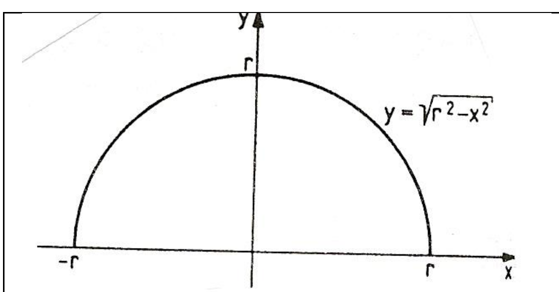
ځیره ۱۵. ۴

د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D (پیژنددیرۍ ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که
یو $k > 0$ داسې شته وي چي دا باور ولري :
$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بیلګه ۱۵ . ۵:

 	فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$ بند یا راګیر(محدود)(زه به دا له دې وروسته بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی ځیره ده ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \le r$

پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل
کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:
$f(x + p) = f(x)$
د دورانی یا تل راکځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي
فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي.

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرښې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\, x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دئ (ځیره ۱۵ . ۱)

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 ,\quad x2 = -2$$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶)

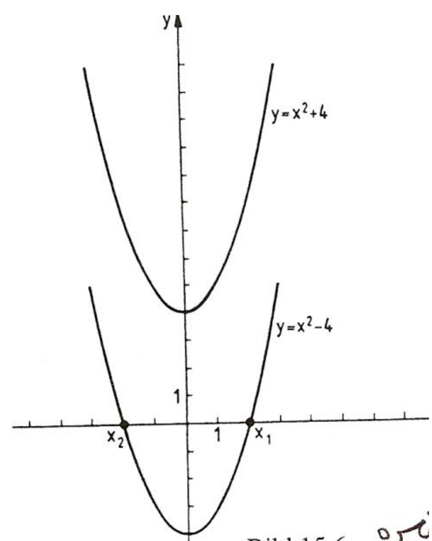


Bild 15.6 ځیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \quad , \quad y \in W \quad y = f(x),$

يويواځنى« يا يواځنى او يواځنى بلل کيږي، که هريو $y \in W$ د يوه $x \in D$ په واك کى وي يا هر يو $y \in W$ ته يوه $x \in D$ څيره شوى وي، د کوم لپاره چى باور ولري: ($y =$ f(x)يو يويواځنى يايواځنى او يواځنى فنکشن په څټکيدونکى دى ، دا په دې مانا چي دا يو فنکشن ($x = g(y)$ تعريفوي، يعني په څټ يا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو يا واريابلو د نخښى(نخونى) سره بدلى شي، نو د په څټ فنکشن په توګه لرو $y=g(x)$ دا د فنکشن روځنى يا وسره بده يا که غواړى مروجه څيره ده، چى x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کى واريابل يامجهولى يا ناپيزندونکى دي د $y=f(x)$ په څټ يا برعکس فنکشن لپاره داسى هم ليکلى شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن $y = x$ د خپل په څټ فنکشن سره کټمټ(- ورته) identic دى۰ د په څټ يا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

کرافيکى څيره $y = x$ په کرښه د $y = f(x)$(هندارونه) يعنى په هنداره کى څيرونه او لنډ يى: هندارونه) ده۰

بيلګي ۱۵ ، ۱ ته :

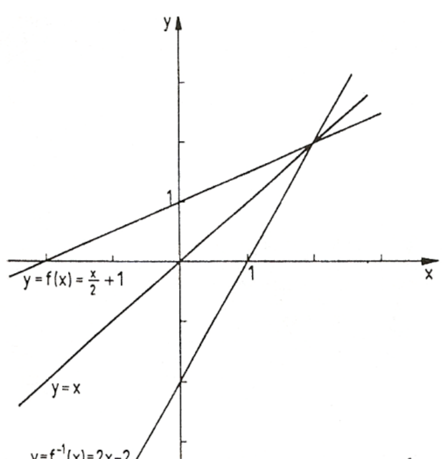


Bild 15.7a څاکره

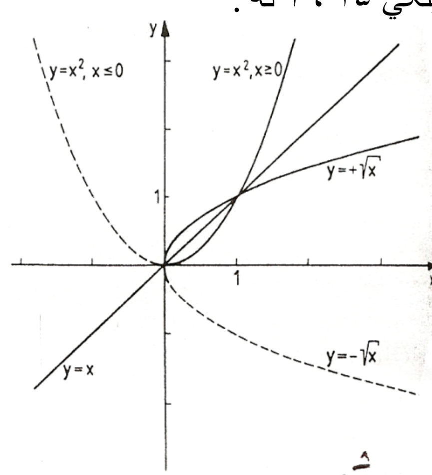


Bild 15.7b څاکره

د فنکشن $y = f(x)= x/2 +1$ چپه يا په څټ فنکشن داسى دى

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سړی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ځیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن
$x \in D$ $y = x^2$,
ځیرره ش ۱۵ . ۳) په څټکیدونکی دي یا په څټکیدونکی نه دی.
هر $y \in W$ =[0,oe] پوري دوه[-oe,oe] = $x \in D$ اړه لري، یعنی x=+yاو x=-y
مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونګی دی (او په دې ډول یواځنی او یوائنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2, x\geq 0$
ته چپه- یا په څټ فنکشن $y=+x$ دی، او $y = x^2 , x < 0$ ته چپه- یا په څټ فنکشن $y = -x$ دی. (ځیره ۱۵ . ۷ ب) .
په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په څټ فنکشن
$y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ځیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړدوله خویونو له مخی وځیرل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي فنکشنونه) وځیرل شي. د فنکشنونو ځیرل به د هغو ځانګړدوله یا کرکټریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام وموممي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a^2x^2+a_1x+a_0, n\in N;\ a_i\in R, a_n\neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x\in R$ لپاره تعریف دئ او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالاینی فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینی فنکشنونو ځیره(ګراف) یوه کرښه ده چې په y = n کی دy - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m = \tan\alpha$

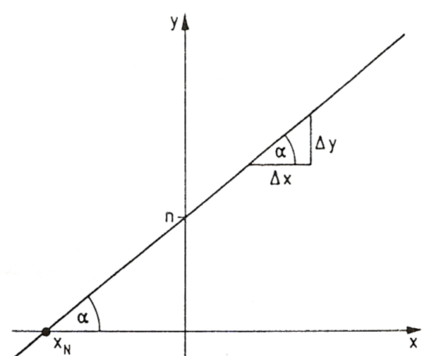


Bild 15.8 ځاکه

لري (ځېره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،

دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیك یو صفرځای (y = 0 لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښی برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي یو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرتکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا نوره ښه غږځتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توگه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه تولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c , a \ |= 0 \qquad (15 .3)$$

د مربع فنکشنونو ښیره) گراف (پارابول دی چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرگ ځغلي. کوایفیځینت) ځله وونې یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانگړي حالتونه تر ښیرنې لاندې نیسو.

$$1. \quad y=x^2(a=1 ,b=0,c=0) \qquad (15 . 4)$$

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(ځ . ۱۵ . ۹)

$$2. \ y=x^2+px+q \ (a=1 , b=p , c=q) \qquad (15 . 5)$$

او $x^2 + px$ ته د ځلوری - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px \ (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \quad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2/4$ راکښل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:

$$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$$

بیلگه ۱۵ . ۷:

$$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$$

(ځ،۱۵ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. $y = ax^2$ (a|=0,b=0, c = 0)

د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a| < 1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لورته واز دئ (خلاص دئ)

بیلګه ۱۵ . ۸:

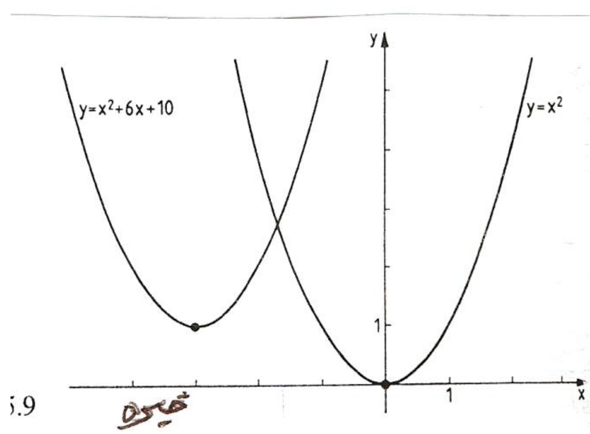
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(خ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c-b^2/4a^2$$



بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,(a=-1/2, b=1, c=4)

دککرۍ کواوردینات:

$$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4-12/(4.(-1/2)) = 9/2$$

دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

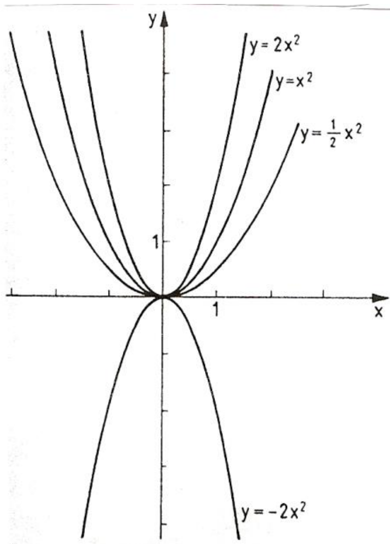


Bild 15.10 ځېره

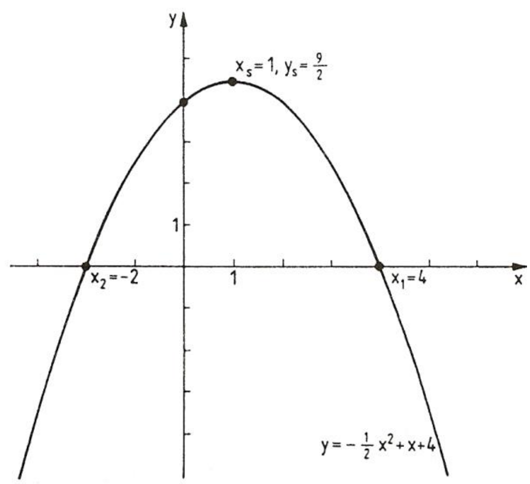


Bild 15.11 ځایره

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونـي دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي٠

و بیلګي ۱۵ . ۷ (خیره ۱۵ . ۹) ته :
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

فنکشن $y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي
د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:

a3 له x1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یې له x1 سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (ځرکندوو)

	a_2	a_1	a_0	خلونه یا ضریبونه
	a_3x_1	$(a_3x_1+a_2)x_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	منځنی خلونه
a_3	$a_3x_1+a_2$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$	منځنی زیاتون

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x_1 = -2$ او $x_2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.
یادونه: دا د هورنر شیمت زما په دې اوسنۍ د برینکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی).
اوبیونه) :

	1	-2	-14	-5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	7 = f(-2)
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	0=f(5)

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځایونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چرې ددریمی درجی ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ویش پولینومونو څلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړۍ کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او$f(x1)=0$ چی د$(x-x_1)$سره د څلونې له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د څلورۍ – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجې فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د څلونې په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولو n- م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2,,..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیڅینت یا ځله وونی لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه
$x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$
لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
$x_1 = 2$		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
$x_2 = 2$		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
$x_3 = -2$		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $2x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$
لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چی د دريمي او جګو درجو د ټول ريشنلفنکشنونو يوه څيره يا تصوير ولرودی شو، نور کرکټريستيکی يا د خويونو ټکی يی د ديفرنځيالشميرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بې له دې چی د دفيرنځيالشمير له مرستې کار واخلو ، کيدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وينا وې وکړی شو. مور په ليديدونکی ډول د فنکشن د پولی کليمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټيټك تعريف شي. دا د بيلګې په توګه دا مانا لري چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره ($f(x)$تل ارزښت g ته نزدې کيږي، که x د oe يانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د±oe <- x لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زياتيز يا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه دoe په لور ځي) .

که n جوړه او a_nکميز يا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty -$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کميز يا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_nکميز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$
$$n,m\in N_0;a_k,b_i\in R;Q_m\neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیږي، که n<m وي او نااصلي مات دی که $n \geq m$ ۰ نااصل مات فنکشن کیدی شي چي د پولینوم ویش له لارې تجزیه (توټه) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریښتونی ماتی برخی د زیاتون په څیر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:
$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$پاتی (باقي) سره. پس لرو:
$$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره یو صفرځای لري، که $x = x0$وي نو باور لري:
$P_n(x_0) = 0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x = x_L$لپاره تشځای (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$
د $x = x_P$لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بیلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو ټوټې کولو وروسته په لاندې فورم د لاینې فاکتورونوپه توګه لیکل کیږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای (ټیك ناپای ځای بللکیږي) xpکی کږه داسیمپتوتي کرښي $x = xP$ ته نزدې کیږي .د یوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې 0 / 0 شکل غوره کوي، له دې املـه د $x = xL$ لپاره تعریف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نیونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ یعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ویش څخه لاس ته راځی:

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن څیره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کیږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه ټولریشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن څیره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: $y = x/(x^2+1)$ د $x_0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او د $x \to \pm \infty$ لپاره د x- محور ($y = 0$) د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3 =0$) په $x_1 =-3$ او $x_1=1$ کی لري . تشځای نه لري او په $x_3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x = -2$ اسیمپتوتی دی، او د $x \to \pm\infty$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} \text{..............................} (15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګڼ n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګڼ n لپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګڼ n لپاره ټولی کرښ د تعریف ډیری(-) = D oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oe او ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري. (څیره ۱٤ الف ۱۵) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe
او(W = (-oe,oe دي او (1-,1-) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰

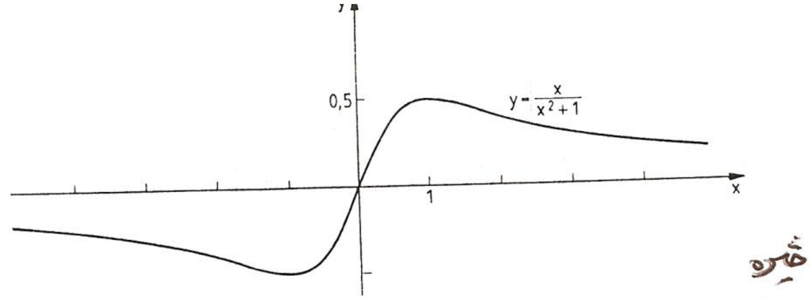


Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library

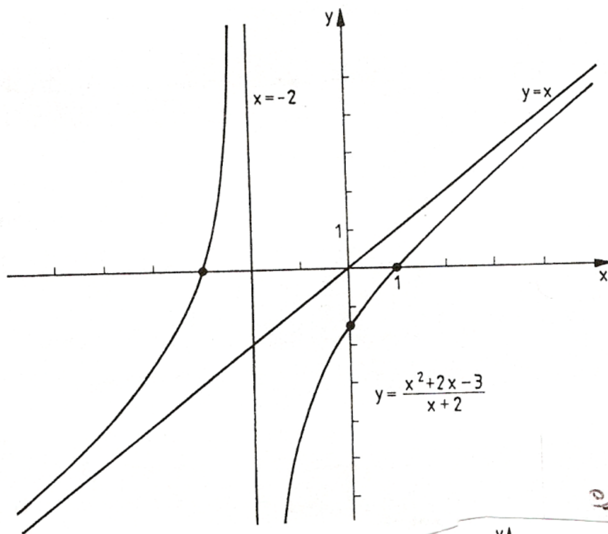


Bild 15.13

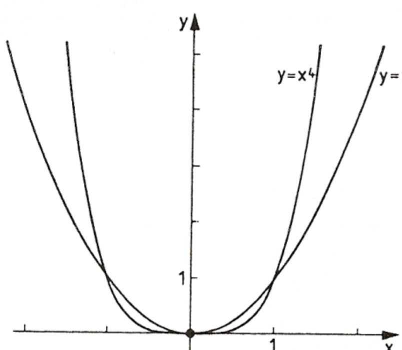


Bild 15.14a

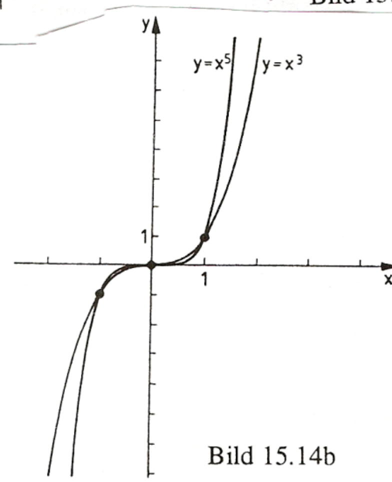


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کميز يا منفي ګڼ nلپاره يو مات ريشنل فنکشن دئ په $x = 0$ کی د يوه قطب او $y = 0$ کی يوې اسيمپتوتی په ځير. د جوړه ګنون يا تعداد (کميز n لپاره ټولی کرې د پيژند ډيري

$D = (-oe,oe)\backslash\{0\}$ د ارزښت ډيري($W = (0,oe$ لري اوګډټکي $(1,1)$, $(-1,1)$

؟؟؟ ځيره ش. ۱۵,۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون (کميز n)لپاره{ $D = (-oe,oe)\backslash\{0$ او($W=(-oe,oe$ او(1-،1-) (1,1) ګډ ټکی دی (ځيره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه ځيرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

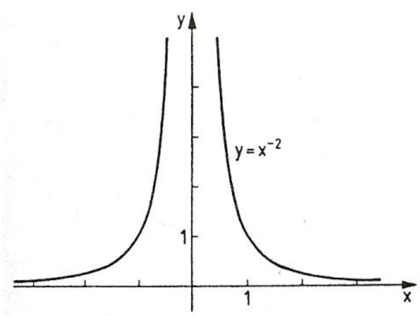


Bild 15.15a

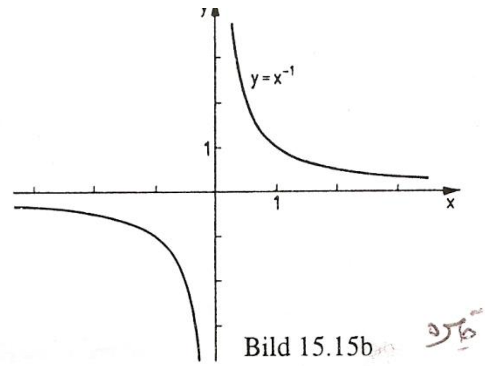


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ځښ بلواک لپاره دې د مونوتوني اینتروال په پام کی ونیول شي.(پرتله بیلګه(بیلګه ۱۵ .۳)

د فنکشن) لوستل له کیڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- یا پر ځښ فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x} \ , n \in N \setminus \{1\} \ , D = [0,\infty), W = [0,\infty) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15,8_b)$$

او رینبه فنکشن نومیږي (پیژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کیدی شي و ریشنل ایکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ریشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n \ , a \in Q \, , x > 0 \qquad (15 . 8c)$$

نو د رینبي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرځښ بیرته پوتنځ فنکشن دی.
ټولیز پوتنځ فنکشن پیژند د رییل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رییلګڼونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R \ , x > 0 \qquad (15. 8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}, x \geq 0$

$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښۍ فنکشن لرو

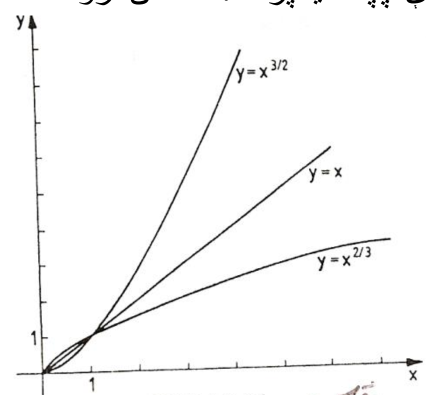


Bild 15.16a ځیره ب)

(ځیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

ځیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2, x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښې فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښې کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری($D = [0,\infty$ کی پر ښې فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د$y= x^3$ پرښې فنکشن د[$D= (-\infty,0$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$y=a^x, a > 0, a \neq 1$ ....(15,9)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي.
(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پیژند ۴ . ۱ وکتل شي)

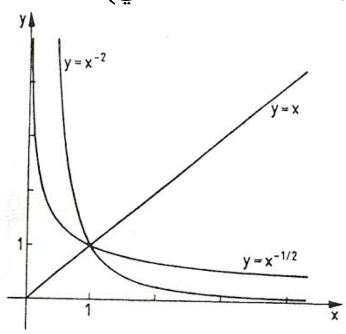


Bild 15.16b

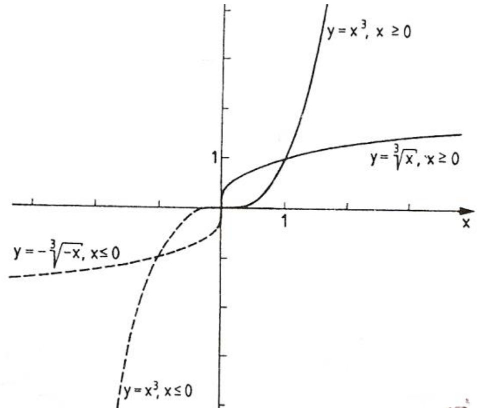


Bild 15.17

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژندډیرى(D=(-oe,oe او ارزښتډیرى(W=(o,oe لري. د $a^0=1$ له امله ټکى(0,1 () د ټولو کږو ګډ ټکى دى

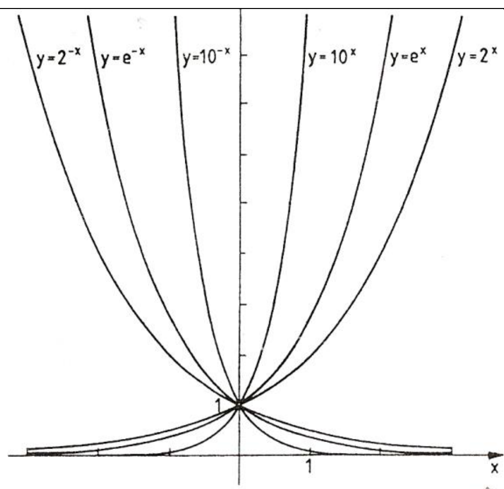
<table>
<tr>
<td>

Bild 15.18</td>
<td>د a>0 لپاره (۱۵ . ۹)
په کلکه یو غږیز- یا مونوتونجګیدونکی دئ اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنږدې کیږي .د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نژدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګې (a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10) په څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي</td>
</tr>
</table>

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په ځېټ فنکشن دی

$$y = \log_a x\ , a > 0\ , a \mid= 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګوری) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژنددیری
$D = (0.oe\ )$ او د ارزښتدیری($W=(-oe,oe\ )$ لري.

د $y = \log_a x$ کرږې د ګرږو $y=a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکی$(1,0)$ د ټولوکرږو ګډ ټکی دی (ځیره شته دی)

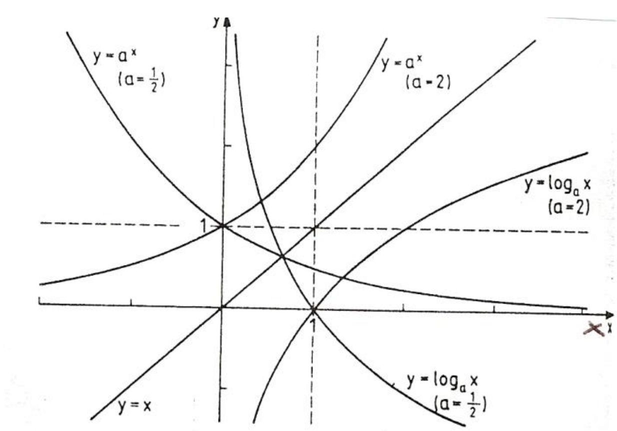


Bild 15.19 ځېره

د $a>1$لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x->0$لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د $x>0$لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په ځېټ یی یعني $y = \log_a x$
د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي .
په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10}x = \lg x\ , y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریګونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

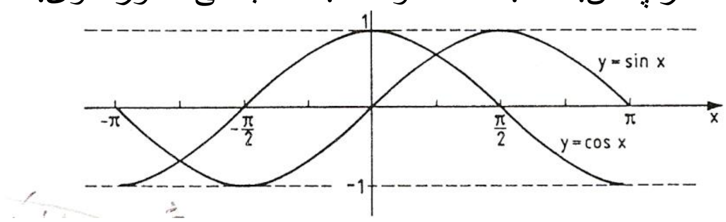
$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]$ .... $(15,11_a)$

$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]$ .... $(15,11_b)$

$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z$ .... $(15,11_c)$

$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z$ .... $(15,11_d)$

د دې کرو‌تګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریګونومتریکی فنکشنونه $y = \sin x, y = \tan x , y = \cot x$ ناجوړه فنکشنونه، او $y = \cos x$ یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریګونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)
فنکشنونه $y=\sin x , y= \cos x$ پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin (x+2k \pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi)= \cos x , k\in Z$

لاندې فنکشنونه پریود π لري
$y=\tan x , y=\cot x$.دا په دې مانا چي

$\tan (x + k\pi) = \tan x, \cot (x + k\pi) = \cot x , k\in Z$

د تریګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k\in Z$

د $y=\tan x$, $k\in Z$ $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $y=\sin x$ لپاره او د $y = \cos x$, $y = \cot x$
لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري یعني $y = \tan x$
په $k\in Z$, $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ او $y = \cot x$ په $k\in Z$, $x_k=k\pi$ کی.

د تریګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

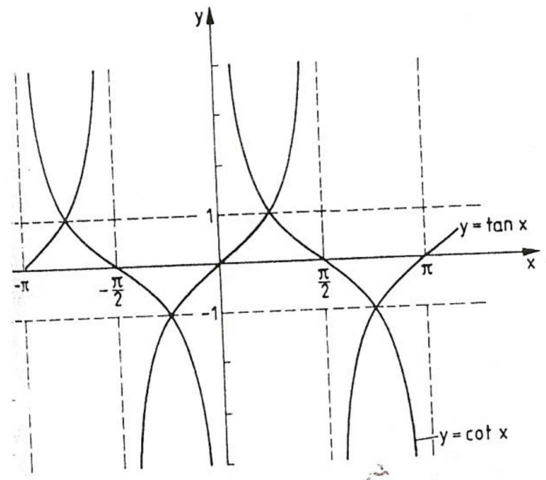


Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دی او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګیدونکی یا پورته کیدونکی دی

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی۰

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دی

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \qquad (15.11e)$$

هارموني فنکشن بلل کیږي.

یادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پیژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی یا ځنځیري فنکشن دی.
موږ ترڅیرني لاندې نیسو چي د سا ین فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واریابل tاو زیاتوونکی د ساین فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږېڅیره باندې څه تاسیر اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثیر په فنکشن $y = a . \sin t$ د $y = \sin t$ فنکشن ارزښت باندې غزول یا راکشول دی که ($|a| > 1$)او یا پړسول دي که
$|a| < 1$)وي $y= a.\sin x$ فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت
$y = \sin t$ دی، چیرته چی برسیره پردې د $0 > a$ لپاره په t - محور یوه
اینه څیرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) $(a = 2 , a = 1 / 2)$
په فنکشن کی a امپلیتودې Amplitude(جګوالی(نومیږي او د
شوینګنګ Schwingungرپیدنی پراخوالی یا ښه : سور باندې تاثیر اچوي.
څیره شته

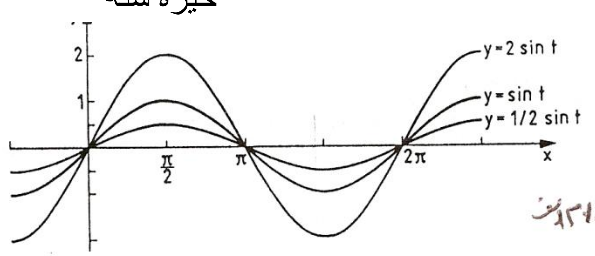
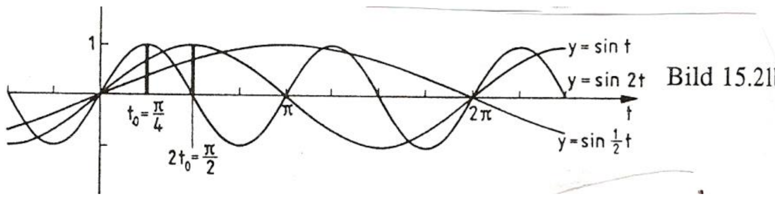


Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې یو وختني غزول که $|\omega|<1$ یا پړسول که$|\omega|>1$ وي تاثیر اچوي.چیرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسیره پردې یو په y- محور اینونه هم ده.
د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ یوه فنکشن ارزښت، $y = \sin t$د خپلواك ω -ځله ، یعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څیره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کیږي، دا په پریودې تاثیر اچوي او $y = \omega t$
پریودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثير په $|\varphi|$ له کینی لور $\varphi>0$ او یا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چی د $y=\sin t$ لپاره٠

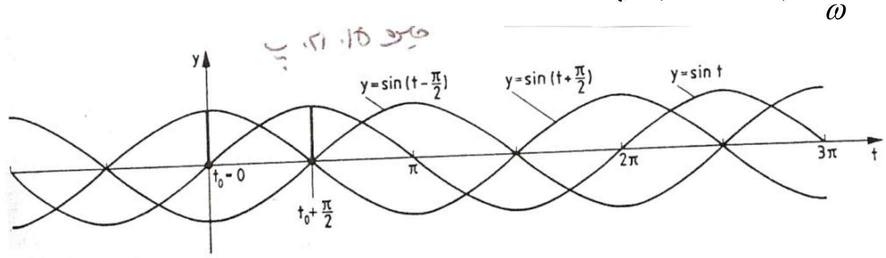
د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(څیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

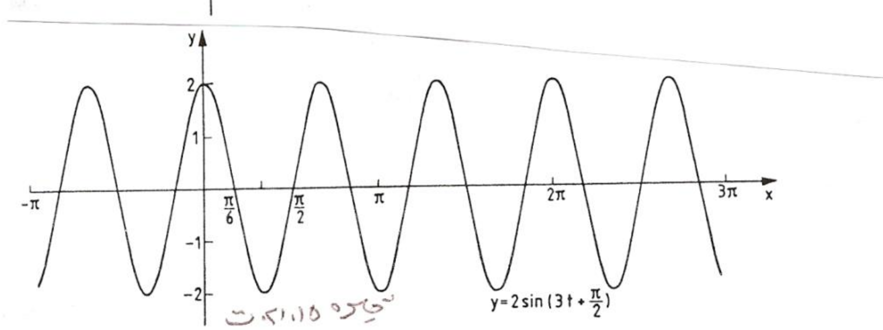
$$(\varphi=\frac{\pi}{2},\varphi=-\frac{\pi}{2})$$

په فنکشن

$$y = a.\sin(\omega t+\varphi)= a . \sin\omega\,(t+\frac{\varphi}{\omega})$$

کی φ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثير په کږه $y = a.\sin\omega t$ د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.





(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin (3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپليتود a = 2 لري، پريودې يی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کې د sint و کیڼ لورته راکښل شوی دی.

ځېره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$

د ټريګونومتري فنکشنونو(يواځني) په معکوسوالي يا په ښتوالي کی موږ په ځانګړو يو غږيزو يا مونوتوني اينتروالونو تکيه کوو، د لاندې تعريف سره مناسب

پيژند .۱۵ ۰ ۱۴ :

(پام: ځيرې له تشريح د مخه راغلې، بله لار نه وه)

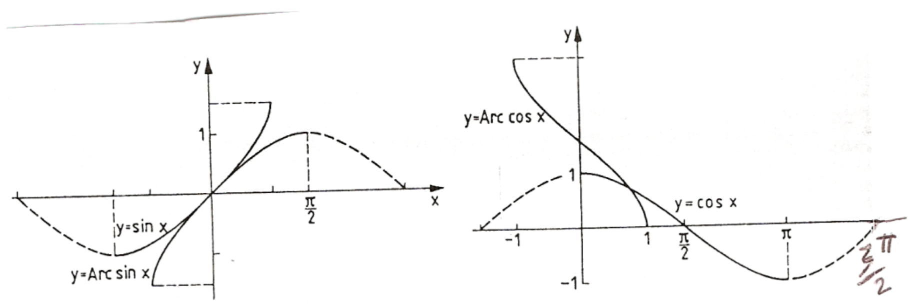


Bild 15.22 Bild 15.23

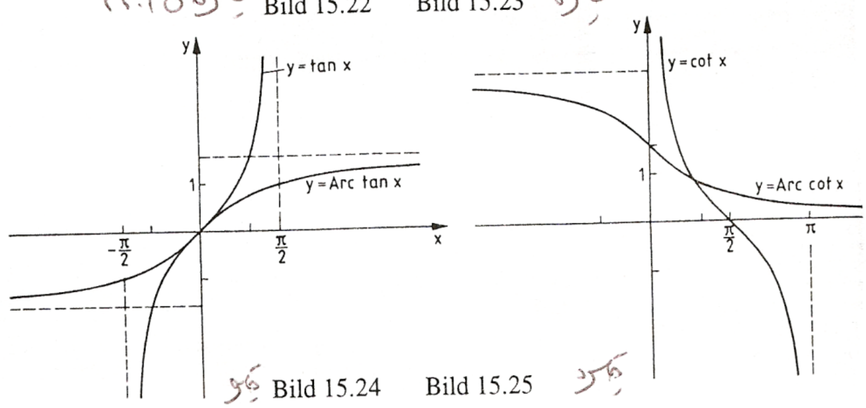


Bild 15.24 Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. $y = \sin x$, $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $W = [-1, 1]$ (15.12a)
2. $y = \cos x$, $D = [0, \pi]$, $W = [-1, 1]$ (15.12b)
3. $y = \tan x$, $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $W = \mathbf{R}$ (15.12c)
4. $y = \cot x$, $D = (0, \pi)$, $W = \mathbf{R}$ (15.12d)

پرځښ یا چپه فنکشنونه لاندې څيکلومتريکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \text{Arc}\sin x$, $D = [-1, 1]$, $W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (15.13a)
2. $y = \text{Arc}\cos x$, $D = [-1, 1]$, $W = [0, \pi]$ (15.13b)
3. $y = \text{Arc}\tan x$, $D = \mathbf{R}$, $W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (15.13c)
4. $y = \text{Arc}\cot x$, $D = \mathbf{R}$, $W = (0, \pi)$ (15.13d)

د تريګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ايتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په څيرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځيري (ترلي) فنکشنونه

پيژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$لپاره يو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتديري W سره ورکړ شوی او برسيره پر دې د $z \in W$لپاره يو فنکشن $y= f(z)$ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x ترلی (ځنځيري) فنکشن بلل کيږي٠

يادونه : يو ترلی فنکشن کيدی شي چی زياتو ځنځيرونو سره هم رامنځ ته شي: د بيلګي په توګه $z = f(x)$

د$x \in D, z \in W$لپاره او $w=h(z)$ د $z \in W, w \in W^*$لپاره

او$y=f(w)$ د $W \in W^*$ لپاره لرو،

نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x يو ترلی فنکشن دی

بيلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره ترلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د نننی - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی

پ : د

$$, y = \cos w \;\; w = \sqrt{z} \;\; , \;\; z = 2x + 4,$$

سره ترلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په ترلي فنکشن $y=\text{Arctan}1/(x-1)$ کی $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\text{Arctan}\, w$ دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :

ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$$

او

$$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942;y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1 \; ; \; w=1/z=1/1=1$

$$y=\text{Arctan}w=\text{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که $f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو ترلی یا ناترلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت وي او(Arc sin f(x همداډول(Arc cosf(x ټيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفدېري پيداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 <=> x^2 \geq 3 <=> |x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D = (-oe, -3] \cup [3, oe]$

ب)($y=lg(x+2)+1/(3+2x-x^2)$ له لمړي زياتونی کی بايد Numerus > 0 نومروس وي دا په دې مانا چی : $x+2>0 <=> x>-2$ ،

پس($D1=(-2,oe)$

په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځايونه

له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2, x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

د فنکشن تعريفدېری بايد دا اول زياتونی او همداسی د دوم زياتونی تعريفدېري وي يعنی د D1 او D2

غوڅدېری: $D=D_1 \cap D_2 = (2, oe) \backslash \{2; -1\}$

پ) $y = Arc sin (x-1)/5$ د ارکوس ساين-فنکشن د تعريفدېري په پام کی نيولو سره بايد باور ولري-

$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 <=> -5 \leq x-1 \leq 5 <=> -4 \leq x \leq 6 => D=[-4,6]$

ت $(y = 1/\sqrt{(x^2-4)}$

راديکاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 <=> x^2<4 <=> x>2$ يا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y= 2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتونی اینتروالونه په تعریفډیریو بیل (تجزیه) کړی، یا لنو نه کړی.

a) $y=2x-3$ b) $y=-2x+3$ c) $y=x^2$

d) $y=-2x^2$ c) $y=2x^2+1$ f) $y=|x|$

۴ – پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y=x$ b) $y=x+1$ c) $y=x-1$

d) $y=2x^2$ e) $y=2x^2+1$ f) $y=(x-1)^2$

g) $y=x^2/2$ h) $y=x^5$ i) $y=|x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1, \infty)$, $W = [0, \infty)$, d) $y = x^3 / 2$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

۷ – لاندې لایني فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x - 1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x + 1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x - 3y - 7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پیدا شي، او صفرخایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1 ,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 - 10x + 12$ f) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 + 45$

د ککړې کواوردینات دې پیداشي، صفرخایونه دې وګټل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګټل شي. فنکشنونه د ګړ د خلفورم باندې انځور شي

a) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5$; $x_1 = 1/5$ $x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x$; $x_1 = -2$ $x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 32x + 40$; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6$; $x_1 = 1,5$ $x_2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه وکړي رسم کړي شي :

a) $y=\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y=\frac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y=\frac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y=\frac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y=\frac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځايونه دې وټاکل شي، پول. تشځايونه او د ± 8 <- x لپاره ځان نيونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په ځپ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y=2^{x-1}$, $D=R$, $W=(0,\infty)$ b) $y=2^x-1$, $D=R$, $W=(-1,\infty)$

c) $y=\log_3 x$, $D=(0,\infty)$, $W=R$ d) $y=\ln(x-1)$, $D=(1,\infty)$, $W=R$

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوټوني اينټروالونه وټاکی او برخه په ځپ فنکشنونه:

a) $y=(x-1)^2$ b) $y=x^2-1$ c) $y=(x+1)^2+1$

d) $y=x^2-4x+5$ e) $y=4x^2$ f) $y=(1/4)x^2+x/2+1$

۱۴ – ترلي فنکشنونه $y=f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$$y=f(w)\ ,\ w=h(z)\ ,\ z=g(x)$$

بيل (تجزيه) کړی(د تعريف–او ارزښتډيريوورکولو څخه کيدی شي تيرشو)

a) $y=e^{(x+1)^2}$ b) $y=\left(e^{x+1}\right)^2$ c) $y=\lg\sqrt{2x-3}$

d) $y=\sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y=\tan\sqrt{x-3}$ f) $y=\sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y=\sqrt{\tan x-3}$ h) $y=\tan\sqrt{x}-3$ i) $y=\operatorname{Arc}\sin x^2+$

j) $y=[\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y=\ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y=\sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y=\sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y=\operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$$

بیل کړی(د تعریف– او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندې ښتنیزویا سیرنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x - 4)$ h) $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \dfrac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شمیرنه ، د اختمالوالې شمېرنه کتاب د ښوونځې ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنڅیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کربنیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره :

دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دویمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميړي شينواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پيل او د دويم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شمير پوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان ميړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلي.

ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹ ۹۷ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library