شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

لومړی برخه

دویم غځېدلی چاپ

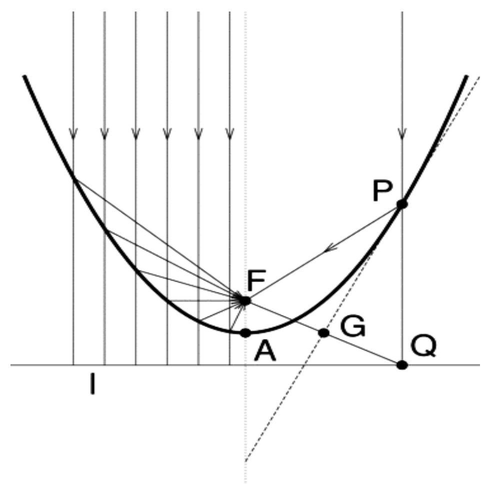
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میږی) شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(رياضي)

سترکتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرزي شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسي لږ ونده اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب(لومړی برخ)

ليکونکی: ډاکتر ماخان،، ميرى،، شينوارى

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويي ټولنې تخنيکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې څکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکې ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپیرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

۰۱ د شمیرپوهنې سم اند یا منطق ۱

۱ ۰ ۱ پوهنیزه ژبه او پیداینت یا طبیعي ژبه ۱

۱ ۰ ۲ د شمیرپوهنې سم اند بنستیزه کلیمې ۳

۱ ۰ ۳ ۰ ۱ ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه ۳

۱ ۰ ۲ ۰ ۲ وینا ۵

۱ ۰ ۲ ۰ ۳ د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینڅیپ ۷

۱ ۰ ٤ وینا فورم یا ۰بڼه او کوانتورونه ۱۳

۱ ۰ ۵ اړیین او پوره کیدونکي شرطونه ۲۸

۱ ۰ ٦ د شمیرکلیمه یا د لغاتو ۳۱

۱ ۰ ۷ برابرون او نابرابرون ۳۳

۱ . ۸ تمرینونه ۳۸

۲ ۰ ډیر ی پوهنه ۳۹

۲ ۰ ۱ د ډیرۍ پوهنې کلیمه ۴۰

۲ . ۲ د ډېریو ترمنځ اړیکې ۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

	برخډېرۍ	۴۶
	د يوې ډېرۍ توان يا تواندېرۍ (توانسټ)	۴۸
۳ ۰ ۲	په ډيرۍ کې کاروني يا عمليې(۱)	۵۰
	غوڅډېرۍ يا متقاطعډېرۍ	۵۲
	د يوې ډېرۍ يا سټ کمپليمنټ	۵۷
٤ ۰ ۲	څيرونه	۵۸
	تمرينونه	۶۷
۰ ۳	د رييل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې...	۷۰
۱ ۰ ۳	د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت	۷۰
۱ ۰ ۱ ۰ ۳	پيداېښتي يا طبيعي ګڼونه	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ الف	د پيداېښت يا طبيعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ب	د پيداېښت ګڼونو انځورونه او شميرنه	۷۲
۳ ۰ ۱ ۰ پ	د شميرنې بنسټيز قوان ين	۷۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	الف د ويش تيوري	۸۶
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب	غټ ګډ پرويشونی(بزګترين مقسوم عليه ...)	۸۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ ۰ ۱ ۰ ٤	رييلګڼونه	۱۰۸
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشميرنه	۱۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

٣ . ٣	تمرینونه	۱۳۰
٠ ٤	پوتنځ یا توان ، رېښه یا جذر	۱۴۱
١ ٠ ٤	توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت	۱۴۱
٢ ٠ ٤	رېښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره	۱۴۴
٣ ٠ ٤	توان د رییلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره	۱۵۱
٤ ٠ ٤	ټولګه	۱۵۲
٠ ٥	لوګاریتم	۱۵۸
١ ٠ ٥	د لوګاریتم کلیمه	۱۵۸
٣ ٠ ٥	ټولګه	۱۶۶
٠ ٦	ګونومتري	۱۶۹
١ ٠ ٦	بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه	۱۶۹
١ ٠ ١ ٠ ٦	ټکی او کرښه	۱۶۹
٢ ٠ ١ ٠ ٦	کونج	۱۷۱
٣ ٠ ١ ٠ ٦	درېګوډۍ	۱۷۴
٤ ٠ ١ ٠ ٤	کونکروانیخ او ورته والی	۱۷۸
٥ ٠ ١ ٦٠	ولاړکونجیز دریګوډۍ	۱۸۴
٢ ٠ ٦	په ولاړکونجیز دریګوډۍ کې د ...	۱۸۸
٣ ٠ ٦	په یوونګردۍ کې د کونج بلواک ..	۱۹۰
٤ ٠ ٦	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ٥	تریګنومتریکي کتمتوالی	۲۰۵
۶ . ۵	تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
۷ ٠	کمپلکس ګنونه	۲۲۲
۸ ٠	د ښووني یا ثبوت متودونه	۲۳۵
۸ ٠ ۱	سیده ښوونه	۲۳۵
۸ . ۲	ناسیده ښوونه	۲۳۷
۸ ٠ ۳	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
۹	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
۹ ٠ ۱	لاینیز برابرون	۲۴۴
۱۰	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
۱۰ ٠ ۱	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
۱۰ ٠ ۲	د بینوم څله ونه	۲۶۷
۱۰ ٠ ۳	د بینوم جمله	۲۷۰
۱۰ ٠ ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
۱۰ ٠ ٤ ٠ ۱	پرموتیشن	۲۷۵
۱۰ ٠ ٤ ٠ ۲	واریيشن	۲۸۰
۱۰ ٠ ٤ ٠ ۳	کمبینیشن	۲۸۶
۱۰ ٠ ٤ ٠ ٤	د پرموتیشن، واریيشن او	۲۹۱
۱۱ ٠	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۵	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲ . ۴	د ګاوس لګوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلورۍ ئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۰ ۲ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وییتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلورۍ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱۲	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
٤ ۰ ۱۲	د ریښي برابرونونه	
۱۳	ترانسڅیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱ ۰ ۱۳	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۲ ۰ ۱۳	اکسپوننشل- یا په جګګې برابرونونه	۳۸۰
۳ ۰ ۱۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه	۳۹۶
۱ ۰ ۱ ۰ ۱٤	بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین	
۱ ۰ ۱٤ الف	اینتروال	۳۹۷
۲ ۰ ۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱٤	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
٤ ۰ ۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
۲ ۰ ۱٤	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱ ۰ ۲ ۰ ۱٤	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
۲ ۰ ۲ ۰ ۱٤	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۳ ۰ ۲ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰
۱ ۰ ۱۵	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶
۱ ۰ ۱٦ کرښه ۴۶۶
۲ ۰ ۱٦ ګردۍ ۴۷۵
۳ ۰ ۱٦ ایلیپسې ۴۸۲
٤ ۰ ۱٦ هیوپربول ۴۸۷
٥ ۰ ۱٦ پارابول ۴۹۲
٦ ۰ ۱٦ ټولګه ۴۹۴
۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲
۱ ۰ ۱۷ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲
په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲
۲ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹
۳ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲
٤ ۰ ۱۷ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷
٥ ۰ ۱۷ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....
۱ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱
۲ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴
٥ ۰ ۱۷ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸	پرلپسې او پرلپسې لړۍ	۵۳۳
۱۸ ۰ ۱	پیل	۵۳۳
۱۸ ۰ ۲	د ګنون - عددونوپرلپسې کلیمه	۵۳۴
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱	مونوتوني پرلپسې	۵۴۲
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲	اریتمیتیکي پرلپسې	۵۴۵
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳	هندسي پرلپسې	۵۴۷
۱۸ ۰ ۲الف	لړۍ	۵۵۰
۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱	هندسي لړی	۵۵۵
۱۸ ۰ ۲ الف ۲	اریتمیتیکي لړۍ	۵۵۷
۱۸ ۰ ٤	د پرلپسې او لړیو د پولې ...	۵۵۸
۱۹	د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه	۵۷۸
۱۹ ۰ ۱	بنسټیزې کلیمې	
	د پولو یا حدونو خویونه	۵۸۶
	د راشنل، کسري یا نسبتي	۵۹۲
	د مشلثاتي یا درېکوډي کچ توابعو پولې	۵۹۶
	ناپرېکیدنې	۶۰۴
۱۹ ۰ ۲	په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې	
۱۹ ۰ ۳	د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه	۶۱۰
۱۹ ۰ ٤	د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځپرکي ټولګه ۶۱۶

۲۰ دفرنځیالشمیرنه ۶۲۶

د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت) ۶۲۶

په یوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸

د لحضوی(سترګورپ) تغیر... ۶۳۰

کمښتوېش (تقسیم تفاضل؟) ۶۳۱

دفرنشلوېش یا رابیلیدنه یا مشتق ۶۳۳

کمښتوېش او مشتق یا رابیلیدنه ۶۳۶

د x_o په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳

د تانجنت پیژند او خویونه ۶۴۷

د تانجنت او عمود یا ولاړ ټولیز مساوات ۶۵۰

په بیدیا کې جګوالی ۶۵۲

۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت یا جګیدنې غوره والی

۲ ۰ ۲۰ د فرنځیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې ۶۵۶

د درېګوډیزو یا مثلثاتي ۶۶۲

د اکسپوننشل یا په جګ توابعو.... ۶۷۰

د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې ۶۷۶

د ایمپلیځیت توابعو مشتف ۶۸۳

د بنسټیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

	ټولګه	۶۸۸
	د يوې تابع د مشتق قابليت	۶۹۱
	د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق	۶۹۸
۲۰ .۳	د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه	۷۰۱
	د رول قضيه	۷۱۰
	د وايرشتراس قضيه	۷۱۱
۲۰.٤۰	افراطي ارزښتونه او اوړونټکی	
	د دفرنشل منځ ارزښت قضيه	۷۱۲
	يوعږيزې توابع	۷۱۵
	ځای اړوند افراطي ټکي	۷۲۰
	د انعطاف – يا اوړونټکی	۷۲۴
	د کوې يا منحني بحث يا خبرې	۷۳۳
	ناټاکلي حدونه يا پولې	۷۴۶
	د برنولي او د لو پيتال	۷۵۰
۲۰ ۰ ۵	د غټو ګټو پرابلم	۷۵۷
	تمرينونه	۷۶۷
	په ټوټه کسرونو ټوټه کونه	۷۷۸
۲۱	انتيګرالشميرنه	۷۸۷
	پيلراوړنه	۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنستیزه یا لومړنی تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنی تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال ځخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالوني قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالوني لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲
	د انتیګرالشمیرنې استعمال	۸۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مهربان او بخښونکی خدای(ج) په نامه

سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چي پیل لري نو پاي هم باید ولري، د داسی یوه کار پیل او پای ته څما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چی مېښت یی زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چی په یوه کار پیل وکړي، څکه چی سملاسی ورته څرګندیږي، چی په هیڅ شي کی څموږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوې په جوړښتیزه لور، په ورانی کی مو د نړی سرکښي څانته ګټلی.
موږ ګورو چی په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چی تراوسه حتی هغه بنسټیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چی مسلك ته اسانتیاوې پیښوي. له کومه څاي چی ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او ستتونځي یي نه دي ګاللي، چی دلته طبعآ افراد ملامت نه دې، بلکه څموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنی او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودې دنده د حکومتونو ده، چی څموږ په هیواد کی څموږ حکومتونو خپل څانونه د دې کار جوګه نه دې ګڼلي، کیدی شي چی ووایو چي په ریښتیني یي ددې کار مخه هم نیولی ده، چی په افغاني ژزبه دې څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار څکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چی زه په مسلکي اړخ کی یواځی، په علمي توګه په الماني ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

نومونه چې له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچې په ښوونځي کې ځما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمې په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومې او یا کومې چې ماته معلومې دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکی ښکاریدلی .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتی ځانګکی لري. دا چې ځما په فکر دا متآسفانه نه یواځې زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبی په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چې په دې بنسټیزه توګه په درسي او تمریني ډول سرته رسیږي.

نن نړی او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چې پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستوځوبیو (د ستونځو حل باندې) پیل نه دی کړی ، که دا په هره ځانګه کی هم وي. ځموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چې په ټولو پوهنو کی نغښتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کی د پوهیدلو بنسټیزه ریښه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعي (پیدایښتی) یعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك، بیله شمیر پوهنی یی وده او په پوهیدنه ناشونی ده. شمیرپوهنه له بلی خوا یواځنی خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کی ونیوه او لیکل یی د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متآسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسی یوه کتاب لیکنی مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسی لیکنی ځخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چې څموږ د هیواد ستنځي نوزې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چې خپلی د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم
-د لیکونکی راځونی دلیلونه یا د شوق رابیدارول
-دداسی کتاب لیکنه په هغه وخت کی شوني کیږي، چې د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو ځخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یي هم نه لرم چې پیسی وګتم.

- وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چی له دې د مخه می په سیاسی هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس می خپل مسلك ته رامخه شوه.

- ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلی ټولنی او د خپلی ټولنی د خلکو سره مینه ولری او په همدې ډول، د خپلی ټولنی او د ټولنی د خلکو او د ټولو ځخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چی یوائی د خوبونو ریښتیا کولو لپاره په داسی کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځی په پوره مینه په غاړ واخستلی او دا کار می په پوره مینه سر ته ورساوه.
-په دې برسیره لیکونکی دې وظیفی ته هم باید شعوري وي، چی دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسی لډ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعني یو غېروالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خو د داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیبو (ستونځو حل) په خاطر. چی موږ افغانان یی په ځانګړې توګه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځي د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یي ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځی:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

١ – دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری څخه نیول شوې، زیندی شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندی پاتی شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چی دا کرښی دا مطلب نه لري، چی ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کړیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پرېښودلی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپرېښوولو حق څوك نه لري، نه دولت او نه افراد. دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوك باید ګیله من نه وي.

افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشی یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژبه یواځی د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کی پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لاربنودې او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهی د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبی پرمخوده یو بل باندې سیده او په ځتې اغیز من دي، چی ولس وروسته پاتی وي، ژبه یې وروسته پاتی ده او که یوه ژبه وروسته پاتی وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کي سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد ځان کی نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چی کم له کمه بنستیزې کلیمی په افغاني واړوم، چی دا کار می په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله می زیات فکر هم په کار اچولی چی مسلکي بنستیزې کلیمي په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چی ټاکل شوي، داسی نومونه دي، چی د هغه شي ماهیت په کی روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چی په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.

په پوهنه کی له بلی ژبی تیریدنه ناشونی ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چی افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځي هلته کیږي، چی یوه ژبه له پوهنی وروسته پاتی وي.

د پوهنیزې ودې سره ژبی ته د نورو ژبو لغات رانتوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چی که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهانی مروجه لغاتو ولیکم.

دا چی افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم ژوندۍ شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبی ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبی د ژوندۍ څخه خلاسون یا د افغاني ژبی څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغي باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګڼوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوك د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسې یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.

دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولي، چې هغه مې په ټول کتاب کې شاید اصلاح کړې نه وي، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځې نه پیښوي لکه د بیلګې په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلې وه، چې وروسته مې شمیر پوهنې بانډې واړوله، شاید په ټولو ځایونو کې مې نه وي شمیرپوهنه کړي. درېګوډي ما لمړی دریکونجې لیکلې وو، چې دا هم شاید د کتاب په اوږدوکې نه وي اصلاح شوي، داسې نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چې د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځې ه پیښوي.

۲ – تخنیکي ستونځې:

د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځي، چې څمور لپاره د داسې کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکي ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودي، نو له دې امله مې د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته مې سریښ کړې، چې کله کېږي هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چې دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکي او چاپوونکي به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښې څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطې به شوي وي،، خو په پوهیدلو کې به ستونځې پیښې نه کړي، د هغې بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.

ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

حرکت کی برکت ایښوولی دی.
لنډه دا، چی ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملګرو په فشار ما ، څما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیداینبتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
ځنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنستیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځای کړم.
ما د بنستیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي ځیړل شوی.
څما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اومه اتمه او نهمه برخه څمورږ په هیواد کې زما په فکر ، چې نا اشنا وي. په هر صورت د اوومې برخې سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسې د ډیرې پوهې سره اشنایینه هم خورا ضرور ده

شپیږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کې ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کې د « افغانستان کلتوري ودې ټولنې »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومې خوښنه کوم. د دې ټولنې د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چې ددې کتاب چاپ یې د ټولنې په چوکاټ کې په غاړه اخستی.

ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چې د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کې ماته خوراګټوره مشوره هم راکړې.

زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یې زما د دې لیکنې ملاتړ کاوه، چې بې ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یې کله کله ویل، چې ګوندې پیسې مې باید ګټلې وی ، خو په دې پوهیږي، چې ددې چانس نه شته، کله کله به، چې به تنګه شوه نو ویل به یې چې نور دا د چرګانو ټونګې باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن ښاپیرې څخه هم د زړه له کومې خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یې همداسې ښه تکړه ورته د لوي خداي(ج) څخه غواړم، چې زما د داسې کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکې کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسې کتاب ژباړلی، چې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

المان د پنځم ټولګی ښخه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی ترلی چاپ ته ورکړي شي.
زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.
که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په ځانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. ځما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو.
له ما ښخه لټ بل ځوک نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

افغاني ، يوناني او الماني الف بی

ا	ب	پ	ت	ټ	ث	ج	چ
څ	ځ	ڂ	ح	خ	د	ډ	ذ
ر	ړ	ز	ژ	ږ	ص	ض	ط
ظ	ع	غ	ف	ك	ګ	ق	ل
م	ن	و	ه	ي	ى	ې	ئ ۍ

يوناني الف بی

Α α	*Α α*	Alpha
Β β	*Β β*	Beta
Γ γ	*Γ γ*	Gamma
Δ δ	*Δ δ*	Delta
Ε ε	*Ε ε*	Epsilon
Ζ ζ	*Ζ ζ*	Zeta
Η η	*Η η*	Eta
Θ ϑ	*Θ ϑ*	Theta
Ι ι	*Ι ι*	Iota
Κ κ	*Κ ϰ*	Kappa
Λ λ	*Λ λ*	Lambda
Μ μ	*Μ μ*	My
Ν ν	*Ν ν*	Ny
Ξ ξ	*Ξ ξ*	Xi
Ο ο	*Ο ο*	Omikron
Π π	*Π π*	Pi
Ρ ρ	*Ρ ϱ*	Rho
Σ σ	*Σ σ*	Sigma
Τ τ	*Τ τ*	Tau
Υ υ	*Υ υ*	Ypsilon
Φ φ	*Φ φ*	Phi
Χ χ	*Χ χ*	Chi
Ψ ψ	*Ψ ψ*	Psi
Ω ω	*Ω ω*	Omega

الماني الف بي

A a	$\mathscr{A}$ a	$\mathfrak{A}\ \mathfrak{a}$
B b	$\mathscr{B}$ b	$\mathfrak{B}\ \mathfrak{b}$
C c	$\mathscr{C}$ c	$\mathfrak{C}\ \mathfrak{c}$
D d	$\mathscr{D}$ d	$\mathfrak{D}\ \mathfrak{d}$
E e	$\mathscr{E}$ e	$\mathfrak{E}\ \mathfrak{e}$
F f	$\mathscr{F}$ f	$\mathfrak{F}\ \mathfrak{f}$
G g	$\mathscr{G}$ g	$\mathfrak{G}\ \mathfrak{g}$
H h	$\mathscr{H}$ h	$\mathfrak{H}\ \mathfrak{h}$
I i	$\mathscr{I}$ i	$\mathfrak{I}\ \mathfrak{i}$
J j	$\mathscr{J}$ j	$\mathfrak{J}\ \mathfrak{j}$
K k	$\mathscr{K}$ k	$\mathfrak{K}\ \mathfrak{k}$
L l	$\mathscr{L}$ l	$\mathfrak{L}\ \mathfrak{l}$
M m	$\mathscr{M}$ m	$\mathfrak{M}\ \mathfrak{m}$
N n	$\mathscr{N}$ n	$\mathfrak{N}\ \mathfrak{n}$
O o	$\mathscr{O}$ o	$\mathfrak{O}\ \mathfrak{o}$
P p	$\mathscr{P}$ p	$\mathfrak{P}\ \mathfrak{p}$
Q q	$\mathscr{Q}$ q	$\mathfrak{Q}\ \mathfrak{q}$
R r	$\mathscr{R}$ r	$\mathfrak{R}\ \mathfrak{r}$
S s	$\mathscr{S}$ s	$\mathfrak{S}\ \mathfrak{s}$
T t	$\mathscr{T}$ t	$\mathfrak{T}\ \mathfrak{t}$
U u	$\mathscr{U}$ u	$\mathfrak{U}\ \mathfrak{u}$
V v	$\mathscr{V}$ v	$\mathfrak{V}\ \mathfrak{v}$
W w	$\mathscr{W}$ w	$\mathfrak{W}\ \mathfrak{w}$
X x	$\mathscr{X}$ x	$\mathfrak{X}\ \mathfrak{x}$
Y y	$\mathscr{Y}$ y	$\mathfrak{Y}\ \mathfrak{y}$
Z z	$\mathscr{Z}$ z	$\mathfrak{Z}\ \mathfrak{z}$

اومیګا پښتو دینه ← که په الماني دینه ←

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیزې نخښې

مساوي	$=$
نامساوي (نوروکتابونو کې)	$\neq$ (=)
کوچنی له	$<$
لوي له..............	$>$
کوچنی یا مساوي له	$\leq$
لوي یا مساوي له	$\geq$
ډیر کوچني	$\ll$
ډیر لوي	$\gg$
ورته یا متناسب...........	$\sim$
کونګروانېنځ	$\cong$
همداسې یا ښایي یا په ګوره کوي	
کتمټ..................	$\equiv$
غبرګ	$\parallel$
ناغبرګ................	$\nparallel$
ولاړ په	$\perp$
درېګوډی	$\triangle$
ګردی	$\bigcirc$
نیمی یا قطر............	$\oslash$
کونج	$\angle$
د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج	$\angle (g,h)$
کرښه، له A و B ته	$\overline{AB}$
له A و B ته لوریزه کرښه.....	$\overrightarrow{AB}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیندہ...................... AB

مطلقه ارزښت د .... |a|

ایماجینار یوون (واحد)....... i

د اویلرګڼ = 2,7182818... e

پي د لودولف ګڼ π = 3, 14149...

د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي ->

ناپای.................... œ

د x فنکشن یا په واك چی بلواك مو بللی f(x)

(لوستل یي (f د x یا د f, x لنډ : fx)

د x څیرونه په f(x) : لیکو: ~~x~~ f(x) f: x →

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن h(x); g(x)

لیمس یا پوله................ lim

ساین .... sin

تریګونومتریکي کوساین .... cos

بلواك تانجنت .... tan

کوتنجنت........... cot

ارکوس ساین......... arc sin

څیکلومتریکي ارکوس کوساین ...... arc cos

بلواك ارکوس تانجنت .... arc tan

ارکوس کوتانجنت..... arc cot

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیدایښتي لوکاریتم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس گڼونه........... $\mathbb{C}$

رییلگڼونه .... $\mathbb{R}$

ټولگڼونه .... $\mathbb{Z}$

نامنفي ټولگڼونه یا

طبعي گڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي گڼونه .... $\mathbb{N}$

تعریفډیرئ .... $\mathbb{D}$

ارزښتډیرئ........... W

حلډیرئ L

د ډیري A پوتنخډیرئ P(A)

ډیري.............. M,N,A,B

تشډیرئ .... $\emptyset$

برخه ډیرئ............

پورته یا لویډیرئ(چې بل ډیرئ خوندي لري)

ټولنډیرئ........... $\cup$

غوڅډیرئ .... $\cap$

د A کومپلیمنت ..... CA , A'

د ډیریو ورته والی ...... A~B

د ډیریو ځل.......... A × B

لوستل B اتیران A یا - ځل -

توپیرډیرئ : A بي له B ده A\ B

دلته: a د b پرویشونی ده یاa b ویشي a | b

د a اوb غټ گډ په ویشونی(لنډ : غ گ و) ggt(a,b)

د a اوb کوچني گډ زیاتځله(لنډ : ك گ ځ) kgv(a,b)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته : a د M توکی دی .... $a \in M$

او a د M توکی نه دی .... $a \notin M$

ټولنخښه (د ټولو x لپاره باور لري) $\forall$

د موجودیت نخښه: یو x موجود دی $\exists$

کونیونکشن A او B لیکو $A \wedge B$

دیسینکشن A یا B لیکو $A \vee B$

(کله کله الترناتیو)

ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي $A \Rightarrow B$

نیګیشن یا نه والی $\neg$

د A او B وېناو ورته والی یا اکویوالنت $A \Leftrightarrow B$

له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.

ماتریکس......... A نورو کتابونو کي $\|A\|$

دیترمینانت $|A|$

د a څخه n–امه رېښه $\sqrt[n]{a}$

د x اکسپونتشلبلواك

د n – فاکولتیت یعنی n!=1.2.3....n $n!$

بینومځلوونې $\binom{n}{p}$

لوستل:n په p باندې

له a تر b واز اینتروال $]a,b[$

$= \{ x \mid a < x < b \}$

له a تر b بند اینتروال $[a,b]$

$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

کینې واز اینتروال $]a,b]$

$= \{ x \mid a < x \leq b \}$

ښي واز اینتروال $[a,b[$

$= \{ x \mid a \leq x < b \}$

د زياتون نخښنه (سيګما) $\sum_{i=1}^{n}$

كه د زياتوننخښنه داسې وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

ځلنخښنه (پي) $\prod_{i=1}^{n}$

كه داسې ليكل شوي وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

پرموتيشن يا بدلون

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چي اند(فکر) یا وی(لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څېړنه د اریستو تلس(۳۸٤ تر ۳۲۲ ز ۰ ک۰ ا)) له خوا کېښول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دئ او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله خته کي په فلسفه پورې تړلی مسلک دئ نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې(متن) لرودئ شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیداینتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشوني ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهنی(علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور(په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګړیتې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.
په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک ایښوولو (ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنۍ ژبی ویناودد څخه ګټه اخلي۰

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده۰

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي۰

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ایښوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي۰

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره (متصور؟) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسې په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغهٔ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښونې دبنسټیزو نخښو څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندی ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ .

۱ ۰ ۲ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمې

۱ ۰ ۲ ۰ ۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکې او د شیانو تړنې په نخښو(سومبولونو) انځوریږي.

۱ – شمیرپوهنیزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې (علامې): دا د یوه کره ټاکلې مانا لپاره نخښې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، π ، e, او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د یوې ورکړ شوې ډیرې یا سټ (په ډیرئ پوهنه کی روښانه کیږي) داسې په زړه پورې توکی لپاره یوه نخښه ده، کومه چې د اووښتونویا متحولو بنسټسټ یا-ډیرئ بلل کیږي، دا په لاتین تورو په نخښه کیږي او کله کله په اندکس(ز۰ایندکسونو) یا پیژندنخښه index (ز۰ پیژندنخښې Indices) چې ایندکس د تورو پښنو ته راځي په نخښه کیږي۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړیکنخښې : دا د شیانو اوګڼونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نخښې دي لکه $<$, $>$، $=$, $\leq$, $\geq$,

- د نښلونو،کارونو، تړنو یا عملیونخښې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-) ، ځل-(ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library

- تخنیکي نخښی : لکه سیمیکولوم („ „)، نوکان ( ) او نور ډولونه يې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واریابلی(اووښتونې), ثابتی او د هغوي یوځاي اینبودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکی نخښو یوځاي ایښوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځی٠

(۱) ثابتي((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتيزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړیدونی یا واریابلې او ترمونه

بیلګه :

الف : د 3.(1 + 2a) – a + 144 یوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 11x =6 – 3a).(b – 12) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یواځې ثابتې (همغه)، اووښتونې(متحولې، واریابلې) نښلونې او تخنیکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړیکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پورې که واریابلی ولرې پیژندډیرۍ یا تعریفستځ هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو یا متحولو اصلی بنستستځ یوه برخډیرۍ او یا هغې سره برابر برخه سځ یا - ډېرۍ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنستډېرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې یا عملیې اجرا شي، که چېرې اووښتونې یا واریابلې د پېژندډېرۍ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو(اکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتوني یا متحولې نه لري په Tسره په نخښه کوو او لیکو: $T = 126 + 3/4$ یا $T=126+\frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتوني یا متحولې x لري یاني $T(x) = 10 + 2x$ ۰ د اووښتونو بنسټدیرۍ یا –دېرۍ دې یا د طبیعي اعدادو دېرۍ °Nوي

تعریفدیرۍ د بنسټدیرۍ سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتوني یا واریابلی x پهٔ ځاي

یو پیدایښتې ګڼ یا طبیعي عدد 2 کیږدو، نو د ترم ارزښت دۍ : $T(2) = 14$

پ : $(x+2y)/x$ یا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دۍ چې دوه متحولې لري او په $T(x,y)$ سره یې په نخښه کوو ۰ د اووښتونو یا متحولو بنسټدیرۍ دې د پیدایښتي یا طبیعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعریفدیرۍ °N ده۰ د y لپاره N (پیدایښتی ګڼوندیرۍ°N تعریفدیرۍ لپاره ترم نه دۍ تعریف یاپیژند نه لري)

د x = 0 لپاره ترم نه دۍ تعریف یا پیژند ند لري

د ترم $T(x,2y) = (x,y) /x$ یا $T(x,2y)=\frac{x+2y}{x}$

ارزښتشمیرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده :4 = 2 / (2+6) = T(2,3)

یادونه: د ګڼونو لپاره دې دریمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼوندیرۍ ورکړ شوي دي۰

Aussage وینا ۲۰۲۰۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې انسان د خپل چاپېریال د ټولو شیانو او پیداینتونو سره لاس په ګریوان دی، نو پوښتنې او هیلې رامنځ ته کیږي،غوښتنې لري او ویناوې کوي، په کومو ویناو کې،

چې شیان او ریښتونی(واقعیتونه) بیرته هنداره (منعکس) کیږي یا په یوه څه یا شي، چې وینا کیږي، نو موخه ترې د هغه څه ریښتون حالت یا ځاننیونه ده۰ یوه وینا په واقعیت کې ټیک هلته ریښتیا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت یا بهتره شي ځاننیونه په ریښتونې شته یا موجود وي، په بل حالت کې دا وینا ناریښتیا (غلطه) ده. موږ نیسو، چې دا څه دې په شمیرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پریکړه دې پرې کیدی شي۰

پژند(تعریف) ۱ ۰ ۱ :

وینا د یوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دی)، د هغهٔ بیرته هندارونه یا منعکسونه ده۰ (دا په دې مانا، چې وینا یو شی په وینا کې همهغسی ښایي لکه څنګه چې دی له دې امله شي هندارونه یامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کیږي یا په همدې ډول په نخښه کیږي۰

یا په بل عبارت وینا د کلیمو داسې هدفمند یوځایوالی یا یوځاي ایښوول دي، چې د یوه شی حالت (ځاننیونه) یا شکل او د شیانو ریښتونې اړیکی بیرته هنداره یا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه دریښتیاوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

یا په بل ډول :

د وینا لاندې سری یو ژبنی یوون، یا یووالی (واحد unit ,Einheit)پوهیږي، کوم چې د شي اړیکی (د شي څرنګوالی) بیانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وینا په کومه ژبه، په پیداینتي (طبیعي) او که په مصنوعي ژبه ویل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وینا د طبیعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځني ډول: یوه وینا یوه جمله ده یا فرمول دی، چې یا رښتیا او یا نارښتیا ده۰ داسې هم ویل کیږي، چې وینا یو «رښتیاارزښت » ،، رښتیا یا نا رښتیا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعني : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « ریښتیا ارزښت»(رښښتیا یا نارښتیا) دیٔ۰ نور خویونه په راتلونکی کې نه څیړل کیږي۰

ویناوې د لاتین په لویو تورو *A , A په نخښه کوو او داسې نور۰

۱ ۰ ۲ ۰ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یواځی یو ممکن « ریښتیا ارزښت» لرودیٔ شي، دا په دې نامه، چی وینا یا ریښتیا

ده او یا ناریښتیا. (د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ)۰

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دیٔ. دوه ارزښتوالی او د

دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنیٔ افاده یا وییینه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چی د ویناارزښت حتمآ باید څرګند یا معلوم نه وي۰ که بالاخره ټوله پوهنه د رښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم موږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چی د هغه شي حالت (ځاننیونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چی پریکړه وشي۰

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کیږي، د رښتیا ویناو ټولګی او د

نارښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف)۰

که وینا ریښتیا وي، نو ریښتیا ارزښت یې ریښتیادیٔ او په w سره یې ښایو، که وینا ریښتیا

ارزښت ناریښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا ریښتیا ارزښت

ناریښتیا دیٔ

تکرار : هره جمله، چی « ریښتیا ارزښت» (ریښتیا یا نا ریښتیا) ولري، وینا بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

شميرپوهنيز سم اند(منطق) د ويناو سره سر او کار لري..

بيلگې:

غونډاله (جمله)

الف : » د کابل سين د کونړ له سين سره گډيږي« ريښتيا وينا ده٠

ب : 3 + 4 = 7 ريښتيا وينا ده

پ : » ٦ لومړنی گڼ دی« دا ناريښتيا- يا ناتيک وينا ده٠(د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد ياگڼونه کتلکيدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو يې ؟ « نه شي کيدی يو ريښتيا ارزښت باندې تنظيم شي٠ له دې امله وينا نه ده٠

نورې بيلگې :

ويناوې دي:

(دپيتاگوراس (فيثاغورس) جمله٠

د کاتيتونو يا د يو بل سره ولاړو يا عمودو اړخونو يا ضلعو مربعگانو (څلوريو) زياتون(جمعه) د هيپوتينوزې(اوږده اړخ قاېمې زاويې ته مخامخ ضلعه يا قطر) د څلورئ يا مربع سره برابر دئ.

نورې بيلگې :

سرک لوند دئ

ټول سپي خطرناک دي

3 > 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځاي یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسیډ CO_2 وښایي

د دي پرڅېړ یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار NaCl; ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنګ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیدایښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دریو بی له پاتې (باقي) نه ویشل کیږي

د وینا «ریښتیا ارزښت » ریښتیا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنی ښار دی

5 < 3 پنځه له دریو کوچنی دی

ټول لومړني اعداد یاګنونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دی

هره یوه له دې ویناو « ریښتیا ارزښت » نا ریښتیا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوړه وایو۰

په لاندې کې به وڅیرو، چی ویناوې شته، چې نورې ویناوې د خپلې برخی په څیر په ځان کې خوندي(لنډ : خوندي) لري۰ داسې ویناوو ته یوځاېشوې یا یوځای ایښول شوې یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړئ ! مرکبې ویناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بیلګه راوړو » کۀ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشوړ وي، نو داعدد یا ګڼ په 3 ویشوړ دی، یانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ویشوړ ده له دې لاس ته راځي، چی پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ویشوړ دی۰

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشوړ یا ټوټه کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي۰

لکه : سپین غر یوه خورا جګه څوکه لري

یوه بله بیلګه د یوځای شوې(ځنځیري) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي۰

څرګنده ده، چی دواړه ساده جملې د برخویناو په څیر یوځاي شوي ویناوې دي: » سپینغر خورا خواریکښ دی« همدا ډول » هغه (سپیغر) پوهیږي، چی نور کارته وهڅوي«۰

دا ویناوې کیدی شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیاارزښت یې همغه پاتې شي۰

د بیلګي په توګه:

۱ - سپینغرخورا خواریکښ دی۰ یا هغه پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چی هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی۰

۳ - دا چی سپینغر پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي ، نو سپیغر خورا خواریکښ دی۰

٤ – سره له دې، چی هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دی۰

ګورو، چی په دې ډول یو له بل توپیریدونکی تړلې یا ځنځیري، یا یوځاي شوی ویناوې جوړیږي، چی په خپله رښتیاارزښت کی یو له بل توپیر کیدی نه شي۰ د دوي توپیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوي یو له بل سره تړلو څرنګوالي له لارې مخ ته پروت دی یا رامنځ ته شوی دی٠
په لاندې کې به ممکنه« ویناتړنه» (یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر څیړنې لاندې ونیول شي.

پیژند ۱ ۰ ۲ :

یوه «ویناتړنه» یا یو «ویناتړاو» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنی وینې(افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډیرو ویناو څخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

موږ د سم اند یا منطق سټپرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې رینتیا ارزښت یی یواځی او یواځی د «برخویناو» رینتیا ارزښت په واک کې وي٠

بیلګی

الف: سپین ډیر خواریکښ دی، هغه په دی پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي٠

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي٠

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمي ولید٠

۱ ۰ ۲ ۰ ٤ ویناتړنه یا ویناېلواک (- فنکشن یا – تابع)

د ویناتړنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که څوک د تړنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځاي شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته رینتیا ده، چی دواړه «برخویناوې» رینتیا وي. دلته د خبرو پرځاي غواړو «رینتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپیژنو. موږ پریکړه کوو، چی د په زړه پورې ویناوو (ویناواریابلو یا وینا اووښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه p,q,r,... او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. موږ دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاینیونکی(یوځائیز یا یوګوني) بلواک یا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه٠

یادونه: د بلواک یا تابع کلمه وروسته څیړل کیږي، دلته د بلواک یا فنکشن پرځاي ویناتړنه یا عملیه بسیا کوي. دا ځنی ویونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي یې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وینا تړاو یا ویناتړنی(عملیې) «نه والی»: دیوی ویناP نه والی هغه وینا ده، چې هلته او یوائی هلته د ریښتیا ارزښت ناریښتیا لري، چیP ریښتیا ارزښت ریښتیا ولري٠

موږ د وینا P نه والی نفی په Pنه سره ښایو ، شمیرپوهنیزه نخښونه یې په لاندې توګه ده ¬p په یوه جدول کې ریښتیا فنکشن یا ریښتیابلواک کې داسی څرګند وو(دا چې زه کله کله هغه شمیرپوهنیز سومبول د نه p لپاره ¬p نه شم لیکلی، نو دا به همغسې p نه ولیکم.

Pنه یا ¬p	P
F	w
w	f

د یوې وینا P تکرار نه والي یا بیا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې یې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

¬¬p	¬p	p
w	f	w
f	w	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه واره نه والی د همغي لومړنی وینا رښتیاارزښت لري

په پیداینښتي ژبه کی نه والی په«نه» یا « نا » خپل رښتینوالی مومي٠ «اباسین هغه خپل تاکلی وخت ته را نه غی٠ دا د اباسین خپل تاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی٠

نه والی ته بیلګه : د وینا ¬A نه والی : "7 < 3 ,, وینا نهA ده: دا چی A رښتیا ده، نو ¬A نارښتیا ده٠

ترڼه(عملیه) یا کنجنکشن Conjunction (لاتین: ترڼه، دلته د « او (and)» ترڼه یا تړاو):

وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څټ یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼې لپاره بیلګی دي لکه پوښتني، امرونه او نظرونه یاعقیدې:

۱ – هوا څنګه ده ؟

۲ - کورته لاړ شه

۳ – شین یو ښه رنګ دی٠

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتوني لري، اړیکنخښی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي٠ یوه د نخښو لړی کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګې په توګه

3 + x <5 د بنسټیزورشو N کې نه ریښتیا ده او نه ناریښتیا٠ دا له دې امله وینا نه ده٠ که چیرې د واریابلې یا اووښتونې یا متحولې پر ځاي ٠ او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا ترې منځ ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ځاي يې نور د پيداينښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بيا ناريښتيا ويناوې منځ ته ترې راځي٠

دا چی اووښتونې یا متحولې د بنسټدیرۍ یا بنسټ سټ ځخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتونې د خپلواک یا ازاده اووښتونی(متحولې) په نامه یادیږي٠

پيژند :

یوه وینابڼه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اوښتونې(متحوله) لري او د

- د دې اووښتونې په ځاي د بنسټيزې ورشو يا ساحې او يا

- د دې اووښتونې تړلو ځخه د کوانتیفیکاتورونو(کوانتورونو) په مرسته یوه وینا جوړیدی شي.

یادونه :

که په لاندې کې د تړاو یا تړنې کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه یاکنجنکشن conjunction دی٠ له ګرامر سره په توپیر، چې هلته تړنه یا تړاو یو « تړونتکی، تړاولغات» ښايي په سم اند کې تړنه یو ځرګند(دوه ځایلرونکی یا دوه ځاییزیا نوره هم ښه دوه ګونی) جملې تړل یا په بل عبارت دوه ځاینیونکې (نوره هم ښه : دوه ییز یا دوه- ګونی) فنکشن یا تابع(بلواک) تعریفوي یا پیژنی٠

د « او» تړنه او نخښه یې $\wedge$

پيژند ۱ ٠ ۳ :

$p \wedge q$ دوه ويناوې p او q یانې د «او » یوځایوالیp او q یواځې او یواځې هلته یو ريښتيا ارزښت ريښتيا لري، چې p اوq دواړه ريښتيا ارزښت ريښتيا ولري٠ که له دې ځخه یوه وینا هم ناريښتيا وي، نو بيا د « او » تړنه ناريښتيا ده ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترني نخښنه ددوه ویناو qاو p ترمنځ لیکل کیږي p/\q او ویل کیږي p او p

موږ د « او » ترنه په لاندې جدول کې روښانه کوو یا انځوروو:

یادونه: په لاندې کې w ربښتیا او f ناربښتیا په معنا دي

p	q	p/\q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

د « او » ترني ته بیلګه :

د دوه ربښتینو ویناو د A وینا : ,, 7 > 3 ,, او د B وینا : 3 یو لومړنی ګڼ دی ربښتیا وینا A /\ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

یادونه: موږ ګران لوستونکي به سره یوځای فکر وکړو، چې دا پریمګنونه لومړي او که لومړني ګنونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګنونه لومړنی نه دي۰ دا ځکه لومړي ګنونه دي، چې له دوي له زیاتون او یا کمون څخه لومړی ګنونه جوړیږي۰ موږ به یې زیاتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ویناو دا ترنه یا کنجنکشن، چې مختلف ربښتیاارزښتونه ولري یانې د A وینا: 3 ,, 7 > ,, (ربښتیا او د B وینا: « ۳ یو جوړه ګڼ دی (ناربښتیا)، نو A/\B وینا : چې ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « (ناربښتیا) ده۰ دا ویناترنه ویناارزښت ناربښتیا لري۰

د دوه ویناو د « او» ترنه دA وینا: 7 > 3 او د B وینا « ۳ یو جوړه ګڼ یا جفتعدددی» یوه ناربښتیا وینا ده : ۳ یو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ومو لیدل، چی د « او » ترنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده (عادي) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټې «پټیدځاي» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » ترنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښایي»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځاي پیدا کړ« او » دا پټیدځاي یې پټ واسته۰

۱) هلمند موږ(بډا) شو او هیواد یې پریښود ۰

۲) سره له دې، چی برلین کوچنیښار دیهلته د منی د المپیک لوبې کیږي

۳) ۱۵ ګڼ جوړه دي، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونیدي

په ټولیزه توګه د « او » ترنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چی د جملی ټولی برخې رښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا ترنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخی سره په ترنه « او » وتړل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او بری یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» ترنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « ترنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله ترنه» تل ژوروالی ته راهڅوي: باید جوته شي، چی ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»ترنی پیژند یا تعریف یواځنی دی او دا \/ د یا ترننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p او q ترمنځ ځایول کیږي p\/q او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول څرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

p	Q	p∨q
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتیږي، چې دیسجنکشن یا د « یا » تړنه p∨q یو داسې رښتیاتابع (-بلواک یا- فنکشن) دئ، کوم چې هلته او هلته رښتیا فنکشن رښتیا اخلي، کله چې کم له کمه د « یا » تړنې یو غړی د رښتیا ارزښت رښتیا ولري یا واخلي۰ که د دیسجنکشن دواړه غړي نارښتیا وي نو p∨q هم نا رښتیا دئ۰ دا د رښتیا فنکشن کې د ځایونې « یا» څخه بل څه نه دي۰ یوه د «نه خوندیکونې» یا « نه ځایونې» یا « په برکې نه نیونې» د « یا » وییینه یا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « یا۰۰۰ او یا ۰۰۰» لیکل کیږي۰

بیلګه (د « یا » تړنې ته):

د دوه رېښتینو ویناو د « یا» تړنه د A وینا: ,, 7 < 3,, اود B وینا: « ۳ د ٦ پرویشونی دئ» یوه رښتیا وینا A∨B ده : «۳ له ۷ کوچنی دئ او د ٦ پرویشونی هم دئ»۰

د دوه ویناو تړنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وینا ,, 7 < 3 ,, رښتیا او د B وینا: ,, 7 =3 ,, (نارښتیا) ، نو A ∨ B ده، چې 7 < 3 یا 7 = 3 دا وینا تړنه د رښتیا ارزښت رښتیا w لري۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه نارښتیا ویناو د « یا »(" Or") تړنه:

د A وینا : "7 > 3 " او د B وینا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دئ یوه نارښتیا وینا A∨B ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دئ»

الترناتیوAltenative یا انتیوالنځ Antivalenz ویناوې : دا د » یا « ویناتړنه باید د « یا ... او یا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتیا ده، که چیرې دواړه ویناوی رښتیا وي.

بیلګه : (دوه الترناتیو ویناو ته ، چې رښتیا وي)

د وینا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دئ» د الترناتیو په نامه داسې دئ « ۳ یا له ۷ کوچنئ دئ او یا یو لومړی ګڼ دئ» نارښتیا دئ.

بیلګی : (نه والي، کنجنکشن، دیسجنکشن ته)

یادونه: په لاندې (Wahr) w د رښتیا او(Falsch)f د نارښتیا لپاره کارول شوي.:

ویناتړاو

A	π پي تولګڼ دئ	f
B	π ایراشنل ګڼ دی	W
C	صفر له پيπ کوچنی دئ	W
D	π پي له دری کوچنی دئ	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

W	π ټولګڼ نه دی	A
F	π کوچنی برابر له صفر	C
f	π ټولګڼ او له صفر لوي دی	A∨C
W	π ايراشنل او له صفر لوي دی	B∧C
W	πپي ټولګڼ يا له صفر لوي دی	A∨C
f	π ټولګڼ يا له ۳ کوچنی دی	A∨D

بيلګه : له دې بيلګی دمخه هغۀ فرمول دی

يا کتاب لولم او يا فلم ګورم٠ په دې بيلګه کی الترناتيو يا بديل شته دی، يانې د » او يا « امکان شته٠ دا د » او يا « کارونه يا استعمال د خرڅلاو شيانو باندې بايد بند وي٠ يانې دوه نرخونه بايد ورنه کړای شي٠

دا لاندې فزيکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځيره دې يې په پام کې راولی٠ په شالت يا سرکټ الجبر کې د کجنکشن يا د »او« ترنې« رينتينوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه ترل شوي دي،

Bild 7.1

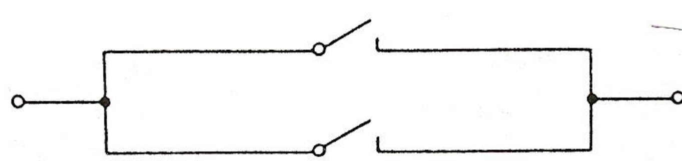


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس رښتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستۍبیلګه په ګوته کوي، چې داسی یوځاي شوې ویناوې جوړیدئ شي، په کومو کې چې له یو زیات تړوني موجود وي٠

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملی کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی (رښتیا - بلواک یا رښتیا فنکشن » نهp p∨ دئ٠ د دې لپاره هم د رښتیاارزښت فنکشن ورکول کیږي٠ د رښتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا p نه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp∨p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دئ

د یوې وینا نه والی

p	Pنه	p∨pنه
w	f	W
f	w	w

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکیک کوونکي نه ده یوه وینا نهp∨p تل رښتیا ده، بی له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم رښتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې ویینې یا افادې، چې د هغې رښتیابلواک کټمټ یا identisch(identic) رښتیا دئ(دا په دې مانا، چی که د ویناۇوښتونکې یا واریابلې ته هر رښتیاارزښت ورکړ شي یانې رښتیا یا نارښتیا تل د رښتیا ارزښت رښتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې ویینې یا افادې، چې د هغو رښتیاارزښت بلواک کټمټ نارښتیا دئ (دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتونې په هره وینا ارزښت وینا نارښتیا ارزښت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction (د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

ربښتیاارزښت دې د وییني یا افادې نه(p\/q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د نهp\/q ربښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q$

$$p...q....p\vee q....\neg(p\vee q)......\neg p...\neg q...\neg p\wedge\neg q$$
$$w...w......w.........f.............f.....f.........f$$
$$w...f.......w.........f.............f......w.........f$$
$$f...w........w.........f............w.......f.........f$$
$$f...f........f.........w............w........w.........w$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویېنې یا افادې $\neg(p\vee q)$ او $\neg p\wedge\neg q$ په څرګند ډول همغه ربښتیا بلواک یا – قنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه ربښتیا - (او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکې جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو -وینا تړنه) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعأ همغه نه پاتیږي، لکه

د بې نوکانو عملیې.

ایمپلیکیشن implication (لاتین: درراګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې« که٠٠٠، نو سره تنظیم یا ترتیب شي اپیلیکیشن سومبول=> چې دا سومبول د دواړو وېناو Aاو B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نوB یا په همدیډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion (لاتین: پاي لاس ته راوړنه) وایي٠ د دوه ویناو ایمپلیکیشن تیک هلته نارښتیا دی، چې پریمیسس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي٠ په بل ډول رښتیا دی٠

د دوه ویناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرګندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول =>

P	q	p=> q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسی یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ویناو A اوB تیک هلته یو نارښتیا یوځاي شوې ویناچې په p=/>qسره ښایو)٠

کله چې لومړبرخه وینارښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوتري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا ویینې په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځیدلی شي. په ښکاره ډول د بیلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلویزیون کتلو ته کورته راځي.

ناریښتیا ده، که د جملې لومړئ برخه رښتیاوي او دویمه نارښتیا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بیلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې څلورمه کرښه سره یو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې رښتیا همداسې نا رښتیا وي) پرابلمونه نه پیښوي، په دې حالت کې توله وینا رښتیا ده، که لومړئ برخه وینا نارښتیا او معکوس دویمه برخه رښتیاوي، نو په دې حالت کې به د بیلګې په توګه جمله نارښتیا ونه لیدل شي(که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلویزیون لیدلو ته راشي)، نو بیا د دوه ارزښتوالي پرینځیپ له مخې یواځې دا ارزښت ،، رښتیا،، باقي پاتې کیږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg(p \vee \neg q)$ ټیک بیرته بیا(بیرته) د ایمپلیکیشن د رښتیا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې یې: q که p، او یا هم p ، د q لپاره پوره کیدونکی شرط دی(په بل ډول یې: qد p لپاره اړیین شرط دی)

ورته والی :یوارزښتوالی(برابرارزښتوالی) Äquivalent

که دوه ویناوې qاو p خپله ترنه په » ټیک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که» تنظیم کړي، دې ته ورته والی یا ایکویوالنت وایي۰ د ایکویوالنت سومبول دی ≍ د دواړو ویناو pاوq ترمنځ دا سومبول پروت دی p ≍q په دې مانا، چې p ټیک هلته که q ۰ ایکویوالنت سومبول یې په دواړو خواو ایمپلیکیشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ویناو ایکویوالنت ټیک هلته رښتیا دی، که دواړه ویناوې رښتیا یا دواړه ویناوې نارښتیا وي۰

دا شي څرنګوالی یا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

p	q	P⇔q
w	w	W
w	f	F
f	w	F
f	f	W

سيده او مخامخ يا په ځېڅ دي په دې مانا وي، چې له p څخه q لاس ته راځی او په ځېڅ، يا نی له q څخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د ويناپلواکو يا ـفنکشنونو ترمنځ اړيکې

د دوه ويناو ترنه سم انديزه يا منطقي برابرارزښته بلل کيږي، که د ويناو ربښتياارزښت د ترنويناارزښت سره يو په بل وخوري يا يو بل سره برابر شي۰ دا د يو ويناارزښت جدول له لارې ځرګنديدی شي۰ ومو ليدل، چې ايکويوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه يا ايمپليکيشن دی۰ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دريم او شپږم درځونه، متې يا ستنی څنګه يو بل سره ځان نيسی يا ګورو، چې سره يوارزښته دي۰

p	q	p ⇔ q	p=>q	q ⇒ p	(p ⇒ q) (q ⇒ p)
W	w	w	w	w	...........W
w	*f*	f	f	*w*	.........*f*
F	*w*	*f*	*w*	*f*	..........F
f	*f*	w	w	*w*	.........*w*

ورته والی اړيکی د ورته والی يا ايکويوالنت سومبول باندې هم ښوول کيږي

$$(p <=>q) <=>(p => q) (q => p)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ورته والي ويناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې يو بل سره بدل کړو يانې د يوه ځاي د بل سره بدل کړو٠ له دې ښخه پيچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کيږي٠

د دې ورته والی ويناتړنې غوره بيلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$
$$(2)......\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او ديسجنکشن لپاره ديستريبوتيو قانون:

(3) [p∧(q∨r)] □ [(p∧q) ∨ (p∧r)]

(4) [p∨(q∧r)] □ [(p∨q) ∧ (p∨r)]

۱ ٠ ٤ وينافورم يا ـ بڼه او کوانتورونه

وينا سم اند په لاندې ډول ساده تولیز کيدی شي٠ د بيلګي په توګه که مختلف شيان همغه خويونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وويلي - - يا افاده کړای شو: دلته د يناو پر ځاي د وينافورم ښخه خبري دي، يا غږيږو٠ دا داسی ژبنۍ ويينې يا افادې دي، چې د شيانو لپاره واريابلی يا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته يوه وينا شي٠ بيلګي يی په لاندی ډول دي

لومړی : xپر دوه ويشونی دۍ »

دويم : » z يو هوار څلورګوډۍ(څلورضلعي) » دۍ٠

دريم : «u له v ښخه لوي » دۍ او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته رښتیا یا نارښتیا وینا لاس ته راځي٠ که په دویم کی دz پرځاي «ډیرګوډی» (کثیرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو یوه رښتیا وینا لاس ته راځي٠

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو یوه نارښتیا وینا لاس ته راځی٠ دریم یوه اړیکه(ریلیشن(ده، چې هلته د انفرادیو د ایښولو ترتیب هم یو رول لري٠ دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا رښتیا وینا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي٠د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل٠(له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وایي٠

بیرته داسی لیکو P(x), Q(z), R(u,v)

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بڼې څخه وینا جوړوي٠ چې کوانتیفیکیشن Quantifikationبلل کیږي٠ دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بڼی افراد همغه خویونه ولري، چې ټولوینا (Allaussage) ورته وایو٠یاچې په پوښتل شوي چاپریال کې داسې افراد شته وي، چې همغه خویونه ولري، دې ډول وینا ته موږ د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وایو٠ زموږ په بیلګه کې یی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پیداینښتی یا طبیعي) ګڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کیږي

پنځم : ټولې څلوری (مربع) هوارې ډیرګوډی یا کثیرالاضلاع دي٠

د ټولکوانتور یا ټولوینا لپاره نخښه∀

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتونوینا لپاره نخښه ∃

یادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څیر ده په پام کې دې وي، چی د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې (ویاریابلی یا مجهولی) ورکول کیږي٠

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی یي لولو، چی یوx په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځه ۱　:　$\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دئ (یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه)

دا سومبول ∃ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰۰۰ شته»د وینابنی او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیرئ کې، په کوم کې چی کم له کمه یوه داسې اووښتونې ځاي په ځایونه شته وي کومه چې وینابڼه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی (د رښتیا شتون - موجودیت ویناوي)

اول -　$\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له(په) R (کې) شته ،د کوم لپاره چې0 =x+1 باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیرئ یا ریل ا عدادو سټ R توکی دئ او ∈ په دې مانا دی، چې توګي له ۰۰۰ دی۰

دویم :　$\exists x \in R:$

$$x^2 + 4x = 0$$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x= 0$ باور لري)

دریم :　$\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلګڼونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (2، -2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$$\exists x \notin R: x^2+1=0$$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې وینابنې هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډيرئ یا واریابلډیرئ ټولو توکو لپاره رښتیا وینا شي٠

بیلګه: وینابنه « x په 2 ویشونی دئ » د جوړه ګڼونو هریوه لپاره رښتیا ارزښت لري په

دا سومبول $\forall$ په دې مانا دئ، چې « د ټولو x لپاره» د وینابنې او په همدې پوري اړوند د وینا متحولو ډېرئ یا سټ (ویناااووښتونډیرئ یا واریابلډیرئ) ترنه له دې سومبول سره یوه Universalaussage یونیورزالوینا یا ټولوینا منځ ته راځي٠ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتونډیرئ) هر توکی لپاره د وینابنې څخه یوه رښتیا وینا جوړیږي٠

جمله : (دUniversalaussage یونیورزال- یا ټولیزې وینا یا ټولوینا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ویشونی دئ)

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو رییلاعدادو x لپاره, کوم چې له یوه لوې وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د نارښتیا ټولیزې وینا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وینا نارښتیا ده، ځکه چې دا د $1 \le x \le 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وینا د ټولو ریل عددونو لپاره باور نه لري٠

۱ ۰ ۵ اړین – یا ضروري- او پوره کیدونکي شرطونه

د ایمپلیکیکشن سومبولA=>B («که A نو B » « له A څخه Bلاس ته راځي»)یا په بل ډول : که A باور ولري، نو B هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته٠

الف) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دی»

ب) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف) وایي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چی آ پوره شي٠

بیا : وینا باور لري٠

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دی یا پوره کیدونکی دی یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – ویناA : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « ګڼ n پر ۳ ویشونی دی»

A => B

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دی یا بسیا کوي، چې یو رییل ګڼ n پر ۳ ویشونی دی، که دا پر ٦ ویشونی وي٠
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ۳هم ویشونی دی ٠ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي٠ د بیلګي په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ویشونی دی ، مګر په ٦ نه دی ویشونی٠

۲ - وینا A : "n > 7"

وینا B :وي دې: n > 6

A => B

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دا پوره کيدونکی دی، چې يو ريبلګې ن له ٦ څخه لوي دی٠ که اړيکې، چې ن له ٦ لو دی، باور ولري

داسې ريبلګنونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له٧ څخه لوي نه دي٠ د بيلګي په توګه ٥ ،٦ يا شپږ.نيم

د ب) فرمولبندي وايي، چې وينا ب باورلرل غوښتونکی يا اړيين يا ضرور دی، د دې لپاره، چې وينا A باور ولري٠

که وينا B باور ونه لري نو وينا A هم باور نه لري ٠

بيلګی د اړيين(ضروري) شرطونو لپاره:

١ – د دې لپاره، چې يوګڼ n پر 6 وويشل شي، اړين(ضرور) ده، چې دا ګڼ پر3 ويشونی وي٠ يو ګڼ، چې پر3 نه وي ويشونی، نو پر ٦هم ويشونی نه دی٠

٢ - ويناA : » څلور ګوډی يوه څلوری يا مربع ده«

وينا B : » څلور ګوډی څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې يوه څلورګوډی يوه مربع(څلوری) ده دا خويونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه يې ولاړ نه وي، نو مربع يا څلوری نه ده که يوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړين نه ده، چې څلوری يا مربع دې وي٠

د برابروالي يا برابرارزښتي (ايکويوالنت) سومبول«

A<=> B

(په دواړو لورو ايمپليکيشن) لپاره په شميرپوهنه کي هم فرمولبندي شته: دا وايي، چې A دB لپاره يو ضروري او پوره کيدونکی شرط دی٠ « دا وايي، چېA ټيک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – ویناA : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دی، که دا عدد پر۳ او ۲ ویشونکي وي٠

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعي»

A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه(ضلعې) ولري٠

۱ ٠ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم(ترې پوهیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې ټیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي٠ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کي داسي نه ده٠

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د ټیک څرګندې پوهنې یوه نه پرېښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله څه شی دی ؟

ټولې ربښتوني ويناوې په شميرپوهنه کې جملې بلل کيږي، چې د پيژندني لپاره ښووني يا ثبوت ته اړتيا لري ۰

اکسيوم Axium څه شی دئ؟

بې ثبوته ربښتينې وينا ته اکسيوم وايي

شميرپوهنيزې يا د رياضي جملې زياتې نيونې(فرضيي) او ثابتول(غوښتنه،جوته ونه يا ښوونه) په بر کې- يا خوندي لري۰

که دا وينا داسی وي، نو پس داسی به هم وي۰ دلته که دا وينا داسې وي نيونه يا فرضيه ده او نو داسې هم ده۰ دا غوښتنه ده، چې بايد ثبوت يا وښوول شي۰

اکسيوم : ۱ طبيعي عدد دئ (پيانو Peano)

: ټکی هغه دئ، چې پر ويشونی نه وي يانې په ټکی ويشل بند دي۰ (Euklid)

: حتمي پيښه د پيښي امکان ۱ درجه لري۰

جمله: که درېګودی ولاړکونجيز وي، نو(پس) د پيتا ګوراس (pythagoras) درسي جمله باور لري

: يو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، بايد ناجوړه(طاق) وي

: په اخره جمله کې نيونه(فرضيه) ده (که يو پريم عدد له ۲ لوي وي۰۰۰) او ثبوت يې (هر له دوه لوي عدد په دوه ويشل کيږي پس لومړی ګڼ نه شي کيدی، نو دا تل ناجوړه ياطاق دئ)په څټوالي يا تضاد کې پيژندل کيږي۰
تل داسی نه ده، چې د جملی د ربښتينوالی څخه دې د جملی په څټوالی يا تضاد هم ربښتيا وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ۲٪ هم (رښتيا)

جمله: که ۲ ٪ پس ٦٪ هم (نارښتيا)

۰۰۰۰۰۰ټيک هلته ، چۀ که۰۰۰۰يوځاي راوړي

بيلګه : که چيرې غبرګ اړخيز کې هر دننني کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجيز(قام الزاويه) دی۰

په څټ : که غبرګ اړخيز ولاړ کونجيز وي، نو دننني کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

يوځاېراوړل :

يو غبرګ اړخيزټيک هلته(هلته او هلته يا بيا او بيا يا يواځنې او يواځنې ټاکلی يا يواځنی ټاکلی او په څټ) ولاړکونجيز دی، کله چې دننني کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پيلبيلګه:

لمسی ، پلار او نيکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر يوکال کم اوه ځله عمر لري او نيکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ٦ کاله نور هم زيات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي څخه هر يو څو کلن دیَ؟

د ځوي عمر په x سره ښايو، نو د پلار عمر 7 x-1 دیَ او د نيکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کيږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زياتون يا جمع بيا ۱۱۳ کاله دیَ يانی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کیږي او ساده کیږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \ \backslash / \ \ 22x +3 = 113$$

په کينې ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزيات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا ګڼې ۲۲ ځله x بیا ۱۱۰ کیږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده یانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ۵ کلن پلار ٣٤ کلن او نیکه ٧٤ کلن دی٠

که ترمونه $T^\wedge$ او T° د برابرونښنښنی = باندې یو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابرون پیداکیږي: $T^\circ = T^\wedge$ ٠

که چیرې ترمونه په دې نښنو $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ او(نابرابرونښنښه =|) یو له بل سره وتړل شي یو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي یا مجهولو سره یوځاي شي، هغې ته د وینافورم یا نوره هم ښه وینا ښه ویل کیږي٠

دا یا رښتیا یا نارښتیا وینا کیدی شي٠ که ناټاکلي، چې اوښتونې یې هم بولو(د بیلګې په توګه z , x , y) پر ځاي د بنسټیدیری ګڼونه ولیکل شي٠ په برابرونپوهنه کې له پیژند – یا تعریفدیری څخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم یا بڼې یو برابرون یا نابرابرون رښتیا وینا کړي٠

د یو برابرون یا نابرابرون (مساوات یا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې ویناښه پیژند - یا تعریفدیری پورې اړوند وي او دا وینا ریښتینې کوي، اوبیډیری یا حلډیری L کې پروت دی یا د برابرون یا نابرابرون په ډکوونکو (پوره کوونکو) ډیریو پورې تړلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ریښتونې وینا ورکوي کټمټ یا (identisch, identic) وینا وایي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګې :

الف) $5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $x = -4$ لپاره رښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په ښتې $3.4 = 48$ پس- $L = \{ -4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 => L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب) $x < 3 => L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی : الف) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژنددیرېکې سره برابر وي(یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلدیری ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي۰

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نابرابرون	براون
۱) وینافورم کې کیدی شي،چې خواوې سره بدلې شي	$T^\circ < T^\wedge \quad T^\wedge > T^\circ$ $2x < 6 \qquad 6 > 2x$	$T^\circ=T^\wedge \quad T^\wedge = T^\circ$ $3x=5y \quad 5y = 3x$
۲) که وینافورم په دواړو خواوو همغه ترم زیات یا کم شي او د یوې ورزیات ترم پیژندډیری خوندې وساتل شي یا ځاي کړي	$T^\wedge < T^\circ \Rightarrow$ $T^\wedge \pm T^\circ < T^\circ \pm T^\wedge$	$T^\wedge = T^\circ \Rightarrow$ $T^\wedge \pm T^\circ = T^\circ \pm T^\wedge$
یا تغیر ونه خوري٠ مخامخ یا کیڼ لوربیلګه کې تفریقډیری تغیر خوړلی	$3y < 4x \quad \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4y \pm 2x < 4x \pm 2x$	$2z = 8 \Rightarrow$ $2z \pm 3 = 8 \pm 3$

پر ښت بیلګه

$2z=8 \mid\Rightarrow 2z+3-z=8+3-z$

دا چې $z=4$ دې نوي ورزیات شوي

ترم $3-z$ نه دی تعریف یا پیژندنه

لري، ځکه چې $3 - z$ یو پیدایښتي یا طبیعي ګڼ نه دی

۳) د وینافورم دواړه $T^\wedge=T^\circ \Leftrightarrow T^\wedge.T > T^\circ.T \quad T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه کیدی شي چې	T^ < T° ⇔	T^.T =T°.T
له همغه مثبت ترم سره	T^:T>T°:T	⇔T^:T = T° : T
ځل او یا په همغه ترم	$T > 0$ که	که$T > 0$ وي
وویشل شي	$3y -12 < 30z -90$	$4x+2 = 10x-6$
	⇔ $y – 4 < 10z -30$	⇔$2x + 1 = 5x -3$
	⇔ $4y -16 < 40z -120$	⇔ $2xc + 10 = 50x-30$
٤) د یوه برابرون	T^ <T° ⇔ T^.T > T°.T	T^=T° ⇔
دواړه خواوې کیدی شي،	T^ < T°	T^.T =T°.T
چې له یوه منفی ترم سره	⇔T^:T = T° : T	⇔T^:T>T°:T
ځل شي یا دواړه خواوې په	$T < 0$	$T < 0$
همغه ترم وویشل شي٠	$-2y < -4$	$3x = 12$
که په دې فورم کې	⇔ $y> 2$	⇔$-9x= -36$
نابرابرونونه وي نو د	⇔ $10y > 20$	⇔ $x = 4$

برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي

یادونه :

په ټولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه Tیو او T دوه په لاندې توګه د ایندکس سره په نخښه کوي: T_1, T_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د رښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د رښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - (A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ډيرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډيرۍ پوهنې يا سټ تيوري بايد خپل ځاي په شميرپوهنه او همدا ډول په نورو پيداينتي- يا طبيعی پوهنو کې نيولي وي، نو له دې امله د لنډ تير وخت را په دې خوا په پرمختللو هيوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځيو په ليکلوست کې پيل شوه، ځکه چې بې له ډيرپيوهنې يا سټ تيوري شميرپوهنه بې مفهومه ده او ناشونې. دا به له دې ليکنې څخه همدا اوس څرگنده شي، چې پيداينتي يا طبيعي گڼونه يا - اعداد او هرڅه د گڼونو په څيره کې ، چې موږ ته څرگند وي هغه ټولې ډيرۍ يا سټ دي او بل څه نه دي.

ډيري پوهنې (سټ تيوري)په پرمختللو هيوادونو کې هم د شلمې پيړۍ په دويه نيمه کې د ميندو او پلرونو لپاره ستونځې پيدا کړې، ځکه، چې دوي د ډيرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنيانو سره يې مرسته نه شوه کولی.

د ډيرۍ کلمه له عدددونو يا گڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښوولـه لکه اوس.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ يا ډېرۍ پيژندل کيږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، يا په يوه ټولګی کې ميزونه او چوکی، يا لکه هغه نيزوړي، چې نيز راوړي او د سپين په پټي کې يې ډيرۍ ډيرۍ اچولي يا د هسکې مينې د ښوونځي په لسم ټولګی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکيو او ميزونو سټ يا ډيرۍ۰

د ډېرۍ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډيرۍ له کليمې سره اوس بلد شوي يو که څه هم تربيلو بيلو پرديو نومونو لاندې، چې زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته يوائځي ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چې د ډيرۍ څو مختلف پيژندونه يا تعريفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چې د ډيري پوهنې (سټ تيوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوګرځي۰

ډيرۍ پوهنه د شميرپوهنې سته جوړوي او د شميرپوهنې ټولې څانګې په ډيرۍ پوهنه ودانې دي۰ نن شميرپوهنه بې له ډيرۍ پوهنې داسې وده نه شي کولی او سته يې وزي۰

پيژند ۲ ۰ ۱

الف : ډيرۍ يا سټ د ټاکلو شيانو يا کلمو ټولګه (يوځايوالی، مجموعه) ده، چې پخپله خوښه د يوې ټاکلې بنسټډيرۍ يا بنسټ سټ څخه ، چې د پيژندلشويو اصولو يا کرکترييين له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شميرپوه کانتور(1918 – 1845 George Cantor) پيژند:

زموږ د خيال يا ليد څرګند ټاکلو ، ټيک يو له بل توپيرکيدونکو شيانو ټولګې (يوځايټولولو يا مجموعې) ته ډيرۍ وايي او هر شي ته، چې ډيرۍ يې جوړه کړې يا ډيرۍ ترې جوړه شوې وي، د ډيرۍ – يا سټ توکی وايی۰

(Set and elements of set ډيرۍ او د ډيرۍ توکی)

پ : د مختلفو شيانو ټولګې يوه يوون يا يووالی (واحد Einheit, unite) ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library

شميرپوهنه کې ډيرۍ وايي

يادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد يو يوون يا يووالی ښه نومه ونې دي۰ دا که څو واره وويل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلديږو۰

ت : څرګند شيان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر څيړنې لاندې نيول کيږي او د دې نخښو له امله يوځاي ټوليږي يا ټولګه جوړوي، ډيرۍ يا سټ تشکيلوي۰ ګډې نخښې کيدی شي ښکلا، کوچنيوالی او داسې نور وي۰

يادونه: د ګرانو لوستونکو دې ته پام وي، چې په پورته پيژندونو کې يې غوره او د پام وړ پيژند ياتعريف د جورج کانتور پيژند دی.

بيلګه :

ګڼونه يا عددونه، نومونه، او توري کيدی شي د ډيريو بيلګو په توګه راوړل شي۰

ګورو، چې د ډيرۍ يا سټ کلمه په شميرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډيرۍ د څنو شيانو زيات يوځاي کول موخه ده، د ځانګړو شرايطو لاندې.

په شميرپوهنه کې ډيرۍ په لويو لاتين تورو ليکل کيږي لکه ..A,B, او يا M,N,
X,Y,.... د ډيريو توکي د لاتين په کوچنيو تورو ليکل کيږي، لکه a,b,c,...
او m,n,x,v,...

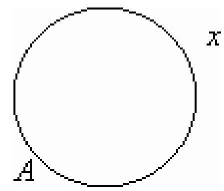
د دې لپاره، چې وپوهيږو، چې ايا توکی a د ډيرۍ A توکی دی که نه نو ليکو: $a \in A$

په پورته کې توکی a د ډيرۍ A توګی دی.

که a د A توکی نه وي ، نو ليکو: $a \notin A$ دلته a د ډيرۍ A توکی نه دی

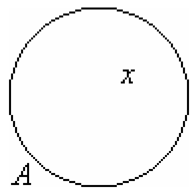
دا پورته لينکدود له ښی وکيڼ لور ته هم ليکلی شو، چې پرلپسی لړۍ يې ساتلې پاتې شي۰ زه يې په څټ ليکنو سره ليکنيزې ستونځی لرم۰دا لاندې يې دياګرام دی، خو توکي يې بل ډول ليکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهيدلو ستونځ پيدا نه کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$a \in A$

(a د A توکی نه دی)



$a \notin A$

(a د A توکی دی)

ډيرۍ A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه يې ليکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډيرۍ يا سټ نخښه ده

يادونه : دا د ډيرۍ کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګريزي ده، په فارسي کې يې مجموعه بولي، چې ډيرۍ د شيانو مجموعه يا ټولګه ده او په الماني کې ورته مينګې Die Mengeوايي٠ هغه بنسټيزه خبره يې په پيژند يا تعريف کې ده، که موږ يې چې هرڅنګه وبولو، خو د يو بل څخه کره توپيرکيدونکو شيانو ټولګی ته ۰۰۰ وايو. د ټکو پر ځاي ، چې هر څه ليکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو يې هغۀ مناسبه نوموه ونه ډيرۍ ده، دا د کوټې کوټې څخه يا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاريږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شميرپوهنه کې بايد وکارول شي٠ زه بيا په دې ټينګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی يا بل څوک يې که بل ډول بولی د انګريزي يا الماني يا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ دی٠ د سټ مانا که په ډکشنري کی وګورئ ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دئ. ګورووچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زيات کاروي او وايي، چې ډېرى يا ډېرۍ خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ ۰ ۱

الف) M_1 (لوستل M ایندکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces ایندکش پیژند نخښې ته وایي) دې د لومړیو ګڼونو ډیر ی (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دې د لاندې برابرونونو یا مساواتو د اوبیونو(حلونو) ډیرۍ وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بیلګه ۲ ۰ ۲ :

الف) د مساوات $(x+1)(x-2) = 0$ حل ډیرۍ M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو یاګڼونو ډیرۍ M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$

ډیرۍ لکه، چې ومو ویل د توکو د خویونو له لارې هم څرګندیدی شي یا ورکول کیدی شي۰

M = { x | x د خوویونو ۰۰۰ سره}

(لوستل: M د ټولو x ډیرۍ ده له خویونو ۰۰۰۰۰ سره)

بیلګه ۲ ۰ ۳

الف) { د ټولو x سټ ، چې هلته x یو لومړنی عدد یا ګڼ دی| M = { x

b) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشډیرۍ: ډیرۍ، چې کوم توکی ونه لري تشډیرۍ یا خالي سټ بلل کیږي او داسی یې لیکو: θ یا $\{\}=\emptyset$

دا دې د یوې ډیرۍ یا سټ سره، چې یوائی له صفر څخه جوړه ده، نه بدلیږي یانې

$$\{0\}\neq\{\}=\emptyset$$

بیلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x\in Z, x^2+x-\frac{3}{4}=0\}=\theta$$

ځکه، چې د برابرون یا مساوات $x^2+x-3/4=0$ حلډیرۍ

$$\{x|x^2+x-/4=0\}=\{1/2\ ,\ -3/2\}$$

کوم ټولګڼ یا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګڼونو پیژند ته دې پام وي، چې د راشنلګڼونو برخډیرۍ ده۰دریمه برخه دې وکتلشي

بیلګه ۲ ۰ ۵ : د ز۰ کال د دویمې نیمایي میاشتو سټ یا ډیرۍ په Ju , aug sep , ok,no, de سره ښایو او لیکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو یا نوره هم ښه داسی لیکلی شو: $jul\in A, jun\notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بیلګه ۲ ۰ ٦ : ټول مندیزي، چې نن مازیګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون یا جماعت ته راغلي۰

بیلګه ۲ ۰ ۷ : د هغو میرو ، غواوو او وزو ډیرئ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بیلګه ۲ : ۸ د ټولو هغؤ ګڼونو ډیرۍ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ویشي یانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې یې لیکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسې وایو، چې ډیرۍ یا سټ M د ټولو هغو توکوx - لکه پورته - جوړ شوې، چې ۳۰ ویشي او داسې یې لیکو: $M =\{ x \mid x$ د ۳۰ پرویشونی ګڼ$\}$

د ټولو پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیرۍ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې یې لیکو:

$$N = \{ 1,2,3,4\ldots.\}$$

دا نه پای لرونکی یا لایتناهي ډیرۍ(سټ) ده ، چې په لاندې ډول یې نخښه ده یا په لاندې ډول په نخښه کیږي: ∞

ګورو، چې په شمیرپوهنه کی موږ پر پای ګڼونو برسیره ناپای عددونو سره هم مخامخ یو.

۲ . ۲ د ډیریو ترمنځ اړیکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړیکی د برابروالی او خوندیوني یا خوندي لرنې (مساویوالی او یو په بل کې ځاي لرلو) اړیکې دي.

پیژند ۲ . ۲ دوه ډیري یا سټونه M_1 او M_2 یو د بل سره برابرې دي، یانې
$M_1 = M_2$

که چیرې د ډیرۍ یا سټ M_1 هر توکی د ډیرۍ یا سټ M_2 توکی هم وي او پر څټ یا برعکس هر د M_2 توکی د M_1 توکی هم وي.

برابرې ډیرۍ برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګی په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دئ

برخډیرۍ(سبسټ subset)

پیژند ۲ ۰ ۳ :

یوه سټ M_1 د سټ یا ډېرۍ M_2 برخډیرۍ (لاندې ډیرۍ، خوندي ډیرۍ یا سب سټ) بلل کیږي یا M_1 په M_2 کې ځای ده یا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي ده، لیکندود یا لیکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډیرۍ M_1 هر توکی دسټ یا ډېرۍ M_2 توکی هم وي٠

کیدی شي، چې M_1 د M_2 سره برابر هم وي، که برابروالی یا مساوات نا شوني وي نو بیا د اصلي برخډیرۍ یا اصلي سب سټ څخه غږیږو٠

پیژند ۲ ۰ ٤ :

یوه ډیرۍ یا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډیرۍ ده او داسې یې لیکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

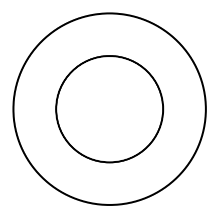
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 یو توکی د M_1 توکی نه وي.

بیلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو M_1 په M_2 کې اصلی خوندي دی

ب) د ټولو څلوریو (مربعو) ډېرۍ د ټولوڅلورګوډیو(څلور اضلاعو) اصلي برخډېرۍ ده.

پ) څیره ۱ ۰ ۱ په هواره یا سطحه کې ټکوډېرۍ ښایي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډېرۍ یا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څیره کې وګورو، نو یوه ګردۍ (دایره) M_1 په بله لویه M_2 ګردۍ کې خوندي ده.

تشډېرۍ په هره ډېرۍ کې خوندي ده. هره ډېرۍ په خپل ځان کې د نااصلي برخډېرۍ په څیر خوندي ده.

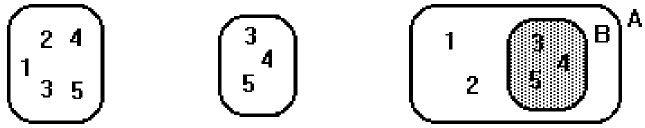
یا دا پیژند :

$A \subseteq B$ که باور ولري : $x \in A \Rightarrow x \in B$

بیلګه:

$A \subseteq A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{3,4,5\}$ B

(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډیرۍ، چې هیڅ توکی ونه لري تشډیرۍ بلل کیږي او داسې یی لیکو: $M=\theta=\{\}$

یادونه : پام دې وي، چې صفر ډیرۍ او تشډیرۍ سره بدلي نه شي یانې لاندې ته:
$\{\}=\theta\neq\{0\}$

د یوې ډېرۍ توان یا تواندېرۍ (توانسټ)

پیژند ۲ ۰ ٦ :

د یوې ډیرۍ M د ټولو برخډیریو ډیرۍ پوتنځډیرۍ یا په تواندیرۍ(-سټ) بلل کیږي او داسې یې لیکو:(P(M په تواندیرۍ توکي لري، چې هر یو یی بیا خپله ډیرۍ ده۰

بیلګه : د $M = \{ a,b.c\}$ ډیرۍ دا لاندې په تواندیرۍ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډیرۍ چې د توکو ځخه جوړه وي هغه ټیک n جګ 2n توکی لري یانی : n^{2n}

دا پورته د جملې په څیر د پوره ایندکشن له لارې اوبی (حل-) کیدی شي(لومړۍ برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د ګرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي یې۰

پیژند ۲ ۰ ۷ : د ډیریM زور |M| لاندې د ډیرۍ د توکو تعداد یاګڼون پوهیږو۰ که دوه ډیرۍ M اوN همغه زور ولري هغه ته یوزوریزه – یا برابرزوریزه ډیرۍ وایو او داسې یې لیکو: $|M| = |N|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرونونو یا مساواتو او خوندي ساتنو خویونه

الف) رفلکسیو- یا د انعکاس(هندارونیزې) اړیکېreflexivity

هغه اړیکې، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ ریښتونې ویناوې ورکړ شوي وي رفلیکسیویا انعکاسي اړیکي بلل کیږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خوندي لرل اړیکې رفلکسیو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هیڅ ډیرۍ د خپل ځان اصلي برخډیرۍ یا برخسټ نه شي کیدی٠

ب) سیومتریکې اړیکې Symetric relation

هغه اړیکې سیومتریک بلل کیږي، چې د شیانو ترمنځ چې کارول کیږي یا استعمالیږي یو له بل سره بدلیدلی شي٠

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خوندي لرل سیومتریکې اړیکې نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړیکی $M_2 \subset M_1$ نارښتیا یا ناټیک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزیتیویتي Transitivity یا وړون اړیکې

ترانزیتیویتي هغه اړیکې دي، چې له یوه نه وبل ته یې د وړلو امکان شته یا موجود وي٠

له L = M او M = N څخه لاس ته راځي L = N

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته داسې لولو: که M_1 د M_2 برخډيرۍ او M_2 د M_3 برخډيرۍ وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې M_1 د M_3 برخډيرۍ ده

برابونونه يا مساوات او په بل کې ځايه ونه يا خوندي ساتنه ترانزيتيو اړيکې يا خويونه دي

۲ ۰ ۲ په ډيرۍ کې کارونې يا عمليې

ټولنډيرۍ (د اتحاد سټ)

پيژند۲ ۰ ۸ :

د دوه ډيريو M_1 او M_2 ټولنډيرۍ(unionاتحاد سټ)، چې د ډيريو ټولنه ورته وايو ده:

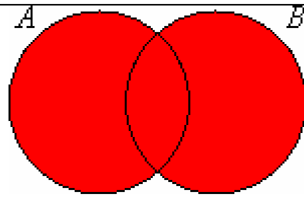
$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسې پوهيږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډيرۍ يا سټ ده، چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکي هم خوندي ولري۰

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د M_1 يا M_2 توکی هم دی (پرتله ۱ ــمه برخه د يا سره پرتله) يانې دا د ټولنډيرۍ توکی د M_1 يا M_2 او يا د دواړو توکي دي۰

يا لاندې دياګرام

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A ? B$ $A \cup B$ (B تولنه A) x) د A سره B اړيکې لري	

بيلگى

الف) M_1 دې د ځوانانو ډيرى وي، چې بکلوريا لري او M_2 دې د هغو ځوانانو ډيرى وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډيرئ ده، چې بکلوريا او مسلکي شهادتنامې ولري او يا دواړه شهادتنامې ولري۰

ب)

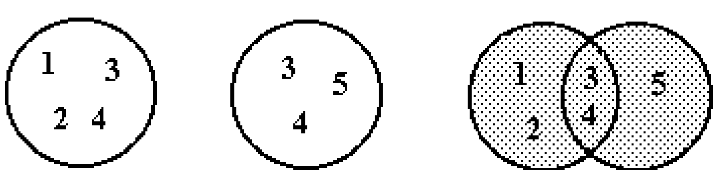
$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

يا په لاندى توگه پيژند او بيلگه: A او B دې دوه ډيرى وي د دې ډيريو تولنه داسي ليکو

B} ∈x∨A ∈B = {x | x∪A

∪A={1,2,3,4}   B={3,4,5}   A

B={1,2,3,4,5}



تل په ټکو ټکي شوې ټکيډيرى تولنډيرى په گوته کوي۰

پ – څيره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې ټکيډيرى په گوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) ټکيپردۍ دي٠ ب) ګډ ټکی لري٠

پ) اړيکي $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره څيرې په لاندې کې په بيلګو کې راغلي دي٠

د ټولني لپاره کموتاتيو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسي دلته(لنډ: لړۍ) د ډيريو په ټولنه کی رول نه لوبوي

يادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ٠٠٠ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بيا دا سره جمعه کړو لکۀ

$$1 , 1+2,1+2+3,1+2+3+4+,1+2+3+4++..+....$$

نو دا لړيپرلپسې يا لنډ: لړۍ بولو(پرلپسی برخه کې دې وکټل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زياتو ډيريو ټولنه لړۍپرلپسی(لنډ: لړۍ) رول نه لري٠

اسوڅياتيو قانون باور لري٠

$$(M_1 \cup M_2) \cup M \ = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډيرۍ (د ډيريو غوڅی يا –متقاطع سټ) intersection

يادونه : دا کړی شو، چې د ډيرو ګډغوڅی وبولو(دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټيکوالی په کې نه شته)

پيژند:

ډيرۍ M د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 غوڅډيرۍ يا د تقاطع سټ ده(لوستل: M_1

غوڅ(پرې)په M_2 (لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ډيرۍ M ټول توکي د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 توکی وي۰

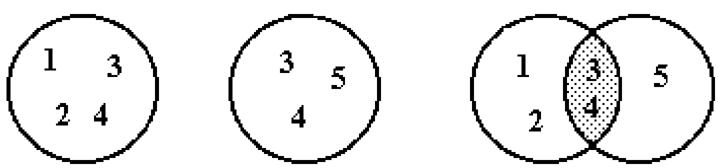
د غوڅډيرۍ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 توکي دي (د ۱ –مې برۍ د هم او هم په مانا يا د «او» په مانا)

يا دا پيژند :

د ډيريو A او B غوڅی $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بيلګه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3,4\}$



يادونه: دې پورته ډول دياګرام ته د ون دياګرام Venn-Diagram يا د Euler-Venn- Diagram وايی

بيلګې :

لومړۍ : يوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتيا څخه راځي، چې په M_1 يې په نخښنه کوو۰ يوه بله ډله ، چې په M_2 يې په نخښنه کوود کندهار او همغه د پکتيا زده کوونکي، چې په M سره يې ښايو، دي۰ د دې دواړو ډلو غوڅډيرۍ

$$M = M_1 \cap M_2$$

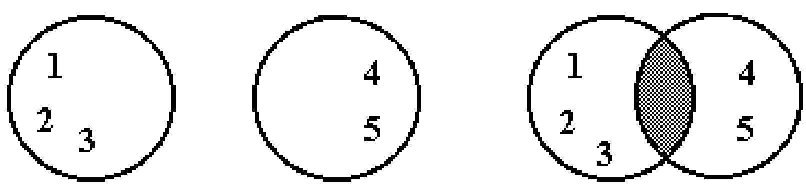
د پکتيا زده کوونکي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

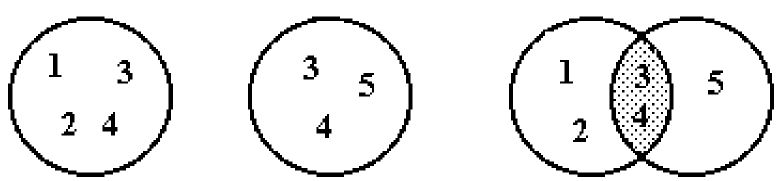
دويم:

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$
$$M = M_1 \cap M \;\; = \{r, l\}$$

دريم ځيره ۲ ۰ ۳ په هواره یا سطحه کې ښايي، چې الف) ګښون پردي دي



ب) يو بل سره ګډ ټکی لري



پ) اړیکی

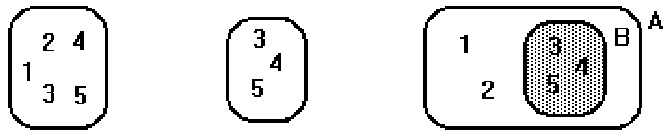
$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بیلګه:

B A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} A⊆

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه ټکو باندې ټکي شوې ډیرۍ اصلي برخډیرۍ ده

دوه ډیرۍ، چې غوځډیرۍ یې تشډیرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله پردۍ بلل کیږي

د غوځډیرۍ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډیرۍ لپاره کموتاتیو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوڅیاتیو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډیرۍکارونو یا ډیرۍ عملیو یانې ټولنډیرۍ او غوځډیرۍ لپاره دواړه دیستریبوتیو قانونونه پوره کیږي یا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د ګڼونو د شمیرکارونو یا عملیو لپاره یواځې یو دستریبوتیو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټولیزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند :

کمونډيرئ يا تفريق سټ M_2 د ډيرئ M_1 او ډيرئ M کموالی يا فرق دئ او

داسې يې ليکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د M_1 ډيرئ کمه شوې

يا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډيرئ M_1 توکي نه وي۰

ليکندود ياليکنډول :

$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A او B توپيرډيرئ ياکمونډيرئ يا تفريقډيرئ له ټولو هغو توکو x جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دئ

بيلګې :

لومړئ : په يوه ټولګي کې M_1 د ټولو نارينه وو زده کړو ډيرئ ده او M_2 دټولو زده کړو ډيرئ (د نارينه وو او ښځينه وو) ، چې په شميرپوهنه کې لس نمرې وړي۰

M_1 / M_2

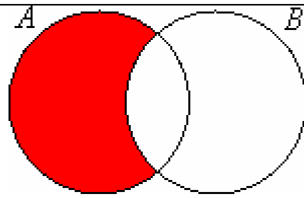
د هغو زده کړو ډيرئ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ۵ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډيرئ ده، چې په شميرپوهنه کې يې لس نمرې وړي۰

که په ټولګي کې يواځې نارينه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

يا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A \backslash B$ (A بې له B) (x له A سره B اړیکې لري)	

دویم :

$$M_1 = \{k, r, a, i\}, M_2 = u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k, a\}, M_2 / M_1 = \{u, s, a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلګي را په ګوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

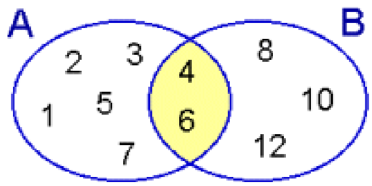
$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

د یوې ډیرۍ یا سټ کمپلمنت یا پوره کوونکی :

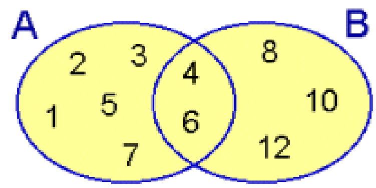
دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډیرۍ کې مو څیړلي۰ دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نورې دوه ځایزې کارونی یا عملیې دي۰

موږ بنسټډیرۍ په U او د ټولو هغو توکو ډیرۍ، چې U کې پراته دي یانې دU توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یانې د M توکي نه دي پوره ډیرۍ یا کمپلیمنت بولو او د $\bar{M}$ سره یې په نخښه کوو۰

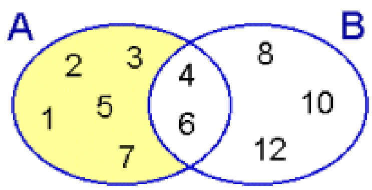
په لاندې څیره کې بیا د ډیرۍ غوځۍ، - ټولنه او – کمون او برخډیرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زیات پام را اړوو۰



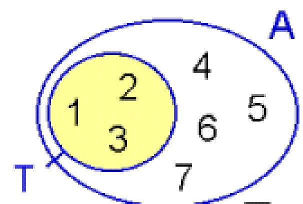
$A \cap B$



$A \cup B$



A \ B



$T \subseteq A$

پیژند:

پوره کوونکی- یا تکمیلډیرۍ (یا د یوې ډیرۍ کمپلیمنت) د یوې ډیرۍ M پوره کوونکې ډیرۍ $\bar{M}$ تیک هغه توکي لري(د بنسټډیرۍ U څخه) ، کوم چې د M توکي نه وي٠

دوه ځله کمپلیمنټډیرۍ جوړول خپلې لومړنی وینا ته ځي ، یانې $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلګه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنی د توپیر او برګ کورنی اوسیږي٠ که دا دوه کورنی یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیرۍ یا تکمیلډیرۍ بلل کیږي یانې دا کلی پوره کوي٠

۲ ٠ ٤ خیرونه mapping یا اړیکې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو٠

په دې برخه کې لومړی د ډیرۍ ضرب کلمه پیژنو یا تعریفوو او بیا د ضرب کلمې کارونه څیړو٠

پیژند ۲ ٠ ۹ : د دواړو ډیریو M یو او M 2 ډیریضرب(اتیرانضرب) هم ورته وایي، یانې په x سره څلیزي یا ضربیږي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظیم یا ترتیب شویو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډیرۍ ده٠

بیلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظیم له مخې څل په ډیریو کې کموتاتیو نه دی دا په دې مانا، چې

په ټولیزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو ریيلګڼونو ډیرۍ وي٠ په هندسي مانا د کرښې د ټولو ټکو ډیرۍ٠ RxR د ټولو ریيلګڼونو جوړو ډیرۍ ده، په هندسي مانا د هوارې یا سطحې د ټولو ټکو ډیرۍ ده٠

پیژند ۲ ٠ ۱۰ :

د څیرونې F لاندې د دوه ډیریو د ضربډیرۍ $M_2 \times M_2$ برخډیرۍ پوهیږو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس د جوړه تنظيم شوو توکو ډيرئ، چې $x \in M_1$ له يوه يا ډيرو توکو $y \in M_2$ سره تنظيم

يا بهتره په باندې ځيره شي٠

داسې هم ويلی شو: د1 M توکي د2 M په يوه يا ډيرو توکو تنظيميږي يا ځېړه کيږي٠

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوريجنل يا اصلي توکی او y ځيره توکی بلل کيږي٠

د ټولو اصلي توکو ډيرئ پيژندورشو يا تعريفورشو يا پيژنددیرئ يا تعريفډيرئ بلل کيږي او د ټولو ځېړه توکو ډيرئ د ځېروني ډېرئ، ارزښتورشو يا ارزښتډيرئ بلل کيږي٠

بيلګی

$$M_1 = \{a,b,c,d\}, M_2 = \{1,2,3,4\}$$

د جدول په توګه دM يو توکو ځېرونه ونه يا ځېړه کوونه د M دوه په توکو

ځېړه توکی	اصلي توکه يا ځيره کوونکی توکی

a -----------------------→ 1 , 2 ,5

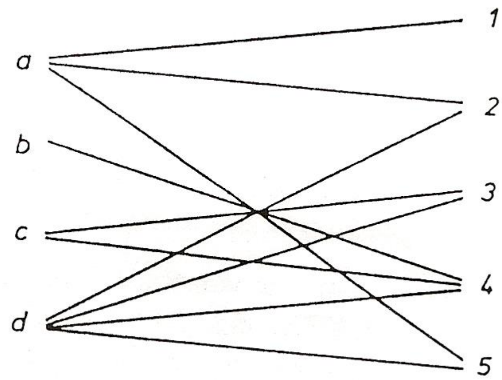
b -----------------------→ 4

c -----------------------→ 3,4

d -----------------------→ 2,3,4,5

يا دا لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

(د M یو او M دوه ډیریو د ټولو توکو جوړو ډیرئ)

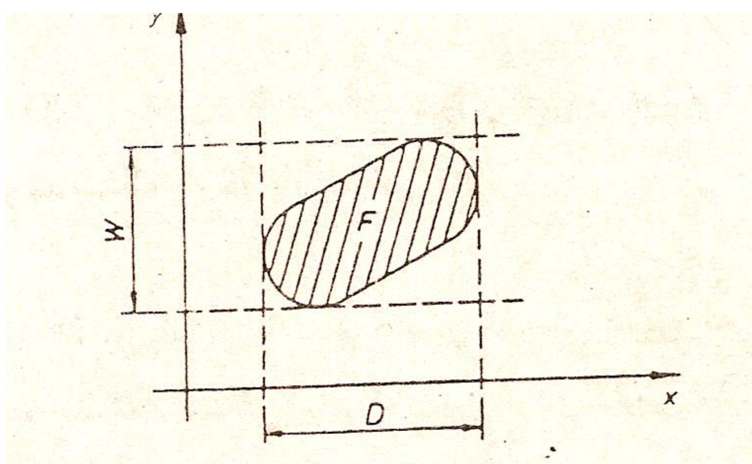


Bild 9.6 ځیره

دریم : هر پیدایښتي یا طبیعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې ځیره کیږي۰ داسې پیژند شوې یا تعریف شوې ځیره ونه په لاندې بڼه هم انځوریدلی شي۰

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم N د پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیرۍ۰ پیژنددیرۍ یا تعریف- د ټولو پیدایښتي ګڼونوډیرۍ ده او ارزښتډیرۍ د ټولو جوړه ګڼونو ډیرۍ ده۰

څلورم : که M یو په یوه ښوونځي کې د ښوونکو ډیرۍ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګیو ډیرۍ وي نو ښوونکي، چې په ټولګیو کې درس ورکوي دا یوه څېرونه ده۰ د ښوونکو ډیرۍ د ځانګړو ټولګیو په ډیرۍ کې

موږ د څېره ونې څلور حالتونه توپیروو:

پیژندونه(دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بیلګه کې په څیره ونه F کې د1 M ، چې تعریفډیرۍ D سره برابر دۍ او M2 ، چې له څیره ډیرۍ , W سره برابر دۍ ، توکي مو مخ ته پراته دي۰

له یوې څیرونې Fغږیږو د1 M په M2 باندې۰ دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D\subset M_1,W\subset M_2$

لکه په دویمه بیلګه کې ، نو د یوې څیره ونې F غږیږو له M1 په M2 کې (دلته دې « په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D=M_1\wedge W\subset M_2$

دلته د یوې څیره ونې غږیږو د1 M په M2 کې دلته دې دریمه بیلګه په پام کې راواړل شي۰

وي دې: $D\subset M_1\wedge W=M_2$

نو د یوې څیره ونې غږیږو له M1 په M2 باندې۰ دلته څلورمه بیلګه د بیلګي په توګه راوړو۰ د دې نیونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګیو ته درس ورکوي۰

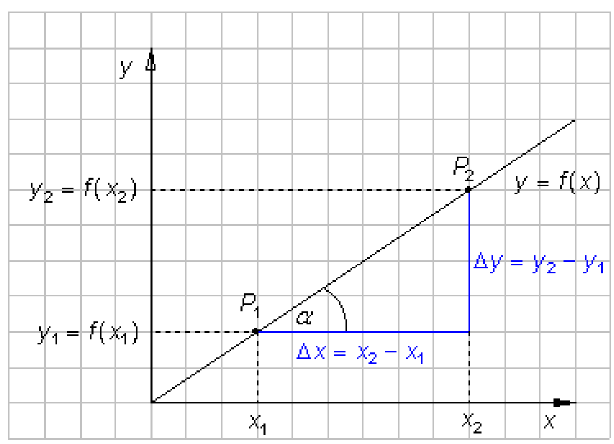
(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونكي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شايد ځيرې هم رانه شي، خو كه لږ د شميرپوهنې سره بلد شو، بيا پرې پوهيدل ساده دځ. زځ مخ ته لرم، چې په دې هكله ليكلى كتاب، چې چاپ شوى نه دى دلته پر ليكه كړم، چې هلته بيا دا موضوع لږ غزيدلې ده.

بيلګه ۲ . ۵ : موږ په هواره يا سطحه كې ځرګند شوي كږى د ډيريځل RxR په ځير د برابرونونو له لارې رانيسو(R د رييلګنونو ډيرى د ګنګربنې ټكي دي(ګنونه دې وكټل شي)).

الف) $y = 2x$ يوه ځيره ونه ده د R په R باندې ، ځكه چې باور لري

$$D=W=R$$



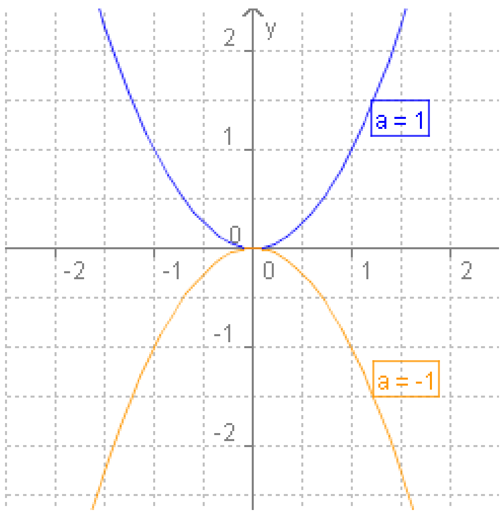
يادونه : په پورته ځيره كې برابرون $y = ax+b$ دى.

ب) $y = x^2$

يوه ځيره ونه ده د R په R كې ، ځكه چې باور لري

$$D = R , W = [0, \quad] \quad \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



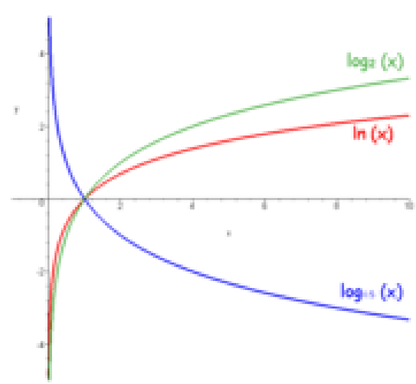
یادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ دول دی، چې b = 0 , c = 0 او a = 1 , a = -1 اینبول شوي دي.

پ) y = log x

یوه خیره ونه ده له R په R باندې » حُکه چې باور لري.

$$D = (0, \infty) \wedge W = R$$

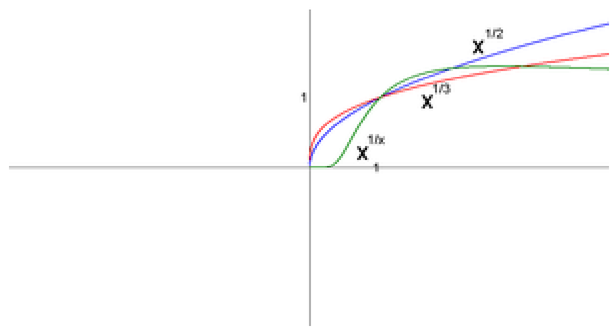


(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) $y=+\sqrt{x}$

یوه څیرونه ده له R په R ، ځکه چې باور لري

$D=W[0,\infty]$



یادونه : پورته د دویې ،دریمې او په x -مې ریښې په مانا دی

څیرې له ویکي څخه په مننه راکښته شوي دي۰

پیژند ۲ ۰

یوه څیره ونه E یواځنی بلل کیږي۰ که هر $x\in D$ په ټیک یوه $y\in W$

باندې څیره شي۰ دا په دې مانا، چې هر $x\in D$ ټیک یووار په $y\in W$

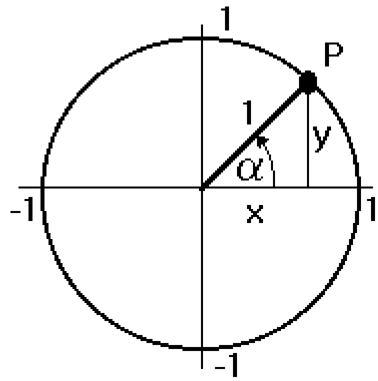
تنظیمډیرۍ یا جوړه ډیرۍ کې رامنځ ته کیږي۰ یوه یواځنی څیره ونه فنکشن

یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي۰

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنی څیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ٥ کې له الف تر ت پورې تولې څیروني فنکشنونه یا بلواک دئ۰ د دې پر څنټ لاندې برابرون (یوونګردئ یاني ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي څیره ۰) انځور شوې څیره ونه له R په R کې [1,1-]) D=W) فنکشن یا بلواک نه دئ ، ځکه چې اصل دوه څیرې لري یاني که په تنظیمجوړه کې د څیره ونې لړي پرلپسې(لنډ:لړئ) بدله شي، نو یوې پرڅنټ څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : څیره ونې F ته پرڅنټ څیرونه F^{-1} د ټولو جوړو (x,y) ډېرئ ده له $(x, y) \in F$ سره ۰

پیژند ۳ ۰ یوه څیره ونه یویواځنئ بلل کیږي، که یواځنئF او F^{-1} یوازنئ څیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x \in D$ او $y \in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د څیروني نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کووني (که څوک یو کالی یا رخت څیرېکوي)او څیره کووني توپیر، ځکه سره کیدی شي، چې هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ مورږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰
ډېرئ پوهنه د شمیرپوهنې سټه ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وڅیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د یوه کتاب په څېر هم وړاندې شي٠

۲ . ۵ تمرینونه

۱ – د لاندې ډېرۍ یا سېټ توکي د شمیرنې له لارې انځور کړۍ

الف {x لومړی عدد او$20 > x$ | x } (لوستل: د ټولو عددونو x ډېرۍ یا سېټ، چې xلومړنی عدد او $x < 20$ دی).

ب- $\{x|x^2+x-6=0\}$

پ-$\{x^2+x-6=0$ او $x|\ x>0\}$ دا په نوکانوکې ټول له کیڼ ښي لور ته لولو

ت) { x | x ریيلګڼ او $x^2+1=0$ } دا ټوټه له ښي نه کیڼې لور ته ولولی

۲ – د توکو x , y , z اړلرونوالی و ډیري M ته وخیړی !

الف) M د لمړنیو ګڼونو ډیری

$x = 4,\ y = 5,\ z = 6$

ب) M د لاندې مساواتو حلډیری (اوبیلډیری)

$x^3 + x^2 - 6x = 0$

$x = 0,\ y = 2,\ z = 3$

پ) M د ریشنلګڼونو ډیری چې په اینتروال [3 ,3-] کی پراته دي

$x = -2,\quad y = \sqrt{2},\quad z = 1/3$

ت) M ډ ریيلګڼونو ډیری چی په اینتروال [3 ,3-] کي پراته دي

$x = -4,\quad y = \sqrt{2},\quad z = 3$

۳ – د لاندې ډیریو ترمنځ کومی اسپیکی پرتی دي

الف) M_1د ټول جفت ګڼونو ډیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

او M_2 د ټولو ټولګنونو ډیرۍ

ب) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$, حلونو (اوبیو‾) ډیرۍ

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ) M_1 د ټولو ګنو ډیرۍ چي پر ۶ ویشل کیږي.

او M_2د ټولو ګنونو ډیرۍ چي په ۳ ویشل کیږي !

او M_3د ټولو ګنو ډیرۍ چې په ۱۲ ویشل کیږي!

۴ – د ډیرۍ $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډیري ورکړی!

۵ – د لاندي ډیریو څخه ټولنډیرۍ ، غوڅډیري او دواړه ټوډیري جوړ کړی !

الف) $M_1 = \{ k,a,m,e,l \}$, $M_2 = \{m,a,u,l,t,i,e,r\}$

ب) $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$, $M_2 = \{ 3 ,6 ,9,.... \}$

پ) $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0\}$, $M_2 = \{x \mid x^2-3x+2 = 0\}$

۶ – د یوه ډیرۍ M او د تشډیري $\emptyset$ ټولنډیرۍ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړی!

۷ – د یوه ډیرۍ M او خپل همدې ډیرۍ ټولنډیرۍ ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړی!

۸ – وي دي $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8\}$

$M_3 = \{0 , 2 ,4 ,6 \}$, $M_4 = \{ 6 , 12 , 18 \}$

جوړ کړی : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$!

۹ – جوړ کړی

الف) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ) $M \setminus \emptyset$

ب) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$
$$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$$
$$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}, M_1 \setminus M_2 = \emptyset$$

له دې پورته څخه M_1 او M_2 وټاکئ !

۱۱ – وي دې

الف) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ب) $M_1 \subset M_2$,

وټاکئ: $M_1 \setminus M_2$!

۱۲ – وي دی M_1 , M_2 (د نیمواز) اینتروال تکي ډیري:

$$M_1 = \{-3, 3\}, M_2 = [1, 7]$$

وټاکئ

الف) $M_1 \cup M_2$ ب) $M_1 \cap M_2$ پ) $M_1 \setminus M_2$

ت) $M_2 \setminus M_1$ ټ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دې $M_2 = \{\{a, b\}$, $M_1 = \{1, 2, 3\}$

الف) د $M_1 \times M_2$ ځل جوړ کړئ

ددې لاندې ب) تر ت) برخی تمرین لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول ځیرونی دي

$$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$$
$$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$$
$$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$$
$$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$$
$$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$$

په ټولو حلنونو (اوبیو) کی F_1 تر F_5 ورکړی .

پ) په ځټ ځیرونه ورکړی

ت) د ځیرونو F_1 څخه تر F_5 پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځني دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳. دحقیقي اعدادو (-ګڼونو) سره د شمیرلو بنسټیزې نښلونې

(ترنی، کارونی یا عملیي)

۳ . ۱ د اعدادو د سیستم جوړښت

۳ . ۱ . ۱ طبیعی اعداد یا -ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتیا درلوده٠ له دې امله یې پرمخ ودیینه کې هڅې وکړې، چې له ډیرۍ (سیټ) (د لیکنې په دننه کې ډیرۍ پوهنه هم څیرلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چې دا ډیرۍ تشریح کړای شي او د انسانانو او چاپیریال(طبیعت) د پرلپسې اخ او ډب په نتیجه کې د ګڼ یا عدد وی(کلمه یا لغات) راپیداشوی، چې د عدد یا ګڼ کلیمې پربنسټ د رېښتینو شیانو څرګند څومره والي (کمیت)Quantitative ترلاسه کړي٠ د طبیعی اعداد و څخه په ګڼلو یا که غواړې شمیرلو کې ګټه اخستل کیږي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ الف د طبيعي عددونو(پيداښتي ګنونو) جوړښت

پيژند (تعريف)۳ ۰ ۱:

الف) ټول طبيعی اعداد د ډيری په څير يوه ټولګه جوړوي او د طبيعی اعدادو ډيری يا سټ په نامه يادېږي يا يې طبيعی اعداد بولو او په N او همداسې N° سره يې په نخښه کوو۰

ډير پای طبيعي اعداد شته ، ځکه چې په هر طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد هم شته دی (يعنی په هرڅومره لوي طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کيږي)۰

ب) دطبيعي ګڼونو(اعدادو) اکسيوماتيکيAxiomatic جوړښت

اکسيوم جمله ده، چی اوبيونه (حل) نه غواړي او همداسی منل کيږي۰ دا چی جمله ، اکسيوم څه دي په لومړی برخه ياني سم اند (منطق) کې دې وکتل شي۰

طبيعی عدد کلمه د جيوسيپې پيانو(Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز ۰کال) اکسيومونو پر بنسټ لاندې پيژند لري يا په لاندې توګه تعريف کيږي:

۱ – د صفر ګڼ يو پيداښتي ګڼ دی

۲ - د هرطبيعي عدد يا ګڼ m لپاره يو يواځنی ټاکلی طبيعي عدد n شته، چې سملاسي(تړلی) د m پسی ګڼ دی، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^\wedge$

دلته $m^\wedge$ د m پسې سملاسې يا تړلی ګڼ يا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبيعي عدد زيات له زياته په يوه طبيعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ – هیڅ طبیعي عدد نه شته، چې پسی راتلونکی پیداینښي عدد یې صفر وي۰

٥ – که طبیعي عددو ډیرئ M صفر د توکي په څیر ولري او که له هر طبیعي عدد m سره د هغه پسی ترلی راتلونکی عدد یا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبیعي عددونه خوندي لري یا په بل ډول » ټول طبیعي اعداد په کې ځاي دي۰

یادونه: ځنې ادبیاتو کې، د پیانو سیستم کې، د صفر په ځای ۱ لیکل شوی. په دې حالت کې بیا صفر ته د طبیعي عدد یا ګڼ په څیر نه کتل کیږي. که بیا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبیعي ا عدادو ډیرئ یا –سټ یې د صفر سره بولو.

۱ . ۱ ب : د طبیعی اعدادو یا ګڼونو انځورونه او سیستمونه:

طبیعي اعداد په نخښو (دې ته په الماني کې Zifferوایي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څیرو، دی) انځوریږي. د دې لپاره چې دا لړ ځای ونیسي، نو د لویو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنیو سره یوځای کیښول شوې دي. دا چې څرنګه یوه د عدد یا ګڼ نخښه له بل توپیریږي، په لاندې ډول یې د زیاتون یا جمعي سیستم او ځای سیستم کې ښایو.

په زیاتون سیستم کې هر بنسټیز ،،ځای،، یو ،، ځای ارزښت،، لري. د څیفرونو زیاتون د یو په بل کې د ورزیاتشوي بنسټیز څیفر پخپله هغه عدد یا ګڼ ورکوي. بیلګه یې په رومي ګڼونو کې راوړو. دا له بنسټیزو څیفرونو جوړ شوی(ترې لاندې لسیز د اعدادو سیستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څیفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پیل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

رومي عددونه:	M	D	C	L	X	V	I
عربي عددونه:	1000	500	100	50	10	5	1

طبيعي عدونه له دې امله يو د بل ترڅنګ ليکو چې کم ځای ونيسي لکه د بيلګې په توګه:
CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کی، که بنستيز کوچني ګڼنخښې لکه I , V , C د لوي ګڼنخښې و کينې لور ته وليکل شي نو دا مانا لري چی دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی. د بيلګي په توګه: XC = C - X .

بيلګی: **الف:** MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768

ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځايسيستم: په ځاي سيستم کی هره بنستيزه نخښه يو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئيز ځاي سيستم (پوزيشن سيستم (Positionssystem)): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئيزځای سيستم کی په دې ډول ده چی د يوه ورکړشوي ستی په بنسټ ($g \in N$) $g \geq 2$ هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوريدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + ... + a_1 g + a_0$$

دلته بنستيزې ګڼنخښی a_i، g د $i = 0,1,2,...,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چی $a_k \neq 0$ وي په کار راځی يا اړتيا ورته شته.
ليکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} .....a_1 a_0$$

که د بدليدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کيږي، نو بهتره به وي چی په

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ډول وليکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کي ګڼل په لسيز سيستم (ګڼځای ارزښت) باندې کيږي، چی تل داسی نه وه، لکه په افغانستان کي چی دا اوس هم د ډوډۍ پوړ لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چی څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسيز سيستم کی ګڼځای «ارزښت» لري چی انځور شي، مګر په لرګی کی ځای ارزښت نه لري چی کرښه چيرته کښل شوې، هلته د پوړ کرښو له ګڼون يا تعداد څخه پوړ څرګنديږي.

بل د ګڼلو سيستم ، لکه د مخه مو چی تر پام لاندې ونيوه، د ګڼلو رومي سيستم دی چی نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډك، زياتونسيستم(جمعی –) څرګنديږي.

بيا هم غواړو چی دا په لاندې ډول ځانګړی کړو:

۱ – هره لاندې نخښه I, X, C کړای شي چی زيات ترزياته ۳ ځله(۳ واری) په يو ګڼ کی پرله پسی يا ښنګ تر ښنګ راشی

۲ – هره، د ګڼ نخښه V, L, M خورا زياته يو ځل ښنګ تر ښنګ په يوه ګڼ کی راتلی شي.

۳ – که بنستيز نخښه I, X او يا ....__-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D يا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې يا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کميږي .

زياتون او کمون (جمعه او منفي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – په هرګڼ انځورړ(Zahlendarstellung) کې کیدی شي چې یواځې یو بستیز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: MXCVII = 1098 مګر نه IMIC
۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمې نخښې په کار واچول شي.

عربي ګڼونه : دا ګڼونه، چې موږ ورسره بلد یو، د لسیز سیستم ګڼونه دي، چې عربی ګڼونه بلل کیږي. دا د ګڼلو لسیز سیستم عربو د هند څخه راوړی چې په دولسمه پیړۍ کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر(۰) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر9 پورې، چې

څیفر ورته وای (همغه عربی صفر دی) چې دلته ترې بنستیز ګڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چې ګوته مو ورته ونیوه زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، څکه چې د یو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښې زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د ګڼونو انځورول ساده دي.

> **تعریف ۱ . ۱ ب** : په یو «ځای ارزښت سیستم» کې هغه ګڼ لوی دی چې زیات ځایونه ولري، که چیرې د ګڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي(مساوي وي) نو هغه ګڼ ستر دی چې له کینې لورې یې نخښه لویه وي.

لسيز – یا لسګونی سیستم: لسیز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چې له انځورونې یې څرګندیږي. په لسیز سیستم کې د ګڼ انځورولو نخښې، لکه د مخه مو چې انځور کړې، ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ دي. ۱۰ ګڼ د لسیز سیستم بنستیزه نخښه ده. دا چې نور ګڼونه نه انځوریږي، نو ځای هلته ډك دی چې پرله پسی (ترتیب یانظم) د ۰ تر ۹ یعنی له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پسی جگ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شوو گڼنخښو گڼون (تعداد یا شمیر) دی، څمور په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو گوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیري (set , die Menge) غړو گڼلو لپاره لاندې گڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او ۹ –امه برخه دې وکتل شي)) داسی نور. تولودې گڼونو ته چی دصفرگڼ ورسره مل شي د طبعي گڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, ...\}$$

موږ گڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا حروفو ښایو لکه a ,b,c, ... n . دا ریښتونی

(ریښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعي گڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ (ویل کیږي چی: n د طبعي گڼونوډیري N یا*N توکی دی(لنډ n د N یا *N څخه دی)) په دې ځای کی دې دگڼ او گڼځای (ځیفر) توپیر ته پام وي.

موږ دگڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د نخښنډیري لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د گڼونو د نخښو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په گوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي گڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1 a_0 = a_n . 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} . 10^{n-2} + ..+ a_2 . 10^2 + a_1 . 10 + a_0\, 10^0$$

$$a_i \in N.$$

گڼونه په نورو ځیفرونو ډیري هم انځوریدی شي. د بیلگي په توگه په اینفورماتیك (Infrormatik) کی، چی د دوالسیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) څخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه گڼنخښي (ځیفرونه) لیکل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسيز او دوه ئيز سيستمونو لمړني ګڼونه يو د بل ترڅنګ ښودل شوي:

لسيز سيستم	دوه ئيز سيستم
0	0
1	1
2	10
3	1 1
4	100

په ټوليزه توګه(عمومي توګه) دلته يو څيفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ يو طبيعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots\ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 , \; a_i \in N$$

بيلګه ۱ . ۱ : $59 = 1.\,32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$

$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.\,2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

يا دونه :: څه لنډ لنډيزونه

د طبيعي اعدادو ډيرئ يا سټ داسی په نخښنه کوو:

د پيدايښتي يا طبيعی ګڼونو ډيرئ $N = \{ 1, 2 , 3 , \ldots \}$

دپيدايښتي ګڼونو ډيرئ د صفر سره $N° = \{ 0, 1 , 2 , \ldots\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ه کتابونو کی دا د صفر نخښه په لاندې برخه کی راځي٠

۳ ٠ ۱ ٠ ب د طبیعي اعدادو یا ګڼونو انځورونه:

طبیعي اعداد په نخښو انځورېږي٠ دا عددونه یا ګڼونه د ځان لپاره یو سیستم لري، چی هغه زیات یې موږ نه څیرو٠ زموږ لپاره غوره هغهٔ عربی اعداد یا ګڼونه دی٠

یا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد یو د لسیز ځایستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل٠ دا کورونه (خوني یا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نیوی شي او بیا یې هر ځاي یو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سیستم« دی٠ لومړي کور ته یویز، دوم ته لسیز، دریم ته سلیز او همداسی ، چی دا مو د مخه لړ روښانه کړي٠

انځورونه یا څیفرونه یې دي : ٠ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټیز ګڼونو نخښی دي، نور یې په کورونو یا ځایسیستم باندې روښانه کیدی شي٠

پیژند ۳ ٠ ۱ ٠ ب :

په یو» ځاي ارزښت سیستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډیر ځایونه ولري٠ که چیرې د ګڼ د ځایونو یا کورونو ګڼون (تعداد) سره برابر وي٠ نو بیا هغهٔ ګڼ لوي دی، چی کینې لور یې ګڼنخښه لویه وي٠

۳ ٠ ۱ ٠ پ : طبیعي اعدادو کې د شمیرنې بنسټیز قوانین

اوس په لاندې ډول د پیداینښت ګڼونو، په ټولیزه توګه د ریيل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري(معتبر) بنسټیز د شمیرنې قوانین وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : د انډول (نظم یا ترتیب یا لوي واړه ترتیب(Anordnung) بنسټیز قوانین:

که > ولړو، نو دې ننوتي کونج کې یا د نخښې خوله کې عدد یا ګڼ لوي دی او د وتلی کونج یا لوي کونج >که نخښه یا داسې کونجکی یا څټ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دی۰ که ګڼونه یا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولړو نو د لویواړه اړیکی داسې لیکو، یانې که 23 > 15 ولړو نو ترې څرګندیږي، چې عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دی .

د دوه طبیعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړیکو څخه ټیک یوه اړیکه باور لري»

$a < b \quad , a = b \quad , a > b$

۲ ـ ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځای توری ولیکو هم a = a به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ریفلیکسیویتي Reflexivity)

۳ – له a = b => (لاس ته راځي) b = a (سیومتري، انډول، ورته وایي (Symmetry

د انعکاسي (ایینه ونیز – یا هندارونیز) برابروالی یانی که چیري دا عددونه ورا ینه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابریږي۰ که انعکاسي(اینه ونیز)برابر نوم ورته کیږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به یې همغه سیومتري وبولو۰

٤ ـ له a = b او b = c => (لاس ته راځی) a = c (ترانزیتیوTransitivity)

ترانزیتیو ګورو، چې یو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، ځکه چې دا ګڼونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا وړل کیږي۰

۵ – له a < b اوb < c => (لاس ته راځی) یا a < c یا $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

وړاندیز : که چیری دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به وي، خو له شمیرپوهنی پرته مانا باندی یې هم پوهیدنه ښه او اړیینه ده۰

ب : د زیاتون (جمع) Addition n. بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو ، دوه یا څو ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیدایښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه(عملیه) «زیاتون یت جمعه » بولو، ځکه، چی ګڼونه یو په بل زیاتیږي۰

پیژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون (جمع) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی یا

۱۰ + ۱۸ = ۲۸

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتیږي، نو له دې امله یې «زیاتېدونی» (ما تراوسه زیاتووني بللي، خو فکر کوم،چي زیاتیدوني یې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کیږي ۰ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وایه ۰ + زیاتوننخښه ده او = برابروننخښه (مساوات علامه) بولو

دجمعې یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو a او b لپاره تل یو زیاتون (جمع) a + b شته دی

۲ - یواځنوالی : له a' = a او b' = b څخه لاس ته راځي: a + b = a'+b'

۳ - COMMUTATIVE LAW کموتاتیو- یا بدلون قانون دی: a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوشیاتیو - سره ګډېدنې قانون. لرو
(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – یا همغږیزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $a < b$ څخه لاس ته راځي $a+c < b+c$

یادونه : په $a+b=c$ کې a اوb زیاتېدونې $a+b$ زیاتون او c زیاتون ارزښت بلل کیږي

یادونه : په زیاتون کې لاندی زیاتونقوانین هم باوري دي:

ناپیلی توکی: په $N°$ کی یو توکی شته، چی که د هرپیدایښتي توکی سره په زیاتون یا جمعه کی ور زیات شي همغه توکي ورکوي۰ دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپیلی توکی کړی شو نالوریز وبولو،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې یې په زیاتون کې بدلون نه راولی یا د زیاتون ارزښت همغه پاتیږي، همداسې ناړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې یې وبولی۰

پ : د کمون (تفریق)Subtraction بنسټیز قوانین

پیژند:د پیدایښتي ګڼونوa او b لپاره، چې $a>b$ وي، یواځې یو x شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو ټیک یواځني شته دي(موخه x دی)

نومه ونې: b کمیدونی یا مفروق (تراوسه مې کمونی بللی) a ترې کمونی یا مفروق منه $a +b$ کمون او x کمون- یا تفریق ارزښت بلل کیږي یا بولو :

موږ پورته د لاتین تورو لپاره طبیعي اعدادونخښی لیکو، چی ساده یې ونوموو:

$$20 - 10 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کی موږ له ۲۰ لس کم کړل، چې لاس ته راوړنه يې ۱۰ ده، نو له دی امله یې داسی نوموو:

تر مخ یادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، څکه، چی ترې کمیږي(ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کمموونی« یا کمیدونی(ع۰ مفروق) دا بل لس یې «کمون ارزښت» یا د کمون لاس ته راوړنه(لنډ: لاس ته راوړنه یا کمون) (ع ۰ حاصل تفریق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

ت : د څل (ضرب)Multiplication بنسټيز قوانين:

۱ - د دوه پیداینښتي ګڼونوa اوb لپاره د پیداینښتي ګڼونو په ډیری کې تل یو څلa.b شته دی. د a.b لپاره داسي هم لیکوab په پورته کې aاوb څلووني (ضریبونه) اوab=x « څل ارزښت » یا څل(حاصل ضرب) دی۰

وایي چی ضرب وهلو ته وایي او د جمع (که جمعي) لنډه طریقه، چی۰۰۰۰وي یا د زیاتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پيژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او څل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو څانونه راویستلي وي۰

که ووایو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کیلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ څله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

لیکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کیلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د څل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، څکه چی پښتو ده او له ضریبونو څخه به هم څلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له $a = a'$ او $b = b'$ څخه لاس ته راځي $a'b' = ab$ (یواځیتوب)

۳ - لرو $ab = ba$ کموتاتیو – یا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوشیاتیو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ویشوني- یا دیستریبوتیو قانون
Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګټیتوالي یا یوغړیزوالي قانونMonotony

ت – د ویش بنسټیز قانون Division

پیژند۳ ۰ ۲ :

که د دوه طبیعي عددونو a اوb لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانی صفر نه وي یو طبیعي عددx شته، چی برابرون (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا b/a د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چی ماتګې(کسر) یې هم بولو

۱ – که $a / b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي ، نو یواځنی شته دی(یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ویش ارزښت، b ویشونی یا ویشه وونی دی، ځکه چی په یوځه ویشل کیږي او a پرویشونی بلل کیږي، ځکه، چی څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم ، حاصل تقسیم ۰

ګورو چی له قاسم یا مقسوم او همداسی د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- یا پرې ویشونی ، ویشه ونی اوویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهږ دي، خو په خواشینی به وه وایم، چی تراوسه په شمیرپوهنه کی ورسره نابلد یو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وويشو، نو هر يوه ته درې کتابچې رسيږي۰ ګورو، چې ۱۲ په يو څه ويشلکيږي، نو ويشونی يې ښه نوم دی۰ دا ۱۲ په څلور ويشل کيږي پر ۰۰۰ ويشل کيږي، نو له دې امله څلور پر ويشونی بولو، درې يې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسيم وايه، له دې امله ورته ويش ارزښت وايو او دا کارونه يا عمليه خو ويش بلل شوی۰

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ټولګڼونه يا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبيعي عددونوa او bکمون يا تفريق ($x= b-a$) ټيک او ټيک هلته يا هلته او هلته د طبيعي عددونو ډيرى يا سټ کی شته، چې وي : $a \le b$

د شميرپوهنې نخښو باندې داسې ليکل کيږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \le b$$

انګريزي يې if and only if ټيک او ټيک هلته يا هلته او هلته(دا شننه يا وينه پورته د شميرپوهنې نخښې ته ده)۰

که هغی نخښی ته وګورو، نو هم لاندې ترې څرګنديږي، له ښی لور کيڼ لاس ته راځی او په څټ(برعکس) له کيڼ لور ښی لاس ته راځی۰ يا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځی او په څټ۰

ټولګڼونه يا تام اعداد هم د انسانانو د اړتياو پر بنسټ منځ ته راغلي ، يا منځ ته راوړل شوي۰که چيرې سپين د خړ ۱۰۰ افغانیپوروړی وي او سپين ورته اتيا افغانی ورکړي، نو سپين بيا هم شل افغانی پوروړی پاتيږي، دا په دی ما، چی ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ ګورو، چی ۲۰ – يو پيداينتي ګڼ يا طبيعي عدد نه دی۰يا $-20 = 80 - 100$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترېکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه یې طبیعي عدد نه دی٠ اوس یوه د اعدادو بلې ډیری پیژند ته اړ کیږو، چی هغه د ټولګڼونوډیری ده او دا د طبیعي عددونو او د طبیعي عددونو کمي(منفي) او صفر سره یوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي(په ډیری کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چي له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګڼونو ډیری ده او داسې یی لیکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots \}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پیداینښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو یا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پیداینښتي ګڼونو مخنخښه په کموننخښه یا منفي نخښه باندې سنبالوویانې (کیدی شي زموږ هیوادوال د څټ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زیاتی یا کمی ښایي د ګڼ کیڼ لور ته لیکل کیږي، چې دا ما مخنخښه لیکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ٠ ۱ ٠ ۱ کې ورکړ شوي شمیرقوانین په Z کې هم باور لري

د ټولګڼونوډیری

$$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

د مخه مو شمیرقوانین، چې د پیداینښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګڼونو لپاره هم باور لري

د کمون یا تفریق بنسټقوانین (پسی یا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګڼونو یا تام اعدادو a او b لپاره یو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چیa+x=b برابرون باوري دی

د ویش تیوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱ . ۰ . ۲ الف د ويش قاعدې ، لارې يا خويونه

د طبيعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنيو ګڼونو د ټوټه ونې يا تجز يي لپاره خورا ګټور دی باور لري

الف) يو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦) ويشونی دی، که د اخر ځيفر يا کور (له اخره(موخه تری ښی لور دی) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنسټيزو ځيفرونو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦ ۰۰۰ويشونی وي) په دوه ويشونی ګڼ جوړه (جفت) نوميږي او بل ډول يی ناجوړه(طاق) بلل کيږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهيدلی شو

ب) يو ګڼ په ٥ (٢٥ ، ١٢٥ ، ٦٢٥ ، ۰۰) ويشونی دی، که د اخر(له ښي لور) بنسټيز ځيفر (د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنسټيز ځيفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ (٢٥، ١٢٥ ، ٦٢٥ ۰۰۰) ويشوني وي

يادونه : په لاتين کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وايي او موږ يي شايد لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ وليکم، خو بيا دې هم ګران لوستونکی تری ټيک ناپوهيدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ) يو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ويشونی دی ، که د ګڼ پروت زياتون پر دې ګڼونو ويشونی وي۰

د يوه ګڼ پروت زياتون لاندې د هغه ګڼ بنسټيز ه ګڼونخښو(ځيفرونو) زياتون پوهيږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونيول شي۰

بيلګۀ : د 126 پروت زياتون يا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت) يو ګڼ په 11 ويشونی دی که د هغه ګڼ الترنيري(نخښه بدلونکی) پروت زياتون۰ پر 11 ويشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

الترنيري پروت زياتون، چې پروت كمون هم ورته وايي له بنستيزو ځيفرونو ١ ، ٣ ، ٥ زياتون څخه د ٢ ، ٤ ، ٦ ،٠٠٠ زياتون كمون پوهيږو ، بى له دې، چې ځاي ارزښت يې په پام كى ونيول شي يا په بل ډول، كه د ناجوړه كور زياتون څخه د جوړه د زياتون كم كړو٠

بيلګه: ١٧٣٨ په ١١ ويشوني دي، ځكه، چې : ١٥= ٨+ ٧ او ٤ - = ٣ – ١ -، چې الترنيري زياتون يانى ١١ = ٤ – ١٥ يې په ١١ ويشونى دى٠

ټ) يو ګڼ پ ه ٣٧ وېشوړ دى كه (د ګڼ له اخر څخه جرړشوي) د درېګوني ګڼونو زياتون پر ٣٧ وېشونى وي.

بيلګه:

37|(448+352+216+20)⇔ 37|1036 ځكه چې 37| 20216352448

ث) يو ګڼ په ٧ همداسې په ١٣ ويشوړ دى، كه د هغه (د ګڼ له لخ څخه جوړ) درېګونى الترنيري زياتون پر ٧ همداسې پر ١٣ وېشونى وي.

بيلګې : 7|(604-37)⇔ 7 | 567 ځكه چې 7 | 37604

13| (889-293+709-96) ⇔ 13|1209 ځكه ، چې 13 | 9679293889

ج) يو ګڼ په ١٠١ وېشونى دى، كه (د ګڼ له اخر څخه جرشوى) دوهګونى الترنيري زياتون په ١٠١ وېشونى وي.

بيلګه:

101|(69-06+63-03+79)⇔ 101|202 ځكه چې 101|7930630669

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : که پیداښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت يې هر ګڼ وي او که پېداښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ویشي بې له پاتي یانې ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دی.

۳ . ۱ . ۲ ت) خوراغټ ګډ پرویشونی او خورا کوچنی ګډ زیاتځله

یا بزرګترین قاسم مشترک و کوچکترین مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرلیک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي يې په لومړنيو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنيوګڼونو ځله وونو هر يوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانيسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان(په خپل ځای کې دې وکتل شي) يا جګګڼ بې ټيټ يا کم وي . يانې

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ یانې ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي يانې د دواړو ګڼونو پرووېشونی

دی او خورا غټ پرووېشونی هم دی. يانې ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پرووېشونی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ : ۵۲ د یورته ګډونو خورا غټ ګډ پروېشونی دی.

داسې ګڼ ، خوراغټ ګډ پروېشونی، بولو (لنډ ونه یې : غ ګ و)

هغه ګڼ، چې د دوه یا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته خورا,,

غټ ګډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ ګ و) وایو. یا

(Greatest commom divisor(g c d)بزرګترین عامل (مقسوم علیه) مشترک)

اوس بیا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله وونې، له هر څخه یو چې په جګ توان وي

یانې خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بیا یې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ یانې ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زیاتځله دی (یانې ګډ په دواړو

وېشل کیږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دی. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زیاتځله(څو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (یانې ګډ) زیاتځله (ګډ څو واره) دی

لنډ یې : خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډونه یې: خ ګ ځ) یا
(Least common multiple(l.c.m.)کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالاضعاف الاقل)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران هيوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر يا بيخي پوهوړ او ساده وي.

ورپسي داسې مخ ته ځو:

دا چې موږ په پيدايښت يا طبيعي ګڼونو کې له شميرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پيژند ورکوو:

پيژند(تعريف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې ټولګڼونه وي۰ وايو چې « ګڼې a ګڼې bويشي» (او يا هم a د bپرويشونې دئ او يا همa د b څو برابره (زياتځله) دئ) که يو ټولګڼې u شته يا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره ليکوa|b (وايو، چې ګڼې aګڼې b ويشي ، خو اړيين يا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼې ورسره وويل شي۰

که a د bپرويشونی نه وي، نو د دې لپاره ليکوa|/b(دا نخښه /| دې د نه ويشونی لپاره ومنل شي)

بيا ليکو، چې : پيدايښتي ګڼونه، چې په ۲ ويشل کيږي جوړه (جفت) ګڼونه بلل کيږي او که نه نو ناجوړه (طاق) ګڼونه بلل کيږي۰ د صفر ګڼې د پيدايښتي ګڼونو په ډيرئ کې يو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې يا اوبيونې د دې ويشکلمی لپاره يو څو ساده شميرقاعدې را يوځاي کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کيږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه يا زړه پورې ټولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

(۱) 1 ± او a± ويش (دا په نامه « ساده» پرويشونې دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۲) د ۱ پرويشونې ۱ او ۱ - دي

(۳) تل باور لري، چې 0 | a او a | 0 يوائې په هغه حالت کې باور لري، چې a = 0 وي

(٤) له a|b او b|c <= a|c

(٥) له a|b لاس ته راځي: ac|bc ،که 0 =| c وي ، نو د دې په څټ هم باوري دي. دا په دې مانا چې، که ac|bc وي، نوa|b هم باور لري.د ګڼونو ليکدود له مخې، که نړيوالجال ته پورته شو داسې ليکو، که نه دا پورته بسيا کوي: $c \neq 0, a | b \Rightarrow ac | bc$

(٦) لهa|b او c|d څخه لاس ته راځي او په څټ ac| bd لنده ليکنه يې(که نج ته پورته شوه): $a | b, c | d \Leftrightarrow ac | bd$

(۷) له a | b او b| a لاس ته راځي a = ± b

(۸) له a |b اوa|c څخه لاس ته راځي a|(bx+cy) د ټولو ټولګڼونو x او y لپار

(۹) ټيک هلته a|b کله چې وي|b| | |a|،

(۱۰) که a | b او b = 0 نه وي نو باوري دي |b| > a > |b| -

حل (اوبې) : (۱) له a1 = (-a)(-1) = a لاس ته راځي
(۲) له a0 = 0 لرو a | 0 . که وي a | 0 , نو يو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چې وي 0u = a او له کومې چې لاس ته راځي a = 0 .
(۳) ساده دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۴) که $a \mid b$ او $b \mid c$,نو تولگنونه u او v د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دې لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس $a \mid c$.

(۵) که $a|b$ ، پس يو تولگنې u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$ سره، د کوم څخه چې لاس ته راځي $ac \mid bc$. د $c \,|\!= 0$ لپاره دا اخرنځير په ځې کيدی هم شي.

(۶) د $a|b$, $c|d$ او (۵) څخه لاس ته راځي چې $ac|bc$ او $bc|bd$ ، د (۴) له مخې $ac \mid bd$.

(۷) د $a \mid b$ او $b \mid a$ څخه د تولگنونو u او v موجوديت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره. برسيره پر دې لاس ته راځي $a(uv) = a$, پس $a=0$ يا $u=v=\pm 1$. په لمړي حالت کې د $a \mid b$ له امله $b = 0$, پس $a = b$. په دوم حالت کې $a =\pm b$ دی.

(۸) د تولگنونو u , v لپاره دې $au = b$ او $av = c$ ، نو له دې $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځي، پس $a \mid (bx+cy)$ د تولو تولگنونو x او y لپاره.

(۹) وي دې $a|b$. له $a \mid b$ ، $a| \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه او د (۴) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چې $|a| \mid |b|$. په څې: که $|a| \mid |b|$ باورلری، نو د $|a| \mid |b|$ ، $a \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه په ورته ډول لاس ته راځي $a \mid b$.

(۱۰) دی $a \mid b$ ، پس د (۹) هم $|a| \mid |b|$. که $b \,|\!= 0$ وي ، پس يو طبعي گڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چې $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

که $b|a$ د تولگنونوa,b لپاره د $b \,|\!=0$ سره، نو يو يواځنی معلوم گڼ q شته (د a او همداسې د b «کومپليمنت پرويشونی» بلل کيږي)، چې لرو $a = bq$.

په تولیزه توگه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۳ ۰ ۲ (د ویش الګوریتم): a اوb دې ټولګڼونه وي۰ د $b \neq 0$ سره ۰ نو یواځني ټاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شمیرلکیدونکي ټولګڼونه q اوr (چې د a پرb ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتی بلل کیږي، شته دي،د کومو لپاره چی باور لري: $a = bq + r \ \wedge \ |0| \leq r < b$

هر یو ټولګڼ کم له کمه ساده پرویشونی لري یعنی ± 1 او پخپله د دې ټولګڼ زیاتیز(مثبت) او کمیز(منفي)۰ دې پرویشؤنو ته «سادهٔ پرویشونی» وایو۰

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو ټولګڼ، چې یواځی او یواځي ساده پرویشونی ولري مونږ ورته لومړنی ګڼونه وایو او دا لومړنی یا پریم ګڼونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړی ګڼ د پیداېښتي ګڼونوتوکی دی۰

هریو ټولګڼ، چی لومړنی ګڼ نه وي د لومړنیو ګڼونو په څلونو(څله وونو)(ضربیونو) ټوټه یا تجزیه کیدی شي۰

بیلګی :

1 - $240 = 24 \,.\, 10 = 3 \,.\, 8 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2^4 \cdot 3 \,.\, 5$

2- $2310 = 2 \,.\, 1155 = 2 \,.\, 3 \,.\, 385 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 77 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11$

$3750 = 25 \,.\, 15 \,.\, 10 = 5 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^4$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګڼونو کی ګڼ ۲ د دواړو پر ویشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګڼونو پرویشونی دی یانی $2.3 = 6$ برسیره پردې ګڼ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګڼونه ویشي او شاید په دې ګڼونو کی یو خورا غټ ګډ پرویشونی هم وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته درېواړو بیلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څیر خوندي دي یانې دا ګڼونه ویش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګڼونو غ۰ګ۰پ دئ

پیژند ۳ ۰ پ :

a او b دې تولګڼونه وي او d دې یو مثبت یا زیاتونی تولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2) t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرویشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کیږي d لپاره داسی لیکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرویشونی(لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کیږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a او b پروېش پردي بلل کیږي یانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر ووېشل شي.

یادونه : په زیاتو ادبیاتو کي لنډونه په درېتورو کیږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرویشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

یادونه: ما د خورا غټ ګډ پرویشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړاندیز لري، نو زه یې ضرور په پام کی په پوره خوښی نیسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبیاتو کي بزرګترین قاسم مشترک او کوچکتریب مضرب مشترک وایي او ذوالاضعاف الاقل یې هم بولي۰

یادونه : که چیرېd او d^* دواړه دa او b غ ګ پ وي، نو له پورته پیژند څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې $d^* \mid d$ او $d \mid d^*$ ، نو د $d \geq 0$, d^* له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله به وښايي ، چې داسې غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ ۰ ۳ :
په خوښه تولګښونو a اوb لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو تولګښونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل(اوبی): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون (په پام کی دې وي چې د (a , b) تعریف په a او b کی سیومتریك دی) له امله اجازه لرو چې $b \neq 0$ ونیسو.
موږ اوس رکورسیف (rekursiv (دا په دې مانا چې د مخه غړي څخه وروستی یعني وریسی غړی لاس ته راوړلکیږي)
تولګښونه......$r_{-1}, r_0, r_1, r_2, \ldots$ او .... q_1, q_2 په لاندې ډول تعریفوو : وي دې $r_{-1} = a$, $r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $|r_{i-1}| \neq 0$ لپاره تولګښونه r_i , q_i داسې تعینوو چې $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $o \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چې له جملی (۱ . ۳) څخه ممکن کیدی شي . باید یو نه منفی ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چې لرو $r_n \neq 0$ مګر $r_{n+1} = 0$ ، چې بې له دې بیا یوه نه پای د طبعي ګڼونو لویدونکی یا کمیدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چې ناشونی(ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شیما ته لاړښودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

....

....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا مساوات د ښکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسی) لاس ته راځي:

$r_n | r_{n-1} , r_n | r_{n-2} , \dots r_n | b , r_n | a$

دا په دې مانا چی r_n د a او b یو غ گ و دی. t دې د a او b یو بل غ گ و وي،
نو په دې حالت کی که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسی لرو

$t | r_0 , t | r_1 , t | r_2 ,\dots, t | r_{n-1} , t | r_n$

دا په دې مانا چی |r| د a اوb غ گ و دی.

هر د دې گڼونو r_i د ($-1 \leq i \leq n$) سره، په ځانگړي ډول r_n او ددې سره (a , b) یو د a او b لاینې کمبینیشن دی ، په لاندې ډول au + bv , چی u او v تولگڼونه دي.

$r_{-1} = a$ د

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د یوه i لپاره د $1 \leq i \leq n$ سره، که یو د a او b یو لاینې کمبینشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پیداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د یوې داسی r_i د ځاي په ځاي کولو له لارې هم ، چی په دې ډول د ایندکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. (پاي)

یادونه : د غ گ پ د ښوونې متود ، چی پورته او په لاندې بیلگه کې راوړل شي د اویکلید الگوریتم"Euklid Algorithmus„ د یوې گڼیزې دندې یا کارونی (عملیې) شیماتیکي اوبیونې(حل) متود په نامه یادیږي، نو له دې سره x او y هم له a څخه

$d = ax + by$ اکسپلیځیتExplizit (لاتین: څرگند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي.

بیلگه:

غوښتنه ($d = (2124 , 1764)$. د اویکلید الگوریتم کارونی له لارې لرو:

$$2124 = 1 . 1764 + 360$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دی

د دې لپاره ، چې d له x او y سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) . 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه د a او b لپاره لاندې مهمه پیژند نخښه یا نخښونه لاس ته راځي

یادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکاریږي، چې ګرانو لوستونکو ته یې بې له اوبیونې

وړاندې کړم، دا جملې په خته کې د ګنونوتیوري دنده ده، چې په ګنونتیوري کې بیا د ښوونې سره ښوول کیږي۰

جمله۳ ۰ ۹ :

a او b دې ټولګنونه وي. د a او b یو ګډ پرویشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دی کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a او b ټولګنونو سره انځور کړای شو۰ په ځانګړي ډول a او b هلته او هلته ویشپردي دي، که ټولګنونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + by = 1$$

اوبيونه : د شرايطو ضرورت سم د لاسه له ۳ ړ ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرايط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، ګڼونتېري پورې اړه لر او دلته يې نه ښايو.

جمله : ۱۰ . ۳

a اوb دې ټولګڼونه وي٠ د a اوb هر ګډ پرويشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b يو ګډ پرويشونی هلته اوهلته غ ګ پ دئ چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

ليما۳ ٠ ۱۱(جمله ګی)(اويکليد): په خوښه ټولګڼونو aاوb او c لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعريف ۲ ت : $a_1 , a_2 , ... a_n$ دې ټولګڼونه وي $(n \geq 1)$, او d دې يو نه منفي ټولګڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d | a_i$ د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره

ب : له $t | a_i$ څخه د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره لاس ته راځي $t | d$.

نو d د $a_1,...., a_n$ غ ګ و بلل کيږي او د d لپاره هم داسې ليکو $(a_1 , ... , a_n)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a_n , ... , a_1 لپاره د داسي غ گ و یواختنوب په ۳ . ۵ کی کتل کیدی شي او د موجودیت لپاره یی لرو :

جمله ۳ . ۱۳ : د خوښي تولگنونو a_n , ... , a_1 لپاره ($n \geq 1$) غ گ و موجود او d د a_1 , ... , a_n خطي (لاینتي) کمبینیشن دی دا په دې مانا چی

$$d = a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

د مناسبو تولگنونو x_n , ... , x_1 لپاره .

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$(a_1 , ... , a_n) = ((a_1 ,..., a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولگنونو a_n , ..., a_1 د ($n \geq 1$) لپاره . سرې کړی شي چی د $a_1,...,a_n$ غ گ و پل په پل د اویکلید الگوریتموس له لارې پیدا کړي، چی دلته یی د اوبی یا حل ځخه تیریږو .

د اوبی یا حل لپاره یی د n په لور د پوره ایندکشن ځخه کار اخستل کیږي چې په ۸ –امه برخه کې ځیړل شوی دی.

بیلگي:

۱ - گنونه 240 او 3750 غ گ پ $30 = 2.3.5$ لري

۲ – لرو 408 او 748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس غ ګ پ دی: 17 . 2<2> = (408,748) يا دا لاندې که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^2.17 = 68$$

۳ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ $6 = (30.66.114)$ دی، ځکه، چې
$30 = 2.3.5$

او $66 = 2.3.11$ او $114 = 2.3.19$ دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرويشونی نه لري دا مو پرويشپردی بولو، ځکه، چې دي:

$$65 = 5.13 \quad \wedge \quad 54 = 2.3.3.3$$

خورا کوچنی ګډ زياتځلی(کوچکترين مضرب مشترک)

مو په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زياتځله (لنډ: ک ګ ز) کليمې په ځېرنه پيل کو٠ دا کلمه و غ ګ پ يوه دوه ييزه يا دوه ګونی يا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، مو په لاندې ډول سملاسي تولیز پيژند ورکوو

تعريف ۳ . تې : $a_1 ,....., a_n$ دي $(n \geq 2)$ تولګڼونه وي، او v دې يو داسی نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره چی باور لري:

الف – $a_i | v$ د n , ... ,, $i = 1$ لپاره

ب – له $a_i | w$ څخه د $i = 1 , ... , n$ لپاره لاس ته راځي $v | w$.

نو v د $a_1 , ... , a_n$ کوچنی ګډ زياتځله (لنډ : ك ګ ځ) بلل کيږي او داسې يې ليکو:

$$v = [a_1 , ... , a_n]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (د دوه ګڼونو لپاره)

a او b دې تولګڼونه وي او v دې یو داسې نه کمیز یا نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

(۱) $v|a$ او $v|b$

(۲) له $a|w$ او $b|w$ څخه لاس ته راځی $v | w$

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کیږي او په لاندې توګه یې لیکو

$$v = [a,b]$$

جمله :

په خوښه تولګڼونو $a,b,c,\ldots,n$ لپاره ک ګ ز شته دئ او دا یواځنی دئ

$$[a,b,c,\ldots,n]$$

یادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونو لاس ته راوړو:

دتولګڼونو $(n \geq 3)$ $a_1, \ldots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\ldots,a_n] = [[a_1,\ldots,a_{n-1}], a_n]$

او هم $|a_1a_2| = [a_1, a_2]$ (a_1, a_2)

لاس ته راوړنې (داهم په همدې مانا مګر د جملی په څیر دی): د په خوښه تولګڼونو a, b, c لپاره باور لري: له $a | c$, $b | c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab | c$

د ګڼتیوري بنسټیزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژنده :

يو ټولګڼ $n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کيږي، که له ساده پرويشونv بل پرويشونی ونه لري۰

لومړي ګڼونه لاندې غوه خويونه لري.:

ليما (لکه کوچنی جمله): که p يولمړی ګڼ وي او $p \mid a_1 \dots a_n$ د ټولګڼونو $a_1, \dots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه يوه i د $1 \leq i \leq n$ سره.

حل (اوبی): حل يی د ايندوکشن له لارې صورت نيسی، چی ددې لپاره بايد ۸ - امه برخه کتل شوي وي.

د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او ليما دې $n-1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بيا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځي چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مختنه تيرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \dots a_{n-1}$ وي ، نو داسې دی $p \mid a_i$ د يو i لپاره چې $1 \leq i \leq n-1$ وي د ايندکشن د نيونې په بنسټ.

د لومړنيو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتيوري بنسټيزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه (د ګڼونتيوري بنسټيزه جمله):

هر يو پيداينتي (طبيعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تيب پورې، په يواځني او يواځني (يويواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په يواځی يو ډول ليکل کيدی شي او بس۰ کيدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضريبونه همغه دي)) ډول د لومړنيو ګڼونو ځل په څير ليکل کيدی شي۰

اوبی : ښوونه د n په لور ايندکشن له لارې مخ ته بيايو (برخه ۸ دې ودې کتل شي)
د $n = 1$ لپاره باور لري، که. لکه معمول ، 1 د طبعي ګڼونو د تش(خالي) ځل په څير تعريف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library

شوي وي. موږ اوس ټول د n پروېشوني $t > 1$ په نظر کي نیسو. کم له کمه یو داسی ګڼ شته لکه n . که p د دې پرویشونو کوچنی پرویشونی وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بیا p یو پرویشونی q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چی q د n پرویشونی وي، نو دا به د p تعریف رد کړي. دا چی $n / p < n$ د ایندونکشن نیوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د څل په څیر لیکل کیدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2..p_r = p'_1p'_2...p'_s$ د n دوه ډوله د لمړیوګڼونو د څل په څیرلیکنه . له $p_1 \mid p'_1...p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 \mid p'_i$ د یو i د $1 \leq i \leq s$ سره . د نمرې بدلولو له لارې دې وي $p_1 \mid p'_1$. داچي بیا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2...p_r = p'_2....p'_s$ ، له کومو چی د ایدکشن له نیونی لرو $r - 1 = s - 1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتیب بدلون) هم $p_i = p'_i$ له $2 \leq i \leq r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټیزي جملی د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

> **جمله** : هر طبعی ګڼ n په ټیك یو ډول په لاندې فورم انځوریدلی شي
> $n = \prod_p p^{\nu_p}$ (د ν_p ، $\nu_p = 0$ یواځي د پای ډیرو p لپاره).(ν نیولئ شتل ګیرې)
> چیرته چی p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګیدونکې لړۍ پرلپسې کې ځغلي.

یادونه: د عملي شمیرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ یې صفر وي تیریدل کیدی شي، لکه : $n = 28 , n = 2^2.7$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره

لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a , bc) = 1$ ، نو هم $(a , bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی یا حل : نیولی دې وي چې $(a , bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد (a,c)=(a,b) = 1 سره تضاد دی.

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو $a \mid b$ هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \le \beta_p$

لاس ته راوړنې : وي دې a او b له 0 مختلف ګڼونه، $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ همداسی $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورتوټونه(تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)} , \quad [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b) = 2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ ځخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دې که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه ریښه نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورېزېشنونه (تجزيه) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}\ ,\ [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چيرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بېلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

يادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زياتو ټولګڼونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعماليدی شي.

يو څو په لمړيو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ايا ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اويکليد لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې يو ښکلي ځواب دی چې له هغه ريښه نيسي:

جمله: ناپاي ډير لومړني ګڼونه شته.

حل(اوبې) : موږ جمله ناسيده يا ناسمه ښايو (۸ –امه برخه دې وکتل شي) او نيسو چې پايڼدير لمړی ګڼونه $p_1 , p_2 , p_3 , \ldots\ldots , p_r$ موجود دي. ګڼ $N = p_1p_2\ldots p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په يوه لمړي ګڼ p ويشونکی دی. د نيونی له مخی لرو $p = p_i$ د $1 \leq i \leq r$ سره . د $P|N$ او $p \mid p_1p_2\ldots p_r$ له امله لاس ته راځي $p \mid 1$.کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله بايد ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د میلاد څخه پخوا د « اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دځې متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~
~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~
37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~
~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ 57 ~~58~~ 59 ~~60~~ 61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~
~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ 71 ~~72~~ 73 ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~
~~78~~ 79 ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ 83 ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ 89 ~~90~~ ~~91~~
~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ 97 ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

۳ ۰ ۱ ۰ ۳ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

(لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسې ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چې دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راځیو Ratio nهوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی۰

یادونه : که / ولرو یانې که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چېa په b ویشل کیږي۰ که ولرو≠ نود نابرابرونخښه ده۰ دا په دې مانا، چې b له 0 سره برابره نه ده۰ د دوه ګڼونود a او b ویش x = b / a د ټولګڼونو په ډیرۍ کې تل هلته شته دی، چې a د b ټولګنیز څو ځله وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره، چې بیا هم ویش$a : b$ (دلته هم b پر a ویشل کیږي) کیدونی شي» سره له دې، چې ویش تل په ټولګنونوکی پیژند نه لري یا تعریف نه دی یا صورت نه نیسي« باید د ټولګنونو ډیری ماتګنونو(کسر) ډیری‌ته پراخه شي، چې د لومړي ځل لپاره افاده یا وییته b/a سومبولیک مانا لري، د نوو ګنونو په څیر نیسو او په ټولګنونو یې ور زیاتوو، نو هغهٔ ګنونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګنونه وایو۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دی

cb / ca هلته باور لري، چې $c \neq 0$ دټولګڼ اوa |b د ماتګڼ په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګنونو ډیری، چې په Q سره ښایو د ټولګنونو ماتګنو b/a چې $a \neq 0$ او a او b د ټولګنونو له ډیری وي، د ټولګنونوپراخوالی دی او ټول د مخه تیر بنسټیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنسټیز قانون ته داسې پراخیدلی شي

ټ : د ویش(تقسیم) بنسټیز قانون(دوام)

۲ - د دوه راشنل ګنونوa ، $a \neq 0$ او b لپاره یواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون یا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګنونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلی

بیلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غن, راسیږي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دی، یاني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ یا $\frac{1}{2}$

دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګنونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

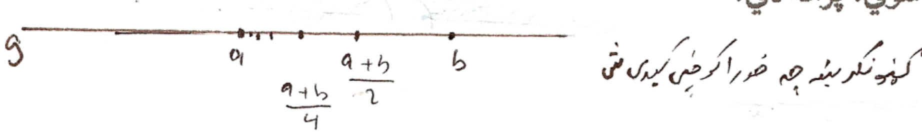
(c) ketabton.com: The Digital Library

۳۰۱۰۴ - رييل ګڼونه(Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په ريښتوني شته يا موجود)

د ريښنلګڼ په بنسټ هغه ورځني تيوريکی اړتياوي چی د شميرعمليو بی بنديزه (نامحدود) په کار اچولو يا استعمال ته موجود وي حل يا اوبی شوې او همدارنګه عملي اړتياوي چی اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ريښنلګڼ له لارې کيدی شي چی د کرښی اوږدوالی ټيك ورکړ شي يا په همدې مانا : په هرڅومره وړوکی ګڼونکرښه انتروال کی هم ناپاي زيات ګڼونه، چی په ټکو يا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بيا په يوه کرښه کی هر ټکی د ريښنلګڼ په ذريعه نه شي ښودل کيدی يا په بل عبارت د کرښی هر ټکی د ريښنلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چی د «ايريښنلګڼونو»په نامه ياديږي، کيدی شي د يوه پريوديکي(periodische) (د ګڼونو کړی نه شليږي) ناپای لسيزمات له لارې وښوول شي.

د بيلګي په توګه د مربع د نيمي(قطر) x اندازه چی د مربع يو اړخ ۱ وي نه شي کيدی چي په ريښنلګڼ وښوول شي. د پيتاګوراس د جملی په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$, پس $x=\sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رییلګڼ کلیمه یوه ژوره کلیمه ده چې د پوهیدلو لپاره یې «پولی» (لیمس lim) ته اړتیا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کې به تر څېړنی لاندې ونیول شي.

ډیر اینتروالبندیدل چې په همغه یوه ټکی راڅرخي مساوي(ورته) ارزښته (Äquivalent لاتین :مساوي ارزښته) لیدل کیږي

رییلګڼډیری R چې په ریشنلګڼډیري د ایریشنلګڼډیري ورزیاتول دي چې له ۲ . ۱ . ۱ تر ۳ . ۱ . ۳ برخی پوري تول بستزقوانین په کی باور لري. د رییلګڼ له لاري دکربنی تول تکي په بر کی نیول کیدی شي. په دې ډول رییلګڼونه تولی د شمیرلو او اندازه کولو اړتیاوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د رییلګڼ حل یا اوبی نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتیا پیښیږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کی به تر څېړنی لاندې ونیول شي.

یا دا لاندې په لنډه توګه:

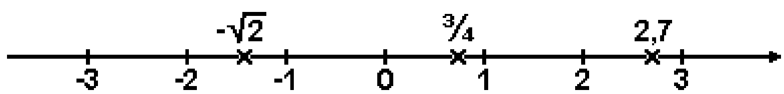
موږ ګڼونه یا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګڼونه نه دي یانی که موږ د ۲ ګڼ ریښه(جذر) ونیسو، نو داسی یو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسمیزه توګه پاي ته نه شي رسیدی یانی پریودیکی (تل بیرته راګرځیدونی یا پسی نور هم پراخیدونی) دي۰ داسی ګڼونو ته ایراشنل ګڼونه وایو۰

تل بیرته راګرځیدنیز (periodi(cal تل بیرته راګرځیدوني ,Period د ګڼونو ځنځیر نه شلیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایراشنل – یا نانسبي عددونه یاګڼونه Irational numbers

د راشنل او ایراشنل ګڼونوټولنی ته رییل ګڼونه وایو(دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیرئ پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) . ۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیداییښتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي یانې ریل ګڼونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابیلشوی(له نورو -) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د رییل ګڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیرو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته دراندہ ټکی دا لاندې دي:

- په رییلګڼونو کی څلور بنسټیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (وییني) سره شمیرنه (نوکان اینوول)۰ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا ځلووني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه۰

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندي (مخرج المشترک) جوړول۰ د داسی ماتلاندی(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نوموني: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفريق (زياتون او كمون)

د زياتون او كمون بنستيزو قوانينو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a , \quad a - b = a + (-b),$$

$$(a+ b + c \dots -c -d- \dots) + (e+f + \dots -g-h- \dots) = a+b+ \dots -c-d- \dots +e+f+ \dots -g-h- \dots$$

دا دا مانا لري، چې كه چيرې د نوكانو دباندې زياتوننخښه (د جمع علامه) وي، نو د نوكانو څخه ويستلو كې ګڼ خپله مخنخښه نه بدلوي٠ كه د نوكانو د باندی كموننخښه (منفي نخښه) وي، نو د ګڼونو له نوكانو ايستلو په حال كی د نوكانو دننه نخښی بدلیږي٠ يانی كموننخښه زياتوننخښه او زياتوننخښه كموننخښه كيږي٠ بيلګه يې لاندې ګورو

$$(a +b+ \dots -c-d- \dots)-(e+f+ \dots -g-h-..)= a+b+ \dots - c-d- \dots\dots -e-f- \dots\dots +g+h+ \dots$$

په همدې ترتيب كيدی شي نوكان هم ځاي پرځای شي٠

دلته بايد مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چې په ګڼكرښه د صفر څخه د يوه رييلګڼ واټن په ګوته كوي،

د كوم لپاره چی ليكو :

مطلق عدد يا - ګڼ يا بې اړيكو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زياتيزه او كميزه نخښه يا مثبت او منفي نه ليكل كيږي يا يون(واحد) هم ورسره نه وي، دا تيک او تيک يو ګڼ ښايج او بس٠

$$|a| = a \ ; \ a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a| = 0 ; a = 0

| a| = -a ; < 0

یانې که a زیاتیزه یا مثبت وي،نوa پخپله لیکواو که a کمیزه یا منفي وي، نوa- لیکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 لیکو

۳ ، ۲ ، ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخښی قوانین باور لري:

$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , (-a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab$

که چیرته ډیر نوکبندونه راګرځیدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی

بیلګه:

$$(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac – ad + bc –bd)(e-f-g)$$

$$= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-) bdf+bdg$$

د ځانګړي حالت په توګه د بینوم پیژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a – b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې تیک دي.

دا په لاندې ډول کارولکیږي :

بیلګه ۱ . ۳ :

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2 .$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2.$$

$$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2 v)(4u - 2 v)$$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ویش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د a = 0 لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ویش ناشونی دی

په ویش کی نوکبندول د زیاتون، کمون او ځل په څیر ساده نه کیږي۰ په ویش کی د زیاتون په ډول لیکل شوی هر توکی په ماتلاندې ویشل کیږي:

بیلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

یا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې لاس ته راوړنې(نتيجې) ته سرې د ګډو ځلوونو يا فاکتورونو يا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسيدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(\,a - 2b + 4c)$$

له دې ځايه کيدی شي، چې د بولينوم وېش بيل شي

بيلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \;\; \text{Rest} \;\; 5c \text{ باقي } \Leftrightarrow$$
$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \text{ لپاره } ab \neq 0,$$

د يوه زياتو يا چمعي وېش په يوه چمعه، کيدی شي د بينوم جکلې له لارې صورت ونيسي

بيلګه ۳ . ۶ :

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b \text{ لپاره } a \neq -b.$$

بيلګه ۳ . ۷ :

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b \text{ لپاره } a \neq -b.$$

بيلګه ۳ . ۸ :

$$\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax \text{ لپاره } ax \neq by,$$

دلته هم وېش د پاتې يا باقي سره شونی دی.

بيلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$:

باقي يا پاتې b^2

له دې لاس ته راځی او په ښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b} \quad a \neq b,$$

بیلګه ۱ . ۱۰

$$(16u^2-v^2):(4u+\sqrt{2}\,v)=4u-\sqrt{2}\,v \ \text{Rest } v^2$$

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

$$=4u-\sqrt{2}\,v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

د $4u \neq -\sqrt{2}\,v$ لپاره

فورمال ور د دوه پولینومونو ویش دی (برخه ۱۲ دي اندول(پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0} = P_n(x):Q_m(x),$$

که د ماتباندي پولینوم درجه د ماتلاندي پولینوم درجی لوي یا مساوي وي($n \geq m$).

مونږ نیسوچی: $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ او $Q_m(x) \neq 0$.

د دواړو ویشو« ټوټه ویشو» (پارځیالویش(Partialdivision)) دا دي چی دا

د $P_n(x):Q_n(x)$ ویش په لاندي ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\text{Polynom }1+\frac{\text{Polynom }2}{Q_m(x)},$$

چیرته چی د پولینوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجی څخه کوچنی ده.

دي هدف ته په لاندي ډول رسیږو

۱ – سري یواځی د جګ نظم غړي $a_nx^n : b_mx^m$ ویشي او له دي سره یوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}:Q_m(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+F(x) \qquad *$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – سړی (*) په ماتلاندې پولینوم $Q_m(x)$ ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چې د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل پولینوم $P_n(x)$ له درجې n څخه کم له کمه په یوکوچنی وي . د ګڼونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چې $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – تویته ویش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعمالیږي، د لاندنی نتیجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چیرته چې د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجې کوچنی وي.

د تویته ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلګه ۲ . ۱۱ . لمړی دې د تویته ویش ۱ او۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلګه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$P_3(x)$ $: Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2 (3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 + F(x)$ $6x^3 - 4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) - (a_3 / b_1) x^2Q(x) =$	$9x^2 - 3x + 1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ : د تیر ویش بیلګه ۱ . ۱۱د (F (x غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو چی د لیکنی شکل لنډ شي:

$F(x) = P_2(x):Q_1(x) = (9x^2-3x+1):(3x-2) = 3x+G(x)$

$3x.Q_1(x) = (9x^2-6x)$

یاباقي پاتي $= 3x+1$

$G(x) = (3x+1):(3x-2)$

له دې لاندې نتجه لاس ته راځي :

$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)=2x^2+3x + G(x)$

$G(x) = (3x+1):(ex-2) = 11 + H(x)$

$Q_1(x) = 3x-2$

پاتی = 3 = یاباقي

$H(x) = 3 : (3x-2)$

پس باور لري

$(6x^3+5x^2 - 3x+1) : (3x-2) = 2x^2+ 3x+1 + 3/(3x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تول توپه ویش کیدی شي په لاندي ډول مخ ته یوړ شي .

(1) (4) (7) (۱۰)

$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$

(2) $\underline{6x^3-4x^2}$

(3) $-9x^2-3x+1$

(5) $\underline{9x^2-6x}$

(6) $3x+1$

(8) $\underline{3x-2}$

(9) 3

دلته (i) د پرلپسی پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

(1) (4) (7) (10)

$(18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1) : (3x^2 + x - 1) = 6x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x^2 + x - 1}$

(2) $\underline{18x^4 + 6x^3 - 6x^2}$

(3) $9x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

(5) $\underline{9x^3 + 3x^2 - 3x}$

(6) $3x^2 + x + 1$

(8) $\underline{3x^2 + x - 1}$

(9) 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ٤ ماتشمیرنه (کسرشمیرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د ټولګڼونو m,n څخه د ریشنلګڼونو انځورونو لپاره تعریف شوې۰ کیدی شي، چې دا کلمهa/b ته، چې a او b رییل ګڼونه دي، وغزول شي۰

باید په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بیلګي په توګه:

ویش(a/(b-c تیک هلته مفهوم لري، چې b≠c وي۰ ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښايي

لکه a : b او یا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم باید b |=0 وي.

په اخر کې باید په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ کیدی شي او هم دواړه۰ دا باید دلته هم په پام کې وي، چې هیڅ یو ماتلاندې ګڼ باید صفر نه وي یانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور یو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کیدی دا موږ د ماتو مات (کسرالکسر) بولو۰

بیلګې:

a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 ,

(a/b) : c = (a/b) / c b|=0, c|= 0

(a/b): (c/d) = (a/b) / (c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0

یا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c}, b\neq 0, c\neq 0, ..., \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$$

په څو واره ماتګڼ کې باید اصلي ماتکربنه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټیکوالی مخه نیول شوي وي٠ په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}\neq\frac{\frac{\grave{a}}{b}}{c}$$

هریو ماتګڼ b|=0, a / b په یوه ګڼ c |= 0 پراخیدی او همداسې لنډیدی شي

یانې ماتلاندې او ماتباندې په یوه ګڼ c ځلیدی یا ویشل کیدی شي او دا کړنلار په اصلي

ګڼ کې تغیر نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c}, b\neq 0, c\neq 0$$

د ماتګڼ لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګڼ ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}, \frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c}; a\neq 0, y\neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یواځنی فکتور یا ځلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګې په توګه لاندې ماتګڼ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(a+c):b+c)$ چې $b \neq -c$ وي نه شي لنډيدی دا $(a+c) : (b+c) = a:b$

باور لري،چې $b |= 0, c = 0 \vee -c |= a, a = b$

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اړيين دی، چې ډير ماتګنونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، څکه چې يواځې هغۀ مات يو په بل زياتيدی يا يو له بل کميدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه : $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$

که چيرې پرڅېړ یا برعکس ماتګنونهa / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زياتوو او يا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې بايد راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو څخه دی۰ د بيلګې په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل بايد ماتګنونو ګڼلو کې ماتلاندې سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بيلګه باندې ښايو

بيلګه: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي، چې اصلي ماتلاندې)ا۰م۰ل (وټاکل شي

= 2.3.5.6.15.36= 97200 ا ۰ م ۰ ل ۰

کيدی شي، چی ا۰م۰ل۰ د لومړنيو ګڼونو ځل په ځير هم وليکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3۰. 3.۰2۰36 = 2

2².3².5 = 4.9.5 = 180

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړکښ يا لوړ جګګښ يا لوړ طاقت لومړي ځلووني رانيول کيږي۰ چې ګڼل خورا ساده کوي۰

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=$$

$$\frac{90-60+36-30+12-5}{180}=\frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار څنګه د ماتو په ټوليزه افاده استعماليدی شي لاندې بيلګه يی ښايي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بيلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې يوائی د لاندې لپاره موخه ور دی $a\neq 0 \wedge b\neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره يانې

$$a.b(ab)(a^2b).(ab^2) = a^5.b^5$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

$a = a$

$b = b$

$ab = a \quad b$

$a^2 . b = a^2 \quad b$

$ab^2 = a \quad b^2$

دا ا۰م۰ل۰ په لاندې توګه دی $= a^2 \quad b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱٦ : د ويينې يا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a \neq 0, a \neq \pm 2$$

لپاره تاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

a^2 - 1 = (a-1)(a+1)

a^2-4 = (a-2) (a+2)

(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)

دا پورته لاس ته راوړنه ا۰م۰ل۰- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مات ماتباندې صفر دیپه دې ډول په پورته پیل کې ورکړ شوې افاده یا وینه د صفر پیچلې لیکلو بیلګه ده او بس۰

د حٔل او ویش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, b\neq \wedge d\neq \Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}; b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0 \Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بیلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بیلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, \forall\, |a|\neq|b|$$

یادونه: په پورته لیکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم باید راغلي وی. دلته اړیین د ګڼونو شمیرقوانین دي او د ګڼونو پیژندل. د ګڼؤنو اړیکې د خوندیونې له لارې

$N \subset Z \subset Q \subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمیر قوانین، چې هغه زیاتون ، کمون ، ځل ، ویش دئ او د ویش په بنسټ ماتشمیرنه. دا باید په همغه ساده ډول زده کړای شي.

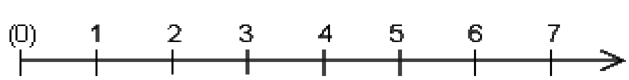
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړیین د ګڼونو شمیرنقوانین په لاندې توګه رالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهیدنه بسیا کوي.

ګڼونډیری (لنډه ټولګه)

پیداینتي – یا طبیعي ګڼونډیری

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پیداینتي ګڼونو انځورونه

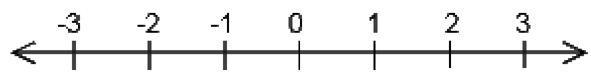


(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګڼونو ډيرى

$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$

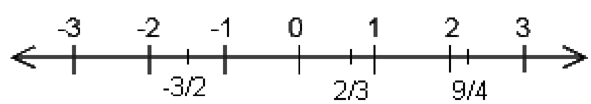
د ټولګڼونو ډيرۍ انځورونه په يوه کرښه



د راشنلګڼونو ډيرۍ

$$Q = \{\frac{p}{q} \mid p, q \mid Z \wedge q \neq 0\}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسميز يا پريوديکی ګڼ په څير ليکل کيدی شي

د ماتو سره شميرنه

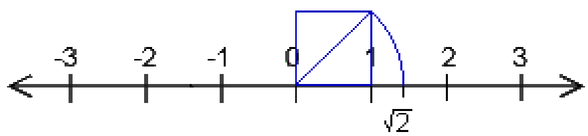
د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زيات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بيا يې هم ترمنځ نور ګڼونه يا ځايونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دی او دې ګڼونو ته مو ايراشنل ګڼونه وويل ٠ لکه چې يو راشنلګڼ نه دئ

راشنل او ايراشنلګڼونه رييل ګڼونه جوړوي

د رييل ګڼونوډيرۍ يا حقيقي اعدادو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رییلګڼونو ډیری د ګڼونکرښی تولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکرښه کې روښانه ده



په رییلګڼونوکې بی له بندیزونو شمیرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې باید صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونولپاره باور لري

شمیرډولونه لومړی پوړی

:Additionزیاتون یا جمعه

زیاتوونی +زیاتونی = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون $a + b = b + a$

د زیاتون اسوځیاتیو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زیاتون ته د یوه بی اغیزه یا ناپیلی توکی شتون $a + 0 = a$

مخامخ – یا په څټ ګن یا برعکس عدد $a + (-a) = 0$

کمون:Subtraktion

د زیاتون په څټ کارونه یا عملیه ، ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوړۍ

ضرب یا ځل: فاکتور (ځله وونی ضریب) ۰ فاکتور(ځله وونی) ځل د زیاتون تکرار، بیلګه $4 + 4 + 4 = 3\cdot4 = 12$.

د ضرب یا ځل کموتایتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب یا ځل اسوځیاتیو قانون$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

دستریبوتیو قانون $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلي توکي شتون(بي اغیزه توکی یې که وبولو هم بده به نه وي)

$a\cdot1 = a$

په څټ ارزښت یا برعکس قیمت$a\cdot(1/a) = 1$

یو ضرب تیک هلته صفر دئ، چي د صرب یو ضریب صفر وي $a\cdot0 = 0$

ویش:
ویشونی : پرویشونی = ویش (لوستل یې له ښي وکیڼ لورته)

ویش د ضرب یا ځل په څټ کارونه ده) $a:b=c$

$a\cdot x = b \Leftrightarrow x = b:a$

د بېلګې په توګه z.B.: $4\cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ تمرینونه

۱ – د اعدادو یا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ یا سټ کې د عدد a او عدد bلپاره د شمیرلو څلور قاعدې یا لارې باور لري؟

یادونه: دلته دې ترې کمونی یا مفروق منه او وېشونش یا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونی یا مفروق او پروېشونی یا مقسوم علیه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او یو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو یا ګڼونو او څخه تفرسق، ضر ب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتیجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ یادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ییز سیستم کې لاندې ګڼونه یا اعداد انځور کړی!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – لاندې ربښتوني یا راشنل اعداد د کوټیو کې اچوني یا کوټی وني له لارې په نږدې ۵ ځایونږ ټیک پیدا کړئ.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زیاتیزو او ځلیزو (د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړئ

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$
b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$
d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بینوم فرولونه

۳ . ۱ – د بینوم فرمولونه وکاروئ یا استعمال کړئ او د شوننتیا سره سم یې ساده کړئ

a) $(-a + 3b)^2$
b) $(-1 + a)(a + 1)$
c) $(-a - b)(a - b)$
d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې ویینې یا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکمیلونې له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضریبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې ویینې یا افادې په ضریبونو توټه کړئ او تر شوونتیا پورې یې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$
d) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$ c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$ d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان (n=1,2,3,...) له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$ c) $(1 - 2n)^3$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ا رزښتونه له شمیره وباسئ، کوم چې ...,a,b یې نه شي نیولی یا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$ c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$ d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$ c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$ d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$

b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$

c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$

d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشميرنه يا كسرشميرنه

۶ . ۱ – لاندې كسرونه صورت او م خرج يعني د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنيو ضريبونو يا ځلوونو له لارې لنډ كړئ

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$

b) $\frac{2\,730}{5\,005}$

c) $\frac{20\,520}{2\,280}$

d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا كوچنى ګډ زاتځلى (ذ الاضعافالاقل) پيدا كړئ

په لاندې كې und د او په معنا دى

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81

b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84

c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42

d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نوميزو يا برابرمخرج كسرونو شميرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{7} - \frac{1-6}{7} + 2\frac{1}{7} - 7\frac{2}{7}$

c) $10\frac{1}{5} - \frac{4-5}{5} - 5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{10-1}{5}$

d) $2\frac{2}{26} + \frac{5-3}{13} + 3\frac{33}{39} - 0 \cdot \frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a} - \frac{1-a}{a}$

c) $\frac{(a-b)^2}{ab} - \frac{1-2ab}{ab} - \frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنومیزو کسرونو جمعه او تفریق، په مخرج یا ماتلاندې کې ضربیونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نومیزو ماتونو(کسرونو) جمعه او تفریق(زیاتون او کمون)، جمعه مخرج یا ماتلاندې کې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره یو په بل پسې ورکړشوي ارزښت ځای په ځای کړئ‌او دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(کسرونه) سره یوځای کړئ! بیا په ټولیزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړئ او هغه ارزښتونه لرې کړي، چې د a د اخستلو یا نیولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$	د a=1,2,3 سره
b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$	د a=3,4,5 سره
c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$	د a=2,3,4 سره
d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$	د a=2,3,4 سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$ d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو یا کسرونو ضربونه(یا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېينو یا افادو برعکس یا په څټ ارزښتونه پیدا کړئ.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.7.4. a) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1}{\dfrac{a^2+b}{b}-\dfrac{a+b^2}{a}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{a+1}{a}}{\dfrac{a-1}{a}-\dfrac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)-\dfrac{1}{ab}}{\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{b}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}+\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}+\dfrac{1}{2b}}+\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}-\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}-\dfrac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\dfrac{1}{1-ab}}{1-\dfrac{1}{1-ab}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a-b}}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه يا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ (که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.8.2. a) $\frac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\frac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\frac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\frac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\frac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\frac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\frac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\frac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0{,}4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\frac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\frac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\frac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\frac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\frac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\frac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\frac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\frac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\frac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\frac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (1-) سره شميرنه

الف- ورکړشوی دې وي/ a(b-c) /c . a=-1ځای په ځای کړئ او داسې لاس ترې راغلي کسر يا مات لپاره مختلف ليکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج (ماتباندې او ماتلاندې) کې (1-) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر يا مات $(b^2 - a^2)$ /(-a-b) د (1-)سره پراخ کړئ او ساده يې کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج يا ماتلاندې کې (1-) له نوکانو راباسئ او دا وبينه يا افاده ساده کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ٠ توان (پوتنځ) او ريښه (جذر) (Potenz , Wurzel Root)

په دې برخه کې د توان او جذر يا ريښې قوانين ترځيرنې لاندې نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې يا استعمال چټکتيا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو٠ دا مشوره کيږي، چې ريښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - يا جګعدد يې نسبي يا راشنل وي٠ د دې فورمال ټيک کره د ګڼلو قوانينو په ځنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو) هم ژور فکر وشي٠

د ريښې پيژند د خلاف يا پر ځټ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند (ريښه ويستونی يعنی هغه ګڼ، چې ريښه يی وېستلکيږي يا نيول کيږي،د ريښی نخښې لاندې ګڼ او هم د ريښی ارزښت نامنفي اعداد (ناکميز ګڼونه) وي٠ د توان زړه پورې ريل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دی يا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نيونه يا فرضيه شوي وي٠

٤ ٠ ١ توان (پوتنځPotenz) په ټولګڼيز يا تام عدد په جګ يل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ٤ ٠ ١:

د یوه په خوښه ریل ګڼ توان لاندې موږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پو هیږو٠ د دې لپاره لیکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ $n = 1,2,3,\ldots$

اکسپوننت(جګګڼ، لنډ: جګ) او b د پوتنخ یا توان ارزښت بلل کیږي٠

د بیلګې په توګه

$$a = a\ ,\ a^2 = a\ .\ a\ ,\quad a^3 = a.a.a$$

(4,1) د $n = 0$ لپاره کره ټاکل کیږي $a^\circ = 1$ د $a \mid= 0$ سره

د پیژند یا تعریف پر بنسټ (او د څه بندیزونو په څلوردیوالی کې، چې لاندې شوي)
ښوول کیدی شي، چې د خوښی یا زړه پورې ریبلګڼونو $a,b \in R$ او $m,n \in N^*$
نامنفی ټولګڼونو اکسپوننت یا جګګڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;\ldots\ldots\ldots(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;\ldots\ldots(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته د توان اړيکي د ټولګنيز مثبت جګڼ يا اکسپوننت لپاره باور لري، کيدی شي، چی ټولګڼونو ته وغزول شي، که چيرې پيژند ورکړو يا تعريف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n = 1, 2, 3, ..., .. a \neq 0, ...(4,7)$$

دا پورته د توان قوانين د ټولګڼيز جګ(اکسپوننت) لپاره بی بنديزونو يوائې د نه ورکيدونکو رييل بنسټونو يانې د $a \neq 0$ او $b \neq 0$ لپاره باور ي دي . په (4,5) کې بيا بنديز $n \geq m$ اړيين نه دی.

د توان قوانين کيدی شي په بڼه بدلونکو افادو يا وييڼو وکارول- يا استعمال شي.

بيلګه 4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2} = (4abx^{-2}y)^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

بيلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3} = \frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

بيلګه 4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}} =$$

$$= \frac{a^5(3-a) + a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}} =$$

$$= \frac{3a^5 - a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - 2a^5 - a^3}{a^{m+1}} = \frac{a^3-1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوتنځ زياتون او کمون کې بايد پام وي، چې يوازې د برابر پوتنځ ګڼونه يو له بل سره زياتيدى او يو له بل کميدى شي٠

بيلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بيلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بيا ګوته نيسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخښې کې دې توپير وشي٠ پوتنځ له مثبت - يا زياتونمخنخښې سره تل مثبت يا زياتيز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترڅ کې، چې پوتنځ د منفي - يا کميز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زياتيز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - يا کمون ارزښت لري٠

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ..., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

۴ ۰ ۲ – ريښه او توان له ريشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پيژند ۴ ۰ ۲

د يوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ريښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره لیکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, ...(4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0 ....(4,9)$$

دلته a رادیکاند Radikand ، یا ګڼې، چې رېښه (جذر) يې نیولکیږي(موږ دا

رېښه نیووني یا رېښه ویستونی بولو) او n درېښې جګ(اکسپوننت) او b د

رېښې ارزښت یا رېښه ارزښت بلل کیږي۰

باید پردې ټینګار وشي، چې رېښه یواځې د نامنفی رادیکاند یا رېښه ویستوني (رېښه نیوني) $a \geq 0$ راوستل کیږي یا نیول کیږي او پخپله په لاندې توګه یو نامنفي - یا ناکمیز ارزښت لري یانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کوني لپاره لاندې یادونې شوي دي:

۱ – د جوړه ... n = 2,4,6, لپاره د a<0 سره رېښه b په رېیلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي یا ناکمیز یانې زیاتیز ګڼ دی۰

۲ – د جوړه او مثبت - یا زیاتیز برابرون $b^n = a$

په ختّه په رېښتوني دوه رېیل اوبیوني یاحلونه لري د بېلګي په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ياني $n = 2$ او $a = 4$ اوبيوني

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي۰ د دې لپاره، چې د راديکاند د شميرلو کاروني يواځنۍ سرته ورسولی شو، بايد د يوې اوبيونې لپاره پريکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . $n= 1 , 3 , 5$ او $a\geq 0$ لپاره

$$b^n = a$$

تل يواځني زياتيز(مثبت) اوبی يا حل لري ياني $b\geq 0$

٤ – د ناجوړه n او کيمز يا منفي a لپاره $b^n = a$

تل يواځني يو منفی اوبی يا حل لري۰ ياني $b < 0$ د بيلګي په توګه دا $b^3= -8$ يواځې

اوبی $b = -2$ لري.

په هر صورت بايد د جوړه...$n=2,4,6$ ګڼونو لپاره $a\geq 0,b\geq 0$ وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به يا ريښه شته نه وي او يا به يواځنی اوبی نه لري، ياني څو اوبی به شته وي

د ناجوړه يا طاقو, $n = 1,3,5,\ldots$ لپاره کيدی شي، چې له دواړو غوښتنو تير شو۰ دلته به يواځې تاوان يا زيان دا وي، چې د تولو ممکن حالتونو لپاره به بيل بيل د ريښې د قوانينو غوره کولو ته اړ کيږو۰ له بلې خوا به ريښی د قوانينو ترتيبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ايښول شوي بنديزونه nقوانينو لپاره ستونځمن وي۰ له دې امله د ناجوړه ريښو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننت غوره کوو او د يواځني يو اوبی لپاره 2- د 8- = b^3 او نه $-2=\sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2=-\sqrt[3]{8}$ ليکو٠ په دې اړوند او د يادو شوو نيونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2}=a,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,10)$$

ځلوری ريښه يا مربع ريښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقيقي اعدادو يا - ګڼونو a لپاره تعريف شوي٠ د نامثبت يا نازياتيز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بيا د (4,10) اوبی منفي يا متيز وي، کوم، چې نيونه $b \geq 0$ نفې کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د (10 , 4) بڼول شويو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي يا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2, \sqrt{4}=\sqrt{(-2)^2}=-2$$

ياني د 2- = 2 سره٠

د (10 , 4) ټيک داسې ليکل کيدی شي:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\{a, a\geq 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,11)$$

$$=\{-a \quad , a\leq 0 \qquad\qquad (4,11)$$

د ريښې يا جذر له پيژند (9 , 4) , (8 , 4) سره سم کيدی شي، چې لاندې باوري د ريښې قوانين وليکل شي د....n = 1,2,3 او $a , b \geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,12)$$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}, b>0\ldots\ldots(4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a}=\sqrt[n.m]{a^{n+m}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته د (4,15),(414),(413,),(4.12) ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه تړې ناسمه پوهیدنه نه رامخ ته کوي ۰ دلته پیژندل کیږي، چې د ريښې قوانين د پوتنځقوانينو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي۰ په رښتيا چې دا د پوتنځقوانينو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ريشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعریف شي یا يې لاندې پيژند ورکړ شي۰

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m ....(4,16)$$

د... $a \geq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1 , 2 , 3\ 4 \ldots$ لپاره

د بیلګې په توګه (١٦ ، ٤) په لاندې ډول لیکل کیږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړیکې (4,16) کیدی شي منفي ...,m = -1,-2,-3 ته هم پراخه شي، چیرته، چې (4,17) په ټینګه - یا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0....................(4,17)$$

بې له بنديزونو د خوښې ځګو n اوm لپاره د پوتنځقوانين (2 ,4) تر (4,6) باور لري، خو يواځې هلته، چې نه ورکیدونو بنسټونو يانې a>0, b>0 نيونه شوې وي۰

د ريښې شميرلو لپاره باید اساساَ د(4,16) له مخې ريشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتیا لرو، چې د پوتنځ او ريښې سره شميرلو د قوانينو استعمال نيوني تل و ازمايلی شو۰ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفيتوب کمونوالی يا نامنفيوالی یا مثبتتوب(مثبتوالی يا زياتونوالی) پريږدو، چې لاندې ناسم پاي کيدډول وښايو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{-a}=(-a)^{1/2}=(-a)^{2/4}=\sqrt[4]{(-a)^2}=\sqrt[4]{a^2}=a^{2/4}=a^{1/2}=\sqrt{a}$$

برابرون یوازې د دې ساده حالت $a=0$ لپاره شته دی یا باور لري، د $|a|=0$ یا $a\neq 0$ لپاره $-a$ او یا a منفي دي دا په دې مانا، چې a یا $-a$ پیژند نه لري یا تعریف نه دی۰

د توان قوانین د توان سره شمیرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بیلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بیلګو کې دا تراوسه د شمیر بنسټیز قوانین ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کیدی شي۰ شمیرنه یې لږ وخت نیسي، که غواړۍ پخپله یې یو ځل وشمیری۰

بیلګه ٤ ۰ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}=\{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=(125)^{\frac{1}{6}}=(5^3)^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}=2,2361$$

بیلګه ٤ ۰ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}}:\frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}}=\{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\}:\{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\}=$$

$$=a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})}=a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}}=\frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بیلګه ٤ ۰ ٨

$$8.\sqrt[3]{343}-4.\sqrt[3]{125}+5\sqrt[3]{8}-5\sqrt[3]{729}$$

$$=8.\sqrt[3]{7^3}-4\sqrt[3]{5^3}+5.\sqrt[3]{2^3}-5.\sqrt[3]{3^6}=8.7-4.5+5.2-5.9=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ٤ . ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بیلګه ٤ . ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a|\geq|b|$ لپاره

د مختلفو شمیرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې رېښې له منځه یوسو (د ماتلاندې ریشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې یوه رېښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور یا ځلوونې په څیر رامنځ ته شي، نو دا د وظیفې لپاره یوازې اړیین ده چې $m<n\ (m,n>0)$ او $m,n\in Z$ په پام کې راوړو

کارونه یا عملیه په لاندې ډول اجرا کیږي$(N^*|=0\ ,\ a>0)$

$$Z\big/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},..........(4,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ٤ ۰ ۱۱

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورې- یا مربع رېښې زیاتون یا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بینوم فرمول استعمال سره له $a>0$ او $b>0$،چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},...(4,19)$$

بېلګه ٤ ۰ ۱۲

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بېلګه ٤ ۰ ۱۳

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۴ . ۳ توان(پوتېنخ) د حقیقي – یا رییل جګ (اکسپوننت) سره

دلته دا په ګوته کوو یا دې دا ویل شوي وي، چې د توان ټول قوانین له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقیقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بندېزه ټیک د مثبت بنسټ لپاره. یعنې a,b>0 ، برسیره پردې دې باید توان $a^{\alpha}; a>0$ د ناریښتوني یا ایراسنل عدد α لپاره تعریف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که α یو ایراشنل – یا ریښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انتروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\propto = \{a_{n;}a'_n\}$. دلته $a_{n;}a'_n$ هوښیار یا راشنل اعداد دي.
بیا نو

$$\beta = \{a^{a_n}; a^{a'_n}\} \qquad (4,20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غږي یې (۴،۲) لاندې تعریف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپیر، چې

$$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$$
$$2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$$
$$2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$$
$$2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415}$$
$$2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143}$$
$$\vdots$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $$\sqrt[10000]{2^{1412 < 2^{\sqrt{2}} < \sqrt[10000]{2^{14143}}}}$$

٤ ، ٣ تولګه : د a>0, b>0 ریيل او $m,n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n \neq 0)$ ییلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته موضوع تر دې ځایه بسیا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړیین وو، هغه به بیا په ګډه ورزیاتوو

۴ . ۵ . تمرینونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفریق یا زیاتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څیر یې ولیکئ

a) $(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a)\cdot(a-b)\cdot(a-b)$ d) $-(a^0 b)\cdot(a^0 b)\cdot(a^0 b)\cdot(a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b-6ab^2-15a^2b+6ab^2-7a^2b$

b) $(3a+2b)x^4-x^4(2b-3a)+x^4(3a+2b)$

c) $4(a-b)^2+2(b-a)^2-3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3-3(1-a)^3-15(a-1)^3+4(1-a)^3+3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1}\cdot 6x^{n+7}\cdot 9b^{x+1}}{3x^n\cdot 2b^{x+1}\cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1}\cdot b^{x+3}\cdot a^{3x-1}\cdot b^{x+3}}{a^{x-2}\cdot b^{3-x}\cdot a^x\cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1}\cdot a^{n+1}\cdot a^n}{a^0\cdot a^n\cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x}\cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x}\cdot b^{2n-x}}\cdot\frac{x^{3n+2}\cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3}\cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}}:\frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3\cdot x^{n+1}}{36c^3\cdot y^2\cdot z^{n-3}}:\frac{70a^3b^2\cdot x^{n+2}}{54c^2y^4\cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}}:\frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3\cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3\cdot 30x^n(a+1)^2}:\frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زياتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاريتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشميرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګڼ يا جګعدد سره، د کميزو يا منفي اکسپوننتونو سره شميرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\frac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\frac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\frac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\frac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\frac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\frac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\frac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\frac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \frac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\frac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرليطو لاندې کيدی شي لاندې عددونه د يوه مربع – يا څلوری رېښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ - د رېښو جمعه او تفريق(زياتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\frac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

b) $\frac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\frac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

d) $\frac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\frac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\frac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\frac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د رېښو يا جذرونو ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}:\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$ c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او ريښي ريښه ويستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$ d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$ c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}}:\frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج ریښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۰ ۵ لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترخیړنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوې، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوي وي څیړو ۰

۱ ۰ ۵ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم تر څیړنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څیړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وي ۰د لوګاریتم $c = \log_b a$ پیژند لپاره د یوه زیاتیز ـ یا مثبت عدد a یوه زیاتیز ـ یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه لپاره c

$$b^c = a\ ; a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی٠ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي٠ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي٠ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, ...(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو٠ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x = 16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: د $2 = \log_x 36$ x²=36 سره یو ارزښت لري، نو لرو x=6

ب : د $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو $x = 2$

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : د $x = \log_5 125$ سره، یوارزښت لري، $5^x = 125 = 5^3$

نو $x = 3$

ب: د $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره يو ارزښت لري، نو لرو $x = 4$

۳ ۰ ۱ ٤ الف د $5 = \log_3 x$ $3^5 = x$ سره يو ارزښت لري، نو $x=243$

ب : د $-5 = \log_2 x$ $2^{-5} = x$ سره يو ارزښت لري، نو لرو $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2 = \log_x(-6)$ تعريف نه دی يا پيژند نه لري۰

ب : $x = \log_{-5} 125$ پيژند نه لري يا تعريف نه دی

پ: $\log_1 x$ پيژند يا تعريف نه دی

له (5,1) او(5,2) څخه لاس ته راځي

$$a = b^{\log a}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,3)$$

$$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,4)$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکیږي

$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ...(5,5)$$

د lga لوګاریم ته لسیز لوګاریتم وايي او lna ته پیداینتي یا طبیعي لوګاریتم وايي(e وروسته ښيږو) زیات وخت د لشمیز لوګاریتم لپره داسې هم لیکو:

$$c= \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog ځو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ باید وکارول شي۰

۵ ۰ ۲ د لوګاریتم قوانین

د لوګاریتم د پیژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کیدی شي د پوتنځ د قوانینو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاریتم قوانین رابیل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاریتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زیاتیز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ...(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, ...(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1, 2, ..., ...(5,10$$

د پوتنځ قوانینو له مخې د دې فرمولونو راوستل یو د وړاندیز وړ د لوګاریتم ژوري څیړنې لپاره تمیرن ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b(x.y)=\log_b x+\log_b y,..........................(5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) څخه لرو

$$c_1=\log \ \ x, c_2=\log_b y, c=\log_b(x+y),.................(5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1}=x, b^{c_2}=y, b^c=x.y,..............................(5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c=x.y=b^{c_1}.b^{c_2}=b,\Rightarrow c=c_1+c_2,.....................(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې څخه د لوګاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه ښټ۰

بیلګه ۵ ۰ ۲

$$\log\frac{2\sqrt{a+b}\,a^3b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$

$$=\log 2+\frac{1}{2}\log(a+b)+3\log a+2\log b-\frac{1}{3}\log c-2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ ۰ ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کینې اړخ کې لوګاریتم ځاي لري، چې د ټولوa,b,c تعریف دئ او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دې$a+b>0$ (د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې$c > 0$ (د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b \neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b \neq 0, a > 0$ (د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)
د کینې اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د $a = 2 . b = -1 , c = 1$ لپاره تعریف دئ۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا څیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چېLog بې ځایه دئ ۰ د دې لپاره، چې د څیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b \neq 0$ پر ځاي په ټینګه یا کره$b>0$, وغوښتل شي ۰

په بیلګه۵ ۰ ۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

$$a+b>0, \quad a-b>0$$

نو بیا$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)> 0$ او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، bلپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شي$a > b$, $a > - b$ له امله هم و$a >|b|$ ته راغونډ شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته دې هم ګوته نیولې وي، چې لوګاریتم په یوه بنسټ b یوه بل لوګاریتم یوه په خوښه بل بنسټd ته د شمیراوړون د شمیرنې اړول کیدی شي $(b>0, b\neq 1, d>0, d\neq 1, a>0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a=b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاریتم نیول و بنسټd ته لرو:

د $\log_d a=\log_d b^{\log_b a}=(\log_b a)(\log_d b),...........(5,15)$

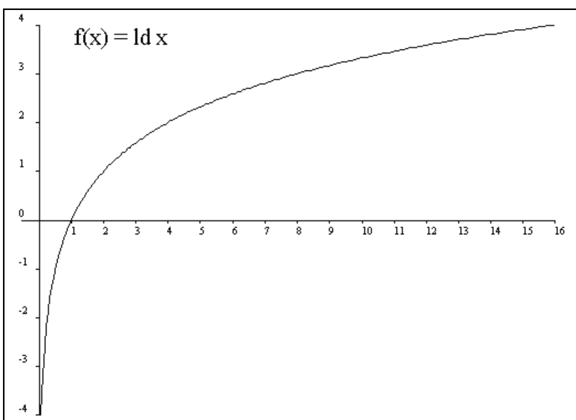
لسیز لوګاریتم اړول په پیداینتي یا طبیعي لوګاریتم او په څټ لپاره لیکو b=10, d = e=
همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); ………………….(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$\lg a=(\lg e)(\ln a),...............................(5,16)$

$\ln a(\ln 10)(\lg a)=2{,}30429\lg a,...........(5,17)$



د لوګاریتم فنکشن یا بلواک او دیاګرام یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د يوه ځل لوګاريتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاريتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ريښي لوګاريتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاريتم يو په بل بدليدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما يا لسميزمات نخښۀ وروسته بينارځايونه ó او لسميزسيستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

	binär	dezimal
2^{-1}	0,1	0,5
2^{-2}	0,01	0,25
2^{-3}	0,001	0,125
2^{-4}	0,0001	0,062.5
2^{-5}	0,0000.1	0,031.25
2^{-6}	0,0000.01	0,015.625
2^{-7}	0,0000.001	0,007.812.5
2^{-8}	0,0000.0001	0,003.906.25
2^{-9}	0,0000.0000.1	0,001.953.125

۵ ۰ ۳ ټولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېړ بلواک دی

$$x = \log_b n \quad \Leftrightarrow \quad b^x = n$$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log \frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} \frac{1}{n} \log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259 \lg a$$

۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0{,}04$ d) $10^x = 0{,}0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم
قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a + n\lg(a+b) + n\lg(a-b)$

c) $\lg a - \frac{1}{2}\lg b + \frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

3.1. a) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

b) $x = 2 \cdot 10^{2\lg 2}$

c) $x = 3 \cdot 10^{-2\lg 3}$

d) $x = \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$

b) $x = \sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

c) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

d) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x = \ln\frac{7{,}63}{\sqrt{e^3}}$

b) $x = \ln\frac{0{,}23}{2e^2}$

c) $x = \left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

d) $x = \left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ګونومتري (کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چی د کونجکچ چټکتیاته (ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په ځیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چی د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ٠ زه به کوښښ وکړم چی ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په ځیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

٦ ٠ ١ بنسټیزه هندسه

٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی(خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا ټیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره له دې هم هڅه کیږي چې ټکی او کرښه لیدوړ وګرځول شي لکه څنګه چې په ۴ . ۱ - امه برخه کی پیښ شوي. دلته کرښي په g ښوول شوي او غشی یی ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پرېښول کیږي یعني نه انځوریږي، که دا مو و ناریښتیاو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کیدی شي د دوه کرښو غوڅځاي په څیر ونیوله شي) څیرې په غور وګورئ

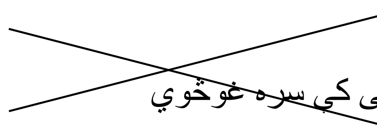
وړانګه ray A

کرښه g

(stright line

بند کرښه یا ټوټه کرښه Line segment

A ———— B



دوه کرښې په ټکی کې سره غوڅوي

د بیلګي په توګه لاندې ویناوې باور یا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې یوه کرښه ټاکل کیږي(پورته څیره وګورئ)، چې دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي یا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرګي او په یوه هواره کی پرتی کرښی یو بل ټیك په یوه ټکي کی سره غوڅوي (پورته څیرو کې کتل کیږي)

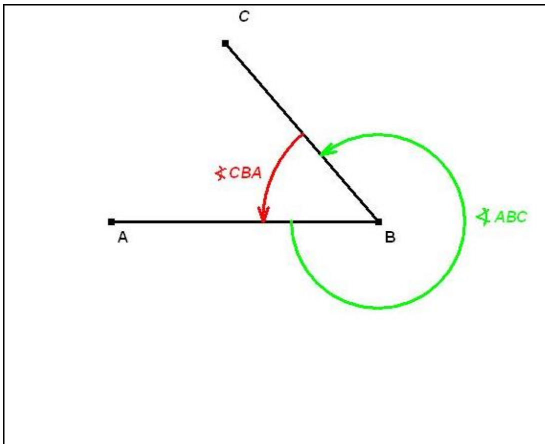
یوه وړانګه s_1 له یوې لور په یوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او یوه پایکرښه له دوه ټکو A او B بنده یا راګیر کرښه ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

٦ . ١ . ٢ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه s_1 د خپل پیلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي s_2 (څیره ۴ . ۲الف) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، s_1 او s_2 پښې او په همدې ډول د S کونج α (الفا) ککره بلل کیږي.

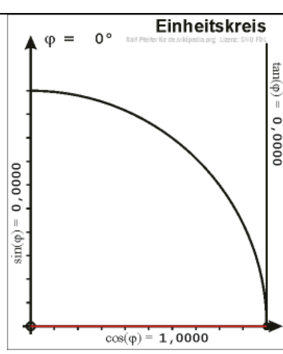


که څرخون د ساعت نخښي په څټ یا مخامخ وې نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسې کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یی منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کې سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

کیدی شي چی یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a^\circ \qquad (6.1)$$



په داسې حال کی چی ولاړکونج، کوم چی یو په بل ولاړې کرښې $g_1 \wedge g_2$ (او ته دې پام وي) یی جوړوي، له 90° سره مساوي وښايو(لاندې څیره ، که نوربڅیرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چی کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چې کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b \qquad (6.2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته یونګردئ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردئ لینده په وړانګه(شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بي نومه ګڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګڼلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردئ) r = 1 (کی انځوروړ دی، چیرته چې دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي (څیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د 360° کونج د یوونګردئ چاپیری) محیط(په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass (درجکچ (او)ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a° = \frac{180°}{\pi} b = 57,296° b, b = \frac{\pi}{180°} a° = 0,017453 a, ...(4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦۰ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که ځیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي۰.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه ښه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقي او ثانیي نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاږی، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي۰

بیلګه .٦. ۱ :

کونج "a = 47°12'36 دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دځیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقي او ثانیي دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12’=720“

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس په ټولیزه توګه $720'+36'' = 756''$ له دې لاس ته راځی

$1'=(1/3600)°$ (<=)

له دې وروسته په همدې توګه $756.(1/3600)°=0,21°$

له دې لاس ته راځي : $a=47°12'36''=47,21°$

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د(٦ . ٣) پسی باور لري $b=0.017453.47,21=0,826$

دلته ځیرې راځي، خو د دې ځیرو په ځاي به موږ په پورته ځیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي۰

بیلګه ٦ . ٢ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګنیز سیستم(ځاي ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخی لرو

$a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701°$ د $0,701°$ اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

$0,701° = 0,701.60' = 42,06'$, $0,06' = 0,06.60=3,6''$

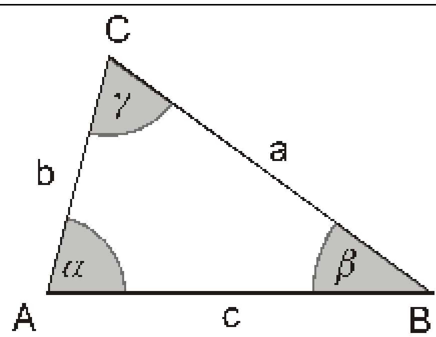
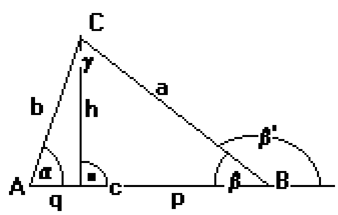
پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6''$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته داسی لوستل کیږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقیقي او ۶ ، ۳ ثانیي

۳ . ۱ . ٦ دریګوډی

یادونه: موږ دلته بیا د نومونو(نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیږو. هغه هواره چی له کرښو راګیر وي دلته له درې کرښو یا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه یا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي یا۰۰۰ ګوټې او یا ۰۰۰ګوډي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبي نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته یو کونج چي له دباندې ورته کتل کیږي او د یوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاریږي. موږ په ورځنی یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی ګوډ دی. که یو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وییلی. که څوك په یوه ګوټه کی ناست وي نو وایي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا ګوډ نه وایي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .

 	په ټولیزه توګه په یوه سطحه یا هواره کی له پرتو کرښو g1 , g2 , g2 څخه یو مثلث یا دریګوډی جوړیږي، چی ګوډونه یی A . B . C ، اړخونه یی a .b .c او کونجونه یی α,β,γ دي (د مثلث دننه کونجونه یا زا ویې او دباندې ګوډونه دي، چې موږ یط په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ څیرې دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کیږي

- په دریګوډي کې د کونجونو زیاتون $180°$ درجې دی یا π دی

- یو دباندنی کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زیاتون سره مساوي ده، له دې امله د یوه دریګوډي د دباندنیو کوجونو زیاتون $360°$ یا 2π دی۰

- د یوه دریګوډي د اړخونو نیمي په یوه ټکي کې یو بل سره پري کوي، چې دا په همدې وخت کې د دریګوډي » دروندټکی یا دثقل مرکز « دی. اړخنیمي یو بل په تناسب د ۱ : ۲ پرې کوي یا په پښتو:

د اړخونو ځاننیونه یې۱ :۲ ده) په ځیره کې وګورئ) د یوه دریګوډي منځولاړې

یو بل په یوه داسې ټکي کې سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپیر ګردي) هغه ګردئ یا دایره چې دریګوډی په خپل دننه کې نیسي یا بهتره، د دریګوډي خوندیګردی(منځټکی دئ)۰

د یوه دریګوډی کونجنیمي یو بل په یوه ټکي کې سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دننه ګردئ) ګردئ چې د دریګوډي

په دننه کې ده یا ګردئ یا دایره کې خوندي دریګوډی (منځټکی دئ) لاندې کې بې ځیره شته) د یوه دریګوډي جګې یا د ارتفاع کرښې په یوه ټکی کې سره غوڅوي.) ځیرې ټولې لاندې کتل کیږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې ځیرې اړه لري، چې تکرار راځي، خو پروا نه لري۰

د جګیو غوڅټکی Orthocenter **<u>Höhenschnittpunkt</u>** (*H*),

(c) ketabton.com: The Digital Library

(*U*) **Umkreismittelpunkt** circumcenter ·د دباندنى- يا په راتاو گردى منځټكى

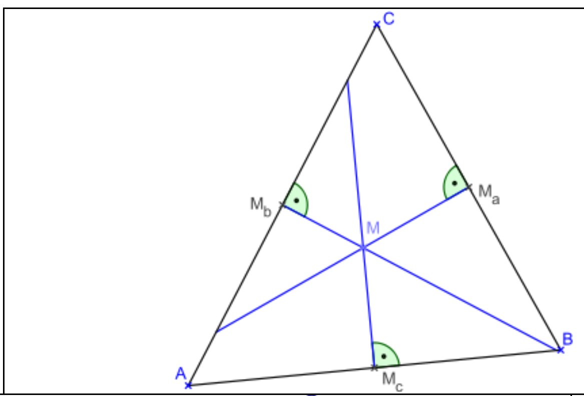
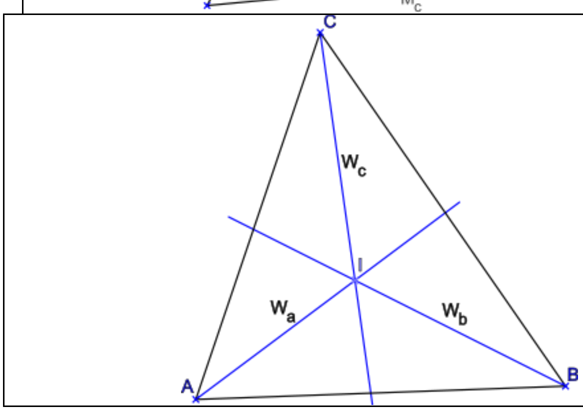
Seitensymmetralen), seid symetry ·د اړخسيومتريو غوښتكى

(*I*) **Inkreismittelpunkt** den inscribed circle, incircle ·د دننه گردى منځټكى

r Winkelsymmetralen · د كونجسيومتري

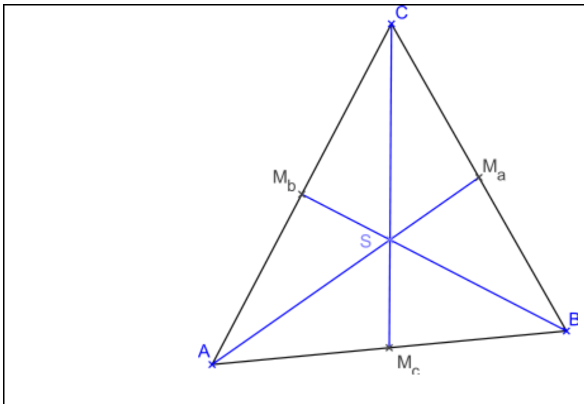
r (*S*) **Schwerpunkt** centroid · دروندټكى

Seitenhalbierenden) median ·اړخنيمى

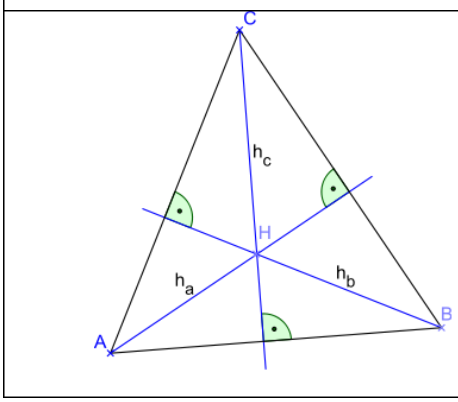
	مخامخ خيره كې مثلث ياد دريګوډي په منځ عمود يا - ولاړې كرښې ښايي
	دامخامخ مثلث هغه كرښې ښايي، چې كونج نيموي او موږ يې كونجنيمى (ناصف الزاويه) بولو (په پورته خيره په نيم اړخ ولاړې كرښې دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

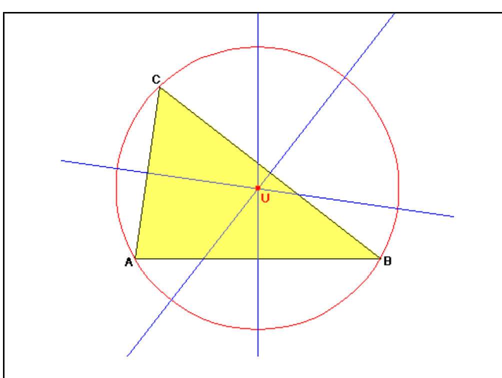
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له کونج څخه اړخ نیموي٠ موږ یې اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو٠

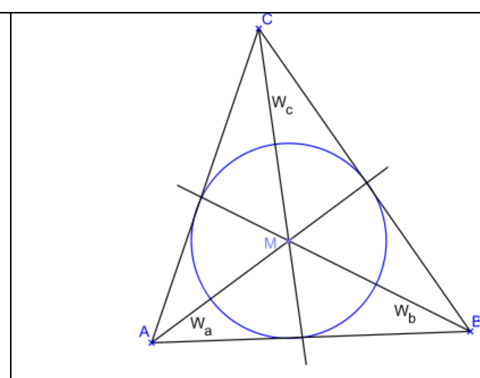


لاندې ځره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له کونج په اړخ ولاړې دي٠ دا د اړخ جګوالی په ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللي دي٠



په پورته ځیره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی یې د خوندې ګردی یا دننه ګردی منځټکی هم دی



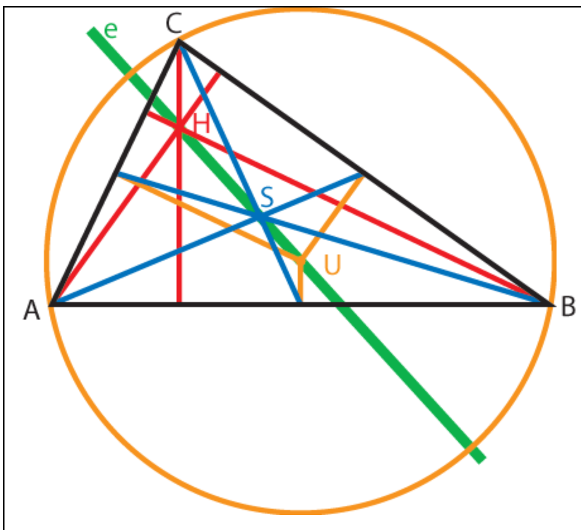


(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کینه ځیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوځټکی یې د په راتاو ګردی یا چاپېرګردی منځټکی دی.

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه ټکی کې سره غوځوي.

که د یوې درېګوډی د منځولاړو په غوځټکي یوه ګردی داسې ووهل شي، چې د ګردی کره درېګوډئ له یوه ګوډ ځخه تیره شي، نو دا ګردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو ځخه هم تیریږي. که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځټکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردی په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځټکی له درېګوډی دباندې پروت دی.



که درېګوډی ABC وي ، S دروندټکی، U د چاپیریالګردی منځپکی ، او H د جګیو غوځپکی وي، نو کرښه په لاندې ځاننیونه یا تناسب پراته دي :دا په لاندې ځیره کې کتل کیږي .

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

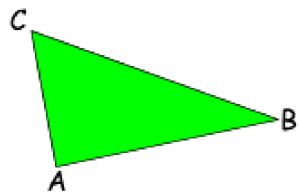
۶ . ۱ . ۴ برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهت Congruence and Similarity

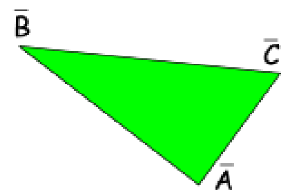
دوه دریګوډي ABC او A'B'C' یو بل سره کونګروانیڅ یا برابر پټووني دي یاني براربارزښته دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ABC \equiv A'B'C'$$

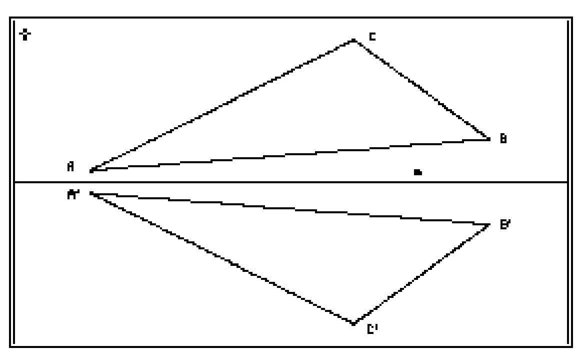
(4.4)   که وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي(وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هندارونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې ځیر)





که دریګوډي سره کونګروا‌ینځ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي توټو (اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

په ځنډ یی هم باور لري   S   اړخ او W کونج په ګوته کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

جملې: دریکوډي ټیك هلته کونګروانیخ دي چی یو بل سره مساوي شي په

۱ - دريې اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - یوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي WSW,

د دې جملو په څټ هم باور لري، دا په دې مانا چی که دریګوډي په کونګروانیخ جملو کی ورکړشوو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونګروانیځ دي. د کونګروانیځ جملو په بنسټ کیدی شي په ځانګړي توکه دریګوډیجوړښت سرته ورسول شي، کوم چی د کونګروانیخ جملو کارونی په ښیر لیدل کیدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چی په همغو یا اړوند دريې کونجونو کی یو بل سره برابر وي او د همغو یا اړوند اړخونو تر منځ یی تناسب یا ځاننیونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګروانیخ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دریګوډي ټیك هلته یو بل ته ورته دي که یو دبل سره برابر وي، په :

۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نیونی یا تناسب کی

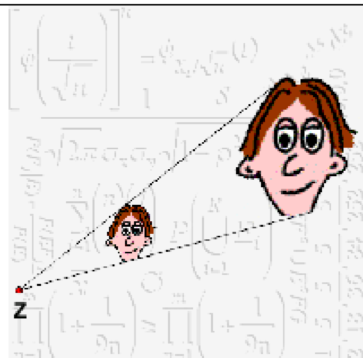
۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب یا ځاننیونه کی

۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

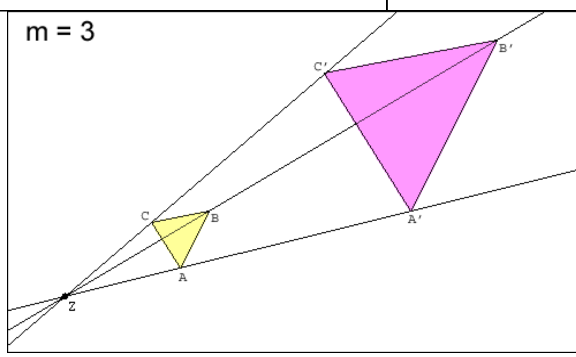
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مخامخ ښيرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په یوه کرښه وتړی او د یوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښي سره غبګه کرښه وباسی، نو دوه ورته درېګودي لاس ته راځي

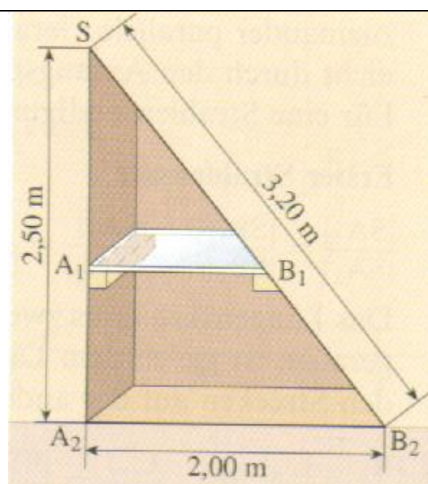


په لاندې ښيره کې کښل شوي دريګودي ورته دي، دا په دې مانا چي باور لري:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



د ورته جملو سره خپلواني جملې د وړانګو جملې دي:



په دې پورته ښيره کې درېګودي يو بل ته ورته دي٠

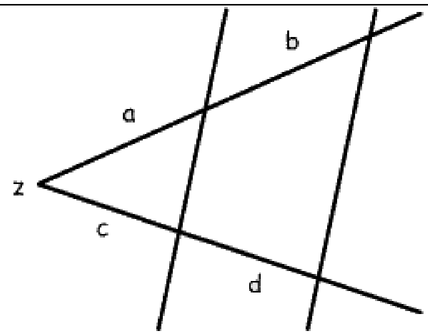
(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>

د وړانګې لومړۍ جمله:

دوه له یوه ټکې وتلې وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې يې لاندې اړیکې سره لري.

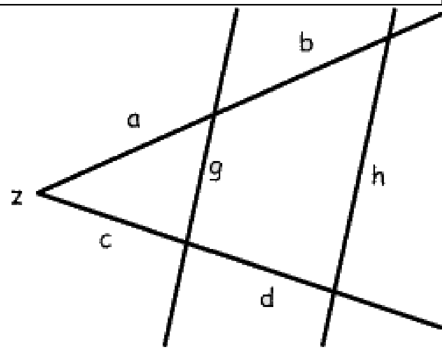
$$\frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>

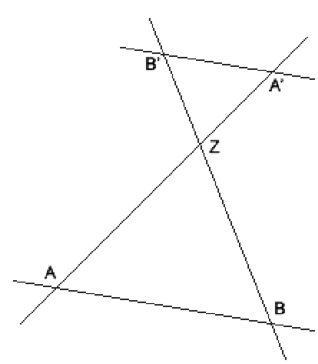
د وړانګې دویمه جمله:

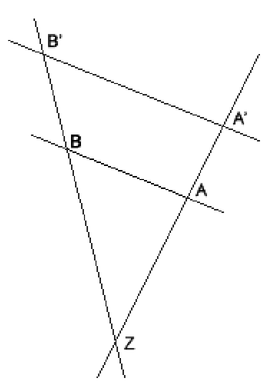
که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکې لري، دا ته والي له جملو ده. ټکی چې څنګهدي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو

$$\frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)} \qquad \frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)}$$

</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

یا دالاندې، چې هرڅه يې روښانه دي





(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

(دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوې څیره دې ګران لوستونکي وکاږي)

که درې په یوه ټکي کی پریکیدونکی کرښي g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی(کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګي په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څیرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2 . 1

دا په دې ماناچی په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیوی سره پرتی دي:

A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2 . 2

دا په دې مانا چی: په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چی په وړانګه پرتی دي.

A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3 - ۳

دا په دې مانا چی: په غبرګو پرتی کرښي په همغه برخوکی یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څیر رامنځ ته شي یا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c اوهمداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوډی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څیړني لاندې نیسو

1 - $a > c$

موږ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونجالف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردسلینده کاږو د a

په کچه چې د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوڅوي)

څیره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

2 - $a < c$

دلته درې امکاناته شته دی(د دې درې امکاناتو څیره وکاږی)

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه هغوټکو کي پرې کوي،
په کومو کی چی اوبی یواځنی نه دی٠

۲ . ۲ : ګردسلینده د α ازاده پښه لمسوي٠

۲ . ۳ : ګردسلینده د α اندازه پښه نه غوڅوي .

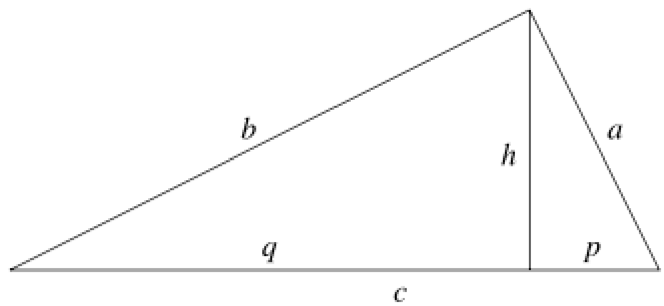
۳) $a = c$

ګردسلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کي پرې
کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$
نیونه په دریم کونګرواینځ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ ۰ ۵ .ولاړکونجیز دریګوډی مثلث قایم الزاویه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلفو دریګوډیو څخه موږ په لاندې برخه کی ولاړ کونجیز دریګوډی ترڅیړنی لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ هوپوتینوزې) Hypotinuse(بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت (Katheten)بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریګوډي ته روځنی یا ورسره بلدې یا مروجی په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له څیرې ۴ . ۱۳ څخه واخلئ



په ولاړکونجیز دریګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړیکی باور لري چی دلته یی بی له اوبی)ښوونی(راوړو:

یادونه : په ولاړګوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتونې کونج ته مخامخ مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نوموونو یانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پیتاګوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتینوزې مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساوي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکاتیتو(د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع)) جمله:

په ولاړکونجيز دریګوډي کی د کاتیت مربع هواریزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددې کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

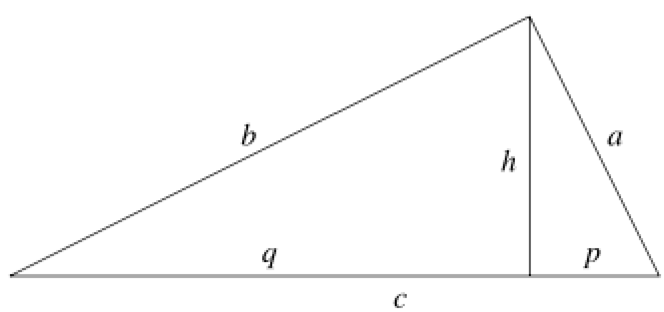
$$a^2 = p.c \; , \; b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتیزې په جګي مربع هواریزمساوي ده د هیپوتینوزې (لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q \, . \, p \qquad (6.7)$$

یا په لاندې کې لنډ بیا ورکړ شوي



لنډ: (ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پیتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اویکلید د کاتیتونو(پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

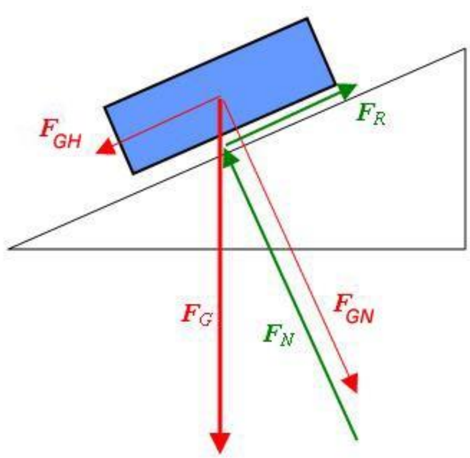
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اویکلید جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بیلګه ۴ . ۴ : (ځیره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکچ فکر وکړي۰ دا یوه فزیکي دنده هم ده(ځېره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د یوه بدن د وزن G تجزیه څرګندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزیك له مخی هغه ټکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي) KSP =)چی په یوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په یوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نیغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه FN)تجزیه کیږي. د ښوولو ده چی، دریګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دریګوډي سره ورته دی

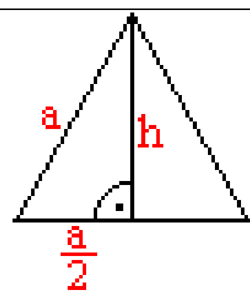
یادونه: په لیکنه کې زور یا توان د لاندې ځېرې سره داسې بدلو:شین تنیا د مستطیل شکل G دی $F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$ ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کیڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج α ، په ګوډ B کونج β	

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې G||AC ځغلي، نو FH او G یو کونج α جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه دریګوډي په دې برسیره په ولاړکونج کې یو بل ته ورته دي۰

یادونه : داسې بیلګې، چې څیره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې څیرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي۰ زما زړه نه شي، چې له لیکلو یې تیر شم۰

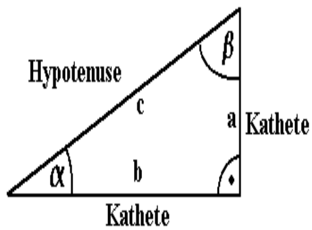
بیلګه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کې دې (لاندې څیره) جګې و شمیرل شي .د ٦ . ۴ (له مخې لرو(جګې په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نیمی هم دی، دا په دې درېګوډي کې وکاری)

	$h^2 = a^2 - (a/2)^2$ $h^2 = a^2 - a^2/4$ $h^2 = (3/4)a^2$ $h = (\sqrt{3}/2)a$

٦ . ۲ په ولاړکونجیز دریګوډي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چی یوه ولاړکونجیز دریګوډي کي جوړیږي(لاندې څیره). که د کونج α مخامخ اړخ یا -کاتیت a gegkathete د مخامخ اړخ په څیر وښایو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دریګوډي کی لاندې اړخځانیوني منځ ته راځي یا جوړیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$$

د وړانګو جملو له امله دا اړیکي یا تناسب یواځي د کونج په واك کی دی. که په پام کی ونیول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړیکی لیکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې لیدل کیږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پیداکولو لپاره دوه ګنجدولونه پوره دي یا بسیا کوي. وروسته یا ددې په تعقیب پیژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,10)$$

برسیره پردې د پیتاګوراس د جملی په پام کی نیولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots(6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳.۰٦ په یوونګردی کی د کونج فنکشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یوائي د لیدیدونکو (Konkrete
اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یوائي
یا په ځانګړې توګه د $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (0 < \alpha < 90°)$ لپاره تعریف دي. که د α
خپلواك واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چی
په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی) څیرې
۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو
د یوون ګردي باندې مخ نخښی په واك کی کرښو ته لاربښودوي .د لته ټولی کرښی) د
لته به له کرښو ځموږ مطلب پای کرښی وي(، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون
یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی
کرښي او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون
مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ (د
په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha = \overline{QP}, \cos\alpha = \overline{OP}, \tan\alpha = \overline{AD}, \cot\alpha = \overline{BE}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6,13)$$

د کونج α لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د
کواوردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی(لاندې څیره له کیڼ و ښی لورته کښته دا په
فرمولونوکې کارول شي توري ساده ایښوول کیږي۰ په څیرو کې شنې کرښې د ساین دي
او سرې کرښې کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه
کیږي، چې د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو)، دا
تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریګوډي کی تر
څیرنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج α په لیندہ اندازه کی د
ګردلیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چی په زیات څرخون له 2 څخه
لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو) ۱۳ . ۴ (څخه لاس ته راځي، چی ساین-او
کوساین فنکشنونه، پریود :°360) 2 (periode) تل تکراریدونکی ، بیرته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځيدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پريود(°180) لري .

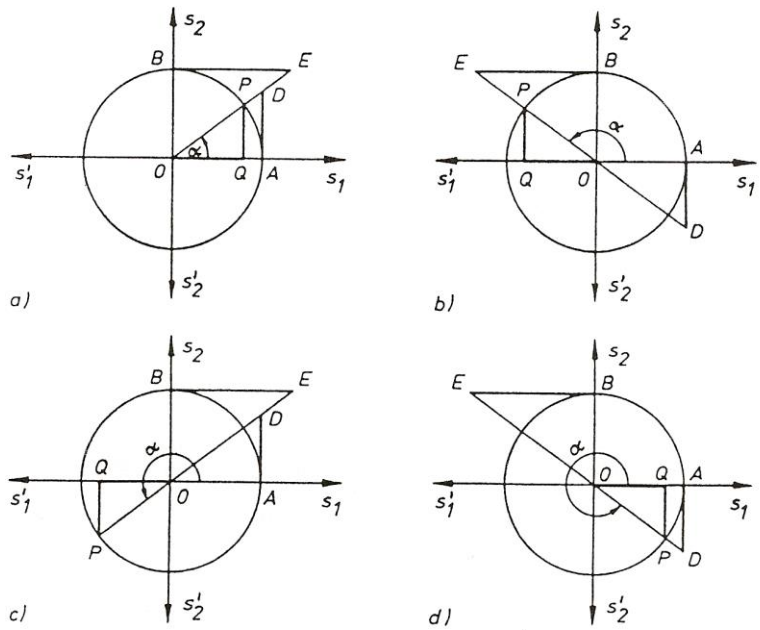


Bild 4.17 شکل

پس لرو

پـه

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha;......................(6.14)$$
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

ټوليزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha;......................(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو ټولګټیونو ....3 , 2, 1,0,1-,2-,3-.. = k لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخښه

	لومړۍ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$	دریمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$	څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
cotx	+	-	+	-

برسیره پر دې لاندې اړیکې باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \quad , \quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos.\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \quad , \quad \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha \qquad (4.16)$$

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \,,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \quad , \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پیداکوو. دا چې α په درجې اندازه ورکړ شوي ده، نو اومشالتریا سویچ [بدون]) دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library

جبشميري اړونه ده، پۀ غوښتل شوي فنکشن کی) په « DEG » سموو او بيا لاندې ورکوني کوو.
په همدې ډول تکمې وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مختخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

1. $\sin \alpha = a$, 2. $\cos \alpha = a$,
3. $\tan \alpha = a$, 4. $\cot \alpha = a$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري $-1 \le a \le 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.
يو «بنستيزوبی يا بنستيز حل» α_0 د هر تمرين د جبشميرني سره په لاندې ډول يا همداسی تکموترتيب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چی α_0 په درجه اندازه يا لينده اندازه اندازه کوو، نو په ورته ډول د سويچبدلون په "DEG" يا "RAD" باندې راولو)

1. [a] [F] [sin] 2. [a] [F] [cos]
3 [a] [F] [tan] 4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په ځت فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بياد α_0 هر بنستيزحل په درجه يا لينده کچ ځرګنديږي.
د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنستيزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33,367013° = -0,58236,$
2. $\alpha_0 = 123,36701° = 2,1531606,$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3. $\alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$
4. $\alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$

د مخ ت ه تيرو په بنسټ لو

1. $\sin \alpha = \sin (180° - \alpha) = \sin (\pi - \alpha),$
2. $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$

او په ورته توگه،، فرعي يا ځنگيز حل يا اوبی،،

1. $\beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$
2. $\beta_0 = -\alpha_0$

لاس ته راشي

د ليديدونكي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چې :

1. $\beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$
2. $\beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$

د α ټول حلونه د (۴ . ۱۵) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

1. und 2. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$

$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$

3. und 4. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$

بيلگه ۴ . ۹ : لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودې شميرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۱۰ : په بیلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لویې دې، که په مایل هواره پروت بدن وزن 700 N وي (دلته N د Newton لپاره دی چې وزن پرې اندازه کیږي) او مائلې هوارې مایلکونج $\beta = 28°$ وی؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\,N \cdot \sin 28°$$
$$= 700\,N \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\,N.$$
$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\,N \cdot \cos 28°$$
$$= 700\,N \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\,N.$$

۴. ٦ دساین- او کوساین جملې

دا دواړه جملې ممکنوي چې په ټولیز یا عمومي دریګوډي کې شمیرنې پلې کړای شو

۱ . د ساین جملهد څیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

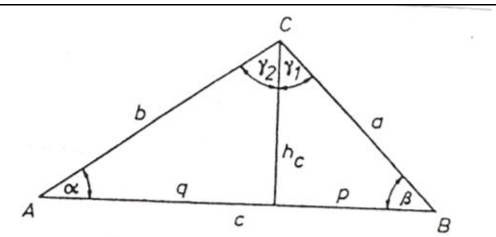


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (4.17)$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز دریګوډی کښل کیږي(پورته او لاندې څیرې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د ښیرې ۴ . ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$h_c^2 = b^2 - q^2$$
$$h_c^2 = a^2 - p^2$$

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q,$$
$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b \cos \alpha,$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$ لرو او همداسې:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \qquad (4.18)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دی .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره ښیره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوې، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسی په ABCدریګوډي کی، $F1 = c, F2 = a$ او $ss = 180° - ss'$ معلوم دي، α

او $R = b$ لټوونکی یا غوښتونکی لويي دي؟

د کوساین جملی (۱۸ . ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosss$$

همداسی یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2 \cos(180° - ss')$$

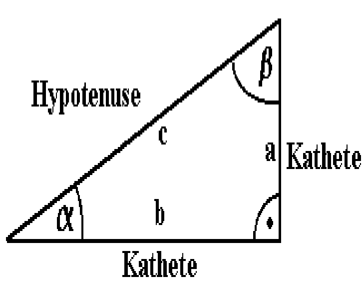
او د ساین له جملی (۱۷ .۶) لاس ته راځي

له کومو چی α تاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو۰

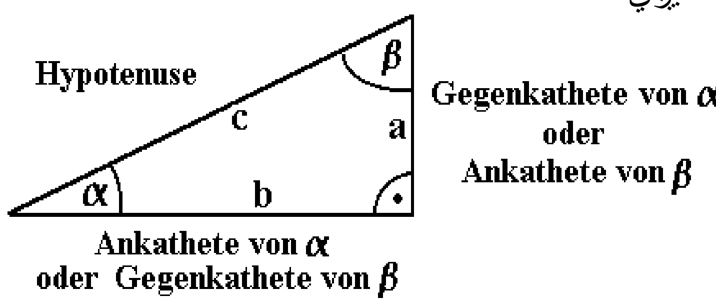
۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو۰

	مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته دربګوډی ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څنګ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي۰



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د دربګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي۰ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي۰ د دربګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیری ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ۰

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

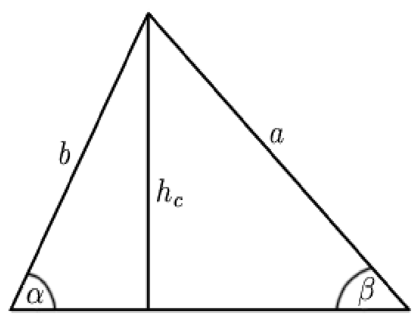
$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په دربګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګروانځجمله په ګوته کوي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : (دا خیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)



$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

په h_c پسې یې اوبی کوو

$$h_c = b \cdot \sin\alpha$$

د برابراینوني له لارې لاس ته راځي

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

که په $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ وویشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیداینتي توګه جګی h_a او یا h_b لاس ته راکوي

د کاروني بیلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$$a = 5,4\,\mathrm{cm}\ ،\ b = 3,8\,\mathrm{cm}\ ،\ \alpha = 73°$$

دا نورې لویې دې په درېګوډي کی پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\mathrm{cm}\cdot\sin 73^\circ}{5{,}4\,\mathrm{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونیوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، یانې

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبې په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي.

او نو ګاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\mathrm{cm}\cdot\sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\mathrm{cm}}$$

دکوساین جمله

په تریګونومتري کې کوساینجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړیکې ښایي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ۰ ۹) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپیتاګوراس جملې له مخې لرو:

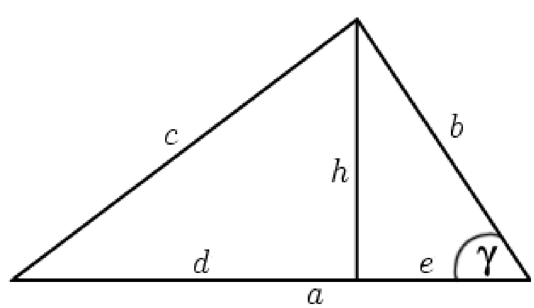
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) یا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیداکولی شو

ښوونه :



د دریګوډي په کیڼ لور د پیتاګوراس قضیه استعمالوو، چې د c^2 لپاره یوه شمیرافاده یا – وییته پیداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلوری یا مربع باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بني اړخ لپاره د پیتاګواراس قضیي استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a - e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

(د بینوم فرمول)

د پیتاګوراس جملې له مخې د کیڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیداشوي شمیرویینې یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b} \left(\frac{ankathet}{Hypotenuse}\right)$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بیلګه:

یو درېګوډیABC ، جې اړخونه یې څرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9\ \text{cm}$ ،

$b = 2{,}8\ \text{cm}$

$c = 3{,}5\ \text{cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\mathrm{cm})^2 + (3{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}8\,\mathrm{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{opp}}$$

Common formularکډ وډ فرمولونه

Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کتمیتوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Sum and difference identitiesزیاتون او کمون کتمتوالی

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

Double-angle identities دوه برابره کونج کي گتمتوالي

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

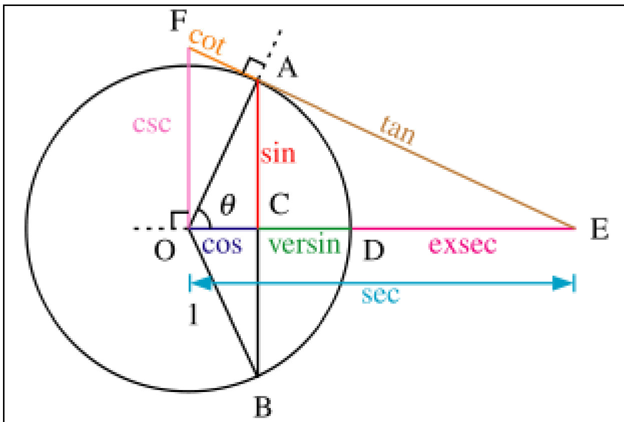
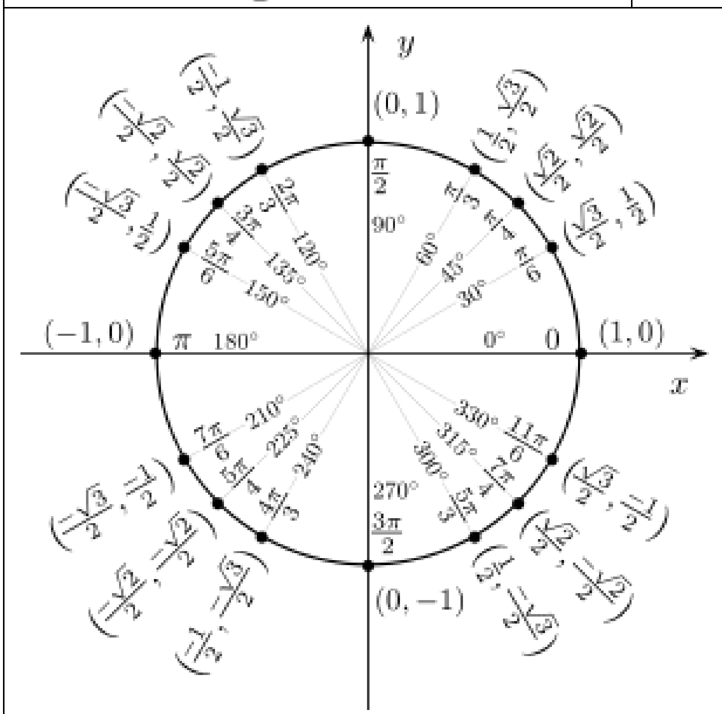
Half-angle identities د نیم کونج گتمتوالی

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د تریګونومتریکي کتمتوالي لیست List of trigonometric identities

	نوره ژوره څیرنه دلته نه کړو، دي ته ګوته نیسو، چې په لاندې څیره کې تریګونومتریکي فنکشنونه روښانه دي
	د یوه کونج θ تول تریګونومتریکي فنکشنونه په O باندې د یوې یونګردی ترم له لارې ورکول کیدی شي (یونګردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښنه شوي) مخامخ: یوونګردی(یووالي یا واحد ګردی) The unit circle

(c) ketabton.com: The Digital Library

Notationلیکنبڼه

دا لاندې لیکنبڼه یا - ډول د ټولو تریګونومتریکي – یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین ، تانجنت ، کوتانجنت ، سیکانت، کوسیکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي$\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

Definitionsپیژند:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راګرځیدنه ، سیومتري او بدلون Periodicity, symmetry, and shifts .

په یوون(یووالي-) ګردۍ یا دایره کې ساده لیدل کیږي:

Periodicity تل بیرته راګرځیدنه

ساین ، کوساین ، سیکانت، کوسیکانت تل بیرته راګرځیدنه 2π ده(پوره ګردۍ) (تکرار دۍ)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبیرته راګرځیدنه π لري(نیمګردۍ یا نیمدایره) :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

سيومتري Symmetry

د تريگونومتريکي فنکشنونو لپاره سيومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x,\ x \to \pi/2 - x$ ،يا $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{array}{lll}
\sin(-x) = -\sin(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), & \sin(\pi - x) = \sin(x) \\
\cos(-x) = \cos(x), & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), & \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\
\tan(-x) = -\tan(x), & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x), & \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\
\cot(-x) = -\cot(x), & \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x), & \cot(\pi - x) = -\cot(x) \\
\sec(-x) = \sec(x), & \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc(x), & \sec(\pi - x) = -\sec(x) \\
\csc(-x) = -\csc(x), & \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec(x), & \csc(\pi - x) = \csc(x)
\end{array}$$

بدلون : د $\pi/2$ او π بدلون دئ

$$\begin{array}{ll}
\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), & \sin(x + \pi) = -\sin(x) \\
\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x), & \cos(x + \pi) = -\cos(x) \\
\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(x), & \tan(x + \pi) = \tan(x) \\
\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(x), & \cot(x + \pi) = \cot(x) \\
\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\csc(x), & \sec(x + \pi) = -\sec(x) \\
\csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sec(x), & \csc(x + \pi) = -\csc(x)
\end{array}$$

د پيتاگوراس كتمتوالى Pythagorean identities

د دې بنسټ د پيتاگوراس قضيه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زیاتوننخښي په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کي

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کیڼ لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کیږدو د پیتاګوراراس یا موفریي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \; = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \; = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

Half-angle formularد نیمکونج فرمول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ريښي لاندې ماتباندې او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پيتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نيمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کيږدو $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$

نو لرو: $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

د ځل و زياتون ته کېمتوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

د زياتون- و- ځل ته کېمتوالی (برابرون) Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کيږدو نو لرو

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم درېګوډي کونجونه وي يا په نورو کليمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیمګردی یا نیمدایره ,$\text{if } x + y + z = \pi = \text{half circle},$ =که

او نو یا $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x . \tan y . \tan z$

$$\text{and } \sin(2x) + \sin(2y) + \sin(2z) = 4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$$

Trigonometric conversions تریګونومتریکي په څتوالی

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخي اړیکی لري٠ داسي اړیکی د په څښ اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندکی وکړي ، او arcψ دې د ψ په څښ وي، داسي چې $\psi(\text{arc}\psi(x)) = x$ ٠ نو $\varphi(\text{arc}\psi(x))$ کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم x په څیر وویلی شي یا افاده شي٠

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : مور دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

cot	sec	csc	Tan	cos	sin	φ \ ψ
$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	x	**sin**
$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\sqrt{1-x^2}$	**Cos**
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	**Tan**
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**sec**
x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	**cot**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

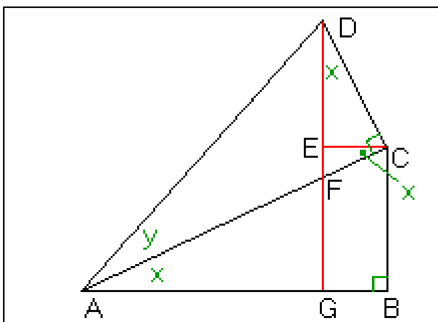
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلایي نسبت φ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جیومتریکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs



sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)

په مخامخ څیره کې کونج x د ولاړکونجیز درېکوډي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوډیز درېکوډي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندې ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC.   کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$=\frac{DG}{AD}$$

$$=\frac{EG+DE}{AD}$$

$$=\frac{BC+DE}{AD}$$

$$=\frac{BC}{AD}+\frac{DE}{AD}$$

$$=\frac{BC}{AD}\cdot\frac{AC}{AC}+\frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD}$$

$$=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}+\frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AD}$$

$$=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y).$$

cos(*x* + *y*) = cos(*x*) cos(*y*) − sin(*x*) sin(*y*)

Using the above figure:د پورته څیرې څخه کار اخلو

$$\cos(x+y)$$

$$=\frac{AG}{AD}$$

$$=\frac{AB-GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

د $\sin(x-y)$ او $\cos(x-y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کيږي، که د $\cos(x+y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه وپيژنو

$$\mathbf{\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)}$$

که په فمرول $\sin(x+y)$ کې د y په ځاي -y کيږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساين جوړه او کوساين ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$$\mathbf{\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)}$$

موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو

$$\cos(x + (-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته) د زیاتون)جمع(تیوریم(، له کومو یی چې دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چې فرمولونه په کې راټول وي(کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x\pm y)=\sin x.\cos y\pm\cos x.\sin a;........................(6,19)$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x.\cos y\mp\sin x.\sin y;.........................(6,20)$$

$$\sin 2x=2\sin x.\cos x;\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;....................(6,21)$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x.\tan y};.....................(6.22)$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};...........................(6,23)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};..............................(6,24)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

مونږ له ځيرې ۴ . ۱۸ ځخه مخ ته ځو، او ځاي په ځاي کوو $\gamma_1 = x$ ، $\gamma_2 = y$
نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ ځخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 . \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$

$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته ګوته ونیسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلګه ۴ . ۱۳ – لاندې ویینې یا افادې دې ساده شي

$$a)\ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له کوم چې $y=\sqrt{2}\ \sin\alpha$ لاس ته راځي

b) $y=\cos(\frac{3}{2}x+\pi)$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x+\pi)=\cos\frac{3}{2}x\cdot\cos\pi-\sin\frac{3}{2}x\cdot\sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi=-1, \sin\pi=0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y=\cos(\frac{3}{2}x+\pi)=-\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ ist.

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad 0\le\alpha\le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}}=|\sin\frac{\alpha}{2}|=\sin\frac{\alpha}{2}\ \ (\text{wegen }\ 0\le\alpha\le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنستیزه هندسه یا ځمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړئ شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1.a) 15°	b) 225°	c) 105°	d) 277,5°
1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3.a) 4,24°	b) 70,9°	c) 31° 17' 20"	d) 228,1923°
1.1.4.a) 5,19	b) 0,22	c) 2,31	d) 1

۱ . ۲ – یو درېګوډی له $a = 4,5$ cm , $b = 12,2$ cm او $c = 11,7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا دریګوډی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسی یي ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی(یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې دریګوډی جوړ کړی

a) $a = 11,7$ cm , $b = 9,2$ cm , $\gamma = 43,5°$

b) $c= 16,1$ cm , $\alpha = 84,6°$ $\beta = 51, 9°$

وښایي چی ولی دواړه دریګوډي ورته دي

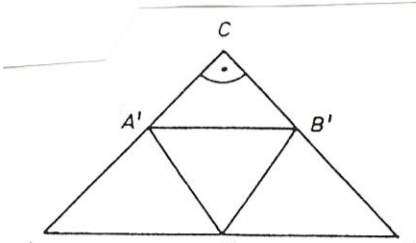


Bild 4.20 ځیره

۱ . ۴ – یو مساوي پښیز، ولاړکونجیز درېګوډي ABC ته یو مساوي اړخیز دریګوډی A'B'C' داسی په دننه کی ورکړ شوی چی $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (ځیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

ورکړی $\overline{B'C'} = \overline{A'C'} = \overline{A'B'}$ د $\overline{BC} = \overline{AC}$ سره!

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د خیري ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع اړخونه وشمیرئ

الف) له کانتو څخه

ب) له هیپوتینوزپېرخو څخه

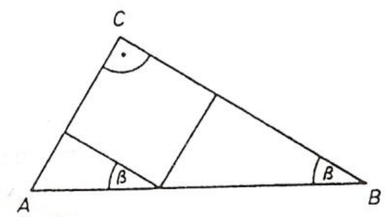


Bild 4.21

۲ .   د جېشمیرنی سره د ارزښتونوټاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړئ:

a) $\propto = 47,15°$, b) $\propto = -390°$, c) $\propto = 7,784$, d) $\propto = 13,195$

۲ . ۲ – کونج ß دې د sinß = a , cos ß = a , tan ß = a , cot ß = a څخه د

a) a = 0,8290 , b) a = -0,2907 , c) a = -2,145, d) a = 0,8660

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کی دې د الفا په ځای بیتا ولیکل شي !!!)

۳ .   په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز ($\gamma = 90°$) دریګوډي کې معلوم دي

الف) a = 3 cm , b = 4 cm ، ب) a = 5 cm , c = 12 cm

کوم ازښتونه sin ∝ , cos ∝ , tan ∝, cot∝ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې ($\gamma = 90°$) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیرئ ، لاندې لویې موړ ته معلومې دي:

a) a = 50cm , b) a = 40cm , c) b = 70 cm , d) c = 65 cm

b= 78,1 cm $\propto = 43°36'$ $\propto = 18°55'$ ß = 59° 29'

۳ . ۳ – وشمیرئ ! h_c , A او همداسی د ټاکلي مساوي پښنیز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه (ß = ∝, a = b):

a) a = 66cm , b) c = 22,4 cm , c) a = 38,9 cm , d) c = 30,3 cm

c = 130 cm $\propto = 47,8°$, $\gamma = 33,3°$ $\gamma = 48,2°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) درې قوې دې د زوریا قوت $F_1 = 167,5N$, $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه یو دریګوډی جوړوي. د دې دریګوډي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوی دی؟

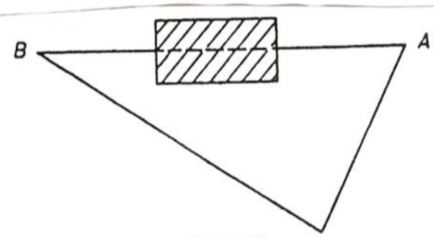


Bild 4.23 ځاکره

پ) دوه ټکي A او B چې یوه کور یې مخه پټه کړې وي، یو له بل څومره لرې دي، که $\overline{BC} = 75,25\ m$, $\overline{AC} = 51,75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'\ 45"$ وي (څیره ۴ . ۲۳)

ت) د دوه یخ هاکي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ یو د مخالف تیم لوبغاړی G ولاړ دی. S_1 په داسی ډول توپ و S_2 ته وهي چې توپ په یوه دیوال ولږېږي. (څیره ۴ ، ۲۳ وګوری).

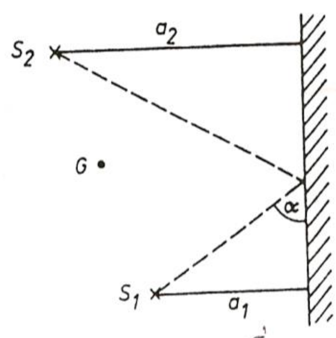


Bild 4.24 ځاکره

د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لریوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له دیوال $a_1 = 2,5m$ همداسی $a_2 = 6,5\ m$ وي او توپ د یوه دې دیوال سره په یوه کونج $\propto = 42°$ ولږېږي.؟

۵ . د تریګونومتریکي یا دریګوډیزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشمیري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشمیرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښایئ:

5.2.1. a) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1+\tan^2 \alpha} = 1$ d) $1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ b) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

c) $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$ d) $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2}$ d) $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

5.2.5. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$

c) $\sin \alpha + \sin (\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin (\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6,5\pi + \alpha) = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې ځنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \qquad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼې، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$i^2 = -1$ (7 , 4)

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$$x^2 + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)z= i یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د تولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې ډول د څلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

=>لاس ته راځی یالرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رييل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رييل اوبيوني یا حلونه منځ ته راوړي٠

که $P^2 < 4q$ وي، نو رييل اوبی نه شته دئ

د ايماجينار ګڼ په مرسته کیدی شي وليکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{p}{2}=a\in R,\sqrt{q-p^2/4}=b\in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2}=a\pm bi;a,b\in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 =-1;\ a,b\in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرئ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z}=a-bi,..................................(7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي۰ لنډ کنجوګیري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},..............................(5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کیږي، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1+b_1i=a_2+b_2i\Leftrightarrow a_1=a_2,b_1=b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اېښودل شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کېدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سرې د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمېرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې:$i^2 = -1$

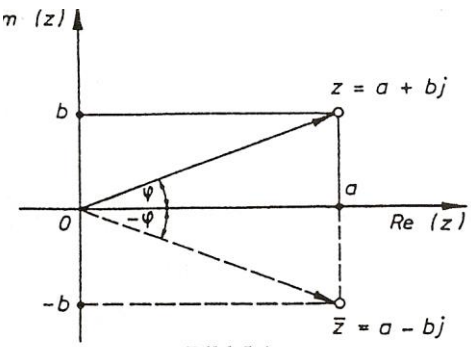


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته څېره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطحې ریپلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته يېایماجینار برخه وایي لکه ښنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څېړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کاروني یا عملي يې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنې د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځني ویيونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځي، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څېرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون ښنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ځیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښنه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(z2-) په زیاتون)کیدی شي د ځېرې ۵ (په همدې توګه د ځېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم بښوول شي.

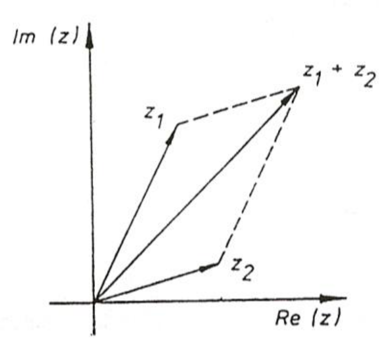


Bild 5.2 7.2 ځېره

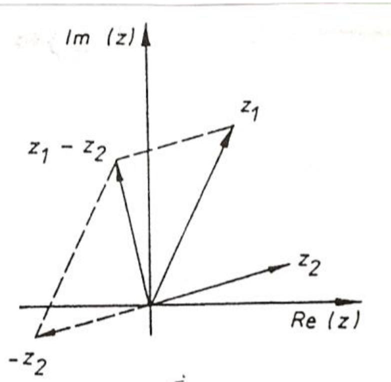
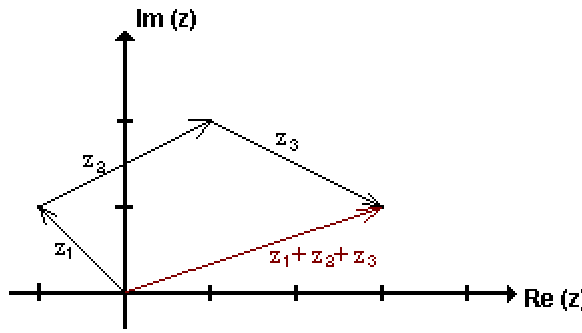


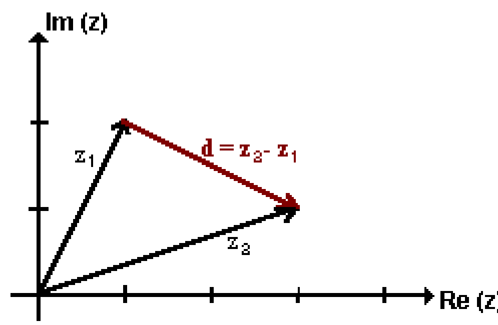
Bild 5.3 7 ځېره

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا لاندې:



په پورته او لاندې ځیرو کې د کملپکس ګنونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي٠



دکملپکس ګنونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګنونو ارزښت بلل کیږي٠

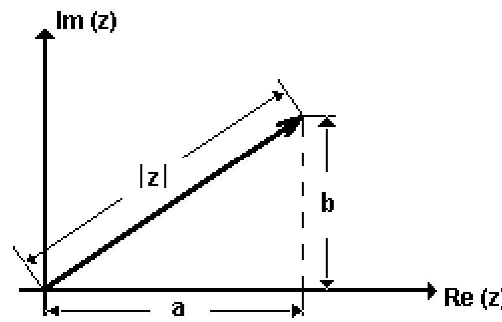
دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي٠ مخامخ ځیره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په درې ګوډي کې د اړخونو ځاننیونه یا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$z_1+z_2=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اینوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2$$
$$= a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2(-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i \qquad (7,20)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي٠ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1 . z} = z_1 . z_2 \quad , \quad |z_1 . z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ٧ ٠ ٢

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2$

او (١٥ ، ٧) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7, 22)$$

٧ ٠ ٣ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{\overline{z_2}}}{z_1\overline{\overline{z_2}}} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسی لاس ته راځي

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right) = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوهمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)} =$$

$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} - \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ . ٤ : د Z1 او Z2 لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13}i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3}i)$ d) $z = -1-i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22 + 5i) + (2 + i)$ b) $(3 + 2i) - (5+2i)$

c) $(1+2i) - (1+2i)$ d) $i -(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i) . (3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}\,.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x + y\,i)\,(2x + yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a - 3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a + 5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63 + 16i}{4 + 3i}$

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2 = -\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2 = -\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\, x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\, x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\, x + 1 = 0$

d) $16\, x^2 + 8\,(i + 1)\, x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د ګڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته رااچوو، چې دا نیونې او غوښتنې وېناوې دي. په جملو کېد دې ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه ترڼه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د رښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی یا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځی. د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ ۰ ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه (ثبوت) کې سړی له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې رښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي.

دا وینا B هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه رښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)(د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیاارزښت په جدول کې) له یوې رښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ ـم جدول).

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې رښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی$3x \geq 3$: د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د 3x زیاتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \geq 3x+6.$$

بیلگه:

د یوه ناټیک اوبیوني یا حل کارونه (متود)

د ښووني دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$ لاس

ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه رښتیا دي۰ مگر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو$a \geq 0, b \geq 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له رښتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی(سیده ښوونه) او په ناسداېه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو گټوره به وي، چې په لاندې توگه تر څیړنې لاندې ونیول شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده۰ وینا یعنې نفیې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده۰ (د ثبوت د

رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده۰

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفیې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورې یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځی

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورې وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د $4ab$ کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کینه لور د څلورې ۰ مربع په بڼه لیکل کیدی شي او هیڅکله له صفر څخه نه شي کوچنی کیدی۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتیا دی یا غلط دی، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتیا دی یانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتیا دی ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ ریښه یا جذر $\sqrt{2}$ ایرشنل دی

اوبیونه یا حل : د غوښتنې نفیې ده، چې : د ۲ ریښه $\sqrt{2}$ ریشنل ګڼ دی (د ریشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو باید بیا دوه ټولریشنل ګڼونه q, p, د $q\neq0$ سره شته وي، چې دا باوري شي: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$

له دې پورته برابرون سره p^2 یو جوړه((جفت) ګڼ دی۰ نو له دې امله p هم یو جوړه ګڼ دی، ځکه چې یواځې د جوړه ګڼ مربع یا څلورې جوړه کیدی شي $p=2p'$ له مربع یا څلورئ کولو او پر ځاي اینوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p'^2،$$

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو ځلوری یا مربع ګڼ دی۰ په دې پسې لرو p او q پر۲ ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی۰ که پرویشپردي ټول ګڼونه p اوq له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي۰

٨ ۰ ٣ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ n0 (صفر باید لږ د ن د پښی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي ګڼونو لپاره باوري کیدی شي۰ یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي۰

بیلګه ۱ :

د ټولو $n \geq 0$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې

باور لري: $2^n \geq 0$

بیلګه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري $1+3+5+\ldots 2n+1)= n^2$

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینځیپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که یوه وینا دn= n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په پښه کېلیکل شوی) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې په ترتیب د ایندکشن ښوونه په دوه پلونو یا قدمونو سرته رسیږي

١ - د ایندکشن پیل

ښوول کیږي، چې دا وینا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

٢ – د ایندکشن پل

اوس باید یو ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه وښوول شي٠ له دې امله د ایندکشن پل یا له برخه پلونو جوړ دئ

٢ الف: د ایندکشن نیونه :

نیول کیږي، چې وینا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نیونه په V فرمولبند کیږي

یادونه V د نیونې لپاره ځاي پرځاي کیږي یا راوړل کیږي٠

٢ ب – د ایندکشن غوښتنه:

غوښتل کیږي، چې دا وینا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو٠ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي لیکو

٢ ج – د ایندکشن ښوونه :

ښوول کیږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: $A \Rightarrow B$

بیلګه ١ :

١ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^{\circ} = 1 > 0$

٢ ٠ ١ ٠ V ته :

$2^k > k$

و ٢ ٠ ٢ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2^{k+1} > k+1$$

۲ ۰ ۳ له B <= V : له $2^k > k$ او $2 > 1$ څخه د زياتون له امله لاس ته راځي :

$$2+2^k > k+1$$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بېلګه ۲ :

۱ ۰ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1^{\circ} = 1$

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ B <= V ته: له نيونې څخه د زياتوون 2k+1 زياتونې او له دې د ښي خوا د يوه بينومځلوری(-مربع) په څير انځورونې څخه لاس ته راځي:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$$

او له دې د ښی خوا انځورونې څخه د بينوم څلوری(-مربع) لاس ته راځی :

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$$

يادونه : د V او B پر ځاي کړی شو، چې نيونه او غوښتنه وليکو، يانې موږ درې څه لرو، چې نيونه غوښتنه او ښوونه ده٠ په هغه ورسره بلد ډول يې ښوونه د يوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی يا اوبيونه بللی(اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي يا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم يو، لکه ملګوبی، خړوبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شميرپوهنې سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، کۀ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بيا د ترنې په ډول ورسره مل کړو٠ ستاسو وړانديزونو ته هم سترګی په لار يم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ . ۴ تمرينونه

۱ – سيده وښايي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تيرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسيده وښايي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ يو ايريشنل ګڼ دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې يې وښايئ

a) $1 + 2 + 3 + \ . \ . \ . \ + n = \frac{(n + 1)\, n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ . \ . \ . \ + n^2 = \frac{(2n + 1)\,(n + 1)\, n}{6}.$

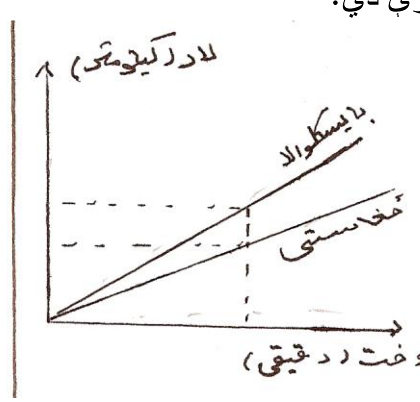
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ . \ . \ . \ + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ ۰ کرښيز- يا خطي-يا لاينيز مساوات د يوې متحولې سره

پيل بيلګه

يو بايسكل ځغلوونكى او يو پلى له يوه ځايه په همغه وخت خوزي يا حركت كوي، كوم چى په ګراف كى كښل شوى دى(كه د ګراف كښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ كه بل چا دا كار وكولى شو نو دا به يې هم مرسته وي، خو پرې پوهيدل كومې ستونځې نه لري) بايسكل په ګړۍ كى ۱۵ كيلومتره ځغلي او پلى ۱۰ كيلو متره په ګړۍ كي ځغلي. دوي پس له يونيم ساعت سره يوځاي كيږي. هر يو څومره لار وهي او يو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې یادیږي، په همغه نامه نه یادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون یا مساوات په نامه وبولو .
وخت) په دقيقه (په t ښايو لار) کيلومتر(په s ښايو د لارانځورونی څخه په ګراف کی څرګندیږي چی بایسکلځغلوونکی له ۶۰ دقیقو وروسته ۱۵ کیلو متره ځغلیدلي یعني 15km /hاو پلی ۱۰ کیلو متره یعني 10km/h
غواړود هرڅه لمړی وښایو چی هر یو له یونیم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بیا دویمي پوښتني ته ځواب ورکوو.
بایسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 kmځغلیدلی وي او پلی به 2.10km=20kmځغلیدلی وي بایسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km
15.tkm=لار وهلي وي. دلته وختt خپلواك اوړيدونی يا نا پږندونکی او لار s بلواك اوړيدونی يا ناپيژندونکی يعني د t په واك کی دی. دا کليمي به بيا د فنکشن او څيرونو په برخو کی پوره تر څيرني لاندې ونيول شي. د بايسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r يې ښايو برابرون داسی ليکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بایسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بایکلځغلولو وخت دی طبعاً زیاتیز یا مثبت دی ورته دپلي چی په lيي ښايو وهلي لار هم تاکل کيږي،يعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پیل ټکي له 1,5 ساعته یو له بل څومره لرې دي.
وهل شوې لار :

د بایسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$

د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقیب له 1,5 ساعته وروسته دواړه یو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاینیز- یا کرښیز مساوات :

د کرښيز مساوات فرمول د يوې اوښتونې يا مجهولې x سره داسی دی

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقيقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبیونه (حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقيقي اعداد وښوول شي چی که په پورته (۱ . ۹) برابرون یا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرایط پوره کړي. د حقيقي اعداد و بنسټيز قانون (۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کیدی شي چی د حقیقي عددد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چی مساوت زخمي شي. داچی ویش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو لیکل کیږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; ....(9,2)$$ ....

دا د (۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی٠که په څټ یا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیروو

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بیا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم ښه په ښتوالی تشکیلوي ، نو په دې حالت کی حقیقي عدد x شته نه دی چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بیا برابرون (۱ . ۹) لاندې شکل نیسي

0.x = 0

دا برابرون بیا د ټولو رییلګڼونو xلپاره پوره (ډك) دی. یا برابرون پوره کوي.

دا بیا داسی هم لیکل کیږي : (په خوښه x = (belپس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره یواځنی ټاکلي اوبیونه (۹ .۲) لریږد A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبیونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر رییلګڼ x اوبیونه یا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د یوې اووښتونې یا مجهولی سره د رییل برابرونونو د ګڼلو ټوله تیوري خوندي ده .

یو لاینیز برابرون (مساوات) (یو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرونونو ترمونو زیاتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سری په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف په لور زیاتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته راړوي، دا د II . 2 بنسټیز قانون له مخی یو ورته فورمبدلون یا ښه بدلون دی)(د اوبي یا حل ډیری تغیر نه دی خوړلی) د بیلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زیات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کیڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی لیکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم یا بڼه یو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x = \frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کیدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د a1 |=0 په حالت کی په a1 وویشل شي:

$$x = \frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بیلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b-ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي.

ددې لپاره چی د ماتلاندې څخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرون ترتیبیږي او راټولیګی، xله نوکانو څخه راوځي

$$a^2bx + a^3x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د $a \neq 0$ له امله کیدی شي په a^2 وویشل شي $(a+b)x=2b$

دا د لاینیز برابرونونو بنسټیزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که ($a + b \neq 0, (a \neq -b)$ وي ، نو($x = 2b / (a + b)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوګونی يا يواځنی اوبيونه يا حل دئ
که(a = -b) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبيون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زياتي اوبيوني يا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د نيونی يا فرضيي له امله چی بايد $b \neq 0$ وي، موجود نه دئ.
پام:
په دې هکله زياتې بيلګی کيدی شي راوړل شي، چې ضريب يا څله ووني په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته يواځې دومره يادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی يا متحولې ولري، همغهسی شميرل کيږي، لکه په ريبلعددونو کې۰
دلته هم بايد دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چيرې اړيينې وې او يا ګرانو لوستونکو يې راوړل وغوښتل، نو زه به بيا دا کار سرته ورسوم او بيلګي به هم راوړم او که چيرې کوم د شميرپوهنې مينه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅيږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي ځښتن غوښتل۰ زه دومره يادونه کوم، چې په دې هکله زما د شميرپوهنې بنسټيز کتاب کې زياتې بيلګي راوړل شوي، خو نه پوهيږي، چې دا کتاب به چا ته ورسيږي او که نه

بيلګه 9 . ۲ :
برابرون $(x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c=1$ يواځي
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دئ.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه يوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې)
سره ځل کوو: $6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x)=6abc$
وروسی نور، په لاندې ډول، د څرګندو شميرلارو يا - قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$

$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$

$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بيرته د لايني مساوات (۹ . ۱) بنسټيځه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات يواځنی حل دئ.
د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره د $0x=0$ له امله هر ريبل کڼ x اوبيونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره x په خوښه
دلته د څيړل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول يی لاينيزوالی يا لاينيزتوب پيژندل کيږي، په څنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرينځيپ) کی کرښيز يا لاينيز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مګر په لاينيز مساوات يا برابرونونو اړول کيدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چې د ناپيژندونکو ضريبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زيات وخت په x هم شرطونه ايښول کيږي.
ددې لپاره لاندې کی درې ساده بيلګي راوړو:

بيلګه ۹ . ۳ :
برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$
د لومړي ځل لپاره څلوری برابرړن يا مربع مساوات دی، ځکه چې څلوری(مربع) غړي لري. د يو له بل ځلولو يا ضربولو وروسته څلوری غړي له منځه ځي. يو لايني مساوات د يوې ځانګړي سره سره پاتي کيږي:

$$24x^2 -32x-27x+36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x +3x -x^2 -9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بيلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x -a) / (x-b) = 1$ يواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بيا لرو: $2x-a=x-b \Rightarrow x=a-b$
د $x \neq b$ له امله بايد باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a-b$ لري او پرته له دې ($a = 2b$) حل نه لري.

بيلګه ۹ . ۵ :
مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$
يواځي هلته هدفمند دی چې $x \neq 0$ وي. ددې نيونو لاندې باور لري . $x = a + b -c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله يواځي هلته حل دی، کله
چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات يواځي د $a + b \neq c$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a + b -c$ لري، په غير له دې ($a+b=c$) حل يا اوبيونه نه لري

بيلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څيرنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی ټيك د $abc \neq 0$ لپاره يو هدف لري، بايد د اصلي مات لاندې پيدا كولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تكرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$
$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$
$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$\text{................} = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دئ

كه برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوكانو يو له بل ځلولو راټول، ترتيبونه او ويشنه د x تر ځنګ ولاړو فاكتورونو يا ضريبونو $(A = 89a^2b^3c^2 \neq 0)$ څخه د نيونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړكيږي

$x = 1 / a^2b^3c^2, \ abc \neq 0$

د دې وظيفي لپاره د حل نور امكانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅيړل چی مات لاندې يي له ځلونو جوړ وو، غواړو چی اوس داسی ماتونه وڅيرو چي مات لاندې يي له زياتونونو جوړ وي، چی د نوكانو له لارې په ځلوونو ټوټه كيدلي يا تجزيه كيدلی شي .

بيلګه ۹ . ۷ :

برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټيك د دې نيونو سره صدق كوي $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$. :

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پيداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 -1)$$

$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$

$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$

$$a^2bx - b = b. (a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندی)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي يو يا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بنديږي(، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$

$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$

$$.............2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$

$$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

$$..................................x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $0 \neq ab$ لپاره(دا د نيونو له لارې تل پوره دی)که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نيولی شي، بی له هغو چی په بنسټيزو نيونو کی له نيونو د باندې ساتل شوي وي) يعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د xمطلقه ارزښت د کڼونو $a = b$ د په څېټ ارزښت سره نه شي مساوي کيدی .د x لپاره نيول شوې نيونی د حل ورکولو کی بايد په پام کی نيول شوي وي دا په دې مانا چي بايد تل پوره وي:

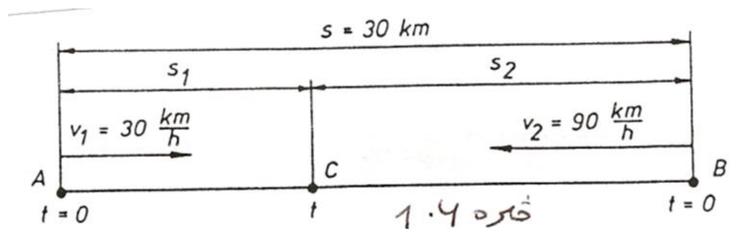
$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بيلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډې تمځايونه Aاو B يو له بل 30km لرې دي. د A څخه يو بارګاډی په ساعت کی د ديرش کيلومتره 30km/h په يوه ثابت سرعت يا چټکتيا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوزیږي. د B څخه یو تیز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزیکي لویي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او v سره وښول شي. ددې شي ځاننیوني لپاره ځیره ځېږه وکاږئ



پوښتنه » چیرته « د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لار s1) یا د B لریوالي و C څخه(د تیزګاډي D لار s2) سره وشمیرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دئ کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو. دلته درې اوړېدوني یا مجهولی مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو مارونې یا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\, t \quad , s_2 = 90\, t \quad , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه(واحدونه) پرېښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو)!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو یا مساواتو سره چی حل به یی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولی مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کیدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که ولیکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي s2 = 30 - x. دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلوو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30-x) / 90$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاينيز ټاکنبرابرون يا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کيدی شي:

$30x = 30 - x , 4x = 30 \quad x = 7,5$

نو لرو

$s_1 = 7,5 \text{ km} , s_2 = 22 , 5 \text{ km} , t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$

که وليکو $s2 = x$ ، نو شميرنه لاندې لار غوره کوي يا بهير نيسي:

$s_1 = 30 - x \;, t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

, $x = 22,5$

$s_2 = 22,5 \text{km} , s_1 = 7,5 \text{ km} , t = (22,4/90)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتونې يا ناپيژندونی په څير وټاکو، نو بار لري يا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90 x = 30$

$20x = 30$

$x = 30 / 120 = 1/ 4 , t = (1 /4)h = 15 \text{ min}$

$s1 = 30t = 30 /4 \text{ km} = 7,5 \text{km}$

$s2 = 90 t = 22,5 \text{ km}$

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د 0,25 h= 15 min حرکت وروسته په 7 , 5 km لريوالی يو بل سره مخامخ کيږي

بيلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

يواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نيونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا نو د $x \neq 0$ له امله يواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات يواځې د $a + b \neq c$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غير له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بيلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څيړنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تکرار شي.

$$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 . a . b^4 . c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 . 3^2 . 5 . a^3 . b . c$$

$$5400 a^2b^2c^2 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . a^2b^2c^2$$

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 . 5^3 . a^3b . c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل څلولو راتول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چی مات لاندې یې له څلونو جوړ وو، غواړو چی اوس داسې ماتونه وڅیړو چي مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چی د نوکانو له لارې په څلونو توټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي: $|x| \neq 1 / a^2 \quad , \quad ab \neq 0$.

اصلي مات لاندې(ا م ل) په لاندې ډول پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چې یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي) ، لندونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$a^2(2bx-1) + b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1) + b^2(2ax-3) - b^2(a^4x^2-1)$$
$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 + b^2$$
$$2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$
$$2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$
$$x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنستیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي(یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنهونو $a = b$ د په څېر ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

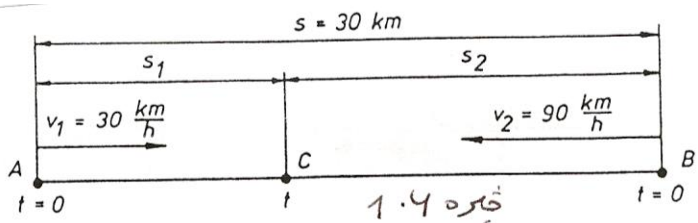
د x لپاره نیول شوې نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي؛ دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. د B څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t او v سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



څیره ۶ . ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزګاډي D لار s_2) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو s_2 , s_1 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوری ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , \ s_2 = 90\,t \quad , s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه پریښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دريې مجهولې s_2 , s_1 او t دی د دريې مساواتو سره چې حل به يې په ۶ الف او يا همداسې په برخه ۱۱ کې ورکړشوې وي، مگر دا دومره ساده دي چې د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چې دا مساوات په يوې مجهولې مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولې x په ځای کيدی شي s_2 , s_1 او t وټاکل شي. که وليکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنيو دوه مساواتو کې ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30 - x) / 90$$

لاينې ټاکنمساوات د x لپاره دي، چې ساده حل کيدی شي:

$$30x = 30 - x \,,\; 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5 \text{ km}, \quad s_2 = 22{,}5 \text{ km}, \quad t = \frac{7{,}5}{30}\text{h} = \frac{1}{4}\text{h} = 15\text{min}.$$

نو باور لري:

که $s2=x$ کيږدو،نو شميرنه په لاندې ډول ځغلي يا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x, \quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90},$$

$$\begin{aligned} 3(30 - x) &= x, \\ 90 &= 4x, \\ x &= 22{,}5, \end{aligned}$$

$$s_2 = 22{,}5 \text{ km}, \; s_1 = 7{,}5 \text{ km}, \quad t = \frac{22{,}5}{90}\text{ h} = \frac{1}{4}\text{ h} = 15\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څير وټاکل شي، يعنې $x=t$ ، نو باور لري:

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= 30x + 90x = 30, \\ 20\,x &= 30, \\ x &= \frac{30}{120} = \frac{1}{4}, \quad t = \frac{1}{4}\text{ h} = 15\text{ min}. \end{aligned}$$

$$s_1 = 30\,t = \frac{30}{4}\text{ km} = 7{,}5\text{ km},$$

$$s_2 = 90\,t = 22{,}5\text{ km}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15minخوزښت(حرکت) وروسته په 17,5kmکې يو بل سره مخامخ کيږي.

۹ . ۲ تمرينونه

۱ . ناکرښيز يا نالاينيز مساوات د يوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ aاوb نتيجه يې د ازمايئ! د مجهولو ضريبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b يې نه شي غوره کولی يا نيولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره يواځنی حل لري، حل نه لري او يا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رويه د نورو مجهولو ضريبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ –بې له کسرونو يا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 2(x - 1) = 0$

b) $(3 - x)(x + 4) - 9 = (3x - 4)(8x - 9) - (5x - 6)^2$

c) $2a(x + 3) = (3 + x)(5 + 2a)$

d) $3a - (7b + 11a) - (3x - 12b - 9c) = (3x - 8a) + 5b - (3c - 6x)$

1.1.2. a) $(a - x)(x + c) = 2c(a - x) - (b - x)(c - x)$

b) $a(x + 1)(ax + b) + b(a + bx)(1 - x) = x^2(a - b)(a + b)$

c) $(x + a)(a - x) - b(b - a) = (x + a)(b - x)$

d) $a^2(x - a) + ab^2 = b^2(x + b) - a^2 b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضريبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3} + \frac{2x-10}{5} = 3 - \frac{x+1}{15}$ b) $4 - \frac{10-3x}{5} = 3 - \frac{10-7x}{10} + \frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2} + \frac{3x+1}{4} + \frac{5x+1}{8} = 1 - \frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3} + \frac{6x-1}{2} = 5 + 5 \cdot \frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20} - \frac{1}{12}(4x-5) = 1 - \frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3\left(6\frac{1}{2} + x\right) - \frac{7}{3}\left(2x - \frac{19}{2}\right) - \frac{8}{3}x + \frac{5}{3} = 0$

c) $\frac{7x-16}{3} - \frac{4}{5}(x+1) + 6 = \frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4} - \frac{4}{3}(x-4) = 3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^{n}+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^{n}-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^{n}+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴. ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$ b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$ ؛

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$ d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج یا مات لاندې کې یې ناټکلي ضریبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$ d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶,۱ – کسرمساوات يا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ . شي تمرينونه

۱ . ۷ . ۱ – که د يوه گڼ خلور خله او ۱۴ زياتون ۴۰ وي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د يوه گڼ خلورخله او ۴ زياتون ددې گڼ او ۱۴ زياتون سره برابر وي ، نو هغه گڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د يوه گڼ خلورمه برخه او پنځه خله ۴۲ گڼ ورکوي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۴ – که د یوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه ګڼ وویشل شي چې ۴ ترې کم شوی او ۱۱ لاس ته ترې راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟

۱ . ۷ . ۵ – د یوه ګڼ پنځه څله او د ۳ زیاتو دوه څله لوي دی. لکه د دې ګڼ درې څله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۶ – د یوه ګڼ څلورڅله او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی لکه ددې ګڼ دوه څله او ۸ . دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د یوه ګڼ شپږ څله او د ۵ کمون یا توپیر چې ددې ګڼ په څلور څله او ۵ زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۸ – د یوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته ترې راځي. دا ګڼ څه نومیږي.

۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسې په دوه ګڼونو بیل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چې د مربع توپیر یې ۱۲۵ شي.

۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یې ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسې تناسب کې دي، یا یو بل ته داسې ځانونه نیسی . که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتې یې ۷ دي. دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاینیونکي ګڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي، نو یو دوه ځاینیونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځایګڼونو سره مګر په څټ ترتیب سره.

۱ . ۷ . ۱۳ – یو زدکړی غواړي د یوه ګڼ څخه مربع ریښه د یو په بل کې بندولو پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو ګڼ د ریښې په ځیر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکي، چې مربع یې په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه ریښنه ټاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ریښني مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ریښنه یې غواړو پیدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – یو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسی حال کی چې نورو ډلی 1 / 4 , 5 / 1 په همدې ډول 2 / غړي په بر کی نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – یو نفر په درې ورځو کی مجلی په داسی شمیر خرڅوي: په لمړی ورځ 9 / 1، دومه ورځ 6 / 1 او په دریمه ورځ 4 / 1 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمایي دوه کمي د ځان سره لري. هغه څومره مجلی د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – یوه میلمه د یوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« ځما پلار چی درې میاشتی پخوا یی خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، ځما د عمر څلورواره څخه 4 / 1 زیات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د یوه زدکوونکي پلار څلورنیم ځله زوړ دی لکه د هغه ځوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د یو اویاکلن نیکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په یوه معما کی یو زدکوونکی د ې بل ته وایي: « که زه لما سره بټوه کی پیسو سره ۵،۲ افغانی ور زیاتي کړم ، زیاتون یی له ۵ سره ځل یا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا توپیر په 11 وویشم نو نتیجه یی ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کی څومره پیسی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسې تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوي دي، دریم دوه ځله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اومیګا) ، په دې پروت شپانونك ۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) یوګونی مقاومتونه څومره لوي دي، ب برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۲۰.۷ – د دوه غبرګ چالان عمومي مقاومت (ماته متآسفانه په افغانسان کی د فزیك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چي په هدف به پوه شو) دی

a) 1000 Ω , b) 2000 Ω

یو مقاومت 4000 Ω دی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم . هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت a) 12 kΩ, b) 300 Ω وي؟

. ۲۱ . د درې غبرګو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم . هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت الف) 12 kΩ

ب) 300 Ω وي؟

. ۲۲ په اوبو کي یو د لرګي منډه باید څومره لوي وي، چي د لمبیدو استعداد یی ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرګي خاص وزن یا کلکوالی (د فرمول څخه معلومیږي چی دا څه شی دی) $4 \frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوډ د سونګ مواد لري. څومره تیل او څومره بنزین په ټانك کی موجوددي که ګډونه یی وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي. دا چی د مخه خرکړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په سرك بیا ۲۰ ونی زیاتی کیښنول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته څومره لویې دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵ کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کی ، دا وروسته وړونکی د پروسیړکلني وړونکی څخه یوه نیمه دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړی چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي. برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ کومبیناتوریك - د بینوم جمله

کومبیناتریک څخه په شمیرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې یو ګڼ ، پل ځاي بدلو
څومره والبشايي او که څو ګڼونهځپل ځاي بدل کړې دا څنګه لیکل کیږي۰ د ځای بدلون
شمیرنه ده
او د هغې ډولونه۰
په ۰ ۱ ۰ ۱ او ۰ ۱ ۰ ۲ برخو کی به د شمیرپوهنی مرستندوي مواد د بینوم
جملی(۳.۱۰)
برخه(او کومبیناتوریك (۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتیت کلیمي او بینومیالکوایفیڅینت
(بینوم ځلوني) پیل شي .

۱۰ . ۱ فاکولتیت Die Fakultät, factorial

پیژند ۱۰ . ۱ :
د !nسومبول (ویل کیږی n « فاکولتیت «) لاندې سړی له1 تر n پورې ګڼونو ضرب
پوهیږي، یعنی $n ! = 1.2....(n-2).(n-1).n$ برسیره پر دې تعریفوو: $0! = 1$

د فاکولتیت له پیژند څخه څرګندیږي، چی $(n+1)! = n!.(n+1)$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه:
په افغاني ادبياتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتيت په ځاي فاکتوريال ليکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کليمه يا پښتو ، ځله ووني،، زيات کاره ولی، هيله ده چی تاسو به يی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی.

بيلگی :

الف !n : د $n = 5$ لپاره په دې ډول دی: $5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$

ب : په دې ډول دی : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$

پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بينوم ځلووني يا ضريبونه

پيژند: ۱۰ . ۲

د سيمبول $\binom{n}{k}$ (وييل کيږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ويش پوهيدل کيږي چی هر يو k ځله ووني يا ضريبونه يا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

برسيره پر دې دا هم په کلکه کره کيدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ يو پيدايينتي يا طبعي ګڼ دی او د ماتلاندې او مات باندې ګڼونو ګڼون يا تعداد ښايي،په مات لاندې کې د لومړيو k پيدايينت يا طبيعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رييل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور1 - n ، دريم n-2 تر k –م فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اويلر(leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سويسي ګڼپوه، فزيکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړي ځل لپاره پيل شو، له دې امله ورته د اويلر سومبول وايي پرتله يا مقايسه برخه ۱۰ . ۳ (. که ثوك ديوه بينوم پوتنځ يا توان شميري) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سيمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چې د يوا-
ځنيو زياتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بينوم ضريب يا بينوم ځلهووني ويل کيږي.

بيلګی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ ، } \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعريف نه دی ، ځکه چی 1 / 3 پيدأيښتي يا طبعي ګڼ نه دی.

د بينوم ضريبونو يا ځلونوخويونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۱ - د $n<k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$

که n یو طبعي ګڼ وي او له k کوچنی وي، نو صفر په ماتباندې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سرې د $(n-k)!$ سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k وليکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کیڼ اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په ځیر وليکل شي ، ماتونه ور زيات کړي او د زیاتونون ګډ فاکتورونه چې په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ا افاده یا ویینه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله ووني په څير ولیکل شي، لاندې بینومیال یا بینوم ځلوونی (ضريب) تعریفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بینوم جمله

د بینوم لاندې سرې د دوه توکو (ګنونو) زياتون پوهيږي. یعني: x+y
د بیونم جمله موږ ته ښایي چی څنګه د یو بینوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چی پیدایښتي ګڼ n یی ایکسپوننت یا جکګڼ یا لنډ جګ وي، د زیاتون په څير پر مخ بیول کیږي. که د x + y بینوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اکسپوننت لپاره شمیرو، نو لاندې نتیجه لاس ته راوړو :
پاسکال دریګوډی

$$(x+y)^0=..................1$$
$$(x+y)=..................x+y$$
$$(x+y)^2=..............x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=............x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=.........x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5=....x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې د زیاتونونو پرمخبیولوکی یو قانونیت لیدل کیږي. د زیاتونو ګڼون(شمیر، تعداد) د بینوم د اکسپوننت څخه په یو لوي دی . ټول زیاتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په داسی ډول چی د x اوy پوتنځ زیاتون په n برابرېږي او په دې ډول د x پوتنځ په کمیدلو) د y پوتنځ په زیاتیدلو دx په اکسپوننت په ترتیب پرلپسی
n , n-1, ...1 , 0
د yاکسپوننت په ترتیب 0,1 n-1,n..,دي. د بینوم پوتنځ کوایفځینتونه داسی په نامه پاسکال Blaise Pascal(۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه(ګڼوندریګوډی جوړوي .

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کیڼ-ښی پرتوګڼونوزیاتون دی، چی بي له کړاو د نورو اکسپوننتویا په جګو n = 7,8, ... لپاره پرمخ بیول کیدی شي. د ډیرو لویو اکسپوننتو n لپاره بیا هم دالار له کړاو ډکه ده لیونارد اویلرLeonhard Euler د کومبیناتوریك فکرونو کی د کوایفیځینتونو یووني یا یوونوالي یا بهتره یوونوالیز ستروکتورونه یا جوړښتونه وپیژندل. په n -م n (د بینوم جګ یا اکسپوننت (لیکه اوK- م ځای، n ,.... , 1 , 0 = k کی ولاړ ضریب دفورم څخه دیَ) له کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اویلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بینوم ضریب په
ځیر رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دریګوډیَ د اویلر سومبول استعمال په ځیرولیکل شي نو لاس ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\dots\dots\dots\dots\binom{0}{0}$$

$$\dots\dots\dots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\dots\dots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\dots\dots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\dots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\dots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داویلر سومبول کی د فاکتور پرځای ، چې ګنونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ لیکل کیږي.

یادونه : ما کله a,b او کله بیا x,y لیکلي، دا په یو ډول لیکنه ښکلې ښکاریږي،
خو زه کله کله داسې ستونځې لرم .
په ۱۰ . ۲ برخه کی د بینومیالکوایفیځینت لپاره ښوول شوو خویونو ۲ په بنسټ د پاسکال دریکوڼي منځنی محور ته سیومتري پراته کوایفیځینته سره مساوي دي. داچی هر کو-ایفیځینت وربانديې پورته کوایفیځینتونو زیاتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو)
د تمرین وظیفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله) مقایسه(شي) د اویلر سیمبول په استعمال
د یوه بینوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زیاتون پرمختګ د یوه طبیعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول لیکلو ته اجازه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۱ (د بینوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندوکشن پیل : (n = 0)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ایندکشن نیونه : (n = k)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n$$
$$+ \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دایندکشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$
$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k$$
$$+ \binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کږې پرتی) برابر پوتنځ یا توان څلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونخویونو د استعمال له لارې سره راټول (یوځای) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{0} = \binom{k+1}{1}, \binom{k}{2} + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{2}, \ldots, \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = \binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوې اړیکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}, \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بینوم له جملی د یوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n} b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} (-b)^i$$

بیلګې:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 y + \binom{3}{2} x y^2 + \binom{3}{3} y^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 (-y) + \binom{3}{2} x (-y)^2 + \binom{3}{3} (-y)^3 = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - y^3$$

۱۰ . ۴ کومبیناتوریك:

کومبیناتوریك د یوې ډیرۍ د پای غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخي یوځاییولو په څیر راوړل شي، په یوځاییولو کی کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنګه په راښوځاییولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي د غړو تکرار راشی او يا هم نه. له دې امله د يوځاييولو يا ټولګی درې ډولونه
توپيروو(Komplexion هم ورته وايي)، په نامه پرموتيشن، واريیشن، کمبينيشن
(Permutation, Variation, Kmobination) کوم چی په لاندې برخو
کی يو په بل پسی څيړل کيږي او په اخرنی جدول کی به ليديدونکی څرګند شي يا ليدوړو
ښوول شي

۱۰ ۰ ٤ ۰ ۱۱ پرموتيشنPermutare

(لاتين: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پيژند ۱۰ . ۳ :

د n غړو يو پرموتيشن (ځاي بدلون)بې له تکرار داسی »يوځاي درول« دي، په کوم کی
چي n غړي په يوه د زړه پورې ترتيب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتيبونه
تل د مختلفو پرموتيشنونو يا ځايبدلونونو په مانا ده
بيلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتيشن

الف : 2 1 دی 12 21

ب : a , m دی a m m a

۲ - د درې غړو پرموتيشنونه
الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایي ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیداینتي ده، چې د پښتو لیکسیکایي ترتیب پجه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کڼ کښته لور ته بیا بیرته پورته

amsu	masu	samu	uams
amus	maus	saum	uasm
asmu	msau	smau	umas
asum	msua	smua	umsa
aums	muas	suam	usam
ausm	musa	suma	usma

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ (ا ت ج ګ دي:دلته طبعآ له ښي وکيڼ لورته ترتيبيږي(

اتجګ تاجګ جاتګ ګاتج

اتګج تاګج جاګت ګاجت

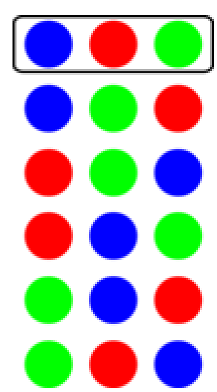
اجتګ تجاګ جتاګ ګتاج

اجګت تجګا جتګا ګتجا

اګتج تګاج جګات ګجات

اګجت تګجا جګتا ګجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلګی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دي مانا چی د ليکسکا لغاتو ترتيب ته »کتې متې« (ورته) دی، چی د غړو پيداينښتي لړی مخته پرته وي (په تورو، په ګنونوکنطبعی يو په بل پسي). دبيلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دې غړو) يا تورو(جوړ شوي پرموتيشنونه) لغاتونه(maus همدا رنګه saum په دي ترتيب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ (کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ګ پرموتيشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی يي تاګج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی يي جتاګ ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته درې غونډارو لپاره نظم يا ترتيب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

كه ليكو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي ليكو : $6! = 720$

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتيشنونو Pn ګڼون (شمير يا تعداد) ، د n يوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $n = Pn!$

اوبنونه : د پوره ایندکشن له لارې :

داېندکشن پيل : $(n = 1):\quad P_1 = 1! = 1$

د ايدکشن نيونه : $(n = k):\quad P_k = k!$

د ايندكشن غوښتنه : $(n = k+1):\quad P_{k+1} = (k+1)!$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په k! پرموتيشنونو كی د ځل په څير يو(k+1) -ام غړی راځي. دا (k+1) - ام غړی كيدی شي له لومړې تر (k+1) - ام ځاي پورې ودرېږي، داسی چی د (k+1) -ام غړي ورنيولو د هر k غړو پرموتيشن k+1 پرموتيشنونه د k+1 غړو پرموتيشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\,(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بيلګه :

په څومره مختلفو لړيو پرلپسی (دا مړضوع په ۱۸ برخه كې كتلی شی) كی لس زدكوونكی په يوه ليست كی خپل نومونه ليكلی شي ؟

اوبی يا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتیبونه، د کومو څخه چې i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کیږي،

د i = 1 , 2 , ... ,k لپاره، نو پرموتیشن د تکرار) د تکرارسره پرموتیشن(سره نومیږي . د غړو شمیر په پرموتیشن کی بیا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

بیلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتیشن په کوم کی چی غړی a یو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کیږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دې ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتیشن، په کوم کی چی a دوه ځله، غړی b درې ځله رامنځ ته کیږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندې ډول دی

abbba abbab ababb aabbb
babba babab baabb
bbbaaa bbaba bbaab

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتیشن ګڼون یا تعداد $P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)}$ ، له کومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کیږي ، په لاندې ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه یا اوبیونه: که په پرموتیشن کی n = n1 + n2 + ...+ nk (دلته دې ګڼونه دn اینډکس کې ومنل شي) غړو یو له بل توپیر لرودی (مختلف وي) ، نو n! پرموتیشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچی د ni غړو لپاره !ni پرموتیشنونه موجود دي، نو ni پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څیر رایو ځاي کیږي،

دا په دې مانا چی د!n شمیر په $n_i!$ باید وویشل شي (i = 1 . ..., k)

بیلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کی چی لومړی (n_1-1) -ځله او دویم (n_1-2) -ځله رامنځ ته کیږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دویم (n2 = 3) -ځله رامنځ ته شي، دی

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ وارییشن اوښتنه یا بدلیدنه Variation :

تعریف ۱۰ . ۵:

د n غړو واریشن (بدلیدنه یا اووښتنه Variation) لاتین(بدلونه اووښتنه تغیرونه یا بیا تغیرونه) و k -ام ټولګي ته(وهرې k ټوټی ته، n ≤ k) هر له k غړو یوځانکول (بوځاي درول، یوځاي لیکل) دی، کوم چی د n غړو د لړی پرلپسی په نظر کی نیولو سره جوړیږي..

بیلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c وارییشن و دویم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ab	ba	ca
ac	bc	cb

۲ - د څلورو غړو d , a , b , c واریيشنونه و ۲ - م ټولګي ته دي:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

د څلورو غړو d , a , b , c واریيشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دې

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واریيشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو واريشنونه و n -ام تولګي ته د n غړو پرموتيشن سره يو شی يا برابر كيږي

جمله ١٠ ٠ ٤ :

د n غړو و k -ام تولګي ته د واريشنونو ګڼون (تعداد) $V_k^{(k)}$ دی :

$$V_k^{(k)} = n(n-1).(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبښونه : د مكلمل (پوره يا بشپړ ايندكشن له لارې) ايندكشن په k اړه لري، n ځاي په ځاي دی يا ځاي په ځاي كلك ولاړ دی

ايندكشن پيل :(k = 1)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټيك (صحيح) دی ، ځكه چې له n غړوكيدی چې له يوه غړی جوړ واريشنونه جوړكړی شي.

ايندكشن نيونه : (k = k0) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ايندكشن غوښتنه(ثبوت:):(k0 +1 = k)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دايندكشن ښوونه :   د k0 - م درجې هر واريېشن لپاره، په
دې واريېشن کې نه رامنځ ته كيدونكو پاتې   n - k0
غړو شمير دی .كه په ترتيب يو له دې n - k0 غړو د دې k -م تولګی واريشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې يو دk+1 تولګي n - k0 واریشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واریشنونو $V_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واريیشنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0)=\frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې یود n - k0 غړو ورزیات په یو بل ځای کیښوولی وی، نو یودk+1 تولګي واريیشن به یی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دئ. دا سړی په بیلګه ۲ (3= n = 4, k = 2 , k (باندې لیدوړ کولی شي)

بیلګي:

۱ - د درې غړو واريیشنونو شمیر و دوم تولګي ته دی : $v_3^{(2)}=\frac{3!}{(3-2)!}=6$

۲ - د څلور غړو واريیشنونو شمیر و دوم تولکی ته دئ: $v_4^{(2)}=\frac{4!}{(4-2)!}=12$

د څلور غړو واريیشنونو شمیر ودریم تولګي ته دئ: $v_4^{(3)}=\frac{4!}{(4-3)!}=24$

۳ - د پنځه غړو واريیشنونو شمیر ودوم تولګي ته دئ: $v_5^{(2)}=\frac{5!}{(5-2)!}=20$

پیژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واريیشنونه و k - ام تولګي ته په کوم کی چی یوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واريیشنونه د تکرار سره نومیږي یا بلل کیږي.

بیلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واريیشنونه و دوم تولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

aa	ba	ca
ab	bb	cb
ac	ba	cc

۲ - څلور غړو a , d , c , b د دویم ټولګی واریشنونه د تکرار سره دي:aa

	ba	ca	da
ab	bb	cb	db
ac	bc	cc	dc
ad	bd	cd	dd

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دریم ټولګي واریشنونه دي(دا لاندې ولاړ ترتیب له کیڼ وښې لور ته دی، خو په لاندې کې په څټ شوی)

111	211	311
112	212	312
113	213	313
121	221	321
122	222	322
123	223	323
131	231	331
132	232	332
133	233	333

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام ټولګي د واریيشنونو شمیر $V_{W_n}^{(k)}$

$V_{W_n}^{(k)} = n^k$ د تکرار سره دی: $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل (k = 1) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحیح دی، ځکه چی له n غړو څخه n واریيشنونه،چی هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه (k0 = k) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه (k0+ 1 = k): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د (k0 + 1) -ام درجی واریيشنونه د nk واریيشنونو چی k0 – امه درجه واریيشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چی له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دې، چی په واریشنونو بی له تکرار شوې ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمیر $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ واریيشنونه دی.

بیلګي :

۱ - د درې غړو و دوم ټولګي ته د واریيشنونوشمیر له تکرار سره دی

$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$

۲ - د څلور غړو و دوم ټولګی ته د واریيشنونو شمیر له تکرار سره دی

$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د درې غړو و دریم ټولګي ته ض واریېشنونو شمیر له تکرار سره دی

$$V_{w3}^{(3)} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښې یوځای کیږي.

د یوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښو شمیر دئ

$$V_{w2}^{(1)} + V_{w2}^{(2)} + V_{w2}^{(3)} + V_{w2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبینیشن (Kombination (لاتین: یو بل سره تړل)

تعریف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته (n > k) یو کمبنیشن هغه دئ چې هر یو له k غړو یوځاي دروولو څخه ، کوم چې له n غړو، بې د غړو له نظم په پام کې نیولو سره، جوړوي.

کمبینیشن له واریېشن منځ ته راځي، که چیری نظم په پام کی ونه نیول شي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډول دی:

ac bc

۰۰۰۰۰ ac

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډل دئ

ab bc cd

۰۰۰۰۰ ac bd

۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ad

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې ځلو غړو ودریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي:

abc bcd

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي(لاندی هم باید له کینې لاندې لورته په ښی لور لیکل شوي وی)

123 234 345

124 235

125 245

134

135

145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)}=\binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اوریپشنونو شمیر دی:

$$V_n^{(k)}=\frac{n!}{n-k}$$

کمبینیشنونه له واریپشنونو په دې توپیریږي، چې ترتیب په نظر کی نه نیول کیږي، دا بیا دا مانا لري چی ټول د k غړو !k پرموتیشنونه په یو کمبینیشن کی یوه ته یوځاي کیږي .له دې امله لرو :

$$C_n^{(k)}=\frac{V_n^{(k)}}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!.k!}=\binom{n}{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینشنونو شمیریا ګڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دی‌د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمیر دی

الف (یو شپږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : یو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تیپ عددونه د یوه ۴ عددونوګروپ څخه بوځاي کیږي، چی له ایستل شوو شپږ عددونو (۴ تیک یا صحیح) او دوه عددونه(۲ پاتی عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبینیشن، په کوم چې یواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبینیشنونه د تکرار سره نومیږي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینشنونه دي.

aa ....

bb ab ......

cc bc ac

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي

aa ....

bb ab ....

cc bc ac ....

dd cd bd ad

۳- د درې غړو 1 , 2 , 3 و دریم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي(لاندې لیکنه باید له کیڼ لور پیل وی، خو دلته له ښی لور پیل شوی وکیڼ لور ته)

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تكرار سره د كمبينيشنونو شمير يا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی(چې په kد پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دويم ټولګي ته د تكرار سره كمبېنيشنونه ګڼون يا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دويم ټولګي ته د تكرار سره كمبېنيشنونه ګڼون يا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دريم ټولګي ته د تكرار سره كمبېنيشنونه ګڼون يا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مكعبونو ، چې اړخونه يې د يوه تر شپږ نخښه وي . (نخښه شپږ اړخيز) ممكن مختلف اچول ، په دې مانا چې كومې سترګې سره لوېږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،واریيشن،کمبینیشن ټولګه

دااا	د په یا یوې برخې راټولونه م کی نیولو شوو غړو		د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه
	له نظم تیریدنه	نظم په پام کی نیونه	
	کمبینیشن	واریيشن	پرموتیشن
د ټول غړي یوله بل توپیر لري	د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	د n غړو واریيشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$	دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګڼون $P_n = n!$
له تکرار سره	د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$	د n غړوواریيشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)} = n^k$	د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,\dots n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ – لاندې فاکولتې وشمیرئ

الف) 7! ، ب) 3!.5! ، پ) 6! / 4!.I0!

۲ – لاندې ویشونه ساده کړئ

a) $(n+1)! / (n-2)!$ b) $(2n)! / n!$ c) $n! / 2n!$

۳ – لاندې افادې وشمیرئ!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\frac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زیاتونونه وشمیرئ!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونې (استعمال) په بنسټ وګڼئ!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2 - y/3)^4$ e) $(2\ \ a+3\ \ b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده کړئ!

a) $(-1+a)^2 - (1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2$

c) $(\ \ ab - 1)(-a - \ \ ab) + ab$

۷ – د بینوم په یو ځل یې بیل (تجزیه) کړئ!

a) $25a^2 + 10\,ab + b^2$ b) $(49a^2 - 42a + 9$

c) $169a^2 - 130\,ab + 25b^2$ d) $2x+2.\ \ 6xy + 3y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ - الف) د غړو ۱ ، ۲، ۳ ، ۴ پرموتیشنونه په لکسیکوگرافي نظم ولیکی!
ب) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو ځایونو کی« fahne » او«hafen » ولاړ دي؟ دا المانی کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر» دي.

۹ - الف) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟
ب) څومره پنځهٔ ځیفري ګڼونه د پنځه ځیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟
پ) د غړوa,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ – الف) د غړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکی، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.
ب) د دې پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګڼی!

۱۱ - څومره تنظیم شوي جوړې د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ – د څلورم ټولګي څومره مختلف وارییشنونه د
الف) بي له تکرار
ب) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟

۱۳ – یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرځونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دی. څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو ځل سوری شي؟

۱۴ - له شپږ غړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دی،
الف) بي له تکرار
ب) له تکرار سره؟

۱۵ - یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ – څومره مختلفی ازمایني ممکن دي که په یوه تولید کی له هر ۲۰ یوه وازمایل شي؟

۱۷ – په موټرو ترافیك نخښې په لاندې توګه یوځای شوی : یوه د ځاي نښونه ډله د نخښې الف بې پسې څلور ګروپ یا ډله راځي، چې له څیفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د یوې کره ټاکلې الف بې پیژندنښې یا ترافیکی نخښې ممکن دي؟

۱۸ – د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه ، د رنګونی له لارې یو له بل توپیریدی شي ، که څلور رنګ نښوني ولرو؟

۱۹ – د منډې یوه میچ په اخرکی شپږ پاتی منډې وهونکی برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟

۲۰ – په څومره ډوله

الف) اته مختلفی مرغلرې،

ب) درې سرې، څلور شنې، یوه زرغونه مرغلره

ترتیبیدلی شي؟

۲۱ – څومره تلفونونه کیدی شي وتړل شي کی یواځې پنځه ځایزه نمره موجود وي؟ څومره تلفون تړل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځایزې وي او په 0 پیلکیدنه یې اجازه ونه لري؟

۲۲ – د درې شپږسترګیو (یا –اړخیزو) سره (څیره مکعب دی اومخونه له یوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته یې د پښتو نوم نه راځي او االماني یې Würfel دی) څومره مختلفی اچونی ممکن دي، چې ټولې شپږسترګې مختلفې سترګې ګښون وښايي؟

څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګیو سره ممکن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چې څه به تکرار وي، خو هغه لاتین متل دی، چې » تکرار د زدکړې مور ده .«

لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چې n اووښتونې یا مجهولی یا ناپیژندونکی لري، وقف ده، چیرته چې m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی شي

په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر څیړنی لاندې نیول کیږي، چې د ښوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي، چې د حالتونو توپیریدنه یې اړیینه ده۰

دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی درې ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .

په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نیسي۰

یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

مورږ د برابرونونو له څیرې پوهیږو، چۀ دا یوه کرښه ورکوي، چې لاتین یا کۀ غواړی انګریزي یې لاین نوموليٰ. د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسي منځپانګی سره یې توپیر وي،نو مورږ هم ورته له دې امله لاینیز وایو.

۱۱ . ۱ . لاینیز برابرون د دوه ناپیژندونکو سره

داسی یو مساوات د دوه ناپیژندونکو سرهکیدي چې په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11.1)$$

دلته کیدی شي چې ناپیژندونکی لویي x او y په خوښه رییل ګڼونه وي چې یو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. یا په بل عبارت : x او y واریابلی(اووښتونکی یا لنډ: اووښتوني) دي، برابرون (۱۱ . ۱) لاینیز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چې د هغې څیره په y,x کواوردینات کی ناپای کرښه ده(۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)

ځانګړی حالت : a = 0 یا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي یا په ګوته کوي چې د y - محوراو همداسی د x - محور سره غبرګه د ه .

که دا (۱ . ۱۱) برابرون د دواړو نایژندونکو یا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات یا ټاکنبرابرون ونیول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ددې مسئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهیدل غوښتونکی وي.

د (۱۱. ۱) برابرون اوبیونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x ,y) ډیری ده، چې(۱۱.۱) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱) د y په لور داسی ځوابوو.

$$y = -(a/b)\,x + c/b \qquad (11.2)$$

کیدی شي چې x په خوښه وټاکل شي اوy له (۲ . ۱۱) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چې ناپاي ډیرې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځی یعني د اوبیونې ډیری یا اوبیډیری L په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = -(a/b)\,x + c/b \} \quad (11.3)$$

داسې لوستل کیږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډیری ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون)۰

ددې لپاره لنډ لیکل کیږي: د (۱۱ . ۱) برابرون اوبی یا حل $y = -(a/b)x+c/b$ ،د خوښی x ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

طبعآ کیدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نیسو، نو د لته د برابرون (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښهy ۰

دا چي په لاندې کی مور د درېو یا ډیرو ناپیژندونکو یا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپیژندونکې د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, ...$ سره .

ددې په نخښونو سره کیدی شي چی په څرگند ډول وښایو:

لاندې برابرون د دوه ناپیژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, ...(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دې مانا چی ۰۰۰i = 1 , 2, 3 ناپیژندونکو یا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کیښوول کیدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, ...(11,5)$$

x_2 په خوښه

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; ....(11,6)$$

x_1

په خوښه

د a1 =a2 = b = 0 (0.x1+ 0.x2= b = 0(لپاره ناپای ډیر ځوابونه

د په خوښه

$$x_1, x_2, ...(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$

لپاره

$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$

په ځتوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.

نوټ : دلته

∞^i

دا مانا لري چی د ناپیژندوني یا مجهولی

x_i

لپاره i = 1,2.. په خوښه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاینیز برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سره

د دوه برابرونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1a_{12}x_2 = a_1$$

$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;..................(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کیدی شي چی په اووښتونو یا واریابلو x 1 اوx2کی د بلواکبرابرون یا فنکشنمساوات په ځیر ونیول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښي یو بل غوڅي کړي نو دا د مساواتو په سیستم (۸ . ۱۱) کی د کرښو یوګونی(بهتره : یوګونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی) اوبیونه ده یا حل دی.

که دواړه کرښي یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چي II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چی د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخي ټیك یا فقط مساوات I یا مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډیر

∞^1

ځوابونه موجود دي.

داسي هم کیدی شي چی فورمال

∞^2

رامنځ ته شي، که ټول

$a_{ik} \wedge a_i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څېړو. دا څیړو چی، که دا برابرون اوبیونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کیږي، چي کرښه I اوکرښه II غبرګي ځغلي مګر یو په بل نه وي پرتی.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپیژندونکو یا اووښتونو سره، کیدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - یو یواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دی (اصلي حالت)

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دی پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لري)

۳ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابره دی)

۴ - ناپاي ډیر ځوابونه موجود دي.

(ټول $a_{ik}=0$ او ټول $a_i=0$ دي)

د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپیژندونکی لري، کیدی شي په اسانتیا وپیژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دی.
په سیستمونو کی چي درې یا زیاتي واریابلی یا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پیژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنکه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پیل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پیدا کړو. دلته باید دري بنسټیز د مساواتسیستم د ځواب کاردودونه)متودونه(تکرار شي:

۱ . د برابر یا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:
دواړه برابرونونه د یوې نامعلومی په لور اوبی کیږي(د بیلګي په توګه د x دوه په لور(، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابرون د یوې نامعلومي سره منځ ته راځي۰

۲ - یو د بل پر ځاي کینولو متود:
برابرون یا مساوات د یوې ناپیژندونکې (د بیلګي په توګهx دوه) په لور ځواب کیږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کیږي، په دې ډول د یوې ناپیژندونې برابرون منځ ته راځي (د بیلګي په توګه دx یو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د زياتون کارونه (جمع کولو عمليه):

سړی يو ټاکلی څو برابره (کيدی شي چی کميز يا منفي هم وي) د II برابرون د I برابرون يوه ټاکلي څو برابره سره زياتوي، داسی چي يوه ناپيژندونی بيا مخ ته نه راځی يا له منځه ولاړه شي. د نيتجي سره بيا دا بله ناپيژندوني څيري. دا د داوړو نامعلومو(ناپيژندونو) لپاره کيداي شي . دا متود دبرابرونونو د سيستم لپاره بنسټيز دی چی د ديترمينانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .
دا متود په دريې ځانګړو برابرونسيستمونو باندې بايد وکارول شي، ټول ځلورځلوني(ځله ووني يا ضريبونه) بايدله صفر توپير ولري يعني $a_{ik} \neq 0$ که چيرې يو $a_{ik} = 0$ د بيلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بيا به مساواتو په لاندې ډول د دريګوډي جوړښت لرودی:

$$I............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;......a_{11} \neq 0$$

$$II....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;..........(11,9)$$

دلته نو
$a_{21} = 0$

بيا له II سيده راويستل کيدی شو او د نتيجي څخه يي چی په I کی کښيښودل شوې وی x_1 هم معلوميدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوريتم په استعمال بيا برابرون د دريګوډي شکل باندې اړول کيږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :

سيستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4

II x1 - 2x2 = -5

دا سيستم يواځنی يوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړيکی نه لري

سيستم ۲

2x1 + 3x2 = 4

II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانۍ ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دئ . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښايی او په دې ډول د مساواتو اوبيونې ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بې ډیله څرګنده ده چې برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په خټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چې II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بېلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$
$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$
$$-(7/2)x_2 = -7$$
$$x_2 = 2;\Rightarrow$$
$$x_1 = 2-(3/2).2$$
$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځاي کینولوکاروونه (عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کی ځاي په ځاي کیږي۰

$$II':;.........x_1 = 2x_2 - 5$$
$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$
$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$
$$7x_2 = 14$$
$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ) د زیاتونکاروونه: x_1 له منځه ځي، که (2-) ځله د II برابرون و I ته زیات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I:................2x_1+3x_2=4$$
$$(-2)II:........-2x_1+4x_2=10$$
$$I-2II:....................7x_2=14$$
$$..................................x_2=2$$

کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II څخه x1 وشمیرل شي:

$$x_1=2x_2-5=4-5=-1$$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي x2

له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$$2.I:............4x_1+6x_2=8$$
$$3.II:............3x_1-6x_2=-15$$
$$-------------------$$
$$2.I+3.II:........7x_1..........=-7$$
$$........................x_1.............=-1$$

یادونه : په پورته کې یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته ابنسول کیږي، پوهیږو، چې چیرته ټکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :

سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف (مساوي اینوولو:

I' : x1 = 2 -(3/2).x2

II': x1 = 2 -(3/2)x2

2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x

0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته
x2
په خوښه. دا په دي مانا چی
x2
هر ارزښت نیوی شي ۰ له 'I څخه ناپای ډیر ځوابونه لاس ته راځي
x1 = 2 - (3/2)x2 او x2 په خوښه.

ب) د بل په ځاي ایښوولومتود: I' x1 = 2-(3/2)x2 ,
په II کی ایښول کیږي

II' 4.(2-(3/2)x2) + 6x2 = 8
8-6x2+6x2 = 8
0.x2 = 0 x2
په خوښه له 'II لاس ته راځي
I' : x1 = 2 - 3/2 x2 x2 په خوښه

پ) د زیاتون متود یا لار یا طریقه:
2.I 4x1 + 6x2 = 8
II 4x1 + 6x2 = 8

II - 2.I : 0x1 + 0x2 = 0
که یواځی دا مساوات په نظر کي ونیول شي ، نو x1 او x2په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چی د x1 او x2 ترمنځ په I یا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یواځي یوه ناپیژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:
x1 = 2-(3/2)x2
x2په خوښه
په همدې ډول:
x2 = 4/3 -(2/3)x1 ,
دلته x1 په خوښه ټاکل کیږي

بیلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته دريې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$I': \quad x1 = 2 -(3/2)x2$

$II': \quad x1 = 5/2 -(3/2)x2$

$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$

$0.x2 = 1/ 2$

دا يو په ښتوالی یا تضاد دی، ځکه چی هيڅ يو رييل ګڼ x2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته يا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي ليکلو عمليه: $I': \quad x1 = 2 - (3/2)x2$,

په II کی دی په ځای شي

$II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$

$8 - 6x2 + 6x2 = 10$

$0.x2 = 2$

دا مخامخوالی يا په ښتوالی یا تضاد دی ، پس ځواب نه شته.

پ) د زياتون متود:

$2 . I \quad 4x + 6x = 8$

$II \quad 4x + 6x = 10$

$2.I - II \quad 0.x + 0.x = -2$

په ښتوالی یا تضا د دی ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بيلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پيښتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه ګوته لك کړو.

بيلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم يا بڼه برابرونسيستم ورکړ شوی:

$I \quad x /(a+b) +y/(a-b)$

$II \quad x /(a-b) +y/(a+b)$

دا ټيك هلته موخه ور يا هدفمند دی چی $a =| b$ او $-a =| b$ وي، يعنی $|a| |= |b|$ وي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي چی دا سيستم د پورتنيو متودونو څخه په يوه متود ترلی ځواب کړي، د يوه د مخه ورکړ شوي فورم يا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کيدی شي.
لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:
د I ځل له (a+b)/ 1 او II ځل له (a-b)/ 1- څخه وروسته دا لرو:

$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$

$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$

له دې سره د y دواړه ځلهووني ياضريبونه يو د بل مخامخ (يا په بل عبارت يو د بل په ځت) نخښی لري او له دې امله د زياتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توگه مو يو برابرون د يوې ناپيژندونکی سره مخ ته پروت دی:

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له (a+b)/ 1 او IIله (a-b)/ 1- سره ځل شي کيدی شي: چی y په ورته ډول وشميرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپيژندونکی مساوي دي، کومی چی ځمونږ د څيرنی لپاره بي مفهومه دی.
دا د x , y لپاره شميرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.
نو څيړو چی کوم حالت توپير د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات) * (تر څيرنی لاندې نيسو او درې حالته توپيروو:

1. a = 0 , b |= 0

مساوات)*(داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سيستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

2. a |= 0 , b = 0

برابرون(*)(په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی يا په څتوالی يا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو , $y = a - x$ دلته x په خوښه دی

3 . $a=b=0$

دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دی.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د $(3x-2y)(2x-3y)$ سره ځلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کيږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لويي x , y راپيدا کړو . مور ځاي پر ځاي کو

$u=1/(2x-3y)$,$v=1/(3x-2y)$

او لاس ته راوړو:

$11u+18v=13 \iff 11u+18v=13$

$27v-2u=1 \qquad -2u+27v=1$

مور د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$33u+54v=39$

$4u-54v=-2$

$37u=37$

$u=1 \Rightarrow v=1/9$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$1=1/(2x-3y) \iff 2x-3y=1$

$1/9=1/(3x-2y) \iff 3x-2y=9$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $x = 5 , y = 3$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ . ۱ . ۳ دویمه درجه دیترمیناتې او د کرامر قاعده

که په ټولیز سیستم(11.8) باندې د زیاتون متود استعمال شي، نود x2 د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{12}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ (وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - _{21}.I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \ldots\ldots\ldots(11,12)$$

که د ارزښتونه په (11 . 8) کی ځای په ځای شي نو تصدیقیږي، چی(11 . 12) په ریښتینی د (11, 8) ځواب دی. له (11 . 10) تر (11 . 12) سرې په واقعیت یا ربښتونی کی د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي(لارښودوي.)

پیژند ۱۱ . ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه رییلو ګڼونو $a_{ik}, (i, k = 1, 2)$ د ۲ -امه درجه دیترمینانت لاندې ، لاندینی ګڼ پوهیږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots(11,13)$$

د اصلي دوه کونجتړي یا دیاګونال (قطر) د توکوځل، ترې کم(منفی) د ځنګ یا فرعی دوه کوجنتړي(قطر) د توکو ځل(یا) د اصلي دوه کونجتړې یا قطر د توکو ځل ځخه د ځنګ یا فرعي دوه کونجتړې د توکو ځل کمیږي یا منفی کیږي)

یادونه : دا اوس او وروسته دیترمینانت بڼه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په دیترمینانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (11 . 13) کی د xi ځله ووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په (11 . 8) سیستم کی . د (11.13) دیترمینانت له دې امله د (11 8) (له ماځخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدلیږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شمیرپوهنیزه ناسمي منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو (ضریبونو) دیترمینانت بلل کیږي.

که په (11. 13) کی لومړی (درز، ستن یا مته یا ولاړه لیکه یا-کیله) د دیترمینانت ولاړه لیکه(په ځای) چی د xi ځله ووني یا ضریبونه دی د (11 . 8) برابرونسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 وليکل شي نو(په x1 اړونده) لاندې
ديترمينانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{22} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه يا نمره دې) ۱۱،۱٤ (وي‌په همدې ډول که د) 11 . 13 (
ديترمينانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې ديترمينانت لاس ته
راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,15)$$

که له (11 . 10) تر(11 . 12) پورې له (11 . 13) تر (11 . 15) پرتله
يامقايسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۱ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو يا ضريبونو ديترمينانت لپاره په (11. 13) کی

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سيستم (11 . 8) يوائځنی ټاکلی ځواب لري

x1=D1/D ; x2 = D2/D /11,17)

په داسی حال چی D1 او D2 د (11 . 14) او (11 . 15) له مخی شميرل کيږي.
د (11 . 10) او (11 . 11) له امله لرو

جمله ۱۱ . ۲ :
که په (۱۱ . ۱۳) کی د ځلونو ديترمينانت D لپاره باوري وي

0 = D (11,18)

او د کم له کمه يوې ډيترمينانتD1 يا D2 لپاره په (14, 11) يا (11 , 15) باوري
وي

D1|=0 V D2 |=0 (11,19)

نو (11 . 8) سيستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون يی يو د بل سره مخامخ دي (
تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :

باوري دي

D=D1=D2=0   (11 . 20)

نو يو له برابرونونو I يا II زياتي دي) دواړه برابرونونه يو بل ته اړ دی یا د بل په واك کی دي(او د ۱۱ . ۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعماليدلی شي يا کار ترې اخستل کيدی شي.

د ښوونبيلګو په څير دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلګي (۱۱ . ۱ . ۲ برخه) کارول شوي سيستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونکي په ديترنمنانتو ځواب کړي، که چيرې ما دا کار سرت ونه رساوه۰.

بيلګه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7\neq 0$$

پس يواځنی ټاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\-5 & -2\end{vmatrix}=-8+15=7\neq 0; D_2=\begin{vmatrix}24\\1-5\end{vmatrix}=-10-4=-14$$

له دې امله باوري دی

x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,

بيلګه۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}23\\46\end{vmatrix}=12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix}43\\86\end{vmatrix}=24-24=0; D_2=\begin{vmatrix}24\\48\end{vmatrix}=16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپاي ډير ځوابونه موجود دي) بيلګه١١ . ٢ دې وکتل شي.)

بيلګه ١١ . ٨ :   د سيستم ٣ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D =   2   3   =12 -12 = 0

او ورپسی

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی ځواب نه شته(د 0=| D2 = 4له شميرلوکيدی شي، چی تيرشو)

بيلګه ١١ . ٩ :

موږ بالاخره غواړو چي په بيلګه ١١ . ٤ کی ورکړ شوی مساواتسيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی   D , D1 او D2 شميرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{a^2-2ab+{}^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}=-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت ab |= 0 :

دلته دیترمینانت D |= 0 او دا د برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x=\frac{D_1}{D}=\left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right):\left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right)=\frac{2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{4ab}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د D1 = D2 له امله)

دوم ۱ حالت a=0,b|=0 : دلته D = 0 مګر
D1 = D2 |= 0
او د مساواتسیستم ځواب نه لري
دوم ۲

دلته D = D1 = D2 = 0
او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلګه ۱۱ . ۴ کي ښوول شوي .
دوم ۳ حالت a = b = 0 :

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو سیستم دې د لاندې بريالي فورم بدلولو وروسته دبيلا بيلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دې يو د بل سره پرتله يا مقايسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$
$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

١١ . ١ . ٤ د ګاوس الګوريتم

په ١١ . ١ . ٢ . برخه کي ځيرل شوو متودو ټيك په نظر نيولو سره (برابرو ليکلو- په ځاي - او د زياتون عمليه) ، کره پوهيدلی شو چی ددې په مرسته ټوليز د برابرونسيستم (11 . 8)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په يوه درېګوډيز جوړ سيتسم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بيا خورا ساده ځواب کيدی شي

١ . که 0 =| a22 وي، نو لاس ته راځي:

الف) x2=a2/a22

ب) برسيره پر دې که $a_{11} \neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=
(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)

٢ . که a22 = 0 او a2 |= 0 وي نو ځواب موجود نه دی يا نه شته

٣ . که a22 =0 او a2 = 0 وي، نو ٢- م برابرون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بيا ا. برابرون د ١١ . ١ . ١ برخی متود په مرسته ځوابولی شي.

د (11 . 8) سيستم د ځواب پرابلم په دې ډول کميږي، چی دا سيستم په دريګوډی بڼه يا – ځيره واړوي . هغه الګوريتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس الګوريتم دی. يا (11 . 8) سيستم دريګوډی ځيره لري او يا ټول aik د صفر سره برابر نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی (11 . 8) سیستم په روځنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

		x1	x2	RS
I	$a11x1+a12x2= a1$	a11	a12	a1
II	$a21x1+a22x2= a2$	a21	a22	a2

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پریښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - ځله له I برابرون ښځه کم شي ، نولرو

		x_1	x_2	Rs
I	$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$	a_{11}	a_{12}	a_1
II'	$0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$	0	$a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$	$a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$

که II' لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

		x1	x2	RS
I	$a11x1+a12x2= a1$	a11	a12	a1
II'	$b22x2 = b2$		b22	b2

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که $b22 |= 0$ وي ، نو x2 له II' او x1 له I لاس ته راځي.
-که $b22 = 0$, $b2 |=0$ وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که $b22 = b2 = 0$ وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی له I
او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریګوډیځیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پریږدو او له II څخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له II' لاس ته راځي $x2 = 2$
او له I څخه لاس ته راځي. $x1 = 2 - (3/2)\ x2 = -1$

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (څیړو. دلته د لمړی لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۲

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	8
II'=II-2.I	0	0	0

سیستم ۳

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	10
II'=II-2.I	0	0	2

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په څیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلکه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅیړل شي

دوم واریانت — اول واریانت

x1 x2 RS — x1 x2 RS

I 2 3 4 — I 2 3 4

II 1 -2 -5 — II 1 -2 -5

II'=II+(2/3).I 7/3 0 -7/3 — II'=II-(1/2).I 0 -7/2 -7

1. 2 1 -1 — 2. -1 2. 2

څلورم وایانت — دریم واریانت

x1 x2 Rs — x1 x2 RS

I 2 3 4 — I 2 3 4

II 1 -2 -5 — II 1 -2 -5

I=I-2.II 0 7 114 — I'= I+(3/2).II 7/2 0 -7/2

2 1. -1 1. -1 — 2. 2 2.

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا څلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوي، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب) له II' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

$$x2= -7 / (-7/ 2) =2$$

ت) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$$x = (1/ 2)(4 - 3.2) = -1$$

واریانت ۲ :

ا) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له II' څخه دې x1 وشمیرل شي
پ (له II' لرو: 1- = x1
ت) له I څخه لرو: x2 = 2
واریانت (امکان) ۳
ا) له II څخه دې x2 وشمیرل شي
ب) له I' څخه دې x1 وشمیرل شي
پ) له I' لرو 1- = x1
ت (له II لرو x2 = 2
واریانت (امکان) ۴
ا) له II دې x1 و شمیرل شي
ب) له I' څخه دې x2 وشمیرل شي
پ (له I' لر x2 = 14 / 7 = 2
ت) له II لرو:
x1 = -5+2.2 = -1

ټولی څلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واریانت کی په ټولګڼونو شمیرنه کیږي، »مخته ونه« یا مخوونه(برتري) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زیات برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سرهره

که څوك له دوه زیات برابرونونه د دوه اوښتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توګه باید په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه x1, x2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توګه حل نه لري. یوائې په ځانګړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څیړو او بیا د ګاوس الګوریتم له لارې.

بیلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

a) I x1 + 2x2 = 3 b) I x1 + 2x2 = 3
II 2x1 - x2 = 1 II 2x1 - x2 = 1
III 3x1 + x2 = 2 III 3x1 + x2= 4

له I او II څخه د څرګندو یا معلومومتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی ځل یوائنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

له a) او b) ځخه لرو $x1 + 2x2 = 1$ که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په (a) کې $:3.1+1.1 = 4 =| 2$, په (b) کی : $4 = 1.1 + 3.1$

نو سیستم (a) ځواب نه لري او سیستم $\hat{b}$) یواځني ټاکلی ځواب لري

یعني $x1=x2=1$

بیلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بیلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوت اوس د ګاوس د الګوریتم له لارې ځواب کوو.

a)

	x1	x2	RS
I	1	2	3
II	2	-1	1
III	3	1	3
II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=II-3.I	0	-5	-7
III''=III'-II'	0	0	-2

b)

	x1	x2	RS
I	1	2	3
II	2	-1	1
III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5
III=III-3.I	0	-5	-5
III=III'-II'	0	0	0

په a) کی تضاد پیژندلکیږي ($III':0.x1+0.x2=-2$) ځواب نه شته یا وجود نه لري .

په b) کی تضاد مخ ته نه دی پروت .($III':0.x1+0.x2=0$) لهII' ځخه لرو:

$x2 = 1$ او له I ځخه لاس ته راځی : $x1=3-2.1=1$

۱۱ . ۲ لاینیزبرابرونتسیستم د دریې ناپیژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ یو برابرون د دري ناپیژندونکو سره

مو ږ یو مساوات د دري ناپیژندونکو سره تر ځیرني لاندې نیسو:

$$a11x1 + a12x2+ a13x3 = a1 \quad (11 . 21)$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

$$I . \quad a11=a12=a13=0 \quad (11 . 22)$$

دلته $x1 , x2$ او $x3$ یو له بل پوره خپلواك ټاکل کیدی شي. ویل کیږي چی ناپاي ډیر ځوابونه مخ ته پراته دي ($x1$ په خوښه، $x2$په خوښه او $x3$په خوښه)

$$2. \quad a11=a12= a13= 0 ,a1|=0 \quad (11 . 23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$$0x1+0.x2+0.x3 = a1 \neq 0$$

اوبيونه نه شته.

۳- د کم له کمه يوه ځلجوړې i , k لپار دې aik ≠ 0 وي. (بې د تولیز وبنديزونو يا عموميت د محدود والی دې a11≠0 وي (. کيدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي (ناپاي ډير ځوابونه)، او لاس ته راځي

x1 په خوښه x3 او (11,24) $x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3)$

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپيژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسيستمونه د درې اوښتونو يا ناپيژندونکو سره

$$a11x1+a12x2+a13x3=a1 \qquad (11,25)$$

$$a21x1+a22x2+a23x3= a2 \qquad (11,25)$$

موږ دا را ويستلي حالتونه ، چيرته چی د ټولو i, k لپاره aik= 0 ، په پام کی نه نيسو. دا حالت هم په پام کي نه نيسو چی دوم برابرون د لومړي په ځير وي (ناپاي ډير ځوابونه. او يا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي يا ښتوالي يا تضاد کی وي (ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پيژندونکي دي. موږ په يوه بيلګه کی دا اصلي حالت څيړو چی يو ناپيژندونکي يا نامعلوم (د بيلګي په توګه x3) په خوښه ټاکل کيږي او دا نورې دوه ناپيژندونکی يا اووښتونې (x1 او x2) يواځنی لاس ته راځي، او يا يواځنی ورکول کيدی شي (ناپاي ډير ځوابونه).

بيلګه ۱۱ . ۱۵:

		RS	x3	x2	x1
I	x1+x2+x3=3	3	1	1	1
II	x1+2x2+3x3=6	6	3	2	1
II'=II-I	0.x1+x2+2x3=3	3	2	1	0

له II' لاس ته راځي

$$x2 = 3 -2x3$$

له I څخه لاس ته راځي

$$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, \; x1= x3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې لاس ته راځي

$,x1=x3,x2 = 3 -2x3$ $x3$ په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه یا معادلې یا مساوات د درې ناپیژندونکو سره څیړو

$$\text{I} \qquad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3= a_1 \qquad (11 . 26)$$

$$\text{II} \qquad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= a_2 \qquad (11,26)$$

$$\text{III} \qquad a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3= a_3 \qquad (11,26)$$

له دې سیستم څخه کیدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخې د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتونتیورم (-قضیه) فکر غواړي او د دریمي درجي دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پیژند ۱۱ . ۲:
رییل ګڼونو a_{ik} ($i,k = 1,2,3$) (یو درې درجه منظم د دیتمرمینانت سیستم

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};.................................(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی رییلګڼ پوهیدلی شي):

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32)}) - a_{12}(a_1a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{33});............(11,28)$$

له دې سره د دریمې درجي دیترمینانت شمیرنه د دوهمې درجې دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. . ۱۱ . ۲ تعریف او په ځانګړې توګه) 11 .28 (فرمول په لاندې ډول توضیح کیدی شي:

پیژند ۱۱ . ۳ : په (11 . 27) کی د دیترمینانت D لاندېدیترمینانت A_{ik} لاندې هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چې د D دیترمینانت i- می لیکی او k - م درځ یا متې د لرې کولو یا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي(زه د ماتریکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې دا لیکې او متې یا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پیښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه یې پسې لیکل شوې)

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کیدی شي چې د ۱۱ . ۲ دیترمینانت په دې فورم ولیکل شي

پیژند ۱۱ . ۴ :
د دریمی درجي دیترمینانت D لاندې، چې په (11 . 27) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پوهیدل کیږي:

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

د زیاتون عملیي ښخه، چې دلته نسبت د دوه ناپیژندونکو مساواتو ته چې دوه ناپیوندونکی لري، روښانه ده، د (11 . 26) ښخه لاس ته راوړل کیږي:

$$Dx1 = D1 ,\ Dx2 = D2 ,\ Dx3 = D3 \quad (11 . 29)$$

په داسی حالت کی چې Di داسي لاس ته راځي چې د ځله وونودیترمینانت (11 . 28) کی سړی i - م درځ یا ستن یا متېه د (11. 26) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1=\begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};D_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix};D_{13}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix};\ldots\ldots(11,30)$$

موږ دا نتیجه بې له ښووني ورکوو.
له (۱۱ . ۲۹) ځخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :
که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونودیترمینانتو(۱۱). ۲۷ ،په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$D \neq 0$ (11 . 31)

با وري وي ، نو (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم یواځنی ځواب لري

$x1=D1/D \quad ;x2=D2\ /D \quad x3=D3/D$ 11,32)

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $Di \mid= 0$ کم له کمه د یوه i ($i = 1,2,3$) لپاره وي، نو د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم ځواب نه لري (په (۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D1 = D2 = D3 = 0$ وي، نو په (۱۱ . ۲۶) کی کم له کمه یو برابرون له ضرورته زیات دی او دا (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم کیدي شي چي د ۱۱ . ۲ . ۲ متودونو باندې ځواب شي (وړاندیز دئ چی د ګاوس الګوریتم له متود ; چی په ۱ . ۲ . ۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بیلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندې سیستم

$$\begin{aligned}
&\text{I} && x1 \quad -x3 = -2\\
&\text{II} && x1 + x2 - x3 = 0\\
&\text{III} && 2x1 - x2 \quad = 0
\end{aligned}$$

کی دئ

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 0 - 1.(-1-2) = 2$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 4;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یواځنی ټاکلی ځواب موجود دی.

$x1=D1/D=2/2=1,\ x2=D2/D=4/2=2,\ x3=D3/D=6/2=3$

بیلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سیستم

$$\begin{aligned} &I && x1 + x2 + x3 = 0 \\ &II && x1 \quad -x3 = 0 \\ &III && 2x1 + x2 \quad = 1 \end{aligned}$$

کي دی.

دا بیلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښایي ، چې اوبیونه نه شته ۰ دې ته باید ګوته ونیسم، $D = 0$ او $D1= -1 \neq 0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوریتم

د ګاوس الګورتیم لومړی د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپیژندونکي لري او همدارنګه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چې درې ناپیژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوریتم موخه په دې کی پرته ده چې (11 . 16) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریګوډیفورم را اوړي.

$$\begin{aligned} &I && a11x1+a12x2+a13x3=a1 \qquad (11 . 34) \\ &II && b22x2+b23x3=b2 \\ &III && c33x3=c3 \end{aligned}$$

بنسټیز حالت : که $a11 \neq 0, b11 \neq 0, c11 \neq 0$ وي نو یو په بل پسی سړی کړی شي چې له III $x3$, او له II $x2$, وشمیري. مګر په (11 . 34) کی ځانګړي حالتونه هم پیژندل کیږي:

-که $c3 \neq 0, c33=0$ وې، نو یو په ښتوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که$c3=c33=0$ وی، نو III له ضرورتزیات دی سړی یواځی I او II څیړي.

- که$c33=c3=0$او برسیره پر دې $a11 \neq 0, b11 \neq 0$ وي، نو $x3$ په خوښه ټاکل کیدی شي او $x2$له II او $x1$ له I چې $x3$ ته اړ وي، شمیرلکیدی شي (ناپای ډیر ځوابونه)

-برسیره پر دې که $b22=b23=0$, $b2 \neq 0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چې $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$وي ، نو II له ضرورت زیات دی او له $a11 \neq 0$ کیدی شي چې $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي، او $x1$له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي چی x2 او x3 ته اړ (په واك کی یا تابع) وي (ناپاي ډير ځوابونه ځوابونه) .
که ټول ځلونه او د مساواتو ښی خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د ګاوس الګوریتموس د دريږ ناپيژندونکو(11 . 26) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دئ
لومړی پل (قدم) : نیسو چی په (11 . 2 6)کی 0 =| a11 دی. دا د نمرې بدلولو په
بنسټ همیشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چی ټول aik = 0 وي) .
دلته I ورکول کيږي، او له II د I دا a21/a11 - ځله او له III دا a11 / a31 - ځله د I
کموي. ددې څخه لاندې سیستم لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} &I \quad a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11.35)\\ &II \quad b22x2+b23x3=b2\\ &III \quad c33x3=c3 \end{aligned}$$

دويم پل (قدم) : د b22 |=0 نیوني سره په 'II او 'III باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخې سره
سم د ګاوس الګوريتم استعماليږي : سرې 'II بي تغیره پريږدي اوله'III دا b32/b22-ځله
د 'II کموي، له دې راپيداکيږي

$$\begin{aligned} &I \quad a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11.37)\\ &II \quad b22x2+b23x3=b2\\ &III \quad c33x3=c3 \end{aligned}$$

د ګاوس د شیما فورمالیتي سره سم بیا دا شکل غوره کي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3
II' = II-(a21/a11)I		b22	b23	b2
III' = III-(a31/a11)I		b32	b33	b3
III'' = III' - (b32/b22)II'			c33	c3

$$x3 = c3 / c33$$
$$x2=(1/b22)(b2-b23x3)$$
$$x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سیستم ۰(مقایسه بیلګه ۱۱ . ۱۶)

I x1 -x3= -2
II x1 + x2-x3 = 0
III 2x1 -x2 = 0

د ګاوس الګوریتم سره په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	-1	-2
II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0
II'= II - I	0	1	0	2
III'= III - 2.I	0	-1	2	4
III" = III' + II'	0		2	6

x3=6/2=3
x2=2……………………
x1=-2+x3=-2+3=1

بیلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷ (دا سیستم

I x1 + x2- x3 = 0
II x1 -x3 = 0
III 2x1+ x2 = 1

د ګاوس د الګوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	0
II	1	0	-1	0
III	2	1	0	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

II'=II-I	0	-1	-2	0
III'=III-2.I	0	-1	-2	1
III''=III'-II'	0	0	0	1

دلته دی "0 = 1 " تضاد. سيستم نه اوبی کيږي يا حل نه لري.

بيلګه ۱۱ . ۲۰: (مقايسه يا پرتله بيلګه ۱۱ . ۱۷) دا سيستم

I x1 +x2+x3 =3

II x1+2x2+3x3=6

III 2x1+3x2+4x3=9

په لاندې ډول د ګاوس په الګوريتم اوبيونه ده

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	3
II	1	2	3	6
III	2	3	4	9
II'=II-I	0	1	2	3
III'=III-2I	0	1	2	3
III'' = III'-II'	0	0	0	0

=x3 په خوښه

x2 = 3 -2x3

x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3=x3

۱۱ ۰ ۳ په خوښه ډير مساوات ، په خوښه ډير ناپيژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاينيز سيستم برابرونونو په لار ښونی پيل کوو m (برابرون د nناپيژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1..................(11,37)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$
$$..$$
$$...$$
$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوښه يا ازاد پريږدو چې د برابرونونو ګڼون (تعداد) m د ناپيژندونکوn د ګڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرګندو دندو يا وظايف موږ دلته له څلور ناپيژندونکو څخه نه پورته کيږو او يوائې لاندې دوه متودونه څيړو

۱۱ ۰ ۳ . ۱ دn - م درجی ديترمينانت او د کرامر قاعده

پيژند ۱۱ . ۵ :

د n رييل ګڼونو aik يوه منظم سيستم n- م درجي ديترمينانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};.........................(11,38)$$

لاندې سرى لاندنې رييل ګڼ پوهيږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې ديترمينانت Aik د (n-1) - م درجی ديترمينانت ده، چې پاتيږي، که په Dکی i - مه ليکه اوk - م درځ ، مته يا ستن (ليکه او درځ چې aikپه کی ولاړ وی) په کرښه لرې کړي يا کرښه پرې تيره کړي، يعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجی ديترمينانت شميرل و- (n-1)-ام درجی ديترمينانت شميرلو ته راتيتيږي .

په ځانګړي توره د څلورمی درجی ديترمينانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}etc$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو) په) 11 . 37 (کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

$$Dx_1=D_1, Dx_2=D_2, \ldots Dx_n= D_n \qquad (11 . 42)$$

د D_i دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت) ۱۱ . ۳۸ (کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .

د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره (پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰)

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; D_2=\begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,43)$$

له(11 . 42) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):
د ځله ونې یا ضریب دیترمینانت (۱۱,۳۸) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په (۱۱ . ۳۷) د m = n سره) باوري دی

$$|D| = 0 \quad \text{(اصلي حالت)} \qquad (11 . 44)$$

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري(حل لري

$$x_1=D_1/D, x_2=D_2/D, \ldots, x_n=D_n/D. \quad (11 . 45)$$

برعکس که $D = 0$, مګر $|D_1| = 0$ کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري .
که $D=D_1=D_2=\ldots=D_n=0$ وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیونې لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو)

بیلګه ۱۱ . ۲۱:
لا ندې سیستم دې حل شي

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & x_1 & & +x_3 & & = 0 \\ \text{II} & 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & =0 \\ \text{III} & & x_2 & & -x_4 & = 4 \\ \text{IV} & x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = -2 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}1010\\2102\\010-1\\1-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\10-1\\-1-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}212\\01-1\\1-11\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0010\\0102\\410-1\\-2-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}012\\41-1\\-2-11\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2-1\\-21\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}41\\-2-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1010\\2002\\040-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}002\\40-1\\-2-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}202\\04-1\\1-21\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}40\\-2-1\end{vmatrix}+\left|2\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}\right|+2\begin{vmatrix}04\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1000\\2102\\014-1\\1-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\14-1\\-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}+\left|2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}=4-2+2(-2+4)=6\right|$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1010\\2100\\0104\\1-1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}100\\104\\-1-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}210\\014\\1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}04\\-1-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}01\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;x_2=\frac{-12}{-6}=2;x_3=\frac{6}{-6}=-1;x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چی د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغي له مخی ځرګندولی شو چی کوم حل)ځواب(مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بیلګه ځرګندوو

بیلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بیلګه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II -2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV-I	0	1	-2	1	-2
III'' = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV'' = IV' +II'	0	0	-4	3	-2
IV''' = IV'' + 2.II''	0	0	0	-3	6

x4 = -2

x3=1/2(4+3.(-2))= -1

x2=0+(-1)(-2)= 2......

x1 = -(-1) = 1 ....

بیلګه ۱۱ . ۲۳:

دا برابرونسیستم

I	x1	+x2	+x3	+x4=4
II	x1	-x2	-x3	+x4=0
III	3x1	-x2	-x3	+x4=2

حل یا اوبیونه ی نه لرې، لکه د ګاوس له شیما څخه چی لیدل کیږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2
II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10
III" = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2

دلته III"   په ځتوالی یا تضاد خوندي لري " 0 = -2   "

بیلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4

II x1 -x2 -x3 +x4= 0

III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4

IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10

V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چی oe1 (ناپای ډیر) اوبیوني لري

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8
II' = II-I	0	2	- 2	0	-4
III'= III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV -I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II''= II'+2.IV'	0	0	2	6	8
III'=III'+4.IV'	0	0	4	12	16
V'' = V' +2.IV'	0	0	2	6	8
III''' = III''-2.II'	0	0	0	0	0
V'''=V''-II	0	0	0	0	0

ګورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سړی کړي شي چی x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 ''II له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 'IV او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4 په خوښه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4 ، په خوښه x4 ټاکو

او x3=4-3x4 په خوښه x4 ټاکو

یادونه : هغه کښ یا نوره هم ښه هغه ځلهووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي۰

سړی د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په 'III او 'V پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په 'II اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په 'III او 'V لیکو مو کرښه تیره کړې وی) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځي له کرښی 'II جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګیڼ سیستم بلل کیږي

I $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3= 0$.............

II $a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= 0$ (11. 46

III $a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3= 0$…………..…………………

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$x_1=x_2=x_3=...=x_n=0$ (11. 47)

که د ځلوونو د یترمینانت (۱۱ . ۳۸) لپاره 0 =| D باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۱. ۸ : یو هوموګین مساواتسیستم یواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري وي

بیلګه ۱۱ . ۲۵ :

دا هوموژین برابرونسیستم

I x1 +x3=0

II x1 -x2 =0

III x1 +x2 +x3=0

د

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (1+1) \neq 0$$

له امله یواځنی ساده اوبیونه x1=x2 =x3= 0 لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۶:

دا هموګین مساواتسیستم

I x1 +x3 = 0

II x1 +x2 = 0

III x1 +x2 +x3 = 0

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

د

له امله ناساده اوبىونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوریتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- یا باقي سیستم په معنا دی.

x1 x2 x3 RS

---

0 0 1 I 1

0 II 1 -1 0

0 III 0 1 1

II'=II-I 0 -1 -1 0

III' = III 0 1 1 0

II'' = II + III' 0 0 0 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چی II"تضاد نه لري x3په خوښنه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I
څخه لاس ته راځي x3-=x1نوx3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نوx3 په خوښنه

. تمرینونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چې ورسره بلد یو-پوهیږو او یا هم

۱ – کربنیز مساواتسیستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرینونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو څخه کار اخستلس شي، چې بیایې و ازمایو. د لته دې د زیاتون یا جمعي قانون او همداسې د ګاوس الګوریتم ته لومړیتوب ورکړ شي ا و د دیترمینانت سره شمیرنه دې یوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$

b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$

d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$

b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$

d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$

b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$

$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$

d) $4 + y = x$

$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$

$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$

$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3$

$\frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2} + \frac{3x_2}{2} = 3$

$3x_1 + x_2 = 2$

b) $\frac{2x_2 - 5x_1}{6} + \frac{x_1}{6} = \frac{x_2 - 2x_1}{3}$

$\frac{5-3x_1}{3} - \frac{4x_2 - 1}{4} = \frac{6x_1 + 23}{12} - \frac{3x_1 - 4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1 + 3x_2} - \frac{1}{3(3x_1 - 2x_2)} = \frac{1}{6}$

$\frac{5}{3x_1 - 2x_2} + \frac{6}{4x_1 + 3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1 - 2) + 4(2x_2 + \frac{3}{2}) = 0$

$5(x_1 + 3) - 3(x_2 - \frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1 + 4x_2 = 8$

$5x_1 - 2x_2 = 9$

$7x_1 - 8x_2 = 10$

b) $6x_1 - x_2 = 1$

$9x_1 + 2x_2 = 5$

$3x_1 - x_2 = 1$

c) $5x_1 - 3x_2 = -3$

$3x_1 + 5x_2 = 5$

$3x_1 - 1{,}8x_2 = -1{,}8$

$0{,}9x_1 + 1{,}5x_2 = 1{,}5$

d) $2x_1 - 3x_2 = 10$

$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$

$x_1 - 1{,}5x_2 = 5$

$0{,}5x_1 - 0{,}75x_2 = 2{,}5$

۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x_1 + x_2 = a$

$ax_1 - x_2 = b$

b) $3x_1 - 2x_2 = 5a$

$2x_1 - 3x_2 = 5b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2 - 4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2 + 2b^2}{4a^2 - b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شمیرنه

۱. ۳. ۱ کوم دوه اعداد لاندې خویونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع یا څلورځ کمون(تفریق) یې په ۱۰۰ لوییږي، په داسې حا لې جې ضرب یې په۳۲۵ زیاتیږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه یا زیاتون دومره لوي دی، لکه د تفریق مربع یې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د یا تفریق یې ۹۹ دی، وښایئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګڼونو څخه هر یو یې په 2 لویوي، نو ګڼونه څانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونوڅخه 3 کم شي ، نو داسې لاس ته راغلي ګڼ ځان نیسي لکه : 3 : 2 . دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګڼونو څومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره څل یا ضرب شي، نو د څلونو زیاتون یې 2222 دی. هر یو له دې ګڼونوڅومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دریکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پړیکشن یا پریوستون یې د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمخ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چې له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لرې دی نسبت و X ته ، دواړه مخ کلي X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلي دیوال، چې 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځې اوږده د هوارې دننه په $100\ m^2$ زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خونډي کوي او دوه وتللارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړی 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1 / 4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړي دري بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړي ۷ بوتله او له دوم دري بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 ,2 الماني مارکه(DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود $450\ m^3$ اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل دري دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی $40\ m^3$ اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته $60m^3$ اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یو ځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم دري ورځي کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 1 / 5 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ ایرتیا ورکړی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۱ . ۳ . ۱۶ . د یوې ګردی په چاپیري چی ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقیقي حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقیقي، که هغوي یو د بل په خټ لور حرکت وکړي، هر بدن په یوه ثانیه کی څومره واټن تی کوي یا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په یوه ګردی چی چاپری یي ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانیوکی. د دواړو بدنونو سرعت څومره دی، که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم ګړی ؟

۲

۲ . کربنیز مساوات سیستمونه د درې مجهولو سره

۱ – مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

a) $x + y = 14$
$x + z = 15$
$y + z = 16$

b) $x_1 - x_2 = 4$
$x_1 + x_3 = 18$
$x_2 - x_3 = 6$

c) $x_1 + x_2 = 6{,}6$
$x_1 - x_3 = 2{,}6$
$x_2 - x_3 = 2$

d) $x + y + z = 25$
$3x - 2z = 1$
$20y - 16z = 0$

e) $2x + 3z = 13$
$3x - 4y = 3$
$5y - 6z = 9$

f) $12x + 24y - 42z = 30$
$4x + 8y - 14z = 10$
$6x + 12y - 21z = 15$

g) $5x + 3y + 2z = 207$
$5x - 3y = 37$
$3y - 2z = 19$

h) $x_1 + x_2 - x_3 = 17$
$x_1 - x_2 + x_3 = 13$
$-x_1 + x_2 + x_3 = 14$

i) $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11$
$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$
$6x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 39$

j) $4x + 4\frac{1}{2}y - 6\frac{3}{4}z = 20$
$2\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z = 5\frac{2}{3}$
$1\frac{2}{3}x + 1\frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}z = 3\frac{1}{3}$

k) $\frac{2}{5}x - y = 0$
$\frac{2}{3}x - z = 1$
$-\frac{2}{3}y + z = 2$

۲ . ۲ – مساوات سیستمونه د ناټاکلو ضریبونو سره

a) $x_1 + x_2 = 2c$
$x_1 + x_3 = 2b$
$x_2 + x_3 = 2a$

b) $x_1 + x_2 = 2(a + b)$
$x_1 + x_3 = 2(a + c)$
$x_2 + x_3 = 2(b + c)$

c) $ax + by - z = 1$
$ax - by + z = b$
$-ax + by + z = a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

d) $$\begin{aligned} ax + y - cz &= 2a \\ -ax + y + cz &= 2c \\ ax - y + cz &= 2ac \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 2a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= 2b \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 0 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{2}{a} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{2}{b} \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= a \\ y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} &= b \\ z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= c \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} \frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} &= a + b \\ \frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} &= b + c \\ \frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} &= c + a \end{aligned}$$

۳ . په خوبنه زيات مساوات د په خوبني زياتو مجهولو سره

a) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 &= 1 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 &= 10 \\ 6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 &= 9 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 21 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 &= 19 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 &= -24 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 3 \end{aligned}$$

هوموجين مساوات سيستمونه:

a) $$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 20x_1 - 10x_2 + 15x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 9x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . الجبري مساوات یا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاینیز- یا ناکرښیز- یا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چې د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره يوارزښته (اکويوالنت) نه وي ، نالاينيز – یا ناکرښيز مساوات بلل کيږي او عمومي فورم يې په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \qquad (12 . 2)$$

دلته $F (x)$ په x کې يوه ناکرښيزه يا ناخطي وييـنه يا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چې ټول د xارزښتونه پيدا شي د کومو لپاره چې (12 . 2) باوري وي. بايد په پام کې ونيول شي چې ايا يواځې رييل ارزښتونه پيدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چې پيدا کړو. د بېلګې په توګه لاندې ناکرښيز يا لاينيز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رييل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چې د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره يې مساوات باوري کيږي .ددې په څېر يا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رييل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دي وکتل شي)، بلکه لاندې ايماګينار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وکتل شي) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړيکو ته پاملرنه وشي: اړيکو $y=F(x)$ ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، چې زه يې كله اووښتونی او كله ناپيژندوني بولم(ښه نومه ونه يې اوښتوني ده) په ځېټ يا برعكس (2 . 12) يو ټاكنمساوات دی او x هلته يوه ناپيژندونكی يا اوښتونی دی.

د (2 . 12) برابرون يا مساوات اوبيوني يا حل ته د برابرون د F (x) صفرځای يا د مساوات F(x)=0 جذر يا ريښه هم وايي.

هغه برابرون يا مساوات چی په (۱۲ . ۲) فورم نه دئ وركړ شوی كيدی شي چی په دې لاندې فورم واړول شي. د بيلګي په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0 \quad \text{او} \quad f(x)=g(x)$$

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل كيږي

$$F(x)=f(x)-a.g(x)=0 \quad \text{او} \quad F(x)= f(x)-g(x)= 0$$

د نالاينيزو برابرونونو لپاره د لاينيزو برابرونونو په څير راغونده (اختماميه، رابنده، راتړلی) تيوري نه شته. په پوليزه يا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي وركولی، د كوم له مخی چی د صفرځاي معلوميدی شي. بايد په نومريكو (numerischen Methoden) متودونو يا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې يا تقريبي ډول پيداشي

نالاينييز برابرونونه په دوه ټولګيو ويشل كيږی: الجبري او تراسځندنت چی په دې او راتلونكی څپركي يا لكه چی ما استعمال كړې برخه كی يی څيړو، چي اوبيونې يی روښانه افاده شوې (explizit لاتين: واضح يا روښانه ، افاده شوی، اكسپليځت) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څيړل كيږي چی په لاندې نورمال فورم يا – بڼه اړول كيدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 ....(12,3)$$

دلته په (2 . 12) كی يو نالاينيز بلواک يا – فنكشن F (x) د يوه n - م درجی پولينوم په څير مخ ته پروت دی . موږ په (۱۲ . ۲) كی د ضريبونو(ځله وونو) لپاره يواځی رييل ګڼونه پريږدو (په دې مانا چي ځلونه يواځي رييل وي، يواځی رييل ګڼونو ته اجازه وركوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په (۱۲ . ۳) کی کېن اړخ ته n - م درجه پولينوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0 ....(12,4)$$

ته ټول ريشنل (- ريښتونی) بلواک يا فنکشن هم وايي، ځکه چی د ريشنل شميرله عمليو زياتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واريابلی او ai د رييل ضريبونو، ځلونو يا فاکتورونو باندې د ويش کارونی کارولو (عملي استعمال) له لارې منځ ته راځي .ټوليز برانرون يا

$$b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0 = 0; b_n \neq 0 ....(12,5)$$

کيدي شي په bn|= 0 ويش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاينيزفنکشن يا ۰ بلواک (F (x په (۱۲ . ۲) باندې په واريابلي يا اووښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمير کاروني يا عمليي او بالاخره دويش کارونه وکارول شي يا اجرا شي او رييل پارامتر (Parameterپه شميرپوهنه کې ثابت (همغۀ او يا مرستندويه لوي ده) تشکيل شي نو فنکشنونو ته بيا مات ريشنل فنکشنونه ويل کيږي.
دا تل د دوه پولينومونو يا ريشنل فنکشنونو د ويش په څير انځوروړ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0}{c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1 x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ....(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) يا (۱۲ . ۳) برابرون اړول وړ دي . دا بايد په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳) لپاره يواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چيرې د نالاينيزبلواک يا - فنکشن جوړولو کی د ريشنل شميرعمليو تر څنګ د توان (مټ، په جګ) يا پوتنځ کول او جذر نيولوته هم اجازه ورکړل شي نو بيا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږيږ. يعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ويل کيږي او (۱۲ . ۲) برابرون بيا الجبري برابرون بلل کيږي ، دا ډول مساوات هم کيدی شي چی په (۱۲ . ۳) فورم واړول شي.

هره n - مه ريښه يا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (G(x افادې یا وییني له منځه وړل کیدی شي, که چیرې څوك دا برابرون په یوه خوا راوړي او بیا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي یا د n پوتنځ یا متې ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په ځرګندو یا معلومو بیلګوڅیړل کیږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځیرنه د (۱۲ . ۳) فورم برابرونونو ته راکښته کیدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابرون هم بلل کیږي. ټول نالاینیز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسځیندنت برابرون بلل کیږي . د ترانسځیندنت رابرونونو درې تیوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاریتمي برابرونونه ، او ګونومتریکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر ځیرني لاندې ونیول شي.

۱۲ . ۲ څلوری(مربع-) مساوات په توان(متې، جګ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاینیزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان یا متې (په جګ ۲ هم ویل کیږي) برابرونونه دي چی څلوری یا مربع برابرونونه بلل کیږي .د دې ټولیزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2+b_1x+b_0=0;b_2\neq 0;............................(12,8)$$

په b2 یي ویش په لاندې ډول یو ورته ارزښته (اکویوالنت äquivalent) نورمالبڼه یا نورمالفورم ورکوي

$$x^2+a_1x+a_0=0;(a_1\neq b_1/b_b;a_0\neq b_0/b_2);............................(12,9)$$

ددې حل د څلوری پوره کونې یا مربعتکمیل څخه په ګټه د بینوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x+a_a/2]^2=x^2+a_1x+\frac{a^2{}_1}{4};......................(12,10)$$

په دې ډول کیدی شي چی (۱۲ . ۹) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$$x^2+a1x+a0=(x+a1/2)^2+a0-a1^2/4 = 0 <=>$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

[x+a1/2]²=(a1²/4)-a0 (12,11)

که وي

(a1²/4)-a0>0 <=> a1² -4a0>0 <=> a1²>4a0 (12,12)

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};......................(12,13)$$

يا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};......................(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بينا تل نا کميز يا نامنفي ګڼ پوهيدل کيږي، چی څلوری يا مربع يی a ده) . له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) ځخه رييل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};......................(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم ليکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};......................(12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توګه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پوهيدل کيږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2
په رينتونی څلوری برابرون يا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0\Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0\Leftrightarrow a_1^2=4a_0;.............(12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لارې تيك يو رييل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a\ \ /2;................................(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکيه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کيږي او په دې ډول د يوه دوه واره اوبيوني (۱۲ . ۱۸)څخه غړيږو.
که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};..................(12,20)$$

له دې څخه هم چی په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي څرګنديږي چی د x1 او x2 ارزښتونه ییل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};..................(12,21)$$

نو لاندې جمله ىی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د څلوری یا مربع) په توان یا جګ د ۲) برابرونونو د اوبيوني فرمول) د څلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) $x^2+a1x+a0=0$

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټيك دوه ځوابونه لري

د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته دي.

په ساده ډول لاندې د ویيتا جمله هم د مربع مساواتو لپاره ښوول کيدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۲ (د وييتا(Vieta)جمله) :

که x1 او x2 د خلورئ - يا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) اوبيونې وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2; ....(12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); ....(12,23)$$

حل : (۱۲ . ۲۳) فرمول په دريواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې څخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د (۱۲ . ۲۲) فرمول د تصديق لپاره د بينوم دريم فرمول او 1- = i ² استعمال څخه په په (۱۲ . ۱۲) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په (۱۲ . ۱۷) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲ . ۱۹) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وييتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کيږي يا تصديقيږي

جمله ۱۲ . ۳ :

يو ۲ درجييز پولينوم کيدی شي چی په دوه لايني فاکتورونو يا ضريبونو يا ځله وونو بيل يا ټوټه يا تجزيه شي:

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2);..................(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = b_2(x - x_1)(x - x_2);..................(12,25)$$

چيرته چي x1 او x2 د څلورى برابرونونو يا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبيونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) څخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نيولو سره لرو

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + a_1x + a_0 =$$

$$= \frac{1}{b_2}(b_2x^2 + b_1x + b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ څخه دې ته راځول کيږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره ريبل اوبيو څخه خبرې وکړو(وغږيږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0;..................(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲) .(۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کيدی شي چی د فنکشن

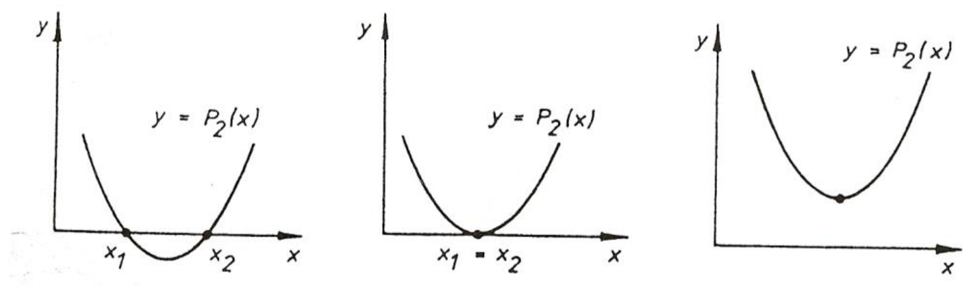
$$y = p_2(x) = x^2 + a_1x + a_0$$

ځيرو يا شکلونو (ګراف) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټيزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که xهرڅومره کوچنی شي)که x د کميز ناپای په جګ يا توان شي) اوهمدارنګه x هرڅومره لوي شي (که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوييږي (ستريږي يا غټيږي) ، ځکه چیx^2 نسبت و x ته په توان يا قوي جګيږي له ټولو پولو(yد ناپای لور ته ځي)۰ د دې ډول پولو کره پيژند يا تعريف په ۱۹ - برخه کي لوستل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۲) حالت کی د x - محور په داړو ریيلو ځایونو x1 او x2 کی غوځیږي؛ په (۱۲ . ۱۷) حالت کی په x1 = x2 ځای کی یي لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت کی ګډ ټکي ورسره نه لري یا نه وررسیږي (پرتله ځیره . ۱۲ . ۱)



a) b) c)
Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، (۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بیلګو روښانه شي.

بیلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

$a1 = -1$, $a0 = -6$ او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی یاتعقیب څخه باوري کیږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3-2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله (۱۲ . ۱۷) حالت مخ ته لرو ۰ دوه ئیز رییل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱ څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1 = x2 = 2$

جمله ۱۲ . ۳ :
په لاندې ډول باوري کیږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x\ +x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$,$a0=13$او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت (۱۲ ، ۱۹) مخ ته لرو.

د کونیوګیرت(کنجوګیري) کمپلکس جوړه اوبیونو یا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې بڼه یا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$$
$$\Rightarrow x\ =2+3i; x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x\ =(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د جملی ۱۲ . ۳ له مخې داسی دی

$$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسی (۱۲. ۹) اوبی په ښکاره ډول ساده کیږي، که یو ځلی a0 اویا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو $x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ څلوری(مربع-)برابرون چی په نورمالبڼه

مخ ته نه دي پراته

که یو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو باید په دې بڼه واړول شي.

بلیګه ۱۲ . ۴ :

$$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$$

$$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$$

$$-x^2-2x-4=x^2-8x$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$

$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول یا ناپیژندلی یا اوړیدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو باید په صفر ویش ناممکن یا ناشونوالی په پام کې ونیول شي.

بیلګه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$
تيك هلته مانا لري، چی وي $2x^2+2x-4 \neq 0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کيږي او بيا ازمائل کيږي، چي ايا د ماتلاندې شرايط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$
$$-x^2 = -4$$
$$x_{,2} = \pm 2; x = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پيل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانګړي برابرونونه ، چی په څلوری يا مربع برابرونونو بيرته بدليدلی شي

د n - مي درجی مساواتو(۱۲ . ۳) يو څو ځانګړي حالتونه کيدی شي چی د څلوری برابرونونو يا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي يا اوبی شي۰ دا ځانګړی حالت موجود دی يا شته دی که باور ولري

$a_1 = a_1 = ... = a_{n-3} = 0$ (12 , 27)

دn- می درجی برابرون بيا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; ....(12,28)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$
$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; ....(12,30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : په پورته کې له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون يو ځلورئ - يا مربع برابرون دی، چی د جملي ۱۲
. ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی يا حل لري $x = 0$ چی دا (n-2)- ځله رامنځ ته کيږي $x_3 = x_4 = ... = x_n = 0$

بيلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبيونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; ....(12,32)$$

يو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ يا جفت - وي

$$n = 2k \qquad (12 . 33)$$

او فقط (ټيك) ځله ووني يا کوايفيځينتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; ....(12,34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; ....(12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره د y لپاره څلوری برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12, 36)$$

د لاندې ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k / 2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,37)$$

د(۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,38)$$

ټولې اوبیونې وڅیرلی شي، چې د $k = 1$ لپاره ساده دی، د $k = 2$ لپاره(بیکوادرات برابرون) (د څلوری څلوری یا د مربع مربع) یا د رېیلو y1 او y2 لپاره د تراوسه څرګندو میتودو سره تل کیدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټولیزه توګه ستونځی لري.

بیلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بیکوادرات برابرون $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$ کیدی د سوبستیچیوشن یعني بدلون له لارې $y = x^2$ په څلوری برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چې د بیرته بدلون(-سوبستیچیوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 \,,\; x^2 = -9$$

لاندې اوبی یا حل لري

$$x1 = 2 \,,\; x2 = -2 \,,\; x3 = 3i \,,\; x4 = -3i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسيستمونه چی بيرته په ځلوری برابرونونو بد ليد لی شي

يوه د نالاينيزو مساواتسيستمونو لړی کيدی شي چی په ځلوری برابرون يا مربع مساواتو بيرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بيلګي راوړو.

بيلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$

$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کيږي، y= 1-x، او دا حل په دوم برابرون کی اينوول کيږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$

$$x = 3, x_2 = -2$$

د (۱۲ ، ۴۰) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2 , y2 = 3$$

نو دا نه لاينيز برابرون لاندي اوبيونې لري

x1 = 3 , y1 = -2 او x2 = -2 , y2 = 3

بيلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سيستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی یواځي د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وریا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو(ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کیږي:

$$y + x = xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کیږي

$$y = 1 - ax \qquad (12, 43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کی ایښول کیږی یا ځای په ځای کیږي

$$1 - ax + x = x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2 - ax + 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی (۱۲ . ۴۴) برابرون مخامخوالی لري یا په ښتوالی لري یا تضاد لاس ته راکوي » $1 = 0$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴) ښخه لاس ته راځی $x^2 - x + 1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} ....(12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه باید په پام کی ونیول شي:

د $a > 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو , $a > 4$ او د $a < 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \quad (12, 46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ریل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; ....(12.47)$$

په دې پوروې د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; ....(12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وازمابیل شي چې د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول) نابرابر په صفر دي . تل x1 > 1 /2 دی. که x2 = 0 وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هیڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی
که y1= 0 یا y2 = 0 وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم لرو $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$
په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) سر ه سم، دوه

مختلف رییل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي
د x1 , y1 او . x2, y2

1/4-1/a=0 <=> a=4 (12 , 49)

لپاره(۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲، ۴۴) ډبل رییل حل لري

x1 = x2 = 1 /2 (12,50)

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت ډبل کېږ اوبی پورې هم اړه لري.

y 1 = y2 = 1 - 4. (1 /2) = -1

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ . ۱۹) یو ریل، ډبل ګڼلی حل موجود دی

x1=x2=1/2 , y1=y2= -1 (12 , 51)

د

1/4-1/a < 0 <=> 1/a > 1/4 (12 , 52)

لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د a > 0 لپاره (۱۲ ، ۵۲) د a<4 کټمټ (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کټمټ دی (له دې امله په ښتوالی یا تضاد) .

نو د(۱۲ ،۵۲) باور لري، د

0 < a < 4 (12 , 53)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره . په دې حالت کی (۱۲ ، ۴۴) کونجوګیري کمپلکس اوبیونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\ x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12.54)$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخی په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\ y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \ldots\ldots\ldots\ldots (12,55)$$

له دې ارزښتونو هیڅ هم صفر کیدی نه شي .پس په یوځاې شوي یا راټوله توګه لرو: برابرونسیستم (۱۲ ، ۴۱) د $a = 0$ لپاره اوبی نه لري، د $a < 0$ په همدې ډول $a > 4$ لپاره دواړه ریل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د $a = 4$ لپاره رییل ډبل ګنلي اوبۍ (۱۲ ، ۵۱) او د $0 < a < 4$ لپاره دوه کونجوګیري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ، (۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲ . ۳ دریمه درجه مساوات یا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې -n (ام (درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سیستم جملو ته ورته جملی د دریمی درجی مساوات لپاره څیړو.
د دریمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولینوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad (12 , 57)$$

لاندې بنستیز خویونه لري: که x ډیر لوي شي یعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی دx^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بیړه جګیږي او بیا همداسي و x ته هم . که a1 او a2 کمیز یا منفي هم وي نو y به د لویو -x ارزښتونو لپاره زیاتیز یا مثبت وي. داچي x^3 د کمیز x - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول
x->-o د y -> -o
لپاره .د دې ډول »پولوارزښت یا لیمس« لپاره کره تعریفونه بیا په ۱۹ برخه کی په پراخه توګه څیړل کیږي .د یو-x ارزښت) خورا کوچنی هم کیدی شي (شته چی د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره $y < 0$ وي اود یو x - ازښت) چې خورا لوي هم کیدی شي) ، د کوم لپاره چې $y>0$ دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ باید د مساوات (۱۲ . ۵۶) یو ريیل اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلګو کی سرې کړی شي چې په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائيلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توګه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلګی:

بیلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 -4x + 12 \qquad (12, 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$$X = 0, 1, -1, 2$$

$$Y = 12, 6, 12, 0$$

په دې توګه یو ريیل صفرځاي پیدا شو

$$x_1 = 2 \qquad (12, 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شیما په بنسټ یو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چې بیا د مټ(توان= لوړولو ته اړتیا نه پیدا کیږي او پولینومونو د فنکشن ارزښت ساده پیدا کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 +(11 / 2)\, x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad (12 . 61)$$

د صفرځاي پیداکولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰)مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي)ترتیب شي وشمیرل شي (، څکه چې هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$$X = 0, 1, 1/2$$

$$Y = -9, 16, \quad 0$$

نو

$$x_1=1/2 \qquad (12, 62)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) یو رییل صفرځای دئ

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12, 63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3
Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لاړې لاندې رییل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12, 64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \qquad (12, 65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1
Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12, 66)$$

په ټولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چې د دریم درجی برابرونسیستم (۱۲ . ۵۶) لپاره تل یو رییل اوبی یاحل $x1$ شته دی. دا یو واقعیت دی چې بي له شوونی یی لیکو، چې دا پولینوم (۱۲، ۵۷) بي له پاتي په لاینیز فاکتور ($x - x1$) ویشل کیدی شي او یو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دريمه درجه برابرون (۱۲ . ۵۶) كم له كمه يو رييل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.............(12,67)$$

دلته نو بيا نور د دريمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي كه څلورۍ برابرون يا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره كيدی شي چی لاندې جمله فرمولبندې كړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دريمه درجه برابرون درې اوبيوني يا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3)$ (12 , 68)

دلته دا لاندني حالتونه ممكن دي

۱ - درې رييل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی (موجود دي)

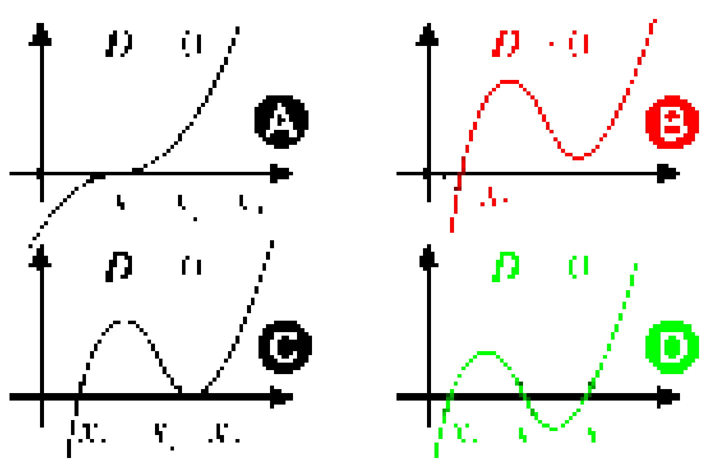
۲ - يو رييل حل x1 او ددې سره مختلف يو دبل رييل حل x2=x3شته دی .

۳ - يو رييل دربګونی حل شته دی

x1 = x2 = x3

۴ - يو رييل حل x1 او يوه جوړه كونجوګيرت كملكس اوبيوني يا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څيره د ټولو راشنل فنكشنونو(۱۲ . ۵۷) تيپيكي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو كی ښايي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کیدی شي د دریمی درجي پولینومو لپاره د ویيتا جمله تصدیق کړي چی د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دریمي درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اوبیوني وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$

$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$

$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بيلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړو x2 او x3 اوبیوني ولټول شي.

بيلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سرې دا ځواب د ۱ . . ۲ ۴ . برخي له مخي د پارشل Partial- (ټوټه-(ویش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$..\underline{x^3+2x^2}$$

$$........-x^2-4x+12$$

$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$

$$..............-6x+12$$

$$..............-6x+12$$

له $x^2 - x - 6 = 0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو ریښو ځوابونو سره
، $x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$
او داسی دی:

$$x^3-3x^2-4x+12 = (x - 2)(x-3)(x + 2)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخی اوبی
$x1 = 1 / 2$
لري او داسی دی:

$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا (□) له $x^2+6+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه ریښل حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل ریښل حل سره، یعنی لرو $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دی

$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د(۱۲ . ۶۴) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$

له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت دریې برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسی دی

$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵) برابرون د (۱۲ . ۶۶) برابرونونو له مخی ځواب
$x1 = 1$ لري، او داسی دئ

$$(x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملی ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه ریښل حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) \qquad =(x-1)(x^2-4x+13)$$

۱۲ . ۴ د ريښی (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کی د ریښی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرګند شو چی ځنګه د ریښی برابرون په ریښنل برابرونو اوله دې سره n- می درجي برابرونو بدلیدلي شي٠ دا دې دلته د بیلګو په څیر پاتي وي. یواځي ریښل اوبیونې به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :
د ریښي برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4} =16; ....(12,72)$$

ډیر ساده کیدی شي چی په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4} =9; \sqrt{2x+4} =3; 2x+4 =9; 2x =5; x =5/2; ....(12,73)$$

د ازمایلو لپاره که (۱۲ . ۷۳) برابرون په (۱۲ . ۷۲) برابرونونو کی خوندي شي، نو څرګندیږي چی دا د x-ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4} =7+3.3 =16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۵:

د ریښی برابرون یا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0;..........(12,74)$$

کیدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3;..........................(12,75)$$

د ازمایني لپاره، که (۱۲ . ۷۵) د پیل په برابرون (۱۲ . ۷۴) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون (۱۲ . ۷۴) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره یا په دې تعقیب د پیل برابرون ځواب نه لري.) داسي کیدی هم نه شي، ځکه چي تل $2x + 19 > 0$ دی)۰

دا ساده بیلګی موږ ته را ښایي چی باید د ریښی مساواتو حل تل وازمایل شي چی ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیږدي چی ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمایلو لپاره نه دئ چي ګوندې ټیك یا صحیح شمیرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب یو اړیین سما ندیز پل یا ضروری منطقي پل دئ .

په ټولیزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f(x) = g(x) \qquad (12,76)$$

په یو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x) = G(x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي ، یا تری کم شي، یاداوړه خواوې په یوه ګڼ ځل (ضرب) شي او یا وویشل شي (په دې حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ریښی لاندې راشي او یاپه توان پورته شي نود پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په څټ (برعکس، مخامخ). کیدی شي چی اړول شوی برابرون (۱۲ . ۷۷) زیات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) ته . دا به په لاندې بیلګه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۶:

د ریښې یا جذر برابرون یا مساوات

x-x-1=2x-1 (12 . 78)

څلوری یا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بیا څلوری یا مربع کولو سره سرې یو مربعمسوات لاس ته راوړي

x(x-1) = 0 (12 , 79)

چې لاندې اوبی یا ځواب لري :

x1 = 0, x2 = 1 (12 . 80)

دا د (۱۲ . ۷۹) اوبیونې دي، مګر باید و ازمایل شي چې ایا دا د (۱۲ . ۷۸) اوبیونې هم دي که نه.

د x = 0 لپاره په (۱۲ . ۷۸) کی دوه ریښی نه دې تعریف یا ددوه ریښو پېژند نه شته، نو x = 0 د (۱۲ . ۷۸) اوبیونه نه ده .

د x = 1 لپاره لاس ته راځي 1 - 0 = 1

له دې امله x = 1 د پیل بیلګی (۱۲ . ۷۸) یوګونی ځواب یا اوبی دی .

بیلګه ۱۲ . ۱۷:

د ریښی برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,............(12,81)$$

کیدی شي چې په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} =>$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} =>$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;.........(12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برابرون یا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,83)$$

د ټولونورو x لپاره $0 = |x^2-4x+3$ دی ، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2 - 7x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x3 = 0, x4 = x1 = 3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پیل برابرون ډکوي.(باوري کوي، پوره کوي)

د $x = 3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله $x = 3$ د پیل برابرون یا مساوات (۱۲ ۸۱) اوبی یا حل دی . د

$x3 = 0$ او $x2 = 1,$

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون (۱۲ . ۸۱) اوبی حل $x = 3$ (12 . 85)

یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدټاکلو ضربیونو سره

1.1.1. a) $x^2 - 4 = 0$ b) $3x^2 + 27 = 0$

c) $x^2 - 9x = 0$ d) $5x^2 = 125\ x$

1.1.2. a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$ b) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

c) $(x - 6)(x + 5) = 0$ d) $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاكلو ضريبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سيتم، كوم مو مربع مساوتو ته لاربښودوي يا بيايي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$ b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مي درجې ځانګړي مساوات، چېپه مربع مساوات بیرته اړول کیدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو یا معلومو ضریبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو یا نامعلومو ضریبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a-b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a+b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مي رجې مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$ b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$ d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د xاو هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$ b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$ d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

---

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګنونه ځان داسې نیسي لکه 1 : 3 . ددې ګنونو د مربع زیاتون ۱۵۶۰ دی. دا ګنونه څه نومیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د درې يو په بل پسې ګڼونو د لوي ګڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنيوګڼونو د مربعو زياتونونو. دا ګڼونه څه نوميږي يا کوم دي؟

پ) د کوم مثبت ګڼ لسرڅله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت) مات $1/4$ په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزيه کړی، چې لاندې زياتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ يې لاس ته راشی.

. ۶ . ۲ . الف) په يوه برابر برقجريان کی مقاومت په ديرش اوم $30\ \Omega$ لوييږي، په کوم کې چی د برقوه په همغه د $220\ V$ (وولټه) شپانونګ په پنځه امپير ($1{,}65A$) کوچنی‌شي . مقاومت او برقوه څومره دي؟

ب) دوه سيخونه چی مقاومت يی $60\ \Omega$ يو له بل توپير لري، يوه د غبرګ چالانولوعمومي مقاومت $22{,}5\ \Omega$ کړي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

. ۶ . ۳ . الف) يوه د بايسکلځغلونی لار چې ۲۲۵ کيلو متره اوږده ده، د يوه موادو موټر څخه په دريتيم ساعته لنډ وخت کې وهل کيږي،چې د موټر په منځني سرعت چې $26{,}25\ km/h$ نسبت و بايسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بايسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دی؟

ب) د سپورت جشن کې يو سپورتي چې له A و B ته په $5km/h$ سرعت ځغلي، له خپل منډپيل څخه يونيم ساعت وروسته له يوه بايسکلسپورتي څخه وروسته کيږي، کوم چې له مخامخ کيدو، نيم ساعت وروسته B ته رسيږي، او سملاسي بيرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسيږي په کوم کې چې ځغاستنی و B ته رسيږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لری ده؟

پ) دوه ډبډبي ځغاستي،يوبل باندې نيغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لوري په ډبډبيو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانيه کی، دوم څلور متره په ثانيه کی دي دوي له ۳ ثانيو وروسته يو ۳۵ متره لريوالی يو له بل لري، دوي يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بل په سرچينه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لرووده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت) د ګادي يو لاين د موټرځغاست سرك لمړۍ برخې سره غبرګ غزيدلی. د يوه موټر ځغاستي پيل کې د يو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشينونه په همغه جګوالي دي، که موټرځغاستی منظم تعجيل او يو تعجيل د $10m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72\ km / h$ دی؟

ټ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لاپيخير ځخه د ديساو په لور بايسکل ځغليدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له ديساو ځخه د لاپيخير په لور راتلونکی بايسکل ځغاستی سره مخامخ کيږي. ورستنی ۱۰۰ دقيق د مخه ديساو ته راځي لکه دوم ولاپيخير ته. د ديساو او لاپيخير ترمنځ لريوالی يا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړنجيز دريګوډي کې ، کاتيتې ځانونه داسې يوبل سره نيسي لکه 3:4 ، هيپوتينوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتيتې څومره اوږدې دي؟

ب) د يوه ولاړکونجيز دريګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتيتو زياتون يې ۱۷ سانتيمتره اود يوې کاتيتې او هيپوتينوزې زياتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ) د يوه سمکونجيز (ولاړکونجيز) دريګوډي کاتيتې څومره لويې دي، که د هغوي زياتون ۴۲ سانتيمتره وي ، د دريګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت) د يوه ولاړګوډي نيمی (قطر) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نيمي اوږدوالی ۱۰ سانتيمتره لويږي. د سمکونجيز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجيز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري. د سم اړخيز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاړ اړخ)

ټ) د يوې ګردۍ وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګرډۍ کی دننخاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا څونډې مربع اړخ)

ج) د يوې ګردۍ نيمی باید څومره لوي، که له دننه منخشوې مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح) که د یوې ګردۍ نیمی (قطر) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردۍ هواره دوه برابره کیږي. د ګردۍ سرچيني نیمی څومره لويه ده؟

خ) د يوه نيمغونډي نیمی څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشډکی يي ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د درېمې او څلورمې درجې مساوات

2.1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ريښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشميرى، چې د لاندې مساواتو حلونه یا اوبيونې دي. د هرې پوښتنې د ټيکاوي لپاره ازماېښت وکړئ!

۳ . ۱ – ريښه مساوات د ټاکلو ضريبونو یا څلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\frac{4}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\frac{\sqrt{x}-3}{7}-\frac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\frac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\frac{16-\sqrt{x}}{2}-\frac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\frac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\frac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\frac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $|\sqrt{3x+7}|+|\sqrt{4-x}|=3$

3.1.10. a) $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $(\sqrt[3]{x}-1)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۲ – ريښه مساوات د نامعلومو ضريبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x} = a$ b) $\sqrt[3]{x} = b$

c) $a - \sqrt[3]{x} = b$ d) $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$

3.2.2. a) $\sqrt{x-a} = b$ b) $\sqrt[3]{a-x} = b$

c) $\sqrt[4]{a^4 + x} = a$ d) $\sqrt[6]{a^6 - x} = b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax}+\sqrt{b})(\sqrt{ax}-\sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$

b) $(a-\sqrt{x})\,(b-\sqrt{x}) = (c+\sqrt{x})\,(d+\sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax}-b}{\sqrt{ax}+b} = \dfrac{3\sqrt{ax}-2b}{3\sqrt{ax}+5b}$ d) $\dfrac{2a+3\sqrt{bx}}{3a+2\sqrt{bx}} = \dfrac{3b+2\sqrt{ax}}{2b+3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}} - \left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{a+b} = \dfrac{c+d\sqrt{x}}{c+d}$ d) $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+b} = \dfrac{c+d\sqrt{x}}{c\sqrt{x}+d}$

3.2.5. a) $x+\sqrt{x^2-a^2} = a$ b) $x - \sqrt{ax(1+x)+1-x} = 1$

c) $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$ d) $\sqrt{x+a^2} - \sqrt{x} = b$

3.2.6. a) $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \dfrac{b}{\sqrt{b-x}}$ b) $\sqrt{x+a} - \sqrt{5x-3a-4b} = \dfrac{2b}{\sqrt{x+a}}$

c) $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \dfrac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$

d) $\sqrt{3a-2b+2x} - 2\sqrt{3a-2b-2x} = \dfrac{a+2b+2x}{\sqrt{3a-2b+2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3-x^2}} = \dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ، ۳ – مساوات سیستمونه، چې ریښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 8$, $\sqrt{xy} = 15$

b) $x + y = 58$, $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2} = 5$, $x + y = 16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2} = 6$, $x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$, $y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$, $y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسڅندنت برابرونونه یا ـ مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دې ته ګوته نیول شوې وه، چی دلته یواځې هغه ترانسئندنت مساوات څېړل کيږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي.
دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کيږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتې اوبیونې یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیونې پلټل کيږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 ....(13,1)$$

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په څټ یا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b ....(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دی

$$l\log_b x = c....................................(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخې لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سې افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$:

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبیونه په لاندې تولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c..(13,5)$$

دلته (f(x یوه الجبري وبینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کتمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کتمټ دي

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$ (همداسې) $x^2+x+6=2^3= 8$

او لاندې اوبیونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کیڼې لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وییڼه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x) + r_2.\log_2 (x) + r_3.\log_b g_3(x) + ... = c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}.................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1) + \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3(x-1) = 2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه ریښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له څلوری یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

ټیك دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني
که $1<(b+3)/(b-2)$ وي.
د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$
له دې لرو $2-<3$دا د ټولو b لپاره پوره دئ
د. $b \le 2$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b
لپاره باور نه لري .
له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دئ. د $b \le 2$ لپاره اوبیونه نه شته دئ.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13 . 9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وییني یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x) \qquad (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13 . 11)$$

ددې اوبیونه $y_1,y_2,..$ په (۱۳,۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳,۵)
لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) =y_i; \quad i = 1,2,3,......... \qquad (13 . 12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13 . 13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳,۹) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستیټیوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په ځلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .
د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره
له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$$x_1 = 10^2=100 \text{ او } x_2 =10^{-1}= \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$

د $x>0$, مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندې $(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$

$$,\ 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$

$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې ځلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0\ ,\ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3};\ y_1=lox_1=5;\ y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5;\ x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_4 \sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وييني يا افادي(f (x اکسپوننتونه یاجګګنونه وي، نو:

$$a^{f(x)}=b, a>0, a|=1, b>0 \qquad (13 . 16)$$

په دې ډول د لوګاريتمولو له لارې يو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b ....(13,17)$$

د کومو ځوابونه چی د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دی.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4}=4$

مو لاندې څلوری برابرون یا مربع مساوات ته بیایي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1=2$, $x_2=-3$ ځوابونوسره ، کوم چی د پیل برابرون اوبیونې یا ځوابونه هم دي.

بیلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 , x_2 = -4$$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چي ناپیژندونکي د اکسپوننت یا په جګ څخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \quad \text{یا} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;.................................(13{,}18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13 . 19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وبینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت($f(x)$سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)}) = 0\ ;...................................(13{,}20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13 . 21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو $y_1, y_2, y_3; \ldots\ldots$ لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i; i = 1,2,3\ldots\ldots \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 \ldots\ldots \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x\,(y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0,\ x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (13,26)$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,27)$$

له دې ځخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 \Rightarrow y(y-1)=0$$
$$y_1=0;\ y_2=1$$

$y_2=1$ ټيك (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1 \qquad \ldots\ldots\ldots(13,28)$$

حل اوبى . د لوګاريتمولو ځخه تعقيبيږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1\ ,\ x2 = -1$

دواړه ارزښتونه پيلبراورن پوره کوي۰
برسيره پر دې بايد وښوول شي، چې په برخى ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کى انځور شوي متودونو سره يوه د مساواتو ټوله لړى حل کيدى شي، په کوم کى اکسپوننشل افادې او لوګاريتم يوځاي رامنځ ته کيږي.

بيلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ ځخه د بيلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاريتموولو له لارې لاس ته راځي

$$\ln^2 x-\ln x+1=\log_2 8=3$$

که کيږدو $y=\ln x$ ، نو دا ځلورى برابرون يا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1\ ,\ y2 = 2$

سره او له دې بيا لاس ته راځي:

$\ln x=-1\ ,\ \ln x=2,\ x1=e-1=1/e\ ,\ x2=e^2$

۱۳ . ۳ ګونومتريکي- يا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګونومتري ساده برابرون لاندې څېره لري

sinx=a , cosx=a (13 . 29)

tanx=a , cotx=a, (13 . 30)

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه (۱۳ . ۲۹) ځوابونه لري ، که $-1 \le a \le 1$ باور ولري، نور ارزښتونه sin x او cos x نه شي غوره کولی(پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشميرني سره د تکمو یا ګوټکونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) یو ځواب لاس ته راځي
د(۱۳، ۲۹) لپاره

a F sin a F cos

د (۱۳،۳۰) لپاره

a F tan a 1/x tan

دا چي tan x او cotx پریودې همداسی 180°لري او په یوه اینتروال کی چي اوړدوالی همداسی 180°لري د(۱۳ ۳۰) ټيك یو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x0 د(۱۳ . ۳۰) یو ځواب وي) چی د بیلګي په توګه د جبشميرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ... -3, -2, -1, 0 1, 2, 3, ...; .... (13,31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په (۱۳ ، ۳۱) کی د بیلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30° + k.180°$$

د کونجونو فنکشنونه sin x او cos x پریودې(تل بېرته راګځېدنه یا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د جبشمیرني سره یوه اوبیونه x_0 پیداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x = -x_0$ هم یو حل دی، او $x = -x_0$ د cos x = a په حالت کی یو بل اوبی

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د (۱۳ ، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; ....(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°; ....(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; ....(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°; ....(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: (په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º

(په لینده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427

د) ۱۳ . ۳۲ (،) ۱۳ ، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13,833427 + k.360º = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657º + k.360 = 2,9001 + k.6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشمیروني سره مومو

$$x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.$$

د (۱۳ ، ۳۴) او (۱۳ . ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k.360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4{,}843000$ حل په جبشميرني پيداکوو

$x_0 = -59{,}999988° = -60° = -1{,}04718$

له دې امله د) ۱۳ . ۳۱ (له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$x_k = -60° + k.180° = -1{,}04718° + k.3{,}14159$

بيلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4{,}843000$ ټولې اوبيونې يا حلونه د جبشميرني سره داسې

$x_0 = 11{,}666677° = 11{,}67° = 0{,}203675$

لاس ته راځي. په دې توګه د (۱۳ . ۳) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11{,}67° + k.180° = 0{,}203675 + k.3{,}14159$

بيلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبيونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور تيپونه يا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرګندومتودو يا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a \,, \quad \cos f(x) = a \qquad (13 . 36)$$

$$\tan f(x) = a \quad , \cot f(x) = a \qquad (13 . 37)$$

دلته کيدی شي چې (f(x الجبري او يا ترانسځيندنته افاده وي‌که بدل (سوبستيتوتي) شي

$$y = f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y = a \,, \cos y = a \qquad (13 . 39)$$

$$\text{Tan } y = a \,, \cot y = a \qquad (13 . 40)$$

دا کيدی شي د جملې ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبيونې يا حلونه دې ... , y1, y2, y3 وي .

د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د ... $f(x) = y_i \,,\; i = 1,2,3,$ ټولې اوبيونې يا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بيلګه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیونې (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360° \;,\; k = ...,-3,-2,-1, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$, $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبدونې (حلونهو په توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90° + 3k.360° + 120° = 210° + 3k.360°$$

$$\overline{x}_k = 3y_k + 120° = 450° + 3k \,.\, 360° + 120° = 570° + 3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x,\; \sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x, ...) \qquad (13\,.\,42)$$

دلته که د بیلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13\,.\,43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2}\,,$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}\,, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}\,, \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}\,,\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2y^2 \quad (\text{usw.}$$

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳)، په y ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13\,,\,45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې $y1$, $y2$.$y3$.... وي. نو بیاد(۱۳.۴۳)سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin x=y_i, i=1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چی په (۱۳ . ۴۲) کي ښول شي ، وازمایل شي، چی ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۱۳ . ۴۲) کیدی د x په ځای یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x), ...) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سړی بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:

برابرون

$$\sin x+\cos x=1 \quad (13.49)$$

د (۱۳ . ۴۲) ، (۱۳ . ۴۴) سره ځان په رېينه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \Leftrightarrow \pm \sqrt{1-y^2} = 1-y \Leftrightarrow 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0, y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي ، چی د y2=1 لپاره برابرون (۱۳ . ۵۰) او له دې سره سم برابرون (۱۳ . ۴۹) تل پوره دي. د دې په څنګ یا خلاف y1 فقط د (۱۳ .۵۰) حل دی ، که د

رېینی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښه وي. دا حالت یوائې هلته مخ ته پروت دی، چی $\cos x>0$وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۱۳ . ۵۱) سره برابرون (۱۳ . ۴۶)حل یا اوبی شي او

حل یا اوبنونه یی په (۱۳ . ۴۹) کی کیښول شي:

$$\sin x=y_1= 0, x_k = k\pi; \quad k=...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x=y_2=1, x_k = \pi/2 + 2k; \quad k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (۵۲ . ۱۳) په (۴۹ . ۱۳) کېښوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پيلمساوات د زياتځله حلونه يواځي جفت ګڼونه دي($x\pi = 2k\pi$) که(۱۳ . ۵۳) په (۱۳ . ۴۹) کېښوول شي، نو لاس ته راځي

$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$

له دې وروسته ټول xk پيلبرابرون پوره کوي .

نو د (۱۳ . ۴۹) ټولې اوبيونې په لاندې بڼه لاس ته راځي

$x_k = 2k,\ x_k = \pi/2 + 2k;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,...$ (13 . 54)

بېلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0$ (13.55)

سره کيدی شي د ريښی مساوات څخه لار واړوو يت تيرشو. که چيرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳,۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \quad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4},$

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = -1. \quad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې ايښوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_k = 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1, \quad \bar{\bar{x}}_k = 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60^\circ \\ 180^\circ \\ 300^\circ \end{Bmatrix} + k \cdot 360^\circ = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

تمرينونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول ارزښتونه x وشميرئ، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره يې ازمايل يا ازماېښت اړيندی.

۱ - لوګاريتمي مساوات يا برابرونونه

1.1. a) $\log_4 (x + 1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg \sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln (x - 1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg (2x + 5) - \lg (3x + 1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg (x - 1)^2 = 6 \lg 2$

1.3. a) $\lg (x - 1) + \lg 3 = \lg (x^2 - 1)$

b) $\lg (x + 1)^2 = \lg 2 + \lg (x + 1) + \lg (x - 1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg (x + 4)$

d) $\lg (x - 2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg (x + 1)$

1.4. a) $\lg x + \lg (x + 1) + \lg (x - 1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2 \lg x = \lg (4 + x^3)$ c) $\lg (152 + x^3) - 3 \lg (x + 2) = 0$

d) $2 \lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg (a - \frac{1}{a}) = \lg (1 - \frac{1}{a}) + \lg (1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg (ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg \frac{x}{abx - 1} = \lg (a - 1) + \lg (a + 1)$

d) $\log_a (2x + 1) = \log_a (x - 1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg (x^2 + 1) = 2 \lg^{-1} (x^2 + 1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1 - x)} + 5 \lg (1 - x) = 6$

1.8. a) $2\lg \lg x = \lg (3 - 2 \lg x)$ b) $\log_2 (x - 14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 (3x - 26)$

c) $4 \log_3{}^3 5x - 7 \log_3 15 x + 7 = 0$ d) $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25\lg x}$

c) $x^{\log_5(5x)-4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$

c) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$ d) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0$ b) $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$

c) $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1$ d) $\frac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$

۲ - اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$

c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$

c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$

c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$

c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$

e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$

g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$ b) $2^{x+1} - 3^{x} = 2^{x+3} - 3^{x+2}$

c) $3^{2x-1} - 5^{3x-2} = 3^{2x+1} - 5^{3x+2}$ d) $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x} + 2 = 0$

e) $5^{4\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 = 0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2 = 0$

g) $3^{x+1} - 2 = 9^{x}$

h) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^{x} + 5^{x-1} + 5^{x-2}$

i) $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$ j) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$

k) $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$ l) $3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}} + 0{,}5 + 9 = 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x} - 17 \cdot 2^{-(x+2)} + 1 = 0$

e) $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2}$ f) $12\sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$

i) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

2.8. a) $\frac{3^{x} + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x} + 1}{2^{x} - 4^{x}} = 6$

c) $4 + \frac{2}{3^{x} - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x} + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x} = x$

۳ ــ ګونومتریکي ــ یا کونجکچیز مساوات

3.1. a) $\tan x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x = \frac{2}{5}$ d) $\tan x = -1$

3.2. a) $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0{,}309$ b) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 0{,}809$ d) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x \cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x \cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x \cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x \cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

i) $\sin \frac{7x}{2} \cos \frac{3x}{2} = \sin \frac{9x}{2} \cos \frac{x}{2}$

j) $\cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{9x}{2} \cos \frac{3x}{2}$

k) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$

l) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$

3.7. a) $2 \sin^3 x - 3 \sin x \cos x = 0$

b) $4 \sin^3 x - 8 \sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

c) $\tan^3 x + \tan^2 x \;\; 3 \tan x - 3 = 0$

d) $\tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$

3.8. a) $\sqrt{3} \sin x + 3 \cos x = 0$

b) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = 1$

d) $\sqrt{2 \sin 2x} + 2 \sin x = 0$

e) $1 - \sin x = \sin^2 (\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$

f) $2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos (\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$

g) $1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0$

h) $\cos x - 2 \cos 3x + \cos 5x = 0$

i) $\cos 4x + 2 \cos^2 x = 0$

j) $1 - \sin x \cos x + \sin x - \cos x = 0$

k) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$

l) $\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$

m) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$

n) $(\cos x)^{\sin x} = 1$

o) $\frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

۱۴ . ۱:نابرابرون(نامساوات)

۱۴ . ۱ . ۱ بنسټیزې کلیمی او شمیرقوانین

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنښنی $<, \geq, >$ او $\leq$ له لارې یو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کی به نابرابرونونه تر څیړنی لاندې ونیول شي، چی یوه یا دوه رییلی واریابلی یا اوښتونی ولري . یو نابرابرون د دوه واریابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښايي، د هغو سره چی واریابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګندږي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دئ ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واریابل یا اووښتونې یی غوره کولی شي او په ترم کی د هغې ځاي په ځاي کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونی وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډیري L کی سره راټولیږي.
په لاندې برخه کی به ډیر د وینامنطق(ویناسم اندیز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ (او د ډیري عملیو سومبولونه) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شمیرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونیول شي(مقایسه برخه ۳)، دلته دې a , b , c او dرییل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c,$ (14,1)

$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c$ (14,2)

$a:b<b:c$ (14,2)

$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c$ (14,3)

$a:c>b:c$ (14,3)

$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c$ (14,4)

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په څټ کیږي یا که غواړئ برعکس کیږي. د بیلګي په توګه $3 < 4$ مګر که داوړه خواوې د 1 - سره ځل شي نو لاس ته راځي $-3 > -4$

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښو > سره باور لري دا په دې مانا چې $a \leq b$ دا چې په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز (مثبت)دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$a.b>0 \Leftrightarrow$ (14,5)

$\Leftrightarrow a:b>0\ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0),$ (14,5)

$a.b<0 \Leftrightarrow$ (14,6)

$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0).$ (14,6)

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \mid= 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې توپیریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$a.b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq \wedge (a \geq 0) \vee (a<0 \wedge b<0)$ (14,7)

$a:b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b>0) \vee (a \leq 0 \wedge b<0)$ (14,8)

۱۴ . ۱ ۱الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :

یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلګڼونوR برخه ډیر) ده٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو اینتروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشي ، د ګڼکرښې یوه ټاکلې برخه ده، چې له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینتروال کې دننه وي یا خونديې وي نو د بند

اینتروال څخه غږیږو او که اینتروال پورې اړه ونه لري، واز اینتروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینتروالونه.
د اوبیډیرۍ په ورکولو سره په ګڼکرښې باندې، لاندې د انیتروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینتروال مختلف تیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده۰

1. $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ واز اینتروا ، اخر تخري په اینترول اړه نه لیر
2. $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ بند اینتروال ، اخر توري په اینتروال ئوري اړه لري
3. $[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ ښی واز اینتروال
4. $(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ کیڼ واز اینتروال
5. $(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$ ښي لورته ناپاي او کیڼ لور ته واز اینتروال
6. $[a,\infty) = \{x \mid x \geq a\}$ ښي لور ته ناپای او کیڼ لور ته بند اینترال
7. $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$ ښي لور ته واز او کیڼ ورته ناپاي اینتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\}$ ښي لور ته بند او کیڼ لورت ناپاي اینتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینتروال ، ټول ریيلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیرۍ
11. $\varnothing$ تشډیرۍ

لاندې اینتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیرۍ هم په اینتروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیرۍ ټولنه ورسره جوړوي۰

1. $[-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \mid x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \mid x \geq a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,\infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty,\infty] = \mathbb{R}^+$

پورته ته الترناتیو یا بدیلي لیکنبڼهAlternative notation

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنبڼهٔ په لاندې ډول ورکو لکیږي

$$]a,b[= \{ x \mid a < x < b \}$$

$$[a,b] = \{ x \mid a \le x \le b \}$$

$$[a,b[= \{ x \mid a \le x < b \}$$

$$]a,b] = \{ x \mid a < x \le b \}$$

یادونه : داپورته د اینتروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انیتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$

نیم و از اینتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\le b\}$

نیم واز اینتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\le x<b\}$

واز اینتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اینتروال : $(-oe,b]=\{x|x\le b\}$

کښ بند ناپای اینتروال : $[a,oe)=\{x|x\ge a\}$

ښی واز ناپای اینتروال :۰ $(-oe,b)=\{x|x<b\}$

کیڼ واز ناپای اینتروال :۰ $(a,oe)=\{x|x<b\}$

ناپای اینتروال : {x د ګڼکرښی ټکی دیٔ|x}=(-oe، oe)

بیلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستیزه ډیری Rکی د لاندې برابرون پیژنددیری غوښتنه منځ ته رااچوو.

$$x - 2 = 1 + 7 - x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : د دې ترم T1(x) = x - 2 پیژنددېری ده:

D1 = [2 , oe)

په همدې توګه د ترم T2(x)=1+7-x پیژنددېری ی ده: (D2 =(-oe,7

د برابرون دپیژنددېری لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \bigcap D_2 = [2, \infty) \bigcap (-\infty, 7] = [2, 7]$$

لاندې ځیره وګورې(متاسفانه، چې ښه ځېره نه شم کښلی)

D2=(-∞;7]

D1=[2;∞]

۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعد ې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چی یوه اوښتونې یا مجهوله ولري، او اوبیونې یی په ټولیزه توګه د اینتروالونو له لارې انځوریږي.
(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو 5x-6<4+9x دواړو لورو ته 6 + 9x- ورزیاتوو، نو لرو 10 > 4x-
دواړه خواوې په 4 - ویشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي x > -5/2
د اوبیونې ډیر یا اوبیدېری : (L=(-5/2,oe
که په یوه غوښتونکی ځل یا ویش کی ځله وونی، همداسي پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مخنخښي په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوگونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چی وي، باید په پام کی ولرل شي، چی یواځي هغه د نابرابرون شمیرل شوي دx - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول ىی سملاسي (په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېرۍ یا برخحلډیرۍ کیدی شي چی د غوځډیرۍ په څیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیرۍ شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوځډیرۍ جوړښت، کیدی شي چی د یوگونو ډیریو د گرافیکی انځورونو په څیر په گڼوړانگه ساده شي. د نامساوتو ټولي اوبیډیرۍ د برخ اوبیډیري یوه د یوگونو حالتونو ټولنډیرۍ ده .

بیلگه ۱۴ . ۲:

(3x-5)(x-2)<4(x-2)

که په (x-2) باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د x > 2 لپاره (x-2)>0

د x = 2 لپاره (x-2)=0

د x <2 لپاره (x-2)<0

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته بڼه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x-5 \le 4 <=> 3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځي هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځي هغه x د

$$x \in (2,\infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$$L_1 = (2,\infty) \bigcap (-\infty,3] = (2,3]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم حالت:

$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$

د لته په (x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.

د x = 2 ارزښت لیکلو ربښتیا وینا $0 \geq 0$ لاس ته راځي او له دې امله

L2 = {2 }

دریم حالت:

$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$

د 0 > 2 - x له امله د (۱۴ . ۳) له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کې راوړل شي:

$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$

د برخه اوبیډیریو ټولنی څخه ټول اوبیډیر) لاس ته راځي:

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$

نو ټولې اوبیونې هغه x د ي د کومو لپاره چې لرو: 2< x < 3
په لاندې بیلګو کې نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

(3x-1)/(2x+4)<2

د شرایطو 0=|2x+4له مخې، دا په دې مانا چې 2=| x د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د x>-2 لپاره (2x+4)>0

د x<-2 لپاره 2>(2x+4)

سره سم یواځې دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

ځیره ۱۴ ۱ الف: دا ځېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبیډیرۍ روښانه شو۰

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی۰

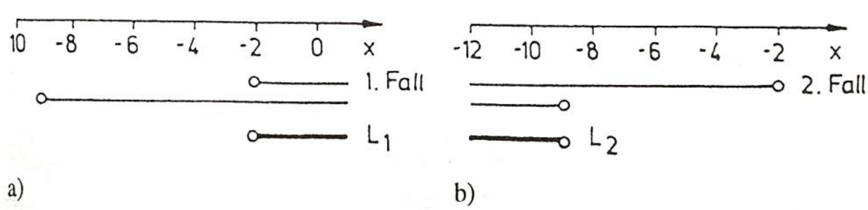


Bild 14 1

ځیره ۱۴ ا ب : دلته هم ګښونوکرښې شته، چۀ په هغې کې دا اوبیډیرۍ روښانه کاږل شوي دي۰ ، که ځیره مې ونه کاږله، نو داکار بج ګران لوستونکی هم وکولای شي۰

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چی په (۵.۱۴) تر (۱۴ . ۸) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښایي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګې راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښته شوي، له دې امله یې لیکښه د مخکنۍ لیکښې سره توپیر لري. دا لاندې لرو .

$$ax + b > 0, \qquad a \neq 0$$;

$$x^2 - 5 < 0$$;

$$|2x - 5| \leq x + 10$$;

دلته اوبیونې اینتروالونه دي. ښول کیږي، چې اوبیډیری څنګه پیداکیږي او د دې لپاره

اړیین شرایط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه ګڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواي د کمیز ګڼ سره ځل شي یا په کمیز ګڼ وویشل شي، نو مخنخښه تغیر خوري. که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښج یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرون بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نخښه غوره کوي او یا دواړه
- موږ 1.9:1) اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلسټ یا اوبیډیری

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبیډیری سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

مورږ 1.9:2) اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \iff x^2 < 5 \iff |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روابنه تشیرح لپاره یا شننې لپاره یو د حالت توپیر رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا یا ورته $x > -\sqrt{5}.$ نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \iff -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبیډیری

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x - 5 \leq x + 10, \quad x \leq 15 \iff$$

$$2x - 5 \geq 0 \quad x \geq \frac{5}{2} \iff 2x \geq 5 \iff$$

(i) که وي $2x - 5 \geq 0;$ نو دی $|2x - 5| = 2x - 5,$ او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 15.$$

(ii) $2x - 5 < 0.$ نو دی $|2x - 5| = -(2x - 5)$ او لرو

$$-2x + 5 \leq x + 10, \quad x \geq -\frac{5}{3} \iff -3x \leq 5 \iff$$

$$2x - 5 < 0. \quad x < \frac{5}{2} \iff 2x < 5 \iff$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیرۍ له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو څو تمرینونه ورکړ شوي، کۀ ګران مینه وال یې غواړې تمرین کړي٠

لاندې نابرارونونه اوبی کړی

(i) , $\frac{3}{x+5} < 2$

(ii) , $\sqrt{x^2+x+2} > x$

(iii) . $|x+5| > |x-2|$

بیلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$, $x|=-6$; $x |= 3$

د اصلي ماتلاندې $(3-x)(x+6)$ سره د حُل له امله باید بیا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونیول شي. شرایط، د کوموله مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کیدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې ومیندل شي:

$$(3-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6> \vee (3-x)<0 \wedge x+6<0$$

$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x>-6) \vee (x>3 \wedge x<-6) \Leftrightarrow -6<x<3$$

نو (۱۴ . ۶) شوونې کوي یا ممکنه وي، چی هغه ورشو(ساحه یا ډیری یا نه هم شهچاپیریال) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز یا نفي دی:

$$(3-x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$$

$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x>3$$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کي لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز ځله ووني یا مثبت فاکتور (3-x)(x+ 6) سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6\geq 6-2x \Leftrightarrow x\geq 0 \Leftrightarrow x\in[0,\infty),$$

$$L_2=(-6,3)\cap[0,\infty)=[0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x<-6\vee x>3) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-6)\cup(3,\infty)$

دا چی د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس(تاسیر لري:

$$x+6\leq 6-2x \Leftrightarrow x\leq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)$$

$$L_2=[(-\infty,-6)\cup(3,\infty)]\cap(-\infty,0)=(-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $: L=L_1\cup L_2=[0,3)\cup(-\infty,-6)=(-\infty,-6)\cup[0,3)$

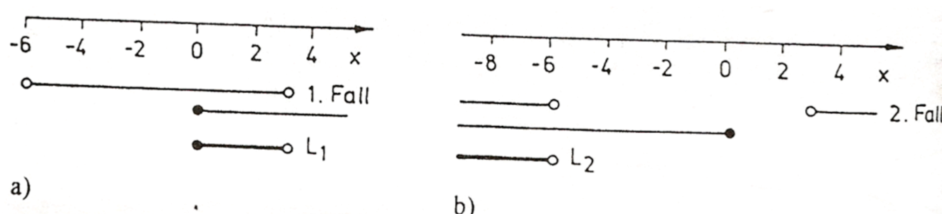


Bild 14.2 ځاکره

د ځلوری برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د ځلوری ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کي نیولو سره دx^2 د مخ (کیڼ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x^2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چی دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چی د اړیکنخښي په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولوروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x_1=4 , x_2=1/2$$

$$x^2-\frac{9}{2}x+2>0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2})>0 \Leftrightarrow (x>4\wedge x>\frac{1}{2})\vee(x<4\wedge x<\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x>4\vee x<\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د (۱۴ . ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېرى : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسیره دې په یاد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کړې کښلو له مخې هم حل کیدی شي، په ځانګړي ډول هلته، چې اړوند مربع شکل رییل حل نه لري٠ بالاخره پهپای کې د وېش د مخنښې راوړلو یوه بیلګه ښایو.

بیلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\leq 0,\ x\neq\frac{2}{3}$.

حل (۱۴,۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2}\leq 0 \Leftrightarrow (x\geq -5 \wedge x<\frac{2}{3}) \vee (x\leq -5 \wedge x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\leq x<\frac{2}{3}.$$

د سیستم حل ډېرى یا حل سټ: $L=[-5,\frac{2}{3})$.

۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی یا مجهولی یا اوښتونې سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیډیرى L د یوګونو نابرابرونونو اوبیډیریو غوڅډیرى ده . ګټور یا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کې په نمره کړی شي ، ددې لپاره چې دا یوګوني (دا په دې مانا چې یو یو) اوبی کړی شو.

بیلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\geq 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\geq 3-x \Leftrightarrow x\leq 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سیستم اوبیډیرى: Lدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۴ . ۸

$$-2<\frac{4x-10}{x-1}<3, x\neq 1$$

د داسې نابرابرون ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دی:

$$I. -2<\frac{4x-10}{x-1}$$

$$II. \frac{4x-10}{x-1}<3$$

د همغه فاکتور(x-1) سره د حٔل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرګ د لیدوړ بڼی سره وڅیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :

(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

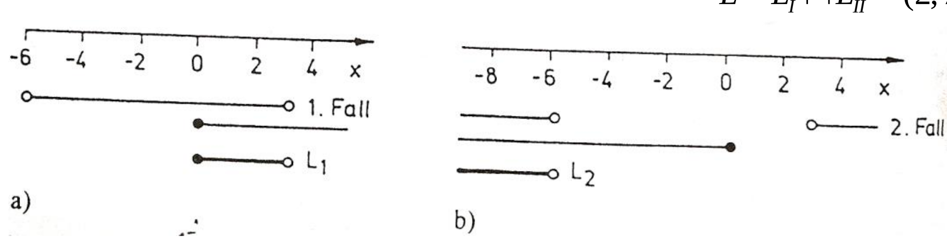
....*I*..*II*

	I	II
$1. Fall^{(1)}$ $x\in(1,\infty)$	$-2x+2<4x-10$ $\Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow x\in(2,\infty).$ $L_{I_1}=(1,\infty)\cap(2,\infty)=(2,\infty)$	$4x-10<3x-3$ $\Leftrightarrow x<7 \Leftrightarrow x\in(-\infty,7).$ $L_{II_1}=(1,\infty)\cap(-\infty,7)=(1,7)$
$2. Fall^{(2)}$ $x\in(-\infty,1)$	$-2x+2>4x-10$ $\Leftrightarrow x<2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2).$ $L_{I_2}=(-\infty,1)\cap(-\infty,2)=(-\infty,1)$	$4x-10>3x-3$ $\Leftrightarrow x>7 \Leftrightarrow x\in(7,\infty).$ $L_{II_2}=(-\infty,1)\cap(7,\infty)=\varnothing$
	$L_I=L_{I_1}\cup L_{I_2}$ $=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$	$L_{II}=L_{II_1}\cup L_{II_2}$ $=(1,7)$

د LI او LII غوڅېدیزی جوړول بیرته کیدی شي چي د یوګونو اوبیډیریوګنوړانګه باندې د لیدنی شي)(څیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیډیری:

$$L=L_I\cap L_{II}=(2,7)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو(ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیډیرې د یوه اوبیډیرې $R^2 = R \times R$ برخډیرې ده، چې د هوارې په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دی. په دې برخه کی به موږ یواځي د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \; (\geq 0\,,\, <0, \leq 0\,) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو $x\,,\,y$ او ثابتو ځله وونو(ضریبونو)
$a,b,c \in R$

سره د شرایطو $a|=0 \vee b\,|=0$ سره سم تر څیرنی لاندې ونیسو.
که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$
لاس ته راځي، کومه چې د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم (۱۴ . ۹) ، چې ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیډیرې په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو(د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پرېښوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځای شوي، نو راتلونکی کرښه د اوبیډیرې پورې اړه نه لري او کیدی شي یواځي ټوټه ټوټه کرښی (پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چې د ډیرې ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیرې پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د y په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چې په یوه کره نیولي x په روښانه توګه د لویو y - ارزښتونو لپاره پوره دی نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چې د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنی نیمی هوارې ټول ټکی اوبیډیرې L جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴)

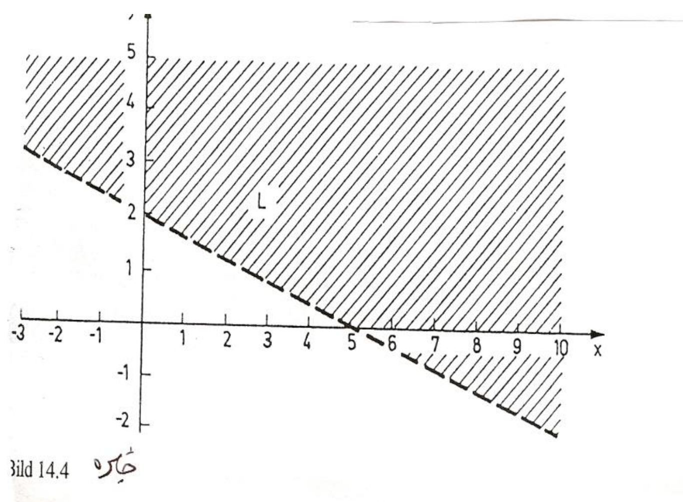
دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون (۱۴ . ۹) کی د مخه نیسي چي $b|=0$ دی. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دی، چې د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چې په کرښه ax+bx+c=0 نه وي پروت٠

ازمایو چې ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کی باور لري او یا نه.که ممکن وي نو د شمیرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0) ټاکو. دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا ریښتیا وینا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبیډیری پیداشوی ځاي (ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسیا کوي) تصدیقوي.
دلته یوه څیره کښل کیږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ږدو او بیا کرښه باسو٠ په کواوردینات کې د هوارې هغه برخه، چې اوبیډیری ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابیډیری ده٠

د یوه نابرابرونسیستم چې دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کیږی او بالاخر ه بي د یوګونو اوبیډیریو غوځډیری نیول کیږي یا جوړیږي.



بیلګه ۱۴ . ۱۰:

I . $2x+y<6$

II. $4x-y>0$

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبیډیري LI کی پروت دی. دا چې په نابرابرون II کی د (0 , 0) سیده برابرون باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلګي په توګه (1 , 0) کیښنول شي، کوم چې د په ځتوالي یا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې امله اوبيډيرئ LII کی نه دئ پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف(. ش ۱۴ . ۵ ب دسیستم حلډیری L ښايي چي له دوه نیمکرښو بنديږي یا له دوه نیم کرښومحدوديږي.
د وړاندیزارزښت لري چی د تمرينونو په خپلواك كار كولو کی د غوښتونكو اوبيډيريو L د یوګونو نیمهوارو غوځډيری حتي تر غاړې پورې رنګینه یا كرښی كرښی راوکښل شي، چی په دې ډول یی یو کواوردیناتسیستم د انځورولو لپاره بسیا وکړي .ش ۱۴ . ۵

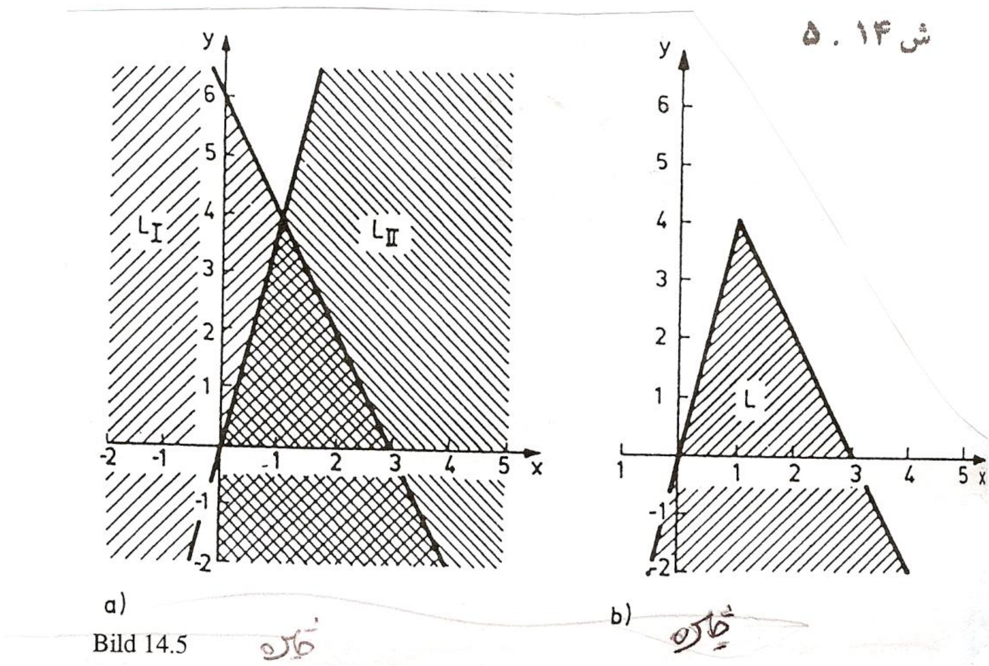


Bild 14.5

بیلګه ۱۴ . ۱۱:

I . x-3y-6<0 II. -x+y+1<0

III. x-6<0

دا اوبيډيرئ په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ کرښي
د پورته نابرابرونسیستم له مخهٔ د هر نابرابرون لپاره کرښه کشل کيږي، په یوه کواوردینات سیستم کې او بیا د هوارې هغه برخه، چې دریواړه کرو کې رابنده منهواره وي، هغه يې اوبی دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

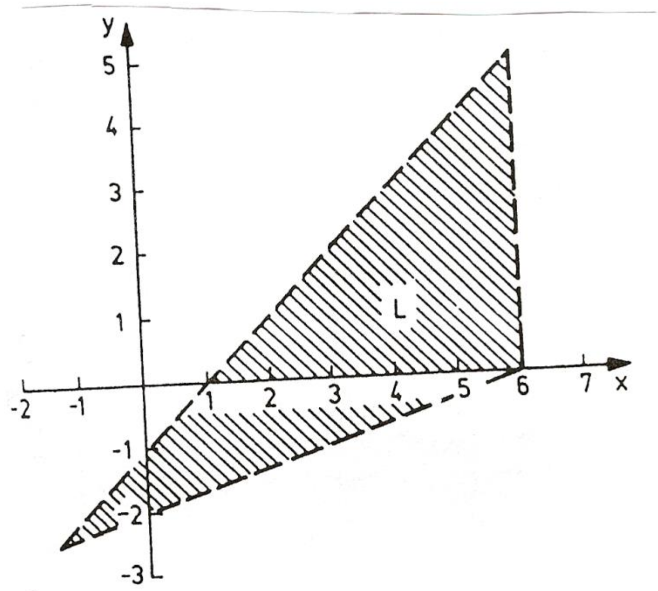


Bild 14.6 خاکه

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براورن یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه ځرګنده ده چی د یوه رییل ګڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیریږي٠
داسی دئ:

$T(x) = T(x)$ لپاره $T(x) \geq 0$ د (14,10)
$T(x) = -T(x)$ لپاره $T(x) < 0$ د (14,10)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چی د مطلقه ارزښت لرې پرېښول شي، یا د نورو ترمونو سره په تړلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښنو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په (۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چي په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پریښول کیږي چی ځانونه په قاعده کي په اینتروال وښايي، کوم چی دیسیونکت(پردي) برخه ډیری د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چی $T(x)$ ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چی د کنترول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رییل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي۰

$$|a . b| = |a| . |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b| \quad \text{د } |b| = 0 \text{ لپاره}$$

۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چی ایا دا اوبیونې په نیول شوي یا فرض شوي اینتروال کي پراته دی او که یوائې د اوبې په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوبیونې اوبیډیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوبیونې شونی یا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم
کی انځوریږي .
د دواړو فنکشنونو غوځټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبیونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

(14,11) د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

(14,11) د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

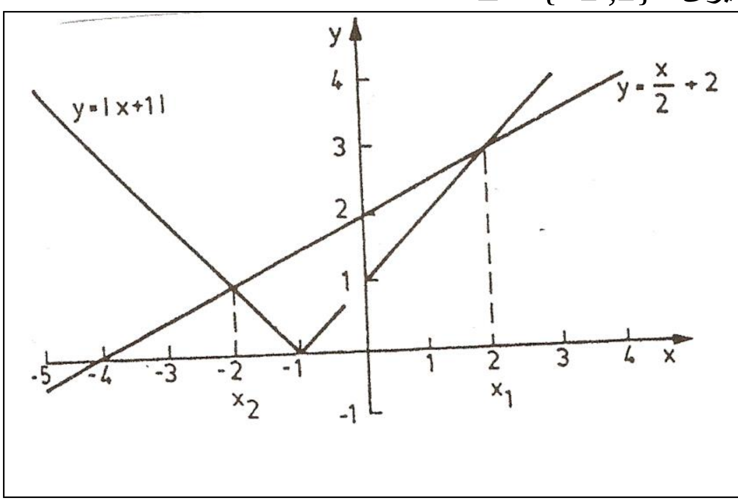
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیډیری $L = \{-2, 2\}$



په داسی حال کی چی د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$, ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کیڼ اړخ، $y = |x+1|$ د (۱۴ . ۱۱) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.
اوبی : کیدی شي په ځ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شوونې یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښنه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینتروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

|1- x|-|2x+3|=1

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د x<1 لپاره |1-x|=1-x

د x>1 لپاره =-1+x

او(لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د x>-3/2 لپاره |2x+3|=2x+3

د x<-3/2 لپاره =-1x-3

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

	x<-3/2	-3/2<x <1	x>1
|-1+x|	1-x	1-x	−1+x
|2x+3|	2x+3	-2x-3	|2x+3|

له دې امله د برابرون اوبې کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1 - x - (-2x - 3) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1 - x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1 + x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = -5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په څټ یا تضادکی دی، چی x3 = -5

یواځي ښکارندډوله اوبی دی(دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په څیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبډیری : L = {-3,-1}

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې څرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي. د کينې اړخ یا لور مطلقه ارزښت خپلواك یا ازاد ښودل کیدی شی چی توټه توټه د مخه تیرشوي شمیرنو په بوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقیبیږي:

د $x > - 3/2$ لپاره $=x+4$

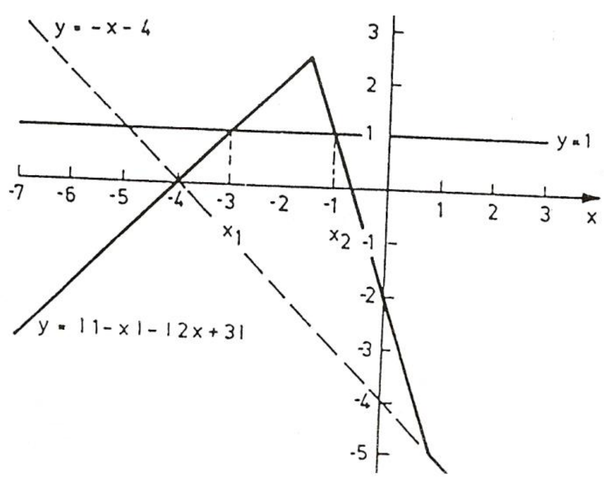
د $-2/3 < x < 1$ لپاره $|1- x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - یا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شمیرل شوو اوبیونو پرتلې له پرتلې مقایسي خیره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښایي، چی دواړه کرږي ریښتیا د $x < -3/2$

او $-3/2 < x < 1$ لپاره رښتیا هره یوه بله یوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره یو بل نه پریکوي. په دریم حالت کی د اړوند کرښی توټی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرتکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په څیر حل د نیول شوي اینتراوال د باندې دئ څیره (شاید داڅیره هم څیره نه شي، کهٔ کرانو مینه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګټور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه څیره باید ریښی او یا راغلی وي، یا راغلې وی۰



که د مطلقه ازښت نخښنی په یوه ځلوري - یا مربع ترم کی له منځه وړل کیږي، نو کیدی شي چی د مخنخښي غوښتل شوي څیرنی چي په برخه ۱۴. ۱ . ۲ کی تر څیړني نیول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بیلګه ۱۴ . ۵ دې مقایسه شي)

بیلګه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x^2 - 6x + 5| = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x<5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2 = 0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5,65 \in [5, \infty)\ ,\ \ x_2= 3 - \sqrt{7} = 0,35 \in (-oe , 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

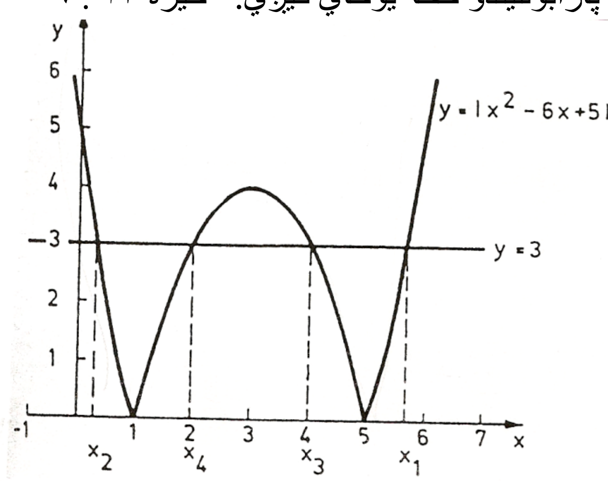
$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

$L \Rightarrow x_3=4 \in (1 , 5)\ ,\ \ x_4= 2 \in (1 , 5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیډیری: $L = \{3 - \sqrt{7}); 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

خیره ۱۴ . ۹ د گراف له لاری اوبی ښایي. کیښ لور $y=|x^2-6x+5|$ د (۱۴ . ۱۲) له امله د پارابوللیندو څخه یوځای کیږي. خیره ۱۴ . ۹



خیره ۱۴. ۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبې کې ، په کوم کې چې n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$, $i = 1,2,...n$ منځ ته راځي، 2^n حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دئ ، کوم چې موجود دی ، چې د ترم د $T_i(x)$ تیپ یا بڼی وي چې یا
$T_i(x)$ >0 او یا $T_i(x)$ 0> راکوي، یعنی د دوه توکو د وارییشن امکاناتو ټولګي ته (پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰)
قاعدې سره سم 2^n برابرونونه منځ ته راځي، چي په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیونې .... x_1,x_2,x_3, ولرودئ شي. یواځی دا باید وازمایل شي ، چې ایا دا اوبې xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.
د دې ټولیزې تګلار پسی موږ په بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د
T1(x)=1-x, T2=(2x+1)
سره، په لاندې $2^2 = 4$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0:\quad (1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$$

$$2.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0:\quad (1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د3- = x1=1, x2لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرونو کی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چې بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دئ

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : |7-3x|>2

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت:

$$7-3x \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$

$$7-3x \ge 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$

$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$

$$-7+3x \ge 2 \Leftrightarrow x \in [, \infty)$$

$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$

$$\Rightarrow$$

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \setminus (5/3, 3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راږل کیږي:

بیلګه ۱۴ . ۱۶: |x-5|<|x+1|

د یوګونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنخښی:

د x > 5 لپاره |x-5|= x–5

د x < 5 لپاره |x-5|=-x+5

او

د x ≥ 1 لپاره |x+1|=x+1

د x ≤ -1 لپاره |x + 1| = -x - 1

په یوه لید وړ توګه په لاندې توګه راټولیګي رایوځاي کیږي یا راغونډیږي :

	X > -1	-1≤ x<5	x≥ 5
|x-5| =	-x+5	-x+5	x-5
|x+1|=	-x-1	x+1	x+1

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1)$

|x-5|<|x+1|<=>-x+5<-x-1 <=> 0<-6

د هر x<-1 نابرابرون یوې ناریښتیا وینا ته لاربښودوي، چی په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چي: L1 = Ø

دوم حلات $x \in [-1, 5)$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x-5|<|x+1| \Leftrightarrow -x+5<-x-1 \Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow$

$x \in [2,\infty]$

$L_2 = [-1,5) \cap (2,5) = (2,5)$

دریم حالت: $x \in [5,\infty)$

$|x-5| < |x+1| \Leftrightarrow x-5 < x+1 \Leftrightarrow 0<6$

هر $x \geq 5$ نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: L3 = [5 , oe)

حلډیری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,5) \cup ([5,\infty) = (2,\infty)$

بیلګه ۱۴ . ۱۷: $|x^2-4x-21|<24$

د $x^2-4x-21 \geq 0 \Leftrightarrow x<-3 \vee x \geq 7$

او $x^2-4x-21<0 \Leftrightarrow -3<x<7$

څخه لاس ته راځي:

د $x<-3 \vee x \geq 7$ لپاره $|x^2-4x-21| = x^2-4x-21$

د $-3<x<7$ لپاره $= -x^2+4x+21$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-3] \cup [7,\infty)$

$|x^2-4x-21|<24 \Leftrightarrow x^2-4x-21<24 \Leftrightarrow x^2-4x-45<0$

$\Leftrightarrow -5 < x < 9 \Leftrightarrow$

$x \in (-5,9)$

$L_1 = [(-\infty,-3] \cup [7,\infty)] \cap (-5,9) = (-5,-3] \cup [7,9)$

دویم حالت: $x \in (-3,7)$

$|x^2-4x-21|<24 \Leftrightarrow -x^2+4x+21<24 \Leftrightarrow x^2-4x+3>0$

$\Leftrightarrow x<1 \vee x>3 \Leftrightarrow$

$x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty),$

$L_2 = (-3,7) \cap [(-\infty,1)] \cup (3,\infty) = (-3,1) \cup (3,7)$

اوبیډیری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5,1) \cup (3,9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی به په یوه بیلګه کی داسی نامساوات وڅیړو، په کومه کی چی مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کی منځ ته راشی.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د (۱۴ ، ۱۰) له مخی د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) له مخی په هر وخت کی د همغه ترم مخنخښه باید په پام کی ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د $x < -1/2$ لپاره $|1+2x| = -1-2x$

او

د $x < 1$ لپاره $(1-x) > 0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کی ګنوړانګه سره بیله یا توټه کیږي، داسی چي په راتلونکو ګڼلو کی یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

$X<-1/2$	$-1\leq x<1$	$x>1$	
$\|1+2x\|$	$-1-2x>$	$1+2x$	$1+2x$
$=1-x$	>0	>0	<0

لومړی حالت: $x \in (-oe, -1/2)$

$$-1-2x \leq 1-x \Leftrightarrow x \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$x \in [-2 , oe)$$

$$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [-2 , oe) = [-2 , -1/2)$$

دویم حالت $x \in [- 1/2,1)$:

$$1+2x < 1- x \Leftrightarrow x<o \Leftrightarrow x \in (-oe,0]$$

$$L_2 = [-1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \in (1 , oe)$

$1+ 2x \geq 1 - x \iff x \geq 0 \iff x \in [0 , oe)$

$L_3 = (1 , oe) \cap [0 , oe) = (1 , oe)$

د حلونو سټ(اوبیډیری):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لاینی ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+ c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

(۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| =-(ax+by+c$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه ښي لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بڼی(۱۴ . ۹) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1|>x-2x-4$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1|=-x-y+1$

د $x-y+1<0$ لپاره $= x + y -1$

لومړی حالت: $-x -y +1 > 0$

$|-x-y+1|>x-2y-4 \iff -x-y+1>x-2y-4 \iff -2x+y+5>0$

$L1=\{(x,y)|-x-y+1 \geq 0 ,-2x+y+5>0\}$

دوم حالت: $x-y+1<0$

$|-x-y+1|>x-2y-4 \iff x+y-1>x-2y-4 \iff 3y+3>0 \iff y<-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

L2={(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1}

له دې سره L1 او L2 د اوبیدیرۍ دوه نابرابرونونو غوڅدیرۍ ده او کیدی شي، لکه څنګه یو نابرابرون د یوه ګراف سره انځور شي (څیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبیدیرۍ بیرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبیدیریو تولندیرۍ ده۰ (څیره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)۰

که په یوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې یا – ویینې د (۱۴ . ۱۳) بڼی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نیولو سره څلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.

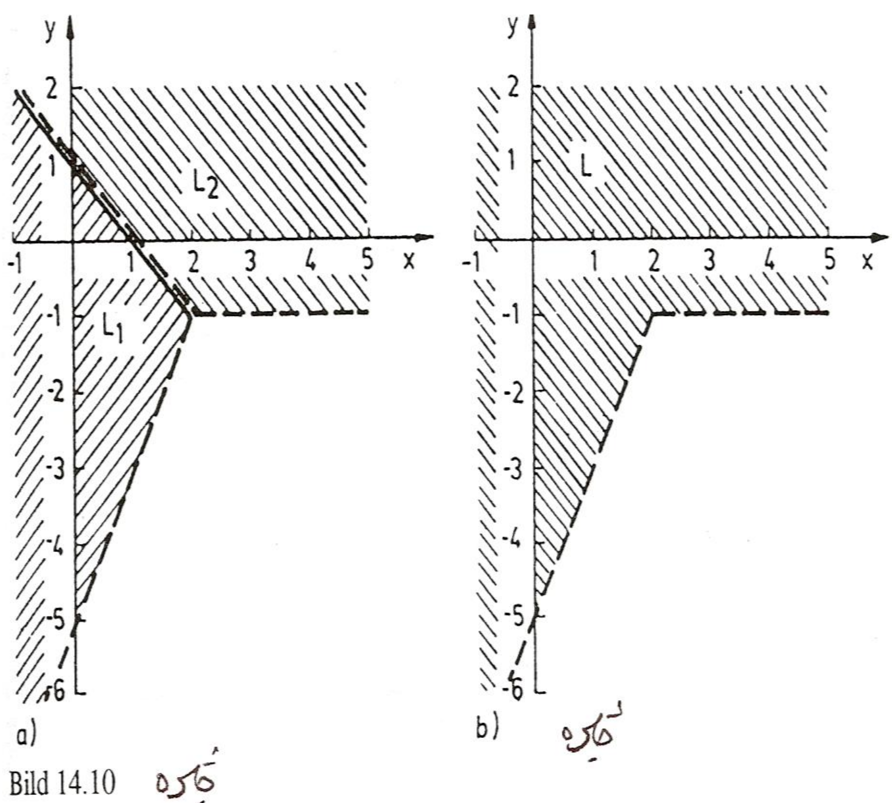


Bild 14.10 ځاره

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې نامساواتو حلېږی پیدا کړی

1. a) $8x-3<2x+9$ b) $5-7x\le 3x-10$

c) $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{1}{2}+\frac{x}{9}$ d) $3(3x-2)\ge 4(3-2x)$

e) $\frac{8x-5}{5}\le\frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}x>\frac{5}{4}x+\frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9}+6x\ge 2(\frac{5}{6}+3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8}-6)<\frac{x}{6}-\frac{x}{8}+1$

2. a) $(3x+1)(2x-1)<(5x-3)(2x-1)$

b) $(8x-9)(3x+2)\ge(2+7x)(2+3x)$

c) $(7x-3)(5-7x)>(3-7x)(5x+3)$

d) $(5+2x)(7-5x)\le(10+4x)(2-3x)$

e) $x^2-x-6\le 2x+4$ f) $x^2+5x-6>3-3x$

g) $x^2+3x\ge -2x-6$ h) $x^2-4x+4<4x-8$

3. a) $\frac{3}{2x-4}\le 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x}\ge 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2}<2$ d) $\frac{5x+3}{x}<-2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2}>5$ f) $\frac{9-3x}{x-3}>-3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3}<3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1}\ge 12-\frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4}\le\frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x}>\frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3}<\frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1}\le\frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{3x+1}{x-2}>4$ f) $\frac{x-3}{1-6x}-\frac{2x+1}{4x+3}\ge-\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{3x-3}\ge 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x}-\frac{2-6x}{1-3x}<\frac{3}{8}\cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x-3)(3x-2)<0$ b) $(x+3)(7-x)\le 0$

c) $x^2+4x+3\ge 0$ d) $x^2-8x+7\le 0$

e) $x^2+4x+5<0$ f) $x^2-6x+10>0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$

6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \leq 0$

c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \geq 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$

g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \leq 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4} \leq 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \geq 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \geq 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \leq 0$

8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$

c) $8(x - 2) \geq \frac{20}{x+1} + 3(x - 7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x - 6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرى وټاکئ

9. a) $2 + x \geq 2x - 7$, $5(x - 3) \geq 2(x - 3)$ b) $x + 6 < 14 - 3x$, $6 + 7x \geq 3x + 5$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$ d) $x + \frac{1}{3} \leq 2x - \frac{7}{6}$, $5(x - \frac{3}{2}) \leq 2x - 3$

10. a) $x^2 - 3x < 0$, $2(x + 2) < 4x - 1$ b) $x^2 + 6x + 8 < 0$, $2(x + 2) > x + 3$

c) $x^2 - 9 < 0$, $x + 2 > 2(x - 1)$ d) $x^2 - 3x + 3 > 0$, $4(x - 1) < 2(x + 1)$

11. a) $x^2 - 4x - 5 \leq 0$, $x^2 + 6x - 16 < 0$ b) $x^2 + 2x - 8 < 0$, $x^2 - 3x - 4 > 0$

c) $x^2 - 5x > 0$, $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 - 6x + 5 < 0$, $x^2 + 8x + 15 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. a) $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$ b) $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$

c) $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$ d) $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$

13. a) $3 - x < 2 - 4x$
$x + 3 < \frac{1}{2}(x+1)$
$\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$

b) $x + 5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$
$4(x-1) < 13 - \frac{1}{4}x$
$2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاڼیرې په کارتیزې کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکې انځور کړئ.

14. a) $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$ b) $y < -\frac{2}{3}x + 2$

c) $x < 2y + 2$ d) $x > -y + 3$

e) $4x - 5y > 12$ f) $-3x - 8y \leq 24$

g) $2(y - 3) \leq 6(x - 1)$ h) $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$

15. a) $2x + 3y > -6$
$x - y < 2$

b) $3x - y > 3$
$x + y > 4$

c) $x > 1$
$x + 2y < 4$
$y + 3 > x$

d) $x - 4y - 6 \leq 0$
$2x + y - 3 \leq 0$
$y - 5 \leq 0$

16. a) $-2 < x + y < 2$
$-2 < x - y < 2$

b) $x > 2$
$-3 < y < 2 + x$
$x + y < 5$

c) $x^2 - y^2 \leq 0$ d) $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حاڼیرې د شمیرلو او همداسې ګرافیکې لارې پیداکړئ.

17. a) $|x - 3| = 5$ b) $|x + 2| = 7$

c) $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$ d) $|x + 3| = |3x - 4|$

e) $|x - 4| = |2x + 3|$ f) $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$

g) $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$ h) $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$

18. a) $|x^2 - 2x - 8| = 7$ b) $|8 - 2x^2| = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلډېرۍ پیدا کړئ

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \ge 1$

c) $2 - |1 - x| \ge 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \ge \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \le 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \le 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \ge 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \le 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \le \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \ge 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \ge 1$

د

لاندې نامساواتو حلډېرۍ په یوه په یوه کواوردیناتسیستم کې انځور کړئ او ا نځور یې وکاږئ

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \le 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \ge 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \le 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \le |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ فنکشنونه(بلواك يا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کليمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چې ددې برخې په پيل کې دی کليمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کليمه کله د يواځنی ځيرونی، چې په هندسه کې خورا ډيره کارول کيږي يا استعماليږي ، کله د تابع(بلواك) او بيا زياته د فنکشن په نامه ځموږ په دې کار کی بلل شوې چې موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد يو، ځما په اند يا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چې خپلواکی او بلواکی ناپيوندونکی ځموږ د ځيرلو متن جوړوی

پيژند ۱۵ . ۱:

د يوې ريبلی واريابلی ريبل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن) د ريبلو ګڼونو ډيری باندې ، د يوې ډيری $D \subseteq R$ يوه يواځنی ځيرونه ده. D دپيژند ډيری نوميږي .
د ټولو ارزښتونو ډيری چې y يی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پيژندډيری يا تعريف ډيري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډيری W بلل کيږي .
د ي وې قانونمندی f له مخی هر $x \in M$ يواځني يوه $y \in W$ باندې تنظيميږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واريابل يا اووښتونی يا مجهوله بلل کيږي يا نوميږي او y بلواك واريابل يا اووښتونی بلل کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مگر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلگه ۱۵ . ۱ : هر ریبل گڼ د همغه ریبلگڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمدل.

بیلگه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي گڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت گن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو ریبلو گڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴).

بیلگی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلگی ۱۵ . ۲ ته : د $x<0$ لپاره $y=|x|$
دلته $D=R,W = [0,\infty)$ د $x>0$ لپاره $y=x^2$
پام دې وي چی په داسی حالت کي له کیڼ و ښي لور ته یا گډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دئ ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دي گران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیڅیت(واضح)روښانه و څرگند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلگو ۱۵ ، ۱ ۱و ۱۵ . ۲ چی په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y =f(x)$ که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیڅیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلگی په توگه به $2y-x-1=0$ $D=R,W=R$,فنکشن د بیلگي ۱۵ . ۱ یو ایمپلیڅیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیڅیت شنینیزه بڼه (ایمپلیڅیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیڅیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلگی په توگه : که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیڅیت حل کیدونکی نه دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يو فنكشن تحليلي يا شننيزې انځوروني ځانګړې بڼه پارامتري څرګندونه ده. دلته تنظيم د يوه مرستندوي اووښتوني يا واريابلى t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربښوديږي. هر پارامتر (له يوه پارامتر ساحى څخه)

$x = \varphi(t) \;, y = \Psi(t)$

په يو ارزښتجوړې x,y تنظيميږي.

بيلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oeبه يوه پارامتري انځورونه وى او x = t , y = t/2 + 1 به يوه بله پارامتري انځورونه وي.

زيات وخت فنكشنونه د جدول په څير وركول كيږي

بيلګي ۱۵ . ۱ته:

X	-2	-1	0	1	2 ....
Y	2	0,5	1	1,5	2 .....

بيلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....	-3	2	-1	0	1	2	3 ...
Y....	3	2	1	0	1	4	9 ...

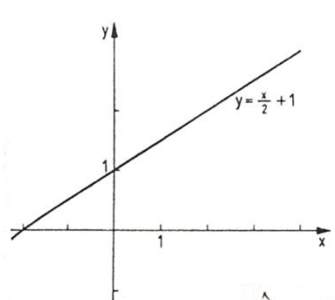


Bild 15.1 ځاره

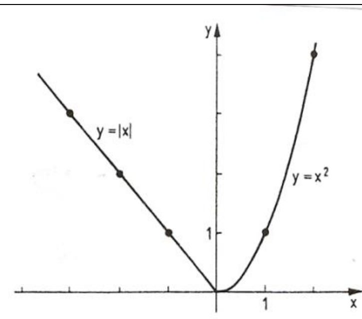


Bild 15.2 ځاره

د فنكشن ګرافيكى انځورونه (د يوې ټوټې) په x,y- كواورديناټ سيستم كى د يوې كرښې له لارې، د هغه فنكشن انځورونى څخه عبارت ده ، چى د واريابلو

يا اووښتونوجوړې د x,y - هواره يا سطحه كى يواځني او يواځني ټكي باندې تنظيميږي .

څيره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بيلګي ۱۵ . ۲ته بيلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال] a,b[کی هلته او هلته یا تیك هلته مونوتون جګیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري: $x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$

$$f(x1) \leq f(x2) \quad (f(x1)>f(x2))$$

که د برابروننخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غرېږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون تیټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینتروال] a,a-[کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو ځیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي) دلته هم ځیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي) بیا هم ځیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

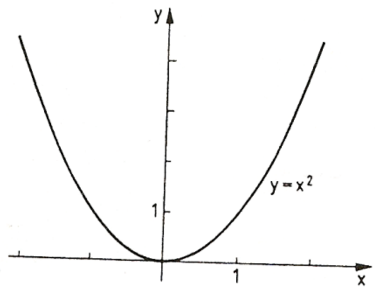
بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

$$(-x^3) = -x^3$$

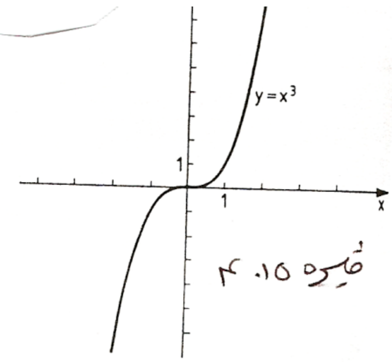
بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دئ:

$$(-x)^2 = x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۱۵.۳



ځیره ۱۵.۴

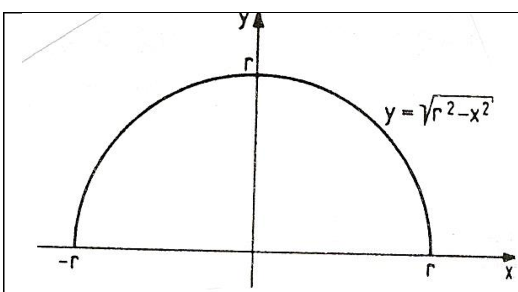
د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D (پیژنددیری ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري :

$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بیلګه ۱۵ . ۵:

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$ بند یا راګیر(محدود)(زه به دا له دې وروسته بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی ځیره ده $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \le r$ ش . ۱۵ . ۵	

پیژند ۱۵ . ۵:

$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p) = f(x)$$

د دورانی یا تل راکځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۶ :

تول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي۰

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرښې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\, x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (ځیره ۱۵ . ۱)

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶)

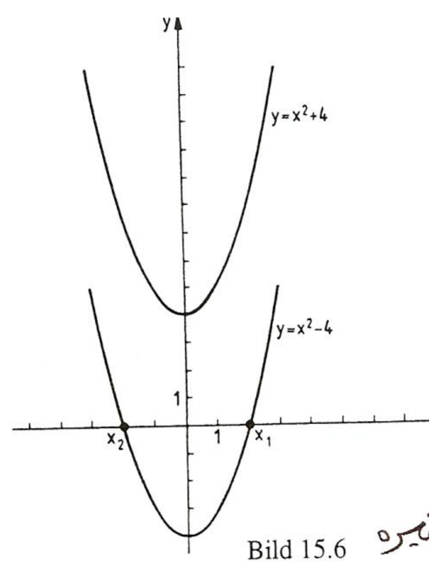


Bild 15.6

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \quad , \quad y \in W \;\; y = f(x),$
یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی
وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (y =
f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ځتکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو
فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا
واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د
فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته
د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیژندونکی دي د y=f(x) په څټ یا برعکس
فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په څټ فنکشن سره کتمټ(- ورته) identic دی٠ د په څټ یا
برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$
کرافیکی ځیره y = x په کرښه د y =f(x)(هندارونه) یعنی په هنداره کی ځیرونه
او لنډ یی: هندارونه) ده٠

بیلګي ۱۵ ، ۱ ته :

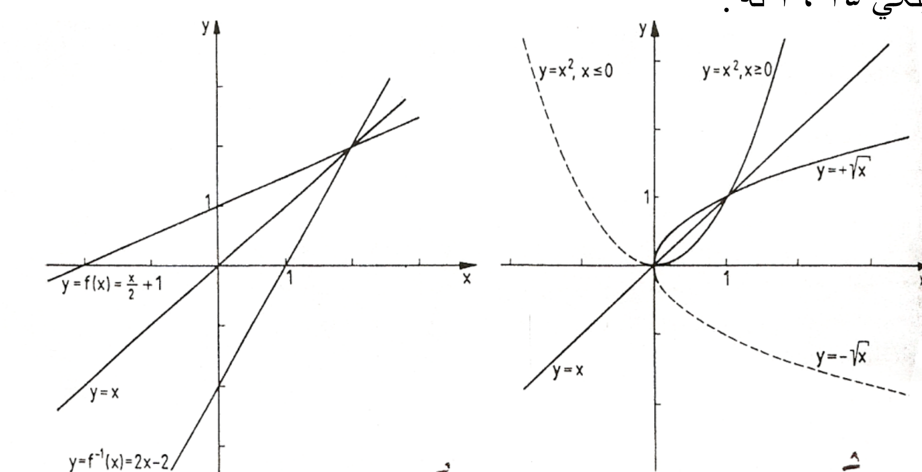


Bild 15.7a ځایره

Bild 15.7b ځایره

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په څټ فنکشن داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سرې $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ځیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن
$x \in D$ $y = x^2$,
ځیرره ش ۱۵ . ۳) په څټکیدونکی دي یا په څټکیدونکی نه دی.
هر $y \in W$ $=[0,oe]$ پورې دوه$[-oe,oe]$ = $x \in D$ اړه لري، یعنی $x=+y$او $x=-y$
مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونګی دی (او په دې ډول یواځنی او یوائنی).

د $0 \geq x$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $0 < x$ لپاره. $y=x^2,x\geq0$
ته چپه- یا په څټ فنکشن $y=+ x$ دی، او $x < 0$, $y = x^2$ ته چپه- یا په څټ فنکشن $y =$
x -دی. (ځیره ۱۵ . ۷ ب) .
په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که ($y = f(x)$کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په څټ فنکشن
$y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ځیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړدوله خویونو له مخی وځیرل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي فنکشنونه) وځیرل شي. د فنکشنونو ځیرل به د هغو ځانګړدوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام وموميي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; \; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه ($n = 1$) یالایني فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو $a1$ او $a0$ په مانا دي. د لاینې فنکشنونو ښیره(ګراف) یوه کرښه ده چي په $y = n$ کی دy - محور غوڅوي ($x = 0$) او جګوالی $m = \tan\alpha$

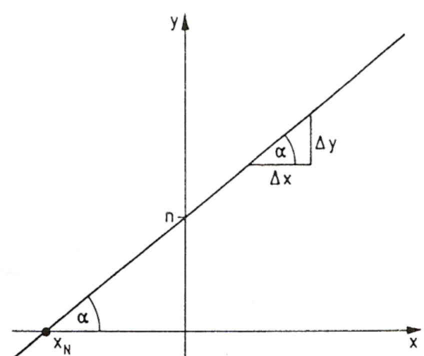


Bild 15.8 ګاره

لري (ښېره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي، دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که $|m|= 0$ نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي ($y = 0$) لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښې برابرون، چی له دوه ټکو $(x1,y1)$ او $(x2,y2)$ تیریږي، پیدا کړو چي پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرتټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا نوره بنه غړځتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه پولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c , a \ |= 0 \qquad (15 .3)$$

د مربع فنکشنونو ګیره) ګراف (پارابول دئ چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیځینت) ځله ووني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بنه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیړني لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0) \qquad (15 . 4)$

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$
(ځ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q \ (a=1 , b=p , c=q) \qquad (15 . 5)$

او $x^2 + px$ ته د ځلورئ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \quad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ئ ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:

$$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$$

(ځ،۱۵ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. $y = ax^2$ (a|=0,b=0, c = 0)

د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لورته واز دئ (خلاص دئ)

بیلګه ۱۵ . ۸:

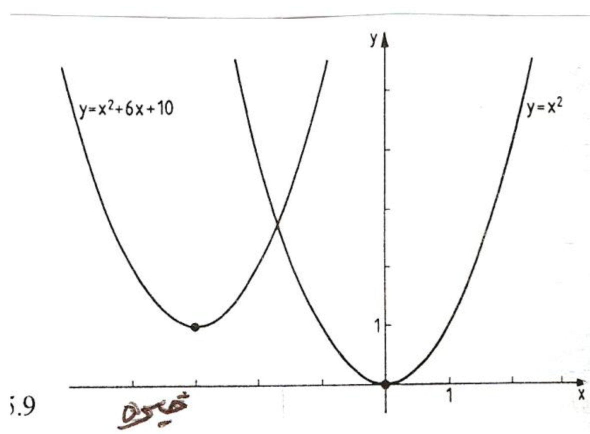
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(خ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$



بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,(a=-1/2, b=1, c=4)

دککرۍ کواوردینات:

$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$

دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

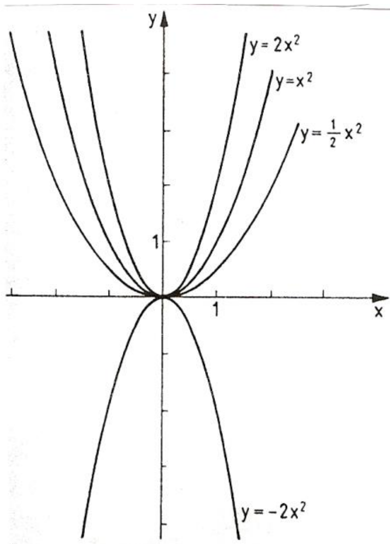


Bild 15.10 ځېره

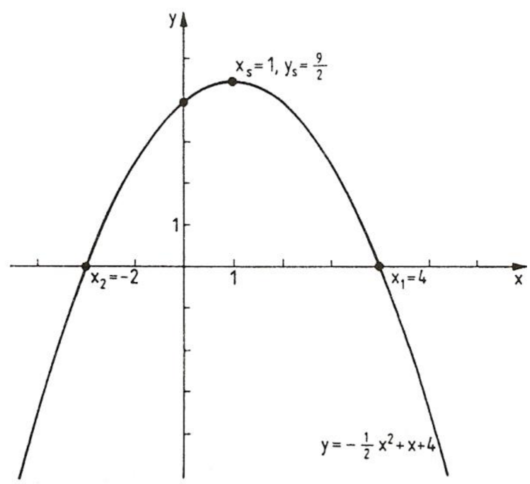


Bild 15.11 ځايره

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي.

و بیلګي ۱۵ . ۷ (څیره ۱۵ . ۹) ته :
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چی برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

فنکشن $y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي
د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چي د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Hornerschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼی سره په لاندې ډول وشمیرل شي:

a3 له x1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یی له x1سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (ځرکندوو)

خلونه یا ضریبونه	a_0	a_1	a_2	
منځنی خلونه	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	$(a_3x_1+a_2)x_1$	a_3x_1	
منځنی زیاتون	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$a_3x_1+a_2$	a_3

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلگه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x_1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.

یادونه: دا د هورنر شیمت زما په دې اوسنۍ د برینکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی). اوبیونه) :

	1	-2	-14	-5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	7 = f(-2)
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	0=f(5)

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځایونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چرې ددریمی درجی ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش
له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما
په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت
یا دمګړۍ کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او$f(x1)=0$ چی د$(x-x_1)$سره د ځلونې له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر
ځایونه د ځلورۍ – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجي فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی
شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5=(x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله
باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر
ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس
کیدی شي.
که $x_1,x_2,,...,x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیشینت یا ځله وونې لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :

5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y=2x^5-6x^3-20x^2-8x+80$ درې صفرځایونه
$x_1=x_2=2, x_3=-2$
لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
x_1 = 2		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
x_2 = 2		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
x_3 = -2		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $2x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$
لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې د دريمي او جګو درجو د ټول ريشنلفنکشنونو يوه څيره يا تصوير ولرودی شو، نور کرکتريستيکی يا د خويونو ټکی يی د ديفرنځيالشميرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بې له دې چې د دفيرنځيالشمير له مرستي کار واخلو ، کيدی شي چې د هغه د ناپای په هکله وينا وي وکړی شو. موږ په ليديدونکی ډول د فنکشن د پولی کليمه په کار اچوو، کومه به چې په برخه ۱۹ کی ټيك تعريف شي. دا د بيلګي په توګه دا مانا لري چې $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره (f(x)تل ارزښت g ته نزدې کيږي، که x د oe يانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چې

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زياتيز يا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه دoe په لور ځي) .

که n جوړه او a_nکميز يا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty -$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کميز يا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_nکميز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};.........(15,7)$$
$$n,m\in N_0;a_k,b_i\in R;Q_m\neq 0$$

مات ريشنلفنكشن بلل کيږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نوميږي، كه n<m وي او نااصلي مات دی که $n\geq m$. نااصل مات فنکشن كيدى شي چي د پولينوم ويش له لارې تجزيه (ټوټه) شي او د يوه ټول ريشنلفنكشن او يوه ريښتونى ماتى برخى د زياتون په څير وليکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنكشن باندې دماتباندې فنكشن ويش څخه لاس ته راځي:
$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$

د $2x^2+x-6$ پاتی (باقي) سره. پس لرو:
$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$.

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره يو صفرځاي لري، كه $x = x0$ وي نو باور لري:
$P_n(x_0) = 0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x = x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،كه وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$
د $x = x_P$ لپاره يو قطب pol لري كه وي: $P_n(x_P)\neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بیلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو ټوټې کولو وروسته په لاندې فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y = \frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای (ټيك ناپای ځای بللکيږي) xpکی کږه داسيمپټوټي کربښي $x = xP$ ته نزدې کيږي .د يوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې 0 / 0 شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ يعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ويش څخه لاس ته راځی:

$$y = \frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}} + \frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}} + \ldots + \frac{a_1}{x^{-1+m}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{0}{b_m} = 0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن څيره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کيږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نيسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه يی د صفر په لور ځي، لکه ټولريشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن څيره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولريشنلبرخی ته نزدې کوي.

بيلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: $y = x /(x^2+1)$ د $x_0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول
یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او د x -> ± oe لپاره دx- محور (y = 0)
د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3 =0$) په $x_1 =-3$
او $x_1=1$ کی لري . تشځای نه لري او په $x_3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x =$
-2 اسیمپتوتی دی، او د x →±oe لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی
کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

$$y = x^n ; n \in Z \setminus \{0,1\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګڼ n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګڼ
nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګڼ n لپاره ټولی کرې د تعریف ډیری(-) = D
oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oe او ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري. (څیره
۱٤ الف ۱۵) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe
او(W = (-oe,oe) دي او (-1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴
ب)۰

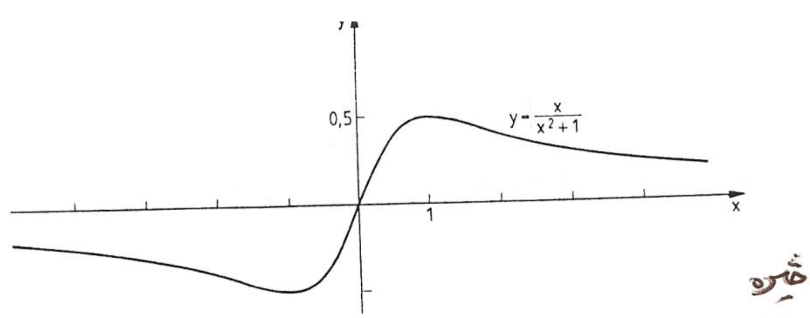


Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library

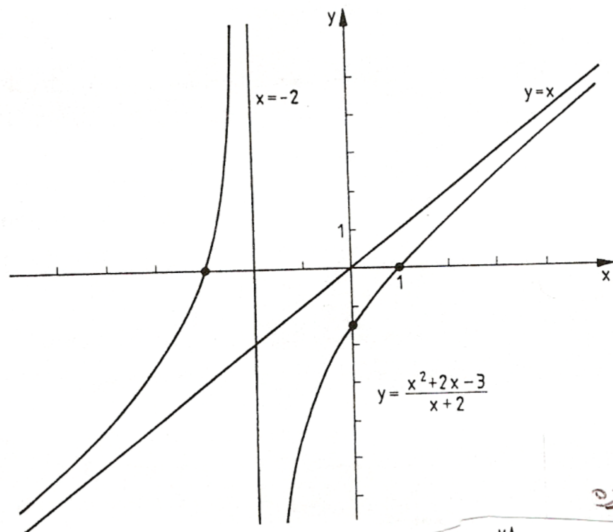


Bild 15.13

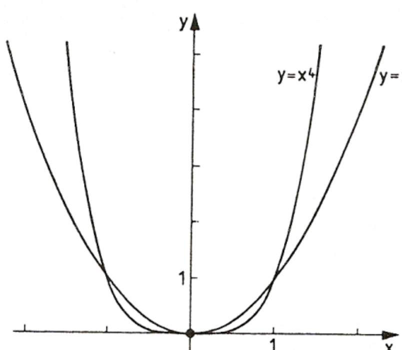


Bild 15.14a

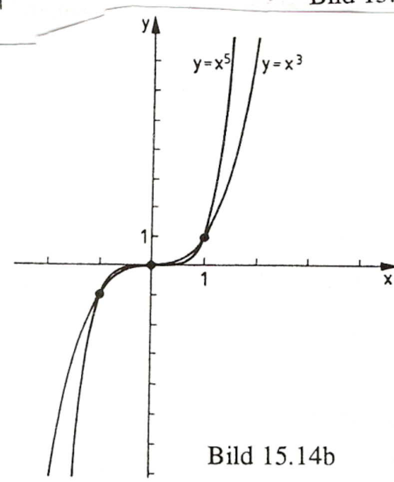


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په $x = 0$ کی د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپټوټی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز n) لپاره ټولی کرې د پیژند ډیري

$D = (-oe,oe)\setminus\{0\}$ د ارزښت ډیري($W = (0,oe)$ لري اوګډټکي $(1,1)$, $(-1,1)$ ؟؟؟ څیره ش. ۱۵,۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون (کمیز n)لپاره{ 0}\(-oe,oe) = D او(W=(-oe,oe او(1-،1-) (1,1) ګډ ټکی دی (څیره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه څیرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

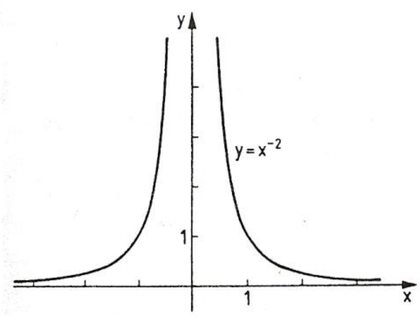


Bild 15.15a

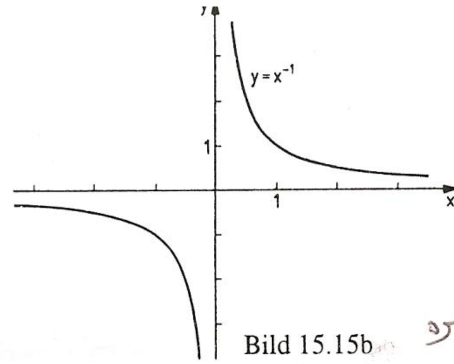


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اینتروال په پام کی ونیول شي.(پرتله بیلګه(بیلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کیڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- یا پر ښت فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x} \ , n \in N \setminus \{1\} \ , D = [0,\infty), W = [0,\infty) .... (15,8_b)$$

او ریښه فنکشن نومیږي (پیژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کیدی شي و ریښنل ایکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ریښنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n \ , a \in Q \ , x > 0 \qquad (15 . 8c)$$

نو د ریښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرښت بیرته پوتنځ فنکشن دی.
ټولیز پوتنځ فنکشن پیژند د رییل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رییلګڼونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R \ , x > 0 \qquad (15. 8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}, x \geq 0$

$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښۍ فنکشن لرو

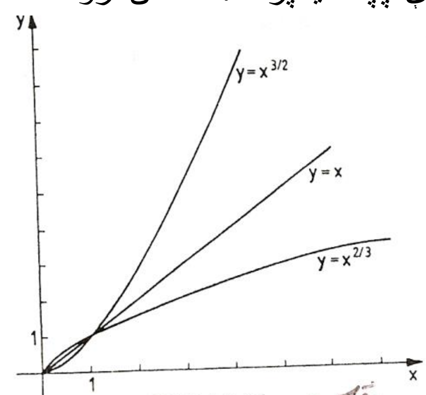


Bild 15.16a

ب) ښکاره

(ښیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

ښیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2, x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښې فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په

پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن

$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښې کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری($D = [0,oe$ کی پر ښې فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د $y= x^3$ پرښې فنکشن د[$D= (-oe,0$

سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$y=a^x, a > 0, a \neq 1$..................................(15,9)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰
(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

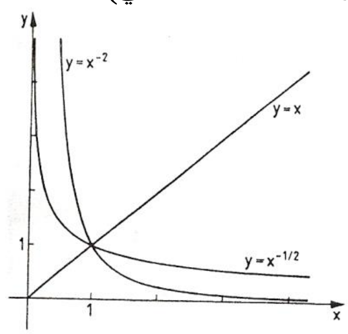


Bild 15.16b

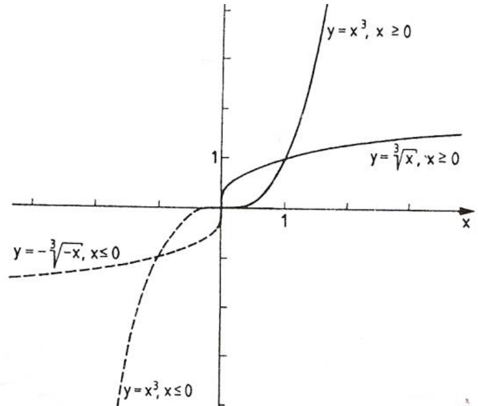


Bild 15.17

پورته دوه ځیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژندډیری(D=(-oe,oe او ارزښتډیری(W=(o,oe لري. د $a^0 = 1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کږو ګډ ټکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹)
په کلکه یو غږیز- یا مونوتونجګیدونکی دئ اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنږدې کیږي .د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نږدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګې (a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10) په ځیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

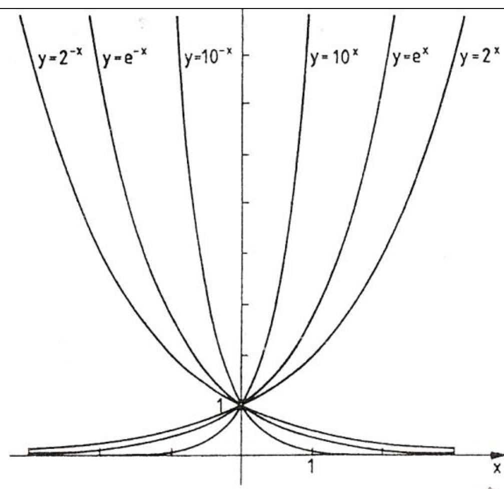


Bild 15.18

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$$y = \log_a x \,,\ a > 0 \,,\ a \,|= 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژنددېری $D = (0.oe\ )$ او د ارزښتدېری($W=(-oe,oe$) لري.

د $y = \log_a x$ کرږې د ګرږو $y=a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکی(1,0) د ټولوکرږو ګډ ټکی دی (څیره شته دی)

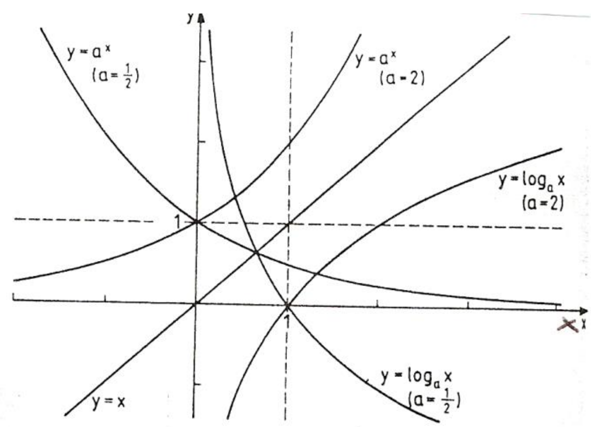


Bild 15.19 څېره

د $a>1$لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x\text{->}0$لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د $x>0$لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر یی یعني $y = \log_a x$

د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي .

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10}x = \lg x \,,\ y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریگونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

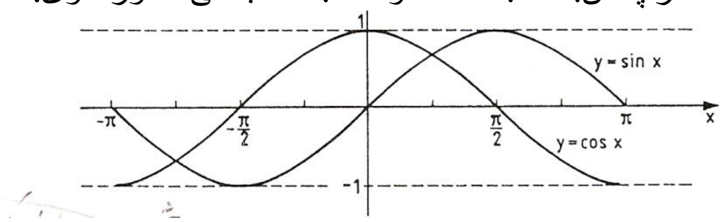
$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]$..$(15,11_a)$

$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]$..$(15,11_b)$

$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z$....$(15,11_c)$

$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z$..........$(15,11_d)$

د دې کږوتگلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریگونومتریکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریگونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)
فنکشنونه y=sinx , y= cosxپریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin (x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi) = \cos x , k\in Z$

لاندې فنکشنونه پریود π لري
y=tanx , y=cotx .دا په دې مانا چي

$\tan (x + k\pi) = \tan x, \cot (x + k\pi) = \cot x , k\in Z$

د تریگونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k\in Z$

د y=tanx, $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad , k\in Z$ y=sinx لپاره او د y = cot x , y = cos x

لپاره تانجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري یعني y = tan x

په $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad , k\in Z$ او y = cot x په $x_k = k\pi \quad , k\in Z$ کی.

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلگي په توگه

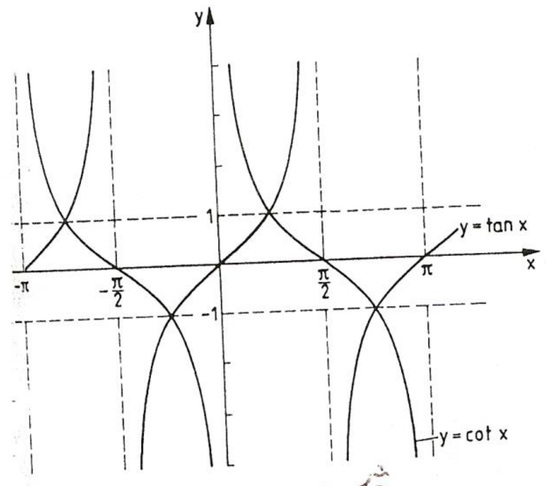


Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دی او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګیدونکی یا پورته کیدونکی دی

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی.

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دی

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کیږي.

یادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پیژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی یا ځنځیري فنکشن دی. موږ ترڅیرني لاندې نیسو چي د ساین فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واریابل tاو زیاتوونکی د ساین فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږنڅیره باندې څه تاسیر اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثیر په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول یا راکشول دی که (|a| > 1)او یا پړسول دي که
|a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت
y = sin t دی، چیرته چی برسیره پردې د 0 > a لپاره په t - محور یوه
اینه څیرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2
په فنکشن کی a امپلیتودې Amplitude(جګوالی(نومیږي او د
شوینګنګ Schwingungرپیدنی پراخوالی یا ښه : سور باندې تاثیر اچوي.
څیره شته

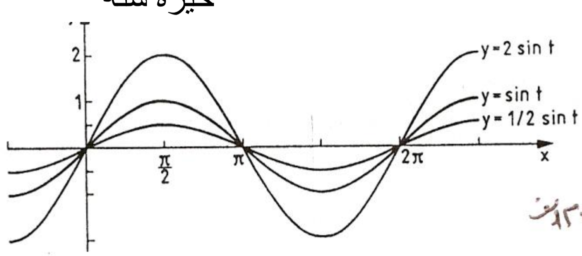
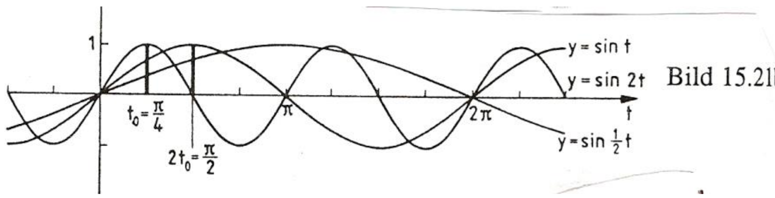


Bild 15.21

۲ - په فنکشن y = sinω t کی فاکتور ω په فنکشن y = sin t باندې یو وختني غزول که |ω|>1 یا پړسول که1>|ω| وي تاثیر اچوي.چیرته چی د 0 > ω لپاره برسیره پردې یو په y- محور اینونه هم ده.
د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن y = sinω t یوه فنکشن ارزښت، دy = sin t خپلواك ω -ځله ، یعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څیره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کیږي، دا په پریودې تاثیر اچوي او y = ω t پریودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



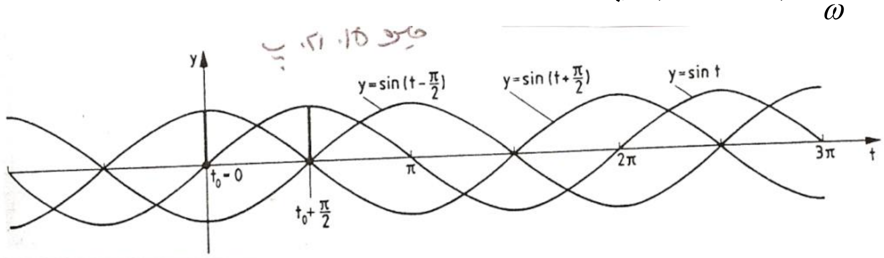
۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور φ 0<او یا له ښي لور φ 0>اچوي .
د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$لپاره٠
د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(څیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

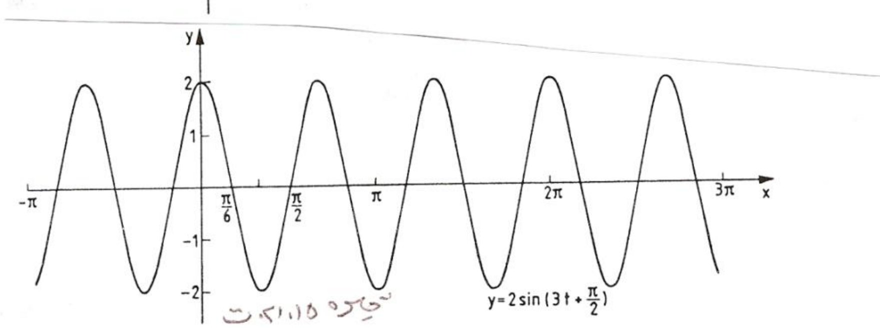
$$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$$

په فنکشن

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a . \sin\omega\,(t+\frac{\varphi}{\omega})$$

کی φ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کرښه $y = a.\sin\omega t$ د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.





(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin (3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپلیتود a = 2 لري، پریودې یی $P=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{6}$ کې د sint و کیڼ لورته راکښل شوی دی.

څېړه ۱۵ . ۲ پ $\varphi=\frac{\pi}{2},\varphi=-\frac{\pi}{2}$

د تریګونومتري فنکشنونو(یواځني) په معکوسوالي یا په ښتوالي کی موږ په ځانګړو یوغږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند .۱۵ ۰ ۱۴ :
(پام: ښیرې له تشریح د مخه راغلې، بله لار نه وه)

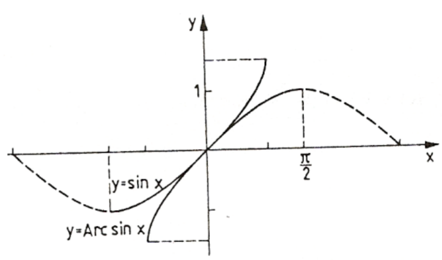


Bild 15.22

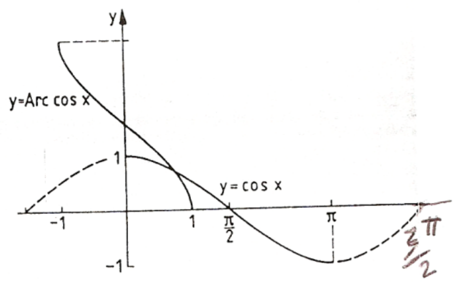


Bild 15.23

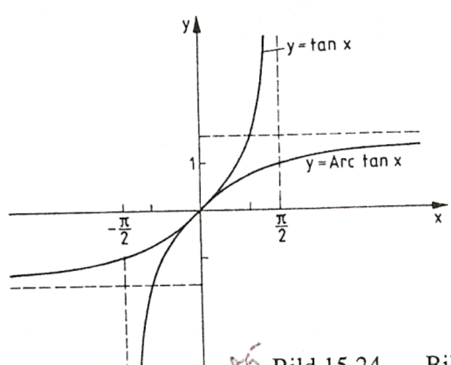


Bild 15.24

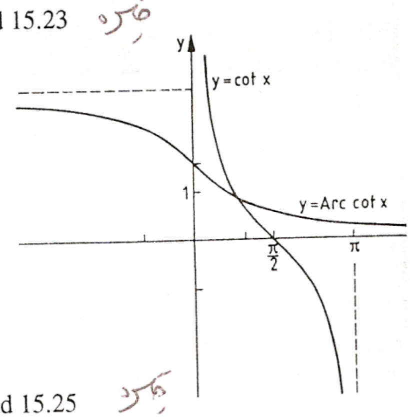


Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. $y = \sin x,$	$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$	$W = [-1, 1]$	(15.12a)
2. $y = \cos x,$	$D = [0, \pi],$	$W = [-1, 1]$	(15.12b)
3. $y = \tan x,$	$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$	$W = \mathbf{R}$	(15.12c)
4. $y = \cot x,$	$D = (0, \pi),$	$W = \mathbf{R}$	(15.12d)

پرڅېړ یا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \operatorname{Arc}\sin x,$	$D = [-1, 1],$	$W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	(15.13a)
2. $y = \operatorname{Arc}\cos x,$	$D = [-1, 1],$	$W = [0, \pi]$	(15.13b)
3. $y = \operatorname{Arc}\tan x,$	$D = \mathbf{R},$	$W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	(15.13c)
4. $y = \operatorname{Arc}\cot x,$	$D = \mathbf{R},$	$W = (0, \pi)$	(15.13d)

د تریګونومتري فنکشنونو برخې په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځیري (ترلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $z \in W$لپاره یو فنکشن $y= f(z)$ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x ترلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي٠

یادونه : یو ترلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه $z = f(x$

د$x \in D, z \in W$لپاره او $w=h(z)$ د $z \in W, w \in W^*$لپاره

او$y=f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،

نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو ترلی فنکشن دی

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره ترلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : په تړلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په تړلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د نننی - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی
پ : د
$, y = \cos w \;\; w = \sqrt{z} \;\; , \;\; z = 2x + 4,$
سره تړلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي
ت : په تړلي فنکشن $y=\text{Arctan}1/(x-1)$ کی$z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\text{Arctan}\ w$ دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :
ب) د $x = 0.5$ لپاره دی
$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$
او
$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942;y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1 \; ; \; w=1/z=1/1=1$
$y=\text{Arctan}w=\text{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که$f(x)$ له رییل ګڼونواو بستیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو تړلی یا ناتړلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداېول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت وي او(Arc sin f(x همداډول(Arc cosf(x تیك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بیلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفډيري پيداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 <=> x^2 \geq 3<=>|x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D = (-oe , - 3] \cup [3 ,oe]$

ب)($y=lg(x+2)+1/(3+2x-x^2$ له لمړي زیاتونی کی باید Numerus > 0 نومروس

وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 <=> x >-2$ ،

پس($D1=(-2,oe$

په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځايونه

له $3-2 x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

د فنکشن تعريفډيری بايد دا اول زياتونی او همداسی د دوم زياتونی تعريفډيري وي يعنی د D1 او D2

غوڅډيری: $D=D_1 \cap D_2 = (2 ,oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = Arc sin (x-1)/5$ د ارکوس ساين-فنکشن د تعريفډيري په پام کی نيولو سره بايد باور ولري-

$-1\leq(x-1)/5\leq1<=>-5\leq x-1\leq5 <=>-4\leq x\leq6 => D=[-4,6]$

ت $(y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)}$

راديکاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0<=> x^2<4<=> x>2$ يا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځوروني ورکړ شوي

a) $x = 2t \quad y = -t^2 + 3t$ b) $x = \sqrt{t} \quad y = 2t+1$

c) $x = 1/t \quad y = 2(t-3)$ d) $x(/2)t - 1 \quad y = t^2$

پارامتر له منځه يوسی او په دې سره ورکړی $y = f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅيړی، او که ممکن وي نو مونوتوني اينټروالونه په تعريفډيريو بيل (تجزيه) کړی، يا لو نه کړی.

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ - پريکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او يا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2/2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ - د لاندې فنکشنونو د صفر ځايونه پيدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2-x-2$

d) $y = 2x^2 -12x +18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0,\infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1,\infty)$, $W = [0,\infty)$, d) $y = x^3 /2$, $D = [0,\infty)$, $W = [0,\infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x -1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1 /5)(3x +1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x -3y -7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پیدا شي. او صفرخایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1 ,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 -4x +3$ b) $y = x^2-8x+16$ c) $y = x^2 -6x +10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 -10x+12$ f) $y = 3x^2 +6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2}+x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x +2$ i) $y = 5x^2 +45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرخایونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګنل شي. فنکشنونه دی د خلفورم باندی انځور شي

a) $y = f(x) = x^3 -6x +5$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1 /2)x^3 -x^2 -(13 /2)x -5$; $x_1 = 1 /5$ $x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 +2x + 2x$; $x_1 = -2$ $x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 -x^3 -28x^2 32x +40$; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 -6x^2 +5x +6$; $x_1 = 1,5$ $x_2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه وکړی ګراف شي :

a) $y=\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y=\frac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y=\frac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y=\frac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y=\frac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځایونه دې وټاکل شي، پول. تشځایونه او د ± 8 <- x لپاره ځان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, $D = R$, $W=(0,\infty)$ b) $y = 2^x - 1$, $D = R$, $W=(-1,\infty)$

c) $y = \log_3 x$, $D = (0,\infty)$, $W = R$ d) $y = \ln(x-1)$, $D=(1,\infty)$, $W = R$

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینټروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشنونه:

a) $y=(x-1)^2$ b) $y=x^2-1$ c) $y=(x+1)^2+1$

d) $y=x^2-4x+5$ e) $y=4x^2$ f) $y=(1/4)x^2+x/2+1$

۱۴ – ترلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$$y = f(w),\ w = h(z),\ z = g(x)$$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتډیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y=e^{(x+1)^2}$ b) $y=(e^{x+1})^2$ c) $y=\lg\sqrt{2x-3}$

d) $y=\sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y=\tan\sqrt{x-3}$ f) $y=\sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y=\sqrt{\tan x-3}$ h) $y=\tan\sqrt{x}-3$ i) $y=\operatorname{Arc}\sin x^2+$

j) $y=[\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y=\ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y=\sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y=\sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y=\operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندي او دننه فنکشنونو

$$y = f(v),\ v = h(w),\ w = (g(z)),\ z = k(x)$$

بیل کړی (د تعریف– او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندې ښتنیزو یا سیرنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$ f) $y = \ln(2x + 5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x - 4)$ h) $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \dfrac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلي او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د کڼې – او کڼې د کڼې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځې ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنڅیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره :

دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دويمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میړي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دويم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library