شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

دویمه برخه

دویم غځېدلی چاپ

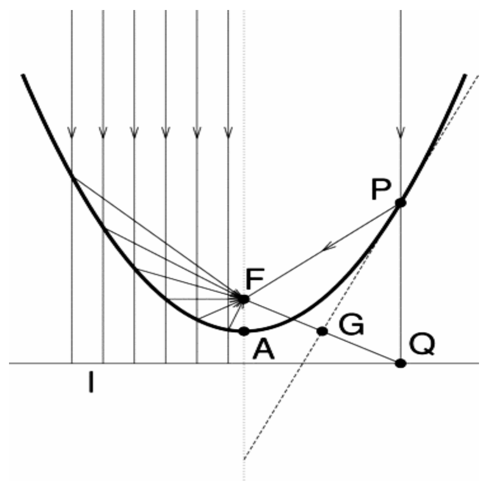
لیکونکی: ډاکتر ماخان (مېږی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(ریاضي)

سترکتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرِي شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

makhanshinwari@gmail.com

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: د شمیرپوهنه ستر کتاب (دویمه برخه)

لیکونکی: ډاکتر ماخان،، میرې،، شینواری

د خپریدو لړۍ

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندویې ټولنې تخنیکې څانګه

makhanshinwari@gmail.com

د چاپ حقوق خپرندوې ټولنې لیکونکي یا ژباړې سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کتّه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لرې. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمني، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترمانوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

لومړۍ برخه

۰ ۱	د شمیرپوهنې سم اند یا منطق	۱
۱ ۰ ۱	پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه	۱
۲ ۰ ۱	د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې	۳
۱ ۰ ۳ ۰ ۱	ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه	۳
۲ ۰ ۲ ۰ ۱	وینا	۵
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ	۷
٤ ۰ ۱	وینا فورم یا ۰بڼه او کوانتورونه	۱۳
۵ ۰ ۱	اړیین او پوره کیدونکي شرطونه	۲۸
٦ ۰ ۱	د شمیرکلیمه یا د لغاتو	۳۱
۷ ۰ ۱	برابرون او نابرابرون	۳۳
۱ . ۸	تمرینونه	۳۸
۰ ۲	ډیر ۍ پوهنه	۳۹
۱ ۰ ۲	د ډیرۍ پوهنې کلیمه	۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۲ د ډېريو ترمنځ اړيکې ۴۵

ربخدېرئ ۴۶

د يوې ډېرئ توان يا تواندېرئ (توانسټ) ۴۸

۲ ۰ ۳ په ډيرئ کې کاروني يا عمليې(۱) ۵۰

غوڅدېرئ يا متقاطعدېرئ ۵۲

د يوې ډېرئ يا سټ کمپليمنت ۵۷

۲ ۰ ٤ څيرونه ۵۸

تمرينونه ۶۷

۳ ۰ د رييل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې... ۷۰

۳ ۰ ۱ د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت ۷۰

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ پيداينښتي يا طبيعي ګڼونه ۷۰

۳ ۰ ۱ ۰ الف د پيداينښت يا طبيعي ګڼونو جوړښت ۷۱

۳ ۰ ۱ ۰ ب د پيداينښت ګڼونو انځورونه او شميرنه ۷۲

۳ ۰ ۱ ۰ پ د شميرنې بنسټيز قوان ين ۷۸

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ټولګڼونه ۸۴

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ الف د ويش تيوري ۸۶

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب غټ ګډ پرويشونی(بزګترين مقسوم عليه ...) ۸۸

۳ ۰ ۱ ۰ ۳ راشنلګڼونه ۱۰۶

۳ ۰ ۱ ۰ ٤ رييلګڼونه ۱۰۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰۲۰۳ ماتشمیرنه ۱۱۹

۳.۳ تمرینونه ۱۳۰

۰٤ پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر ۱۴۱

۱۰٤ توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت ۱۴۱

۲۰٤ ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره ۱۴۴

۳۰٤ توان د ریيلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره ۱۵۱

٤۰٤ ټولګه ۱۵۲

۰۵ لوګاریتم ۱۵۸

۱۰۵ د لوګاریتم کلیمه ۱۵۸

۳۰۵ ټولګه ۱۶۶

۰٦ ګونومتري ۱۶۹

۱۰٦ بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه ۱۶۹

۱۰۱۰٦ ټکی او کرښه ۱۶۹

۲۰۱۰٦ کونج ۱۷۱

۳۰۱۰٦ درېګوډی ۱۷۴

٤۰۱۰٤ کونکروانیځ او ورته والی ۱۷۸

۵۰۱٦۰ ولاړکونجیز درېګوډی ۱۸۴

۲۰٦ په ولاړکونجیز درېګوډی کې د ... ۱۸۸

۳۰٦ په یوونګردی کې د کونج بلواک .. ۱۹۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ۰ ٤	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵
٦ ۰ ٥	تریګنومتریکي کتمتوالی	۲۰۵
۶ . ۵	تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
۰۷	کمپلکس ګڼونه	۲۲۲
۰ ۸	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۲۳۵
۸ ۰ ۱	سیده ښوونه	۲۳۵
۸ . ۲	ناسیده ښوونه	۲۳۷
۸ ۰ ۳	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
۹	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
۹ ۰ ۱	لاینیز برابرون	۲۴۴
۱۰	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
۱۰ ۰ ۱	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
۱۰ ۰ ۲	د بینوم ځله ونه	۲۶۷
۱۰ ۰ ۳	د بینوم جمله	۲۷۰
۱۰ ۰ ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۱	پرموتیشن	۲۷۵
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۲	واریيشن	۲۸۰
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۳	کمبینیشن	۲۸۶
۱۰ ۰ ٤ ۰ ٤	د پرموتیشن، واریيشن او	۲۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵
۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲. ۴	د ګاوس لګوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلورئ ئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۲۰ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وییتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلورئ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱
۱۲ ۰ ۳	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
۱۲ ۰ ٤	د ریښې برابرونونه	
۱۳	ترانسڅیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۱	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۲	اکسپوننشل- یا په جګګې برابرونونه	۳۸۰
۱۳ ۰ ۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱٤ ۰ ۱	نابرابرونونه	۳۹۶
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۱	بنستیزې کلیمې او شمیر قوانین	
۱٤ ۰ ۱ الف	اینتروال	۳۹۷
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۲	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۳	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
۱٤ ۰ ۱ ۰ ٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
۱٤ ۰ ۲	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۱	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۲	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۳	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ ۱۵ د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه ۴۳۰
۲ ۰ ۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱۶ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶
۱ ۰ ۱٦ کرښه ۴۶۶
۲ ۰ ۱٦ ګردۍ ۴۷۵
۳ ۰ ۱٦ ایلیپسې ۴۸۲
٤ ۰ ۱٦ هیوپربول ۴۸۷
٥ ۰ ۱٦ پارابول ۴۹۲
٦ ۰ ۱٦ تولګه ۴۹۴
۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲
۱ ۰ ۱۷ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲
په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲
۲ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹
۳ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲
٤ ۰ ۱۷ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷
٥ ۰ ۱۷ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....
۱ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱
۲ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ ۰ ۵ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

۱۸ پرلپسې او پرلپسې لړۍ ۵۳۳

۱۸ ۰ ۱ پیل ۵۳۳

۱۸ ۰ ۲ د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه ۵۳۴

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱ مونوتوني پرلپسې ۵۴۲

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲ اریتمیتیکي پرلپسې ۵۴۵

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳ هندسي پرلپسې ۵۴۷

۱۸ ۰ ۲الف لړۍ ۵۵۰

۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱ هندسي لړۍ ۵۵۵

۱۸ ۰ ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړۍ ۵۵۷

۱۸ ۰ ٤ د پرلپسې او لړیو د پولې ... ۵۵۸

۱۹ د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه ۵۷۸

۱۹ ۰ ۱ بنسټیزې کلیمې

د پولو یا حدونو خویونه ۵۸۶

د راشنل، کسري یا نسبتي ۵۹۲

د مثلثاتي یا درېکوڼي کچ توابعو پولې ۵۹۶

ناپرېکیدنې ۶۰۴

۱۹ ۰ ۲ په پوله ارزښت او ناپریکیدنې ځو جملې

۱۹ ۰ ۳ د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه ۶۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹ ۰ ٤ د بنستیزو فنکشنونو ناپریکیدنه
د ښېرکي ټولګه ۶۱۶
۲۰ دفرنځیالشمیرنه ۶۲۶
د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت) ۶۲۶
په یوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸
د لحضوی(سترګورپ) تغیر... ۶۳۰
کمښتوېش (تقسیم تفاضل؟) ۶۳۱
دفرنشلوېش یا رابیلیدنه یا مشتق ۶۳۳
کمښتوېش او مشتق یا رابیلیدنه ۶۳۶
د x_0 په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳
د تانجنت پیژند او خویونه ۶۴۷
د تانجنت او عمود یا ولاړ ټولیز مساوات ۶۵۰
په بیدیا کې جګوالی ۶۵۲
۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت یا جګیدني غوره والی
۲۰ ۰ ۲ د فرنځیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې ۶۵۶
د درېګوډیزو یا مثلثاتي ۶۶۲
د اکسپوننشل یا په جګ توابعو.... ۶۷۰
د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې ۶۷۶
د ایمپلیځیت توابعو مشتف ۶۸۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټيزو رابيليدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶
ټولګه ۶۸۸
د يوې تابع د مشتق قابليت ۶۹۱
د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق ۶۹۸
۲۰ ۳. د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه ۷۰۱
د رول قضيه ۷۱۰
د وايرشتراس قضيه ۷۱۱
۲۰. ٤۰ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی
د دفرنشل منځ ارزښت قضيه ۷۱۲
يوعږيزې توابع ۷۱۵
ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰
د انعطاف – يا اوړونټکی ۷۲۴
د کوږ يا منحني بحث يا خبرې ۷۳۳
ناټاکلي حدونه يا پولې ۷۴۶
د برنولي او د لو پيتال ۷۵۰
۲۰ . ۵ د غټو ګټو پرابلم ۷۵۷
تمرينونه ۷۶۷
په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸
۲۱ انتيګرالشميرنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

	پیلراوړنه	۷۸۷
۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنسټیزه یا لومړنی تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنی تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال ځخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالونې قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالونې لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنې استعمال ۸۶۲

تمرینونه ۸۸۸

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړي یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

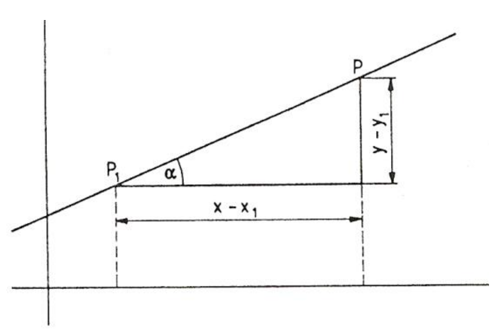
۱۶ - د سطحې شننيزه (تحليلي) هندسه

په دې برخه کې يوځود تحليلي (شننيزې يا سپړنيزې) ځمککچپوهنې يا هندسي ټاکلي پرابلمونه څېړل کيږي.د تحليلي هندسي بنستيزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننيزې يا تحليلي څرګندونويی د هندسي خويونو جوړښت ښايي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چې يوه کرښه يواځنۍ کره تعين کړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو يا - مساواتو مختلفی بڼی شته دی. يوه کرښه د يوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کيدي شي . (ټکی او د ټکی ميلان معلوم دی) .

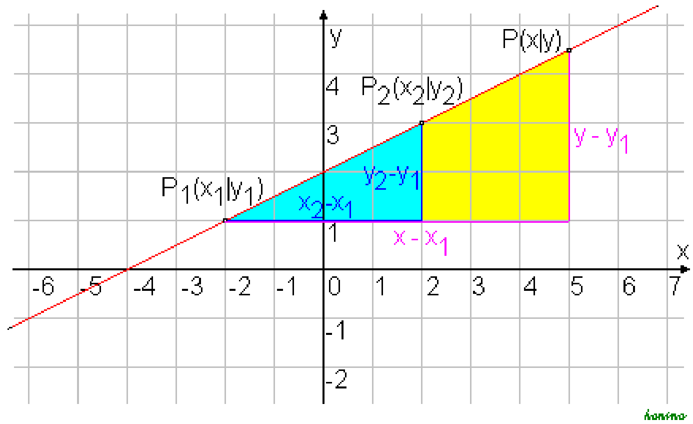
دلته دې(P1(x1 , y1دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګيدو کونج،وي، چې د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او(P(x,y په کرښه يو اووښتونی (واريابل) ټکی دی٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د کرښې د ميلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته څېړه دې وکتل شي(لاندې څېړه هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16,1)$$

پورته د کرښې ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواورديناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: (y - b = m (x - 0 په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

يوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دي(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (څيره ش ۱۶ . ۲) د جګيدونکی يا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسې دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

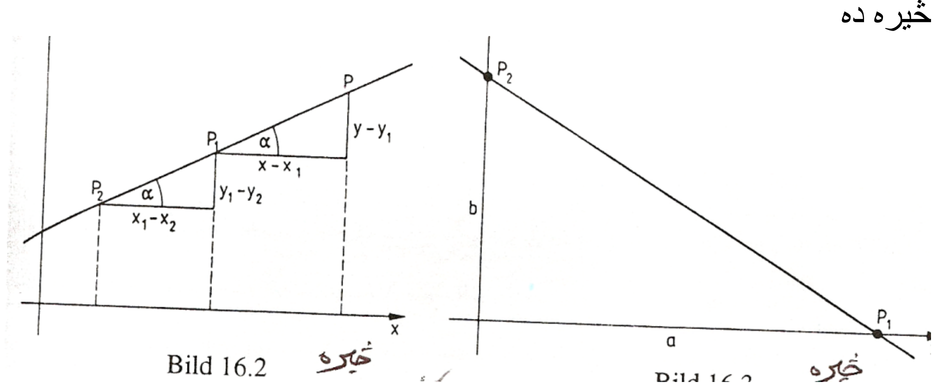
m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چې لاس ته راځي

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x\ \ -x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښې دوه ټکیزبرابرون

ځیره ده



که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردینات y1 = 0 , 0 =| x1 = a سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردینات x1= 0, y2 = b|= 0
سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوځي برابرون

ځلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاینیز دي.د مساوات عمومي فورم)یا ټولیزه بڼه (داسی دی:

Ax + By + C = 0 (16 . 5)

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)

(c) ketabton.com: The Digital Library

-------------------------------------- --

دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري يا په بر کی نيسي

y = y0 (A = 0 ,B|=0)

او(x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څيړل شوې

بيلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون يا لاينيز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تيريږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30°$ يی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی ليکل کيږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم يي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بيلګه ۱۶ . ۲ :

د لاينيزبرابرون يا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(اته ناسم، په ځای يې شپږ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۳ :

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه
p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ځیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

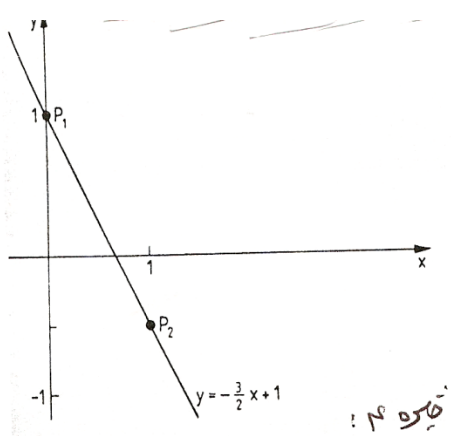
بیلګه ۱۶ . ۴ :

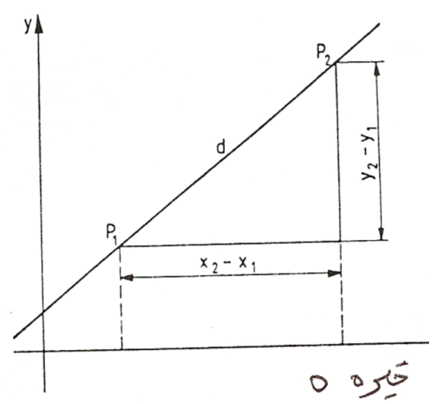
د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي۰
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (څیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};.........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

څیرې ۱۶ . ۴ او - ۵





(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چې کونجټکي يې دادي(A(3,1),B(-1,1),C(2,5 ، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کټمټی) چی (يو د بلی سره) غبرګي نه وي ټيك يو غوځټکی لري. دا چې دا ټکی په دواړو کواور ديناتو پروت دی ، نو د دواړو کواورديناتو برابرون بايد پوره کړي . په دې حالت کي د غوځټکي کواوردیناتو، د دوه لاينيزو برابرونونو سره چې دوه اوښتونې يا

ناپېژندونکی (مجهولی) ولري، د يوه سيستم يوائځنی کره اوبيونه ترې لاس ته راځي. په ټوليزه توګه دا باور لري: که يو برابرونسيستم چې د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او يو يوائځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي يو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډيرې اوبيونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه يوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي يوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بېلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښې پروتځاي (موقعيت) د لاندې کرښو

الف) g2: -2x+y = 1,

ب) g3: 3x -y=5, ,

پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3

سره څيرو

اوبيونه : د g1 برابرونونو څيره داسی بدليږي : 3x-y=2

الف) د برابرونونو سيستم 3x-y=2، -2x+y=1

ټيك يوه اوبنونه لري: x1=3 , y1=7

ددې څخه څرګنديږي چې ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوځټکی دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د برابرونونو سیستم

$$3x - y = 2$$
$$3x - y = 1$$

اوبی نه لري : برابرونونه یو بل ردوي یه نه زغمي . د g1 او g2 کرښی یو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سیستم 3x-y=2

$$-x+(1/3)y=-2/3$$

ناپای ډیر ې اوبیونې یا حلونه لري. برابرونونه یو بل سره برابر یا یو بل ته ورته دي.

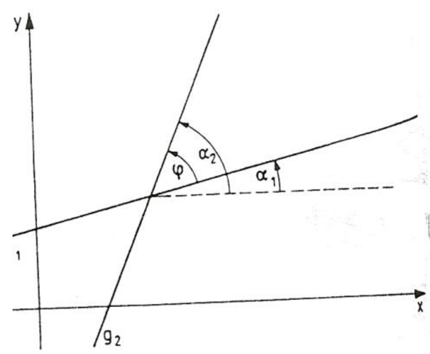
که په ۳ ضرب شي یو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ۰

که د دوه کربنو

g 1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوښکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو ځګید کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت یا توپیر)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶)



ځېره ۱۶ . ۶

د کرښی له برابرونونو پوهیږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زیاتون تیورم (بنستیزه جمله) (برخه ۶ . ۵) ځخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1+\tan\alpha_1.\tan\alpha_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم ځخه چی د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2};......................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دیږ.

دا په دې پورې اړه لري چی ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته ځېړې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) ځخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180 - \phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښی یوبل سره غبرګی ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = 0$$

ګورو چی د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښی یو په بل (نیغی) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m - m)/(1 + m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعنى د$m2= -1/m1$ لپاره ($m1|=0,m2|= 0$)

په کرښه($y=y0$ ($m1=0$ باندې کرښه($x=x0(m2=oe)$ نيغه ولاړه ده

د غبرګوالى لپاره شرطونه

$$m2 = m1 \qquad (16, 8)$$

د اورتوګوناليتى Orthogonalität(يو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m2 = -1 / m1 \qquad (16 . 9)$$

بيلګه ۱۶ . ۸ : دکرښى g2 برابرون دې وټاکل شي چى له ټکي(P (2,-1 تيرېږي، او له کرښى $g1 : y = -2x +1$ سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نيغه) ځغلي اوبوونه:

الف) د g2 کرښى ميلان (جګوالى $m2 = m1 = -2$)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : ($y+1=-2(x-2$ همداسى $y = -2x +3$

ب) د g2 کرښي ميلان ياجګيدنه ده $m2=-1/m1=1/2$ د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دى: $y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2$

بيلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښى برابرون ټاکل کيږي چي د(P1(1/3,-1/6 ټکى تيريږي او په کرښه چى له ټکو(P2(-1,1 او(P3(-2,-1 تيريږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تيريږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري $(y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3$

په دې کرښى د (عمودي) ولاړې کرښى ميلان يا جګوالى داسى دى:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تيريدونکى کرښي برابرون د m_2 ميلان سره د(۱۶ . ۱) له مخى دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بیلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوځتکي S واټن له ټکي(P(6,13څومره دی او د کرښي برابرون څنګه دی چي د کواوردینات له سرچینی تیریږي او د S او P څخه تیریدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوځتکي کواوردینات د لاندې برابرونونو سیستم څخه لاس ته راځي

2x-y=1

3x+2y=5

یعنی: xS=1 , yS=1

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

$$d=\sqrt{(1-6)+(1-13)^2}=13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S اوP تیریږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: (m = 12 / 5

له S او P ټکو تیریدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي میلان

m2 = -1/m = -5/12

د (P0 (0,0څخه تیریدونکی کرښه د m2 میلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

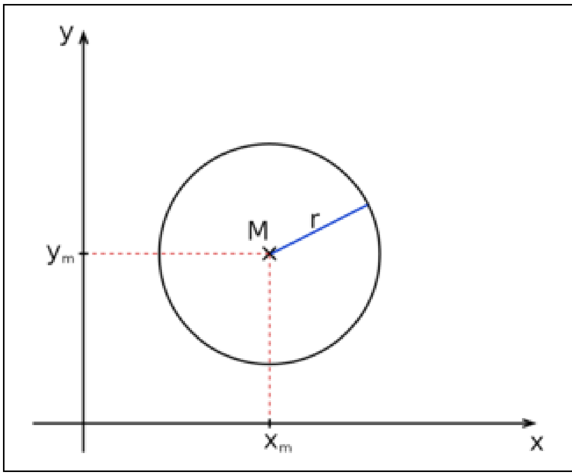
y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

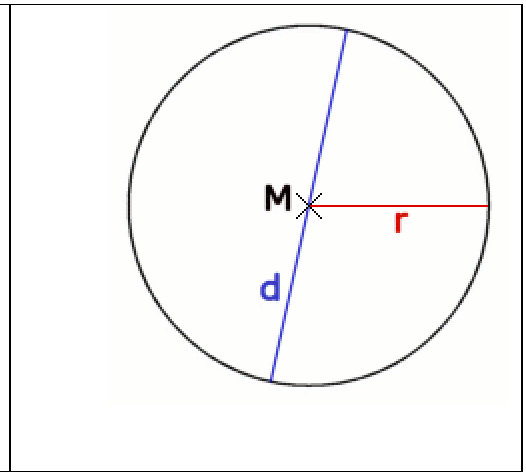
۱۶ . ۲ ګردۍ (داېره)

داېره(ګردۍ) د ټولو هغو ټکو ډیرۍ(سټ) ده، چی د یوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانګه وایو او په rیی په نخښه کوو.
فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې داېره (ګردۍ) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډیرۍ(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k=\left\{X\in E|\ |\overline{MX}|=r\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





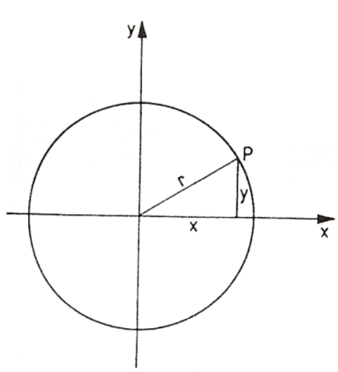


Bild 16.7

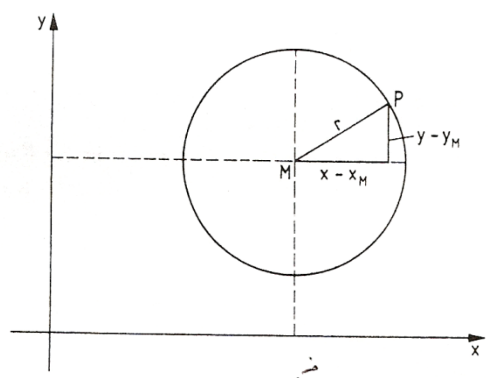


Bild 16.8

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې ګردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردی ټوليز برابرون

دا برابرون د پېژند او پيتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د يوې ګردی ځانګړي حالت او د کواورديناتسيستم سره، چې منځټکی يې د کواورديناتو په سرچينه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ګردئ منځ ټکی د کواورديناتسيستم (څيره ۱۶ . ۷) په سرچينه پروت وي، نو د) پيوتاګوراس د جملی له مخی (د ګردي په خوښه ټکي (P(x,y لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردئ منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردينات (xM,yM) ولري (څيره ۱۶ . ۸) نو د ګردئ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بينوم مربع وې شميرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغير وومي) ، پس پيژندل کيږي چی د ګرديبرابرون د ځلورئ يا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاينيز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی يوه غړي په څيري سره يوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټوليز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټوليز فورم يا ټوليزه بڼه ٠
که د ګردي برابرون په ټوليزه بڼه يا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه يی ځرګنده کوو يا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو يا را اړوو. دا د ځلورئ پوره کولو يا مربع تکميلولو په بنسټ صورت نيسي . دوه څيرې پورته وګورئ

بيلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردئ برابرون دې په ټوليزه - يا عمومي توګه وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x^2+2y^2+4x-12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وویشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د ځلوری پوره کونه یا مربع تکمیلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y+9 = 3+4+9$

دبینوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2+(y-3)^2 = 16$

ګردۍ منځټکی($M(-2,3$ او وړانګه $r=4$ لري.

بیلګه ۱۶ . ۱۲ :

د ګردۍ برابرون ولیکی چی منځټکی یی($M(2;0$ وي او په کوم چی ټکی($P(6,4-3$ روت دی؟

اوبیونه : د($M(2,0$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دئ

$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$

د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2+(4-3)^2 = r^2$

له دې ځخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د ګردۍ برابرون:

$$(x-2)^2 + y^2 = 64$$

ګردۍ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي

۱ - کرښه ګردی غوځوي، نو له دې امله غوځی ده(سیکانتې)

۲ – کرښه ګردۍ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)

۳ - کرښه ټوله له ګردۍ دباندې پرته ده (له ګردۍ تیریدونکی، لنډ : تیرېدونې)

د غوځټکي(د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سرې د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی ږدي(y یا x پسی حل یا اوبئ شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (ځلورۍ برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په ځرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو ریبل ډبل اوبی او یا هڅ ریبل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ ځخه عبارت دي.

بیلګه ۱۶ . ۱۳:

کوم پروت ځایونه ګردی k چی راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ او لاندې کرښی و یو بل ته لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g1 : 2x+y=4 ,g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردۍ برابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+4-3)^2=5 <=> 5x-8x=0$
ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به $g1$ د ګردي غوڅوونی یا
(Sekantسکانت) وي .
که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 <=> x^2-8x+16=0$
د ډبل اوبونې $x1,2 = 4 , y1,2 = 4$ سره $g2$ يو تانجنت دی .
که $g3 : y=2x+6$ د ګردۍ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 <=> 5x^2+x+8=0$
دا ځلورۍ برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه $g3$ له ګردۍ k دباندې پرته ده، يعنی دباندنی يا دباندونی ده.

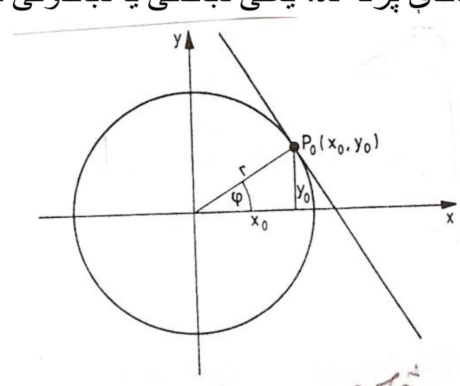


Bild 16.9

په ګردي $(x^2+y^2 = r^2)$ (ځره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی($P0(x0,y0$ د مساوات $x0^2+y0^2 = r^2 >0$ سره غوښتل کيږي. تنجنت د مماس په وړانګه نيغ ولاړ دی
د مماسوړانګه دا ميلان يا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او
له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت
$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0;$..........(16,13)

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

y-y=-(x0/y0)(x-x0) <=> xx0+yy0=x0²+y0²=r²

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16.14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه(P0(±r,0)او(P0(0,±r په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(ځېره . ۱۶ . ۱۰)

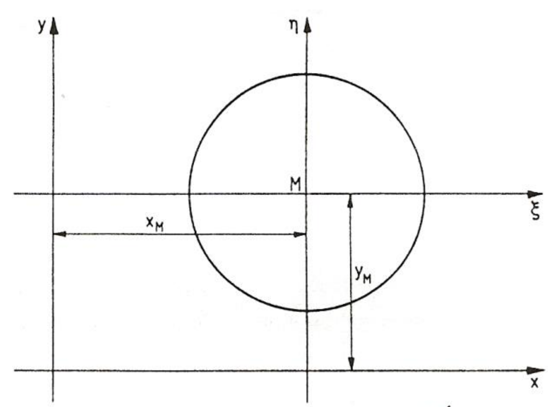


Bild 16.10 ځايره

يادونه : که له دې مخ ته يا وروسته x0,y0 يا xM,yMاو x_0, y_0 يا x_M, y_M ګورو نو کېمټ دي

بيلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي x²+y²=r² په څه ډول دي؟
اوبيونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پيداکوو. دا بايد دګردۍ برابرون پوره کړي . ټکی P1 بايد په تنجنت پروت وي يعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) بايد پوره کړي.
نو باور لري
x0²+y0² = 16 او -12 x0 + 4y0 = 16

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا لاینیزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي يو ځلورئ برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبيونو $x_{01}=0\ ,\ x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_{01}=4\ ,\ y_{02}=-16/5$$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو($P_{01}(0,4)$ او($P_{02}(-12/5,16/5)$ د (۱۶ . ۱۴) له مخې په لاندې ډول دي

$$0.x+4y=16 \iff y=4$$

او

$$(-12/5)x-(16/5)y=16 \iff y=(-3/4)x-5.$$

د ګردئ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټكي ($M(x_M,y_M)$ سره د η,ζ -کواوردينات سيستم کی ، چی سرچينه يي په M کی پرته ده)(؟ ځيره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري٠

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټكي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;\ldots\ldots\ldots\ldots(16,15)$$

د η,ζ -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم يو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتی دي ٠

$$\zeta=x-x_M\ ,\eta=y-y_M;\ldots\ldots\ldots\ldots(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سرې بیا دا د y,x -کواوردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي(کشوي یا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټكي($P_o(x_0,y_0)$ کی د ګردئ تنجنت برابرو په ګردئ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بيلګه ۱۶ . ۱۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ګردۍ چې برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، د x - محور باندې، په ټکو $x1 = x2 = -5$

سره تنجنت وکاږو(کيږدو). برابرون يې څنګه دي؟

اوبيونه : د ګردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدليږي:

$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$

$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$xM = -8 , yM = 2 , r = 5$$

د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x1 = x2 = -5$$

د دواړو ګردۍ ټکو په ګرديبرابرون کې ځايوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

له دې داسې لاس ته راغلي دy لپاره څلوریبرابرون يا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6 , y2 = -2$

د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \iff 3x+4y=9$$

او

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \iff 3x-4y=-7$$

۱۶ . ۳ بيضوي(هګۍ) يا ايليپسی Die Ellipse

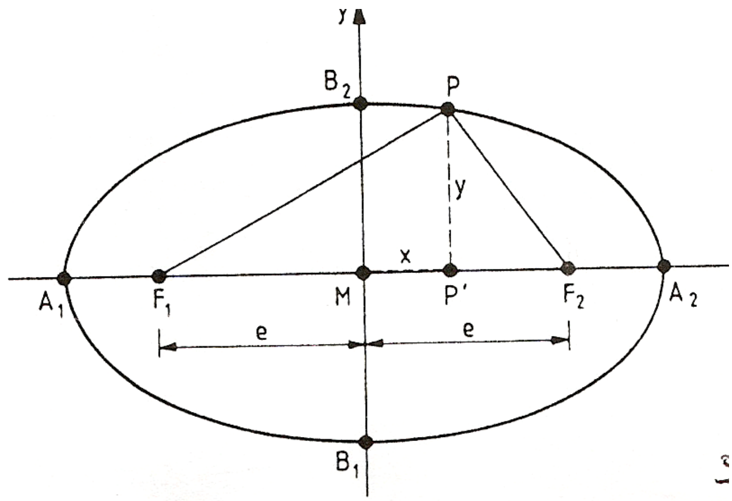
بيضوي يا ايليپسی د ټولو هغو ټکو P ډيرۍ ده، د کومو واټن چې له دوه ټينګ په ځايټکو، داسې په نامه د ايليپسی د سوزونټکويا محراق F1 او F2 څخه ثابت وي. دا سوزونټکی د ځيرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د y- محور سره سيومتريك دx - محور باندې ځايوو يا ږدو او د ثابت واټنزياتون ليکو:

$$\underline{PF}1 + \underline{PF}2 = 2a \qquad (16.\ 18)$$

د سوزونټکو واټن دې وي:

$$\underline{F}1F2 = 2e;$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېره ۱۶ . ۱۱

دا e لايني اکسځننتريځيتي(Exzentrizität دا يوناني کليمه ده چې په اليپسی هوپربول او پارابول کی د همدغه تعريف لپاره ټاکل شوې) بلل کيږي .
د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي:

$$\underline{PF}_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

او

$$\underline{PF}_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له (۱۶ . ۱۸)

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

(ځلورى يا مربع ته ځګيرږي)

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$ (رينه رابيليږي

(ځلورى يا مربع کوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^2x^2-2exa^2+a^4=a^2(e^2-2ex+x^2+y^2)$$

ترتيب اوړون $(a^2-e^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-e^2)$

په ځاي کوو

$$a^2-e^2=b^2 \qquad (16.19)$$

او لاس ته راوړو

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad <=>$$

$$(x^2/a^2)+y^2/b^2)=1 \qquad (16,20)$$

د منځټکي(M(0,0سره د ايليپسی منځټکي مساوات

د y=0 لپاره دی x=±a، د x=0 لپاره دی y=±b. ايليپسی (ځيره ۱۶ ، ۱۱)

د x - محور په ټکو A1(-a,0), A2(a,0) او د y - محور په ټکو

B1(0.-b), B2(0,b) کی پرې کوي، aاوb د دواړو نيمحورونو اوږدوالی دی

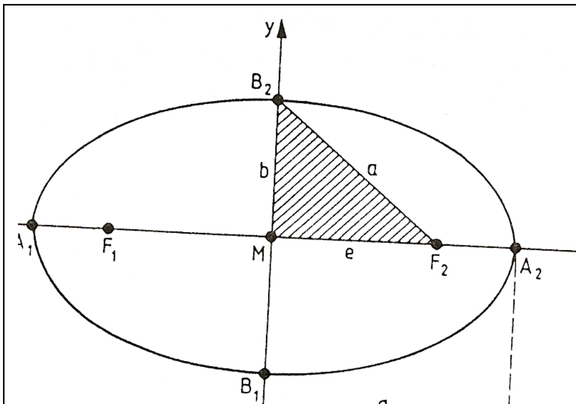


Bild 16.12

لکه د اليپسی د هرټکي لپاره، همداسی د Bلپاره هم اړيکی (۱۶ ، ۱۸) باور لري:

F1B2 + F2B2 = 2a

د F1B2 = F2B2 له امله له

دې لاس ته راځي F2B2 = a

(ځيره ۱۶، ۱۲)

له دې سره په دريګوډي MF2B2 کی د اړيکو (۱۶ ، ۱۹) هندسي ارزښت پيژندل کيږي.

که منځټکی M کواوردينات Mx ; My ولري او د ايليپسی محورونه د کواورديناتو سره غبرګ وځغلي، نو د ايليپسی د يوه خوښې ټکي(P(x,yلپاره باور لري:

$$(x-xM)^2/a^2+(y-yM)^2/b^2=1 \qquad (16,21)$$

د ايليپسی د منځټکي مساوات د منځټکي $M(x_M, y_M)$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته فرمول څلولو وروسته د ایلیپسی تولیز(عمومي) جوړښت پیژندل کیږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16 , 22)$$

د ایلپسی مساواتو تولیزه بڼه یا - فورم

د ګردې برابرون سره په توپیر(پرتله یا مقایسه ۱۶ . ۱۲) د x^2 او y^2 څله وونی یا ضریبونه یو له بل توپیر لري، مګر همغه مخنخښه لري($A.B > 0$)

بیلګه ۱۶ . ۱۶ :

د د ایلیپسی منځټکی، نیممحور، او سوزونټکي لټول کیږي، که دا برابرن

$$9x^2 + 25y^2 -54x +100y -719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبنونه : د ایلپسي برابرون د منځټکي بڼه یا فورم (۱۶ . ۱۲) باندې اړول کیږي:

$$9(x^2-6x)+25(y^2+4y) = 719$$

ځلورئ پوره کونه یا مربعتکمیلونه

$$9(x^2-6x+9)+25(y^2+4y+4) = 719+9.9+25.4$$

$$9(x-3)^2 +25(y+2)^2 = 900$$

(په ۹۰۰ ویش)

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځټککواوردینات

$$xM = 3 , yM= -2$$

لوستلکیږي او د نیممحور لپاره $a^2=100$, $a=10$ او $b=6$, $b^2=36$ لوستل کیږي.

د (۱۶ . ۱۹) سره سم لاس ته راځي:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

او له دې سره منځټکي (پرتله څیره ۱۶ ، ۱۱)

$$F_1(x_M - e, y_M) = F_1(-5,-2), F_2(x_M + e, y_M) = F_2(11,-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۱۷ :

د ایلپسي برابرون د منځټکي (M(-1,3 سره لټول کیږي، په کوم چې ټکي(P1(-3,3 او $P_2(0,3+\frac{3}{2}\sqrt{3})$ پراته وي.

اوبونه : د (۱۶ ، ۲۱) سره سم د منځټکي(M(-1,3 سره د ایلپسي براورن داسی دي

(x-1)² / a² + (y-3)² /b² = 1

ټیکي P1 او P2 باید د ایلیپسي برابرون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2}+\frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2}=1, \frac{(0+1)^2}{a^2}+\frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1$$

د دې برابرونونو له لومړۍ څخه لاس ته راځي 4/a² + 0 = 1 همداسی(< = >)
a = 2 او له دې سره د دویم برابرون څخههمداسی < = >

$$\frac{(0+1)^2}{4}+\frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{9}{4}.3}{b^2}=3/4 \Leftrightarrow b=3$$

د ایلیپسی لټونکی برابون داسی دی:

(x+1)²/4 +(y-3)²/9=1

بیلګه ۱۶ . ۱۸ :

د کرښنو

الف) y = x + 2

او ب) y = x - 2

غوڅټکي د ایلپسی 9x²+y²+54x+72=0 سره لټول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبيونه : که الف) $y=x+2$ د ايليپسی برابرنونو کی خوندي شي، نو لاس ته راځي

$$9x^2+(x+2)^2+54x+72=0 \iff 10x^2+58x+76=0$$

د څلوری - يامربع برابرونونو اوبی :

$$x_1=-2\ ,\ x_2=-3{,}8$$

د غوڅښکي ابسځيز يا پروتمحور دی. په دې پورې اوردينات يا ولاړ محور

$$y_1=0\ ,\ y_2=-1{,}8$$

اړه لري.

ب) دy رامدځ ته شوې څلورى(مربع) برابرون

$$9X^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$$

رييل اوبيونه نه لري. کرښه $y=x-2$ د ايليپسې څخه دباندې پرته ده

۱۶ . ۴ :هوپربول Die Hyperbel

پېژند:

هوپربول يا هيوپربل د ټولو هغو ټکو ډيرى ده، د کومو لپاره چې د کمون يا کمښت مطلقه ارزښت واټن، د دوه کره په ځاي ټکوF1 اوF2 ،دا په نامه د هوپربول سوزونټکو

يامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټکي ، لکه په ايليپسی کی دلته هم موږ کره ټاکو (څيره ۱۶ . ۱۳) .

د ثابت واټنکمون يا واټنکمښت| $|\underline{PF1}-\underline{PF2}|=2a$ او (ځيره ۱۶ . ۱۳)

د سوزونټکوواټن) $\underline{F1F2}=2e$ (څيره ۱۶ . ۱۳)

$$e^2-a^2=b^2 \qquad (16.23)$$

په پورته کې يا بل چيرې، چې کوم څه لاندې کرښيز شوي وي، دا په زياتو ادبياتو کې پورته کرښيز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې کرښيز شوي وي او که پورته، توپير نه لري يا همغه څه دي٠

يو ايليپسی برابرون ته ورته تلنه (برخۀ ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لاربښودوي:

$$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1 \qquad (16\,.\,24)$$

د هوپربول منځټکي برابرون د منځټکي (M(0,0 سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

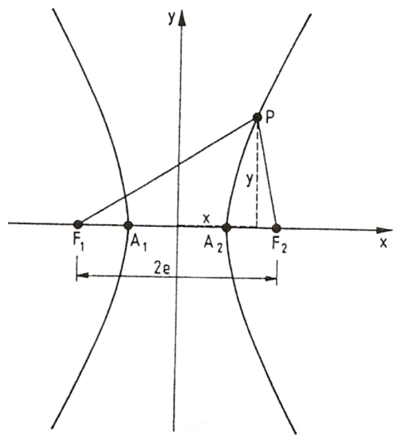


Bild 16.13 ځېره

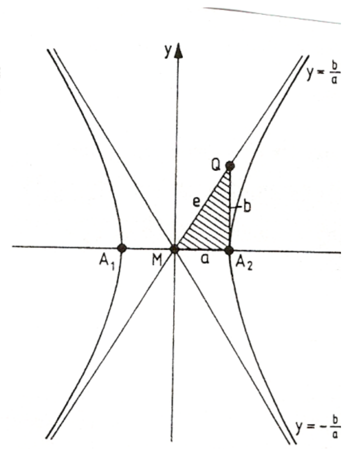


Bild 16.14 ځېره

د $y=0$ لپاره $x=\pm a$ دی ، دا په دې مانا چې هوپربول د x - محور په ټکي

($A_1(-a,0$ او($A_2(a,0$کی غوځوي. دا ټکی ککری ټکی بلل کيږي٠ ګورو چې دا دککری ټکی دی .(د ناپای سره ځاننيونی په هکله: که (۱۶ . ۲۴) د y په لور حل شي، نولاس ته راځي:

$$y = \pm b.\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} = \pm\frac{b}{a}.x.\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

د $x \to \pm \infty$ لپاره $-a^2/x^2$ له منځه ځي. پس هوپربول ځان کربنی $y = \pm(b/a).x$ ته نزدې کوي (ځیره ۱۶ . ۱۴)

له دې امله لاندې برابرون

$$y = \pm(b/a)x \qquad (16,25)$$

د هوپربول اسیمپتوتی بلل کږي.

د (۱۶ . ۲۳) له امله $MQ = e$ دی .

که منځټکی M کواوردینات x_M ,y_M ولري او سیومتریك غبرګ د کوردیناتو محور ته ځغلي، نو د یوه په خوښه هوپربول ټکي($P(x,y$لپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2-(y-y_M)^2/b^2=1 \qquad (16,26)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوپربول منځټکي برابرون (M(xM ,yM سره.

د پورته مساوات د ځلولو وروسته، په لاندې ډول د هوپربولمساوات ټولیز جوړښت جوتیږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16,27)$$

دهیوپربول برابرون ټولیزه بنه یا فورم
دلته د ایلیپسی سره په مخامخ (همدا برعکس دئ) یا په څټ ډول د x^2 او y^2 ځلهووني بدله مخنښه لري
(A . B < 0) ټولیز برابرون هم کولی شي چی موږ لاندې منځټکي برابرون ته لاربنود کړي،

$$(y-yM)^2/b^2-(x-xM)^2/a^2=1 \qquad (16,26')$$

د کومو څیره چی یو پورته لور او کښته لور ته واز هوپربول دئ.

بیلګه ۱۶ . ۱۹:
د لاندې هوپربول منځټکی او سوزونټکی لټول کیږي

$$-25x^2 -150x+144y^2 -188y +144 = 0$$

اوبیونه: د ورکړشوي هوپربولمساوات بنه په منځ ټکي (۱۶ . ۲۶) اوړي یعني فورم یی بدلیږي:

$$-25(x^2+6x)+144(y^2+2y) = -144$$

(د څلوری پوره کونه)

$$-25 (x^2+6x+9)+144(y^2-2y+1) =-144-225+144$$

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 = -225$$

(په 225 - ویشنه)

$$-25(x+3)^2+144(y-1)^1 = -225+(x+3)^2 / 9 -(y-1) /(25/16) = 1$$

د لاس ته راغلومساواتوڅخه لاندې لوستل کیږي:

$$xM = - 3 ,yM = 1 ,a^2 = 9 , a = 3 ,$$

$$b^2 = 25 /16 , b = 5/ 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د (۱۶ . ۲۳) له امله لرو:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144/16 + 25/14} = 13/4$$

د هوپربول منځټکی M(-3,1) دی ، سوزونټکي يې

F1(xM-e,yM)=F1(-25/4,1) او F2(xM+e,yM)=F2(1/4,1) دي.

بيلګه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول $9x^2-4y^2=36$ اسيمپتوټي يو له بل سره کوم کونجونه ترې يعنی جوړوي يا اسيمپتوتی په کومو کونجونو کی يو بل پريکوي؟

اوبيونه : هوپربول د منځټکي بڼه (فورم) له (۱۶ . ۲۴) سره سم په لاندې ډول ده $x^2/4-y^2/9=1$ يا د a=2 ,b=3 سره

له دې سره سم دواړه اسيمپتوتی د(۱۶ . ۲۵) له مخی $y=(3/2)x$

او $y=-(3/2).x$ دي.

د لومړی اسيمپتوتی او x - محور ترمنځ کونج φ د $\tan\varphi = 3/2, \varphi = 56,31°$ څخه لاس ته راځي.

له دې امله د اسيمپتوتو ترمنځ کونج ψ باور لري $\psi = 2\varphi = 112,62°$

داکونج کيدی شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

بيلګه ۱۶ . ۲۱ :

د ايليپسی $x^2/64+y^2/16=1$ غوځټکي د هوپربول سره لټول کيږي چی منځ ټکي يی په سرچينه او ککرټګي يی د ايليپسی په سوزونټکو پراته وي او همغه ارزښت b لکه ايليپسی ولري.

اوبيونه : د ايليپسی نيممحور په a1 او b1 سره او لاينيزه اکسڅينتريڅيتي يی په e1 سره ښايو.

نو باور لري: a1=8 , b1=4 او د (۱۶ . ۱۹) سره سم دی.

$$e_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

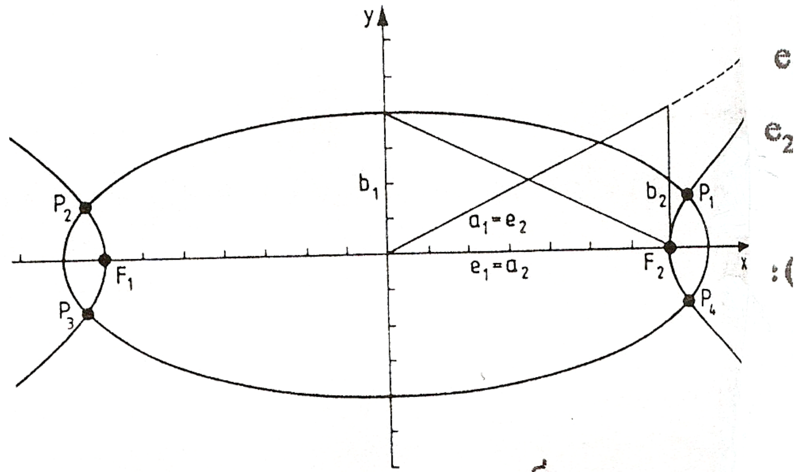


Bild 16.15 ځېره

د هوپربول لپاره نخبنى e_2, a_2, b_2
استعمالوو:
باورلري (پرتله ځيره ۱۶ . ۱۵) :

$$b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$$

او د (۱۶ . ۲۳) سره سم دی

$$e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$$

د هوپربولبرابرون داسې دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوځټکو کواوردينات د ايلپسی- او هوپربولمساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زيات شي نو لاس ته راځي

$$(\frac{1}{16} + \frac{1}{48})x^2 = 2, x^2 = 348/7, x_{1,2} = \pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ايليپسي او هوپربولبرابرونونو ځخه لاس ته راځي

$$y^2 = 16(1- x^2/64)=16/7 <=> y^2= 16(x^2/48 -1)=16/7=>$$

$$\Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1/7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د دواړو کړو غوڅټکي دي:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, 4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_3(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_4(8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}})$$

۱۶ . ۵ پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو P ډېرۍ ده، چې واټن یې له یوه کلك په ځاي ټکی، د پارابول سوزون ټکیF، او یوې کلك په ځاي کرښی، د پارابول ترمخکرښی l (داپه څیره کی جوته ده چې دا کومه کرښه ده) سره مساوي دي(څیره ۱۶ . ۱۶) د سوزونټکی او مخکرښی ترمنځ واټن نیم پارامتر p بلل کیږي، Sککری ټکی دی،کرښه چې له S او F تیریږي د پارابول محور دی.

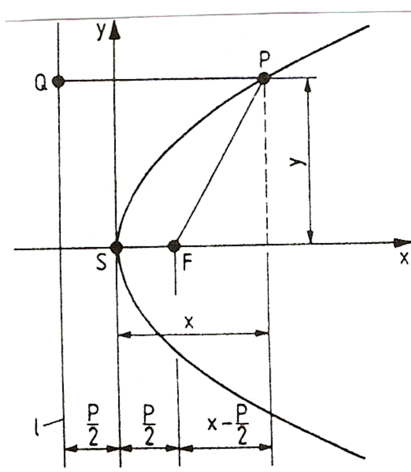


Bild 16.16 څېره

له پیژند – یا تعریف برابرونونو = $\underline{PF}$ $\underline{PQ}$څخه لاس ته راځي

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{P}{2}$$

او له دې څخه د مربعکولو او د ټولګی څخه لاس ته راځي

$$(x-p/2)^2 + y^2 = (x+p/2)^2,$$

$$x^2-px+p^2/4+y^2 = x^2+px+p^2/4$$

پس لرو

$$y^2 = 2px \qquad (16,28)$$

د پارابول ککربرابرون د ککرټکي $S(0,0)$ سره، پورته لور ته واز ($x > 0$)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \qquad (16 , 29)$$

هغه وکیڼ لور ته واز پارابول دیډ واریابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$(16 . 30) \qquad x^2 = 2py$$

د پارابول ککرمساوات د ککرټکي(S(0,0سره، پورته واز پارابول (y > 0)

په همدې توګه:

$$x^2 = -2py \ \ (Y<0) \qquad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دی.

که ککرټکي S کواوردینات xS , yS ولري او د پارابول محور د x - محور ته غبرګ ځغلی په همدې ډول د y - محور ته هم غبرګ ځغلي، نو د یوې په خوښه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(16. 32) \qquad (y - yS)^2 = 2p(x-xS)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککرۍ ټکی(S(xS,yS سره، چی ښۍ لور ته وازوي(x>xS)

$$(x - xS)^2 = 2p(y - yS) \qquad (16.33)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککرټکي(S(xS,yS سره، چی پورته لور ته واز وي (y> yS)۰

په همدې ډول:

$$(y - yS)^2 = -2p(x - xS) \quad (x<xS) \quad (16.34)$$

$$(x -xS)^2 = -2p(y - yS) \ (y<yS) \quad (16.35)$$

هغه کڼې لور او همداسی کوزې یا لاندې لور ته واز پارابولونه دي

د فرمول (۱۶ . ۳۲) همداسی (۱۶ . ۳۳) ځله ونو څخه وروسته د پارابول ټولیز (عمومي) جوړښت پیژندل کیږي:

$$Ay^2+Bx+Cy+D= 0 \ \ , B \mid=0 \qquad ((16, 36)$$

همداسی(> = <)

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0 , C\mid=0, \qquad (16 . 37)$$

د پارابولمساوات ټولیزه (عمومي) بڼه (فورم)

بیلګه ۱۶ . ۲۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابول برابرون دې له ککريټکی ، له نيمپارامتر او وازلورې څخه پيداشي:
الف $S(,0,0), P = 6$)کيڼ، ب $S(2,1) ;P= 0,5$) پورته
پ $S(-3,-5), P = 4$) لاندې ت $S(4,-2) ,P= 2 /3$) ښئ

اوبيونه يا حل:
الف) $y^2 = -12x$ ب) $(x-2)^2 = y-1$
پ) $(x+3)^2 = -8(y+5)$ ت) $(y + 2)^2 = (4 /3) (x-4)$

بيلګه ۱۶ . ۲۳ :

د پارابول د لاندې مساوات سره دې د پارابول د ککرېټکي کواوردينات ، نيمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي $a) (x^2 + 4y +20x + 10 = 0, b) \; y^2 -18x + 12 y -36 = 0$.

اوبيونه : د پارامترتوليزه بڼه (فورم) دې په ککريبرابرون (۱۶ ، ۳۲) همداسی(۱۶ ، ۳۳) همداسی (۱۶ ، ۳۴) همداسی (۱۶ ، ۳۵) کی وازمايل شي (څلوری پوره کيدنه يا مربع تکميليدنه) . د ککريبرابرون څخه ککريټکي ، نيم پارامتر او وازلور

لوستوړ دي.

a) $x^2 + 20x +100 = -4y -100 + 100$

$(x+10)^2 = -4y \; S(-10 , 0) , P = 2$

پارابول لاندې لور ته و از دئ

b) $y^2 + 12y +36 = 18x +36 + 36$

$(y+6)^2 = 18(x+4)$

$S(-4,-6) \; , P = 9$

پارابول ښی لور ته واز دئ

۱۶ . ۶ ټولګه:

دا له ۱۶ . ۱ نيولی تر ۱۶ . ۵ پورې څيرل شوې دهوارې کږې (کږی په هوارې يا سطحه کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

-کرښه
-ګردۍ
-ايليپسی چې د کواوردينات محور سره غبرګ ځغلي، ټول د لاندې مساوات
-هوپربول
-پارابول
په څير انځورېږي:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad (16 , 38)$$

فاکتورونه، ضريبونه يا ځله ووني A او B د کږی د توکو لپاره پرېکنده دي.
برابرون (۱۶،۳۸) لاندې روښانوي
د $A.B > 0 , A \neq B$ لپاره ايليپسی ،
د $A = B$ لپاره ګردۍ
د $A.B < 0$ لپاره هوپربول، که $A > 0 , B < 0$ وي، نو کينې لور ته واز،
که $A < 0 , B > 0$ وي، نو پورته او لاندې لورته واز
د $A.B = 0 , A = 0 , B \neq 0$ لپاره يو پارابول، چې محور يې د x - محور سره غبرګ دئ د $A \neq 0$ ، $B = 0$ يو پارابول ، چې محور يې د y - محور سره غبرګ دئ
د $A = B = 0$ لپاره يوه کرښه‌که په (۱۶ . ۳۸) يو بل ګډوله(يو د بل سره ګډ شوی) ځلورۍ توکي رامنځ ته شي، نو دا د کږې يو ځلورۍ برابرون يا مربع مساوات ښکاروي (توضيح کوي) ، د کومو محورونه چې نور د کواوردیناتو محورونو سره غبرګ نه دي.

بيلګه ۱۶ . ۲۴ :
له لاندې مساواتو سره کومی کږې انځوريدلی شي ؟

a) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$ b) $3x^2+24x+15y+138=0$
c) $16x^2+y^2-96x=0$, d) $2x^2-2y^2+16x+10y-105/2=0$?

اوبيونه : (يادونه : لکه د نورو ځايونو په څير دلته هم الف د a په ځاي ليکم ، ځکه چې د پښتو لپاره کرښه په لاتين حروفو له ښي لور نه شي پيل کيدی)
الف يا a) که $A = B = 1$ وي ، نو ګردۍ
ب يا b)که $B=0$ پارابول چې محور يی د-y محور سره غبرګ وي
پ c)که $A.B >0$، $A \neq B$ نو ايليپسی
ت d)که $A.B < 0$ ، نو هوپربول

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیریږي او د x–محور سره کونج جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, = 30°, b) $P_1(-3,2)$ = 45°

c) $P_1(-1,-4)$, = 120°, d) $P_1(4,4)$, = 0°

e) $P_1(0,0)$, =150°, f) $P_1(1,-1)$, = 90°

۲ – ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅې (لنډ: محورغوڅې) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره چې یو له بل یې لري وټاکئ.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ – یو دریګوډی دا لاندې ګوډټکي لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګوډیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګوډي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برختوټبنه یا –فورم څنګه دئ؟

a) 3x -5y +15 = 0 , b) 4x -3y -18 = 0

c) -4x +2y -10 = 0 , d) -3x -4y +15 = 0 ?

۶ – د کرښې y = -(12 / 5)x +2 پروتخای د کرښو

a) y+2,4x - 6 = 0 , b) 28x +10y = 0 , c) 8x + 5y =2,

d) 5y +12x -10 = 0 . e) y +(12/5)x = 3 , f) 6x +2,5y = 5

سره وڅیړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ - د لاندې کرښو د غوڅېدو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$, $3x - y = 5$, b) $y = (1/2)x + 1$, $y = -2x + 6$, c) $y - x = 7$, $y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$, $-x/2 + y/3 = 1$, e) $6x - 2y + 10 = 0$, $y = 3x + 6$, f) $y = 4x - 1$, $y = -3x + 5$!

۸ - کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوڅېدو P(0,5) څخه تیرېږي ؟

۹ - د لاندې کونج سره د درېګوټي دننه کونجونه A(-4,-1), B(2,-2), C(1,3) څومره لوی دی ؟ (پیلونه: دریکونجي وکاږئ)

۱۰ - د ولاړپېرېوتي کرښې یا زوړندې مساوات له ټکي P(2,0) څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دی؟

۱۱ - د ولاړکرښې مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي P(-1,-2) څخه د

۱۲ - د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي P(-1,-3) تیرېږي، څنګه دي؟

۱۳ - د لاندې مساواتو سره ګردیمنځټکی او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2\ 9y = 0$, d) $4x^2 + 4y^2 + 32x - 8y + 67 = 0$

e) $36x^2 + 36y^2 - 36x + 24y - 23 = 0$, f) $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 16$!

۱۴ - د لاندې ګردیو مساوات وځېرئ

الف) چې منځ ټکی M(-2,-1) لري او له سرچینې تیرېږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5, 5-3)$, $P_3(5+3,-1)$ يې د غاړو ټ

پ) چې وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11), P_2(5,5)$ څخه تيريږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تيريږي او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ لمسوي.

ث) چې د هغې منځټکی په کرښه $y = 3x - 19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$ او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تيريږي.

۱۵ – کوم پروتځايونه ګردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې يو له بل سره لري:

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,

d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتځاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی

الف) په ټکي $P_0(5,y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،

ب) په ټکی $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ – د هغو ګرديو منځټکي پيداکړی چې وړانګه يې $r = 5$ وي، کومې چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکی $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!

۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

۲۰ – د ايليپسې مساوات وټاکی، له

a) $M(0,0)$, a 11, $c = 8$, B) $M(0,0)$, $b = 4$, $c = 6$,

c) $M(-3,7)$, $c = 4$, $b = 5$, d) $M(4,-5)$, $e = 7$, $a = 10$!

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۱ – د لاندې ايليپسيمساواتوڅخه د نيممحورونو اوسوزونتېکو منځتکی او اوردوالی راپيداکړئ:

a) $x^2 / 100 + y^2/ 64 = 1$ b) $(x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1$

c) $3x^2 + 4y^2 -24x >= 0$, d) $5x^2 +9y^2 -10x + -90y + 50 = 0$,

e) $4x^2 -13y^2 -208 = 0$, f) $4x^2 +9y^2 +54y -227 = 0$!

۲۲ – د هغو ايليپسو مساوات راپيداکړئ، کومې چې

الف) چې منځتکی M (0,0) او لايتي ايکسڅنتريخيتي e = 6 لري ا
تکی P(10.0) څخه تيرېږي،

ب) له منځتکی M (1,1) او لايني ايکسڅنتريخيتی e = 4 لري او له
ټکو څخه تيريږي،

پ) د نيممحور اوږدوالی a = 9, b = 6 لري او له ټکو $P_1(2,8)$, $P_2(2,-4)$ څخه
تيرېږي!

ت) د نيممحوراوږدوالی a = 2 , b = 6 لري او له ټکو $P_1(-1,-4)$, $P_2(-5,-4)$
څخه تيرېږي!

۲۳ – د لاندې ايليپسو او کرښو ترمنځ غوڅټکي پيدا کړئ

a) $x^22 +4y^2 -20 = 0$, $x+2y-6 = 0$,

b) $3x^2 +4y^2 -24x =$, $y = 3 .x$,

c) $(x-3)^2/ 9 +(y-1)^2 / 4 = 1$, $y = x+1$,

d) $x^2 + 4y^2 +16y +12 = 0$, $y = x-2$!

۲۴ – د هوپربول مساوات له

الف) b M(0,0) , a = 4 , e = 5 , ب) M(-3,2), b = 4 , e = 6 ,

پ) M(1,1) او هوپربولتېکو $P_1(-3,1)$, $P_2(6 , 7 /4)$!

ت) a = 3 , b = 2 , x = -1 او د هوپربولتېکي P(-4,-2) وټاکئ !

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ – د هوپربولونو

a) $x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1$, b) $9x^2 - 64y^2 = 576$

نیمحورونواوږدوالی او اسیمپتوتي راپیدا کړی !

۲۶ – د لاندې هوپربولونو منځټکي او د نیمحور اوږدوالی پیداکړی

a) $9x^2 - 64y^2 - 36x - 540 = 0$, b) $x^2 - 9y^2 + 54y - 90 = 0$,

c) $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$, d) $x^2 - y^2 - 2x + 10y - 28 = 0$!

۲۷ – د لاندې مساواتو سره دکړو غوڅټکي وټاکی:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y = \frac{1}{5}x$,

b) $4x^2 - 9y^2 = 144$, $x^2 - 24y = -28$,

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $y = -\frac{2}{3}x - 5$,

d) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 68 = 0$, $9y^2 - 36y - 72x + 8 = 0$,

e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, $x^2 - y^2 = 16$!

۲۸ – د لاندې پارابولونو ککړټکو اوسوزونټکو کواوردینات وټاکی:

a) $5y^2 + 4x = 0$, b) $2y - (1/2)x^2 = 0$ c) $4y + (1/3)x = 0$,

d) $2y^2 - 12x = 0$, e) $y^2 - 2y - 10x - 9 = 0$, f) $x^2 - 7x - y + 12 = 0$

g) $y^2 - 6y + 6x - 3 = 0$. h) $x^2 + 4x + 12y 52 = 0$

۲۹ – د پارابولمساوات له لاندې ککړټکو او سوزونټکو وټاکی:

S (0,0), F(0,1) , b) S(0,0), F(-1,0), c) S(1,1) , F(2,1),

S(-1,-1), F(-2,-1), e) S(2,-3), F(2,-2), f) S(-2,3), F(-2,2)

۳۰ – یو پارابول د ککړې پروت ارزښت $x_S = 3$ لري، کرښه $y = 8$ د محور په څ

ټکي P (7,4) تیریږي. ددې مساوات څنګه دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳۱ – يو پارابول د ککرکواوردينات $y_s = -3$ لري، کرښه $x = 2$ د محور په څير او له ټکي $P(4,-4)$ تيرېږي. د هغې مساوات څنګه دي؟

۳۲ – کوم پروتڅاي اړيکي د

الف) پارابول $y^2 = -4x$ او کرښی $y = x-1$

ب) پارابول $x^2 = 5y$ او کرښی $y = x-4$

پ) پارابول $x^2 = -3y$ او کرښې $y = x + 5/12$

ت) پارابول $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$ اوکرښې $y = x$

ټ) پارابول $y^2 = 7x$ او کرښې $9x + 12y + 28 = 0$

ترمنځ پرتی دي؟

که موجود وي ، نو غوڅټکی همداسې لمستکی يې ورکړی!

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ وکتور شمیرنه او په ځمککچ کی د هغه په کارونه

۱۷ . ۱ د وکتور پیژند ،

په کارتیزي کواودینات سیستم کی د وکتور انځورونه

په پیداینتي پوهنو یا طبیعي علومو او تخنیك کی مورږ لویی پیژنو چی د رییل ارزښتونو په ورکولو سره یواځنۍ ټاکلي دي، لکه وخت، گرمي، توان ، وزن . داډول لویو ته سکالار لویې وایو .نورې لویی لکه زور ، چټکتیا(سرعت)، بیره (تعجیل)، د برقي او مقناطیسي چاپیریالزور برسیره په ارزښت (مطلقه ارزښت) د لور ورکونه هم غواړي، په کومه چی تاسیر اچوي. مورږ دې لویو ته وکتورونه وایو.
د وکتور له لارې کیدی شي چی دهندسي شیانو ځان نیونه هم تشریح کړای شو. په فضا هوا کی یو ټکی کیدی شي چی د هوا کواوردینات سیستم کی د سرچینی څخه د دې ټکي په لور لوریزشوې کرښه (په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري) تشریح کړی شي یعنی له سرچینی څخه یی په دې ټکي برید وي یا دا ټکی په نخښه کړای شي یا یې د غشي څوکه د دې ټکي په لور لوریزه وي.

یادونه : ما وکتورونه a,b, ښوولي، ښه به یې $\vec{a},\vec{b};....$ وای، ډیرو کتابونو کې پنډ **a,b,..** لیکل شوي، خو ما د وکتور سره تل د وکتور کلمه یاده کړې، چې د ناتیکپوهنې څخه مو ژغوري۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه a چې د یوه مطلقه ارزښت (|a| چې داوږدوالي کچګڼ یی هم بولو) او یوې لورې له مخې ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي۰

(لنډ: یوه لویه چې لور ولري، وکتور دی. موږ کړی شو چې دې لویي ته غشی هم ووابو. زه یی همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کي د یوه لور لرونکی کرښی(غشي) په څیر انځورکیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخی ټول مساوي اوږده او په یوه لور لوری-، لوریزې- یا لورونی کرښي همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدټکي باندې ترل یی په نظر کي نه دي نیول شوي . سرې ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کی په خوښه غبرګ (موازی) وخوځول شي یا راکښل شي، موږ په راتلونکي کی د داسی ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوې لویي، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوټو هم اړه لري. د بیلګي په توګه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیرلیکی یا بهتره برید لیکی په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي(په غبرګ یا موازی راکښون یی تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندې غږیږو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردیناتسیستم په سرچینې (د برید - یا حملی ټکی) پورې ترلی. داسی وکتورونه ځاي وکتورونه(په ځاي ترلي -) بلل کیږي .ځنی په لاندې کی د فرمول بندي شوې شمیرقاعدې له مخې کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :

دوه وکتورونه **a** او **b** برابر بلل کیږي $\mathbf{a} = \mathbf{b}$

که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور یو په بل سر وخوري یا پریوځي.

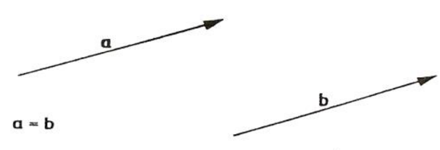


Bild 17.1 ځاکه

ټولې برابرې اوږدې او برابرې – یا همغه لوریزې کرښی، لکه چې وویل شو همغه وکتور ښایی.

پیژند ۱۷ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وکتور **a** د مطلقه ارزښت |**a**|=0 سره 0 یا صفر وکتور بلل کیږي. صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور **ea** چې د a لور او مطلقه ارزښت |**e**|=1 لري، نو په وکتور a پورې اړوند یوونوکتور(۱) بلل کیږي.

(1)Einheitsvektor,unit vector یوونوکتور یانې ارزښت یې یو یوون دی یا واحدوکتور(؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوګونال (Orthogonal) بلل کیږي، که دوي یو په بل نیغ ولاړ (عمود) ولاړ وي، کولینیار(kollinear) بلل کیږي، که دواړه د همغی یوې کرښې سره غبرګ وي، کومپلانار (komplanar) بلل کیږي ، که د همغي یوې هوارې سره غبرګ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبي سیستم ته اړتیا حس کیږي، دلته هوایي یا فضایي کارتیزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د کواوردینات سیستم انځورونولپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د وکتور ځله ونه یاضرب د یوه ریبل ګڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \lambda \in R$$

یو وکتور دی چې د $|\lambda|$ - ځله دa مطلقه ارزښت لري او د $0 < \lambda$ لپاره همغه لور لري لکه a، په ښځ یا برعکس که $\lambda < 0$ وي نو د a مخامخ لور یا په ښځ لور لري

جمله ۱۷ . ۱:

د ریبل ګڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدې

کوموتاتیف قاعده،اسوشیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda.\vec{a} = \vec{a}.\lambda;....Kommutativ$$

$$\lambda(\mu.\vec{a}) = \eta(\lambda.\vec{a}) = \lambda\mu.\vec{a};....Ass.$$

$$|\lambda.\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|, 0.\vec{a} = \vec{0}, \vec{0} = 0$$

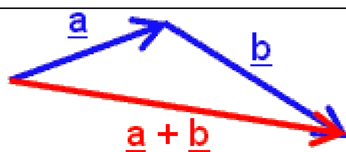
(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې ځل یاضرب د پیژند سره ممکن کیږي چې هر وکتور a د یوه رییل ګڼ (ددې وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پورى تنظیم یا ترتیب شوى یوونوکتور د ځل په ځیر انځور کړو: $a = |a|.e_a$

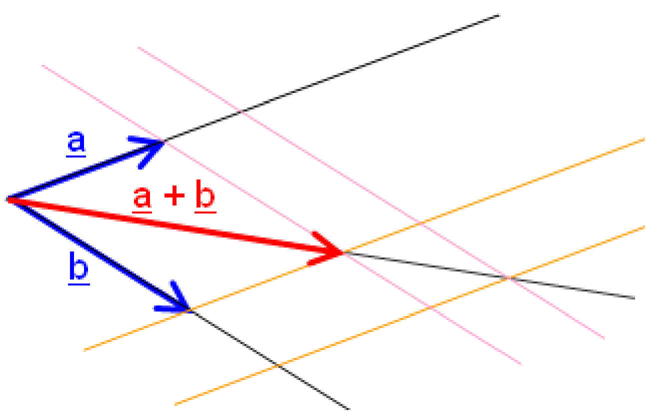
پیژند ۱۷ . ۶ :

(د وکتورونو زیاتون)
د دوه وکتورونو a , b زیاتون (جمع)   a+b د دواړو وکتورونو a او b ځخه غزیدلی غبرګ اړخیزې(موازي الاضلاع)   لوریز دوه کونجتړي (قطر) ده. ځیره . ۱۷ ۲)

د وکتورنو زیاتون (جمع) د قوو یا زورونو د زیاتون په ځیر دى او دا د شمیر قاعده ساده د لیدو کیدى شي



ځیره شته دغبرګ اړخیزه پورته نیمه یا له تعریف ۱۷ . ۶ ځخه پورته ځیره یا مخامخ ځیره



جمله ۱۷ . ۲ :

(د وکتورونو د جمع لپاره د شمیرقاعدې)

$a+b=b+a$ (کوموتاتیف قاانون)

$(a+b)+c=a+(b+c)$ (اسوسیاتیف قانون)

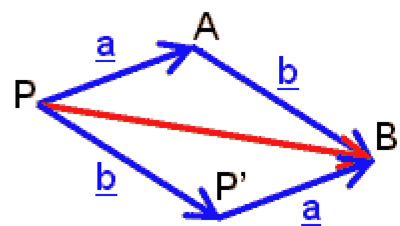
دیستریبوتیوو او وربسي یه لاندې نظم اړیکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

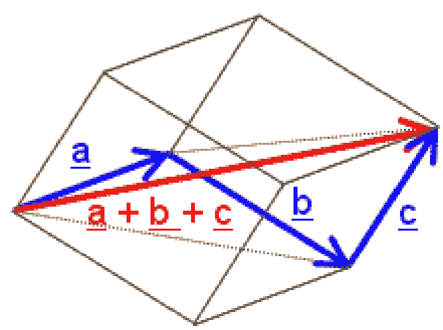
$$(\lambda+\mu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a};...........Distrib.$$

$$\mu(\vec{a}+\vec{b})=\mu.\vec{a}+\lambda\vec{b};...........Distr.$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$



د زیاتون دې قانونو سره موږ ته ممکن کیږي چې هر وکتور، د بیلګي په توګه د وکتورونو د کواوردینات محور په لور ښودونکو وکتورونو د زیاتون په څیر انځورکړای شو یا ولیکو. په دې ډول بریالي کیږو چې دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره یا هدفمنده شمیرنه په کواوردینات سیستم کی انځور کړو



پورته څیره کې د درې وکتورونو زیاتون

پیژند ۱۷ . ۷ :

په کواودینات سیستم کی د وکتور a انځورونی لاندې

a=(a1,a2,a3)   (17 . 1)

موږ په یوه ولاړکونجیز

-x1 , x2 , x3

کواوردینات سیستم کی د وکتور انځوره ونه پوهیږو، د نخښی یا مخ نخښی په نظر کي

نیولوسره او د ai پرویکشن یا پریوستون له لارې په هر xi - محور(i = 1 , 2 , 3)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په شیره ۱۷ . ۳ کی)
داسی ai د a وکتورi - م کواوردینات بلل کیږي

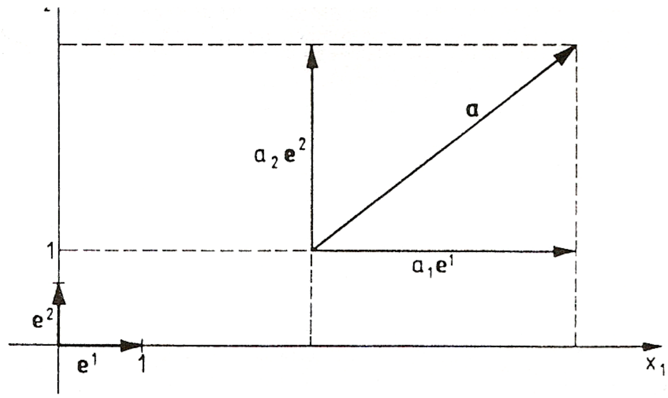


Bild 17.3 شیره

یادونه:
موږ دلته که د وکتورونو پورته ځه لیکو نو هغه د وکتور پوتنځ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور ښايي چی په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لورې پوره جوت دی. د xi- محورونو په لور په کواوردیناتشکل د یوونوکتورونو څرګندونه په لاندې ډول ده

$$e^1 = (1, 0, 0)$$
$$e^2 = (0, 1, 0) \qquad (17.2)$$
$$e^3 = (0, 0, 1)$$

د وکتور aانځورونه د کواودیناتو $a^i; i = 1, 2, 3,$ او د یوونوکتورونو(۱۷ . ۲) د استعمال له لارې، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لارې یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لارې د وکتور a انځورونه) لرو:

$$\vec{a} = a_1\vec{e^1} + a_2\vec{e^2} + a_3\vec{e^3};............................(17,3)$$

د دوه پراخیدونې یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزیون انځورونه. (شېره ۱۷ . ۳)
دلته, a^ie^i چی i=1,2,3 وي، د a وکتور i - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیږي
د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۴:

د رییل ګڼ سره د یوه کتور ځله ونه او یا د وکتورونو زیاتون کواوردینات ډوله یا په ډیر صورت نیسي، دا په دې مانا چی لاندې باوري کیږي::

$a=(a_1, a_2,a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3)$

$\mu a = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) \qquad (17 . 4)$

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.........................(17,5)

بیلګه ۱۷ . ۱ :

د(a=(-2,3,-5 , b=(1,-6,4) لپاره لرو

2a+3b=(2-2,3,-5)+3(1,-6,4)=(-1,-12,2).

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زیاتون په ډیر (تعریف ۱۷ . ۶) صورت نیسي یا ځان نیسی

پیژند ۱۷ . ۸ :

د a - b کمون یا کمښت د وکتور a او وکتور b ته مخامخ - یا په ټښ وکتور یعني -b زیاتون دی: a-b=a+(-b) (ځیره۱۷ . ۴)

له تعریف ۱۷. . ۸ لاس ته راځي : وکتور a ، کوم چی له x1 ټکي x^2 ټکی ښایي (د دوه اړخؤنویا بعدونو انځورونی لپاره .ش ۱۷ . ۵) داسی دی

(پاي ټکی ترې کم پیل ټکی یانې د پایټکي او پیلټکی کمښت): $a = x^2 - x^1$

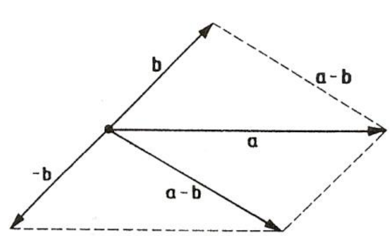


Bild 17.4 ځیره

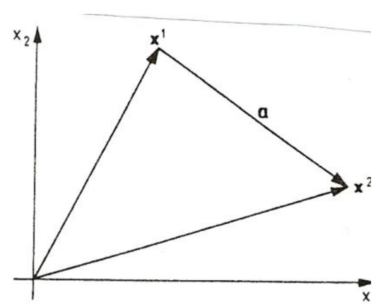


Bild 17.5 ځیره

بیلګه ۱۷ . ۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه وکتور چی له $x^1 = (-1,-3,1)$ ټکي څخه($x^2=(2,-1,5$ ټکی ښايي(په ګوته کوی يه ګوتنيوونی کوي) داسی دی :

$$a = x^2 - x1 = (2,-1,5)-(-1,-3,1)=(3,2,4).$$

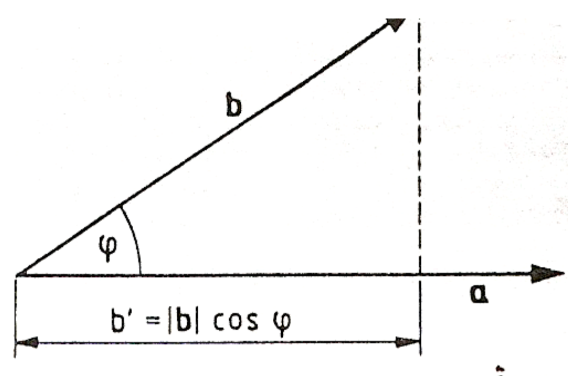
۱۷ . ۲ د دوه وکتورنو سکالار ځله ونه يا ضربونه

پيژند ۱۷ . ۹ :

د دوه وکتورونو a , b سکالار ځل a . b د دواړو وکتورنو د مطلقه ارزښت او له دي دواړو وکتورونو منځ ته راغلی کونج کوساين ځل يا ضرب دی، ياني

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17,7)$$

د سکالار ځل يا ضرب نتيجه سکالار ده
په (۱۷ . ۷) کی فاکتور $\vec{b}' = |\vec{b}|.\cos\varphi$ په هندسی مانا د (مخ) نخبني ساتلو سره (د کوساين د پيژند له مخی) په وکتورa دوکتور b پرويکشن يا پريوتل يا پرييستل دي (ځيره ۱۷ . ۶)



په فزيك کی د سکالار ځل يا- ضرب بيلګه :
که a هغه لار وي چی د هغي په اوږدوالی د b زور تاثير اچوي، پس A = a. b له دې زور له لارې کړ شوی کار ښايي) د لار اوږدوالی چي د لار په لور د زور د پرويکشن سره ځل دی) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۵ : (د سکالار ځل شمیرقاعدې)

$a.b=b.a$ (کوموتاتیو قاون)

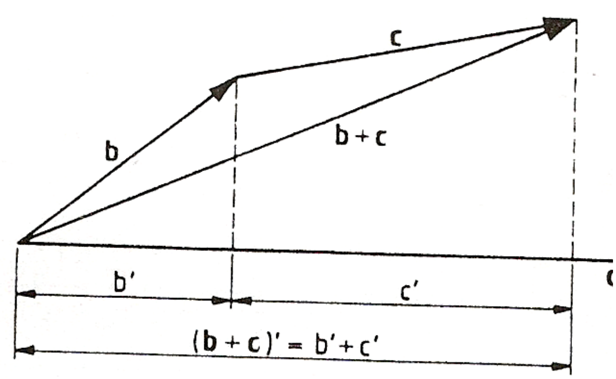
$a(b+c)=a.b+a.c$ (دیستریبوتیو قانون)

$a.b=0$ که a اوb یوپه بل اورتوګونال یا عمود وي (۱۷ ، ۸)

$a.a=|a|^2$ (17 . 9)

د پورته شمیرقاعدو جوتونه: کوموتایو قانون د (۱۷ . ۷) پسی تړلی لاس ته راځي.
دیستریبوریوقانون په (ځیره ۱۷ . ۷) کی لیدل کیږي.

د اورتوګونالوکتورونو لپاره باور لري: که $a.b = 0$ نو $\cos\alpha = 0$ او(۱۷ . ۸)
له (۱۷ . ۷) څخه لاس ته راځي .
همداډول (۱۷ . ۹) له (۱۷ . ۷) او داچی $\alpha = 0°$ د a او a ترمنځ دی(، نو لاس ته راځي $\cos\alpha = 1$



پورته ځیره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :
د دوه وکتورونو سکالار ځل کواوردیناتډوله صورت نیسي یعني د
$a = (a1 ,a2 ,a3), \quad b = (b1 ,b2 ,b3)$
د ځله ونی یا ضرب څخه لاس ته راځي :

$$a.b=a1b1+a2b2+a3b3 \qquad (17 . 10)$$

اوبیونه : د یوونوکتورونو (۱۷ . ۲) لپاره لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۹ . ۱۷) سره سمر د i = j لپاره $e^i.e^j = 1$ د(۹,۱۷) سره سم د j =|iلپاره $e^i.e^j = 0$ له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3)(b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

يادونه : د لته د وکتورونو په توانېول چی څه ليکل کيږي د توان مانا نه لري په يوونوکتورونو کي ددې لار ې ښوول کيږي چي دا دکوم کواودينات يوون وکتور دی او د نورو وکتورنو لپاره دا مانا لري چي کوم يو وکتور مو مطلب دی او نه چی په کوم توان دې ته د مخه هم ګوته نيول شوې ده.

بيلګه ۱۷ . ۳ :

وکتور(a=(2,-3,1 دي له لاندې وکتورونو سره حٔل شي

a) b1=(3,1,4),b) b^2=(3,2,-2), c) b^3=(3,3,3)

اوبونه يا حل: بيا يا انينترنيت

a) a . b1 = 2.3 - 3.1 + 1.4 = 7

b) a . b^2 = 2.3 - 3.2 +1.(-2) = -2

c) a . b^3 = 2.3 - 3.3 +1.3 = 0

دلته c (په دې مانا ده چی وکتورونه a او b^3 اورتوګونال يا عمود دي ددې لپاره ليکو:

$$a \perp b^3$$

جمله ۱۷ . ۷:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};\qquad(17,11)$$

اوبيونه : له (۱۷ . ۱۰) لرو : $a . a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

بيلګه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو(a=(2,-3,1) , b=(3,0,-4 مطلقه ارزښت (اوږدوالی) دی

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو aاو b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کيږي

$$\cos\phi = \frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};\qquad(17,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبيونه يا حل : (۱۷ ، ۱۲) له (۱۷ . ۷) ، (۱۷ . ۱۰) او (۱۷ . ۱۱) څخه لاس ته راځی

بيلګه ۱۷ . ۵ :
په بيلګه ۱۷ . . 3کی د $\vec{a} \wedge b^1, b^2, b^3$ تر منځ کونجونه د شميرلو دي.
اوبيونه:

$$\phi_1 = \angle(\vec{a}, \overrightarrow{b^1}) = \frac{2.3-3.1+1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0,3669; \phi_1 = 68,48°$$

$$\phi_2 = \angle(\vec{a}.\overrightarrow{b^2}) = \cos\phi_2 = \frac{2.3-3.2+1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0,1296, \phi_2 = 97,45°$$

$$\phi_3 = \angle(\vec{a}.\overrightarrow{b^3}) = \frac{2.3-3.3+1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} == 0, \phi_3 = 90°$$

۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځلونه يا ځل

پيژند ۱۷ . ۱۰:

ددوه وکتورونوa,bکتورځل يا وکتوريز ځل يو وکتورc دی د کوم لپاره چی ليکو
$a \times b = c$ او لاندې خويونه لري:
۱ - د c مطلقه ارزښت دی

$$|c| = |a||b|.\sin\phi; ....(17,13)$$

دا دهندسي له مخی د a او b وکتورونو لخوا غزيدلي غبرګ اړخيز منځهواري په مانا دی.(ځ. ۱۷ . ۸)
۲- د c وکتور a او b باندې نيغ ولاړ يا اورتوګونال دی.
۳– دلته a , b , c يو ښي سيستم جوړوي، دا په د مانا چی که دښي لاس غټه ګوته او د ښوولو ګوته د aاوbلور وښايي نو کونججوړونکي د منځ ګوته دوکتورc-
لور ښايي (ځيره ۱۷ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

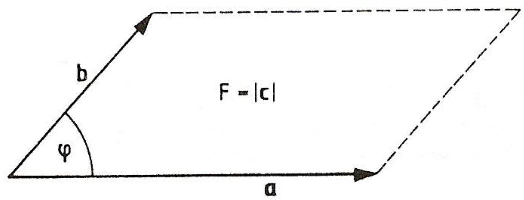


Bild 17.8

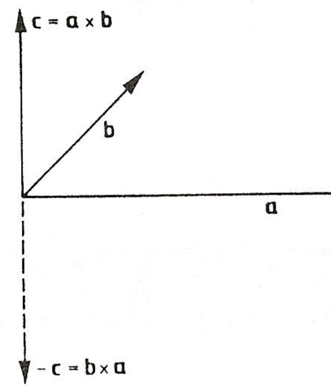


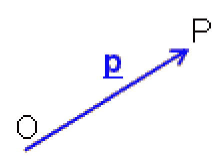
Bild 17.9

دا لاندې ښيرې د فرمولونو سره مورږ ته ټکی، کرښه او هواره را په ګوته کوي او د يوه وکتور مطلقه ارزښت.

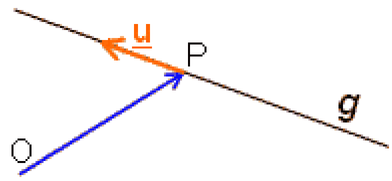
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی $P(p_1|p_2|p_3)$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$



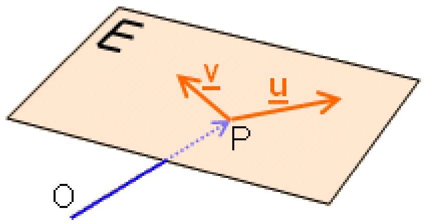
کرښه g



$$g: \underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هواره E



E: **x** = **p** + r·**u** + s·**v**

وکتورځله ونه یا وکتور ځل یواځي د درى اړخیزې هوایا فضا لپاره تعریف دى.

د وکتورځل بیلګه په فزیك کی :

که F قوه یا زور وي چي په یوه کلك څرخیدونکي بدن (جسم) د Q په ټکي د r په مړوند چی د r سره کونج جوړوي، برید یا حمله کوي او هغه د P په ټکي څرخوي (څیره ش. ۱۷ . ۱۰) نو څرخون مومنتDrehmoment منځ ته راځي M = r × F

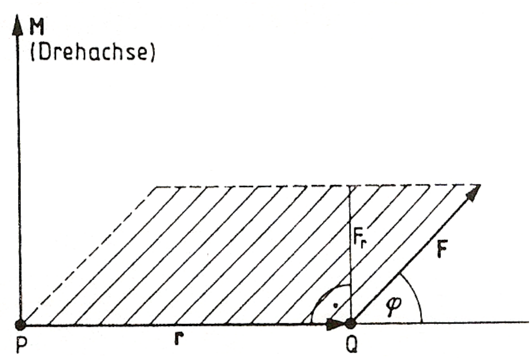


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخی د څرخونمومنت د اوږدوالی | r | د اړم مټ او مطلقه ارزښت
$F_1 = |F| \sin\phi$

چی د اړم په مټ (نیغ) ولاړ د قدرت یا قوت زور کپوننت (جوړونکی) دی:
$M = |r||F| \sin\phi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۹: (د وکتورضرب لپاره د شمیرقاعدې)

$$a \times b = - b \times a \qquad (17 . 14)$$

دیستریبوتیو قانون)

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c) \qquad (17.15)$$

$a \times b = 0$ د کولینیار وکتورونو لپاره) (16 . 17

د پورته شمیرقاعدو ښه څرګندونه یا توضیح : (۱۷ . ۱۴) د غوښتونکي ښي سیستم له مخی (پیژند .۱۷ ۱۰ ،څ. ۱۷ . ۹)

د کولینیار وکتورونو لپاره $\phi = 0$ پس لرو: $\sin\phi = 0$ له دې سره د (۱۷ . ۱۳) له مخی (۱۷ . ۱۵) لاس ته راځي. په دیستریبوتیو قانون په لیدنوالي (پیچې دئ) دلته صرف نظر کیږي، لیدوړ والی یی نه ځرګندوو. د وکتورځل شمیرلو لپاره د وکتورکواوردیناتډوله ښودنی سره د یوون وکتورونو e^1 , e^2 , e^3 وکتورځل ته اړیو.د (۱۷ . ۱۵) شمیر قانون له یوې خوا او له بلی خوا د وکتور ځل پېژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰ (د یوونوکتورونو وکتورځل)

$$e^i \times e^i = 0, i = 1,2,3; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2; \ldots\ldots\ldots(17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2; \ldots\ldots\ldots(17,17)$$

د دریمی درجی دیترمینانت کلیمی لاندې (پېژند۱۱ . ۲) او که څوك یوون وکتورونه د دیترمینانت د توکو په څیر ومنلی شي، کیدی شي چی د وکتورځل a×bد a , b کواوردیناتو په څیر انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱ : د وکتورونو

$$b = (b1,b2,b3), a = (a1,a2,a3)$$

وکتوریز ځل یا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتریکس په توګه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^2 \\ a_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبیونه یا حل : د وکتور $a=(a_1e^1+a_2e^2+a_3e^3)$ څل د وکتور

$$b=(b_1e^1+b_2e^2+b_3e^3)$$

د توکوډوله(توګي په توکي) وکتوري څل د جملی ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي

$$a\times b=e^1(a_2b_3-a_3b_2)+e^2(a_1b_3-a_3b_1)+e^3(a_1b_2-a_2b_1)$$

دا ضرب ارزښه په دا لاس ته راوړنه یا نتیجه د دیترمینانت (۱۸ . ۱۷) د شمیرلواود پېژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بیلګه ۱۷ . ۶:

a × b دې وشمیرل شي، که وي

الف) a=(-2,1/2,-1), b=(1/2,-2 ,1)

ب)

$$a=e^1-3e^2+e^3,b=-e^1-2e^2+3e^3$$

اوبیونه یا حل الف) ب) د دې بیلګې اوبیونه دې ګان لستونکي او مینه وال په غاړه واخلی، دا له مخه تیرې جملې له مخی پوره روښانه دی۰

وکتوري څل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهمیت په بنسټ د وکتورونو a , bڅخه خورې شوې منځهوارې Fp غبرګ اړخیز ه همداړول د a او b څخه خورشوي یا غزیدلي دریګوډی منځهوارې FD شمیرلو لپاره خورا مساعد دئ . باور لري

$$F_P=|a\times b|;F_D=\frac{1}{2}|a\times b|;......................(17,19)$$

بیلګه ۱۷ . ۷ :

د وکتورونو(a=(1,1,0) , b=(2,0,1 څخه خورې شوې هوارې منځ یا دننه په لاندې ډول ده

$$a\times b=\begin{vmatrix} e^1e^2e^3 \\ 110 \\ 201 \end{vmatrix}=(1,-1,-2),F_P=|a\times b|=\sqrt{1^2(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

بیلګه ۱۷ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دريګوډی ABC منځهواره (د هوارې دننه) دې وشمیرل شي چی کونجټکي يي وي :

A=(2,1,1) , B=(4,0,0) , C=(1,-1,2)

ابيونې :

دريګوډی له لاندې وکتورونو څخه غزيږي

a=B-C=(3,-1,-2),

b=A-C=(1,2,-1) او

د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دی

$$a\times b=\begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 3 1 -2 \\ 1 2 -1 \end{vmatrix}=3e^1+e^2+5e^3=(3,1,5)$$

د درېګوډی ABC د هوارې دننه يا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D=\frac{}{2}|a\times b|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+1+5^2}=\frac{1}{2}\sqrt{35}$$

۱۷ . ۴ شپات ضرب (غبرګهواريزځل موزی سطحيز ضرب)

يادونه : دا يو شپږ خوابيز تن دی چی مخامخ هوارې يی سره غبرګی او يو په بل ضرور نيغ ولاړ نه وي . لاندې شکل ۱۷ ۱۱. يی بيلګه او د مسئلی دحل انځورونه ده

پيژند ۱۷ . ۱۱ :

د درې وکتورونو غبرکهواريز ځل يا شپاتځل[a , b , c] لاندې ځل يا ضرب دی

[a,b,c]=(a×b) (17 . 20)

دلته وکتورونه a او b وکتوريز ځل کيږي او نتيجه يي بيا د cسره سکالار ځل کيږي، يعنی لاس ته راوړنه يا نتيجه يي سکالار ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غبرکهواريزځل ځمککچيز هندسي ليدونکی اهميت لري. د سکالارځل (پيژند ۱۷ . ۹) سره سم باور لري

$$\left[a,b,c\right]=(a\times b).c=|a\times b|.c=|a\times b|.|c|.\cos\alpha$$

دلته الفا د وکتورونو a × b او c څخه رابند شوی کونج دی.(څيره ۱۷ . ۱۱)

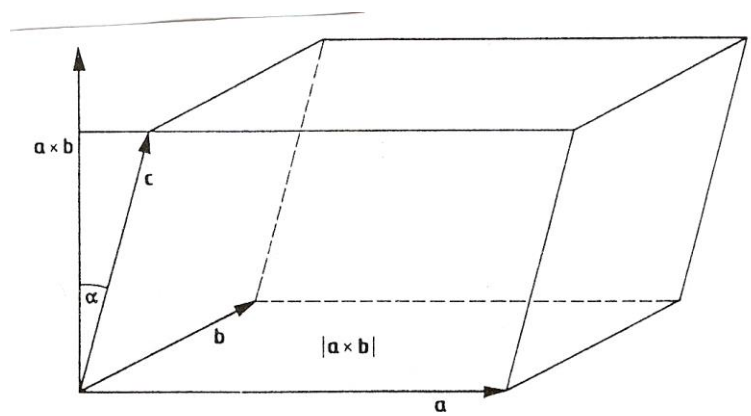


Bild 17.11

دلته د وکتورځل تعريف سره سم (پيژند ۱۷ . ۱۰) |a×b| د a اوb غزيدلي غبرگ اړخيز دی . برسيره پر دې $|c|.\cos\alpha$ پرتله برخه ۱۷ . ۲ (په وکتور a×b باندې د وکتور c پروجکشن يا پريوستون په مانا دی. يعني د a,b او c څخه غزيدلی غبرگهوارې يا

شپات جګوالی ښايي. پس[a,b,c] هندسي د وکتورونو a,b,c څخه غزيدلي غبرکهواريزې ډکي (حجم) په مانا دی.
دغبرگهواريز په مطلقه ارزښت (د غبرگهواريز ډکي يا-حجم) کی تغير نه راځي که چيرې د وکتورونو پرلپسی ترتيب بدل شي. د غبرگهواريزې ډکی زياتيز يا مثبت دی، که ورکړ شوي ترتيب يو ښی- سيستم جوړ کړی۰

جمله ۱۷ ۰ ۱۲:

$$[a,b,c\ ] =[b,c,a] = [c.a.b]=-[a,c,b]= =-[c,b,a]=-[b,a,c] \quad (17\ .\ 21$$

که وکتورنه په يوه هواره کی پراته وي)کومپلانار وي(نو يو شپات د صفر جګوالي سره لاس ته راځي. نو بيا لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۱۳:

(17 . 22) د کومپلانار وکتورونو لپاره باور لري$[a,b,c]=0$

د غبرګهواریز یا شپاټ ځل شمیرلو لپاره د وکتورونو په کواوردیناتتوګه انځورونه بیرته دیترمینانت انځورونه په کار اچول کیږي

جمله ۱۷ . ۱۴:

د وکتورونو

$a=(a1,a2,a3),b=(b1,b2,b3),c=(c1,c2,c3)$

غبرګهواریز ځل په لاندې ډول دی

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix};.........(17,23)$$

اوبیونه : وکتور ځل $a\times b$ د جملی ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري

$a.b=(a_2b_3-a_3b_2)e^1-(a_1b_3-a_3b_1)e^2+(a_1b_2-a_2b_1)e^3$

د $a \times b$ سکالارځل د c سره کواوردیناتډوله په لاندې توګه صورت نیسي.

$(a\times b).c=[a2b3-a3b2,-(a1b2-a2b1),a1b2-a2\ b1].(c1,c2,c3)$

$= c1(a2b3-a3b2)-c2(a1b3-a3b1)+c3(a1b2-a2b1)= a1(b2c3-b3c2)-a2(b3c1-b1c3)+a3(b1c2-b2c1)$

دا نتیجه د دیترمینات (۱۷ . ۲۳) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۹:

د وکتورنو$a=(0,1,2)$, $b=(2,0,1)$, $c=(1,1,0)$

غبرګهواریز - یا شپاټځل$[a,b,c]$ په لاندېډول دی:

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} 012 \\ 201 \\ 110 \end{vmatrix}=0(0-1.1)-1(0-1.1)+2(2.1-0)=5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۰:
وکتورونه($a=(1,2,3)$,$b=(3,6,1)$, $c=(0,0,1$ کومپلانار دې او شپاتځل یې په لاندې ډول دی(دا اوبیونه دې ګران لوستونکي او مینه وال په غاړه واخلي)

بیلګه ۱۷ . ۱۱ :
د تیترایدر(دریګوډي اړخیزه ، لاندې شکل دی) ډکی(حجم) دې وشمیرل شي
(ځیره. ۱۷ . ۱۲)

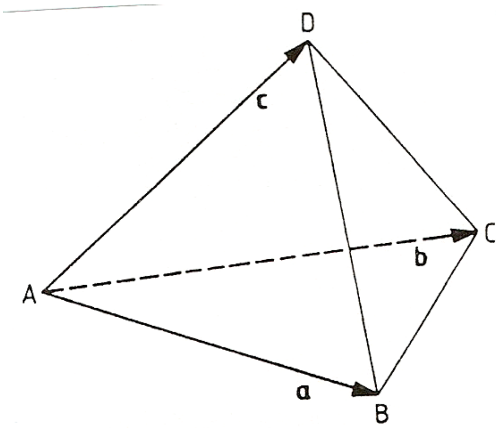


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو یا ګوډټکو سره
$A=(1,1,0)$, $B=(2,0,1)$
$C=(3,-1,2)$, $D=(1,0,3)$

یادونه : دا پورته په ختۀ کې ککرټکي دي، ځکه چې دا ځېره څلور ککرې لري
اوبیونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو څخه خور تیترید ۶/۱ برخه ده
$a=B-A=(1,2,0)$,$b=C-A=(2,1,0)$, $c=D-A=(0,1,2)$
دا تیترئیدر یو اهرام دی چی ډکی یا حجم یی ۳/۱ ځل بنسټیز هواره ځل جګوالیږد تیترائید جګوالی د شپات جګوالي سره مساوي دی او د دریګوډیهواره یی د شپات نیم د وکتورونو a , b , cکمیز یا منفي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix}110\\201\\012\end{vmatrix}=-5$$

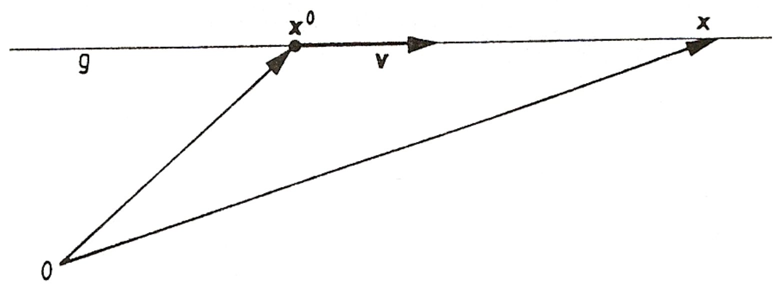
د کچکڼ لپاره مطلقه ارزښت نیول کیږي: V=(1/6).|[a,b,c]|=5/6

۱۷ . ۵ په شننیزه (تحلیلي) ځمککچ کی د وکتورونو کارونه

په دې برخه کی ځموږ هدف دئ چی وګورو چی د تحلیلي هندسی پرابلمونه او بیا په ځانګړي ډول تحلیلي هندسي په هوا کی وکتوري مطالعه) د ۱۶ -برخي سره په توپیر(څنګه کیږي۰

۱۷ . ۵ . ۱ د یوې کرښی وکتوریزه انځورونه

په فضا یا هوا کي د یوې کرښی ځای د یوه ټکي او لور له لاری یواځنی ټاکلی دئ. په کرښه gدې نښتی ټکی د ځاي وکتور x0 په مرسته (چی د کواوردینات سیستم د O څخه دا ټکی ښایي)، لور یي په وکتور V (څیرې۱۷ . ۱۳



څیره ۱۷ . ۱۳

که λ یو پارامتر وي چی د رییلګنونو ډیری کی ځغلي، نو د کرښی g یو په زړه پور ټکی x د وکتور زیاتون یا - جمع له لارې په لاندې فورم (بڼه) ښوول کیږي

$$x=x^{0}+\lambda.v,-\infty<\lambda<\infty;.....................(17,24)$$

د وکتور v په لور په ټکي x0 کی د کرښی g برابرون (پارامتر فورم)

که پارامتر λ په ریل ګنونو کی وځغلي نو x د کرښی ټولو ټکو کي یا د ټکو ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځغلي. د هر ټکي $x \in g$ لپاره یواځني یوه $\lambda \in R$ شته یا موجود دهوکتور مساوات (۱۷ ، ۲۴) لاندې درې سکالار برابرونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v; ....(17,25)$$

که کرښه g په دوه ټکو $x0,x^1$ ورکړ شوې وي، نو د لور وکتوریی دی $v=x^1-x^0$ او په دې ډول یی د کرښې برابرونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0); ....(17,26)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندې ټکو($x^1=(1,3,2), x0=(1,2,3$ ورکړ شوې کرښه د $v=x^1-x^0 = (0,1,-1)$

له امله په لاندې توګه لیکل کیږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1,2,3) + \lambda(0,1,-1)$$

دا لاس ته راوړنه یا نتیجه موږ ته لاندې درې سکالار برابرونونه په ګوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

دکرښی برابرونونو (۱۷ . ۲۴) پارامترفورم په هواره کی د کرښي ځانګړی حالت خوندي لري: $x,x0$ او v وکتورونه دي، هر یو د دوه کومپوننتو سره.

بیلګه ۱۷ . ۱۳ :

په یوې هوارې کي د یوې کرښي د مساواتو فورم:

$x = (1,2) + \lambda(1,-1)$ سکلار برابرونونونه په ګوته کوي. $x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda$

له دې څخه سرې کولی شي چې پارامتر λ له منځه یوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د $x1$ په ځاي x او د $x2$ په ځاي y ولیکو نو لاس ته راځي$y=-x+3$ د

کرښي د برابرونونو نورمال فورم (16 . 2 .) که غواړو چې معلومه کړو چې ایا ټکی x^1 په کرښه g پروت دی، نو باید وڅیړو چې کواوردینات یی برابرون (۱۷ . ۲۵) پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چې ایا دده لپاره یو د λ - ارزښت موجود دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۴ :

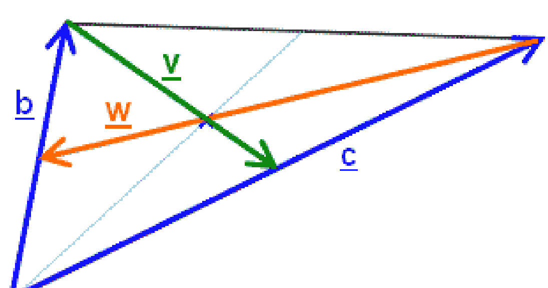
لاندې ټکي $1)...x^1=(-1,4,3), 2)...x^2(2,-2,1)$ په
کرښه $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,2,1)$ پراته دي که نه ؟

اوبیونه : ۱) د دې درې برابرونونو $-1=1-\lambda, 4=0+2\lambda, 3=1+\lambda$ له
جملې د دوهم څخه لاس ته راځي $\lambda=2$ او دا ارزښت لومړی او هم دریم مساوات ډکوي)
پوره کوي $-1=1-2, 3=1+2$ له دې امله ټکی x^1 په کرښه g پروت دی.
۲) ددې درې برابرونونو $2=1-\lambda, -2=0+2\lambda, 1=1+\lambda$ له دویم لرو $\lambda=-1$
دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مګر دریم مساوات نه: پس x^2 په کرښه g نه دی
پروت.

که د دوه کرښنو $g_1: x=x^1+\lambda v; g_2: x=x^2+\mu w$ غوځټکی xS ، موجود وي باید
د دواړه کرښنو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې باید باوري شي:

$$x_S=x^1+\lambda v=x^2+\mu w$$

دا وکتوربرابرون درې سکالار برابرونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه سړی
پارامتره $\mu \wedge \lambda$ شمیرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دریم مساوات پوره کړي، نو یو
پریټکی مخ ته شته، که ناپای زیات حلونه مخ ته پراته وي ، نو دواړه کرښنی یو په بل
پرتی دي.



بیلګه ۱۷ . ۱۵ : د لاندې کرښنو
غوځټکی دې پیدا شي :

$$g_1: x=(1,1,0)+\lambda(1,3,-2), g_2: x=(1,2,2)+\mu(-1,-2,4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل یا اوبیونه : غوښتکي باید دواړه برابرونونه پوره کړي::

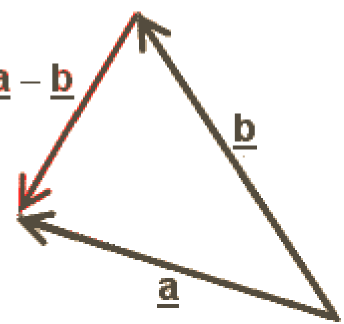
$$1+\lambda=1-\mu, 1+3\lambda=2-2\mu, -2\lambda=2+4\mu$$

د درې سکالار برابرونونو له لومړي مساوت څخه لرو $\lambda=-\mu$ ددې له مخې او له دوهم برابرون څخه لاس ته راځي : $\mu=-1$ نو لرو $\lambda=1$. په دې ډول دریم برابرون هم پوره کیږي د غوښتکي کواوردینات سیستم د کرښي g1 د $\lambda=1$ سره لاس ته راځي:

xs =(1,1,0)+1.(1,3,-2)=(2,4,-2).

۱۷ . ۵ . ۲ د هوارې یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هوارې E ځای په هوا کی په یوه ټکي x0 او دوه نا غبرګو وکتورونو v او w پواځنی ټاکلی دی. د وکتورونو v او w پیلټکي کیدی شي په x0 پراته ونیول شيیا پراته فرض شي) ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴) .



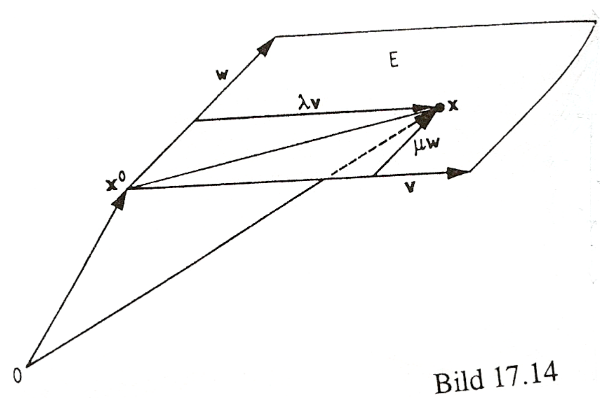


Bild 17.14

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $\lambda \wedge \eta$ پارامترونه وي چې یو له بل خپلواك د رییل ګنونو ډیري کی ځغلي، نو کیدی شي د هوارې E په خوښه ټکی x په لاندي ډول انځور شي $(17,27)$...................$x = x^0 + \lambda v + \mu w, -\infty < \lambda, \mu < \infty;$.

د هوارې E مساوات چی د x0 ټکي کی، له وکتورونو v,w غزیدلي (پارامترفورم)

هر جوړه ارښت $\lambda, \mu \in R$ یواځنی یو $x \in E$ ښایي. وکتوربرابرون (۱۷ . ۲۷) لاندې سکالاربرابرون ځرګندوي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda v_1 + \mu w_1, x_2 = x_2^0 + \lambda v_2 + \mu w_2, x_3 = x_3^0 + \lambda v_3 + \mu w_3; \ldots\ldots\ldots\ldots (17,28)$$

که چیرې هواره په دري ټکو $x0$, x^1 , x^2

چي په یوه کرښه نه دې پراته ورکړ شوي وي، نو کیدی شي چی د هوارې غزوونکي وکتورونه په لاندې ډول انځورشي: $v=x^1-x0$, $w=x^2-x0$ له دې سره د هوارې مساوات داسی دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) + \mu(x^2 - x_0); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17,29)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۶:

په دري ټکو $x0 = (-1,2,5), x^1 = (2,3,-6), x^2 = (1,-4,3)$ کې د هوارې E ورکړ شوي برارون د $v = x^1 - x0 = (3,1,-11)$, $w = x^2 - x0 = (2,-6,-2)$ له امله په لاندې ډول دي:

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w = (-1,2,5) + \lambda(3,1,-11) + \mu(2,-6,-2)$$

ددې نتیجی څخه لاندې سکالاربرابرون لاس ته راځي:

$$x_1 = -1 + 3\lambda + 2\mu, x_2 = 2 + \lambda - 6\mu, x_3 = 5 - 11\lambda - 2\mu$$

۱۷ . ۵ . ۳ :د هواروبرابرون یا- مساوات سکالارفورم(-بڼه)

یوه هواره د یوه ټکي x0 او یوه په هواره نیغ ولاړ وکتور n له پلوه یاله لارې هم یواځنی ټاکلی ده یا، چی عمودي یا نورمال وکتور (Normalvektor(یي بولي) ؟؟؟ ځیره شته ش . ۱۷ . ۱۵

په هواره E کی دې x یو په خوښه ټکی وي .نو دا له x0 و x ته بریدي وکتور x-x0 هم په دې هواره کی پروت دی او وکتورونه n او x-x0 یو په بل نیغ ولاړدي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

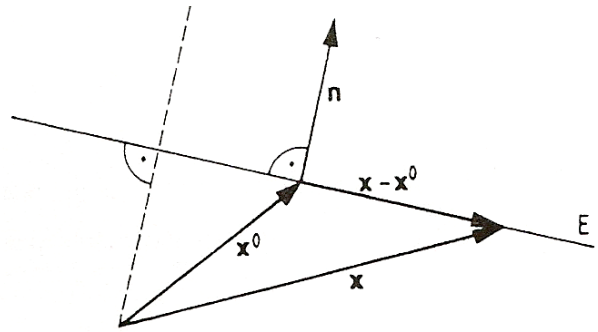


Bild 17.15

په یو بل نیغولاړو) اورتوگونال (وکتورونوڅخه جوړ شوي سکالارحُل صفر دی څیره (څ. ۱۷ . ۸ دې برتله شي) دا په دې مانا چی باوري کیږي :

n(x-x0)=0,nx=nx0= c (17 . 30)

دهواري برابرونونو سکالار فورم ، n- عمودوکتور، د هوارې x0 په ټکی.

بیلگه ۱۷ . ۱۷ :

د هوارې برابرون چی ټکی(x0 =(2,-1,5په پروت دی او په هغه وکتور(n=(2,-2,1 (نیغ)ولاړ دی

د c=nx0=(2-2,1).(2,-1,5)=4+2+5=11 له مخې په لاندې ډول دی:

(2,-2,1).x=11 <=> 2x1-2x2+x3=11.

د هوارې مساواتو پارامترفورم (۱۷ . ۲۷) په یوه سکالارفورم اړول بدلول (۱۷ . ۳۰) د پارامتر د له منځه وړلو له لارې لاس ته راځي.

بیلگه ۱۷ . ۱۸ :

د هوارې مساوات دې په پارامتر فورم وي:

$$x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$$

دا وکتور برابرون لاندې درې سکالار برابرونونه خوندي لري یا په بر کي لري یا ځایوي:

$$x_1 = 1+\mu, x_2 = -2+\lambda-\mu, x_3 = 4-\lambda+2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي: $\mu = x_1 - 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره دا نور دوه برابرونونه داسی دي

$$x_2 = -2+\lambda - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1+\lambda \wedge$$
$$x_3 = 4-\lambda + 2x_1 - 2 \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 2-\lambda \Leftrightarrow$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

د هوارې برابرونونو سکالار فورم: (-1,1,1)x=1

که غواړو چی څرگنده کړو چی ایا یو ټکی x1 په هواره E پروت دی چي برابرون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چی ددې کواوردینات (۱۷ . ۲۸) برابرون پوره کوي که نه (بیلگه ۱۷ ، ۱۵ : د کرښی مساواتوته ورته) . او یا سړی پارامترفورم په سکالارفورم بدلوي او څیړي چی د ټکي کواوردینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلگه ۱۷ . ۱۹ :

ایا ټکی(x^1=(2,-2,5 په هواره $E: x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$ پروت دی ؟

اوبیونه : : دلومړي دوه برابرونونو $2 = 1 + 0\lambda + \mu, -2 = -2 + \lambda - \mu, 5 = 4 - \lambda + 2\mu$

څخه لاس ته راځي $\lambda = 1 \wedge \mu = 1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابرون پوره کوي: 5=4-1+2.1 ، دا په دې مانا چي x1 په هواره E پروت دی. که د هوارې برابرون په سکالرفورم واړول شي: - (x1+x2+x3=1بیلگه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي (، نو د ټکي x^1 کواوردینات دې یواځي د x1,x2,x3لپاره ځاي په ځاي شي ، چی معلوم کړو چی x^1 په هواره E پروت دی : - 2+(-2)+5=1

د یوې هوارې: n.x=c:E او د یوې کرښی $g: x = x^0 + \lambda v$ ترمنځ غوڅټکی xs(که شته وي)(نو هم پهE پروت دی او هم په g .له دې امله د هوارې په برابرونونو کی د x لپاره $x^0 + \lambda v$ ځاي په ځاي کوو(بړدو) او په دې ډول یو برابرون د λلپاره لاس ته راځي.که دا برابرون یواځنی یو اوبی ولري نو غوڅټکی موجود دی ، که اوبی شته نه وي یا موجود نه وي نو کرښه g د هوارې E سره غبرگه ځغلي، که ناپاي ډیر ې اوبیونې شته وي نو کرښه g په هواره E پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۲۰ :

د کرښو $g: x = (1,0,1) + \lambda(-1,1,1)$ پروت ځاي یا موقعیت دي لاندې هوارو ته وټاکل شي:

$a).....x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, b)...2x_1 + x_2 + x_3 = 3, c)...2x_1 + x_2 + x_3 = 4$

اوبیونه : دا چې لټونکی غوڅټکی xsد کرښي برابرون پوره کوي نو باوري دي:

$x_1=1-\lambda, x_2=\lambda, x_3=1+\lambda$

a) $x_1+2x_2+3x_3= (1-\lambda) + 2\lambda+ 3 (1+\lambda) =4\lambda+4=-4, \lambda= -2$

$x_S = (1+2,-2 ,1-2)=(3,-2, -1)$

b) $2x_1+ x_2 + x_3= 2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=3$

لمدا λ په خوښه، gپه E پرته ده

c) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda +(1+\lambda)= 0.\lambda+3 = 4$

حل نه شته ، نوکرښه gد سطحې E سره غبرګه ځغلي.

ددوه سطح

$n^1.x = c1$: E1

او E2 هوارې: $n^2.x = c2$ غوڅکرښه دواړه برابرونونه پوره کوي(دا دوه برابرونونه دي، هر یو د درې نامعلومو x1, x2, x3 سره). دوه امکانات شته دي چې کرښه g (که شته وي) را پیدا کړی شو.

۱ – سړی یوه واریابله یا اوښتونې په خوښه وټاکي $x_i = \lambda$ (ازاد پارامتر)، نور دواړه $x_j, j \neq i$ له دواړو هوارمساواتو څخه په λ کې د کرښېزو افادو یا وېینو په څیر راپیدا کوي. او په دې ډول کرښېز مساوات لاس ته راځي.

۲ – سړي د کرښې دوه مختلف ځانګړي ټکي x^0 او x^1 راپیدا کوي او په دې ډول د کرښې g مساوات لاس ته راولي: $(x = x_0 + \lambda (x^1 - x_0)$.

بیلګه ۱ ۷ . ۲۱ :

د دوه هوارو E_1 او E_2 پریکرښه g غواړو پیدا کړو. هوارې دې وي :

$E_1 : x_1 - x_2 + x_3 = 3, \qquad E_2 : 2x_1 - x_2 -3x_3 = 0$

حل ۱): $x_1 = \lambda$ په خوښه

$E_1 : -x_2 + x_3 = 3 - \lambda , E_2 : -x_2 - 3x_3 = -2\lambda.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمون یا تفریق : $4x_3 = 3 + \lambda$,

په E_1 کی دې ځاي په ځاي شي :- $-x_2+3/4 + \lambda/4 = 3 - \lambda$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$

نو لاس ته راځي $x_1 =$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$, $x_3 = (1/4)\lambda + 3/4$

په وکتور لیکدود : $x = (0,-9/4, 3/4) + \lambda(1, 5/4, 1/4)$

همداسی (<=>) له $\tilde{\lambda} = (1/4)\lambda$ سره لرو

$x = (0,-9/4 , + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

حل(اوبی) ۲ : په E_1 او E_2 ځاي په ځاي کوو: $x_3 = 0$, پس لاس ته

راځي $x_1 = -3$, $x_2 = -6$, سره حل د لاندې $x_1 - x_2 = 3$, $2x_1 - x_2 = 0$

پس $x^0 = (-3, -6, 0)$ په هوار کې ځانګړې ټکی دی,که ولیکو $x_2 = 0$ پس

له $x_1 = 9/5$, $x_3 = 6/5$: لاندې حل لرو $x_1 + x_2 = 3$, $2x_2 - 3x_3 = 0$ او په دې ډول د ه

کربښې g دوم ټکی : $x^1 = (9/5, 0, 6/5)$

په ټکو x^1 ، x^0 د کربښې g مساوات (مقایسه ۱۷ . ۲۶) داسې دي

$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) = (-3, -6, 0) + \lambda(24/5, 6, 6/5)$

<=> د $\tilde{\lambda} = (6/5)\lambda$ سره :

$x = (-3,6,0) + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

دا په حل (اوبی) ۱ کی پیداشوې کربښې g یوبل ډول انځوردي، ځکه چی د لورو

وکتورونه یو بل ته ورته دي. : $v = (4, 5, 1)$ او د $\tilde{\lambda} = -3/4$ لپاره په حل ۱ کې د

کربښې ټکی د حل ۲ x^0 دا ټکی لاس ته راځي

$x = (0, -9/4, 3/4) - (3/4)(4, 5, 1) = (-3, -6, 0)$

تمرینونه؛

۱ – وکتورونه $c = (4,-1,7)$ $b = (-3,-5,0)$, $a = (1,0,-2)$, ورکړ شوي دي.

جوړکړی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-a$, $a+b$, $a-c$, $2a - b + 3c$!

۲ – وکتور a چې له ټکي $x^1 = (3,-5,7)$ څخه د ټکي $x^2 = (-2,4,-1)$ لور ته لاربښودوي، څنګه دی؟

۳ – وکتور $a = (3,21)$ دې پیلټکي $x^1 = (1,2,3)$ ولري. وښیې چې پایټکی x^2 یې کوم کواوردینات لري؟

۴ – لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟

$a = (4,-3,12)$, $b = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $c = (3,3,3,)$?

۵ – وکتورونو $a = (2,-1,3)$, $b = 7,0,0)$ پورې اړوند یا مربوط یوونوکتورنه کومې کواوردیناتی لري؟

۶ – د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اورتوګونالیتي دې وښول شي ؟

$a= (1,2,3)$, $b = (3,0,-1)$!

۷ – دلته دې a_1 , b_1 او c_1 څومره لوي وي، چې وکتورونه

$a = (a_1,3,2)$, $b = (-4,b_1,2)$, $c = (3,-2,c_1)$

په وکتور $d = (2,1,-3)$ (نیغ) ولاړ وي؟

۸ – د

a) $a = (-2/3, 1/2, 5/4)$, $b = (3\ 74,-1/3, 2/3)$,

b) $a = e^1 - e^2 + e^3$, $b= 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره دې a . b وشمیرل شي!

۹ – وکتورونه $a = (3,-4,12)$ او $b = (-6,8,0)$ یو له بل سره کوم کونج جوړوي!

۱۰ – د ګوړ – یاکونجټکو

$A = (-2,0,3)$, $B =(-6,4,-1)$, $C(4, -1,2)$

سره، د دریګوړي کونجونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۱ – وښايي چې وکتورونه $\mathbf{a} = (2,4,-6)$ او $\mathbf{b} = (-1,-2,3)$ يو بل ته کولاينې دي!

۱۲ – د

a) $\mathbf{a} = (-4,-1,3), \quad \mathbf{b} = (5,-2,7)$

b) $\mathbf{a} = e - e^2 + 2e^3, \quad \mathbf{b} = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ وشميرئ!

۱۳ – د دريګوټي هواره څومره لويه ده، چې کونجونه يې په لاندې توګه راکړ شوي وي

$A = (-2,0,3), \quad B = (-6,4,-1), \quad C = (4,-1,2)$?

۱۴ – د هغه غبرګ اړخيز هواره څومره لويه ده چې له وکتورونو

$\mathbf{a} = (-3,2,1), \quad \mathbf{b} = (5,-3,2)$

څخه غزيدلي وي ؟

۱۵ – د وکتورونو

$\mathbf{a} = (-2,1,-3), \quad \mathbf{b} = (1,-3,6), \quad \mathbf{c} = (1,2,-3)$

څخه غزولشوې غبرګهوارې کوم ډکی يا حجم لري؟

دا نتيجه هندسي روښانه کړئ!

۱۶ – څلورګوډي د لاندې ګوډونو (لارښوونه: څلور دا ړخي [د ا د ا هوار تشکلوي)]

$P_1(2,1,4), \quad P_2(0,-1,2), \quad P_3(-3,6,4), \quad P_4(2,2,2)$

سره کوم ډکی ياحجم لري؟

۲۳ – د لاندې هوارو

الف) E_1 چې له ټکي $\mathbf{x}^o = (0,1,2)$ تيريږي او د لاندې وکتورونو

لور لري: $\mathbf{v} = (0,2,1), \mathbf{w} = (2.3,-5)$

ب) E_2 چې له ټکو $\mathbf{x}^1 = (2,-3,4)$, $\mathbf{x}^o = (o,1,2)$ او

ټکي $\mathbf{x}^2 = (7,-9,-3)$ څخه تيريږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) E_3 چې د نورمال وکتور $n = (0,2,1)$ سره
له ټکي $x^o = (0,.1.2)$ تیریږي، مساوات څنګه دي؟

۲۴ – له تمرینو۲۳ الف او ب څخه د هوارې مساواتو سکالارینه څنګه ده؟

۲۵ – ودی ښیېل شي چې ایا ټکي $x^1 = (1.3.-6)$ همداسی $x^2 = (5,-5,4)$ په هواره

a) E_1: $\mathbf{x} = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0)$,
b) E_2 : $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ – د کرښو

a) g_1: $\mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$,
b) g_2: $\mathbf{x} = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1)$,
c) g_3: $\mathbf{x} = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتخاي د هوارې $E: \ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$ سره وټاکئ!

۲۷ – د هوارو

الف) $E_1 : 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$ او $E_2 : -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$

ب) $E_1 \ -5x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 4$ او $E_2 \ : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$

غوڅکرښه دې راپیدا شي !

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ پرلپسی او لړۍ پرلپسی (لنډ: لړۍ) (sequences and series)

یا ترادف او د ترادف سلسله

۱۸ . ۱ پیل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه یوه یوناني جنګسالار(نوم یې راڅخه هیر شوی، ددې بخښنه غواړم) د خپلو عسکرو څخه وپوښتل چې ، »دا د ده له مخه کیشپ چې سل متره یې ترمنځ واټن دی، کله نیولی شي، که دی له دې کیشپ سل ځله تیز ولاړشي؟« دې ته طبعاً د لوستونکو فکر شته چې وخت باید په نظر کې نه وي نیولشوی . ځوابولو ته دې ګران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

موږ د دې برخې ځیرنی سره لوړې شمیرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، ځکه چې موږ د رییل اعدادو یا - ګڼونو تعریف سره سم چې هلته مو د اینتروالبندولو باندې خبرې کړي او په دې توګه مو عدد تعریف کړی دی، د شمیرپوهني لوړه ځیرنه وه. همدا ډول د لاینیزو برابرونونو یا - مساواتو شمیرل او داسی نورې پوره دلوړې شمیرپوهني بیلګي لرو، خو دلته دا په ګوته کوو چې له دې ځایه د شمیرپوهنی هغه ځاي پیل کیږي چې شمیرپوهنیز فکر مو په پراخه توګه په کار اچولو ته راهڅوي او له دې امله مو د وړاند نیونه(لنډ: نیونه) یا فرضیه اړیینه وه چې دا برخه د لوړو شمیرپوهنو پیل په ځیر وښایو یا وبولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځایه هغه اعداد چی موږ ورسره مخ کیږو، ځموږ لپاره د ځیرنی کیږي چی هغوي یوې پولی(حدLimit) ته هڅه کوي. دا قوانین هم پوره ځیرل کیږي چی وروسته بیا په دیفرنځیال شمیرنه کی کار اخستلو لپاره ترې تیریدنه ناشونی ده.

په راتلونکی برخه کی لاندې کنځیپتونه (خیال، چې یو څه څنګه وشي) ځموږ لپاره د هڅی وړ ګرځي

۱ - د کلیمی لیدوړه یا په خیال کی لرودونکی پیلونه

۲ - د لیدوړوالي یا فکر کی راوړیدونکی د ټولو په غوره شننه (تحلیل)

۳ - د شمیرپوهنیزو پیژندو یا تعریفونو ټیکوالی،

۴ - هغو وړاندنیونو یافرضیو ته پاملرنه چی د شمیرپوهنی قوانینو د باوریتوب (اعتبار)لپاره وي،

۵ - د پرلپسی شننه، چی پوله ارزښت یی په پام کي ونه نیول شي،

۶ - د ګڼو دندو حل ، په ځانګړي توګه د دیفرنځیالولو او اینتګرالولو

۷ - بالاخره د پرلپسی لړی چی په لنډه توګه ی لړی بولو ځیرنه .

دلته هم د دې موضوع د پوره ځیړلو ستونځي په کتاب کی د ځاي کموالي له امله شته. داچی دا برخه یوه بنسټیزه برخه ده، نو پیل یی د یوې ساده او پوهوړې بیلګې له لارې کوو چي ماته خورا په زړه پورې هم ښکاریږي.

۱۸ . ۲ دګڼونو پرلپسی (لنډ: پرلپسی) یا د اعدادو ترادف کلمه

پیلبیلګه :

پاي جمعه یا - زیاتون $s = 3+7+11+...+395+399$ څنګه ټاکل کیدی شي؟
کیدی شي چي دا د پوره ستونځو سره د یوګونو ګڼونو یو د بل سره جمعې یا یو په بل زیاتون له لارې وشمیرل شي ترڅو چي د دې اعدادو د ترادف (ګڼونپرلپسی) قانونیت پیداشوی وي:
هر دوه ګاونډي توکي یوله بله په۴ + توپیر کیږي یعنی کمون یا کمښت یي ۴ + دی.
کیدی شي چی دا کارونه (استعمال) په یوه شکلی او سپماوړ لاره هم مخ ته لاړه شی او دا په لاندې ډول :
که لومړی (۳) او اخر(۳۹۹) ، دویم (۷) او له اخر دویم (۳۹۵) دریم (۱۱) او له اخر دریم (۳۹۱) د جمعې اجزا یا زیاتوني او داسی نور سره زیات شي. دا په

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې ټولو حالتونو کی همغه زیاتون ارزښت یا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي یعنی ۴۰۲ .
اوس دې د یوګونو د جمعې اعزاوو د جمعې ارزښت(زیاتوونو زیاتون ارزښت) راپیداشي:
دویم غړی له لومړی غړي داسی لاس ته راځي چی لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او همداسی ورپسی تر n غړي پورې چی دلته و (n-1) ته 4 ور زیاتیږي ، یعنې:
.n = (n-1)+4:
که له دې لاس ته راوړنی لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنی3- 399 = 396 ، نو ددې کمون سره د (n-1) دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچی 99 = 396:4 دي، نو باید n او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید 100 ګڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توګه 2 زیاتووني یا د جمعې اجزاوې سره زیات شي، نو باید له دې سره 100:2 = 50 یعني 50 -ځله زیات 402 ترې لاس ته راشي« له دې امله د ټولو رامخ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی:
.20100 = 402 . 50

دا لوستونکو ته په روځنی ژوند کی هم څرګنده ده لکه د یو ټولګي د زدکوونکو په ګڼه (نمره) ترتیب، یا په یوه سیالۍ یا مسابقه کی د بریالیو ترتیب او داسی نورموجود دي، موږ کوښښ کوو چی دا مسئلې د شمیرپوهنی له لارې وڅیړو او وګورو چی په شمیرپوهنه کی ترادف یا پرلپسی څه شی دي.
یادونه: موږ له دې وروسته د رادف په ځا یواځې ترادف لیکو.

موږ طبیعي اعداد یا ـ ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ..... لرو (دلته ټکي ټکي دا مانا لري چی دا پرلپسی ناپای اوږدیږي)
که چیرې دا هر پیدایښتي یا طبعي ګڼ په یواځنی یو ریبل ګڼ ترتیب شي یا یواځنی ترتیب ریبل ګڼ وښایي یعنی $a_1, a_2, a_3, ...$ ، نو د لته د طبعي اعدادو او حقیقي اعدادوتر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچی دلته هر طبیعي عدد n په یواځنی حقیقي عدد a_n ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چی د فنکشن پیژندډېرۍ (تعریفډیرۍ یا تعریفستې) دطبعي اعدادو ډیرۍ N ده او ارزښتډیرۍ یې د حقیقي اعدادو ډیرۍ R ده.

دلته د پرلپسی هر توکی an د ځای ګڼې (نمرې) n په بنسټ یواځنی ټاکلی، چی n ته په مسلکي نړیواله پیژندل شوې ژبه ایندکس Index (زیات یې Indices)، چې مانا یې : پیژند نخښه ده ، وایي. (Index پیژند دخښه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند تعریف) :۱۸ . ۱ الف :

د پرلپسی غړو $a_1, a_2, a_3, ...a_k$ د یو ترتیب قانونیت یا قانونمندي $a_n = a(n)$ لاس ته راځي ، که دnلپاره پرلپسی طبعي اعداد1, 2,3 ...k,ځای په ځای شي.

پرلپسی کې a_1 د پرلپسی پیل غړی بلل کیږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بیلګی

(دا ورپسې مخ کې بیلګې نورې هم روښانه دي)

$$I-;...a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4;....; a_{10} = 100,..; a_k = k^2;..$$

{چیرته چې a_n یو څلوری (مربع) ګڼ دی}=D=N;W a_n |

$$2-\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2};...a_{10} = \frac{1}{10};...\{a_k\} = \{\frac{1}{k}\}$$

$$3- \quad \{a_n\}=\{(-1)\} \Rightarrow a_n = (-1)^n; a_1 = -1; a_2 = 1;$$
$$a_3 = -1,...a_{17} = -1;...a_{22} = 1$$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدلیدونکی Altrnating بلل کیږي

$$4-\{a_n\} = \{3+\frac{1}{n}\}; 4, 3+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, 3+\frac{1}{4},...a_k = 3+\frac{1}{k},..., a_n = 3+\frac{1}{n}$$

د ترتیب – یا نظمقاعدې څخه مختلفی ګڼونپرلپسی یا د اعدادو پرلپسې منځ ته راځي ۰ دا مو په لنډه توګه پرلپسی ونومولی. چې پیژند یی یو ځل بیا دلته په بل ډول رالنډوو.

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

که هر یو طبیعي ګڼ..... n=1,2,3,4,5 په یوه یو یوائځني رییل ګن باندې ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب ګڼونه .... $a_1, a_2, a_3, ...$ یوه د ګڼونو پرلپسی جوړوي، چې لنډ پرلپسی یی نوموو او ددې لپاره سړی داسی لیکي: $\{a_n\}$.

دې a_n ته د پرلپسې $\{a_n\}$ n-م غړی ویل کیږي.

سړی کړی شي چې د رییلګڼونو یا اعدادو د نمره کولو یا ګڼې لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعني:
a-1,a0,a1,a2.....یا او a2,a3,a4.... یا....a0,a1,a2

ګورو چې د پرلپسی لیکلو لپاره ځانګړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا بسیا کوي چې د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لومړي څو غړي ولیکل شي

بیلګه ۱۸. ۱ : د بیلګي په توګه لیکو:

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, ...$$

او د طبعي اعدادو پرلپسی موخه یا مطلب دی، د جوړولوقانون an = n سره ، نو

$$\{a_n\} = \{n\}$$

$\{an\}:1,4,9,16,25...=> = \{a_n\} = \{n^2\}$

دا په دې معنا چې(<=)

{an}:2,3/2,4/3,5/4,6/5 ....=>

یا په دې مانا چې{an}={(n+1)/n}

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6 ...=>

په دې مانا چې $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,.. =>

یانې په دې مانا {an}={(n+1)/n}

پیلبیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دشمیرپوهنی یوه ښوونکی لپاره په ښونځي کی یو ځاي تش یا خالي دئ. ددې ځاي لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کاندید کړی. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چی اوبی یا حل یی کړي:

پنځه ګڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور ګڼونه باید داسی ور واچوی چی دا ګڼونپرلپسی موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخودیزه شي.

دواړه کاندیدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي ۰

کاندید الف داسی فکر کوي ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ کاندید ب داسی فکر کوي

لومړی ګڼ ۱ د۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ۰ لومړی ګڼ له ۲ څخه په ۱ کوچنی دئ: 1 - 2

دویم ګڼ لاس ته راځي، که د لومړي ۰۰۰۰۰۰۰ دوم ګڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دئ :

عدد دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : ۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^2 - 1 = 4 - 1$

$2.1 + 1 = 3$

دریم ګڼ لاس ته راځي که د دوم ۰۰۰۰۰۰۰۰ دریم ګڼ له ۸ په ۱ کوچنی دئ:

ګڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$2^3-1=8-1$

$2.3 + 1 = 7$

۶- ام ګڼ لاس ته راځي که د پنځم۰۰۰۰۰ ۶ -ام ګڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دئ :

ګڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو: ۰۰۰۰ $64 - 1 = 2^6 - 1 = 63$

$2.31 + 1 = 63$

اوم ګڼ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ اوم ګڼ دئ: $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

$2.63 + 1 = 127$

ګڼ ۸ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ګڼ ۸ دئ

$2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$ $2.127 - 1 = 255$...........)

د شمرپوهنی له مخی دا پنځه له مخه ورکړشوي ګڼونه د یوې پرلپسی لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له

a1 , a2 , a3 , a4 , a5,

سره ښایو.

اوس زموږ په دې بیلګه کی داسی لرو: a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31

که وغوښتل شي چی د دې پرلپسی نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوې قاعده یا لاس ته راوړې قاعده به ورکړي، لکه څنګه چی یو په بل پسی راتلونکی توکی د پخوانی او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکی په لاس راځي.ددې تثبیت یا ازمویني وظیفی شمیرپوهنیزه فرمولبندې په لاندې ډول ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونپرلپسی یا د اعدادو ترادف دې د a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31 سره ورکړ شوي وي. يوجوړښتقانون يا قانونمندي او توکي a6,a7,a8 وټاکی.
د دواړو کاندیدانو د اوبيوني -یا حللارې کیدی شي چی په لاندې توګه انځور شي:

الف	ب
$a_1 = 1$	$a_1 = 2-1$
$= 2.1+1=3a_2$	$a_2 = 4-1=2^{2-1}=3$
$a_3 = 2.3+1 = 7$	$a_3 = 8-1 = 2^3-1 = 7$
.	..
.	$a_6 = 2^6-1 = 63$
$a_6 = 2.31+1 = 63$	

په تولیزه (عمومی) توګه لاس ته راځي

k-م غړی $(k \in N)$ — k -م غړی $(k \in N \wedge k \geq 2)$
په کوم کې چې .... په کوم کې چې
د(k-1)- م غړي دوه برابره ته 1 زیات شي ..... 1 له $a_k = 2^k$ کم شي

$a_k = 2.a_{k-1}+1$ — $a_k = 2^k - 1$

دواړو کاندیدانو پرابلم سم حل یا اوبی کړ. کله چې د پرلپسی ۲۰ - م غړي پوښتنه وشوه ، نو کاندید ب په کته کی دی . ولی؟
دواړه کاندیدان کولی شي چې د پرلپسی هر په خوښه توکی پیداکړي، له دې امله دوي دا پرلپسی یواځنی وټاکله. کاندید الف دا پرلپسی داسی حل کوي چی تل باید له مخه غړي څخه ورپسی توکی لاس ته راوړي، یعني $a_k = 2.a_{k-1}+1$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا باید هر د پرلپسی د مخه توکی وپیژني. دې ډول شمیرلو ته د پرلپسی رکورزیو(recursive لاتین، له recure په ښ ځغاسته) انځورونه وایی . مګر ب کاندید دا خورا ساده او زر شمیرلی شي، دی چې کوم توکي غواړي پیدا کړي، هغه سملاسي لاس ته راوړی شي یعني $a_k = 2^k - 1$
دې ډول ښوونلار ته ایکسپلیځیت explizite (لاتین خورول، روښانوول) یعنی روښانه انځورونه وایي.
د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کار وي:
د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشمیری ، رکورسیو او ایکسپلیځیت. یانی د الف او ب په ځیر.

بیلګه:
یوه پرلپسی د a1 = 5 او $a_{k+1} = a_k{}^2 + 1$ سره ورکړ شوې. ددې پرلپسی لومړنی پنځه توکي وشمیری.
حل:

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$
$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$
$$a_4 = a_3^1 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلګه :
یوه پرلپسی د a1 = 1 او $a_{k+2} = a_{k+1}.a_k$ سره ورکړ شوې ده.
ددې پرلپسی لمړني پنځه غړي وشمیری .
اوبښونه:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = a_2.a_1 = 2.1 = 2$$
$$a_4 = a_3 . a_2 = 2.2=4$$
$$a_5=a_4.a_3 = 4.2=8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې:

د هرې لاندنۍ پرلپسی لمړني ۱۰ غړي وشميرۍ پرلپسې رکورزيو ورکړ شوې

a) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$

b) $a_1 = 0,\ a_{k+1} = a_k^2 + 1$

c) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + 1$

d) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + 1$

e) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$

f) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$

g) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{k+2} = a_{k+1}^2 : a_k$

h) $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_{k+2} = a_k : a_{k+1}$

بیلګه :

یوه پرلپسی د $a_k=k^2/(k+1)$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی لومړني پنځه توکي وشميرۍ

اوبی:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3} \qquad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5} \qquad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

بیلګه :

پرلپسی د $a_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی ۳ -م، ۸ -م ۱۵ -م او ۲۰ -م توکي وشميرۍ

اوبی یا حل:

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 1}{3} = 0$$

$$a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = 0$$

$$a_{20} = \frac{(-1)^{20} + 1}{20} = \frac{1}{10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنی :
د لاندې پرلپسیو لومړني پنځه توکي ، ۲۰ -م او ۴۵ –م توکي وشمیری

$$a)a_k = 2k+1; b)a_k = k^2+k; c)a_k = \frac{k^2+1}{k+1};$$

$$d)a_k = \frac{k^2-1}{k+1}; e)a_k = (-\frac{1}{10})^{k-1}; f)a_k = 1-(1/2)^k;$$

$$g)a_k = 1+(-1/2)^k; h)a_k = 1.2.3....k$$

په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی د یوې پرلپسی د گراف انځورونه لاس ته راوړو، که هر توکی د x -کواوردینات باندې د پرلپسی هر توکی د توکي نمرې kسره کیښول شي او د y- کواوردینات باندې هر غړی د غړې د نمرې ak سره و کښل شي

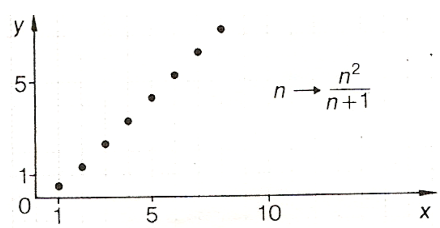


Bild 4

پوښتنی :
د لاندې پرلپسیو گراف په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی وکاږی.
له دې ځایه وروسته بیا پیل دئ

a) $a_k = \frac{5k}{k+2}$ b) $a_k = 3k+2$ c) $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{12}{k}$

d) $a_k = \sin\frac{k\pi}{2}$ e) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{k+1} = 1-2a_k$ f) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$

۱۸ . ۲ . ۱ یوغږیزې یا مونوتونی پرلپسی

بیلګه : د غړو ak = 2k - 1
(ما کله کله توکی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسی کې یو غړی د پرلپسی غړی ،دی او د یوې ډیری یو د هغې ډیری توکی دی، دې ته به د ګرابو لوستونکو پام وي)
سره پرلپسی هر توکی د مخته تیرشوي توکي لوي دئ . دا باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a_{k+1} > a_k$ د ټولو $k \in N$ لپاه

حل یا ثبوت :

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\
&= 2.2^k - 1 \\
&= 2^k + 2^k - 1 \\
&= 2^k + (2^2 - 1) \\
&= 2^k + a_k \\
&> a_k
\end{aligned}
$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف:

یوه پرلپسی(strictly monotonic increasing)
په کلکه – یا کره مونوتون جګیدونکی ده یا کره مونوتون جګیږي، که دا لاندې باور ولري :

د ټولو $k \in N$ لپاره $ak+1> ak$

که د یوې پرلپسی لپاره باوري وي

د ټولو $k \in N^*$ لپاره $ak+1 \geq ak$

نو دلته د مونوتون جګیدونکی monotonic increasingپرلپسی څخه غږیږو

بیلګه :

د پرلپسی د توکو

$ak = 10 - 4k$

سره هر غړی د مخ ته تیر غړي څخه کوچنی دی.

لرو:

$ak+1 < ak$ د ټولو $k \in N^*$ لپاره

اوبنونه::

$$
\begin{aligned}
ak+1 &= 10 - 4(k+1) \\
&= 10 - 4k - 4
\end{aligned}
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$=(10-4k)-4$
$= ak - 4$
$< ak$

پیژند(تعریف) ۱۸ . ۳ :
یوه پرلپسی په کلکه مونوتونتیټېدونکی یا - لویدونکی strictlymonotonic decreasingده، که لاندې باور ولري:
د ټولو $k \in N$ لپاره $ak < ak+1$
که په یوه پرلپسی کي باور ولري(په پورته کي او همداسي که ورپسي داسي څه راشي کا د ان توکی دئ)
د ټولو $k \in N$ لپاره $a1 \leq ak+1$
نو دلته د یوغړیز-یا موتون لویدونکی- یا مونوتون ټيټېدونکی monotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:
د یوې پرلپسي دوه ګاونډیو غړو توپیر یا کمون یاکمښت ak+1 - ak، کوم شرطونه باید پوره کړي، چی دا لاندې صدق ولري
الف) کلکه مونوتون جګیدونکی وي
ب) کلکه مونوتون ټيټېدونکي یا –لویدونکې وي
پ) مونوتون جګیږي
ت) مونوتون لویږي؟
ددې دندې د اوبیونې په مرسته کیدی شي، چی د توکي $aK=(k+1)/(k+2)$سره د پرلپسی مونوتونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$a_{k+1}-a_k=\frac{(k+1)+1}{(k+1)+2}-\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+2}{k+3}-\frac{k+1}{k+2}$$
$$=\frac{(k+2)^2-(k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)}=\frac{(k^2+4k+4)-(k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{(k+3)(k+2)}>0 \quad k \in N^*$$

له $ak+1-ak>0$ همداسی(<=) $(ak+1)>ak$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $k \in N*$ لپاره لاس ته راځي، چې ورکړ شوې پرلپسی په کلکه مونوتون جګیږي.

۱۸ . ۲ . ۲ اریتمیتیکي پرلپسی

د پرلپسی ..... 14;11;8;5;2 هرغړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دی.
ددې پرلپسی لپاره ورکړی
الف(یوه رکورزیف انځورونه
ب) (یوه اکسپلیڅیت انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډیرې پاملرني ارزښت لري، په دې ډول چې د دوه په خوښه ګاونډیو غړو ak او ak+1 ترمنځ یو ثابت (تل همغه) بلواك یا تابع موجود دی
غواړو چې دداسی دوه مهمو پرلپسی تیپونه (ډولونه ، رقمونه) په ځانګړې توګه څرګند راوباسو یا بهتره تر څیړنی لاندې ونیسو:

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۴ :
په یوه اریتمیتیکي- یا ګنونشمیرنیزې پرلپسي یالنډ: شمیرنیزې پرلپسی کي د درې توکو منځنی توکی د دواړو دباندنیو توکو اریتمیتیکي منځ دی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په یوې ځمککچیزې لپسی(ټاکونی یا پیژند وروسته راځي) کی د درې یو په بل پسی توکو منځ غړی د دوو نورو دباندنیو غړو ځمککچیز یا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

لومړی اریتمیتیکی یا شمیرنیزه پرلپسی څیړو:
غوښتنه(ثبوت): یوه پرلپسی ورکړی، چې لومړی توکی یي ۵ او هر ورپسی راتلونکی توکی یی له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي
الف) ددې پرلپسی لومړي پنځه توکي وشمیری
ب) د پرلپسی رکورزیف انځورونه ورکړی
پ) د پرلپسی اکسپلیڅیت انځورونه وکړی
ت) د پرلپسی ۲۰ -م (۲۵ ، ۳۵،۵۰ ، ۱۰۰) توکي وشمیری.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۵ :

یوه پرلپسی an اریتمیتیکي پرلپسی بلل کیږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون یاکمښت تل ثابت یا همغه وي: $a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d$

بیلګې:

۱ - لاندنی پرلپسي ...;2;5,8;11;14;...;29;32;35
یوه اریتمیتیکي Arithmeticپرلپسی ده چی لومړی توکی یی a1 = 2
او ثابت یا همغه کمون یا کمښت یا فرق یی d = 3 دی.
۲ - دا پرلپسی ...;10 ; 1- , 12- , 23- ,34- اریتمیتیکي پرله پسی ده چی لومړی توکی یي a1=10 دی او d=-11 ده

که په هر پل(قدم) کی فنکشن $n \in N$; n—>an په همغی زیاته ووني d زیاتیږي یا همداسی کمیږي d=0 (لپاره ثابت دی) نو باید اریتمیتیکي پرلپسی یو لاینیز فنکشن(لاینیز بلواك) وي (D = N) د d په جګوالي . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه یا فکر لاس ته اوړنه ده:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1).d = a_1 + d.n - d$$
$$f(n) = d.n + (a_1 - d)$$

د لاینیز فنکشن جګوالی d دی او ثابت یا همغه توکی a1 -d نومیږي(یادیږي یا بلل کیږي)
دلته an=2n+1 دلاینیز فنکشن په څیر دی، د d=2 په جګیدو او دy - محورغوڅی a1-d=1

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د پرلپسی د هر توکي د شمیرلو امکانات ورکړ شوي دي:

تعریف ۱۸ . ۶ :

په اریتمیتیکي- یا شمیریزه پرلپسی کی n- م توکی د قاعدې له مخي داسي ورکړ شوی:

$a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-1).d$

بیلګی:

۱ - اریتمیتکي پرلپسی ... 53 , 2,19,36 ورکړ شوې.
غوښتونکي a_{20} ده.
داسی لرو: $a_1=2,d=17,n=20$
نو $a_n=a_1+(n-1).d$ ⇔ $a_{20}=2+19.17=325$
۲ - ورکړ شوې دې وي
$a_1 = -o,5$ او $a_{10} = -44,5$
غوښتونکې d ده:
$a_n=a_1+(n-1).d<=>(a_n-a_1)/(n-1)=d =>$
$d=(-44,5+0,5)/(10-1)=-44 /9$

۱۸ . ۲ . ۳ځمککچیزې – یا هندسي پرلپسی

اوس غواړو هغه د مخه ویل شوی ،د یوه ثابت ((تل) همغه ارزښتیز) فنکشن سره، د پرلپسی ۲ -م تیپ د دوه غږو ترمنځ تر څیړنی ونیسو

پیلبیلګه :

یو هوښیار زدکړی غواړي په رسختی کی یوه میاشت کار وکړي(۲۰ د کار ورځی(.
دیَ کاورکوونکی ته وایي، چی دیَ ارزانه کار ورته کوي او لاندې وړاندیز ورته مخ ته کوی » د لمړی ورځي معاش دې 0,05 ډالره وي د دویمی دې دوه ځله د دریمی ورځی د دویمی ورځي دوه ځله څلورمه ورځ د دریمی ورځی دوه ځله او داسي نور،
یعنی لمړی ورځ که 0,05 وي نو دومه ورځ 0,10، دریمه ورځ 0,20 او څلورمه ورځ 0,40 ډالره معاش کیږی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : د

الف) د ۱ –می یا لومړۍ ورځی
ب) د ۱۵ - می ورځی
پ) د ۲۰ - می ورځی
معاش څومره کیږي. اندازه ګڼ(عدد) که په ډالرو وشمیرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:

0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,......

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره
الف) رکورزیف انځورونه
ب) اکسپلیڅیت انځورونه ورکړی

پیژند ۱۸ . ۷:

(ځمککچیزې یا هندسی پرلپسی) یوه پرلپسی an هندسي بلل کیږي، که د دوه یوبل پسی غړو ویش ثابت((تل) همغه) q وي:
یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چی لومړی غړی $a_1 \neq 0$ وي اود همغه ګڼ یعنی ثابت ګڼ q سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمککچیزه یا هندسي پرلپسی بلل کیږي.

$$n \in N; q \in \{R\} \setminus \{0\}$$ د ټولو $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q; a_{n+1} = a_n.q$$ لپاره

یو ځل بیا یوځای +d +d +d +d
اریتمیتیکي پرلپسی ...a5 a4 a3 a2 a1
هندسي پرله پسی..... a5 a4 a3 a2 a1
.q .q .q . q

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسي پرلپسی دوهم غړی دلومړي غړي سره د q ځل یا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غړو لپاره باوري دي. له دې امله هندسی پرلپسي ‹—— n anاکسپونینشل فنکشن یا د جګګڼ بلواک ښايي چی q د بنسټ په توګه لري:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1.q$$

$$a_3 = a_2.q = a_1q^2$$

$$a_4 = a_3.q = a_1.q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

$$f(n) = a_1.q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کی n- م توکی د لاندې قاعدې له مخي شمیرل کیږي

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

بیلګی:

1 - a1=3 , q=2 ,n=15 => $a_{15} = 3.2^{14} = 29152$

2 - a1=19,q=1,01,n=100 ;

= 50,8826363919.1,o1^{99} a100=

جمله :

یوه ځمککچیزه پرلپسی د زیاتیز یا مثبت پیلتوکي سره د $1 < q$ لپاره کلك مونوتون جګیدونکی ده د $0<q<1$ لپاره کلك مونوتون لویدونکی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه :

د لاندې پرلپسیو ۱۰ لومړني غړي وشمیری

a) $a_k = \frac{k-2}{k+2}$ b) $a_k = \sin\frac{k \cdot \pi}{6}$ c) $a_k = \frac{1}{2}[1+(-1)^k]$

d) $a_k = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^k$ e) $a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ f) $a_k = \cos\frac{k \cdot \pi}{2}$

g) $a_k = k^k$ h) $a_k = (-1)^{k-1} \cdot k^2$

i) $a_1 = 3; \quad a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{4}{a_k}\right)$ k) $a_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1} \cdot a_k}$

l) $a_1 = 3; \quad a_{2n} = a_{2n-1} - 3; \quad a_{2n+1} = a_{2n} + 4 \; (n \in \mathbb{N}^*)$

m) $a_k = 2k - 1 + \frac{1+(-1)^k}{2} + (-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}}$ n) $a_k = 3 - \frac{1}{2^{k-2}}$

غوښتنه :

پرلپسی د مونوتون خویونو له پلوه وڅیړی

a) $a_k = \frac{k-2}{k}$ b) $a_k = \frac{k+4}{k}$ c) $a_k = \frac{3k}{2k-1}$

d) $a_k = \frac{1-k^2}{k}$ e) $a_k = 2^k$ f) $a_k = 1 - \sin\frac{\pi}{k+1}$

۱۸ . ۲ الف لړی

د هغه کارپلټونکی زدکړې وړاندیز ته بیرته پام راګرځوو، چې د لمړی ورځې 0,05 اجوره د دویمې ورځې 0,1 د دریمی ورځې 0,2 ، د څلورمی ورځې اجوره یې 0,4 ډالره وه او داسی نور.

په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوې:

د k - می ورځې لپاره زدکړی څومره اجوره اخلی ؟

دا مو یوې ځمکګچیزې لړی ته لاربښودوي د $a_k = 0{,}05.2^{k-1}$ سره.

د هغې k - م توکی دk- می ورځې اندازه ګڼې یا د اجورې معیار دی.

دا په دې مانا چې زدکړی د k - می ورځې لپاره $0{,}05.2^{k-1}$ ډالره اجوره یا معاش اخلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که غواړو چی وښایو چی زدکړۍ په لومړیو پنځو ورځو کی څومره اجوره اخلی ، نو باید د لومړیو ورځو اجورې ځککچیزه پرلپسی، د $a_k = 0{,}05.2^{k-1}$ سره، یو بل سره زیاته کړو

$$0{,}05+0{,}1+0{,}2+0{,}4+0{,}8 = 1{,}55$$

دا زدکړی د لومړیو پنځو ورځولپاره 1,55 ډالره معاش اخلي‌که د لومړیو n ورځو اجوره په Sn سره وښایو ، نو یوه لړۍ د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = 0{,}05\ .2^0 = 0{,}05$$
$$s_2 = s_1 + 0{,}05.2 = 0{,}05+0{,}1 = 0{,}15$$
$$s_3 = s_2 + 0{,}05.2^2 = 0{,}15+0{,}20 = 0{,}35$$
$$s_4 = s_3 + 0{,}05.2^3 = 0{,}35+0{,}40 = 0{,}75$$
$$s_5 = s_4 + 0{,}05.2^4 = 0{,}75 + 0{,}80 = 1{,}55$$
$$s_6 = s_5 + 0{,}05.2^5 = 1{,}55+0{,}160 = 3{,}15$$

غوښتنه:

پرلپسی ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړی(مخ ودیزه کړی)۰ که د ورکړ شوې پرلپسی ، چی توکي یی a1,a2,a3 ....

دي، دتوکو یو په بل پسی جمعه یا زیاتون جوړ شي

$$s_1 = a_1 \qquad = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 \qquad = s_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1+a_2+a_3 \qquad = s_2+a_3$$
.
$$s_{20}=(a_1+a_2+\ldots+a_{19})+a_{20} \qquad =s_{19}+a_{20}$$
.
$$s_{n-1} =(a_1+a_2+..+a_{n-2})+a_{n-1} \qquad =s_{n-2} + a_{n-1}$$
$$s_n= (a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+a_n \qquad =s_{n-1} +a_n$$
$$s_{n+1}=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1} \qquad =s_n +a_{n+1}$$
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یوه پرلپسی...S1,S2,s3, لاس ته راځي۰

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۸:

د یوې پرلپسی ...;a1; a2; a3 څخه جوړه شوې پرلپسی ...S1;S2;S3
د رکورزیف انځورونی $s_1 = a_1; s_n = s_n + a_{n+1}$
سره پرلپسې لړی (د پرلپسیو لړۍ) یا لنډ : لړی بلل کیږي.

بیلګه :
د ak = 2k سره جوړې شوې پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$s_2 = s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6$$
$$s_3 = s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$
$$s_4 = s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

بیلګه :

د ak = (2+3k)/(k+1) سره جوړه پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \tfrac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \tfrac{8}{3} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} = \tfrac{31}{6}$$
$$s_3 = s_2 + \tfrac{11}{4} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} + \tfrac{11}{4} = \tfrac{95}{12}$$
$$s_4 = s_3 + \tfrac{14}{5} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} + \tfrac{11}{4} + \tfrac{14}{5} = \tfrac{643}{60}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \ldots + \frac{2+3n}{n+1}$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوې لړی توکي Snورکړی

a) $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ b) $a_k = -3 \cdot 2^{k-1}$

c) $a_k = 5 \cdot 0{,}2^{k-1}$ d) $a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1}$

پیژند ۱۸ . ۹ :

د اریتمیتیکي پرلپسی توکو یو له بل سره زیاتون یا جمعه په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اریتمیتیکي لړۍ پرلپسي (لنډ: لړۍ) بولو:

sn = a1 + a2 + ... + an

موږ دلته بیا پیل بیلګه را اخلو، چی د اریتمیتیکي لړۍ (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لړۍ پرلپسي یی غواړو ونومو او په لنډه توګه یی له دې وروسته »لړۍ « و بولو) زیاتون او په ټولیزه توګه لړی زیاتون وشمیرو. ټاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغي پسی زیات کړی شو یا یي زیاتون ونیولی شو:

$$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \ldots + a_2 + a_1$$

$$s_{100} = 3+7+11+\ldots +395 + 399$$

$$s_{100} = 399+ 395+\ldots + 11 + 7 + 3$$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+ d + a_{n-1}) + \ldots + (a_1 + (n-1).d + a_1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2s_{100} = 402 + 402 + 402 + .. + 402 + 402 \qquad 2s_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)...+(a_1+a_n)$$

$$2s_{100} = 100.402 \qquad 2s_n = n.(a_1+a_n)$$

$$s_{100} = 50.402$$

$$s_{100} = 20100 \qquad s_n = n(a_1 + a_n)/2$$

د پورته شمیرني سره سم د اریتمیتیکي لړۍ زیاتون دی: $s_n = \dfrac{n(a_1+a_2)}{2}$

که دلته د an=a1+(n-1)d ځاي په ځاي شي او د اسانتیا لپاره کموتاتیو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چي n /2 ښي خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1+(n-1)d)n}{2} = n.a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بیلګې:

لومړی: $a_a = 3; d = 7; n = 50 => s_{50}(2.3+49.7)50/2 = 8725$

کنترول: $a_{50} = +49.7 = 346$ او له دې

$$s_{50} = \frac{(3+346)50}{2} = 8725$$

دویم- یو میراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ویشل کیږي چی هر یو مشر د ورپسی مشر ورور څخه 470 0افغاني زیاتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسیږي. معلوم کړئ چی میراث څومره دئ او هر یو ورور څومره میراث اخلي؟

a1=17000;d=4700 ,s6=6/2(2.17000+5.4700)=172500 افغانئ

ورونه په لاندې ډول پیسی اخلي

17000 افغانی، 21400 افغانی، 26400 افغانی ،
31100افغانی ، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنګه چی د اریتمیتیکي لړۍ زیاتون پیداکیږي، همداسی د هندسي لړۍ زیاتون هم پیداکیدی شي. عمومي فرمول به په پورتني ۱ - بیلګه کی ځانګړی یا ځانیزشي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(مشخص). د زياتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لړۍ sn څخه په q پراخه شوې لړۍ کموو. په دې ډول لړۍ لړو توکو ته لړيږي:

۱۸ . ۲ الف .۱ ځمككچيزې يا هندسي لړپرلپسي (لنډ: لړۍ):

د ځمككچيزې پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ ځمككچيزه لړۍ بلل كيږي.
د هندسي پرلپسی د $a = 3.2^{k-1}$ څخه جوړه هندسي لړۍ په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 3.2^0 = 3$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0+3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0+ 3.2+3.2^2+3.2^3+..+3.2^{n-1}$$

.

.

جمله : (اكسپليڅيت انځورونه):

د ځككچيزې پرلپسی د ak = a1 +(k- 1).d توكي سره جوړې پرلپسی څخه جوړې شوې هندسی لړۍ لپاره صدق كوي:

Sn = a1+a2q+a3q²+...+a1qn-1=a1(qn-1)/(q-1);

q|=0;Sn=n.a1 q = 1

اوبی: د $q \neq 1$ لپاره باور لري:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$
$$s_n \cdot q = \qquad a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$
$$s_n - s_n \cdot q = a_1 \qquad - a_1 q^n$$
$$s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$
$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه: اوبی د $q = 1$ لپاره د ګرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته یو بل ډول ښوونه پلی کوو: پرلپسی د-n ام غړي $a_n = 3.2^{n-1}$ سره ورکړ شوې.
دلته په دې توګه د لړی غړي لړو غړو ته رالنږیږي.

$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \ldots + 24576 + 49152$ $\qquad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{n-1} + a_n$ $\quad +$

$s_{15} \cdot 2 = 6 + 12 + \ldots + 49152 + 98304$ $\qquad s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \ldots a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$ $\quad -$

$s_{15} - s_{15} \cdot 2 = 3 - 98304$ $\qquad s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$

$s_{15}(1-2) = 3 - 98304$ $\qquad s_n(1-q) = a_1 - a_n \cdot q$

$s_{15} = (3-98304)/(-1)$ $\qquad s_n = (a_1 - a_n \cdot q)/(1-q) = (a_1 - a_1 \cdot q^n)/(1-q)$

$s_{15} = 98401$ $\qquad s_n = a^1 \cdot (1-q^n)/(1-q)$

له کمون یا کمښت وروسته د لړی په کښه لور تیك(یواځی) پورته لیکی لومړی توکی او د لاندې کرښی اخرنی توکی پاتیږي، نور ټول توکی یوبل سره لرې کوي، د بیلګي په توګه $a_2 - a_1 \cdot q = 0$ او یا $a_n - a_{n-1} \cdot q = 0$
دا روښانه ده چی q نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي ، په لومړي حالت که به مو پرلپسی
$a_1, 0, 0, 0, 0 \ldots\ldots$
لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي a_1, a_1, a_1, a_1 سره سر او کار وي

بیلګي:

$1 - 7; -21; 63; -189: \ldots\ldots q = -3; a_1 = 7$
غوښتونکی s_7

$s_7 = 7 \cdot ((-3)^7 - 1) / -3 - 1 = -15316 / -4 = 3829$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کنترول:

$$a_7 = a_1 . q^6 = 7 . (-3)^6 = 5103 \ , \ s_7=5103.(-3)^7-1/(-3)^7-(-3)^6 :$$
$$= 5103.2188/2916 = 3829$$

۱۸ . ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړی

دلته غواړو چی یو ځل بیا لنډ مګر د یوه لوی سرلیك په څیر اریتمیتیکي لړۍ ته یو نظر واچوو .یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوې لړی اریتمیتیکی لړی نوموو. د

$$ak = 15 + (k - 1).4$$

سره جوړه اریتمیتیکي پرلپسی څخه جوړه شوې لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = a_1 = 15$$
$$s_2 = s_1+a_2 = 15+(15+4)=15+19=34$$
$$s_3 = s_2 +a_3 = 15+(15+4)+(15+2.4) = 15+19+23=57$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} +a_n = 15+(15+4)+(15+2.4)+..+(15+(n-2).2+(15+(n-1).4$$

.

.

.

جمله : (د اریتمیتیکی لړی اکسپلیځیت انځورونه):

د $ak = a1+(k-1).d$

سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوې لړی sn اریتمیتیکي لړی لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+..+(a_1+(n-1)d = (n /2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + (a_1+(n-3)d) + (a_1+(n-2)d) + (a_1+(n-1)d)$$
$$s_n = (a_1+(n-1)d) + (a_1+(n-2)d) + (a_1+(n-3)d) + \ldots + (a_1+2d) + (a_1+d) + a_1$$
$$s_n + s_n = [2a_1+(n-1)d] + [2a_1+(n-1)d] + [2a_1+(n-1)d] + \ldots + [2a_1+(n-1)d] + [2a_1+(n-1)d] + [2a_1+(n-1)d]$$
$$2\cdot s_n = n\cdot[2a_1+(n-1)\cdot d]$$
$$s_n = \tfrac{n}{2}\cdot[2a_1+(n-1)\cdot d]$$

غوښتنه:

وښايي چې sn=(n/2)(2a1+(n-1)d د sn=(n /2)(a1+an)
سره په یوه مانا دي

۱۸ . ۶ د پرلپسی او لړیو پولی

موږ تراوسه داسی لړیو سره سراو کار لروده چې اخرنی توکي يی لاس ته راوړونکي وو. داسی لړۍ پایلړۍ بلل کيږي. داسي فکر هم کیدی شي چې د لړۍ اخرني غړي موجود نه وي، یعني لړۍ دې په خوښه دوام پیدا کولی شي. په عمل کی داسی پرابلمونو سره مخامخ کیږو چی دا مو ناپای لړیو ته هڅوي. دا څرګنده ده، چې داسی لړی اریتمیتیکی لړی نه دي، کم له کمه به ی اخرنی غړی په پوښتنه کی راتلی او یا د پاىډيرو غړو زیاتون، په اریتمیتیي لړی کی بي مفهومه دئ، ځکه چې دواړه لويي د nد ارزښت سره په ټولو پولو لویږي په هندسی لړیو کی هم په یوه ناپای لړۍ کی د اخرني غړي او یا زیاتون پوښتنه بي مفهومه ده. دا روښانه ده چی د پیل غړی د|q| سره ځل له امله تل جګیږي. دا د مثبت او همداډول د منفی q لپاره باور لري.

بيلګي:

۱ - اریتمیتیکي لړۍ 2+3+4+5+..... یو لاس ته راوړونکی د زیاتون یا جمعی ارزښت نه لري، ځکه چې هر راتلونکی زیاته وونی د ټولو پولو لوييږي یاجګیږي۰

۲ – ځمککچيزه یا هندسي لړۍ 2+3+4,5+6,75+10,125+15,1875+...... د لومړي توکي a1 = 2 او د ويش q = 1,5 سره په ټولو پولو لوييږي. یا جګيږي نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلومیدی شي. د پای توکوګڼ زیاتون sn او اخرنی توکی an شمیریدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - ناپای ځمککچیزه یا هندسي لړۍ
1,5-3+66-122+24-48+966-....... د a1 =1,5 او q= -2
سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چې د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکي پولی څخه جګیږي یا لویږي .له دې سره به ځرګنده شوې وي چې کله د ناپای هندسي لړۍ د زیاتون ارزښت پای دی.

پیلبیلګه :
یو سخی سړی غواړي د معیوبو هستوګنځی ته بسپنه ورکړی . په لمړۍ میاشت کی دی ۱۰۰۰ افغانی بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کی د هغی د مخه میاشتی نیمایي یعنی په دومه میاشت کی ۵۰۰ افغانی او په دریمه کی ۲۵۰ افغانۍ او داسی نور. دلته a1=1000او q=1/2دي. دوخت د کموالي له امله دا لړی باید پای لړۍ وي ، مګر موږ دې پوښتنی ته تیوریتیکي ځواب ورکوو.
د پای ځمککچیزو لړیو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له فرمول $s_n = 1000(1\text{-}0{,}5^5)/(1\text{-}0{,}5)$ څخه کار واخستل شي، که چیرې n یو ناپاي لوي ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کی موږ ته معلوم ارزښتونه کیښول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1\text{-}0{,}5^5)/(1\text{-}0{,}5)$$

اوس کیدی شي ولیکو $s = 1000(1\text{-}0{,}5^n)/(1\text{-}0{,}5) = 2000.(1\text{-}(1/2)^n)$

که n له ټولو پولو تیر شي، باید د $(1/2)^n$ له امله دا مات (1/2) تل کوچنی شي.
دې مات (1/2) باندې کیدی شي، چی د لویو n توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي.
دلته روښانوي چی په دې توګه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لړۍ
1000+500+250+125+65,50+32,75+......
جوړوي، کومه چی ځان و 2000 ته نزدي کوي او هغه ته هیڅ نه رسیږي. دا سړی زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانی خیرات ورکړي.

یادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توګه ځواب کیدی شي۰

پرلپسی او د پرلپسی لړۍ په لوړو شمیرپوهنوکی غوره رول لوبوي« ډیرې ښوونی (اوبښونې) په دې ولاړې دي، چی ایا یوه ټیك ټاکلی پرلپسی یوې معلومی یا ټاکلی پولی ته هڅه کوي او که نه؟ چی په اول حالت کی پرلپسی(konvergent لیمټ لرونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاپوله لرونکي(بلل لکیږي او په دوهم حالت کی پرلپسی (divergent لیمټ یا پوله نه لرونکی) بلل کیږي.

بیلګه :

د ... مخ په اول او په دریمې بیلګو کی راوړل شوې پرلپسی دیورګنت یا پوله نه لرونکی ، په ۲ –مه بیلګه کی پرلپسی کونورګنت یا پوله لرونکی ده او د صفر لور ته هڅه کوي یا صفر ته کونورګنت ده یعني ددې پرلپسي پوله صفردی. او ۴ -مه بیلګه کی پرلپسی پوله لري او د ۳ لور ته هڅه کوی، یعني پوله یی ۳ دی.

پرلپسی شته چی د جګیدو سره یوه ټاکلی ګڼ ته په خوښه ورنزدې کیدی شي.د
دې پرلپسی د په خوښه لویو غړو او د دې ګڼ کمون ترمنځ بالاخره دومره کوچنی کیږي، چی په جبشمیرني باندې هم نه شي شمیرل کیدی .
موږ د پرلپسیو دا ډول ځاننیونی، بی له جب شمیرنی یا جبشمیري، په لاندې بیلګو کی څیړو.

د پرلپسیو غړي

1 ; 1 /2; 1 /3 ; 1 /4 ;....| 0 ; 1 / 3 ; 2 / 4 ; 3 /5 ; 4 /6;.. | 3 /29 /4 ; 15 /8 : 33 /16

1;1/2;1/3;1/4;..|0;1/3;2/4;3/5;4/6;..
|3/29/4;15/8;33/16

د لاندې سره

$a_k = 1/k$ | $a_k = (k-1)/(k+1)$ | $a_k = 2+(-1/2)^k$

د k د جګیدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې ګڼونو ته نزدې کوي

g = 0 | , g = 1 | g = 2

د ګراف ټکي یی تل د جګیدونکی غړی نمرې k سره د

دx - محور سره غبرګ | دx - محور سره غبرګ | x -محور ته

د y = 2 سره | د y=1 سره او په ریښتونی

له لاندې او پورته بدل | له لاندې راتلونکي

له پورته راتلونکي

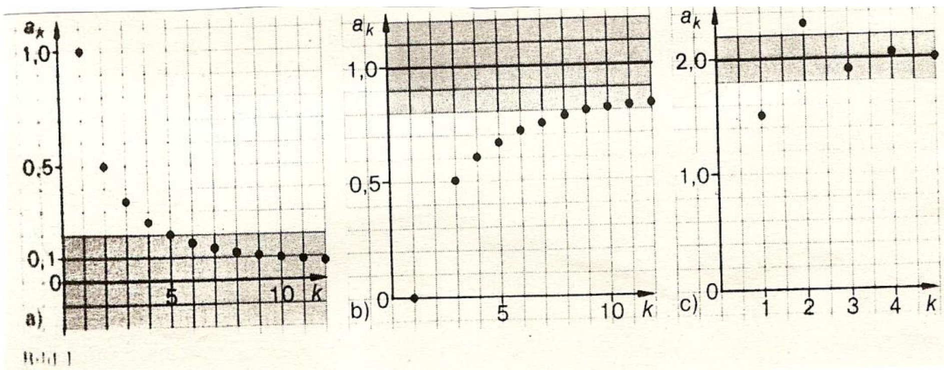
راتلونکی

که په کرښه یو دواړو لورو ته پټی وکښل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = 2$ سره د $y = 1$ سره د $y = 0$ سره

نو د پوره لويي k نمره توکي سره د پرلپسی ټول غړی په دې پټی کی دننه پراته دي.



دا لاندې ديفرنځ يا کمون

$\|a_k - 0\|$	$\|1 - a_k\|$	$\|a_k - 2\|$

دا مانا لري، چی د جګيدونکی k نمرې توکيه خورا کوچنی کيدی شي. دا پوښتنه مو چی د کوم غړی ak لپاره دا کمون د بيلګي په توګه له 0,0001 کوچنی کيدی شي، لاندې ناسمساوات ته را هڅوي

$$|a_k - 0| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{1}{k} < 0.0001$$
$$k > 10000$$

$$|1 - a_k| < 0{,}0001$$
$$\left|1 - \frac{k-1}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{(k+1)-(k-1)}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{2}{k+1} < 0.0001$$
$$\frac{2}{0{,}0001} < k+1$$
$$19999 < k$$

$$|a_k - 2| < 0{,}0001$$
$$\left|2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right| < 0{,}0001$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 0{,}0001$$
$$k \cdot \lg\tfrac{1}{2} < \lg 0{,}0001 \| : \lg\tfrac{1}{2} < 0\ (!!)$$
$$k > \frac{\lg 0{,}0001}{\lg\frac{1}{2}}$$
$$k > \frac{-4}{-0{,}3010}$$
$$k > 13{,}29$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا، : د ټولو پرلپسی غړو د

$k > 13$	$k > 19999$	$k > 10000$

سره کمون | a k - g | له 0,0001 کوچنی دی .
د ګراف لپاره باور لري، چی دا ټول ټکي د یوې پټۍ یا تسمې په دننه کی پراته دي
سور یي 2.0,0001 په کرښه د مساوات

$y = 2$	$y = 1$	$y = 0$

y = 0 y = 1 y = 2

سره پروت وي .
که دا د 0,0001 په ځاي کی یو په خوښه کوچنی رییل ګڼ ورکړ شي، او وله دې وغوښتل شي چی کمون یی له دې ګڼ کوچنی دی نو په ورته توګه مو لاندېنامساواتو ته لارښودوي.

$\lvert a_k - 0\rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 1\rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 2\rvert < \varepsilon$
$\left\lvert \frac{1}{k} - 0\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert \frac{k-1}{k+1} - 1\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right\rvert < \varepsilon$
$\frac{1}{k} < \varepsilon$	$\left\lvert \frac{(k-1)-(k+1)}{k+1}\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\rvert < \varepsilon$
$k > \frac{1}{\varepsilon}$	$\left\lvert \frac{-2}{k+1}\right\rvert < \varepsilon$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$
	$\frac{2}{k+1} < \varepsilon$	$k \cdot \lg\frac{1}{2} < \lg\varepsilon \,\|: \lg\frac{1}{2} < 0$ (!!)
	$\frac{2}{\varepsilon} < k+1$	$k > \frac{\lg \varepsilon}{\lg \frac{1}{2}}$
	$\frac{2}{\varepsilon} - 1 < k$	

دا په دې مانا چی : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$k > \log \varepsilon / (\log(1/2))$	$k > 2/\varepsilon - 1$	$k > 1/\varepsilon$

سره کمون $\frac{q^n}{1-q}$ دی .

پرلپسی له دې خویونو سره کونورګنت بلل کیږي او ګڼ g یی پوله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۸ .۱ :

یوه پرله پسی کونورګنځ Konvergent (لاتین convergere یو د بل په لور ور ځغلیدل یعني یو بل ته ورنږدېکیدل(بلل کیږي یعني د یوې ټاکلی پولی په لور هڅیږي، کله چی د هغی غړي د جګیدونکی ایندکس n سره یوې پولی ته په خوښه نږدې شي. یوه لړۍ کونورګنت یا پوله لرونکی بلل کیږي، کله چی د برخه زیاتون پرلپسی د جګیدونکی n سره یوې پولی ته په خوښه نږدې شي.

هغه پرلپسی چی د صفر په لور هڅیږي صفرپرلپسی یی بولو هغه پرلپسی چی یوې ټاکلی پولی ته نه هڅیږي .دیورګنت بلل کیږی ») دا وروسته ه تر څیړنی لاندې نیول شوي دي.

جمله :

د ځمککچیزې یا هندسي لړی پولې تج ت لنې یا کونور ګنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |q| < 1$$

که $|q|<1$ وي ، پس د پای ځمککچیزې لړی لپاره د زیاتون فرمول داسی دی

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

د q^n اررښت څخه تېرېدی شو یعنې ترې صرفنظر کیدی شي، که n پوره لوي وټاکل شي.

جمله :

دناپای ځککچیزې لړۍ ...+a1+a1.q+a1.q²+a1.q3 د زیاتون sn سره پوله $s = a1 / (1-q)$ تیك هلته لري، کله چی$|q|<1$

$$n = n_0(\varepsilon);...(18.7)$$

وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

هره پرلپسی د $(b \in R; n,k \in N)$ $a_k = \dfrac{b}{k^n}$ سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د $a_k = cq^n (c \in R$ سره د1>|q| لپاره یوه صفرپرلپسی ده٠

دلته غواړو چې دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو.
د یوې پرلپسی د غړو an ځاننیونی څیړنه د تل جګیدونکي n لپاره،وایو چی:
که n د oe (ناپای) په لوروهڅیږي او یا لنډ n—›oe ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي ته بیایي او یا کونورګنځ (convergence). موږ پرلپسی{ an}={1/n} په پام کی نیسو، د جګیدونکي n سره، ګورو چی د پرلپسی غړي تل 0 ته په خوښه یا په زړه پورې ور نزدې کیږي .
که سړی هرڅومره کوچنی ګڼ 0< ε وټاکي د یوه معلوم($n = n_0(\varepsilon)$ د لته) $n_0(\varepsilon)$ د ε په واک کې دی) څخه وروسته ټول ګنونه د0 په ε -چاپیریال کی پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon). \tag{18.1}$$

سړي کړی شي چی دا n دلته په ساده ډول ورکړي. د) ۱۸ . ۱ (له امله دی

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{18.2}$$

د

= 100 / 1

لپاره . 100 = n0 نو | 100 / 1 > | an د ټولو 100 < n لپاره، یعني د n = 101, n
103 = n , 102=لپاره. د = 1 / 1000000 لپاره لرو = ( ) n0
1000000پس, | 1000000 /1 > | an د ټول 1000000 < n لپاره

په لاندې حالت کی سړی وایي: چی پرلپسی
{ 1 }n/
کنورګنت ده. هغه د پولې 0 = a لور ته کونورګنت کیږي. د دې لپاره لیکو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ او یا په ساده ډول

$$\frac{1}{n}\to 0 \qquad (18.3)$$

(د 1/n لیمس د n—>oe لپاره په 0 مساوي دئ او یا ساده 1/n د0 په لور ځي)
د $\{a_n\}=\{(-1)^n(1+\frac{1}{n})\}$ لاندې پرلپسی په څیړنه کړه لاس ته راځي: د جوړه یا جفت n لپاره پرلپسی an د+1 لورته نزدې کیږي او د ناجوړه یا طاق n لپاره پرلپسی د1- لورته نزدې کیږي. د لته سړی د دوه پولو +1 او 1- څخه نه غږیږي بلکې دپرلپسی ددوه ډیرئ شوو ټکو یا ځاي راټولشوو ټکو څخه . پرلپسی کونورګنت نه ده بلکه دیورګنت (divergence(ټیګ : ناټاکلی دیورګنس)ده ۰

پرلپسی {an}={n2} هم دیورګنت ده. دا چي an د جګیدونکی n سره د oe یا ناپای لورته ځي پس د هرڅومره لوي ارزښت K څخه اوړي یا جګیږي، نو سړی د oeپه لور د ټاکلی دیورګنت څخه غربږي.

$$\lim_{n\to 0} n^2=+\infty \vee n^2\to+\infty;..........................(18.4)$$

په پورته کي V د یا لپاره ځای په ځای ده
له دې پیل یادونوڅخه اوس باید د پولو(حدونو) کلیمی کره وپیژندل شي:

پیژند ۱۸ . ۲ :
یو پرلپسی $\{a_n\}$ { an } پوله یا حد a لري

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \Leftrightarrow a_n\to a;.............................(18.5)$$

که د هر یوه (هرڅومره کوچنی هم) $\varepsilon>0$
<0
لپاره یو $n_0=n_0(\varepsilon)$
داسی موجود وي چی باوري وي

$$|a_n-a|<\varepsilon;.............................(18.6)$$

د ټولو $n=n_0(\varepsilon);...(18.7)$

وایو چی پرلپسی { an } کونورګنت یا په بل عبارت پرلپسی { an } د پولی a په لور کونورګنت کیږي .که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو دیورګنت بللکیږي(یا دیورګنت کیږي) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یوې دیورګنتی پرلپسی } an { و هر (په خوښه لوی) ګن K لپاره یو
)n0 = n0(K
داسی موجود وي چی باوري وي

$$a_n > K \quad \text{یا} \quad a_n < -K \qquad (18.8)$$

د ټول

$$n > n_0(K) \qquad (18.9)$$

نو د پرلپسی ځرګند یا معلوم دیورګنت بلل کیږي د + oe په لور اویا - oe په لوراو
ددې لپاره لیکي

$$\lim_{n\to\infty} a = +\infty \iff (\text{په همدې ډول}) \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad (18.10)$$

یا لنډ:

$$a_n \longrightarrow +\infty \implies (\text{یا په همدې ډول}) \; a_n \longrightarrow -\infty \qquad (18.11)$$

که یوه پرلپسی دیورګنت او ټاکلی دیورګنت نه وي، نو ناټاکلی دیورګنت بلل کیږي.
ددې پرلپس، $\{a_n\} = \{n / n+1\}$ ځخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

اتکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعني $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس
ته راځي :

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

د $n+1 > n \iff n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پورته سره کیدی شي چی تصدیق کړو چی: هر $\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$
داسی موجود دی چی $|a_n-1|<\varepsilon$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

دا ساده بیلګه د تعریف ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا نه وایي چی پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چی پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته ضرورت دی . مخکي له دې چی کونورګنځ
اټکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعني

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < \varepsilon$$

د $n+1 > n \Leftrightarrow n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدی شي چی تصدیق کړو چی: هر $\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$
داسی موجود دی چی $|a_n-1|<\varepsilon$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

ددې پورته سره کیدی شي چی تصدیق کړو چی: هر 0<

$n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ ته یو $\varepsilon>0$
$|a_n-1|<\varepsilon$ ،
داسی شته دی چی
د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی .

دا ساده بیلګه د پیژند ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا دا نه وایي چی پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چی پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته اړتیا شته دی . مخکي له دې چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونورګنځ (ټولې تج تلنه) وښايو نو بايد پوله مو پيژندلي وي يا کم له کمه مو ګومان په راغلی وي.
په ټوليزه(عمومي) توګه د $n_0(\varepsilon)$ شميرل هم د ستونځو ډك دي. د پولی عملي شميرلو لپاره داسی عمليو يا کاره ونو ته اړتيا ده، چی بی د پيژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال څخه ټولی راپيدا کړی شو. له دې پرابلم سره ۱۸ . ٤ ـامه برخه ځان مشغولوي.
کله کله دا بسوالی يا بسيا کوي چی سړی دومره پوه شي چی ايا پوله وجود لري يا شته دئ (ايا کونورګنت کيږی) بی له دې چی هغه وپيژني او يا يی وشميري. داسی د موجوديت ويناوي يواځي د کونورګنځ کريتيرين (- خويونه) کولی شي، له کومو څخه چی لاندې يو ورکول کيږي. دې ته بايد ګوته ونيسو چی دا کريتيرين د مخه د پولی پو هيدل ضرور نه نيسي) دا د مخه نيونه نه ده يعني فرضيه نه ده) .

جمله ۱۸ . ۱:

هره بنده (محدوده) مونوتون پرلپسی an کونورګنت ده ۰

دا کريتيريوم ځرګند د ليدلو دی. که يوه پرلپسی تل جګيږي (کميږی ،ټيټيږي) او ټاکلی يا معلوم پای ارزښت K څخه نه اوړي(K څخه نه ټيټيږي) نو بايد an يوځاي کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله يواځي په يوځاي کی کيدی شي.

يادونه : څه ګنونه چی په يوځاي کي سره ډير راټول شي ما ورته ډيری ليکلي، دا ښه نه ده، ځکه، چی ډيری مي د ډيری ياني د سيټ لپاره کارولی ، نو دلته ليکم، چې »راپنډ» شي۰

جمله ۱۸ . ۱ د بيلګي په توګه په دريمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوګاريتم بنسټ په څيرګڼ e سره اړيکو يا رابطو کی استعمال لري . سړی د يو څه ستونځو سره ښوولی شي چی لاندې باوري دی

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دې امله دا پرلپسی

$$\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

مونوتون او بنده (محدوده) ده او د جملی ۱۸ . ۱ له امله کونورګنت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پوله $e = 2,71828$ ده (پرتله یا مقایس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (18.12)$$

۱۸ . ۴ د پولی شمیرنه

په دې برخه کی غواړو چی قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چی د پیژندلشوو پرلپسی د کونورګنت څخه د نورو کونورګنت لاس ته راوستی شو، او همداسی، چی د هغی په مرسته د پیژندلشوو پرلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو پرلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي.
لاندې بنسټیزه جمله ښاي چی د ځانګړو شرایطو لاندې د ګڼونو پرلپسیو سره همداسی شمیرل کیدی شي لکه پخپله د ګڼونو سره.

جلمه ۱۸ . ۲ :

که پرلپسی $\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ (پای)پوله ارزښت a اوb ولري ، یانې

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \qquad (18.13)$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b, \qquad (18.14)$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \qquad (18.15)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b},\ b_n \neq 0, b \neq 0, \qquad (18.16)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b,\ a_n > 0, a > 0, \qquad (18.17)$$

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log a,\ a_n > 0, a > 0. \qquad (18.18)$$

دا جمله دوه ګوني وینا کوي: که د پرلپسیو غړو an او bn د کونورګنت عددونو پرلپسي د جمعې، تفریق، ضرب (زیاتون کمون ، ځل) او ویش، پوتنځ یا لوګاریتم نیولو ، د یوې نوې پرلپسي یا ترادف غړي لاس ته راولي نو دا نوې پرلپسي (ترادف) کونورګنت ده او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولی ارزښت یی په ترتیب د کونورګنتو پرلپسیو یا ترادفون جمعه،تفریق،ضرب(زیاتون، کمون، ځل)، ویش ، پوتنځ او لوګاریتم دی.
په لاندې کی غواړو یوائځی اړیکی (۱۸ . ۱۴) وښایو. د ښوولو لپاره یی د پولی ارزښت پیژند ۱۸ . ۲ څخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو) . نیونی (۱۸ . ۱۳) دا مانا لري، چی هر

< 0

ته یو

($n1$) (او یو $n2$)

داسی شته دی، چي باوري کوي $|a_n - a| < \varepsilon$ دټولو $n > n_1(\varepsilon),$ لپاره ،

$|b_n - b| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_2(\varepsilon),$ لپاره‌پس معتبر دي

$|a_n - a| < \varepsilon$ او $|b_n - b| < \varepsilon$ د ټول $n > n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$

اوس باید یوائځي وښایو چی د یوه ټاکلي n چه $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)|$

د هر ε لاندې راټیټیدلی شي. لاندې باور لري

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ډ ټولو $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$ لپاره

په دې توګه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.
د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی باید برسیره په نیونو یا فرضیو، چی په (۱۸ . ۱۵) تر (۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټیك په پام کی ونیول شي چی پرلپسی $\{an\}$ او $\{bn\}$ څرګند پای پولی ارزښتونه a او b باید ولري. که د بیلګي په توګه $a_n \to \infty,$ او $b_n \to \infty,$ وي، نو فرمول (اجازه نه لرونکی استعمال !) (۱۸ ، ۱۴) په یوه په نامه ناټاکلي افادې په لورځی یعنی $\infty - \infty,$

$$(a_n - b_n) \to \infty - \infty. \qquad (18.19)$$

که باور ولري $a_n \to 0, b_n \to \infty,$ نو سړی د اجازې نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵) یوه بله ناټاکلی افاده لاس ته راولي:

$$(a_n \cdot b_n) \to 0 \cdot \infty. \qquad (18.20)$$

په لاندې کې bzw. د همداسې‌په معنا دی.

$a_n \to 0,\ b_n \to 0$ bzw. $a_n \to \infty,\ b_n \to \infty,$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{0} \text{ bzw. } \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\infty}{\infty}. \qquad (18.21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۸ . ۱۷) استعمال مو د $a_n \to 0,\ b_n \to 0$ همداسي د $a_n \to \infty,\ b_n \to 0$
همداسي $a_n \to 1,\ b_n \to \infty$ حالتونو کې مو درې نورو ناټاکلو افادو ته لاربنود وي.

$$a_n^{b_n} \to 0^0 \quad \text{bzw.} \quad a_n^{b_n} \to \infty^0 \quad \text{bzw.} \quad a_n^{b_n} \to 1^\infty. \qquad (18.22)$$

په پورته انځورشوو اړیکو کی لاندې افادې

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty \qquad (18.23)$$

ناټاکلی افادې بلل کیږي.
داسي پرلپسی چی د جملې ۱۸ . ۲ فورمال استعمال څخه ناټاکلو افادو ته لاښودوي ،
دیورګنت او یا به مختلفو ارزښتو ته کونورګنت وي. دا یوې ځانګړی څیړنی ته اړ دي.

مخکی له دې چی داپوښتنی ځوابوو، نو باید یوڅو تیپیکي پرلپسی وڅیړل شي، کومی مو
چی په نامه ټاکلو افادو ته لاربنود وي، که څه هم د جملی ۱۸ . ۲ نیوني یا فرضیي پوره
نه وي.
که an —>+oe او bn —>+oe باور ولري نو طبعآ لاس ته راځي

$a_n + b_n \to \infty + \infty = \infty$	.........(18.24)
$a_n . b_n \to \infty . \infty = \infty$	.........(18.25)
$a_n - b_n \to \infty - \infty = \infty$	.........(18.26)

دا اړیکي (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۲۵) طبعآ د ناڅرګندې پولی ارزښت - oe لپاره
هم باوري دي.
که a <— an او oe <— bn وي، نو باور لري :

$$a_n + b_n \to a + \infty = \infty, \qquad (18.27)$$

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = \infty, \ a > 0, \qquad (18.28)$$

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = -\infty, \ a < 0, \qquad (18.29)$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{\infty} = 0, \qquad (18.30)$$

$$a_n^{b_n} \to a^\infty = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < a < 1, \\ \infty & \text{für } a > 1, \end{cases} \qquad (18.31)$$

$$a_n^{-b_n} \to a^{-\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{für } a > 1, \end{cases} \qquad (18.32)$$

$$b_n^{a_n} \to \infty^a = \infty, \ a > 0. \qquad (18.33)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې لړۍ لپاره باور لري :

$$a_n \to 0,\ b_n \to b, \tag{18.34}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{b}{0} = \infty,\ b > 0, a_n > 0, \tag{18.35}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^b = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ \infty & \text{für } b < 0,\ a_n > 0, \end{cases} \tag{18.36}$$

$$\log a_n \to \log 0 = -\infty, a_n > 0. \tag{18.37}$$

د $a_n \to 0$ او $b_n \to \infty$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{\infty} = 0,\ a_n > 0, \tag{18.38}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{\infty}{0} = \infty,\ a_n > 0, \tag{18.39}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^\infty = 0,\ a_n > 0. \tag{18.40}$$

په دې همدا اوس ښوول شوي اړیکو کې لاندې افادې تاکلی افادی دي (نیونه د (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۴۰) پورې دی په پام کې ونیول شي) :

$$\infty + \infty = \infty,\ a + \infty = \infty,\ \infty \cdot \infty = \infty,\ a \cdot \infty = \infty,$$
$$\frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{a}{0} = \infty,\ \frac{0}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{0} = \infty,$$
$$\infty^\infty = \infty,\ a^\infty = \infty\ (a > 1),\ a^\infty = 0\ (0 < a < 1), \tag{18.41}$$
$$0^\infty = 0, 0^a = 0\ (a > 0),\ 0^a = \infty\ (a < 0),$$
$$\infty^a = \infty\ (a > 0),\ \infty^a = 0\ (a < 0),\ \log 0 = -\infty.$$

په لاندې بیلګه کی به یو څو ګنونپرلپسی ورکړ شي، کومی چی د تاکلو افادې په لور لاربښودوي) بیایي :)

بیلګه ۱۸ . ۳:

$$n^2 = n \cdot n \to \infty \cdot \infty = \infty,\qquad \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \to \infty^{\frac{1}{2}} = \infty,\qquad \frac{1}{n^2} \to \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$2^n \to 2^\infty = \infty,\qquad \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n \to 0^\infty = 0,\qquad \log\frac{1}{n} \to \log 0 = -\infty,$$

$$\frac{n}{\sin\frac{1}{n}} \to \frac{\infty}{\sin 0} = \frac{\infty}{0} = \infty,\qquad n \cdot \log\frac{1}{n} \to \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه پرلپسی چې د ناټاکلو افادو(۱۸ . ۲۳) . په لور مو لاربنودوي، څه ستونځي پیښوي. دا د هوښیارو فورمبدلولو یا ښه بدلون په بنسټ په داسی پرلپسو بدلیږي چی څرګنده – یا ټاکلي افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بیایي یا چی د هغي کونورګنتځانیونی معلوم دي . لومړی دې یو څو ځانګړې پرلپسی وکتل شي:

پرلپسی مو د $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ غړو سره د نا ټاکلی افادې 1^∞ په لور بیایي او د (۱۸ . ۱۲) له مخی پوله ارزښت e لري. سړی ښوولی شي (دلته دې دا نه ښوول کیږی) ، چی دا پولی ځانیونه ساتلي پاتی کیږي، که څوك د $an = 1/n$ په ځاي یوه په خوښه د صفر پرلپسی $a_n \to 0, a_n \neq 0$ وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوښه صفر پرلپسی $\{a_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad a_n \neq 0, \tag{18.42}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e. \tag{18.43}$$

بیلګه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n\cdot(-1)} = \left(\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} \to e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a} = \left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a \to e^a, \quad \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n} \to \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5,$$

$$\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n-3} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n-3}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n-3}} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}\cdot\frac{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^2}{\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)^2} \to \frac{1^3}{1^3}\cdot\frac{(e^2)^2}{(e^{-3})^2} = e^{10},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}=\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\to e^0=1,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n\to e^\infty=\infty.$$

د $a_n \to 0$ لپاره پرلپسی sinxn)/n) د ناټاکلی افادې 0/0 په لور ځي.
لاندې باور لري :
جمله ۱۸ . ۴: د هرې په خوښه صفر پرلپسی

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, a_n \neq 0,$	(18.44)

لپاره باور لري (د لندې الماني ژباړه= an په لینده کچ)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1 \quad (a_n \text{ im Bogenmaß}). \qquad (18.45)$$

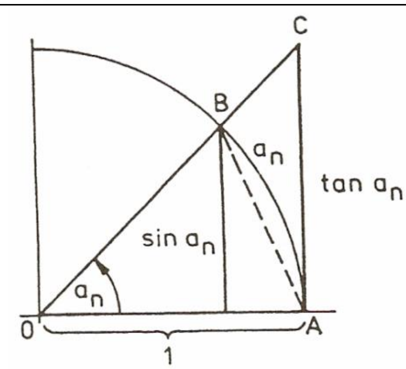


Bild 18.1

اوبنونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$ له امله او له‌دې امله

چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n}=\frac{\sin a_n}{a_n}$ دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یواځې د an> 0 لپاره وښوول شي.

مورږ دلته د یوونګردی یا واحد داېرې د کونج بلواک ځخه ګټه اخلو؟؟؟ ځیره ش ۱۸ . ۱) د

درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1\cdot\sin a_n}{2}$,

د ګردی سکتور یا ګردیبرخه OABمنځهوارې

ځخه‌کوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي $\frac{1^2\cdot a_n}{2}$,

OACد منځهوارې. $\frac{1\cdot\tan a_n}{2}$

ځخه کوچنی دی. له دې امله باور لري

$\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبنونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$

له امله او له دې امله چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$

دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یواځې د $a_n > 0$ لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد داېرې د کونج بلواک څخه ګټه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ .

۱) د درې ګوډې OAB منځهواره: $\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}$,

د ګردۍ سکتور یا ګردیېرخه OAB

منځهوارې $\frac{1^2 \cdot a_n}{2}$,

څخهکوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي OAC د منځهوارې. $\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$

څخه کوچنی دی.

له دې امله باور لري $\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

او ورپسی

$$\frac{\sin a_n}{a_n} < 1, \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n}, \ \text{also} \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1.$$

د $\cos a_n \to 1$ له امله $a_n \to 0$ لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري۰

بیلګه ۱۸ . ۵ : د جملی ۱۸ . ۴ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$n \cdot \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad n^2 \cdot \sin\frac{1}{n} = n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\sqrt{n} \cdot \tan\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

بیلګه ۱۸ . ۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پرلپسی $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$،

چې د ناټاکلی افادې $\frac{\infty}{\infty}$ په لور مو هڅوي کوښښ کيږي چې د مات باندې او ماتلاندې په يوه ګڼ وويشل شي، چې يو ټاکلی وينه يا افاده ترې رامنځ ته شي.

$$\frac{3n^2-n+1}{2n^2-1}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{3}{2},\qquad \frac{6n^3+n-1}{7n^4+n^2+1}=\frac{\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{7+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\to\frac{0}{7}=0,$$

$$\frac{6n^3+n-1}{2n^2-1}=\frac{6n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{\infty}{2}=\infty,\quad \frac{\sqrt{n^2-1}+n-1}{n+1}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\to\frac{2}{1}=2.$$

بيلګه ۱۸ . ۷ : پرلپسي $\{a_n-b_n\}$ ، چې ناټاکلي افادې $\infty-\infty$ ته مو لاربښودوي، کيدی شي د نورو ترمنځ لاندې بڼه غوره کړې:

$$a_n-b_n=\frac{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}{a_n+b_n}=\frac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n}\to\frac{?}{\infty}.$$

که صورت پولي ته و هڅيږي، نو يوه ټاکلي افاده بيا مخ ته لرو.

$$\sqrt{4n^2+5n+2}-2n=\frac{4n^2+5n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+5n+2}+2n}=\frac{5+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+2}\to\frac{5}{4},$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}\to\frac{-1}{+0}\to-\infty,$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\to\frac{2}{\infty}=0.$$

تمرينونه:

د ورکړ شوې پرلپسې $\{a_n\}$ يا ترادف پوله ارزښت a وشميرئ (که شتون وري)! $n_0(\varepsilon)$ وټاکئ، داسې، چې د ټولو $n>n_0(\varepsilon)$ (18.6) لپاره باور ولري.

1. a) $a_n=\frac{n+1}{2n}$ b) $a_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a_n = n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n$

d) $a_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

د لاندې پرلپسیو $\{a_n\}$ پوله ارزښت وشمیرئ، که شتونولري.

.1. a) $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$

b) $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c) $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$

d) $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e) $a_n = \left(\frac{3n-2}{3-6n}\right)^2$

f) $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g) $a_n = \frac{2-\sqrt[3]{n^2}}{n^2+5}$

h) $a_n = \frac{3+(-1)^n+2n}{1-3n}$

i) $a_n = \frac{4\sqrt{n}-10n}{n\sqrt{n}}$

j) $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k) $a_n = n\left(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\right)$

l) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$

.2. a) $a_n = \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$

b) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

c) $a_n = \left(\frac{cn+1}{cn}\right)^n$

d) $a_n = \left(\frac{2+n}{n-4}\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)(n+3)}{n+2}\right)^n$

f) $a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{4}+3}$

g) $a_n = \sqrt[n]{3}$

h) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a) $a_n = [2n^{-1}\cdot\sin(2n^{-1})]$

b) $a_n = n\cdot\sin\frac{1}{n}$

c) $a_n = n\cdot\tan\frac{1}{n}$

d) $a_n = \sqrt{n}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $a_n = 2n^2\cdot\cos\frac{1}{n^2}\cdot\tan\frac{1}{n^2}$

f) $a_n = \sin\frac{1}{n} - n\cdot\cos\frac{1}{n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

19 پوله (حد)"The Limit"

لاندې د اعدادو ترادف (پرلپسې) لرو:

(1) 1 / 2 , 1 / 3 , 1 / 4 , ... ,1 / n

(2) 3 / 2 , 4 / 3 , 5 / 4, ..., (n+1) / n

(3) 2,4,6,...2n

که n د ناپای په لور یانې $n \to \infty$ ته لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (۱) د صفر په لور، (۲) د یو په لور او (۳) د ناپای په لور ځي.

د Limit مانا پوله (حد) ده، چې له هغې تیرېدنه اجازه نه لري. په پخواني روم کې د یوه ښار د قلعې نوم هم Limitوو. په ریاضیاتو کې ، لکه په ترادفونو (پرلپسې) کې مو چې ولیدل لیمیټ د پولې یا حد مفهوم لري.

د پولې (حد) د استعمال مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوه فنکشن یا تابع سلوک یا کاروایي داسې وڅېړو لکه ځنګه ، چې د فنکشن یا تابع (بلواک) د افقي محور (پروت - x– محور (abscissa)) باندې پرلبپسې یا ترادفونه یوې پولې یا حد(تکي) ته ورنږدېکیدنه. دا لکه په پورته ننوتنه کې، چې پرلپسې یا ترادفونه په پروت محور یوې پولې ارزښت ته ځي. وبه ګورو، چې پوله یا حد په ریاضیاتو کې ددې لپاره کارول کیږي، چې مشتق وپیژنو

فعالیت :

-ایا تاسو په ورځني ژوند کې د پولې(حد) د کلمې سره بلد یاست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلګه راوړی شئ، چې یوې پولې ته له دواړو لورو، له ښۍ و کیڼ لورته او همداړول له کیڼ و ښې لورته نزدی شی یا لاړ شی؟

په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو پوله :

یادونه: موږ له دې وروسته د پولې په ځای پوله ارزښت لیکو، چې دا ټیک زموږ غوښتنه په ګوته کوي.

فعالیت ۱ : یوه تابع $f(x) = x + 2$ په پام کې ونیسی، چې پروتولاړسیستم یا سیستم قیمت وضعیه کې ټکی $P(2,4)$ لري

۱ - د تابع جدول وکاږی.

۲ – د تابع ګراف وکاږئ

۳ - $f(2)$ پیداکړئ او د x خوزښت(حرکت) باندې بحث وکړئ که x د 2 ارزښت ته دواړو لورونزدې شي

۴ - د x پولې ته تلنه په ګراف(څیره) کې روښانه کړئ.

بیلګه ۱ :

یوه تابع $f(x)=2x$ او یوټکی P_0 دې ورکړ شوی وي، چې کواوردینات($3/6$) لري.

۱) د تابع جدول وکاږئ

۲) د تابع کراف یا څیره , وکاږئ

۳) $f(3)$ پیداکړئ او د $f(x)$ تلنه باندې بحث وکړئ که x د "3" ارزښت ته نزدې شي

۴) د $f(x)$ پولې ته تلنه په څېره کې روښانه کړئ.

اوس غواړو دا پورته فعالیت روښانه کړو:

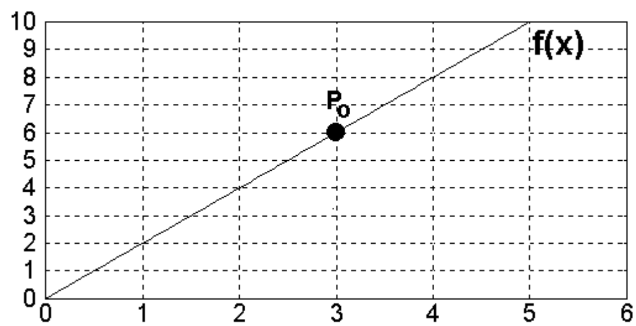
۱) د تابع جدول (دولی یې ګران لوستونکي پوره کوي)

x	-1	0	1	2
f(x)	-2	0	2	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲) د تابع څیره



۳) $f(3) = 6$ او غواړو د درې ارزښتونو څخه چې له ښی او کیڼې لور و ۳ ته
ورنږدې کیږي و ګورو، چې په دې درې ارزښتونو کې چیرته ځي. ددې لپاره لاندې
ارزښتونه په دوه جدولونو کې څیړو

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې له کیڼ لور وکښته ۲ ته نږدې کیږو او له ښي لور له کښته
و پورته لورته هم ۲ ته نږدې کیږو. بل جدول پروت کاږو
له ښي و کیڼ لور ته له کیڼ و ښي لورته

⟶ 1 ⟵

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

------------→ 6 ←------------

(c) ketabton.com: The Digital Library

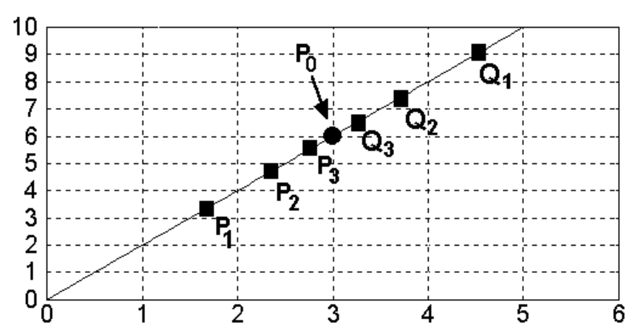
په درې پړاوونو کې د ،، f(3) " قېمت د "f(x) " قېمتونو سره پرتله کيږي. که "x" و "3" ته ورنزدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که "x " و "3" ته ورنزدې شي، نو د f(x) ،،پوله (حد)،، برابر په 6 دئ او دا داسې ليکو: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$

۴) اوس پورته ګراف په لاندې توګه رسموو او ښي او کيڼ لور ته موخه ور ټکي - لکه په پورته جدول کې - په نخښه کوو.

د لاندې څېړې له مخې ټکي ... $P_1, P_2, P_3,$ په پام کې نيسو، چې ټکي P_0 ته تل له کيڼ لور نزدې کيږي. او همداسې ټکي ... $Q_1, Q_2, Q_3,$ چې له ښۍ لور ټکي P_0 ته نزودې کيږي.

کتل کيږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و ټکي P_0 ته نزدې کيږي په همغه کچه د تابع ارزښتونه و ۶ نزدې کيږي (د ټکي $P_0(3,6)$ -قېمت له امله)



که په ګراف کې ځای x=3 ته نزدې شو، نو تابع ارزښت يا فنکشن ارزښت و قېمت(ارزښت) ۶ ته نزدې کيږي.

وايو: ۶ د فنکشنf(x) پوله ارزښت دئ د x-->3 لپاره (لوستل: x د 3 (درې) په لور تلنه).

د پوله ارزښت لپاره مو ليکډول ليکبنه(په پرله پسې يا ترادف کې) پيژندلی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

يادونه: د تابع پوله يا حد په هغه ځای کې چې تابع تعريف نه وي هم کيدی شي شته وي:

په پورته کې مو د يوه تابع f(x) حد په   x=3 ځای کې تر څېړنې   لاندې ونيو . دلته تابع په x =3 کې پيژند يا تعريف درلود.

اړيين نه ده ، چې تابع د   x=3   په ځای کې تعر يف وي، ځکه چې پوله ارزښت د x لپاره يواځې د   x=3 په نزدې کې تشريح شوې.

پام : په ځنو فنکشونو يا توابعو کې   ،،پوله يا حد ،، په داسې ساده ډول لاس ته نه شو راوړی - لکه د مخه - مګر د تابع د ساده بدلون له لارې دا کار سرته رسولی شو .

بېلګه ۱ :

تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; x \neq 1$ راکړ شوې

۱) د تابع جدول او ګراف وکاږی!

که صورو د x-1 سره لنډ کړو، نو لرو :

$$f(x) = x + 1$$

د تابع "f(x) " خوزښت تر بحث لاندې ونيسیکه "x" و   "1" ته نزدې شي يا همداسې که $x \to 1$.
له دواړو ياني له ګراف او جدول ځخه مونږ ليکو چې f(x) د ريل عدد"1 " په لور هڅيږي. نو

ځيره دې ګران
لوستونکي وباسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

له دې امله روښانه ده چې تابع په هغه ټکي کې تعريف(پېژند) نه لري، په هغه کې چې پوله (حد) شمېرل شوی.

يادونه : په پورته ډول تابع به سملاسي پسي وڅېړل شي، خو د هر څه لومړی پېژند راوړو:

پيژند (تعريف) :
تابع $f(x)$ يوه پوله L لري ، که x د يوه ريل عدد د c په لورتړلی لاړ شي،او داسي يې ليکو: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

فعاليت : ايا دا پيژند ربنتيا دی، که $f(c) \neq L$ وي؟

فعاليت: که ولرو: $|x|$ ، چې تل مثبت دی.

- دا بې له دې مطلق ارزښت څنګه ليکو؟

- ايا دا هغو اعداو کارولی شو، چې يو لله بل سره د شمېرنيزو نخښنو له لارې ترلي وي، يعني چې اعداد يو له بل سره د جمعې، تفريق ... له لارې سره ترلي وي؟

فعاليت: هغه توابع چې په يوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعريف نه وي ، څه بلل کيږي

بيلګه 2 : تابع $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ راکړ شوی

1) تابع وليکی، بې له دې، چې سومبول "| |" وکاروی:

2) د تابع ګراف وکاږی

3) د $f(x)$ ارزښت پيدا کړی، که x له ښي لور و 1 ته نږدې شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

4) د f(x) ارزښت پيدا کړی که "x" له کيڼ لور و 1- ته نزدې شي

5) وښاياست چې تابع f(x) څو پوله ارزښتونه لري .

يادونه: که يوه تابع چې په صورت او مخرج کې داړونده ارزښت لپاره صفر ولري او دا صفرځايونه له منځه تلی شي، نو دا ډول تابع په صفر ځای کې بې تعريف ده (يا تشيا؟ **functional gap**) لري.

بښوونه :

۱) تابع بې له سومبول "|" داسې ليکو:

$$f(x)=\begin{cases}1; x>0\\ -1; x<0\end{cases}$$

2) د تابع گراف انځوروو :

که ځيره ونه کتل شوه ساده ده

3) د f(x) ارزښت که x له ښي لور و 1 ته نزدې شي ، لاندې پوله راکوي

$$\lim_{x\to1} f(x)=1$$

4) د f(x) پوله ارزښت که "x" له کيڼ لور 1- ته نزدې شي، په لاندې ډول دی.

$$\lim_{x\to-1} f(x)=-1$$

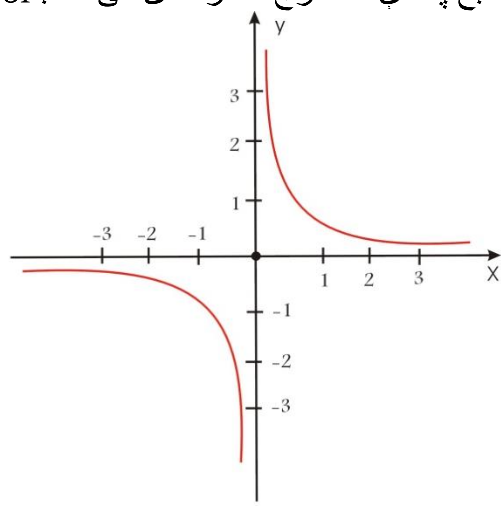
5) گورو چې x ،،دوه،، ارزښتونو (1) او (-1) ته نزدې شي ، نو دوه پوله ارزښتونه لري يعني $\lim_{x\to\pm1} f(x)=\pm1$، نو له دې امله f(x) پوله نه لري

بيلگه ۳ : تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ لرو، چې $X\neq0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ په x = 0 ځای کي تابع ارزښت نه لري یاني په کي x=0 تعریف نه ده. دا په صفرځای کي قطب(Pol) لري(۱).لاندې ځېره دې وکل شي.

(۱) یادونه : هغه تابع، چې مخرج یې صفر وي او صورت یې صفر نه وي، وایو چې تابع په دې د مخرج صفر ځای کی قطبPol لري.



و x=0 ته د نزدې کېدو لپاره ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\frac{1}{n}$ ټاکو.

د اړونده تابع ارزښتونو ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=n$ دی.

دا د n>0 لپاره یو نامحدود سعودي ترادف دی،
او د n<0 لپاره نزولي- یا متناقص ترادف دی.
دا په دې معنی، چې تابع f(x) په 0 ځای کي حد نه لري. دا هلته یو قطب لري.

قضیه : که تابع " f(x) " همغه پوله (حد) "L" ولري که "x" له ښی یا کیڼ لورې وه "c" ته نزدې شي، نو پوله(حد) شته دی او د "L" سره برابره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حدونو خویونه یا خواص : " **Properties of Limits** "

فعالیت :

په دې برخه کې د ثابتو – او کتمټ توابعو Identity function حدونه وشمیرئ

د لیمیټ خویونو څخه کار واخلئ

د پولینوم تابعو حد (پوله) پیدا کړئ

پوهیږو : په ریاضیاتو (شمیرپوهنه) کې ټول توابع چې راځي د ساده توابعو ګډوله والی combination دی، لکه د توابعو جمع(زیاتون، ضرب(څل) وېش او زنحیرونه compositon . دلته دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g(x) = (x)$ شته، که دواړه توابع سره یوځای ګړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, یا $L(x) = cx$, یا $m(x) = x^2$ او داسې نور

هڅه:د توابعو $f(x) = x, g(x) = x - 2$, څخه کار واخلئ، چې درې نورې توابع ترې لاس ته راوړئ

فعالیت :

ایا د یوې تابع پوله کېدی شي د تابع له حل څخه پیدا شي؟

د بېلګې په توګه، که ولرو

$$f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3\lim_{x\to 2}$$

نو دا تابع ولیکئ.

یادونه: د پورته کارونې په څیر همدا څه د هرې ثابتې تابع لپاره رښتیا دئ

د یوې ثابتې پوله ارزښت: که a او b ثابتې وي، نو $\lim_{x\to a} c = c$ باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کېتمټ یا ایډنټیک تابعو $f(x) = I(x) = x$ لپاره هم لرو ، که " c " کوم حقیقي عدد وي، نو x و c ته نږدې کیږي. دا ،، ټیک داسې ده لکه،، چې $f(x) = I(x)$ وc ته نږدې شي

فعالیتونه:

1)که $f(x) = x$ ،$g(x) = 2$ وي ، نو لرو :

1) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to1} g(x) = 2$

2) که وي $h(x) = f(x) + g(x)$ لرو

$$h(x) = x + 2$$

3) د$h(x)$ ګراف

رسم دې ګران لوستونکي د ځانونو لپاره وکاږي

4)

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

تاسو په یاد ولرئ یا ولیکئ

$\lim\limits_{x\to1} h(x) =$	$\lim\limits_{x\to1} x + 2 = 3$

او $\lim\limits_{x\to1} h(x) = \lim\limits_{x\to1} f(x) + \lim\limits_{x\to1} g(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هڅې

۱) که $f(x) = -2$ ، $h(x) = x$ وي، پيداکړی

a) $f(x) \pm h(x)$

b) $f(x) . h(x)$

۲) وهڅيږی، چې د پورته توابعو د a) او b)لپاره پولې وټاکی، که x عدد3 ته نږدې شي.

۳) که $g(x) = x$ وي،نو پيداکړی $\lim_{x \to 4} 4x$.

۴) که $h(x) = x$ ، $f(x) = -2$ وي پيدا کړی

a) $f(x) + h(x)$

b) $\lim_{x\to 2} (f(x) + h(x))$

c) $\lim_{x\to 2} h(x) + \lim_{x\to 2} f(x)$

بيلګه ۳ : د $g(x) = \sqrt{3-x}$ ګراف وکاږی او پيدا کړی

a) $\lim_{x\to 2} f(x)$,   b) $\lim_{x\to -1} g(x)$;   c) $\lim_{x\to 3^-} g(x)$

حل:

دلته دې ګراف وکښل شي....

له ګراف څخه

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 1,$$

الف- په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 2} (3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له ګراف څخه $\lim_{x\to -1} g(x) = 2$

يادونه : $\lim_{x\to -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)} = \sqrt{4} = 2$

c) $\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)} = \sqrt{0} = 0$

ګڼ دلا يل شته چې پولې شميرنه ساده کوي، موږ. به دا لاندې بې له ثبوته ومنو که f او g توابع وي C او L او M ريېل عددونه وي، داسې چې باور ولري :

نو $\lim_{x\to c} f(x) = L$, او $\lim_{x\to c} g(x) = M$,

1) $\lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} ((f(x) + g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim_{x\to c} (f-g)(x) =$

$\lim_{x\to c} ((f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim_{x\to c} (f.g)(x) = \lim_{x\to c} (f(x) . g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x) = L . M$

4) $\lim_{x\to c} (\frac{f}{g})(x) = \lim_{x\to c} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M}$; $(M\neq 0)$

5) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(د $f(x) \geq 0$ لپاره او د ټولو x ارزښتونو لپاره چې c ته نږدې کيږي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : موږ لاندې تابع لرو:

$f(x) =$	$x^2 - 1$ $x - 1$ $2x + 1$	$x \leq 0$ $o < x < 2$ $x \geq 2$

پیدا کړی

$$a)\ \lim_{x\to -2} f(x) \quad b)\ \lim_{x\to 0} f(x) \quad c)\ \lim_{x\to 4} f(x)$$

$$d)\ \lim_{x\to 2} f(x) \quad e)\ \lim_{x\to 1} f(x)$$

حل :

$$a)\ \lim_{x\to -2} (f(x) = \lim_{x\to -2} (x^2-1) = (-2)^2 - 1 = 3$$

$$b)\ \lim_{x\to 0} f(x);\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1$$

$$= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2-1) = -1$$

حد شته او $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ دی:

$$c)\ \lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} (2x+1) = 2\times 4 + 1 = 9$$

$$d)\ \lim_{x\to 2} f(x);$$

له ښي لور $\lim_{x\to 2^+} (2x + 1) = 2\times 2 + 1 = 5$

له کيڼ لور $\lim_{x\to 2^-} (x-1) = 2 - 1 = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله پوله (حد) نه شته

e) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (x-1) = 0$

بیلګه: $\lim_{x\to 2} f(x)$ ، پیدا کړی، که $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ وي

حل:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (2x^2 - 3x + 5)$$

$$= \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= 2\lim_{x\to 2} x^2 - 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$$

2 + 5 = 7× 4 - 3 ×= 2

فعالیت : که $\lim_{x\to -2} f(x) = 3$ نو پیدا کړی $\lim_{x\to -2} (f(x))^n$

یادونه:

د یوه پولینوم لیمیټ ټیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوه فنکشن لیمیټ

بیلګه ۶ :

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$ وي دې

$\lim_{x\to 3} f(x)$ ، پیدا کړی

حل : $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی

که x و 3 نزدې شي پوله یا حد کیدی شي د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{3^2 - 2\times 3 + 5}{2\times 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

د راشنل- نسبتي- یا کسري فنکشنونو پولې

موږ دا لاندې د پولینومونو ویش لرو

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{n-1}x^{m-1} + ... + b_0} \ ; b_0 \neq 0$$

په پورته پولینوم ویش کې که x=o وي، نو $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي د $b_0 \neq 0$ سره.

که n<m وي او x ناپای ته لاړ شي، پولینومویش صفر ته ځي

که n>m وي او x ناپای ته لاړ شي، د پولینوم ویش د ناپای په لور ځي.

که n = m وي، نو $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n}{b_m}$ لرو

پام : د نسبتي یا کسري فنکشنونو (ناطقو توابعو) پوله ارزښت (حد) غواړو پیداکړو.

ددې لپاره چې د ،،ویاندو،، توابعو پولې پیداکړو، که شته وي، نو د مختلو لارو یا متودونو څخه کار اخلو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهيږو، چې د پولينومي توابعو پوله (حد) - د يوه ورکړ شوي x ارزښت لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر ، چې د جمعې . تفريق،ضرب او وېش په څېر ورکړ شوي دي وشميرو.

که ولرو : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ نو د تابع خواص د $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ لپاره ساده

کو چې د پورته پولينوم ويش، چې ګوياتابع ده پوله يا حد وشمېرو.

. بيلګه ۱ : پيداکړئ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}$

که $x = 1,$ وي، نو تابع تعريف ده او لرو

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

(Substitue) ځاي په ځای کړو $x = 1$ که

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ نو لاس ته راځي

بيلګه ۲ : پيدا کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}$

حل : تابع په $x = 0$ کې تعريف دی، نو لرو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$$

بيلګه ۳ ؛ پيداکړئ : $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف ده، نو لرو

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه وي، نو د مختلفو متودونو څخه کار اخلو، چې پوله(حد) پیداکړو، که شته وي.

بیلګه ۴ : پیداکړئ $\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل : دا چې تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف نه ده، نو پوله(حد) د تابع د حل له لارې نه شي پیداکېدی. دا کېدی شي داسې پیدا کړو، چې تابع په ضریبونو تجزیه کړو .

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}=$$

د تابع پوله (حد) که x و 2 ته نزدې شي، دا مانا لري، چې x ‡2 دی.

دا راشنل فنکشن (ګونګه؟ تابع) رالنډېږي: $\lim_{x\to2}(x-4)$ او لاندې پوله لري:

$$\lim_{x\to2}(x-4) = 2-4 = -2$$

بیلګه ۵: پیداکړئ $\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګور، چې تابع په $x = 16$ کې تعریف نه ده یانې $x \neq 16$.

په یاد ولرئ چې : $\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ - د $\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ + جوړه(مزدوج) دی،او بر عکس.

حل: د جوړې(مزدوج) سره یې ضرب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} \times \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4} \lim_{x\to16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

$$= \lim_{x\to16} \frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$= \lim_{x\to16} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}$$

بیلګه ۶ : پیدا کړی $\lim_{x\to3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل : تابع په x=3 کې تعریف نه ده ، نو مخرج او صورت د محرج په مزدوج ضربوو او لرو:

$$= \lim_{x\to3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \lim_{x\to3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= \lim_{x\to3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$

$$= \lim_{x\to3} -1(\sqrt{x+1}+2) \lim_{x\to3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= -(\sqrt{3+1} + 2) = -4$$

بیلګه ۷ : پیداکړی $\lim_{x\to1} \frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف نه ده، نو په لاندې توګه مخ ته ځو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1} \quad \lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

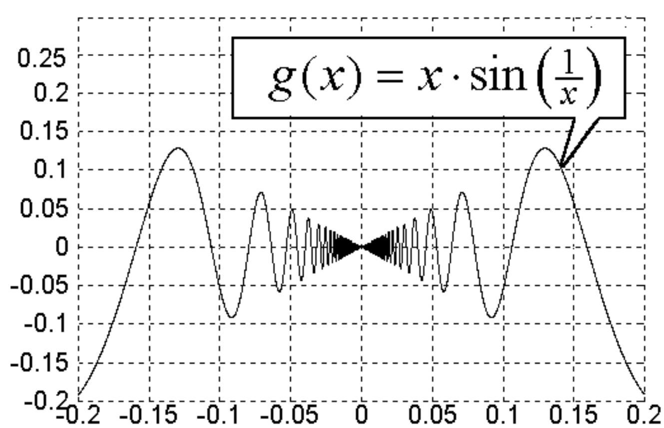
$$= \lim_{x\to1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$= \frac{10}{-2} = -5$$

د مثلثاتي توابعو پولې



بیلګه:

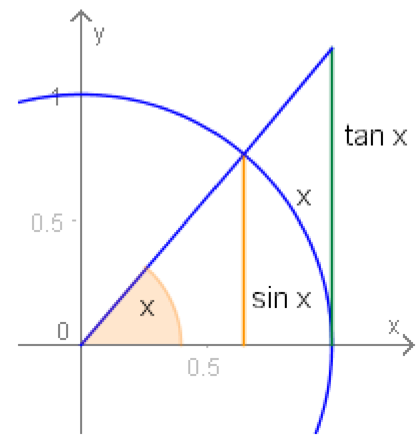
(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه ؛ که x په رادیان ورکړ شوی وي ،
نو $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ غواړو وټاکو.

یادونه : تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ناجوړه(طاق) دی

د دې لپاره چې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ پیدا کړو، غواړو مخ له مخه لړ فکر په کار واچوو.

د ښووني لپاره تري کار اخستلو په موخه دا مخامخ ځېره باسو او په لاندي توګه مخ ته ځو:



په یوه انټروال $x\epsilon[0,\frac{\pi}{2}[$ کې د رسم له حالته سملاسي لاندې نا برابرون یا نامسوات باور لري

$$\sin x \le x \le \tan x$$

موږ له دې سره لرو $\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x}$ او $x>0$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\sin x}$$

او د $\sin x$ سره ضرب (ځل) له امله لاندې نامساوات لاس ته راځي

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

د پولې ته تګ له امله لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1=\lim_{x\to +0}\cos x \quad , \quad \le \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\le 1$$

دا په دې معنا دی، چې **غوښتونکې پوله ارزښت 1 دی.**

د دې ښوونې سره موږ ښی پوله ارزښت پېداکړ، د کيڼ پوله ارزښت لپاره په ورته توګه مخ ته ځو او پوله ارزښت د $x<0$ لپاره پيدا کوو، يعني له دې ځخه هم لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

که $-\frac{\pi}{2}<x<0$ او $x=-\alpha$ و ليکو ، نو دا لاندې لاس ته راوړنه هم لرو

$$\frac{\sin x}{x}\ \frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{-\sin\alpha}{-\alpha}=\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha}=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad \text{.............(4}$$

د مساواتو (4) + (3) څخه غوښتنه لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

بيلګه ۱ : حل کړی $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$

حل : وي دې $2x=\alpha$ که $x\to 0$ نو $\alpha\to 0$ او

$$\frac{\sin 2x}{x}\ 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{2\sin 2x}{2x}=$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي :

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2 \times 1 = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$$

بیلګه ۲ : وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y = 5x$ وي ; او $x\text{->}0$ ، نو $y\text{->}0$ هم

$$\frac{5}{2}\,\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2}\,\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} = \frac{\sin 5x}{5x}$$ او

$$= \frac{5}{2}\,\frac{\sin y}{y}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\,\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}$$ له دې امله لرو

$$1 = \frac{5}{2} \times = \frac{5}{2}$$

قضیه : په درېګوډي ګچ یا مثلثاتو کې بل غوره پوله ارزښت دا لاندې دی.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

بیلګه : وښایاست : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$

حل : وي دې $3x = \theta$، نو $x = \theta/3$ ، که $\theta \to 0$ نو $x\text{->}0$

$$\frac{\tan 3x}{x} = 3\,\frac{\tan\theta}{\theta} = \frac{3\tan 3x}{(3x)}$$ = له دې امله

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $3 = 3 \times 1 = 3$

بیلګه : حل کړی $\lim_{x\to 0} \frac{5\tan 2x}{7x}$

حل : وي دې $2x = y$ ، نو $x = \frac{y}{2}$ دی

که $x \to 0$ وي،نو $y \to 0$ دی

له دې امله

$$\frac{5\tan 2x}{7x} = \frac{2\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5}{7}$$

$$= \frac{\tan 2x}{2x} \frac{10}{7}$$

$$= \frac{10}{7} \frac{\tan y}{y}$$

نو

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\tan 2x}{7x} = \lim_{y\to 0} \frac{10}{7} \frac{\tan y}{y}$$

$$= \frac{10}{7} \lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y}$$

$$= \frac{10}{7} \times 1 = \frac{10}{7}$$

پای

وهڅيرى ، چې وښاياست:

(c) ketabton.com: The Digital Library

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

الف) تانجنت $\tan x$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو ولیکئ

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو و لیکئ

پ) پوله پیدا کړئ

ت) ایا قضیه رښتیا یا ټیک ده؟

په یاد ولرئ:

$$\cos^2 x + \text{sim}^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 - 2\sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \end{cases}$$

بیلګه ۵ : حل کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

حل : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x$$

$$2 \times 1 \times 0 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ : وشمیرئ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

حل : شمیرو

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\tan 3x}{3x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}}$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\tan}{\theta}}{3\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{4}$$

بیلګه ۷ : وشمیرئ ؛ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$

حل : شمیرنه

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\ \sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin -x}{x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 5x \sin x}{x^2}$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$=2 \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 10 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad (y = 5x)$$

$$= 10 \times 1 \times 1 = 10$$

بیلګه ۸ : پیدا کړئ $\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha}$

حل :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{2\cos 3(x+\alpha)\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2 \lim_{x\to\alpha} \cos 3(x+a) \lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2\cos 6\alpha \lim_{x\to\alpha} \frac{3\sin 3(x-\alpha)}{3(x-\alpha)}$$

$x - \alpha = y,\ x \to \alpha \Rightarrow y \to 0$ نو لاس ته راځي وي دي

$$= 2\cos 6\alpha\ (3) \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 6\cos 6\alpha \cdot 1 = 6\cos 6\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ياد ولرئ : مثلثاتي کټمټوالی

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}$$

$$2\cos\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}$$

بيلګه ۹ : حل کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{|\tan x|}{x}$

حل : $x > o$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\tan x|}{x} = +\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\tan x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x}$$

$$= -1$$

لرو $\lim_{x\to 0^+}\frac{|\tan x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^-}\frac{|\tan x|}{x}$

ګورو، چې د پورته تابع پوله يا ليميټ نه شته

ناپرېکيدنه(متماديت)"Continuity"

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې لولو ، چې یو فنکشن یا یو تابع په یوه ټکي یا یوه اینتروال کې څنګه ځان نیسي یا کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې ټوب وهي، یا پرې کیږي او که یا په نه پرېکیدنې توګه د اینتروال په دننه کې ځغلي.

د تابعو ناپرېکیدنه Continuous functions

په دې موضوع کې مورږ د د یوې تابع د ناپرېکیدنې(متمادیت) په هکله څېرنه کوو او د ناپرېکیدنې یا متمادیت پیژند(تعریف) ورکوو.

// رسمه // // رسمه // // رسمه //

(1) (2) (3)

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = x^2 -1$

دا رسمونه دې هم ګران زده کوونکي وکاږي، زه د رسم کولو ستونځې لرم(تمرین)

b دې د تابع f په پیژندورشو یا تعریفساحه کې یو حقیقي(ریبل) عدد وي. تابع f په bکې ناپرېکیدونکي (متمادي) ،بلل کیږي، که د ټکي (b.f(b)) نږدې د f ګراف وکښل شي، بې له دې، چې پنسل له کاغذ پورته کړی شي.

له دې امله تابع $f(x) = x^2 -1$ او تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ په ټکي x=b کې ناپرېکیدونکي دي.

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ په x=o کې ناپرېکیدونکي نه ده یانې پرېکیدونکي ده یا ټوپ وهي.

تابع په x=a کې پرېکیدونکې ده، که پرې شي(تشیا ولري)، ټوپ ووهي او یا ماته شي.

لرو $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په $x = o$ کې نه شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱ : وي دې $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 ; & x \geq 1 \\ 1 - x ; & x < 1 \end{cases}$

الف) ګراف وکاږی   ګراف

ب) پیدا کړی $\lim_{x \to 3} f(x)$

پ) پیداکړی $\lim_{x \to 1} f(x)$

که تابع په x=3 او x=1 کې نابرېکیدونکې وي

حل :

الف) ګراف کیڼ لور ته کښل شوی دی

ب) $\lim_{x \to 3} f(x) = (2x + 1) = 7$
$f(3) = 7$

پ)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - x = 0$$

له ب) او پ) څخه لرو

$$\lim_{x \to ^+1} f(x) \neq \lim_{x \to ^-1} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 3$ ناپرېکیدونکې او $x = 1$ کې پرېکیدونکې ده یا نامتمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ : وي دي $f(x) = \frac{x^3 + x}{x};\quad x \neq 0$

$=3 \quad ;$

// رسمه // الف) فنکشن رسم کړی

ب) بحث وکړی، چي تابع په $x = 2$ او $x = 0$ کي ناپرېکیدونکي ده او که نه

حل : الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	1	2	5

ب) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x\to 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دي امله د f پوله (حد) شته او $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ، نو تابع په $x = 2$ کي متمادي یا نه پرېکیدونکی دی

وي دي $x = 0$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^+}$$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\,3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دا مانا لري چې $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ په دې مانا دی چې $f(0) = 3$.

دا دا مانا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(o)$

تابع په $x = 0$ کې پرېکيدونکې(نامتمادي) ده

که له دې شرطونو کوم يو شرط پوره نه وي نو تابع پرېکدونکې(نامتمادي) ده

بيلګه ۳: **وي** دې

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}، \quad x \neq -3$$

ايا تابع په $x = -3$ کې ناپرېکېدونکې ده؟

حل) تابع $f(-3)$ تعريف نه دی، له دې امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه دی

پيژند(تعريف) :

f دې يوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اينتروال کې چې $x=c$ لري تعريف وي.

تابع f په $x = c$ کې ناپرېکيدونکی بلل کيږي، که دا لاندې شرايطو پوره وي.

۱) $f(x)$ تعريف دی ۲) که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي)

۳) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره متمادي وي ، نو تابع په وازاينتروال (a, b) کې هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۴ : وي دې $f(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad x \le 1$

$= 4+x \quad ; \quad x > 1$,

وګورئ، چې تابع چېرته ناپرېکېدونکې ده او چېرته پرېکېدونکې.

حل : په $x = 1$ کې f تعریف دئ

$f(1) = 3.$

$\lim_{x\to^- 1} f(x) = \lim_{x\to^- 1} (2x^2 + 1) = 3$

$\lim_{x\to^+ 1} f(x) = \lim_{x\to^+ 1} (4+x) = 5$

$\lim_{x\to^- 1} f(x) \neq \lim_{x\to^+ 1} f(x)$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې پرېکېدونکې (نامتمادي) ده

بیلګه ۵ : وي دې

$=2x^2 + 1 \;; \;\; x < 2$

$f(x) = \quad 3 \qquad x = 2$

$=x + 3 \;\; ; \;\; x > 2$

د تابع $f(x)$ متمادیت په $x = 2$ کې تر بحث لاندې ونیسئ

حل : تابع $f(x)$ په $x = 2$ کې تعریف ده او لرو $f(2) = 3$

$\lim_{x\to^+ 2} f(x) = \lim_{x\to^+ 2} (x + 3) = 5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\lim_{x\to^{+}2} f(x) = \lim_{x\to^{-}2} f(x)$$

$$\lim_{x\to^{-}2} f(x) = \lim_{x\to^{-}2} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

دا چې $f(x) = 3$ دی، نو له دې امله ($\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

دا په دې مانا دی، چې تابع په $x = 2$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

د ناپرېکیدونکو یا متمادي توابعو خویونه

فعالیت:

۱) د توابعو f او g جمع (زیاتون) پیداکړی

$$(f+g)(x) = \ldots\ldots$$

۲) د f او g توابع په x=2کې متمادي(ناپرېکیدونکي= دي، نو :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ldots\ldots.. \ \& \ \lim_{x\to a} g(x) = \ldots\ldots$$

۳) د پوله ارزښتونو (حدونو) ارزښتونه وکاروئ

$$\lim_{x\to a} (f + g)(x) = \lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$$

$$\ldots : \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (f + g)(a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله (f+g) په x=a کې متمادي دي.

که تابع f اوg په x=c کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په x=c کې متمادي ده

۱) د توابعو جمع $f+g$

۲) د توابعو تفريق(کمون) $f-g$

۳) د توابعو ضرب(ځل) $f.g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}; g \neq 0$

بيلګه ۱ : وي دې

$$f(x) = \sin x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 2$$

نو ۱) f او g په x=1 کې متمادي دي.

۲) وښيری، چې الف) $\sin x + x^2 + 3x - 1$

ب) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2)$

په x=1کې متمادي که نامتمادي دي

حل :

$$1) \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 2;$ نو f په x = 1کې متمادي دی

نوg په x = 1 کې متمادي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم خوي وخیرۍ

2) a) $\sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$

۲) الف)

$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کې‌متمادي ده

ب) b) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x).\, g(x)$

$= (f.g)(x)$

نو د ناپرېکیدونکو- یا متمادي توابعو ضرب (حَل) په $x = 1$ کې متمادي دی

بیلګه ۲ : وي دې

$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = 3x - 2;$

وخیرۍ، چې ایا $f(x).\, g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده

حل :

$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$

$\lim_{x \to 2} g(x) = 4 = g(2)$

$f(x) . g(x) = 3x^2 + x - 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2} f(x).\, g(x) = 3(4) + 2 -2 = 12$$

$$= \lim_{x\to 2} f(x). \lim_{x\to 2} g(x)$$

$$= f(2)\, .\, g(2)$$

له پورته څخه لاس ته راځي، چې $f(x).g(x)$ متمادي دئ

په کېن لور بند ايتروال $[a,b]$ کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي يا ښايي، چيرته چې $f(a) \neq f(b).$ دئ.

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ نو ګراف له ټکي $(b, f(b))$ څخه نه شي انځورېدلی تر څو پرته (افقي)کرښه $y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي .

(انځور راځي)

له پورته څخه ليکلی شو:

که تابع f په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي(ناپرېکېدونکې) اوk د b او ترمنځ پروت وي، نو هلته کم له کمه يو عددc د $f(a)$ او$f(b)$ ترمنځ شته داسې چې $f(c) = k$ دی

بيلګه ۳ : وي دې $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ \ x \in [1,2]$

وښايئ، چې يو $c \in (1,2)$ شته داسې،چې $f(c) = 11$ **وي.**

حل : $f(x)$ يو پولينوم دئ نو f په بند اينتروال $[1,2]$ کې متمادي دئ. لرو

$$f(1) =1^3 + 4\, (1) = 5;\ f(2) = 8 + 4\, (2) = 16$$

$$f(1) \neq f(2) \text{ او } 5 < 11 < 16$$

له دې امله يو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ : وي دې

$f(x) = \ 2x + 4; \ \ -1 \le x < 2$

$; \ \ 2 \le x \le 20 |x-10| \ =$

نو

الف) و ازمایی، چې تابع متمادي ده   ب) و ازمایی، چې یو $c \in (-1, 20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړی.

حل :

$f(x) = 2x^2 + 4 = 8 \lim_{x\to 2^-}$

$f(x) = 10 - 2 = 8 \lim_{x\to 2^+}$

له دې امله لرو

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 8$

$f(x) = 10 - 2 = 8$

ګورو چې تابع په $[-1, 20]$ کې متمادي دی

b) $f(-1) = 2x - 1 + 4 = 2$

$f(20) = |20-10| = 10 \quad \Rightarrow \ f(-1) \neq f(20)$

په دې اساس لرو $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو $c \in (-1, 20): \ f(c) = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2).$

$= 6 \Rightarrow |x-10|$

$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$

یا $10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$

د c ارزښت دی $1, 4, 16$

بیلګه ۵ : وي دې

$f(x) = 2 \sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$

وښایی چې $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ شته د کومې لپاره چې باور لري $f(c)=4$ او c پیداکړی.

حل : د تابع f د ساین تابع ده، نو له دې امله f متمادي(ناپرېکېدونکی) دی

$f(-\frac{\pi}{2}) = 2 \sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$

$f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ نو موږ لرو :

تابع f متمادي ده او لرو $1 < 4 < 5$

دا په دې مانا چې $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ شته، د کوم لپاره چې $f(c) = 4$ صدق کوي

د دې لپاره چې c پیدا کړو نو لرو

$f(c) = 2 \sin c + 3 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

د ګراف څخه څرګندیږي، چې f په ایتروال [a,b] متمادي دئ ، f(a) او f(b) متضادې مخنخښې(علامې) لري، نو c د f(a) او f(b) ترمنځ د منځ ارزښت جملې له مخې د K=0سره کم له کمه یو C د a او b ترمنځ شته، چې لاس ته ترې راځي . f(c) = 0

دا په دې مانا چې x=c د f(x) = 0 مساواتو یو حل دئ . انځور شته

بیلګه ۶ : وي دې $f(x) = x^3 + 5x - 23$

وښایئ، چې تابع f د x -محور په اینتروال (2.3) کې غوځوي.

حل : f پولینومتابع ده ، نو f په اینتروال کې [2,3] متمادي دئ.

$$f(2) = 2^3 + 5\,(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5\,(3) - 23 = 19$$

او د متضادو مخنخښو(عالمو) سره $f(2) \neq f(3)$

له دې امله د $c \in (2,3)$ لرو چې $f(c) = 0$ دی

د څپرکي ټولګه " Chapter Summary "

پیژند: تابع f(x) یو حد L لري، کهx ترلیي یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. دا په دې معني چې د f(x) لپاره، چې ترلی و L ته ځي دا دی، چې x ترلیclose to c و ته لاړشي او داسې یې لیکو : $\lim_{x \to c} f(x) = L$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قصیه : که $f(x)$ همغه پوله ارزښت L ولري ،که x د ښی یا کیڼې لور و c ته نزدې شي، نو پوله ارزښت شته او د L سره برابر دی.

د پوله ارزښت یا حد خویونه :

که f او g توابع وي، c;L او M حقیقي اعداد وي داسې چې $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$

او $\lim\limits_{x\to c} g(x)=M$ ، نو لاندې لرو:

$$1)\ \lim_{x\to c}(f+g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)=L+M$$

$$2)\ \lim_{x\to c}(f-g)(x)=\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x)=L-M$$

$$3)\ \lim_{x\to c}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c} g(x)=L\cdot M$$

$$4)\ \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M};\ (M\neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$$

(د $f(x)\geq 0$ او د x د ټولو ارزښتونو لپاره ، چې c ته ور نزدې کیږي.

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لر: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

پیژند : f دې یو تابع وي، چې د ټولو x لپاره په یو واز انتروال کې چې x = c ولري ،تعریف وی، نو وایو چې f په x = c کې متمادي، د لاندې شرایطو لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

1) f (x) تعریف دی 2) $\lim_{x\to c} f(x)$ شته دی

3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټول (a, b) $x \in$ لپارره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) کې متمادي ده.

پېژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال [a, b]کې متمادي ده، که تابع له ښي لور په x = a ې متمادي وي او له کيڼ لور په x = b کې او د واز انتروال (a, b) په هر ارزښت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه : که f او g په x = c کې متمادي وي، نو دا لاندې توابع هر یو په x = c کې متمادي دی.

اول) د جمعې f+g تابع

دويم) د تفريق f-g تابع

دريم) د ضرب f.g تابع

څلورم) د ویش تابع

د منځني ارزښت قضيه: که تابع f په بند انتروال [a,b]کې متمادي وي او k د f(a) او f(b) ترمنځ یو عدد وي، نو کم له کمه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

ترنه

د x->±∞ لپاره پوله ارزښت (حد)

اول : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- -

د ۵ وېشنه په يوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي يانې □□ .

گراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته گراف ته ور نزدې کيږي.

دويم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1}= \frac{-3}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي يانې □□ .

گراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته گراف ته ور نزدې کيږي.

درېم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}= \frac{5}{+\infty}=0^{+}$$

په مخرج کې فقط x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت کيږي.که ۵ په يوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو يو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، يانې
گراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط له پورته لور ور نزدې کېدنې سره .

څلورم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}= \frac{-3}{+\infty}=0^{-}$$

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت ميږي.. د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت عدد باندې يو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي يانې □ -.

گراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط کښته گراف ته ور نزدې کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرېښودنې - یا ترې صرفنظر کونې اصول

اول :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}= \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^{\pm}$$

په صورت کې د x توانونه، په مخرج کې د x^2 توانه په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي. که ۱ په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد ووېشل شي. نو □□ ترې لاس ته راځي.

ځېره G_f پروت اسیمپتوت(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنږدې کیږي.

دویم

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}= \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

- په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیونو او له ټولو ثابتو تریږو (صرفدظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول پوله ارزښتونه □□ لاس ته راځي.

ځېره G_f مایله اسیمپتوتي راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د ۱ په اندازه ستره ده.

دریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}= \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

په صورته او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تېرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولې پولې په روښانه توګه 2/3- راکوي.

ځيره G_f پرته اسيمپټوت راکوي ، چې $y=-2/3$ ده.

خلورم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

په صورت کې د x^2 څخه کوچنيو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنيو توانونو او همداسې له ثابتو تېرېږو (صرف دظر پرې کوو) . که په ووېشل شي ، نو يو کوچنې مثبت يا منفي عدد يانې $0^{\mp}$ ترې لاس ته راځي.

ځېره G_f يو پروت اسيمتوت $y = 0$ لري،چې له پورته او کښته لور ورنزدې کيږي.

شميرنيز حلونه

دويم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(قوسونو) راوستنې او بيا د x^2 سرره لنډونې وروسته مخرچ د ۱ په لور ځي او صورت د $+\infty$ په لور ، نو

ترمونه $2/x$ او $1/x$ و صفر ته نزدې کيږي.

ځيره G_f يوه مايله اسيومپټوت لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په ۱ لويه ده.

دريم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(-2-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}}=-\frac{2}{3}$$

- که x^2 له نوکانو راووېستل شي او بيا لنډ شي،نو صورت د صفر په لور ځي يا صفر ته نزدي کيږي;مخرج ,۱ ته نزدې کيږي، ځکه ټول ترمونه د او و صفر ته ځي په صورت فقط ترم د صفر مخنخښه ټاکي.

خېره پرته اسيمپټوت لري له پورته او کښته نزدې کيدنې سره.

خلورم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x يعنې x^4 له نوکانو دباندې نيسو او بيا په ترتيب شمېرنيزه عمليه مخ ته بياوو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټوليز خويونه :

او ل : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\quad\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- -----------------------------------

په پورته بیلګه کې داسې مخ ته تللي ي،چې په صورت کې له ټولو عددونو ته‌ړېږي، چې د خپلواکې متحولې توان له ۱ کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولو‌ه ۲ څخه کوچنې توان څخه تېړېږو. ګورو، چې په صورت کې پاتېکیږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناباى په لور ځي.

دویم : $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2} = 0^{\pm}$$

په پورته بېلګه کې په صورت کې له ۱ او مخرج کې له ۲ څخه تېړېږو او بیا صورت او مخرج په x ویشو، چې لاس ته رانه یې یو یې د یوه ثابت عدد وېشل وي په x . چې د □□ x سره تابع و $0^{\pm}$ ته ځي.

بیلګه ۳ : لرو : $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x} =$$

په صورت کې له ۲ او مخرج کې له 2x څخه تېړېږو او د x^2 سره لنډوني وروسته د x^2 سره لنډیږي او په دې ډول لاندې پایله لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x} = -\frac{2}{3}$$

بیلګه ۴ : $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2} = 0^-$$

په صورت کې له ۱ او مخرج کې له اوو څخه تېړېږو او بیا له لنډوني وروسته یو ثابت عدد په ناپای وېشل کیږي، چې پایله یې 0^- دی، یعنې لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2} = 0^-$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹ . ۵ تمرینونه

۱ . د بلواکو پولی

۱ . ۱ لاندې پولی وټاکی

1.1.1. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

1.1.2. a) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{1+x}$ d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{32+x^5}$

1.1.3. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

1.1.4. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

1.1.5. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\dfrac{\cos x}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\cot x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

k) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}$

l) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

۱.۲ په ورکړشوو ځایونو کی د لاندي بلواکو کینږ او ښی پولې وټاکې

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

b) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$ für $x = 1$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ für $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ für $x = 0$

f) $f(x) = \dfrac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

g) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ für $x = 1$

h) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^{\frac{1}{x}} + 2}$ für $x = 0$

i) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

j) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ für $x = 1$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ für $x = -1$

l) $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}\, x$ für $x = -1$

۲ . ناپریکیدونکی بلواك : لاندي بلواك د کوم لپاره پریکیدونکی ځایونه لري، دا د کوم ډول دی او که ممکن وي، په کومه توګه دا له منځه وړ لکیدی شي.

a) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $y = \dfrac{x+2}{|x+2|} \cdot x$

c) $y = \dfrac{1-x}{1-|x|}$

d) $y = \dfrac{x+2}{x+2} + \dfrac{1}{x+1}$

e) $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x} - 2}$

f) $y = \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$

g) $y = \sin\dfrac{1}{x}$

h) $y = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

i) $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

j) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

k) $y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$

l) $y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

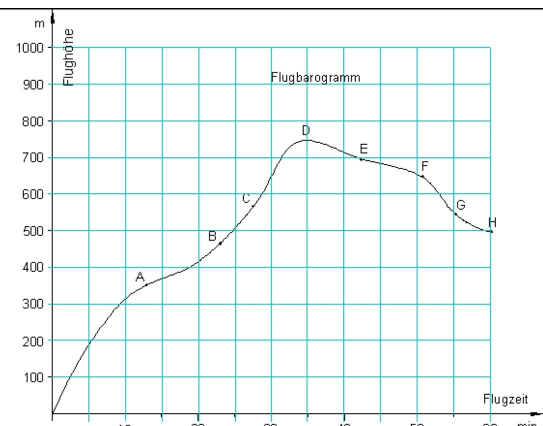
۲۰ . مشتقشمیرنه(رابیلیدنه)

II.1د تابع تغیر منځ ارزښت (منځنی قیمت) Average rate of change

دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو ، تر څېړني لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه د یوه یادښت په څېړ راوړم:

که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغیر منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږېږو ، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی ، میل اویا تانجنت دی او دا دریواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګېدنه)

په الوتکوکې د الوتنېدلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل د الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته ګراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونوجګوالی ښووول شوی.

-ایا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جګوالی زیات دی؟

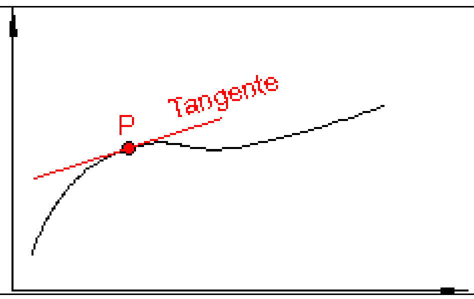
-ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

-ایا د یوې کرښې او منحني جګوالی هرچېرته توپیر لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :
۱ - ګورو، چې په یوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچېرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په ګوته کړو، چې هلته میل څیړل کیږي.

۲ - په لاندې بیلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده)کرښې میل هرچېرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جګوالي څخه غږیږو.

بریښي چې لاندې پېژند یا تعریف عاقلانه دی:

پیژند (تعریف): د یوې تابع ګراف میل (جګوالی) د P په یوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د میل د ګراف سره برابر دی	

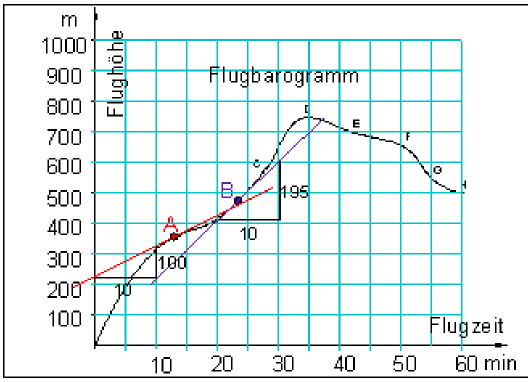
لیدل کیږي چې دلته یو تانجنت د کرښې تعریف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپېریال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه ور نږدې کیږي.

ددې پېژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه ګراف میل د یوې کرښې میل دی.

د ګراف د جګیدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.

د میل یا جګیدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل یا ساده ډول شمیرل کېدی شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د A په ټکي کي جګيدنه :

$$\frac{100\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

د B په ټکي کي جګيدنه :

$$\frac{195\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 19{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

زموږ د بیلګي لپاره میل یا جګیدنه په یوه ټاکلي ټکي کي د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

دA په ټکی کې : د الوتني وخت نږدې 12,5 min ، د میل یاجګیدني چټکتیا(سرعت) نږدې $10\frac{m}{\text{min}}$ ده

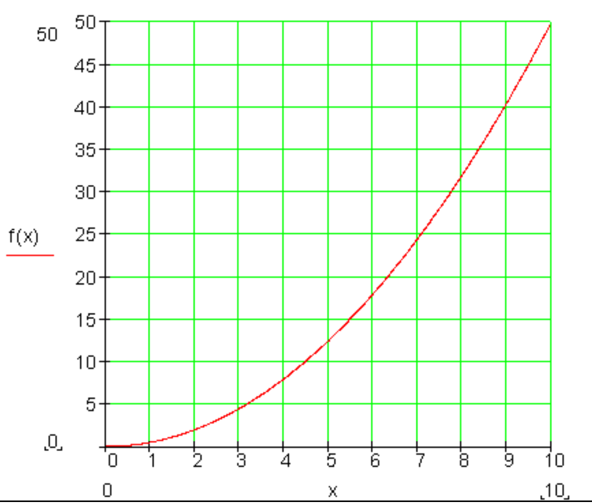
د B په ټکی کې : د الوتني وخت نږدې 23,0 min ، د جګیدني چټکتیا(سرعت) نږدې $19{,}5\frac{m}{\text{min}}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخې تعریف شوی ، چې د لمستکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A اوB په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کي د قناعت وړ نه دی.

II.2 په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):

معلومه ده ، چې یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت)وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي.وهلې لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لریوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې لیکلی شو.

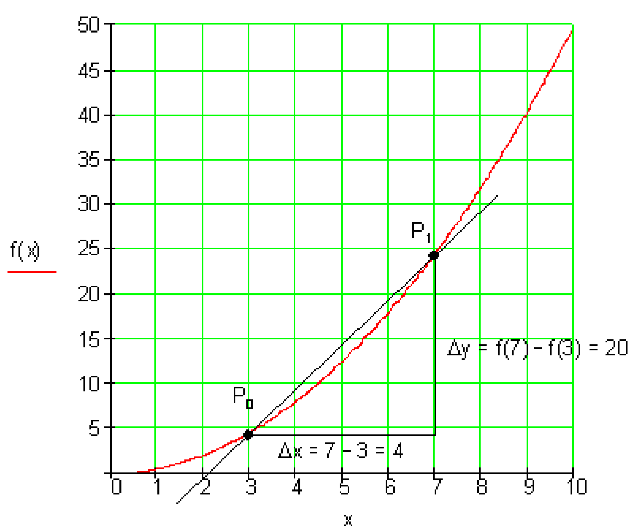
دلته د x وخت د ثانیې او د s لار د متر لپاره لیکو

$$s = f(x) = 0{,}5x^2$$

مخامخ : د تابع ګراف

اوس باید منځنی ارزښت(منځنی چټکوالی) Averagerat of change د ۳ ــمې او ۷ ــمې ثانیې ترمنځ وشمېرل شي.

ددې لپاره اړونده سیکانت انځوروو او د هغې چټکوالی شمیرو.



اوس دې د تغیر ارزښت (منځنی چټکوالی) د ۳ ــمې او ۴ ــمې ثانیو ترمنځ وشمیرل شي.

په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا چټکوالی څومره دی؟

د منځنی چټکوالي داسې مخ ته بوزی، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمنځ واټن تل کوچنی شي،داسې چې ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي.

د ۳ ــمې او ۷-مې دقیقې ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځنی تغیرارزښت (جګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(7)-f(3)}{7-3}=\frac{24{,}5-4{,}5}{7-3}=\frac{20}{4}=5$$

د ۳ ــمې او ۴ ــمې دقیقې ترمنځ

منځنی تغیرارزښت(منځنی جګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=\frac{8-4{,}5}{4-3}=\frac{3{,}5}{1}=3{,}5$$

دریمې دقیقې ته د ورنږدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3;x]$	$[3;4]$	$[3;3{,}1]$	$[3;3{,}01]$	$[3;3{,}001]$
$\Delta x = x-3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x)-f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په ګووته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي یا ورنږدې شي، نو د تغیر ارزښت(جګېدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنږدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیرارزښت (لحظوي جګیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.
که موږ فیزیکي لویې (واحدونه) په خپله بېلګه کې وکاروو، نو د تغیرارزښت (جګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتیا لپاره یوون(واحد) دی

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په ګوته کوي.

II.3 د لحضوي(د سترګو رپ) تغیرارزښت شمیرلو ته

شمیرنیزه تګلار

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینتروال $[3 ; \Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت جګوالی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5\left[9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2\right] - 0,5 \cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0,5 \cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3 + 0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغیرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅیږي ($\Delta x \to 0$) ،نو د منځنی تغیر ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 به لور هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغیرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور ري: $3+0,5\Delta x \to 3$

یا

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(3+0,5\Delta x) = 3$$

II.4کمښت ویش(د تفاضل(؟) ویش) Difference quotient

په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څېړنې لاندې نیسو.

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي:

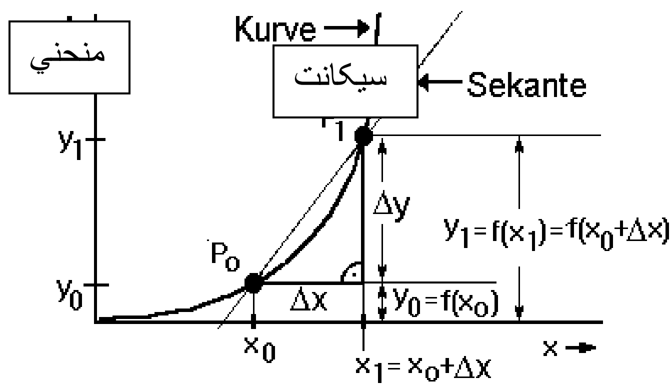
کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د ځګيدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د قاطع (seconce) پيژند : قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي(لاندې څېړه وګورئ)



پايله : د قاطع(غوڅووني secant) ميل يا ځګيدنه(ځګوالی): دا چې قاطع هم يوه کرښه ده نو ،،ميل (ځګوالی) ،، يې هم د يوې کرښې ميل په ډول شمېرل کيږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$m_S = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پيژند(تعريف)

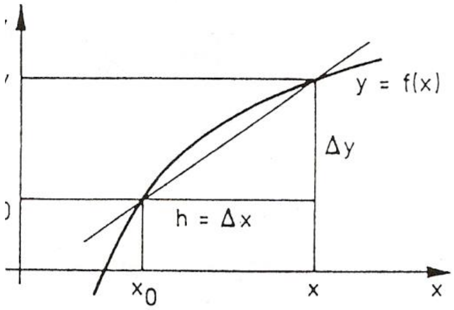
د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په يوه چاپيريال او په x_0 کې پخپله تعريف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بيل خو د چاپيريال په يوه خوښه يا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څيره دې وکتل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د تفاضل – یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



د پیژند لپاره خیره

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمېرنه ده. دا ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

بیلګه:
د $y=f(x)=3x^2-5x+4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3(x+h)^2-5(x+h)+4-(3x^2-5x+4)}{h}$$

$$=\frac{3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4-3x^2+5x-4}{h}$$

$$=\frac{6xh+3h^2-5h}{h}$$

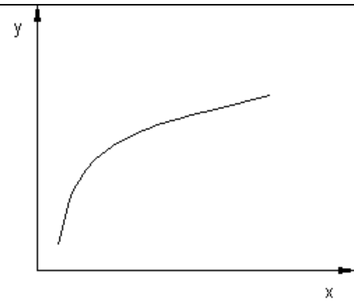
$$=6x+3h-5$$

II .2 مشتق Diffrentialquotient

(c) ketabton.com: The Digital Library

II.2.1 د غوڅوونې(تقاطع) جګوالي ښخه و د تانجنت جګوالي یا جګیدنې ته

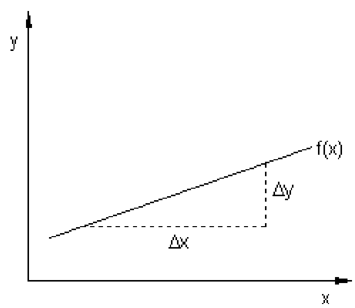
یو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.



که د تابع جګیدنې حالت په پام کې ونیسو ،نو ګورو چې د تابع جګیدنه په نزدې ټولو ټکو کې توپیر لري.

یوه ثابته جګیدنه، لکه په لانیز تابع ا $f(x) = a_1x + a_0$ کې د

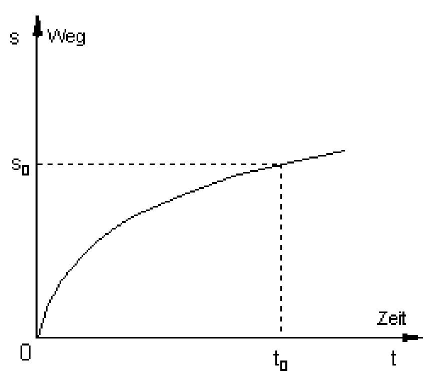
$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{konstant}$$



په زیاتو وختونو اړیینه ده ، چې د تغیرحالت(د جګیدنې حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړو.

نو له دې امله لحظوی چټکتیا(همغه وختیزه – یا سملاسي) $v(t_0)$ په لار- وخت دیاګرام کې وڅیړو.

د مشتقشمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي.

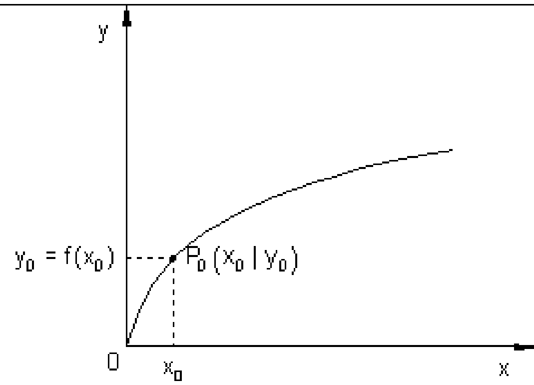


$t_0 \triangleq$	په پام کې نیولی سترګو رپ
$s_0 \triangleq$	تر دې سترګو رپ پورې وهلې لار

د یوه تابع د جګېدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نیونه بلل کیږي.

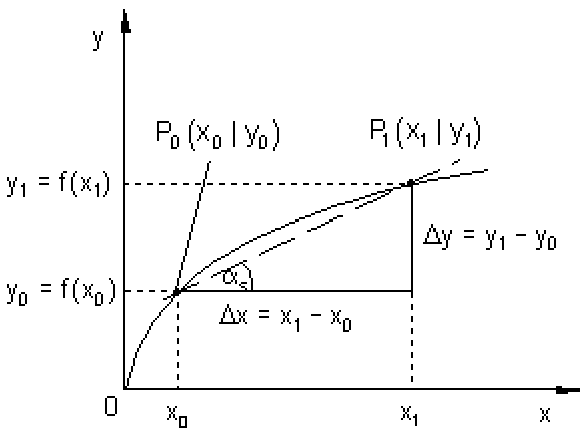
(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع $y = f(x)$ او د هغه گراف دي ورکړ شوی. په ټکي $P_0(x_0 | y_0)$ کې ورکړ شوی وي. ددې جګوالی پیداکړی شي.



ددي پرابلم د حل لپاره داسي مخ ته ځو، چي لومړی جګوالی په نزدي توګه (تقريبي) پيدا کوو.

ددي لپاره يو بل ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ د P_0 ټکي په نزدې کې ټاکو.



کرښه، چي دواړه ټکي سره تړي ،يعني سيکانت، يو جګوالی ښايي، چي د تکو P_1 او P_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی جګوالی،، په ګوته کوي.

$$\tan \alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

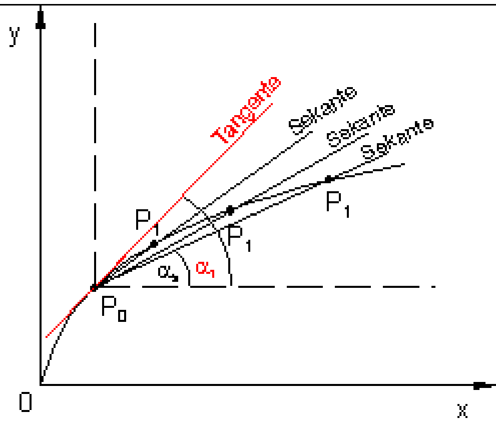
$\alpha_s \triangleq$	د سيکانت د جګيدو کونج
$a_s \triangleq$	د سيکانت د جګيدوضريب

دا د جګوالیمثلث له لاري ټاکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نزدې کې وټاکو یا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت جګوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنزدې کړو، نو د پولې حالت په څېر یوه کربنه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تانجنت جګېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د ګراف جګېدنه په ټکي P_0 کې ښايي.



α_t =	د تانجنت د جګوالي (میلان -) کونج
a_t =	د تنجنت د جګوالي ضریب

داحالت يا تلنلار کيدی شي د رياضي له لارې د پوله ارزښت په څير افاده شي.

$$\lim_{P_1\to P_0} \alpha_s = \alpha_t \qquad \lim_{P_1\to P_0} a_s = a_t$$

II.2.2.کمښتویش او مشتق Diference quotient and diferentialquotien

د سیکانت جګیدنه (منځنی تغیر ارزښت)

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

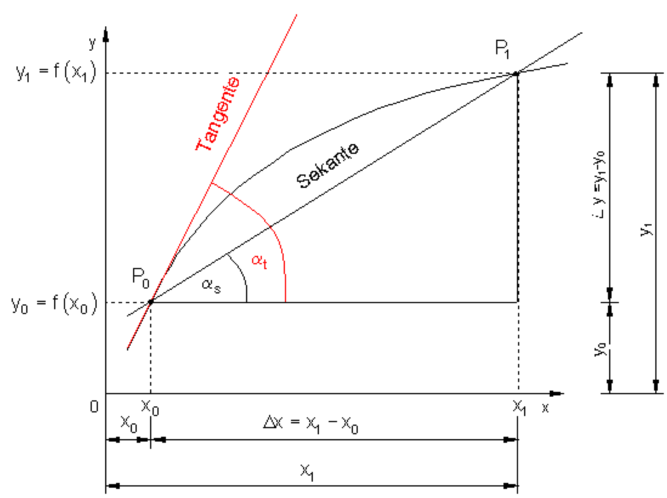
د تنجنت جګېدني سره د حد (پوله ارزښت) له لاري لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي – یا د سترګو رپ تغیر ارزښت دی

یا لنډ:

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څېړنې لاندې نیسو:

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.

کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

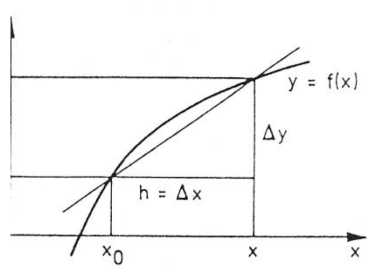
II.6 د غوڅوونې(قاطع seconce) پیژند:

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

پایله: د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالیsecant): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

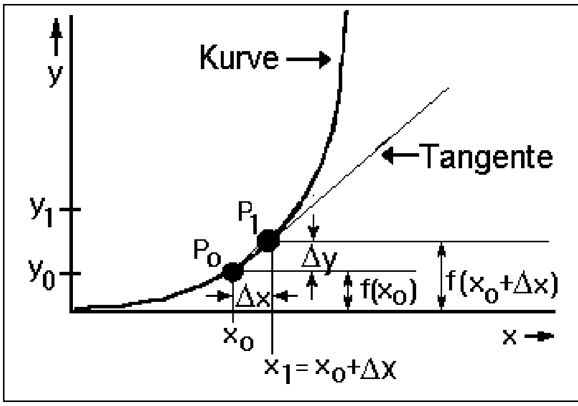
پېژند(تعریف): د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	د پیژند لپاره څیره 

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f تابع غوځي میل لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د
دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.
د یوه تابع د میل یا جګیدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې د تابع د مشتق نیونه بلل کیږي.

مشتق شمیرنه = د یوې منحني میل
Differential caculation)

تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.



پایله : د تانجنت جګیدنه : د تانجنت جګیدنه د قاطع د جګیدنې ،،حد ،،دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivativeکلمه نوې ده، نو له دې امله دا
ځو ټکي په پام کې نیسو : derivative د رابیلیدنې په مانا دی، چې موږ یې تراوسه
مشتق بولو،چې همدا معنا لرییعنط له اشتقاق سره تړاو لري.

تعریف: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل وېش) x- > x0 او(همداسې)⬄ (x->0او یا په
(همدې ډول)⬄
h- > 0 لپاره یو حد ولري , نو د y = f(x) تابع د $x = x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت
لري اود دې لپاره لیکو:
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};..$$

دا حد یا پوله داسې ښایو

$$(\frac{dx}{dy})_{x=x_0} = f'(x);$$

د x_0 ځاي کی د $y = f(x)$ تابع له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بېلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمښتوېش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0+\Delta x)^2 - 3(x_0+\Delta x)+2)-(x_0^2-3x_0+2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-3x_0-3\Delta x+2-x_0^2+3x_0-2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0+\Delta x-3$$

او د لیمیټ $\Delta x \to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x-3) = 2x_0-3.$$

د دې لپاره دا لاندې پېژند ورکوو:

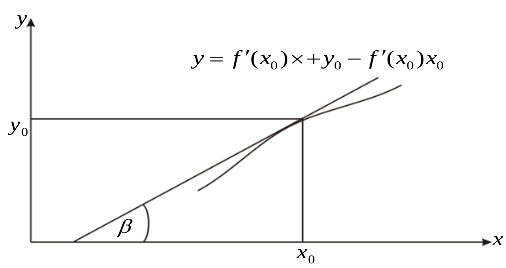
(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند :2

كه يو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي كى مشتقوړوي، نو هغه لاندنى كرښه چى د (x_0,y_0) ټكي څخه تيريږي او ميل يا جګوالى يې $f'(x) = \tan\beta$ دى په لاندې ډول ليكو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټكي كى د وركړ شوې منحني
$y = f(x)$ تانجنت بلل كيږي(پرتله مخامخ شكل)



موږ اوس د ځو بنسټيزو توابعو مشتق شميرنه تر څيړنې لاندې نيسو.

بيلګه ۱:

د يوې ثابتي مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت يې يوثابت دى
ثابت $y = f(x) = c = Const$

نو د هر x_0ځاى لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

بيلګه ۲:

يوه $f(x)=x$ خطي(كرښيزه)تابع لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=\underline{\underline{1}}$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعني یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ : د $y=f(x)=c.u(x)$ دوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضر ب شوی وي. یعنې

له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

$$f(x_0)=c\,u(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$$

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

Der Differentialquotient $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$ heißt Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0

د x_0 په ځای کې د تابع $f(x)$ مشتق یا رابیلیدنه بل کیږي

تعریف (پیژند): د تاپع لومړی مشتق یا رابېلېدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جګېدنه ورکوي، چې د تابع ګراف یې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرګ د تابع د ګراف جګېدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سړی د تابع جګېدنه هم بولي.

تانجنتجګېدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې

Tangentensteigung in $P_0(x_0 \mid y_0)$

$$a_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بېلګې څخه کار اخلو

بیلګه:
تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.
غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمبښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

$x = x_0$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د په ځای کې د تابع لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی

چې تابع د په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

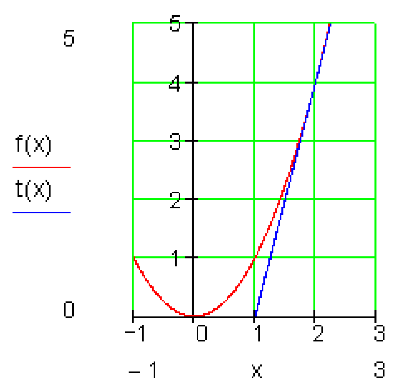
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی

چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:



پایله یې کېدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2 | 4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګېدنه لاس ته راوړو.

لکه پورته بېلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

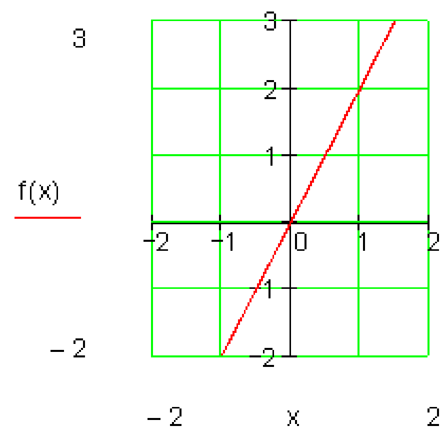
$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	2

ګراف یوه کرښه $f'(x) = 2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کيږي:
پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکيږي.

د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کيږي.



بیلګه: د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی دی.

فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^{\,3}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^{\,3} + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^{\,3}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

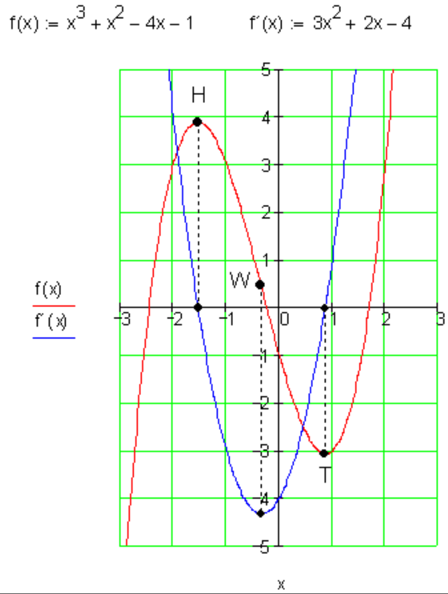
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 3x_0^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=3x_0^2$ د تابع $f(x)=x^3$ مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $f'(x_0)=3x_0^2$

د وضعیه کمیاتو – یا پروتولاړ سیستم کې تابع او د تابع مشتق: مخامخ ځیره وګورئ: تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$ د تابع مشتق(شین رنګه): $f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چې بیرته د مشتق یا د میل تابع ده.	

بیلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دې ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق پیداکړئ او د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ده

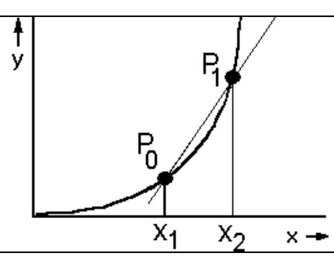
د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

	د مشتق تابع	تابع
$f'(x) = 1\cdot x^0$	$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = 2\cdot x^1$	$f'(x) = 2\cdot x$	$f(x) = x^2$
$f'(x) = 3\cdot x^2$	$f'(x) = 3\cdot x^2$	$f(x) = x^3$
$f'(x) = -x^{-2}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
$f' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

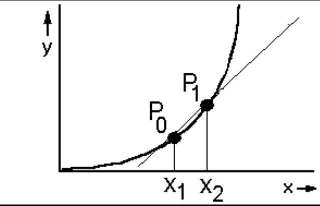
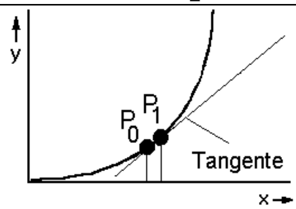
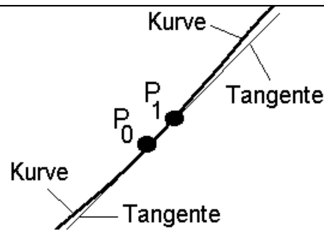
که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو ګومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري.

بیلګه: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

د تانجنت تعریف او خویونه:

مخامخ ځېره یو منحني او یوه قاتع په ټکو P_0 او P_1 کې ښايي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

	اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1 په لور و خوځیږي. پام : ددې سره قاطع خپل میل تغیروي
	بالاخره غواړو، چې P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کیږي
	چې دا پوره وپېژندلی شو د ټکو P_1 او P_0 په شاو خوا ْزوو یا لویه وو: که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کیږي، چې تانجنت په ټکي P_0 کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.

د دې خویونو غوره غوره والی یا لاس ته راوړنه(پایله):
ومو لیدل، چې د تانجنت میل په P_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني میل هم دی. له دې دا پایله لرو، چې که څوک غواړي د منحني میل په P_0 ټکي پیدا کړي، بسیا کوی، چې د تانجنت جګوالی یا میل په P_0 ټکي کې پیدا کړي.

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوخ کړي.

د تانجنت مساوات: :

د سره لیکو:

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)\cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 = f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(څېړه لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \qquad ,P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځاي کې دا لاندې لرو:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \ , \quad P(2 \mid f(2))$$

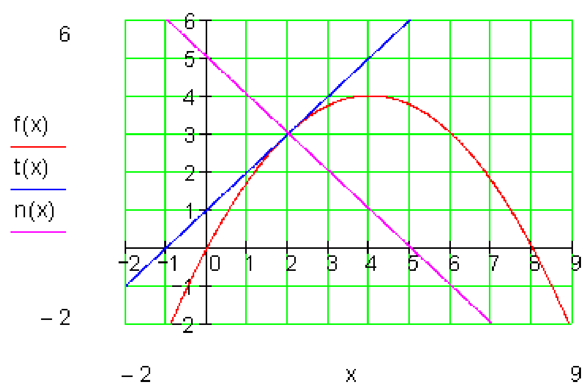
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x-2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x+5}}$$



د تانجنت او عمود عمومي مساوات

بیلګه: تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت میل: د یوه تابع د گراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرئ ټکی دی:

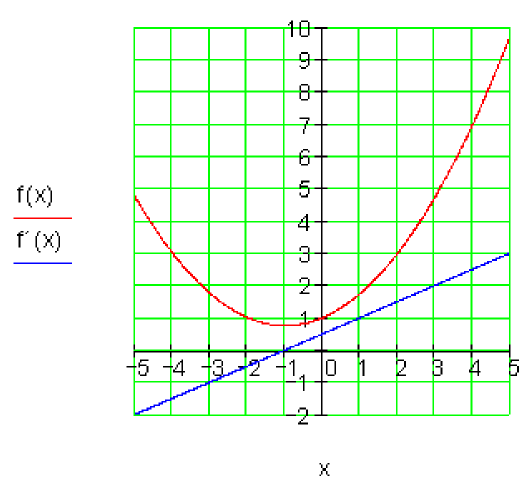
$S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی:

دا دا معنی لري، چې په ککرئ ټکي کې د $f'(x)$ میل صفر دی.

تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعنې د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ $\qquad f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: تابع لرو: $f(x)=2x^3+7x^2+x-7$

تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7\ \Rightarrow\ f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2|\ f(2))\ \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=\ f'(x_0)(x-x_0)+\ f(x_0)$$

$$f'(x_0)\,f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=\ f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

لاس ته راوړنه(پایله):

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,\,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+\ f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+\ f(x_0)\ ;\ \ f'(x_0)\neq 0$$

په بیدیا کې جګوالی **Steigungen in der Landschaft**

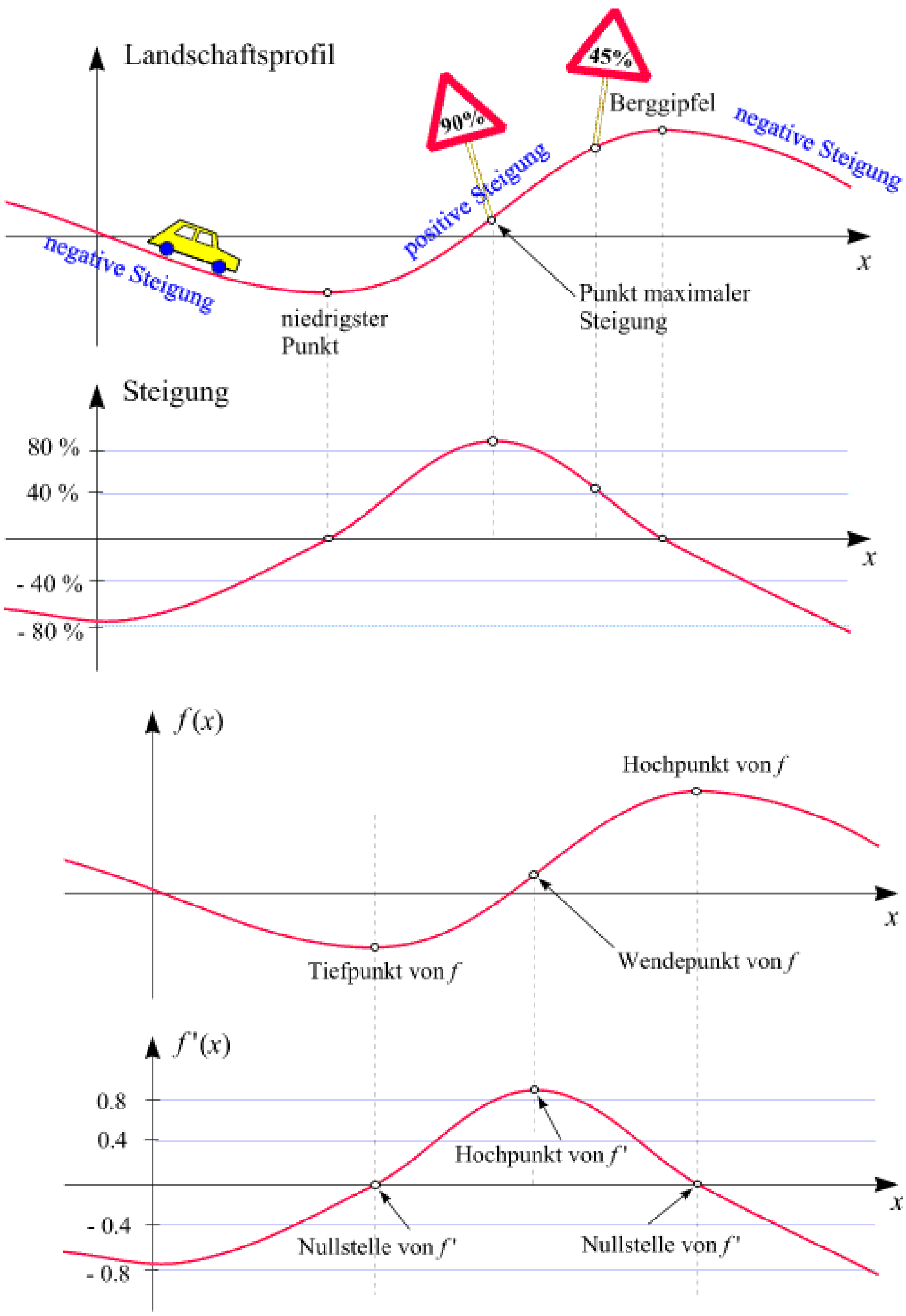
لاندې د د تابع ګراف د سرک په څیر په فکر کې راولو، چې په بیدیا کې جګ او ټیټېږي یا

کښتپورته ځغلي، نو په ښه توګه یې رسمولی شو، چې د ګراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کې راځي:

دپورته څیرو پښتو: له کیڼ لور کښته ښي لور ته: بیدیا یا کرونده، منفي جګوالی، جګوالی،(بله کربښه) خورا ټیټ ټکی،(شي لورته بله کربښه(مثبته جګیدنه، (پسې کربښه) د غره څوکه، د خورا جګې جګیدنې ټکی، (اخره(کمیز یا منفي جګیدنه.

د سرک کښته یا لاندې لور ته د ځانګړي دیاګرام سره د سرک جګیدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې یوه دویمه منحني ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

دپورته پښتو: له پورته کښته له کينې وښي لور ته: د f جګ ټکی، د f ټيټ ټکی، د f اوړونټکی يا د انعطاف ټکی، د f' جګ ټکی، د f' صفرځای، د f' صفرځای.

دیاګرامونه په کره توګه وګورۍ او وهڅېږئ، چې د دويمې منحني خويونه د لومړۍ منحني له خويونو را برسيره کړي.

چيرته چې سرک خورا ټيټ ټکی لري، هلته د جګيدنې ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځايه تيرېږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توګه که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.دا ټيک هغه ټکي دي، د کومو په چاپيريال کې چې منفي او مثبته جګيدنه يوبل سره رابندوي يا پولې لري.

د دې په منځ کې يو چيرته يو ټکی شتون لري، چې هلته جګيدنه ماکزيمال يا خورا لويه ده (په دې بيلګه کې 90%) .

همدې ته ورته په دويمه منحني (کږې) کې يو ه څوکه لري، مګر دا په دې بيديا کې هغه ستره ،،څوکه،، نه ده، مګر که څوک غواړي، نو يوه د ،،جګيدنې څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې يا منحني په ورسره بلده يا معمول رياضيکي ډول لاندې شکلونه لري:

لومړۍ منحني د f(x) ګراف دی، دويمه منحني يا کږه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بيا هم ټيک وګورۍ او وهڅdېږی، چې وپوهdږی، چې دا په هره برخه کې يو د بل سره ځنګه اړيکي لري.

د f(x) ګراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په يوه کې f(x) مينيمال (خورا ټيټ ټکی) په بل کې f(x) ماکسيمال (خورا جګ ټکی) دی.

په دې ځايونو کې f(x) صفرځايونه لري.

هغه ټکی چې هلته د f(x) ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی يا اوړونټکی بلل کيږي.

دا چې په دې ټکي کې د f(x) مشتق خورا جګ دی (په دې بيلګه کې 0,9)، دا د(f'(x عظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ازادې سترګې سره د هغه ځاي له لاندې منحني څخه ښه څرګندیږي، نسبت و پورته منحني ته.

مونږ د دې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولای شو یا ګومان راوړی شو:
که یوه تابع $f(x)$ ولرو، نو د دې $f(x)$ تابع په هکله د $f(x)$ له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.
دا مورته د ماکسیما او مینیما په هکله (چې دا دواړه د افراتي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې ګراف چېرته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

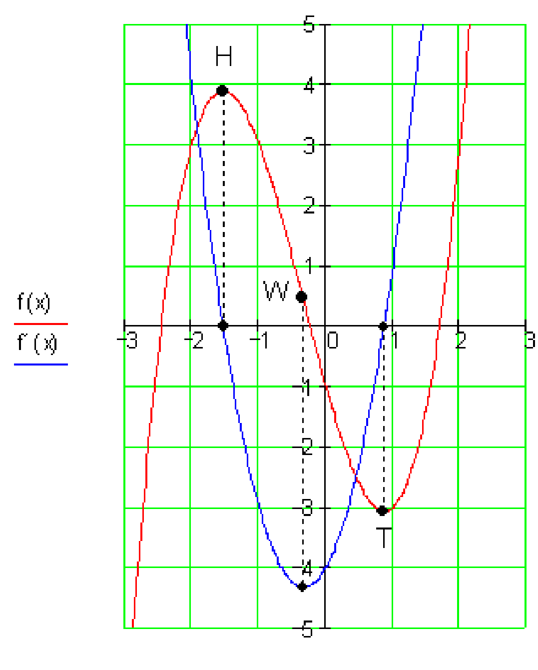
په کواوردینات (یوه پروت -ولاړ)- سیستم کې تابع اود تابع مشتق:

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږدا د مشتق تابع او یا د جګیدنې (میلان) تابع بولو

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوارو توابعو ګراف په یوه قیمتي وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع f(x) یو جګ ټکی (H) همداسي ټیټ ټکی (T) لري ګراف د مشتق تابع x -محور کې غوځوي،په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع f(x) پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د f(x) جګېدنه صفر ده.

د مشتق تابع f'(x) هلته مینیموم لري، چېرته چې د(x)f جګېدنه د H او T ترمنځ په پام ونیول شي د مطلق قیمت له مخې خورا لویه ده.

II.3.د مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعې یا زیاتون قاعده یا لار):

که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، یعني:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \underline{\underline{u'(x_0) + v'(x_0)}}$$

بیلګه:

د دې ورکړ $f(x) = 5x^2 + 3x$, $u(x) = 5x^2$, $v(x) = 3x$ توابعو شتق وشمیرئ.

ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

د جمعي قاعدې تولیزه کونه:

که چیرې f_1، f_2، ......، f_n توابع او k_1، k_2، ....، k_n ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده یا لار):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x))'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعني په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي، یعني که د دواړو لورو لیمیټ نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

بیلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه: په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د ویش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).

لومړی لار:

لومړی لار یا طریقه یې په لاندې کې ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښایي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad ,\quad g(x)\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زيات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

دويمه لار: د $\frac{1}{g(x)}$ مشتق غواړو پيدا کړو او ښايوچي دی:

$$(\frac{1}{g(x)})'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad (*)\ (f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کېږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{-\lim_{h\to 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ وبش ولرو او وغواړو چې مشتق یې پیدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د (*) اړیکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = [f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$= f(x)(\frac{1}{g(x)})' + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2}) + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

بیلګه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پیدا کړو.

حل: که چیرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2-4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x) = 2x$$

$$h'(x) = 2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د ویش قانون له مخي لرو:

$$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]'=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$=\frac{2x(x^2-4)-x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$=\frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

بیلګه:

د $y=\sin x^2$ تابع یوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځیري تابع ده:

$$y=\sin z \quad , \quad z=x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx}=\frac{d\sin z}{dz}.\frac{dx^2}{dx}=\cos z.2x=2x.\cos x^2$$

بیلګه:

د $y=\sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y=z^2 \quad , z=\sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچیرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچیرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx}=\frac{dz^2}{dz}.\frac{d\sin x}{dx}=2z.\cos x=2\sin x.\cos x=\sin 2x$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشمیرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7$ $h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

د مثلثاتي فنکشنتابعګانو مشتق

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ II$$

قضیه :د ساین تابع y=f(x)=sinx مشتق غواړو وښایوو چې
f'(x)=(sinx)' = cosxدی:

ددې قضيې د ښوولو له پاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د y=f(x)=sinx ساین تابع د هر x لپاره تعریف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=\frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}=\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} .$$

د لیمیټ د برخي په پام کی لرلو سره لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=\cos x_0.$$

د ساین تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري یا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\cos x_0\,,$$ (Xپه لینده کچ یا رادیان)

قضیه :

همداسي ښوول کیږي چی کوساین تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=-\sin x_0,$$ Xپه لینده کچ یا رادیان

ثبوت: لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$=\frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$=\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د پولې او د پولې یا حد د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$-\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2}) \ . \ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

قضیه : غواړو وښایو چې د تانجنت تابع $f(x) = \tan x$ مشتقوړ ده او د مشتق تابع یې $f\,'(x) = \frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x})$$

$$= \frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x.\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x \ , x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2}$$

بیلګه: غواړو د $y = \cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پیدا کړو.

حل: ږدو : $f(x) = \cos x$ او $g(x) = \frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندې توګه لیکلی شو:

$y = f(g(x))$ ، نو د زنځیري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \cos'(g(x)) \cdot (\frac{\pi}{180} \cdot x)' \\ &= -\sin(g(x)) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin \frac{\pi x}{180} \end{aligned}$$

بیلګي :

۱ - د $f(x) = \sin x$ تابع لومړي څلور مشتقونه دې پیدا شي.

$$f'(x) = \cos x \; ; \; f''(x) = -\sin x \; ; \; f'''(x) = -\cos x \; ; \; f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

۲ - د $f(x) = x.\sin x$ تابع مشتق پیداکړئ

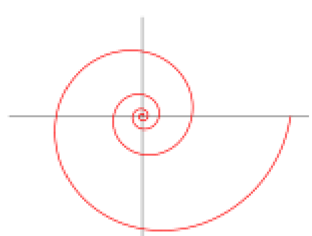
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.

$$f'(x) = 1.\sin x + x\cos x = \sin x + x.\cos x$$

۳ – د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پیداکولو له پاره د ځنځیر قونو ن څخه نار اخلو.

ږدو $z = \frac{1}{x^2}$ او $u(z) = \sin z$ لا س ته راځي: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

د لوګاریتم مشتق



(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه :

د لوګاریتم تابع مشتق:

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی

او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یوائې د$x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چی$x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\to e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e=1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$ پای.

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \log\sqrt{x^3} = \log_{10} x^{3/2} = \frac{3}{2}\log_{10} x$$
$$\Rightarrow \ f'(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$
$$= 0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f') = IR^{>0}$$

بیلګه:

د $y = \ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

مونږ لیکلاي شو :

$$y = \ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$= \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))' = \dfrac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))' = \dfrac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y' = (\ln(x-2))' - (\ln(x+2))'$$
$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \frac{4}{x^2-4}$$

بیلګه:

لرو: $f(x) = \log_2(x)$

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې
حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2$
اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق تآکو:
$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)= \underline{0.09}$
پای

اوس دي یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چی په جدول 1-20 کي غیر مستقیم خوندي یا په بل عبارت دننه ده.

موږ غواړو د لاندې شکل تابع یا بلواك مشتق ونیسو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځیرقاعدې له مخی ترخیرني نیول کیدی شي، $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$ د لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځیری قاعدې له مخی را پیداکیدی شي. دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ااو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځیری قاعدې د نیونو په نظر کی نیولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله 20-10 که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دي

بیلگه : تابع یا بلواك $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره مشتقوړ دی. دا دې په (57-20) کې داسی $f = x,\ g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$. له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو: $dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$

(دا وروسته د ایمپلیځیت توابعو مشتق کې هم په همغه توګه رواړول شوې ده)

بیلگه: د $y = (x^2 - 1)\ln x$ د مشتق سره باید د $g = \ln x$ له امله وغوښتل شي چې $x > 0$ او د $f = (x^2 - 1) > 0$ له امله باید باور ولري $x^2 > 1$ او له همدې امله $|x| > 1$
پس کیدی شي چی فرمول(57-20) د $x > 1$ لپاره د $f = x_2 - 1$ او $g = \ln x$ سره استعمال شي:

بیلگه: د $f(x) = x^3.\ln 4x (x > 0)$ مشتق دې پیدا شي

$u(x) = x^3$ د $u'(x) = 3x^2$ سره، $v(x) = \ln 4x$ د ځنزیري قانون له امله لرو:

$$v(x) = 4.\frac{1}{4x}\ \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2.\ln 4x + x^3.\frac{1}{x} = 3x^2.\ln 4x + x^2 = x^2(3\ln 4x + 1)$$

بیلگه: د $f(x) = (x^2+2).\lg x\ (x>0)$ مشتق غواړو پیداکړو

د ضرب قانون: $u(x) = x^2+2\ ;\ v(x) = \lg x$ د $u'(x) = 2x$ او

$v'(x) = 1 / x.l\ 10$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2)\frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو مشتق

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y=b^x, (b>0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'=b^x \ln b$

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad , \; f(x)=b^x$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{b^x-b^{x_0}}{x-x_0}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{b^{x-x_0}-1}{x-x_0} \qquad , \; x-x_0=h$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h-1=k \\ h=\log_b(1+k) \end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\log_b(1+k)}$$

د لوګاریتم قانون څخه لرو: $n\cdot\log x=\log x^n$ او لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b (1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b [\lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}]} \quad , \lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

له پورته لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} \quad , \ \log_b e = \frac{1}{\ln b}$$

$$= b^{x_0} \cdot \ln b \ ; \quad x_0 \in IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\ ' : f\ '(x) = b^x \cdot \ln b \ ; \ D'(f) = IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$f\ '(x) = b^x \cdot \ln b$$

قضیه : د $y = f(x) = e^x$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f\ '(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

مور دا لرلي په پام کي نیسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

مور د تل کوچنیکیدونکي Δx ارزښت لپاره خیرو $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Δx

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمیرنې په پنسټ دا دا مهنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که x_0 د xپه ځای ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f(x) = e^x \text{ und } f'(x) = e^x$$

اکسپوننشل فنکشن e^x تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

لرو:

اکسپوننشلفنکشن یو فنکشن دی، په کوم کې چې فنکشن او د تابع مشتق سره برابر دي

e - تابع بیرته د مشتق له لارې تولیدیږي یا لاس ته راځي.

بل بدیل یا الترناتیو: که ولرو $y = f(x) = e^x$ ، نو $y' = f'(x) = e^x$ لاس ته راځي.

په پورته جمله کې مو وښووول: که ولرو $y = b^x$ دو $y' = y \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$ دی.

که b=e کړدو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = b^x . \ln e \quad = e^x \cdot \ln e \quad \Rightarrow \ln e = 1$$
$$= \underline{\underline{e^x ; x \in IR}}$$
$$f : f(x) = e^x ; D(f) = IR$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{f' : f'(x) = e^x ; D(f) - IR}}$$

ګورو چې $f(x) = e^x ; D(f) = IR$ يواځنی تابع دی، چې مشتق يې پخپله $\underline{\underline{f'(x) = e^x ; D(f) - IR}}$ دی

$$f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

د $a \in R^+ \setminus \{1\}$ $x \in R^+$ سره.

فرمول

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

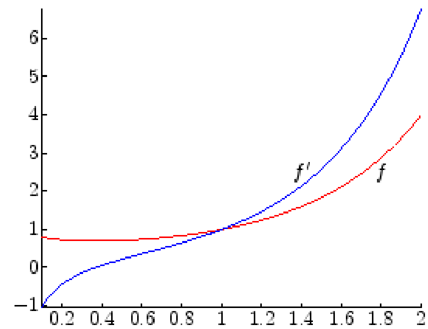
کيدی شي د $y = g(x)^{h(x)}$ بنې تابع چې $g(x) > 0$ دی، د مشتق لپاره وکارول شي

لاس ته ترې راځي:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} \left(h(x) \ln g(x) \right) .$$

ليکونکی:(App/Höllig) اپپ ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $0 \to x$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د 0 په لور هڅیږي، پس f د 0 په لور. نو تابع په صفر کې ښي لوریزه متمادي ده. د مشتق لپاره یې دا حالت ده دی.

د $1 \to x^x$ او د $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره د f تابع په صغر کې یو عمود تآنجنت لري.

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي:

$$g'(x) = x^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x}.$$

)لیکونکي اپپ او هیولیګ

په طبیعت کې یې ځیرنه:

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

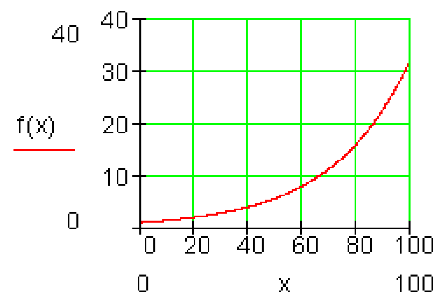
کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټې ویش (حجره ویش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې ځان تجزیه کوي. د غه عمليېي لپاره يو ارزښت جدول :اړ، او گراف يې کاږو. دلته
د x اووښتوني (متغيره) په دقيقو د وخت لپاره ده.
د y متحوله د باکتريا گانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100	دقيقې
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32	د بکترياګانو تعداد

پورته جدول کې : x = دقيقې y = د بکترياو تعداد



بيلګه: لرو : $f : f(x) = b^{3x^2-10}\,;\;\; D(f) = IR;\; b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونيسئ.

$$D'(f\ ) = D(f\ ) = IR \quad \Rightarrow D(f\ ') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \;\; \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}\,; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \;\; \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \;\; \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\;\; x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}; D(f) = IR;\;\; b \in IR^{>0}}}$$

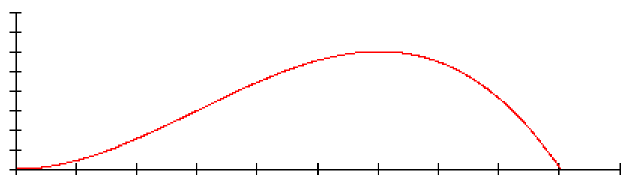
(c) ketabton.com: The Digital Library

- د مشتق استعمال په طبيعي علومو

په رياضياتو کې زيات وخت توابع راوړل کيږي، چې د يوې متحولې(اووبشتونې) x په واک کې وي.

په طبيعي پوهنو کې زيات وخت توابع څيرو، چې د وخت په واک کې وي.

لکه په شکل کې د يوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)



بيلګه: د يوه په برابرډوله بيره (تعجيل) غورځول شوي شي لپاره د پيل چټکتيا (لومړنی سرعت) $v_0 = 4\frac{m}{s}$ او $a = 1{,}8\frac{m}{s^2}$ بيرې(تعجيل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

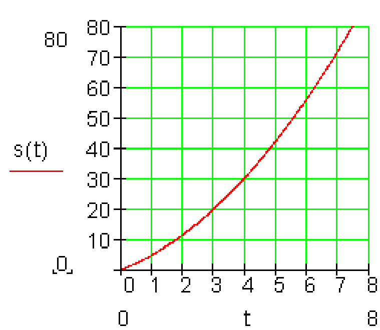
$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$

(tپه s (ثانيه) ، s(t) په m (متر))

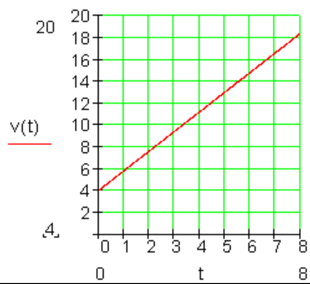
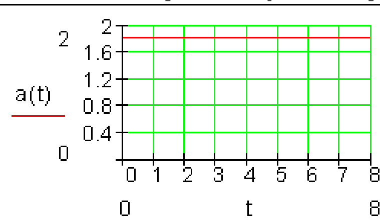
منځنی چټکتيا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول ده:



(c) ketabton.com: The Digital Library

	$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$ $v=s'(t)=1,8t+4$

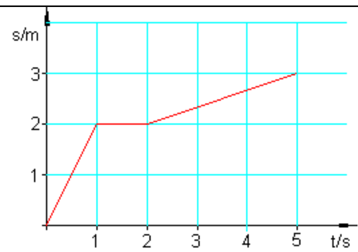
	په v-t - ډیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي. دا دلته ثابته جګېدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a=1,8\,\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.
	د بیړې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي: $v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$

پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$a(t)=v'(t)=a$ $\quad$ $v(t)=s'(t)=at+v_0$ $\quad$ $s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره v(t)=s'(t) لرو. د s'(t) لپاره داسې $v(t)=s'(t).$ هم لیکو.

فعالیت:

	۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی. الف: دا خوزښت تشریح کړی. ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲) یوه تیږه د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.
د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟کرديږ شوې)سره.
الف) د کوم وخت وروسته د تیږې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟
ب) خورا جګ د میل جګوالی وشمیرئ.

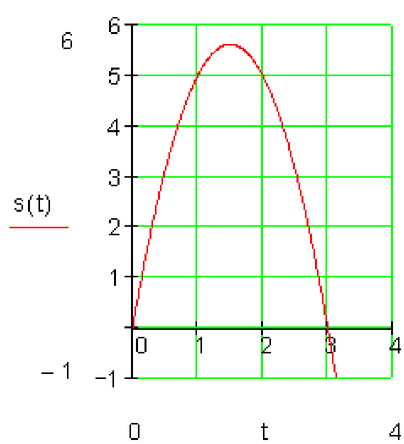
۳) تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښایي.

الف) د ورځني ژوند څخه یوه بېلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ په لاندې ډول دی.

a او v_0 وټاکئ



پ) د اړونده بیرې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ. یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې $S(t)= 5.t^2$ لار وهي.
په وختونو $t=1;2;3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.

۴ – حل:

لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیږارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow \cdot$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \to 10$

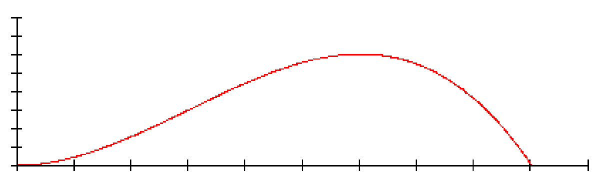
$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري:: $20 + 5\Delta x \to 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow f$$

د $\Delta x \to 0$ ***لپاره باور لري*** $30 + 5\Delta x \to 30$

تمرين : لاندي د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 ; x > 0$ تابع گراف او په ورنزدي توگه د فوټبال ميدان کې د توپ الوتنې منحني ښايي، چې لاندې ځيره لري.



لاندې پوښتني ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جگ(ماکسيمال) جگوالی لري او د وهلټکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبي د دفاع دېوال د توپ وهني ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جگ دی. ايا توپ له دې څخه جگ الوزي؟

ت : توپ د تور لاين(د x محور) څخه په ۲ متره جگوالي الوزي. له گول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاسته راځي
د $f'(x)$ بیا مشتق نیوني سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بېلګه: $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

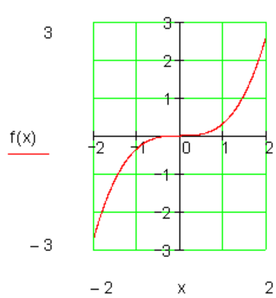
د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

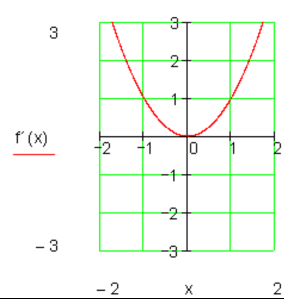
د تابع ګراف :

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

$f(x) = \frac{x^3}{3}$

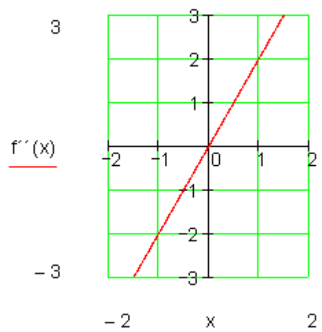


$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$

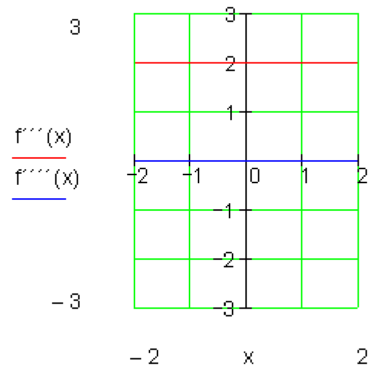


(c) ketabton.com: The Digital Library

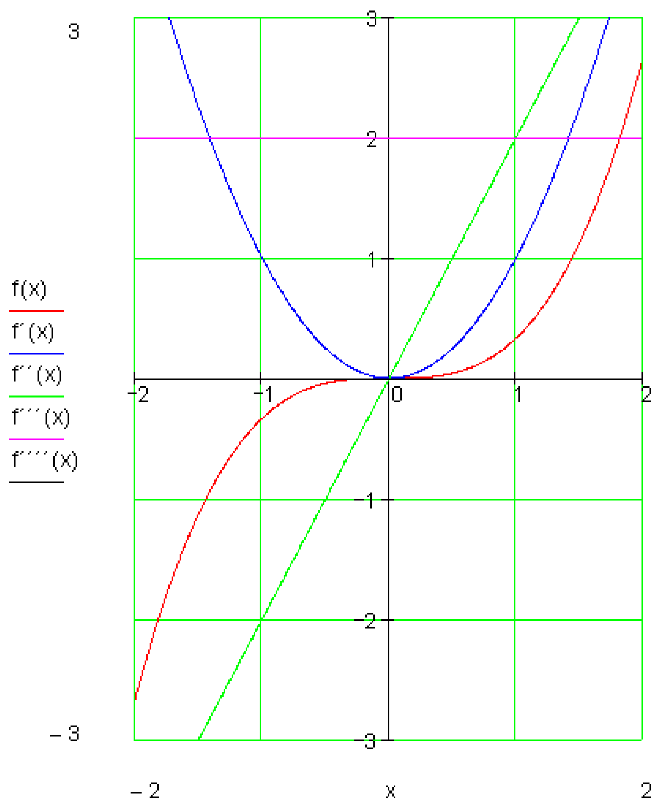
$$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$$



$$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$



د ټولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم



کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

اول :

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$

دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$
$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$
$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$
$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

ټولګه: د f(x) لومړی مشتق دf(x) مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده :

دf(x) دویم مشتق د f'(x) مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د f(x)دریم مشتق د f''(x) مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: ییو په خوښه ویاند تابعf(x) په خوښه د مشتق قابلیت لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- - د ایمپلیڅیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیڅیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

یا داسې: که یوه تابع $y = y(x)$ په ایمپلیڅیته توګه ورکړ شوې وي، دا په دې معنا چې په د x او y کې یوه مساوات له لارې ورکړ شوې، نو کیدی شي دا مساوات یل برابرون تړلی یې په x پسې مشتق ونیول شي. دلته په ځانله توګه کیدی شي په $y = y(x)$ ځنزیرې قاونو وکارول شي.

د دې لپاره لاندې بیلګې راوړو:

بیلګه: $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړه انځورنه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیڅیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت: که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه: یوه تابع په ایمپلیڅیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړوdy/dx پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \vee \frac{2x+y}{2y-x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایمپلیځیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیځیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیځیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیځیت یا څرګند ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

بیلګه : د $f(x) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چی په بنسټ او جګ اکسپوننت کې یې متحولې پرتې دي. د لوګاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کېدی شي: $\ln f(x) = x \ln x$

اوس ایمپلځیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y} f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y\,(\ln x + 1) = x^x\,(\ln x + 1)$$

بیلګه: دایره د r وړانګې سره مساوات $x^2 + y^2 = r^2$. لري. له دې ځنې برخې د $y = f(x)$ تابع د ګراف په څېر لیکل کېدی شي. د دې مشتق د ایمپلېځیت مشتق له لارې په لاندې توګه حل کېدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تعریف شوي مساوات کې $y = f(x)$ ځاي په ځای کوو:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

د دې مساوات د مشتق له لار لرو : $2\,x + 2\,f(x)\,f'(x) = 0$

د $f'(x)$ پسې د حل له لارې لاس ته راځي:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

د دې مساوات سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي، چې په داېرېتانجنت په ټکي (x,y) کې جګوالی $-\frac{x}{y}$ لري.

بیلګه: د بیلګېپه توګه د $E:\ x^2 + 3y^2 = 7$
له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګۍ یا بیضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

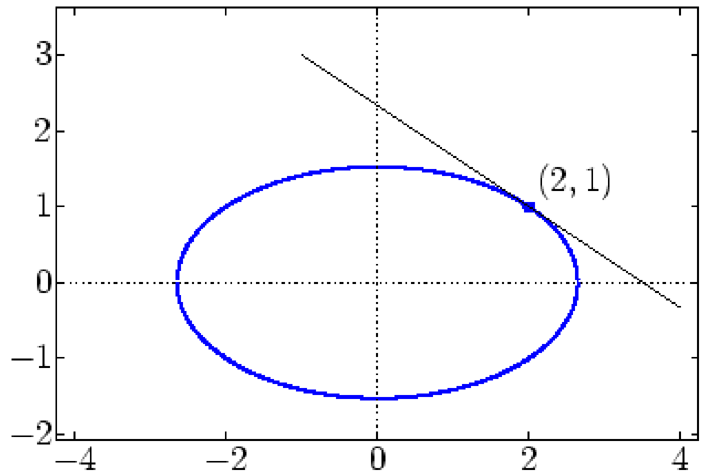
همداسې $y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$. له

دې سره کیدی شي په E باندې په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي. د بیلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره لاس ته راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

بیرته په E د یوه ټکي د کواوردینات اینوولو او همدا اوس د $y'(x)$ ټاکلي ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کویف

د بسټیزو مشتقونو جدول

(c) ketabton.com: The Digital Library

Nr	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تبول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \; a \;\; reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \; a \neq 1, \; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزېې(تحليلي) وييني يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کې ونیسي.

تولګه

کمبنتويش Differenzenquotient (د سیکانت جګېدنه) یا منځنی تغیېر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(fx_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی یا لحضوي تغير ارزښت)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x)=c\cdot u(x) mit\ c=constant$$

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

$$\boxed{f'=c\cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x)=u(x)+v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v(x)$$

$$\boxed{f'=u'+v'}$$

د ضرب قانو

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

$$\boxed{f'=u'\cdot v+u\cdot v'}$$

د ویش قانون

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\boxed{f=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$$

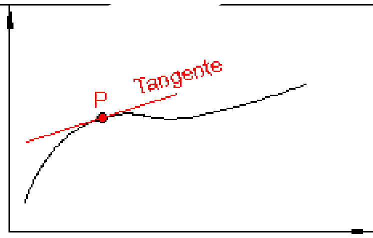
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځنځیر قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دا پورته الماني په پښتو شي(دا کمپیتریست سرته رسوم)

	پیژند (تعریف): د یوه تابع ګراف میل (جګوالی) په یوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د میل یا جګوالي ګراف سره برابر دی

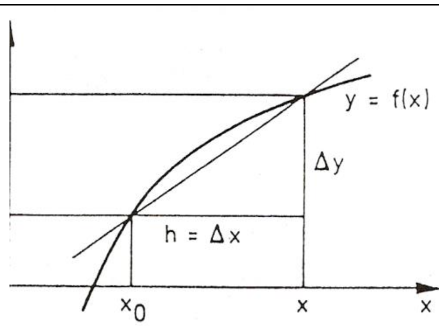
د کمښت ویش یا د تفاضل ویش **Difference quotient**

د یوې کرښې جګېدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکېدی شي:

کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

 د پیژند لپاره ځیره	پیژند(تعریف2-1 $y = f(x)$ دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوی تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال یو په خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ ځیره دې وکتل شي). پس د تفاضل _ یا کمښتویش Differenc equtient د سیکانتی میلان یا جګوالی شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

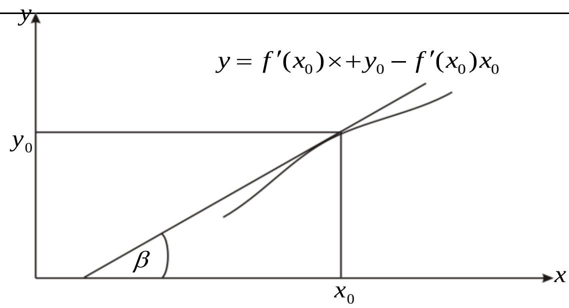
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

پیژند:که یو تابع یابلواك $y=f(x)$ د x_0 په ځاي کی د مشتق وړ (قابل اشتقاق،رابیلیدوړ) وي، نو هغه لاندنی کرښه چی د (x_0,y_0) څخه تیریږي او میلان یا جګوالی $f'(x)=\tan\beta$ یی دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x) \Leftrightarrow f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني یا کرړی $y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله یامقایسه لاندې خیره)



لومړی د تیرو جملو له مخې ددیفرنسیشن قاعدې د فورمال قاعدو په څیر بیا راټولوو یا رایوځاي کوو، بی له دې چی نیونی ورکړو. په استعمال کي یی بایددا نیوني کلکی تر پام لاندې ونیول شي. د لته د $f(x)$ او $g(x)$ بلواك په f او g لنډیږي.
د مشتق نیونو یا رابیلدنومشتق قاعدو جدول

ګڼه د قاعدې نوم	فرمول
۱ د ثابتې سره ځل(ضرب) قاعده	$(cf)'=cf'$
۲ د زیاتون – کمون قاعده	$(f\pm g)'=f'\pm g'$
۳ د ځل (ضرب) قاعده	$(f\cdot g)'=f'g'$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګڼه د قاعدې نوم	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
۴ ــ وېشقاعده	
۵ ــ د زنځیروني قاعده	$y = f(z)\ ;\quad z = g(x);\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$
د په څټ یا برعکس قاعده	$y = f(x)\ ;\quad x = f^{-1}(y);\ \frac{dx}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x) = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x.\ln b}$

--- د یوې تابع د مشتق قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري اوهمداسې په هرځاي کې متمادي یا ناپرېکیدونکې نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.
تابع $f(x) = |x|$ په 0 ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو $x > 0$ له پاره باور لري $f(x) = x$
او له دې سره $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0} = 1$

د ټولو $x < 0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x) = -x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې کیږ- او ښی اړخیز حد یو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځایونو کې تر اوسه تل ورکړ شوې.

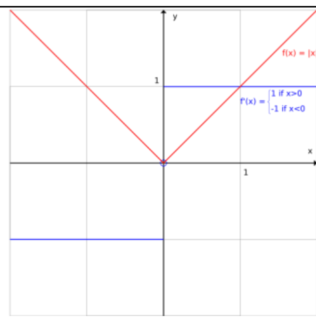
په صفر ځای کې سره له دې یو ښې اړخیز مستق ورکړ شوی، یعني لرو:

$$f'+(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

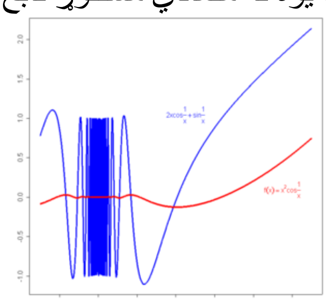
او یو کیڼ اړخیز مشتق هم:

$$f'-(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

که مخامخ گراف ته وگورو، نو وبه پوهیږو، چې یوه مشتقوړ تابع باید گوډه نه وي یا په کوم ځای کې ماته نه وي یا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.



د یوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلګه:



یو تابع متمادي مشتقوړ بلل کیږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که یوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، باید نه دی چې مشتق دې یې هم متمادي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

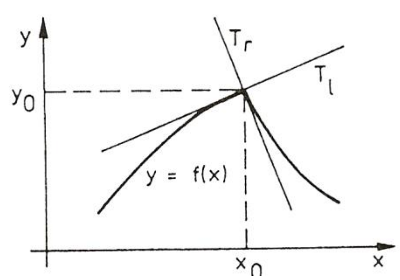
تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

یې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی

مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې لیمیټ (پولی) ته تګ ممکن وي یعنې چیرته چې د تفاضل ویش یو لیمیټ د $x\to 0$ لپاره ولري.

که کومه منحني چیرته راماته وي (څېره 4)، ګورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع ځانګړي خوي دی.

 	که په مخامخ څیره کې انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کې یواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته یو کیڼ تانجنت T_1 یا کیڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کیڼ مشتق لري او په همدې ډول یو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دي ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.

یوه نامتمادي(پرېکیدونکې) تابع کې د تانجنت یا مشتق پوښتنه بې معناده.

اړیین یا ضروري شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دلته انځور شوی پرابلم یا مسأله اوس د شمیرنې د ټیك فرمول لاندې راوړو.

ولیدل شو چی په یوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا څرګنده ده چی هره متمادي تابع باید ضرور مشتقوړنه وي. د بیلګي په توګه که تابع زاویه یا کونج ولري.

دې ته اړتیا ده چی وښایو، چی یوائې متمادي (نه پرېکیدونکې)توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چی هره تابع چی مشتقوړ وي باید لږ تر لګه متمادي(نه پرېکیدونکې) وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چی متمادیت د مشتقوړوالی لپاره اړیین یا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یاپوله یوائی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x) - f(x_0) -> 0$ لاړ شي.

نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.

دا د متمادیت یا ناپرېکیدنې پیژند دی.

دا تفاضل یا کمښت وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: د $y=(x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)\ ;\ a<x<b$$

که داد $x=x_0\in(a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه: د توان تابع $y=x^n,\ n=1,2,3,.....$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y=\sin x$ او کوساین تابع $y=\cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\ \frac{dy}{dx}=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

په یوه واز انتروال کی $y=f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y'=f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یي د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

پیژند: په یو د $x=x_0$ چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابیلیدنه) $y'=f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سړی د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y=f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f''(x_0)=\left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو په یوه واز اینتروال کې مشتق کېدونکې تابع $y = f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y' = f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.

ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

بیلګه ۲ . ۷ :

لاندې توابع $y = c; y = x^n; y = \sin x; y = \cos x$

هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي، د لاندې مشتقونو سره:

$$\frac{d^2c}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \;\; n \geq 2,$$

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x, \qquad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x \;.$$

دا په ۲ . ۴ کی تعریف شوي کیلمی کیدی شي چی په ساده ډول په خوبنه پراخه شي یعني داکسپوننت مشتقونو ته واړول شي(n – م مستق (رابیلیدنه) یی وشمیرل شي) .

د $y=f(x)$ تابع دلته n –واره مشتقوړ ده، که n – م مشتق ولري یعنی

$$\frac{d^ny}{d^nx} = \frac{d^nf(x)}{d^nx} = f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx};..$$

جمله:

که د $y=f(x)$ تابع د $x0$ په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي یا ناپرېکیدونکي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چې پوله یا حد شته دئ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

پوله یا حد یواځې هلته کیدی شي چې موجود وي، چې د$x->x0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې$f(x)-f(x0)->0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x)->f(x0)$ د $x->x0$ لپاره.
دا د ناپرېکیدنې یا متمادیت تعیف یا پیژند دی.

دا کمښت-یا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق ($f'(x$) په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځې په ځای (lokal) پورې اړوند یا تړلی خوي دی یعنی په یو ځاي $x=x0$ کی تعریف دئ. لکه څنګه چې په ناپرېکیدنه یا متمادیت کی(۱۹ - څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چې د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف :

د $y=f(x)$ یوه تابع په واز اینتروال(a,b) کی، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x); a < x < b$$

که داد$(a,b) \ni x = x_0$ په هر ځاي کی د مشتق قابلیت ولري د مشتق ($f'(x0$ سره.
دا په بند اینتروال[a,b] کی مشتقوړ بلل کیږي، که دا سربیره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتقوړ هم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- د معکوس تابع مشتق invers funktion

د یوه ګراف به مرسته تابع او د هغه په څنګ تابع د بیلګې به توکه یوه مربع تابع.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرنې لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که په د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل یا کمښت ویش لاس ته راوړي چې د هغه سره د

مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله:

د معکوس تابع مشتق : که y = f(x) د x په یوه چاپیریال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او هملته د f' (x) |= 0 سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د y = f (x) سره مشتقوړ دی او باوري دی

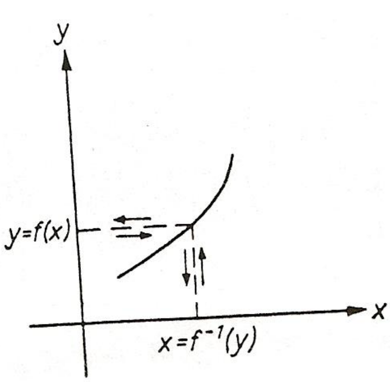
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کیدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له x ->0 اوهم y->0 او معکوس څخه، د y = f(x+ x)-f(x) سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

بالاخره لرو:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه: د $y = f(x) = x^n; n = 1,2,3,4.....$ تابع لپاره که $x \geq 0$ وټاکل شي او په دې $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ توګه معکوس تابع، نو لرو:

$\frac{dy}{dx} = f'(x)nx^{n-1}$ د x>0 لپاره. له دې امله د $y > 0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{y}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي

$$dx^{1/n} / dx = (1/n).x^{n-1}$$

بيلګه: دا $y = x^{\frac{m}{n}}$ تابع د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره يعني د خوبني کسري اکسپوننت يا په«جګ عدد» کيدی شي چې د مخه ښيږلي او د ځنځيری قاعدې له مخې يې مشتق نيول شي، چې د $x > 0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{m/n} = z^m \quad , \quad z = x^{1/n}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبيعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې جدول کې لاندې د بنسټبتابع مشتق ځاي په ځاي شوی. له کيڼ و ښي لور ته اول درځ نمره ده دويم درځ يی تابع $f(x)$ ښای او په دريم درځ کی يی مشتق $f'(x)$ ځاي په ځای دي او په څلورم درځ کی د راپيداشوې پارامتر او د متحولې x نيونی ځای په ځاي شوي. که چيرې د واريابلی يا پارامتر لپاره نيونی نه وي شوي نو په خوښه نيول کيدی شي.

جدول د بنسټتابعو مشتق

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	وړاند نيونه يا فرضيه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	$n \;\; ganz, \;\; x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \;\; rational, \;\; x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \;\; a \;\; reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \;\; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \;\; a \neq 1, \;\; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin \; x$	$\cos \; x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$
15	$Arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
16	$Arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
17	$Arc\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
18	$Arc\cot$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

د جدول 20-2 او همدارنګه د جدول20-1په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمال ډول ، په خوښه د هرې شننیزې یا سپړنیزې(تحلیلي) ویینې یا افادې مشتق په شننیزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کي ونیسي.

بیلګه20-18: د زیاتون قاعده کیدی شي د ځل قاعدې په مرسته د یوې ثابتی سره یوځاي یا ګډه شي او ډیرو زیاتونکو یا د جمعې اعضاو باندې استعمال شي. لکه لاندې

$$y = f(x) = 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6\sqrt{x^3}$$

$$= 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6x^{\frac{3}{2}}$$

دلته tan x یواځي د $x \neq (2k+1)$ او د x^3 له امله یواځي د $x > o$ لپاره رابیلیدوړ دی او ددې بندیزونو (محدودیتونو) له امله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dy/dx = f'(x) = 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 6.(3/2).x^{)3/2)-1}$$
$$= 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 9\sqrt{x}$$

لکه چی بنسټیز بلواك او له دوي ټولی راجوړې شوې سپړنیزې افادې هرچیرته متمادي یا ناپریکیدونکی وې، چیرته چي تعریف شوي وې. نو د جدول 20-2 له مخی بنسټیز بلواك یواځي تعریف ډیري کی رابیلیدوړدی، په دې کي کوم تغیر نه راځي که په دې بلواکو ځلور بنسټیزې عملي استعمال شي. یعني لاندې جمله باوري ده .

جمله20-8: د بنسټیز بلواکو د ځلورو بنسټیزو عملیو له لارې جوړې شوي شننیزې (تحلیلي) افادې د دوي تعریفډیري په دننه کی رابیلیدوړ ده.

که څوك ځنځیري بلواك جوړوي نو دا وینا باید نوره هم رابنده یا محدوده شي

بیلګه20-19: دا بلواك $y = \sqrt{(x-1)^2(x+1)} = (x^3 - x^2 - x + 1)^{1/2}$

د $(x-1)^2(x+1) > 0$ ، پس د $x+1>0$ یعني$x>-1$ تعریف دی او هلته هم نه پریکیدونکی یا متمادي (د$x=-1$ په غاړه طبعآ بنی اړخیز) ده.

دا په ځانګړې توګه د $x=1$ لپاره هم ناپریکیدونکی یا متمادي دی(20-7دې وکتل شي)د پیژنددېری یا تعریف ډیری دننه $x>-1$ دی، او هلته تابع یا بلواك په واقعیت کی نه پریکیدونکی یا متمادي دی .اوس نو مخ ته پروت تابع یا بلواك تړلی(ځنځیري) ورکړ شوی:

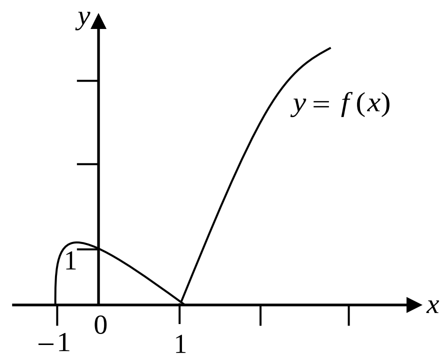
$$y = f(z) = \sqrt{2} = z^{1/2}$$
$$z = g(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$z = g(x) = (x-1)2(x+1) = x3 - x2 - x + 1$$

بلواك $z = g(x)$ د ټولو x لپاره مشتقوړ یا رابیلیدوړ دی، تابع $y = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ له دې امله ځنځیري قاعده یواځی د $z > 0$ لپاره صدق کوي، پس د $x>-1,\ x \neq 1$ لپاره. هلته باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2-2x-1)=\frac{3x^2-2x-1}{2\cdot\sqrt{(x-1)^2(x+1}}$$



د یو ځنځيري تابع مشتقوړوالی د هغه- x ارزښتونو لپاره باور لري یاهلته ډاډوړ دی، کوم چي د د ننني تابع یا بلواك په دننه کی پراته دي او په هغو کی د دننني تابع ارزښت د دباندني تابع د د تعریف ډیری په دننه کي پروت وي. که د - x ارزښتونو ډیری د بند تعریفډیري دننه وښايي ، نو لاندې جمله باور لري.

جمله 20-9: هره یوه شننیزه یا تحلیلي افاده د خپل بند(محدود) تعریفډیري په دننه کی رابیلدوړ ده.

بیلګه 20-20: ځنځیري قاعده هم استعمالیدونکی ده، که په یوه تړلي بلواك کی د ننني بلواك پخپله یو تړلی بلواك وي، پس (د لازمه وړاند نیونو لاندې) باور لري

$$y=f(z),\ \ z=g(u),\ \ u=h(x)$$

پس د $y=f(g(h(x)))$

ځنځيري قاعده

$$dy/dx=(dy/dz)(dz/du)(du/dx)$$

فنکشن یا بلواك یا تابع

$$y=Arc\sin\sqrt{1-x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو داسې تابع دی. دلته لرو:

$$y = f(z) = Arc\sin z, \qquad z = g(u) = u^{1/2}, u = h(x) = 1 - x^2$$

دلته h(x) رابیلیدوړ دی، g(u) یواځې د $u > 0$ لپاره رابیلید وړ دی، پس د 1- ، $x_2 > 0$ او یا $x_2 < 0$ یاد $|x| < 1$ ، او $f(z`)$ د $|z| < 1$ لپاره، پس د $1 - x_2 < 1$ لپاره پس د $-x_2 < 11$ 1 لپاره په دې مانا چې $x_2 > 0$ د $|x| > 0$ لپاره.

رابیلیدوړوالی یواځې د لاندې چاپریال لپاره تضمین دی

$$0 < |x| < 1 \iff -1 < x < 0 \quad \text{او یا}$$

$$0 < x < 1 \iff |x| < 1 \quad x \neq 0 \qquad (20.53)$$

دپیژندېری پا تعر یفېدېری دننه $|x| < 1$ دی. د تعریفېدیري محدودیت(20-53 = دی.

فنکشن یا بلواك (20-52) یواځې هملته تعریف او د (20-51) له مخې باور لري:

$$\frac{dArc\sin\sqrt{1-x^2}}{dx} = \frac{dArc\sin z}{dz} \cdot \frac{du^{\frac{1}{2}}}{du} \cdot \frac{d(1-x^2)}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \;\; 0 < x < 1, \\ +\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \; -1 < x < 0 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غیر مستقیم خوندې یا په بل عبارت دننه ده. دا د لاندې شکل بلواك دیفرنځیشن دی

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځیرقاعدې له مخی ترڅیرني نیول کیدی شي، $y = e^{z}, z = g(x)\ln(f(x))$ د لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځیری قاعدې له مخی را پیداکیدی شي.

دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot = \frac{1}{v} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$ او

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^{z} \cdot (g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$

$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځیری قاعدې د نیونو په نظر کی نیولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

جمله : که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو $y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دی.

بیلګه : تابع $y = x^{x}$ د $x > 0$ لپاره رابیلیدوړ دی. دا دې داسی $f = x, g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$ له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو:

$$dx^{x}/dx = x^{x}(\ln x + 1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلکه: د $y=(x^2-1)^{\ln x},\ x>1$ دیفرنسیشن سره باید د $g=\ln x$ له امله وغوښتل شي چې $x>0$ او د $f=(x^2-1)>0$ له امله باید باور ولري $x^2>1$ او له همدې امله $|x|>1$ پس کیدی شي چې د $x>1$ لپاره د $f=x^2-1$ او $g=\ln x$ سره استعمال شي:

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln(x^2-1)+\frac{(\ln x)\cdot(2x)}{x^2-1}\right)$$
$$=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(x^2-1)}{x}+\frac{2x\ln x}{x^2-1}\right),\quad x>1$$

بیلگه یا تمرین: د $y=f(x)=x^n;n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې توگه $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}};y\geq 0$ یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

، نو لرو : $\frac{dy}{dx}=f'(x)nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره له دې امله د $y>0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\sqrt[n]{y}}{dy}=\frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{n\cdot x^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot x^{1-n}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي.

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

بیلگه -- د $y=x^{\frac{m}{n}}$, $m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښي کسري اکسپوننت

یا په«جگ عدد» کیدی شي چې د مخه څېړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق ونیول شي، چې د $x>0$ لپاره باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = x^{\frac{m}{n}} = z^m \quad , \quad z = x^{\frac{1}{n}}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1} . \frac{1}{n} .x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} .x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبيعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

بيلګه : يوه بډای چی په يوه ټاکلي وخت کی ټولسټ (ټولډيری) M توليد کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فيکس يا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کيدې شي چي سملاسی د دې توليد په ټولسټ (ټولډيری) M کی توليد کړي ، په يوه زخيره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته يی سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخيره کونې) لګښتونه راپيد کيږي(ددې د زخيرې لپاره ځاي او هلته بيا اچول او وړل). يا هم کيدی شي چی توليد په لږه کچه يا اندازه توليد شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخيره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر ټل توليد په دې ډول توليد باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه يی بولو.
کومه ډيری x (ازاده لويه) بايد توليد شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟
د زخيرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابيدو ارزښت د چمتووالي يا توليد ارزښت سره يعنی چي خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتيا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون ټل بايد تغير وخوري يعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چيرته چی F ثابت(همغه) يا په کلکه ايښول شوي لګښتونه دي، Lد زخيرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لويه x د

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولیددېږی M څخه نه شي سترېدلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي 0 $\le x \le M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

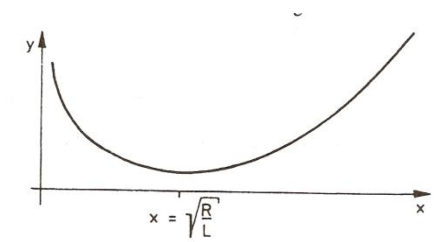
$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \quad (0 \le x \le M$$

(لمړی f(x) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا يي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f'(x) = L - R/x^2 , \qquad f''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = R / L$ ؟؟؟

د $0 \le x$ له امله $f''(x) \ge 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کرې تګلار په ځیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې.

څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = (R / L) > M$وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو.

نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2 < M^2L$
پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او$x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي:

$R = 1000 < M^2L = 108 . 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی

$x = R / L = 1000 / 10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید
ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړيد $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره
صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .
یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

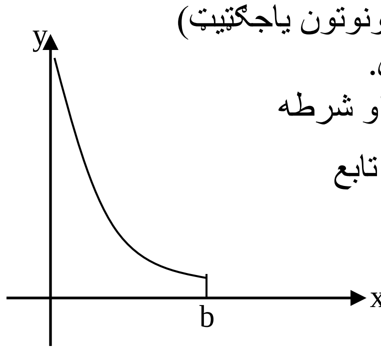
د رول قضیه (Rolle)

ننوتنه :
که د f یوه تابع په بند اینټروال [a,b] کې متمادي او د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته
لږ تر لږه یو عدد k د f(a) او f(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی

د وایرشتراس Weierstrassقضیه

که د fیوه تابع په بند اینټراوال[a,b]کې متمادي یا ناپرېکیدونکې وي، نو fپه دې اینټراوال
کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.
کیدی شي چی یو یوغږیز (monoton) مونوتون یاجګټیټ
ارزښت د اینټروال په غاړه هم پروت وي.
د اینټروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه
حتمي دی. د بیلګي په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع
په نیم بنداینټروال [0,b)کی متمادي ده،
مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې



(c) ketabton.com: The Digital Library

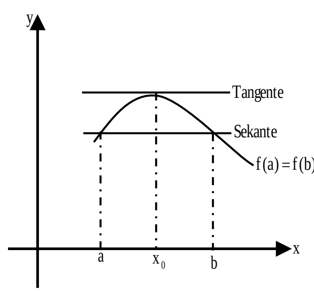
توګه اعظمي ټکی نه لري.

۳. د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ويش ترمنځ داسی نږدې اړيکي وجود لري، کومې چی د اناليوزې په منځ ارزښت قضيو کی تشريح کيږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخويونو څخه لومړی پسی ترلې لاندې د رول قضيه لاس ته راځي

د رول (Rolle) قضيه:

يوه د f تابع دې په بند اينتروال[a,b] کې متمادي وي د(f(a)=f(b سره
او په واز ايتروال(a,b) کی مشتقوړ،
نو لږ تر لږه يوځاي $c \in (a,b)$ شته دی
د $f'(x_0)=0$ سره.
حل :



۱) کهf ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
۲) که f ثابت نه وي، نو د وايرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع يوخورا لوي او يوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپير لري، ځکه چیfثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د (f(a)=f(b سره نامساوي دی . په دې اساس د اينتروال په دننه کی يو مونوتون (جګټيټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټيټ ارزښت) شتون د اړيين يا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرايطو لاندې يوې افقي قاطع ته يو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کيدی شي چی عمومي شي.

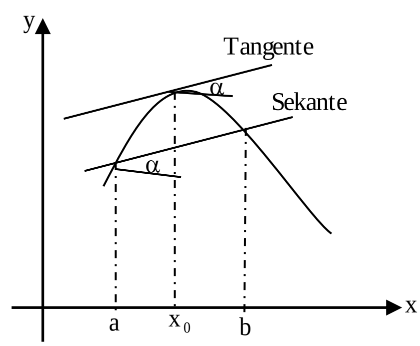
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ایا یوې مایئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه میل (جګوالي) سره جوړیدلی شي؟

ځواب یی لاندې قضیه راکوي

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:
که $y=f(x)$ تابع په بند اینتروال$[a,b]$کی متمادي او په واز اینتروال (a,b)کی د مشتق وړ وي ، نو هلته یوځاي $x \in (a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چی لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



(خیره بنه نه ده انځور شوې تیک دې
د الفا د کونج لاندې ضلعې باید د x محور سره غبرګې وي)
حل:
دا پرابلم په یوه مرستندوې تابع داسی تعریفیږي، چی د رول قضیه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامخ ته کوو:

$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

د مرستندوې تابع په څیر د مشتق تابع جوړیږي:

$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باور لري:$h(a)=h(b)=0$. برسيره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په [a,b]کې متمادي ده. له دې سره د رول د قضيې وړاند نيونه(فرضيه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چی يو ځاي $x\in(a,b)$شته دی د $h'(x)=0$ سره، چی له هغې لرو:

$$h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ يعني } f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

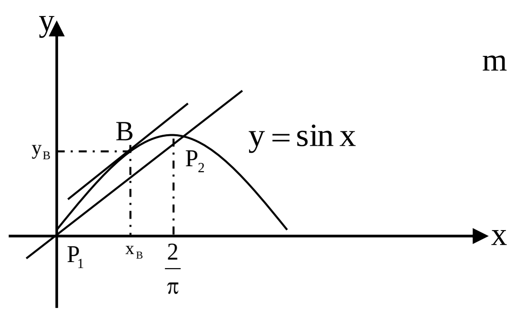
پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بېلگې نوره هم روښانه کړي.

بيلگه :

د $f(x)=\sin x$ يوه تابع دې داسې ورکړشوي وي،چې په يوه ټکي $B(X_B,Y_B)$کی تانجنت د منحني مماس وي، اوکوم چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ټکو کی همغه ميل يا جگوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوځي) ميل ياجگوالی:

$$m=\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{2}{\pi}$$



د منحني ميل د $B(x_B:y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B)=\cos x_B=\frac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي: $x_B=\arccos\frac{2}{\pi}=0,88$ او $f(x_B)=f(0,88)=0,77$

لمس ټکی: $B(0,88:0,77)$

د تانجنت مساوات: $y=\frac{2}{\pi}(x-0,88)+0,77$

د منځ قضی د عموميت څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پراخه شوې یا غزېدلې منځقضیه :

که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اینتروال[a,b]کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b)د مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري ، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځاي $x_0 \in (a,b)$وجودلري چی لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او v=g(x) مساوات د x په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې $x = g^{-1}(v)$

که دf په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیرې قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

که په u=h(x) تابع د $v_1 = g(a)$ او $v_2 = g(b)$ سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د ځای $v_0 \in (v_1; v_2)$ په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2) - h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

له دې څخه د h(v)=f(x),v=g(x) او $x_0 = g^{-1}(v_0)$سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

•

•

•

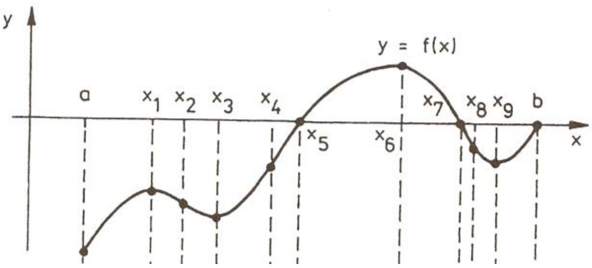
•

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغږیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغږیز، برابرېوله)

جګیدونکي(متزاید)، ټیټېدونکي(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکي توابع)



که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینتروال کې $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$ وي، نو تابع په دې اینتروال کې مونوتون جګیدونکې(- ټیټیدونکې) بلل کیږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$کره یا ټینګه مونوتون جګیدونکې (همغږیز ټیټیدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوتون جګیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

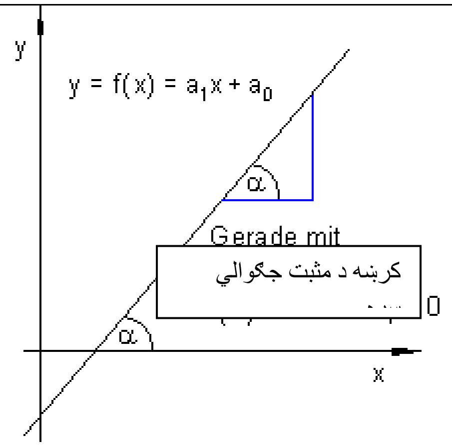
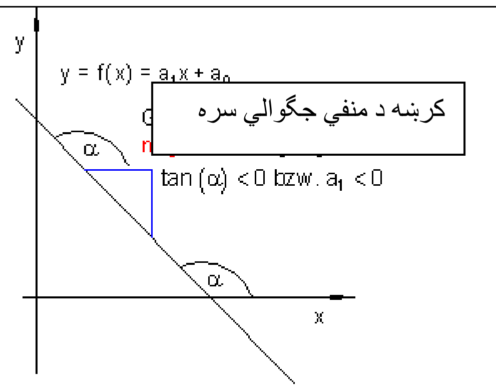
د f یو تابع ټیک هلته په D کې مونوتون ټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوغږيزوالی (يکنواخت) Monotony جګېيتوالی، د جګېيتوالي جملې

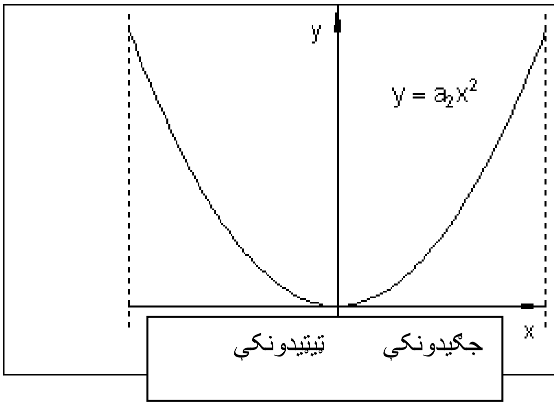
دا $f(x) = a_1x + a_0$ کرښيز(خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چي انحنانه لري. ددې لپاره مسئول يې ثابته جګېدنه يا ثابت ميل $a_1 = \tan(\alpha)$، و دی، چېرته چي α د کرښې او مثبت لوريز د x -محور ترمنځ زاويه(کونج) ده. په مخامخ شکل کې :کرښه د مثبت ميل سره $\tan\alpha>0 \Leftrightarrow a_1>0$	
که $0<\alpha<90^0$ يا $0<a_1<\infty$ وي ، دا په دې مانا چي $a_1>0 \vee \alpha>0$ همداسې($\Leftrightarrow$)، نو کرښه جګيږي. دا دا معنی لري، چي د جګېدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت هم جګيږي. په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha<0$ همداسې($\Leftrightarrow$ $a_1<0$)	 داپورته داسې دی: $\tan\alpha<0$ همداسې $a_1<0$

که $90^0<\alpha<180^0$ يا $-\infty<a_1<0$ وي، دا په دې معنی، چي $\alpha<0$ همداسې $a_1<0$ ، نو کرښه ټيټيږي يا لويږي. دا په دې معنی، چي د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت f(x) کوچنی کيږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږيزي تابع (يا د جګ-ټيټېدونکي تابع) غږيږو او له يوه مونوتون جګېدونکې تابع ښځه، که $a_1 > 0$ وي. له يوي مونوتون ټيټيدونکي تابع ښځه ، که $a_1 < 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کيږي، چې د منحنيو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټوليزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت اينول کېدی شي.



له دې امله د تابع $f(x)=a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اينتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ کې تابع f(x) مونوتون ټيټيږي. او په اينتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې f(x) مونوتون جګيږي.

لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګېدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، يعنې جګېدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له يوه ټکي څخه بل ټکي ته تغير خوري.

د تانجنت جګېدنه >0 ← منحني مونوتون جګيږي

د تانجنت جګېدنه <0 ← منخني مونوتون ټيټيږي

د تانجنت جګېدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کيږي.

روښانه ده چې دf(x) تابع لومړی مشتق f'(x) د تابع ميل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضيه په لاندې ډول فرمولوو .

قضيه: دf(x) تابع دې په اينتروال Iکې مشتقوړ وي.

۱ که د f(x) تابع په اينتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$لپاره

که f(x) په اينتروال I کې مونوتون ټيټيدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

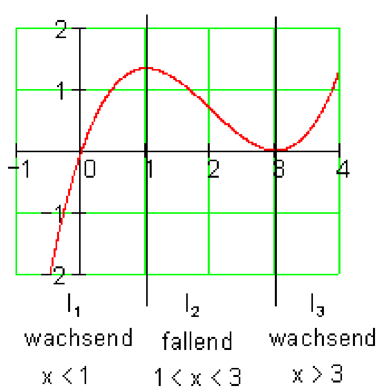
۲ . که $f'(x) \geq 0$ وي، دتولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په اينتروال I کي مونوتون جګيدونکي ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د تولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په ايترولIال کي مونوتون تيتيږدونکي ده.

۳ که $f'(x) > 0$ وي ، د تولو $x \in I$ لپاره، نو$f(x)$ په اينتروال Iکي په کلکه مونوتون جګيدونکي ده

که $f'(x) < 0$ وي د تولو $x \in I$ لپاره،نو $f(x)$ په اينتروال Iکي په کلکه مونوتون تيتيدوني ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحو) تاکنه:

بلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت کېدی شي د مونوتوني ساحي لږ يا زيات تيک و لوستل شي. لاندې ګراف لرو: مخامخ له بني – وکيڼ لور ته:جګيدونکي، تيتيدونکي چګيدونکي	$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ 

د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکی دی.

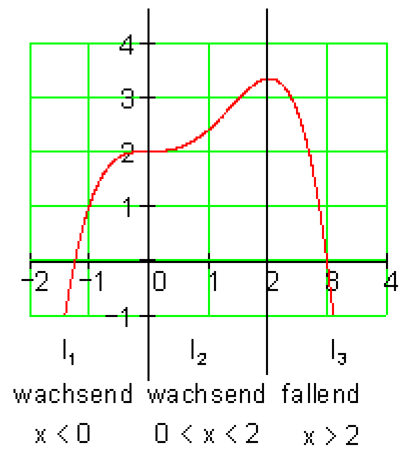
د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$ مونوتون تيټېدونکي ده.

د $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکي ده.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



بیلګه:

پورته له ښي – وکیڼ لور ته: جګیدونکي، جګیدونکي، ټیټیدونکي

له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ ، لپاره f(x) په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګېدونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون ټیټېدونکي ده.

ځای اړونده افراطي ټکي

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکي ګورئ،نو هغه افراېي ټکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x) = 0 ولرو نو يو نسبي ټيټ ټکی مخ ته لرو.

که دf(x) لپاره د x_0په ځاي کی f' (x)=0اوf''(x)>0 ولرو نويو نسبي ټيټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او f '' (x) < 0 ، نو يو نسبي ماکسيموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټيټ ټکي يا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي، او د f '' (x) مخ نښه (+ ، -)، په دې پريکړه کوي چی ايا يو ټيټ ټکی(اصغريټکی)او که جګ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړيکو لپاره لاندې يادوني ضرور دي:

۱ – دا اړيکي يواځي د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعريف سټ په دننه کی پروت وي او هلته د y = f (x) تابع پوره ځو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځايونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم يا هيڅ مشتقوړ نه وي، ځانګړو څيړنو ته اړتيا ده.

۲ - شرايط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) يواځی د يوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري يا اړين شرايط) .

۳– شرايط f ' (x) = 0 او f '' (x) ≠0 د بحراني ټکي لپاره يواځی پوره کيدونکی دی او نه ضروري)

بيلګه :

د f(x) = x² + 2 تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل: د بيلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځاي کې خورا ټيټ ټکی(اصغري-) لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

گراف: که ګراف دې ګران لوستونکي وباسي

د انحراف ټکي له پاره اړيين شرطونه:

۱ – د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځاي لري، يعنې دلته يو بحراني ټکي پروت دی.

۲ – د تابع دويم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکي مخ ته لرو.

بيلګه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنې او نه لوي دی.

د پورته شننې څخه لاندې پيژند ته راځو:

پيژند : د $x = x_0$ په چاپيريال کی د $y = f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جګټکی په همدې ډل نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

جمله : (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دې مقايسه شي): چيرته چې $f'(x) \neq$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځي د x_0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره لرو$f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$دې يواکستريموم و لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښۍ لور انحنا یا کوږوالی اوله کیڼ لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینټروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینټروال کې ګراف کیڼ کوږ شوی یا کیڼه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع ګراف ښۍ کوږ یا ښۍ انحنا لري.

دوه ځیرې (د لاندې بېلګې څیره و باسی ؟-)

بیلګه:

ټول ګونګتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کینکوږدی(کیڼه انحنا لري(ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی(ښی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق(

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x)= 6x-4$

د $6x-4>0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کينې ګوړوال (کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x-4<0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره بنی کوړوالی(بنی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه: د مات راشنل تابع $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ ګراف یو های پاررابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کړه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې بنی کوړوالی - یا بنی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x)=\dfrac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول څانګه بنی کوړوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کینکوړ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بیلګه : د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوړوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{\sqrt{x^3}}{2}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

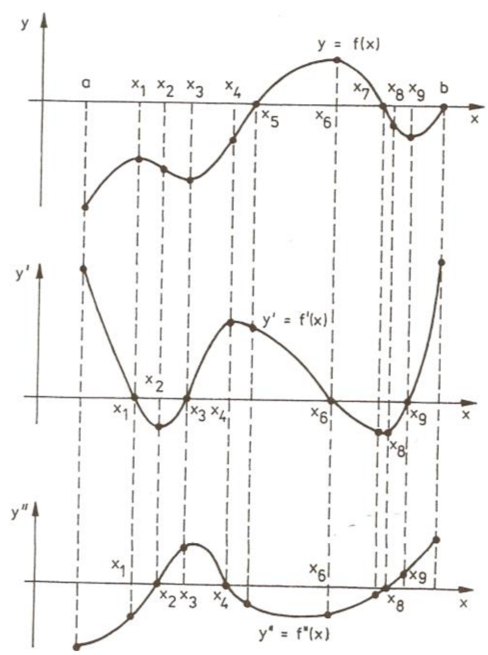
(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتقونه د $x \in R^{+}$ پاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $f''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف کیڼ کوږ دی یا کینه انحنا لري. اړونده ګراف یو کیڼ کوږوالی یا کیڼه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)



یادونه: ولې اوړنټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ...... موړ له پورته خیري اټکل کولی شو چی : که د x_0 ځاي کی دا لاندې ولرو $f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$، نو یو ښی-کیڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په ځتې):

که وي: $f''(x)=0$ او $f'''(x)<0$ نو يو کينې - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x)=0$ وي ، داچی دا ښی -کينې - او که کينې- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه يی ټاکي.

۴ - شرايط $f''(x)=0$ د انعطاف ټکي لپاره يواځی اړيين ياضروري دي.

د $y=x^4$ لپاره $f''(0)=0$ دی، مگر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

۵ – شرايط $f''(x_0)=0$ او $f'''(x_0)\neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کيدونکي دي.

گورو چی $y=f(x)=x^5$ تابع د $x=x_0=0$ ځاي کی يو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x)=5x^4 \quad , \quad f'(0)=0$$

$$f''(x)=20x^3 \quad , f''(0)=0$$

$$f'''(x)=60x^2 \quad , f'''(x)=0$$

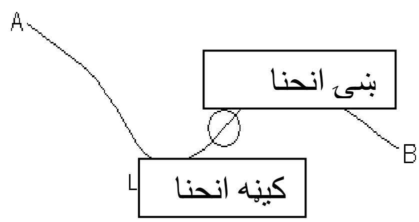
گورو چي دريم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه وني:

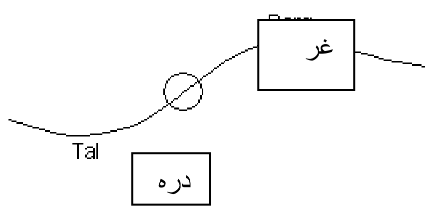
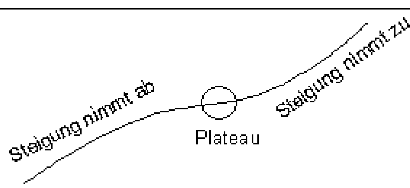
د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توگه مخ ته ځو:

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بایسکل ځغاستي چي له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسيږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستي په وخت کي په پام کي ولرئ. د کيني منحني(د کين لوري د انډل حالت) څخه وروسته د ښی لوري منحني کي ځغلي.	

د کيني- او ښی منحني(کږې) ترمنځ بايد د بایسکل انډل سيده ولاړ وي(عمود وي)، چي دا د انډل بدلون دی له کيني لوري و ښی لوري ته. دا د کيني او ښی منحني ترمنځ اوړيدنه ياد انعطاف ټکی بلل کيږي.

تاسو له بايسکل سره په يوه غونډی ځغلی. وروسته له هغي، چي له تالي څخه تېرېږي، نو لار په جګېدو پيل کوي. په لومړي سر کي نرم او بيا په نيغه جګيږي، بيا په دې پسي جګوالی بېرته کميږي، چي پاس د غونډې په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. يو چېرته په غونډیپورته صفرارزښت ته رسيږي. يو چېرته په لار جګېدنه خورا لويه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.	
د بايکل ځغلونکي بل حالت، چي له ښکنګ دياګرام څخه يي رانيسو: په غره د بايسکل ځغاستميل ياجګېدنه لومړی کميږي، چي له سره بېرته جګه شي. ددي ترمنځ يوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (يوه نسبتاًهواره).ˇ دي نسبتاً هوار ځای کي د ټوټه کربني جګېدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.	 له کين و بني لور ته: جګيدنه کميږي، هواره ، جګيدنه زياتيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي.دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پیل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکې له دې چې یو لړ جملې د بحراني(جګ – ټیټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیرو، غواړو چې دا کلیمې تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبي بحراني ټکې په بڼه کې سره را غونډې شي.

پیژند ۲۰ . ۶ : په یوه چاپیریال $x = x0$ کې مشتقوړ تابع $y = f(x)$ یو کېنې- بنې- انعطافټکی په همدې ډول بنې- کېنې- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):
که په $x0$ کې مشتقوړ تابع $y = f(x)$ اکستریموم لرې نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي (یادونه ۲دې پرتله شي): چیرته چې $f'(x) \neq$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یواځې د $x0$ ځاي په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره$f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):
که په $x = x0$ کې دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم باور لري (يادونه ۴ دې پرتله شي): چيرته چى $f''(x)\neq 0$ وي ، نو هلته نه شي كيدى چي اوړونتكي موجود وي. مګرچيرته چى $f''(x) = 0$ وي ، اوړونتكى شته كېدلى شي، خو اړيين يا ضرور نه ده چى هلته انعطاف ټكى شته وي.

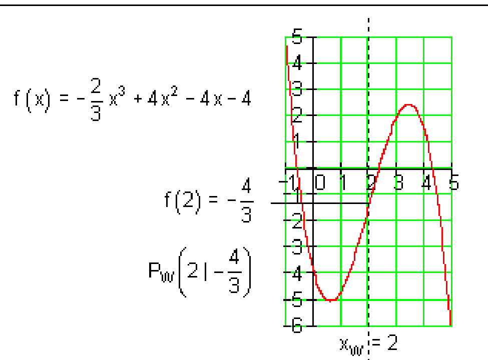
له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۲۰ ، ۱۳:(د اوړونتكي يا انعطافتكي لپاره پوره كيدونكى شرطونه)كه په x x_0= كى دريوار مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي: $f''(x) = 0$, او $f'''(x)\neq 0$ نو هلته يو انعطاف ټكى مخ ته لرو. كه $f'''(x) < 0$ وي، نو يو كيڼ- ښي – انعطاف ټكي مخ ته پروت دى او د $f'''(x) > 0$ لپاره يو ښى-كيڼ-انعطاف ټكى مخ ته لرو.

شننيزه يا تحليلي بيلګه:

يادونه: موږ د x_E سره افراطي ټكى په نښنه كوو او د x_W سره د انعطاف – يا اوړون ټكى په نښنه كوو.

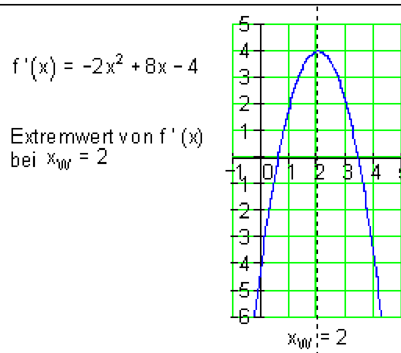
1- تابع مساوات د مشتق سره



$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$

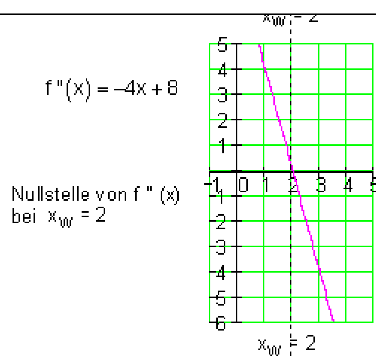
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- دویم مشتق صفر کړئ.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4x+8=0$ $\Rightarrow x_W=2$	 د الماني پښتو: د f'(x) ضفرځای په xw=2 کې

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ایا د انعطاف ټکی شته دی؟

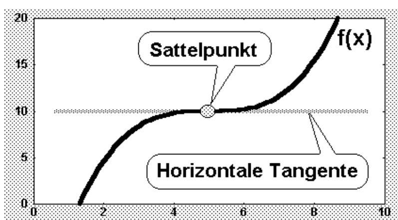
$f'''(x_W)=f'''(2)=-4$ 4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه	

$f(x_W)=f(2)=$ $-\frac{2}{3}(2)^3+4(2)^2-4(2)-4=-\frac{4}{3}$ $\Rightarrow P_{W\left(2\mid-\frac{4}{3}\right)}$ $P_W(21-1.33)$	 د الماني پښتو: د f''(x) ضفرځای په x_W=2 کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام: په انعطاف ځای x_Wکې د $f(x)$ گراف کږیږي.

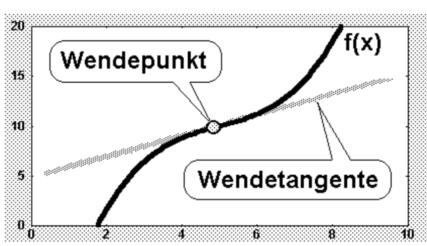
په یوه په خوښه ټکي x_0کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x)>0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کیڼ لور ته کږیږي(انحنا لري) دی.
$f''(x)<0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږیږي(انحنا کوي)
یو زینټکی <u>Der Sattelpunkt</u> څه شی دی؟

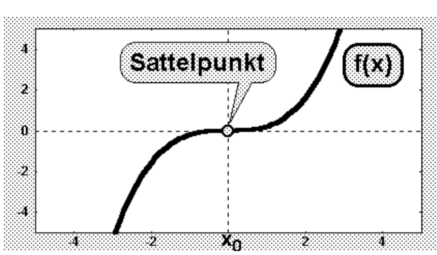


پیژند: د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت)

وي:

د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري



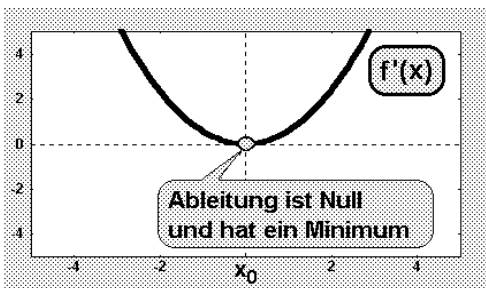


توضیح: اوس فکر کوو، چې یو زینټکی څنگه د شمېرلو له مخې پیژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چې یو زینټکی له ښي ــو کینه انحنا و شمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کمیږي، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جګیږي.

یو زینتکی (د ښي – کیڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کیږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي تیټتکی (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

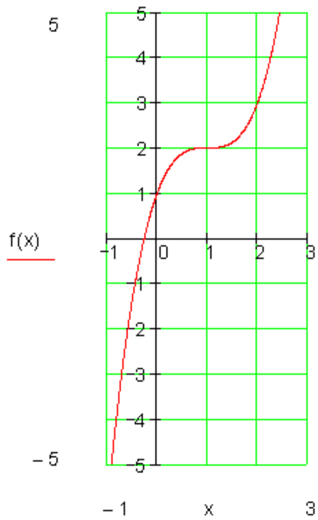
لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینتکی(ښی-کیڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلیږي.
له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکې قضیه ومیندل شوه:
د زینتکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کیڼ- انعطاف سره)
الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بدیل(د ګرانو دوستانو وړاندیز)
؟
\.
،

(c) ketabton.com: The Digital Library

Der Sattelpunktزینتکی



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګيدني سره.که د کيڼ لور ورنږدې شو فکر کيږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نږدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لورې څېړو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$f''(x) = 6x - 6$$
$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 6x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 1$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$	1=> $x=1$ دسره د انعطاف ټکی	1=> $x=1$ د سره زينتکی

د انعطاف ټکي لپاره شرايط پوره دي.
دا چې د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زينتکی دی.
د انعطاف ټکي پيداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پيدا کيږي لکه د تابع دګراف په يوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کيږي.

.

.

،

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$

$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$

$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$

$f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2\Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

مساوات لپاره باور لري.

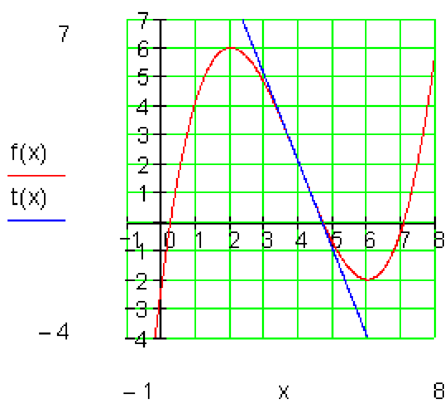
د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$

سره په لاندې ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ گراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:

$t(x)=-3x+14$

د انعطاف- یا وړون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر ځیرنې لاندې نه نیول کیږي.

د کړې یا منحنې بحث (Kurven Diskusion) :

یوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، ربښانه کړئ، چې انحنا چیرته له کینې لور و ښۍ لورې ته او له ښۍ لورې و کینې لورې ته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پېژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع څېړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$

په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅېړل شي.

یه ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)

د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \;\wedge\; f''(x_1) < 0$$

انعطافټکی یا اوړونټکی Inflection Point :

د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:

$$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$$

زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.

د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوځټکی):

د $x-$ محور سرهِ غوځټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow (x) = 0$

د y محور سره غوځټکی(صفرځای) ټاکي $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow f(0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دگراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمېرل کیږي.

د انحنا حالت او یوغږیزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)
یوغږیزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جګیږي. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.
2- که د ټولو $x \in I$لپاره$f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروالI کې کره غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.
که د ټولو $x \in I$ لپاره$f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.
د پېژند ورشو ژی ټکي:
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.
.
.
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي بحراني ټکي

$$P_{\min}(3|-2) \qquad P_{\max}(1|2)$$

انعطاف ټکی او تانجنت

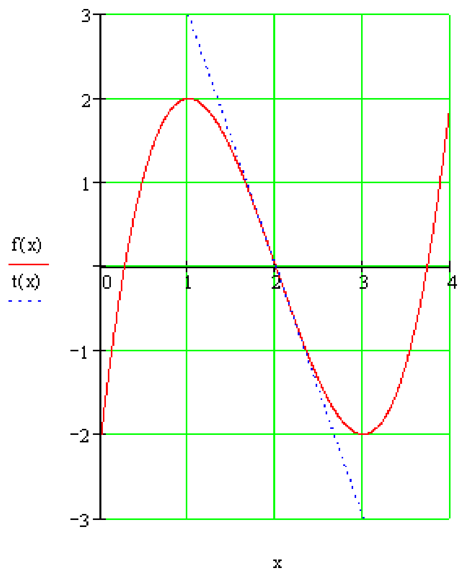
$$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفرځایونه:

$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$$

د y– محور سره
غوڅټکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$

$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \qquad t(x) := -3x + 6$



یوغږیزوالی(مونوتوني یاجګ - ټیټوالی)

$I_1 = \{x \mid -\infty < x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$ په

کې یوغږیز جګیږي.

$I_3 = \{x \mid 3 \leq x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ په

کې یوغږیز جګیږي.

د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سیومتري: نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږوالي یا انحنا حالت:

ښی کږوالی یا انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کیڼ کږوالی یا انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

د افراطي د جګ-ټیټ ټکو جملې یعني دا وروستي نومولی جملی اوس باید په یو لړ بیلګو استعمال شي.

دلته دي د ورکړ شوو توابعو، د پیژند سټ (- ډیری)، انعطافټکي ، جګ-ټیټټکي (اکستریموم، قطبونه، اسیومپټوتی وښوول شي او په دې جوړ(ودان) دې د تابع تلنه وکښل شي. دې ښوونو یا څېړنو ته د کږو خبرې اترې یا – مباحثه ویل کیږي، یعنی دلته د کږو (انحنا) د مختلفو ډولونوپه خویونو غږیږو.

موږ خپل تمرکز د افراطي ټکو(اکستریموم) او انعطافټکو(اړونټکو) رامعلومو یا روښانو څېړنوته متوجه کوو او د »انحنا- خبرې اترې) د انحنا(کږې)-چڼون (« د لاندې شیما له لارې مخ ته بیایو:

0 - د چمتووالي لپاره د تابع (y = f (x د دریمي درجی پورې مشتق پیدا کیږي، بیا له ټولو هغو ارزښتونو xiڅخه سټ M جوړیږي (۴ ټکی) چی وروسته باید ځانګړې تر څېړنی لاندې ونیول شي.

په سټ M کی لومړی د غاړو ټکو ابسڅیز یا پراته ارزښتونه نیول کیږي. په دې پورې په ځانګړي ډول بیا تشځایونه (لوکی Lücke نیمګړتیا) او هم قطبونه اړه لري. د M سټ به وروسته په نورو ارزښتونو تکمیل شي.

۱ – د f (x) = 0 صفر ځایونو xi سټ M0 لټول کیږي.

۲ – ټول ځایونه x لټول کیږي، چی هلته (y = f (x د مشتق قابلیت نه لري او په ډیری Mکی یی نیسي. بیا د ټولو ارزښتونو xj ډیری M1 لټول کیږي، چیرته چی f′ (x) = 0 وي، (دا د بحراني ارزښتونو لپاره په پوښتنه کی راځي) ، او د (yj = f (xj تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتونه یی. ورپسې سړی د ټولو $x_j \in M_1$ ارزښتونه د f (xj) د دویم مشتق لپاره لټوي.

۳ - ټول هغه ارزښتونه x چیرته چی y = f (x) دوه ځله مشتقوړ نه دی د M په‌سټ کي نیول کیږي.

ورپسې بیا سړی د ټولو xk سټ M2 لټوي، چیرته چی f''(x) = 0 وي (دلته نو د انعطاف ټکي پوښتنه کی راځي) او د هغه د تابع ارزښتونه yk = f (xk) .

بیا د ټول $x_k \in M_2$ لپاره دریم مشتق f '''(x) ازمائیل کیږي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری M_{21} د کومو لپاره چی f'''(xk) < 0 وي نو افقي(پراته) محور کیڼ - ښی-اانعطافتکی جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری ، د کومو لپاره چی وي f'''(xk) > 0 نو د پراته- یا افقي محور د ښي - کیڼ - انعطافتکي جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ډیری د کومو لپاره چی f'''(xk) = 0 وي او یا دریم رابیلیدونکی نه وي موجود نو په ډیری M کی نیول کیږي.

۴ – د تیرو درسونو تعریفونو او جملو سره سم په افراطي ټکو او انعطافتکي یا ا وړونټکي باندې د ډیري M څیړنه د اصلي حالتونو لپاره اوس یو څو بیلګی راوړو

بیلګه : بلواك y = f (x) = x³- 6x² + 9x هرچیرته پوره زیات مشتقوړ دی.

$$0 - \ f (x) = 3x^2 - 12 x + 9 , f (x) = 6x - 12, \ \ f \ \ (x) = 6$$

په سټ M کي یواځي $-\infty, \infty$ نیول کیږي د حد –یا پولي تیریدنو په موخه یا هدف :$M = \{-\infty, \infty\}$

$$1 - \quad f (x) = x^3 - 6x^2 +9x = x (x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$M0 = \{x1 , x2 \} = \{ 0 , 3 \}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

2 - f ' (x) = 3 x2 - 12x + 9 = 0

M1 = {x3 , x4 } = {1 , 3 }, y3 = 4 , y4 = 0

f '' (x3) = f (1) = -6 < 0 , Minimum (مینیموم

f '' (x4) = f (3) = 6 > 0 , maximum (ماکسیموم)

M11 = {1} , M12 = { 3 }.

3 - f'' (x) = 6x - 12 = 0 ,

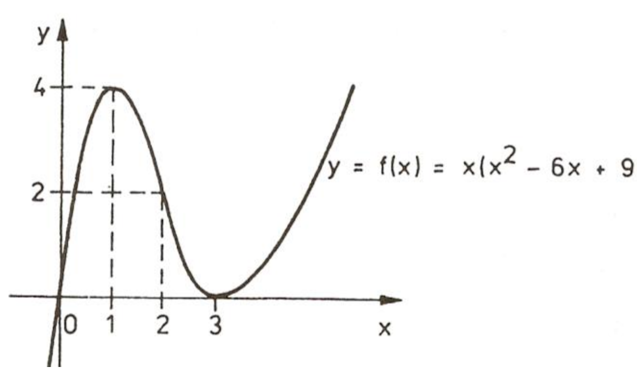
M2= { x5 } = { 2 } , y 5 = 2

f '''(x5) = f '''(2) = 6 > 0 (

ښی - کیڼ اوړیدونټکی M 22 = { 2 }.

4 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

په دې ډول د منحني تګلار په لاندې ښېره کې لاس ته راځي



بیلګه : تابع $f(x) = x^4 - 4x^3$ پوره په خوښه مشتقوړده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

0 - f' (x) = 4x³ - 12x² , f '' (x) = 12 x² - 24x , f ''' (x) = 24x - 24

په ستڼ M یواځې $-\infty,\infty$ نیول کیږي: $M = \{-\infty,\infty\}$

1 - $f(x) = x^4 - 4x^3$ = x3 (x - 4) = 0

M0 = { x1 , x2 } = { 0 , 4 }.

2 - f ' (x) = 4x3 - 12 x2 = 4x2 (x - 3) = 0

M1 = { x3 } = { 3 } , y3 = -27

دا چی د 0 = x لپاره دویم مشتق 0 = (0) '' f دی، دا ارزښت د ۳ - لاندې ځیړل کیږي

f '' (x3) = f '' (3) = 36 > 0 , Minimum, M12 = { 3 } .

3 - f '' (x) = 12x2 - 24x = 12x (x - 2) = 0

M2 = { x4 - x5 } = { 0 , 2 }, y4 = 0 , y5 = -16,

f ''' (x4) = f ''' (0) = -24 < 0

M21 = { x4 } = { 0 }, انعطاتیکی(کیڼ- ښی -انعطاتیکی

f ''' (x5) = f ''' (2) = 24 > 0 ,

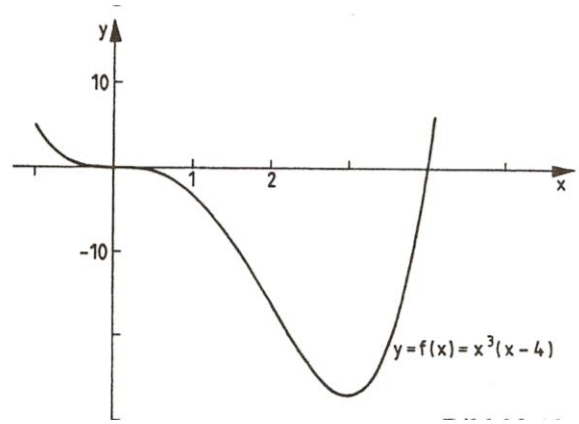
انعطافتیکی(ښی - کیڼ – انعطافتیکی)

M22 = { x5 } = 2 .

4– $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې ګیرې ګخه د کږې تلنشکل لاس ته راځي .



بیلګه : تابع $y = f(x) = e^{x^3}$ پوره مشتقوړ دی:

صفر:

$$f'(x) = 3x^2e^{x^3}$$
$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3}$$
$$f'''(x) = 9x^3e^{x^3}(3x^3+2)+6e^{x^3}(6x^3+1),$$

$M = \{\infty, -\infty\}$

۱ – تابع کوم صفرځای نه لري

۲ - $f'(x) = 3x^2e^{x^3} = 0$

یواځې د $x_1 = 0$ لپاره ارزښت لري. مګر داچي f''(0) = 0 دئ ، نو x1 = 0 د ۳ - لاندې ګیرل کیږي

۳ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3} = 0,$$
$$M_2 = \{x_2, x_3\} = \left\{0, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}, \ y_2 = 1, \ y_3 = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}.$$

بنې – کیږ انعطافټکې:

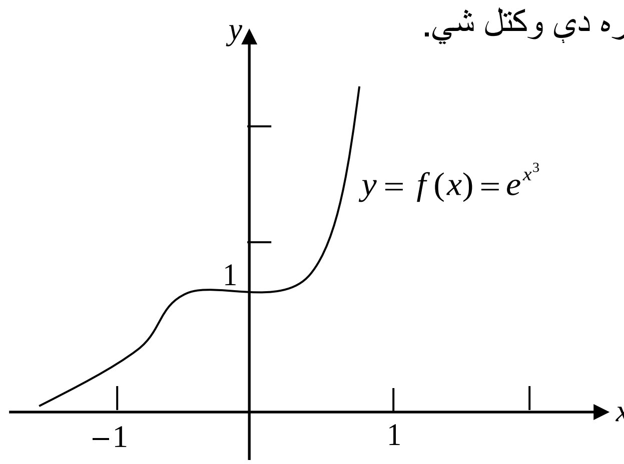
$$f'''(x) = f'''(0) = 6 > 0$$
$$M_{21} = \{x_2\} = \{0\}$$

کیږ- بنې انعطافټکې:

$$f'''(x_3) = f'''\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = 0 + 6\,e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-6\frac{2}{3}+1\right) < 0,$$
$$M_{22} = (x_3) = \left\{-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}.$$

۴ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3} = 0, \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^3} = +\infty.$

لاندې ځېره دې وکتل شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه: تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}$ د ټولو x لپاره تعریف دی، مګر یوائځي د = | x

$x\neq 0$لپاره مشتقوړ دی

صفر - د $x\neq 0$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}},$$
$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

دلته (f'''(x ته اړتیا نه پیښیږي

د M سټ له x = ± oe او x = 0 څخه جوړ دی

$$M=\{-\infty,0,\infty\}$$

اول: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}=0$

د $x=-\sqrt[3]{x^2},\ x^3=-x^2,\ x^3+x^2=0$

له امله د حل لپاره په پوښتنه کې x1= 0 , x2 = -1 راځي. دواړه ارزښتونه ، لکه ازماینه روښانه کوي، صفرځایونه دي:

$$M_0=\{x_1,x_2\}=(0,-1)$$

M0 = { x1 , x2 } = {0 , -1}

دویم : $f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0.$

م - د دې مساواتو حلونه له لاندې لاس ته راوړني څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0,\quad \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=-1,\quad \frac{8}{27x}=-1,\quad x=x_3=-\frac{8}{27},$$

$$y_3=f(x_3)=-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{4}{27}.$$

$$M_1=(-\frac{8}{27}).$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right)=-\frac{8}{9^3x^4}<0, Maximum$$

$$M_{11}=\left\{-\frac{8}{27}\right\}.$$

۳ -

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}=0$$

د کوم له پاره شووني نه ده.

۴ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}+\left(1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}\right)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

هغه ځاي$x1 = 0$ ، دکوم لپاره چی $f(x)$ مشتقوړ نه دی او د کومی لپاره چی $f(0) = 0$لرو، باید تر اوس تر څیرني لاندې ونیول شي

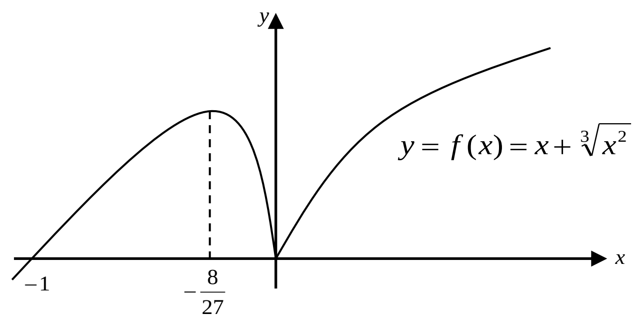
د $x > 0$ لپاره $f(x) > 0$ دی.

د $-1<x<0$ لپاره صدق کوي(د $x^2 > 0$ سره ضرب $-x^2 < x^3 < 0$) په همدې ډول(⇔ لاس ته راځي او برعس) یعني $0<-x^3<x^2$ او له دې امله $0<\sqrt[3]{-x^3}<\sqrt[3]{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

، نو $0<-x<\sqrt[3]{x^2}$ او له دې سره: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}>0,$

له دې امله د $x1 = 0$ سره یو نسبي تیټتکی (نقطه اضغري) مخ ته پروت دی. په دې توګه د کږې یاا منحني تلنلار د لاندې څیرې سره سم روښانه ده.



په لاندې بیلګه کی دې د x ارزښتونه د $f''(x) = f''(x) = 0$ لپاره هم د M په سټ کی ونیول شي.

بیلګه : تابع $y = f(x) = x^4 + x$ پوره زیات مشتق وړ دی.

صفر:

$$f'(x) = 4x^3 + 1,$$
$$f''(x) = 12x^2,$$
$$f'''(x) = 24x,$$
$$f^{(4)}(x) = 24,$$
$$f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = \ldots = 0$$

په M کی یواځې د ابسڅیزی یعنی دپراته محور د غاړوتکی یعنی $\pm\infty$ نیول کیدي شي:

$$M = \{-\infty, +\infty\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1 $f(x) = x^4 + x = x(x3+1)0, \quad M = (0-1)$

2 $f'(x) = 4x+1 = 0$

$M_1 = \{-1/3\sqrt{4}\}, \; y_3 = -3/\,4\sqrt[3]{4}. = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

$f''(-1/\sqrt[3]{4}) = 12(-1/\sqrt[3]{4})^2 > 0.Min, \; M_{12} = \{-1/\sqrt[3]{4}\}$

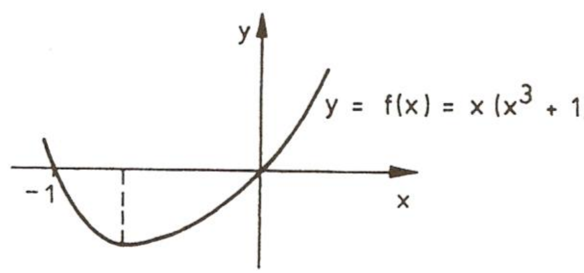
3 $f''(x) = 12x^2 = 0, \qquad M_2 = \{0\}$

$f'''(x) = 0$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

د x=0 سره هيڅ اوړونتکی مخ ته نه لرو، ځکه چی f'(x) هلته اکستریموم ارزښتونه نه لري، بلکې يو اوړونتکی $y = x^3$ (په ۴ غزول شوی او د ۱ سره و پورته لور ته خوځول شوی یا پورته شوی) .

دا د ځيري ۲۰ ، ۱۳ سره سم د کږې تلنه ورکوي.



ناټاکلي حدونه يا پولې

يا د ناټاکلو افادو(ويينو) حدونه يا پولې

(c) ketabton.com: The Digital Library

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو حد پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وايي، ځکه چې مشتق يې نيول کېدی شي، يعني د کمښتونو ويش(د تفاضلونو ويش) حد يې ټاکل کيدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$توابع ولرو،نود x=0 لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نيولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وايو.

پيل خيرنه:

د $\frac{0}{0}$ حالت

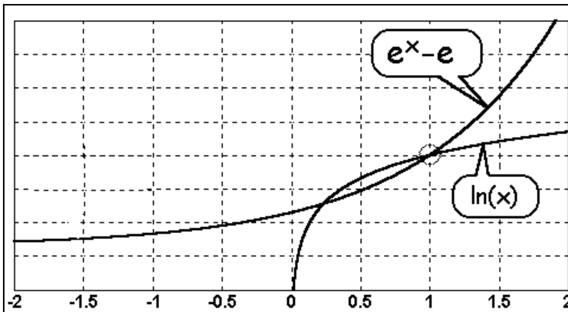
که پوله ارزښت جوړېدو کې يو کسر پيدا شي، چې صورت او مخرج يې دواړه د صفر په لور لاړ شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

بيلګه: لاندې د الماني ښتو: صورت يا ماتباندې، مخرج يا ماتلاندې

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Z\ddot{a}hler \to 0}{Nenner \to 0}$$

په خيره کې برخه توابع رسم شوي دي، يعني د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه.

ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)



(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکندود(لیکنډول): د افادې $\dfrac{\text{صورت} \to 0}{\text{مخرج} \to 0}$

لپاره په پوله شمیرنه کې لنډ لیکو:

$$\frac{0}{0}$$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولیزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمیرل کیدی. د لوړې ریاضي سره دا کار شمیرنه شونی شوه(دبیلګې په توګه د لو پیټال قانون له مخې، چې پسې به وڅیړل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمیرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تیر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{\ln x}=\qquad\frac{\to0}{\to0}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{\ln x}=\frac{Zähler\to0}{\text{مخرج}\to0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ – که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د x=1 په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده 0:0 به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u=f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

۲ – ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمیرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمیرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارولی، لکه په پورته بیلګه کې.

۳ – د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کې‌دی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د ۱ په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نزدې برابر شي.دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001}=100$$

$$\frac{0.00000000100}{0.00000000100}=100$$

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نزدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني (100) دی،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي او د دې لو، پيتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

د برنولي او د دو لو پيتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کيږي، چې مخرج او صورت (ماتباندې او ماتلاندې) همغه صفرځاي x_0ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ موخه وره (هدفمنده) نه ده. کيدی شي چی د ويش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وڅيړل شي، په کومو کی چی صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بيلګي په توګه تابع

$$f:\quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$$

صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2لري، سره له دې هم پوله شته دی.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شميرل کيدی شي، چی د صورت او مخرج توابعو له نتيجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضيي استعمال هم بلل کيږي.

د برنولي او د دې لو، پيتال قاعده :

که توابع u=f(x) اوv=g(x) د يوه $U(x_0)$چاپيريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x)\neq0$سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 دfاوgيوصفرځاي وي،

د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: تابع د پراخه شوي منځ ارزښت قضي نیونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره

یو xmد $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چی لرو

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0 \wedge g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچی د x->x0 سره xm->x0 هم هڅه کوي.

دx->oe په حالت کی x=1/z ځاي په ځاي کوو. د زنځيري قضي په مرسته لاس ته راځي:

u=f(1/z)

د مشتق $du/dz = f(1/z)\cdot(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z}).(\frac{-1}{z^2})$ سره

، داسې چې لرو :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کی $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي ، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سړي دn-پلونو(قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چی $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع n - م مستق په معني دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډول یا تیپ: $0 / 0$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(ځګعدد) α لپاره یو په خوښنه توان x^{α} د x->oe لپاره په غښتلې توګه ځګیرږي، نسبت لوګاریتم تابع lnته

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0$$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلي جګیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بنه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

له تیپ یا بڼي $\infty-\infty$ څخه و بڼي یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته

ددي لپاره لاندې تابع بیلګه کیدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچی دلته مشتق بیرته د بڼي تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼي $0.(\pm\infty)$ څخه بڼي $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د $x\to 0$ لپاره ښایي. په کوم کی چي ضرب د ویش په ځیر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

له بڼي 0^0 څخه وبڼي e^0 ته:

دلته د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x\to 0$ لپاره تر ځیرنی لاندې نیول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بڼي بدلون يا فورم بدلون و بنسټe ته د يوې انځورونی په مرسته په بريالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to+0} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د ښوونی ، د بيلګي په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او x

د $x\to\infty$ x $\in$ R^+ سره:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}} = e^\mu$$

د μ=1 له پاره لاس ته راځي

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بڼې ∞^0 و بڼې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته

دا کارونه په يوې بيلګي روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\cdot\sin x} = 0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$ سره

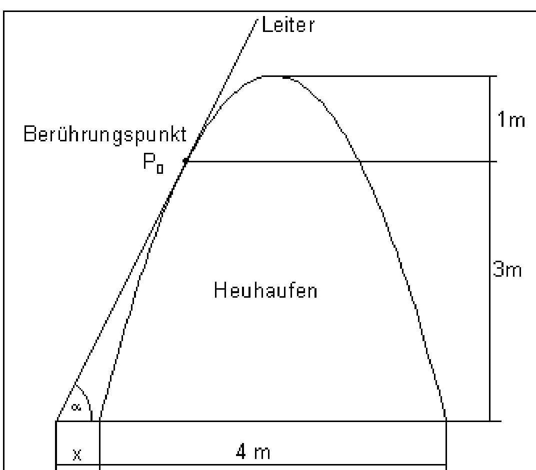
(c) ketabton.com: The Digital Library

باید لاندې جدول کې پام وشي. لرې یا ټې: شي

لاندې جدول د پورته ښوول شوو بڼویا ډولونو د بڼی بدلون ټولیزه کتنه ممکنوي

بڼه بدلون یا لنډ: بدلون	$g(x)\to$	$f(x)\to$	ټیپ(ډول)
$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$	0	0	$-\infty$
$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\to\frac{0}{0}$ $\wedge(Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\to\frac{\infty}{\infty}$		0	∞
$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ د f(x)>0 سره.	0 0	0 1 0	∞

د یوې تابع د استعمال بیلګه د تانجنت له پاره :



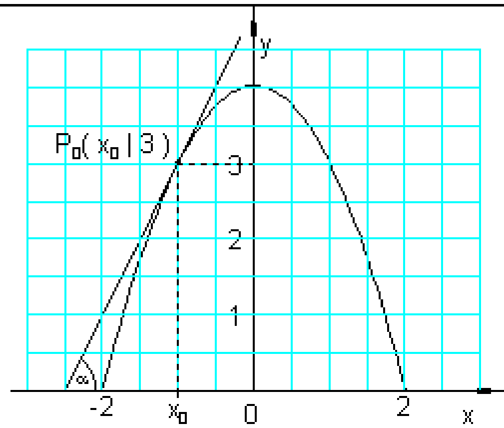
له څمکې څخه د وښو په ټوپۍ یوه زینه اینبول کیږي. دا زینه په درې متره جګوالي ټوپۍ لم د وښو ټوپی دې د یوه کیښکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ یې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جګوالی لري.

غواړو په دې یوه زینه کیږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي.

په کومه زاویه(کونج)باید دا زینه کېښول شي؟

د وښو ټوپۍ له بیخ څخه دې په کوم لرېوالي په څمکه دا زینه کینبول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



موږ د y محور داسي کاږو،چي د پارابول له ککرۍ(څوکې) څخه تېرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمیرنه :

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت x_0 = -1 کاروو. زینه توپی په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \qquad P_0(-1|3) \Rightarrow \bar{x}_0 = -1;\ \bar{f}(x_0) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- -----------------------------------

جوړه زاویه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63{,}4^0}}$

د زینې او د وښو ټوپې تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 0,5دی.

زینه د وښو د ټوپې له پېښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کیږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې ګټې(غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کې ، چې په عمل کې کارول کیږي یا صورت نیسي، له تاثیروونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومې چې موږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کې لرودی شو.

موږ یواځې هغه پروسې تر څېړنې لاندې نیسو چې د یوې واریابلې یا اووښتونې x په واک کې وي. دا د بل په واک کې د یوې تابع $y = f(x)\ ,\ \ x \in D$ له لارې څرګندولی شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چی f(x) مینیمال یا خورا کم شي.

که په څټ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسی لاس ته راوړل شي، چې f(x) ماکسیمال یا خورا لوي شي. په قاعده کی اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك واریابل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیکپوهنی له امله ، یواځی په ټاکلو پولو کی

$$a \leq x \leq b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلی ، په دې پورې اړه لري، چی ایا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \leq x \leq b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \leq x \leq b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخی پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینګ تړلی دی. دلته ځموږ علاقه په ځانګړې توکه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

۱ - د بلواکیزو (y = f(x ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفي ورکولو سره سم(د موډالیټي پرابلم)

۲ - د تخنیکپوهنی پولو په پام کی لرل (*)

دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

بیلګه : یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چي ټول اوږدوالی یې L دی. له دي سیم سره باید یوه مربع سطحه (څلورګوډیزه هواره)، چی د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د مودالیتيArt und Weise پرابلم : غوښتنه مو د یوې څلور ضلَعي(څلورګوډی) پیداکول دي. لکه چی معمول دي، ددې څلورضلعي (-ګوډی) یو اړخ په a ښایو او بل اړخ بي په b ښایو، د څیرې ۲۰ . ۱۴ له مخی) .

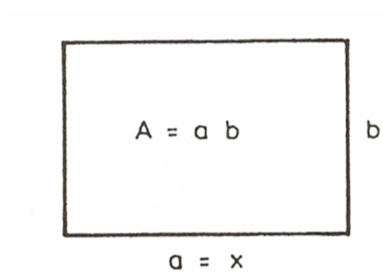
دا په سر کی دوه اغیزې لرونکي یا تاثیراچونکی لویي a او b دي. د

$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

له امله یواځي یوې اغیزمنې(تاثیراچوونکي) لویي ته اړیو د بیلګي په توګه $a = x$ ، دا ګټه (ستحه A)داسي ده $A = ab = x((L/2)-x)$

دا روښانه ده چی صدق کوي . $0 \le x \le L/2$

له دې امله د ستري ګټی پرابلم داسی دی



$$y = f(x) = x((L/2)-x)=Max! \qquad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله باید ماکس د 0 او $L/2$ ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره یواځي $x = L/4$ په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y''=f''(x) = -2 < 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ریښتیا چی یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بیلګه : یوه بډای چی په یوه ټاکلي وخت کی ټولسټ (ټولډېرئ) M تولید کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي. کیدې شي چي سملاسی د دې تولید په ټولسټ (ټولډېرئ) M کی تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخیره کوني) لګښتونه راپید کیږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر ټل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه یی بولو. کومه ډېرئ x (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دئ ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون ټل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه اینسول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولیدډېرئ M څخه نه شي ستربډلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \le x \le M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R /x = Min! \quad (0 \le x \le M$$

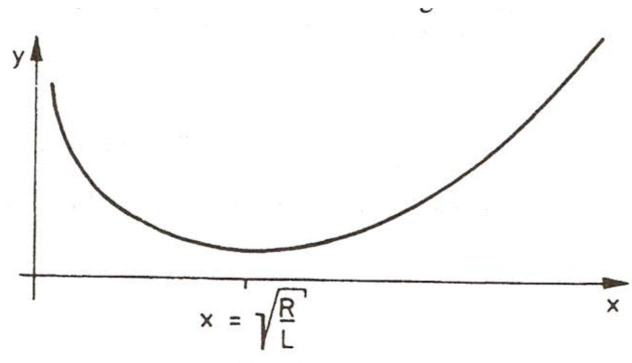
(لمړی f(x) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f\,'(x) = L -R/x^2 , \qquad f\,''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f\,'(x) = 0$, پس لرو $x = \quad R / L$ ؟؟؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $0 \geq x$ له امله $0 \geq (x)$ '' f هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کرېږ تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوی. ځرګنده ده: که $x = \sqrt{R/L} < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = \sqrt{R / L} > M$ وي، نو یو منیموم په ځنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = \sqrt{R / L} < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2 < M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = \sqrt{R/ L}$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي > $R = 1000$ $M^2L = 10^8 . 10 = 10^9$ستر یا غټ ازاد لګښت دی $x = \sqrt{R / L} = \sqrt{1000 / 10}$ $= \sqrt{100} = 10$ = ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړېږد $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په K(x) سره ښایو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډیری) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منحنې لګښت زیاتوالی ښایي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معنې، چې د لګښت د تابعK مشتق.

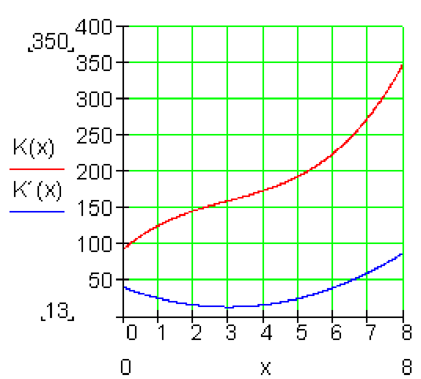
پیژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتفارزښت**K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګشت**K'(x)** هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکئ، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږئاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لګښتزاتوالی و ټاکئ:



لاندې تابع لرو:

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتف ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

(c) ketabton.com: The Digital Library

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، یعني هلته چې تانجنت **K'(x)** پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

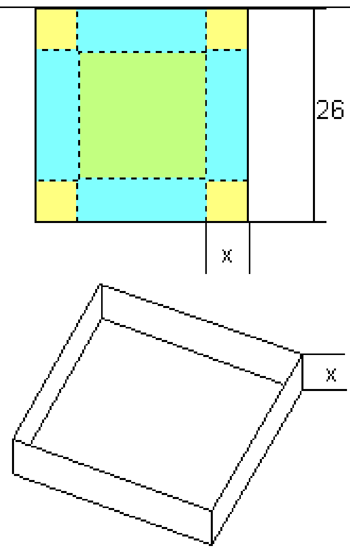
دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه ، چې ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، جې د x جګوالی لري.

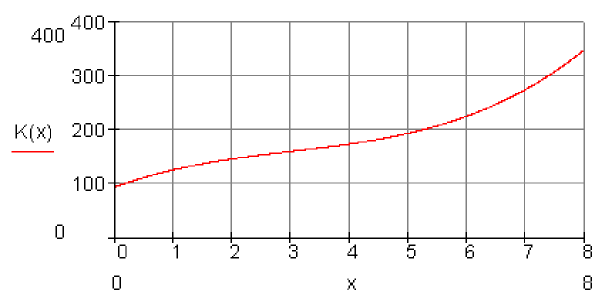
الف: د یوه تابع ترم وټاکی، چې د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښایي.

ب – ګراف وکاږی او په نږدې توګه یې ماکسیما(خورا جګ) حجم و ټاکی.



- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکې انځوروي، داسې چې x = 1 د 100 ناروغانو معنی او y = 1 دی معنی چې 1000 € / Tag. یوزر یورو په ورځ (1000 € / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تېولګه:

د رول(Rolle) قضیه:
یوه د f تابع دې په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:
که $y=(x)$ تابع په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اینتروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته یوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې

لرو: $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$

ښېره په نوټ کې ده، دا بنه نه ده کېنل شوې

پراخه شوې منځقضیه:
که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

قضیه:
د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکې مشتقوړ وي.
1. که د $f(x)$ تابع په اینتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره
- که $f(x)$ په اینتروال کې همغږیزټیټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.
- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې همغږیز جګېدونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که $f'(x) \le 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ایتروالI کې همغږیز ټیټېدونکې ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه همغږیزجګېدونکې ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اینتروال Iکې په کلکه مونوتون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ او $f''(x) > 0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x) = 0$ او $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x) = 0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x = x_0$په چاپېریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0ته پوره نږدی x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \text{ په همدې ډول } f(x) \le f(x_0)$$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله : (د يوه بحراني ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f'(x)=0$, $f''(x)\neq 0$ نو تابع $y=f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.

خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

پيژند: په يوه چاپيريال $x=x_0$ کي مشتق وړ تابع $y=f(x)$ يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کي مشتق وړ تابع $y=f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کي راځي، چې د هغي لپاره $f'(x)=0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y'=f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیزند: د زینتکي(کله کله برندې تکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافتکي ځانګړی حالت پو هیږو، داسې انعطافتکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافتکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده:

که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x) \neq 0$ سـره او د ټولـو $x \in U(x)$ لپـاره او x_0 د f ا و g یوصـفرځاي وي، د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

تمرینونه:

۱ – د لاندې لیکل شوو تحلیلي افادو مشتق د x0 په ځای کې وشمېرئ او د فرمول د اعتبار ورشو(ساحه) ورکړئ.

a) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = x\sqrt{x}$

d) $y = \frac{x^2+1}{x}$ e) $y = \frac{x}{x-1}$ f) $y = \sin\frac{x}{2}$

۲– د یوه تن یا جسم عمود پورته غورځوني د تن دروندتکي (د جسم د ثقل مرکز) د لار- وخت- مساوات په لاندې ډول دي:

$$s = f(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيلچټکتيا يا پيل سرعت $v_0 = 30\ \frac{m}{s}$ او د ځمکې بيرې(د ځمکېتعجيل) $g = 10\ \frac{m}{s^2}$. سره. دا تن يا جسم کله خپل عظمي جګوالي ته رسيږي؟

دا جګوالی څومره لوي دی

۳ – يو تن په برابر ډوله چټکتيا خوزي(حرکت کوي)، داسې چې بيره(تعجيل) يې $a = 2\ \frac{m}{s^2}$ دی

په لاندې جدول کې د $\{(\Delta t)_n\}$ لپاره يو صفرترادف(- پرلپسې) کېږدی(د بيلګې په توګه لکه په اوله مټه(ستن) کې) او جدول پوره کړی.

له $t_0 = 3\ s$? وروسته د تن يا بدن لحظوي چټکتيا څومره ده.

۴ – د لاندې تحليلي افادو مشتق ونيسی! پام وکړی، چې د مشتقنيولو کومه قاعده په کار وړی شي

a) $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5$

b) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$

c) $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4$

d) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6\cdot\sqrt[3]{x}}{x}$

e) $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

f) $y = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$

g) $y = (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)(x - \sqrt{x})$

h) $y = (ax^2 - b)^2$

i) $y = \frac{x^2 + x}{3x^3}$

j) $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$

k) $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

l) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)$

۵ – د لاندې ورکړل شوو تحليلي افادو مشتق ونيسی، او هغه ارزښتونه ترې وباسی، د کومو له پاره چې مشتق شته (موجود) نه وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۱ ـ

a) $y = (x-1)(1-x^3)$

b) $y = (x^3+1)(1-x-x^2)$

c) $y = \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x^3}\right)$

d) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[4]{x} - 2x\right)$

۵ . ۲ -

a) $y = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$

b) $y = 4x + \frac{1}{x^2+1}$

c) $y = \frac{x-4}{4-x}$

d) $y = \frac{x^3-2x+1}{2x^3-5}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{2}}{3x^2-2}$

f) $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$

g) $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

h) $y = \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{x^2-2x-1}$

i) $y = \frac{x^3 + 3\sqrt[3]{x}}{2x^2+x}$

j) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}+1}$

۵ . ۳ ـ

a) $y = \sqrt{x}\,\sin x$

b) $y = 2\sin x\,\cos x$

c) $y = 1 - \cos^2 x$

d) $y = x^3 \cos x$

e) $y = 2\sin x\,(x - \cot x)$

f) $y = \frac{\tan x}{\cot x}$

g) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

h) $y = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$

i) $y = \tan x - \cot x - 2x$

j) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

۵ . ۴ ـ

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2x^2}$

c) $y = e^x \tan x$

d) $y = \frac{5e^x}{\cos x}$

۵ . ۵ ـ

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = \frac{\ln x}{x}$ b) $y = \sin x \ \ln x$

c) $y = x^2 \ln x$ d) $y = 10 \ln e \ln x$

۵ . ۶ -

a) $y = 5^x + 2^x$ b) $y = 3^x x^3$

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

۵ . ۷ –

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

a) $y = (2x+1)^4$ b) $y = (1-x^4)^5$

c) $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^8$ d) $y = \left(2x^2 - \frac{4}{x} + 3\right)^6$

۵ . ۸ -

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ b) $y = \sqrt{1-2x}$ c) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$ e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ f) $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

g) $y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ h) $y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

۵ . ۹ –

a) $y = 5x^2 \sin 2x$ b) $y = \sin^2 x$ c) $y = \sin \sqrt{\frac{x}{2}}$

d) $y = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$ e) $y = \cos \frac{1}{1+x}$ f) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

g) $y = \cot (1 - 3x)$ h) $y = \cot\sqrt{1-2x}$ i) $y = \sqrt{\tan x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y = \frac{\cos x^2}{\pi x}$ k) $y = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$

l) $y = \left(3 + \frac{2}{\cos^2 x}\right)\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ m) $y = \left(\frac{3}{\sin x} - 5\right)\frac{1}{\sin x}$

n) $y = \tan\sqrt[3]{\frac{1-2x}{x}}$ o) $y = 2\sin\sqrt[3]{\frac{3}{x}}$ p) $y = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

-۵ . ۱۰

a) $y = \text{Arcsin}\frac{x}{a}$ b) $y = \text{Arccos}\,\frac{a-x}{a}$ c) $y = \text{Arctan}\frac{1}{x}$

d) $y = \text{Arccos}\,\sqrt{1-x^2}$ e) $y = \frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{2x}{1-x^2}$ f) $y = \text{Arctan}\,\sqrt{\frac{x}{x+a}}$

g) $y = \text{Arcsin}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ h) $y = \text{Arctan}\,\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$ i) $y = \text{Arccot}\,\frac{1+x}{1-x}$

j) $y = \text{Arcsin}\,2x\sqrt{1-x^2}$ k) $y = \text{Arctan}\frac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

l) $y = a\cdot\text{Arc}\cos\frac{a-x}{a} - \sqrt{2ax-x^2}$

-۵ . ۱۱

g) $y = \frac{e^{-\cos x}}{\sin x}$ h) $y = \sqrt{1-e^{-x}}$ i) $y = \frac{\sin\frac{x}{2}}{e^{2x}}$

j) $y = e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

-۵ . ۱۲

a) $y = \ln 2x$ b) $y = \ln x^2$ c) $y = (\ln x)^2$

d) $y = \ln\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{\ln x}$ f) $y = \ln\sqrt{1-x}$

g) $y = \ln\tan x$ h) $y = \ln\ln x$ i) $y = \ln\cot\frac{x}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y = \ln \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ k) $y = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

l) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a}\right)$ m) $y = \ln \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ n) $y = \ln \sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}}$

o) $y = \ln\left(a + x + \sqrt{2ax + x^2}\right)$ p) $y = \ln \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x}$

q) $y = \ln \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[5]{(x-2)^3}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}}$

۵ . ۱۳ –

a) $y = |x|$ b) $y = \sqrt{|x|}$ c) $y = \ln |x|$

d) $y = \sqrt{|\ln \cos x|}$ e) $y = \ln |\ln |x||$

۵ . ۱۴ -

a) $y = \sqrt[x]{x}$ b) $y = (x^x)^x$ c) $y = x^{(x^x)}$

d) $y = x^{\sin x}$ e) $y = (\cos x)^{\sin x}$ f) $y = a^x \cdot x^a$

g) $y = x^{e^x}$ h) $y = a^{e^x}$ i) $y = (\text{Arc}\tan x)^x$

j) $y = (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}}$

۶ – تانجنت په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې په منحني $f(x)$ د x–محور سره کومه زاویه (کونج) جوړوي

a) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ b) $y = \sqrt[3]{x+1}$, $x_0 = 0$

c) $y = \left(x^2 - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$, $x_0 = 1$ d) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}}$, $x_0 = 0$

e) $y = x\sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$ f) $y = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

g) $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$, $x_0 = 1$ h) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

i) $y = \sin(2\pi - x)$, $x_0 = \pi$ j) $y = \sqrt{\sin 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

k) $y = \sin\sqrt{2x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ l) $y = (x-1)e^x$, $x_0 = 0$

۷ - په پروت تانجنت د -محور باندې پرته منحني کوم ټکي کې غوڅوي، که زاویه او همداسې وي.

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x \cdot |3-x|$
d) $y = \frac{x^2-3}{2x}$ e) $y = \frac{x^2+x+14}{x+2}$ f) $y = \frac{x^2(x-9)}{2(x-6)^3}$

۸ – د ورکړشوو تخلیلي افادو لومړي درې مشتقونه جوړ کړی! و ازمایې، چې ایا د مشتق قابلیت کې د یو ګونو ورشو ګانوو یا ساحو کې تغیر راځي!

د -م مشتق لپاره یو عمومي فرمول ورکړی، ترهغې چې شته وي.

a) $y = x^n$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = \sqrt[4]{x^3}$
d) $y = \sqrt{1-x^2}$ e) $y = \frac{x}{1-x}$ f) $y = \frac{1+x}{1-x}$
g) $y = \cos x$ h) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ i) $y = \sin(1-2x)$
j) $y = x^2 \sin 2x$ k) $y = \tan x$ l) $y = \tan^2 x$
m) $y = e^x \sin x$ n) $y = e^{mx}$ o) $y = e^{-x} + e^{-2x}$
p) $y = \ln x$ q) $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$ r) $y = \text{Arcsin}\, x$

۹ - د تانجنت مساوات $y = mx + n$ په $y = f(x)$ کېږدی.

۹ . ۱ -

a) $f(x) = x^2 + 1$, $P_1(1, y_1)$ bzw. $P_2(-1, y_2)$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$, $P_1(0, y_1)$ bzw. $P_2(2, y_2)$
c) $y^2 = 1 - x$, $P_0(-3, y_0)$ d) $y^2 = x - 1$, $P_0(5, y_0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۹ . ۲-

a) $f(x) = e^{-x}$, $m=-1$ b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 4$, $m=0$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $m=1$ d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $m=-1$

۱۰ – د لاندې توابعو $y=f(x)$ په څټ تابع (برعکس تابع) $f^{-1}(x)$ مشتق dx/dy په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې وشمېرئ(جوړ کړئ)

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$, $x_0 = -1$ b) $y = x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x}$, $x_0 = 1$

c) $y = \frac{1}{2x^2 - 5x + 9}$, $x_0 = \frac{5}{4}$ d) $y = \frac{x+1}{x+2}$, $x_0 = -3$

e) $y = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 1$ f) $y = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, $x_0 = \frac{a}{2}$

g) $y = (x+1)\sqrt{1-x}$, $x_0 = -1$ h) $y = \sin x$, $x_0 = 0$

i) $y = \sin(2x + 3\pi)$, $x_0 = -2\pi$ j) $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

k) $y = x\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ l) $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$

m) $y = e^x \cos x$, $x_0 = 0$ n) $y = x\,e^{\cos x}$, $x_0 = 2\pi$

o) $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$, $x_0 = 1$

p) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, $x_0 = x \in (-\infty, \infty), a \neq 0$

q) $y = \ln(x+1)$, $x_0 > -1$ r) $y = \ln\sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}$, $|x_0| > \frac{4}{3}$

s) $y = x^{\frac{1}{x}}$, $x_0 > 0$, $x_0 \neq e$

۱۱ – لاندې تحليلي افادې په متماديت او مشتق والي باندې و څېړئ،

a) $y = \begin{cases} -a & \text{für } x \le 0 \\ +a & \text{für } x > 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x \le 2 \\ -2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ c) $y = |x-1|$

d) $y = |\sin x|$ e) $y = -\frac{x^2}{2}$ f) $y = -|x|$

g) $y = \sqrt[3]{x^2}$ h) $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ i) $y = e^{\frac{1}{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

j) $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ k) $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ l) $y = \text{Arccot}\,\frac{1}{x}$

m) $y = \text{Arcsin}\,(\sin x)$ n) $y = \text{Arctan}\,(\tan x)$ o) $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$

p) $y^3 = 3x^2 - x^3$ q) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

۱۲ - لاندې منحني چې د پسي برابرونونو سره ورکړ شوي، د افراطي ټکو او اوړونټکو(نقاط افراطي و انعطاف) له مخې وڅېړی.

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ c) $y = x^3(8 - x)$

d) $y = (x - a)^4 + b$ e) $y = \frac{x}{x^2+1}$ f) $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

g) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ h) $y = \frac{ax^2}{ax+b}$

i) $y = \frac{a^2(a-x) + b^2x}{x(a-x)}$ j) $y = \cos^2 x$ k) $y = \sin x\ \cos x$

l) $y = \sin 2x - 2\sin x$ m) $y = e^x \sin x$ n) $y = x\,e^x$

o) $y = x^n e^{-x}$ p) $y = e^{-x} + e^{2x}$ q) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

r) $y = x \ln x$ s) $y = x \ln^2 x$ t) $y = \frac{1}{2}\ln x - \text{Arctan}\,x$

۱۳ - د دې لاندې برابرونونو سره ورکړ شوې منحني تر بحث لاندې ونیسئ:

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x+4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x\,(x+3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x+2)\,(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1-x)\,(x^2 + 6x + 8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x\,(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x-2)^2\,(x-4)\,(x+3)$

e) $y = \frac{1}{24}x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x+4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x\,(x+3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x+2)\,(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1-x)\,(x^2 + 6x + 8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x\,(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x-2)^2\,(x-4)\,(x+3)$

e) $y = \frac{1}{24}x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

g) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ h) $y = (x+2)^2(x-1)^3$

i) $y = x^2(x^2 - 1)^2$ j) $y = (x-4)^4(x+3)^3$

13.3. a) $y = \frac{1}{1+x^2}$ b) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$ c) $y = \frac{5}{(2x+1)^2}$

d) $y = \frac{2x + x^2 + 25}{1 + x^2 + 2x}$ e) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$ f) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x}$

g) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$ h) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$ i) $y = x - \frac{4}{x-1}$

j) $y = \frac{x^3 + 2}{2x}$ k) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

l) $y = \frac{2x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2 + x - 3}$ m) $y = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$ n) $y = \frac{5(3x^2 - 4) - 13x}{\frac{1}{8}(2x-1)(4x+7)}$

13.4. a) $y = x\sqrt{9x - x^2}$ b) $y = x^2\sqrt{25 - x^2}$

c) $y = x\sqrt{14 + 8x - x^2}$ d) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ e) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 2$ g) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ h) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

i) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ j) $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$

k) $y = \sqrt{(x+1)^2 - x} - \sqrt{(x-1)^2 + x}$

l) $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+1)^2 - x} + \sqrt{(x-1)^2 + x}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.5. a) $y^2 = x^3 + x + 2$ b) $y^2 = x^3 - 3x + 2$ c) $y^2 = x^3 - 2x + 1$

d) $y^2 = x^4(x-1)$ e) $y^2 = x^2[x(1-x)]$ f) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

g) $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$ h) $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ i) $y^2 = \frac{x(1-x)}{(x+1)^2}$

13.6. a) $y = 2\sin^2 x$ b) $y = \sin 2x \cos x$ c) $y = \sin x \cos^2 x$

d) $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$ e) $y = x \sin x$ f) $y = \frac{\sin x}{x}$

g) $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ h) $y = x^3 \cos x$

i) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ j) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

k) $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ l) $y = \cos 2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

13.7. a) $y = e^{-2x}$ b) $y = xe^{-x}$ c) $y = x e^{\sqrt{x}}$

d) $y = (x^2 - 1)e^x$ e) $y = e^{\tan x}$ f) $y = 2e^{-x}\sin 2x$

g) $y = e^{2x}\sin 3x$

13.8. a) $y = \ln 3x$ b) $y = \ln(x^2 - 1)$ c) $y = x^2 \ln x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف کرښيز يا لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښيزو(لايني) ضريبونو $P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ ...\ (x-x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}\ ...\ \frac{N}{x-x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کېږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

بيلګه:

اصلي پولينوم کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پيداکيږي.

د پولينوم ويش(لنډ: پولينوموېش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بيايي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کېدی شي ورکړ شوی پولينوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه يې لاينيز (کرښيز-)ضريبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولينوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضريبونو(ځلوونو) د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته بايد د مساوي توانونو ضريبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 بايد مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A+B+C=4 \qquad \text{I}$$
$$A-3B-6C=-1 \qquad \text{II}$$
$$-2A-10B+5C=39 \qquad \text{III}$$

د فاکټور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B=-72 \qquad \text{V}$$
$$-16B-7C=-41 \qquad \text{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B=-72 \Rightarrow B=3$

د $B=3$ په V کې اېښوونه: $-16.3-7C=-41 \Rightarrow C=-1$

د $B=3$ او $C=-1$ په I کې اېښوونه: $A+3-1=4 \Rightarrow A=2$

په ټوټه کونې فرمول کې اېښوونې سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

ازمايښت:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)+3(x-5)(x+2)-1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)}=\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج يې مساوي لاینیز(کرښیز) ضریبونه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کربنیز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{N}{(x-x_0)^n}+...+\frac{B}{(x-x_0)^n}+\frac{A}{(x-x_0)}$ وي نو ددې کربنیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري: $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کربنیزو فاکتورونو ټوټه کسرونه (ماتونه) په بلده بڼه ورکول کيږي.

بیلګه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کربنیزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پیدا کيږي.

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لاربښودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$\begin{aligned} &A+B=3 && \text{I}\\ &-2A-3B+C=-6 && \text{II}\\ &A+2B-2C=2 && \text{III} \end{aligned}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$\begin{aligned} &A+B=3 && \text{I}\\ &-3A-4B=-10 && \text{II} \end{aligned}$$

دا ضرب د 4 سره او جمعه یې د IV سره : A = 2

د A = 2 اینښوونه په I کې: $2+B=3 \Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 اینښونه په III کې: $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د يوه اصلي پولينوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقی ضريب نه ټوټه کېدونکي ضريب ax^2+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه کېښول شي يا راوړل شئ

بيلګه:

د پولينوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښيزو ضريبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پيدا کيږي.

بولينوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بيايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقيقي حل نه لري، نو د حقيقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولينوم کسر لاندې بڼه لري: $\frac{Ax}{x^2+2x+4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{c}{x+1}$ بنې کسر سره یوځاي مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کوني ته بیایي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

د ضریبونو A,B,C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

I A+C = 5

II A + B + 2C = 8

III B + 4C = 9

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اوونتوني یا متحولې لري:

IV A − 2C = 5

I A + C = 5

مساوات III منفي مساوات II: $-3C=-6\Rightarrow C=2$

د C = 2 په I ائښوولو سره : $A+4.2=9\Rightarrow B=1$

د C = 2 په III اېښوولو سره: $B+4.2=9\Rightarrow B=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا د ټوټه کوني فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

ج) نا اصلي پولینوم کسرونه:

که د یوه پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولینوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا په پولینومویش له لارې په ټولناطق کسر او یوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بیلګه:

کسري پولینوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولینومونو ټوټه کړئ .

د پولینوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولینومکسر مخ ته پروت دی.

پولینوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتي – یا باقي کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کوني کارونه (عملیه) مخ ته بیایو.مخرج په کرښیزو ضریبونو ټوټه کړی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات x² - 2x -8 = 0 له پاره حل $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ لرو.

نو $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$ دی.

د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځاي کوو:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضریبونو د پرتله کوونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$A + B = 4 \qquad \text{I}$$

$$2A - 4B = 4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا کول $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

په II کې ایښوول: $2A - 4\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (بنتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندې بڼه غوره کوي:

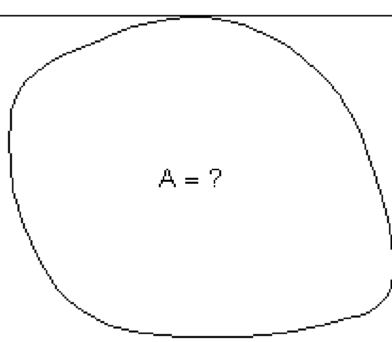
$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيګرالشميرنه

د انتيګرالشميرنې لپاره پيل راوړنې

موږ د ځمككچپوهنې يا هندسې له لارې بلد يو چې د كرښو رابند تنونو يا جسمونوسطحه او ډكى يا حجم څنګه وشميرو.
كه يوه سطحه له ګرږط(-كرښې) رابنده وي، نو څه بايد وشي؟
دا مو انتيګرال شمېرنې ته رابولي.

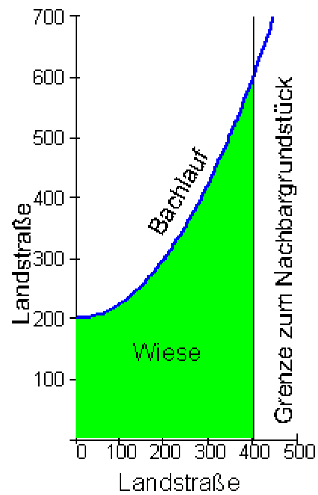
پخوانيو يونانيانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شميرلو اصول معلوم وو. دا دمشتق شميرنه، چې موږ ورسره اوس سر او كار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پيړۍپاي كې) د طبيعي علومو پوهانو لايبنيځ او نيوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.	

پيلبيلګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ښېراه شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی. ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپېژندل شي.

د پلورونکی لپاره سطحه باید نزدې پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمېرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسي باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمېرل شو.



وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره ټوټه(مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو.

$200\cdot 50=10000$

$206\cdot 50=10300$

$225\cdot 50=11250$

$256\cdot 50=12800$

$300\cdot 50=15000$

$256\cdot 50=12800$

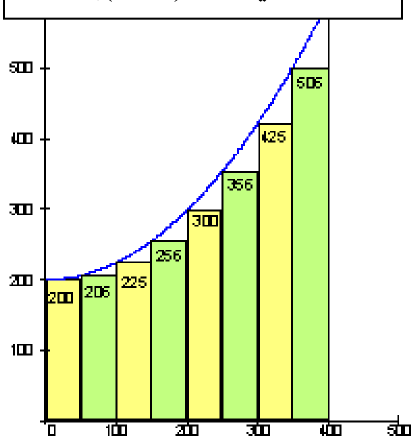
$425\cdot 50=21250$

$506\cdot 50=25300$

$\underline{123700}$

ځمکه په لاندې ډول په اوږدو ټوټو(پټیو) ټوټه کیږي

د اوږدوالي واحد(یوون)په m



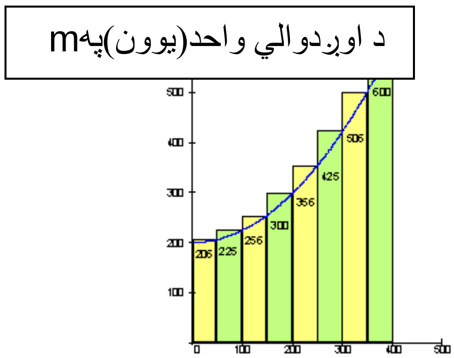
(c) ketabton.com: The Digital Library

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې $123700\ m^2$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټۍ) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمیرو.

$$206\cdot 50 = 10300$$
$$225\cdot 50 = 11250$$
$$256\cdot 50 = 12800$$
$$300\cdot 50 = 15000$$
$$356\cdot 50 = 12800$$
$$425\cdot 50 = 21250$$
$$506\cdot 50 = 25300$$
$$600\cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$



د د پلورونکي له پاره د ټولې سطحې مساحت نږدې $143700\ m^2$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700+143700}{2}=133700unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمیږرو، چې ریښتونی ارزښت یې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بېلګه کې دا ډول شمیرنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمیږرنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیږرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

انتیګرالشمیرنه Integralcalculation

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه:
دا دانتيګرال هندسي مفهوم هم دئ.
په کارتيزي وضعيه قيمت سيستم کې د ګراف په سرچينه کې يوه کربنه رسموو.
غواړو سطحه پيداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې پرته وي(د x تابع وي).

د ريمن (ټاکلی) انتلګرال

يادونه: انتيګرال څه شی دی؟

آنتېګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې يو ځوک يوې پردئ ټولنې ته ورګډيږي يعنې ددې پردئ ټولنې خويونه خپلوي، يعنې دی په دې ټولنه ورزياتيږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کيږي، چې څنګه د يوې کوچنی درجې تابع و يوه جګ درجې فنکشن يا تابع ته ځي.

د انتيګرال هندسي تعريف:

لوريزه سطحه-د انتيګرال تعريف:که يوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتيګرال له لارې کيږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښنخ لري.

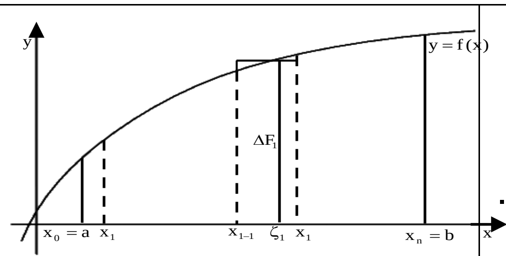
تحليلي تعريف:

تعريف: د f يوه تابع ورکړ شوې، چې په يوه انتروال [a,b] باندې تعريف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتيګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کربښې x=a او x=b تر منځ يوه يوه لوريزه سطحه پوهيږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پـه دې برخـه کې غوارړو، چې د انتګرال کليمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې يا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنيول د مشتق په څېر يا برعکس کارونه يا عمليه ده.

يو تابع $y = f(x)$ لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو $x_0 = a$ او $x_n = b$ ترمنځ هواره (سطحه) وشمېرو داسې چې $(f(x)>0)$ وي. (څېره ۱ . ۱)



ددې دندې د حل لپاره د $[a,b]$ اينتروال په n (نه اړيين) برابرو برخو انتروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 <...< x_{i-1}x_i <...< x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اينتروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه$\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطيل سطحه (و لاړکونجيزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_l).\Delta x_i \,, \qquad (4.2)$$

د ټولو پورته مستطيل ډوله کوچنيو سطحو د جمعې (زياتون) له لارې غوښتونکې، نزدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi) \Delta x_i ;..............................(4,2)$$

دا نرديوالى تر هغې ښه کيږي ځومره چې د اينتروال [a , b] ويش نرى شي يعني $\max \Delta x \to 0$ ،هرځومره چې د زياتيدونکو شمير ($n \to \infty$) شي.

که (۲ . ٤) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اينتروال [a , b] څنګه ويشل شوى

او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اينتروال [a,b] کې اينتيګرالوړ دى. دا د بيلګې په

توګه د ټولو ټوټه، متمادى او محدودو توابعو y = f (x) حالت دى .

پيژند (تعريف) ٤ . ١ : ليميټ (پوله)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F ; (\Delta x \to 0),........(4,3)$$

که په اينتروال [a , b] کې موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلى اينتيګرال بولو، يا د ريمن سطحه

F- Riemann . دلته a د اينتيګرال کېدونکې لاندې(کښته)پوله يا حد او b د ايتيګرال کېدونکې پورته پوله يا حد بلل کيږي او [a,b] د ايتيګرال کېدونکې اينتروال او((f (x Integrand) اينتيګرالېدونکى) او dx د اينتيګرال کېدونکې متحول (Integrationsvariable) بلل کيږي

يادونه ۱ : د ايتيګريشن واريابله يا اووښتونى کيدى شي په خپله خوښه په نخښنه شي(مخنخښه يا علامه يى په خوښه وټاکل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

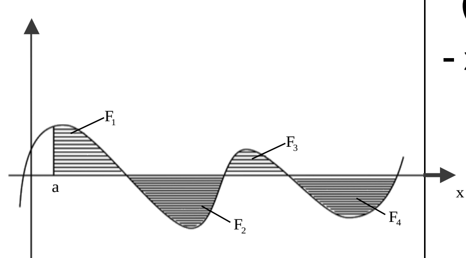
یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) 0 <باوري نه وي .

که f (x) < 0 وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري

.

که د y = f (x) کږه - لکه په)ش ٤ . ۲) کی - داینتیګرآلونې په اینتروال کی د x - محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري :

$$F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$$



د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ .۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ددې لپاره چی دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بایدc له اینتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، یعنې ټکي a,b او c په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چی تابع f (x) اینتیګرالوړ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ دا لاندې تعریف(پېژند) لرو :

پېژند یا تعریف ٤ . ۲ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

د پېژند تعریف ٤ . ۱ له مخی تل باور لري: $\int_a^a f(x)\ dx = 0$

بنسټیز- یا لومړنی تابع

ددې لپاره چی د مشتقنیولو او اینتیګرال نیولو ترمنځ اړیکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعریفوو:

پېژند (تعریف): تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چی F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x) بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

په ساده توګه لیدل کیږي چی د یوې f (x) تابع لپاره نه یوازې یو بنسټیز تابع F (x) موجود دی، د بیلګې په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکي په عمومي ډول

$F (x) = x^2 + C$، چې دا ټول مساوي مشتقونه $f (x) = 2x$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته ښوونو پایله، چی څنګه سړی د یوه متمادي تابع f (x) لومړنیتابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اینتروال I کی متمادي تابع وي، نو د $a \in I$ لپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ د f (x)، یوه لومړنیتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

د f (x) هره بله لومړنی(بنسټیزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x) = F_a(x) + C, \; C \in R$$

ځواب :

ښایو چی Fa (x) دf (x) بنسټیز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښایو چی د Fa (x) لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د Fa (x) مشتق د $x \in I$ او $x \neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

$$F_a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t)dt$$

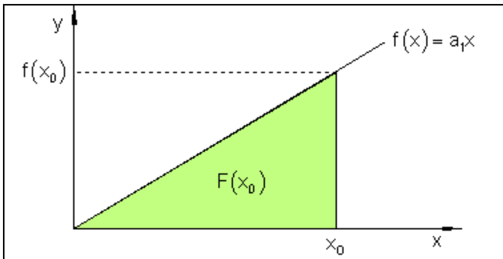
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi), \;\; \xi \in [x, x+h]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(د لیمیټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې یوه ξ شته دی
(د متمادیت له امله $(f(\xi) \to f(x))$
$= f(x)$

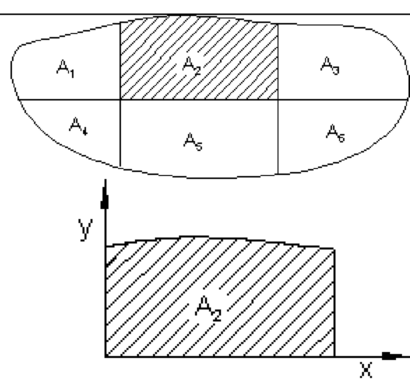
سطحه او لومړنی تابع:

سطحي تابع ته ترمخ راوړنه:

د تابع $f(x) = a_1 x$ ګراف په کارتيزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي. يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته $A = \frac{g \cdot h}{2}$ ساده پيدا کيږي: زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغيرو: $A \to F(x_0);\ g \to x_0;\ h \to f(x_0) = a_1 x_0$	 $F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0) = a_1 x_0$ سره په لاندې ډول دی: $F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1 x_0}{2} = \frac{a_1}{2} x_0^2$

تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعيت) کې تشريح کوي يا ښايي. موږ دا تابع د **سطحي تابع** بولو.

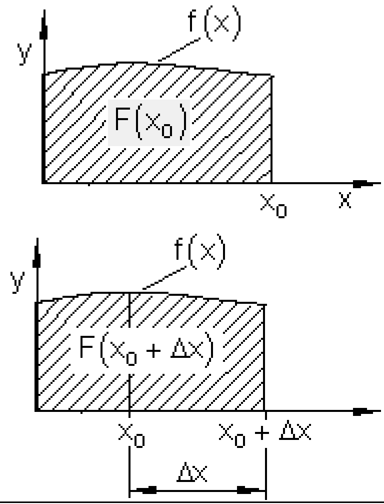
د سطحې پرابلم:

هره له کړوکرښو رابنده سطحه په ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط يوه يوه کړه کرښه رامنځ ته کيږي. نورې ټولې رابندونې سيده کرښيزې دي. هره يوه د سطحې برخه(د بېلګې په توګه دلته **A2**) کېدی شي د وضعيه قيمتونو سيستم کې د يوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.	

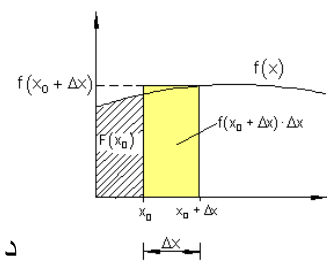
(c) ketabton.com: The Digital Library

که له کږوکرښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چي ايا يو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظيم کړي، لکه په پيلبيلګه کې؟

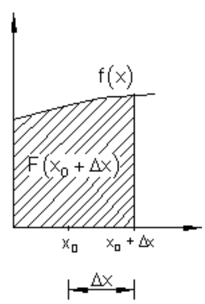
که داسي يو تابع F شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظيم وي، نو بايد د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندې تنظيم کړای شي.



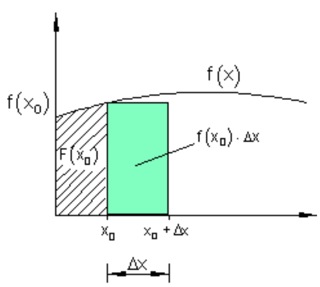
په يوه څلورضلعي(مستطيل) کې د سطحې رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د رښتوني سطحې څخه څه لويه ده



$F(x_0+\Delta x)$ ريښتوني سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له ريښتوني سطحې څه کوچنی ده.

که د سطحې پټې (يا کوچنې مستطيلونه يا ولاړکوډيز)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه يې توپير کميږي.
دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | F(x_0)$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

لیمیټ یې نیسو(پوله یې پیدا کوو):

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$
$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$
$$f(x_0) \le F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $F'(x_0)=f(x_0)$

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کږې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.
موږ لیکو:

$$\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)} \quad \text{یا} \quad F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$$

که موږ بریالي شو، داسې یو تابع F(x) پیداکړو چې مشتق یې د رابندې کږې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.
که موږ یو تابع د لومړني تابع څخه رابیل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سږی کړی شي فورمال ووایي:
د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیداکړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انتېګرالول یې شمېرو.
د یوه ساده توان تابع په بېلګه د احساس له مخې یوه لار پیداکیدی شي، چې دا څنګه ایتېګرالوي.

توانتابع :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربيږي.
انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنځتابع په نوي اګسپوننت وېشل کيږي.
دا همدا اوس ازمايو:

پوتنځتابع:

$$f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنی تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

ناټاکلی انتيګرال

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتيګرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که ديوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنی تابع، يعني F(x) وپېژنو، نو د يوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنيو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه يو حقيقي عدد دی).
موږ د f(x) تابع د F(x) لومړنی تابع ټاکنه يا اينتګرلونه هم بولو او ددې له پاره ليکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x)=f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال ليکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.
موږ لومړنی توابع پلټو

بيلګه:
لومړنی تابع F(x) دې پيدا شي، چې مشتق يې f(x) = 2x دی.
قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ازمایو:

$F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره
هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C}$

د لومړنیو توابعو سټ(ډېرۍ)

بیلګه ښايي، چې د تابع f(x) لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع
شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپېر لري، چې دا د f(x) د لومړنییو
توابعو سټ بولو.

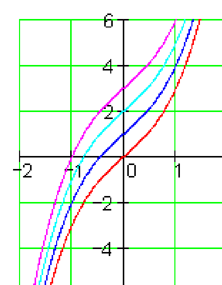
بیلګه
یو لومړنیتابع F(x) دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x)=3x^2+2$ وي.

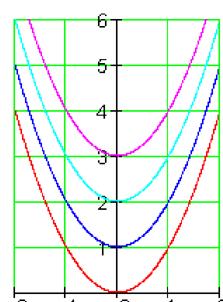
$F(x)=x^3+2x+C$ ، ځکه چې $F'(x)=3x^2+2=f(x)$

د ټولو لومړنیو توابعو ډېرۍ دې د منحنیو ډلې په څېړ انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو
کې یو له بل توپېر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x)=x^3+2x+C$ $F(x)=x^2+C$





(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس دی.

لاندې توابع په اړونده توګه په ،، برعکس مشتقولو،، له لارې. موږ د مخه ځنې انتیګرال قاعدې لوستلي.

لکه چې ومو لیدل دواړه تمرینونه د همغه تیپ او اصولو له لارې اجرا کیږي، خو یواځې لیکنه یې توپیر لري

دویم(لاتین) د سطحې د شمېرلو لپاره د مشتق او انتیګرال اصلي جملې ته ګوته نیسو.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = \left|F(b) - F(a)\right|$$

د یوې ساده بیلګې له لارې د اصلي جملې په مرسته دا سې مخ ته ځو

تمرین (چا چې ډېر کار کوی وي) شوی لیدونکی ګوري یا پیژني، چې د سطحې مساحت په دې بیلګه کې بې له مطلق ارزښت شمیرل کېدای شي.، ځکه چې په دې بیلګه کې سطحه د x- محور پورته لور ته پرته ده .

د دې درس تکمیل – یا *پوره کیدنې لپاره بیلګې.

1 . تول تام کسري تابع د x -محور او د کرښو x = -2 او x = 1 سره یوه سطحه پوره رابندوي یا راتړي. د سطحې مساحت وشمیرئ.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 6$$
$$a = -2 \;,\; b = 1$$

2 . د دوه توابعو *f(x)* او *F(x)* مساوات ورکړ شوي دي (الف) صفرځایونه وشمېرئ او د *f(x)* ګراف وکاږئ. (ب) وښایئ، چې *F(x)* د *f(x)* لومړنی تابع دی. (پ) د *f(x)* اوx - محور څخه پوره رابندې سطحې مساحت وشمیرئ.

:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 3e^{-x} \cdot \left(2x - x^2 + 1\right)$$
$$F(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x}$$

3 . د ٤ – مې درجې تامراشنل تابع د x- محور په درې ټکو کې غوڅوي او د هغې سره یوه سطحه مکمله رابندوي. د سطحې مطلقه مساحت وښایئ.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$$

٤ . د *f(x)* مثلثاتي تابع د -محور د a او b ټکو او همداسر نورو ټکو کې غوڅوي. د *f(x)* او x -محور تر منځ د x=a تر x=b په انتروال کې د سطحې مساحت وشمېرئ.

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$a = -\frac{\pi}{6}\ ,\ \ b = \frac{3}{2}\pi$$

5 . دوه تامراشنل توابع *f(x)* او *g(x)* په ټکو A, B او C کې غوڅوي. (الف) د شي حالت رسم کړئ. (ب) د سطحو مساحت د *f(x)* او *g(x)* ترمنځ له x=a څخه تر x=b انتروال کې وشمېرئ.

$$f(x) = x^3 + \tfrac{5}{4}x^2 - \tfrac{7}{4}x - \tfrac{1}{2}$$
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$
$$A(a;0)\ ,\ \ B(b;0)$$

6 . د وضعیه قېمتسیستم په لومړئ او دویمه څلورمه(ربع) کې تابع *f(x)* او *g(x)* تابع ټیک په دوه ټکو کې غوڅوي. (الف) غوڅټکي یې وښایاست او انځور یې وکاږئ. (ب) د دواړو ګرافونو څخه کوم د سطحې مساحت رابندیري.

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$$
$$g(x) = 3\tfrac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7 . د دوه توابعو $f(x)$ او $F(x)$ مساوات ورکړل شوي دي. (الف) صفرځایونه یې وشمېرئ او د $f(x)$ ګراف وکاږئ. (ب) وښایئ، چې $F(x)$ د $f(x)$ لومړی تابع دی.

(پ) د سطحې مساحت وشمېرئ، چې د $f(x)$ له ګراف د وضعیه سیستم له محورونو او د کرښې x=4 خخه رابنده وي.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$$
$$F(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$$

8 . کسري راشنل تابع د -محور ، کرښې او کرښې سره په دریمه څلورمه(ربع) یوه سطحه رابندوي.

د دې کچ عدد وښایئ.

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+2x}{4x-2}=\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}$$

حلونه.

$$F(x)=\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{4}{3}x^3+2x+c$$
$$G(x)=\tfrac{1}{20}x^5-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{4}{3}x^3+c$$
$$H(x)=\frac{1}{3}a\cdot x^3-\frac{x^2}{6}+x+c$$
$$K(x)=\tfrac{1}{2}x^4-4x^2+c$$
$$L(x)=\frac{x^5}{10}+\frac{2}{9}x^3-4x+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۲ -

$$\int f(x)\,dx = x^2 + \tfrac{1}{4}e^{4x} + c$$

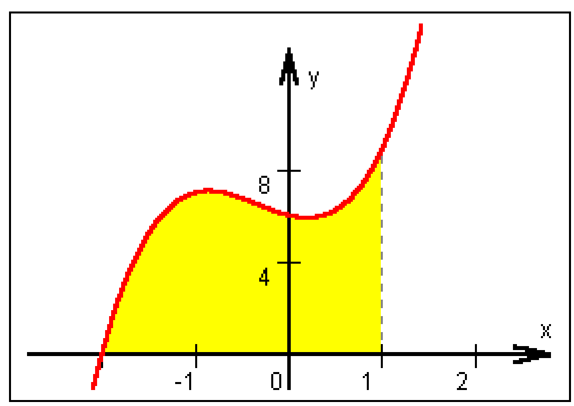
$$\int g(x)\,dx = \tfrac{1}{2}e^{x} - \tfrac{1}{2}e^{0,5x} + c$$

$$\int h(x)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln|x| + c$$

$$\int k(x)\,dx = -\cos x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\int l(x)\,dx = 2\sqrt{x^3} + c$$

۲ . ۱ –



$$A = \int_{-2}^{1}\left(2x^3 + 2x^2 - x + 6\right)\cdot dx$$

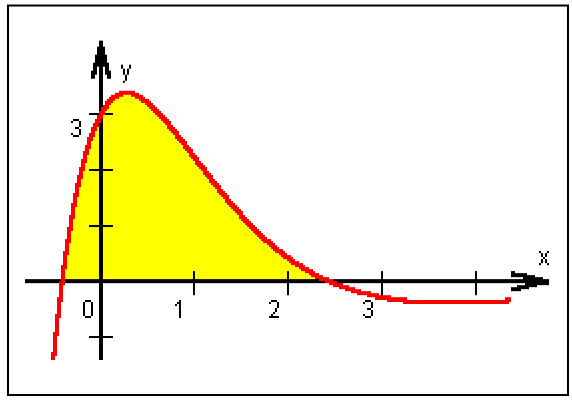
$$= \left[\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|6\tfrac{2}{3} - \left(-11\tfrac{1}{3}\right)\right| = \underline{\underline{18FE}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۲ : ۲ –



$$F'(x) = f(x)$$

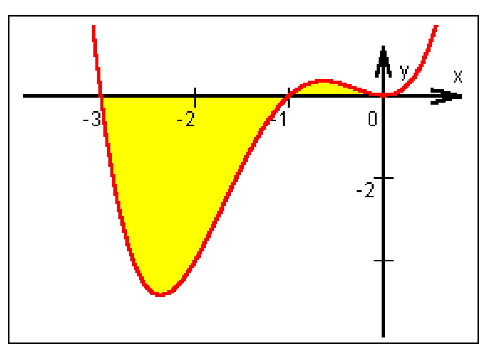
$$F'(x) = 3 \cdot 2x \cdot e^{-x} + 3(x^2 - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

$$= 3e^{-x} \cdot (2x - (x^2 - 1)) = f(x)$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx = [F(x)]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A = \left[3 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x}\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A \approx |1{,}30 - (-3{,}76)| = \underline{\underline{5{,}06\,FE}}$$



۲ : ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

$$A = \int_{-3}^{-1} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx + \int_{-1}^{0} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx$$

$$A = \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-3}^{-1} + \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$A = \left|-0{,}2 - 5{,}4\right| + \left|0 - (-0{,}2)\right| = \underline{\underline{5{,}8\,FE}}$$

۲ . ٤ –

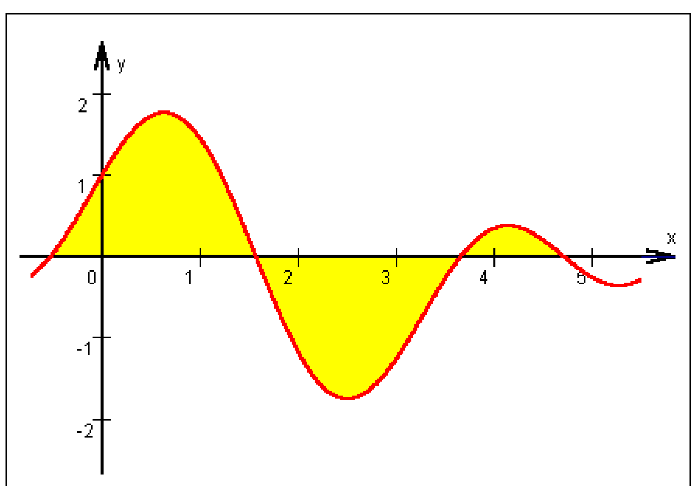
$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$

$$= 2\sin x \cdot \cos x + \cos x$$

$$= \cos x \cdot (2\sin x + 1)$$

$$0 = \cos x \;\rightarrow\; x_1 = \tfrac{1}{2}\pi\,,\; x_2 = \tfrac{3}{2}\pi$$

$$0 = 2\sin x + 1 \;\rightarrow\; x_3 = -\tfrac{1}{6}\pi\,,\; x_4 = \tfrac{7}{6}\pi$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{x_3}^{x_1} f(x)\cdot dx+\int_{x_1}^{x_4} f(x)\cdot dx+\int_{x_4}^{x_2} f(x)\cdot dx$$

$$A=\left[-\tfrac{1}{2}\cos 2x+\sin x\right]_{x_3}^{x_1}+[\ ]_{x_1}^{x_4}+[\ ]_{x_4}^{x_2}$$

$$A=2{,}25FE+2{,}25FE+0{,}25FE=\underline{\underline{4{,}75FE}}$$

۲ . ۵ ـ

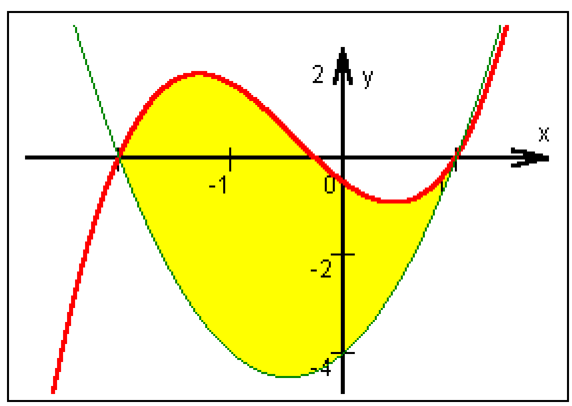
$$g(x)=2x^2+2x-4$$

$$0=x^2+x-2$$

$$x_{1,2}=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{2{,}25}$$

$$\underline{\underline{x_1=a=-2}}$$

$$\underline{\underline{x_2=b=+1}}$$



$$A=\int_{-2}^{+1}\left(f(x)-g(x)\right)\cdot dx$$

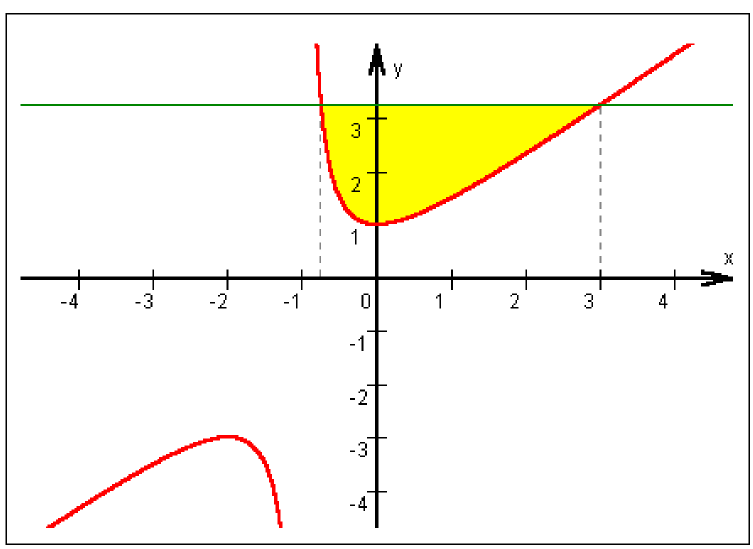
$$=\int_{-2}^{+1}\left(x^3-\tfrac{3}{4}x^2-3\tfrac{3}{4}x+3\tfrac{1}{2}\right)\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x^3 - 1\tfrac{7}{8}x^2 + 3\tfrac{1}{2}x\right]_{-2}^{+1}$$
$$= \left|1\tfrac{5}{8} - \left(-8\tfrac{1}{2}\right)\right| = \underline{\underline{10\tfrac{1}{8}\ FE}}$$

۲ . ٦ –

$$x + \frac{1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$
$$\frac{x^2 + x + 1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$
$$x^2 + x + 1 = 3\tfrac{1}{4}x + 3\tfrac{1}{4}$$
$$x^2 - 2\tfrac{1}{4}x - 2\tfrac{1}{4} = 0$$
$$x_{1,2} = \tfrac{9}{8} \pm \sqrt{\tfrac{81}{64} + \tfrac{144}{64}} = \tfrac{9}{8} \pm \tfrac{15}{8}$$
$$x_1 = a = -\tfrac{3}{4}$$
$$\underline{\underline{x_2 = b = 3}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)\cdot dx$$

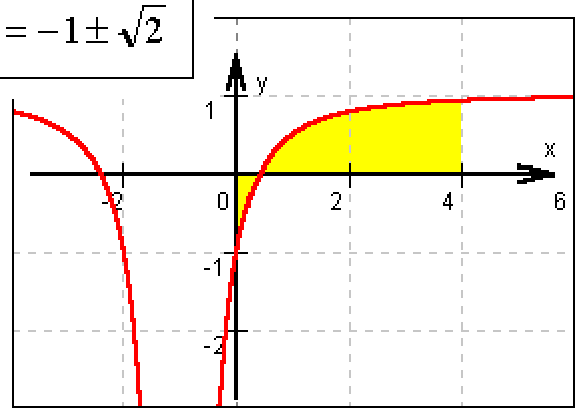
$$=\int_{-\frac{3}{4}}^{3}\left(3\tfrac{1}{4}-x-\frac{1}{x+1}\right)\cdot dx$$

$$=\left[3\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{2}x^2-\ln(x+1)\right]_{-0,75}^{+3}$$

$$\approx\left|3,86-(-1,33)\right|=\underline{\underline{5,19FE}}$$

۲ . ۷ –

$$0=x^2+2x-1$$
$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$$



$$F'(x)=\frac{2x\cdot(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

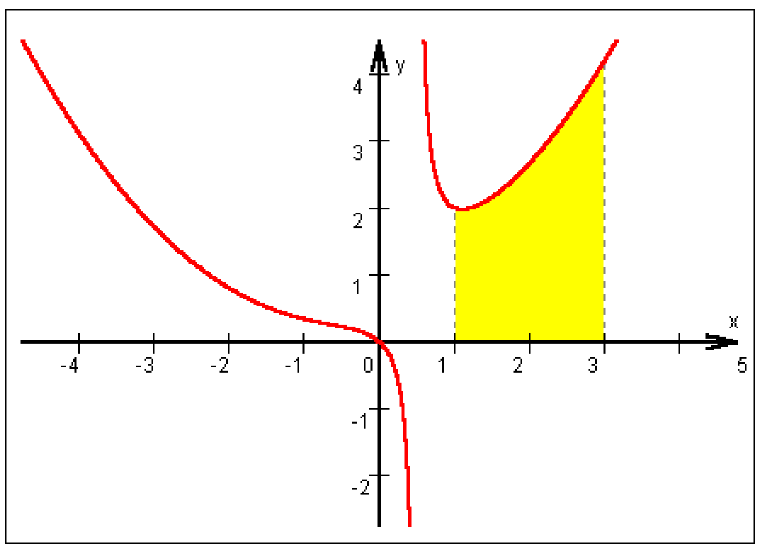
$$A=\int_{0}^{-1+\sqrt{2}} f(x)\cdot dx+\int_{-1+\sqrt{2}}^{4} f(x)\cdot dx$$

$$=\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_0^{-1+\sqrt{2}}+\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_{-1+\sqrt{2}}^{4}$$

$$=0{,}17\,FE+2{,}57\,FE=\underline{\underline{2{,}74\,FE}}$$

په پورته کې FE د سطحې واحد(یوون) په معنادی

۲ . ۸ ـ



$$A=\int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}\right)\cdot dx$$

$$=\int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}\right)\cdot dx+\int_{1}^{3}\frac{11}{32x-16}\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1=\left[\tfrac{1}{12}x^3+\tfrac{3}{16}x^2+\tfrac{11}{16}x\right]_1^3=5\,\tfrac{1}{24}\,FE$$

$$z=32x-16$$

$$\frac{dz}{dx}=32\ \Rightarrow\ dx=\tfrac{1}{32}\,dz$$

$$A_2=\int_{16}^{80}\frac{11}{z}\cdot\tfrac{1}{32}\,dz=\tfrac{11}{32}\cdot\left[\ln z\right]_{16}^{80}\approx 0{,}55\,FE$$

$$\underline{\underline{A\approx 5{,}59\,FE}}$$

په پورته کي FE د سطحي واحد(یوون) په معنادی

بیلګه:

مشتقوړ مګر نامتمادي (پرېکیدونکی) مشتقوړ تابع:

لرو:

د $x\neq 0$ لپاره د $x=0$ لپاره	$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\\ 0\end{cases}$

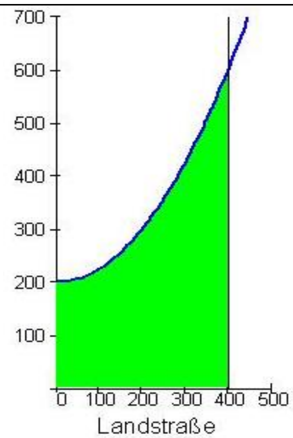
نو $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\to 0$ د $x\to 0$ لپاره ، له امله مشتق$f'(0)=0$ دی. او د $\forall x\neq 0$ لرو:

$f'(x)=2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، جبرې چې $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ ناشته دی. تابع f له دې امله مشتقوړ دی مګر نه ناپرېکېدونکی(متمادي) مشتقوړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه

ټاکلی انتیګرال همغه د ریمن انتیګرال دی، چې یوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شمیري(پسې غزېدلی دی، خو تکرار د زده کړې مور ده).



ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) b یا د a او b حدونو ترمنځ یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

G دې په بند انتروال $a \leq x \leq b$ کې د g(x) لومړنی انتیګرال وي، د $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ سره، نو باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x) = \int_a^a f(t)dt = 0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف: f په انتروال a ≤ x ≤ b کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکې رامح ته کې.

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx = \int_2^4 x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\, dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالونې ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه:

: د ټاکلي انتیګرال $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ ارزښت و ټاکی.

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

د ناټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

مورږ ولیدل، چې څنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو ستې $f(x)=x^3+2x+C$

پېژند : د ټولو لومړنیو توابعو ستې و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

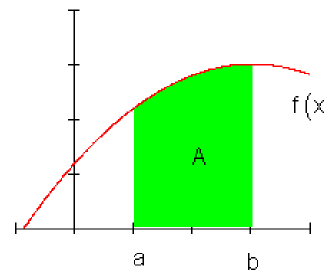
د مشتق- او انتیګرالشمېرنې ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

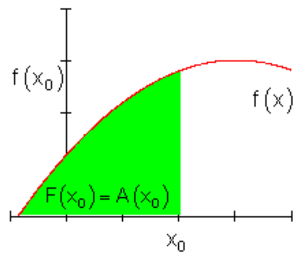
جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d\left[f(x)\right]+C}{dx}=\left[F(x)+C\right]'=f(x)$$

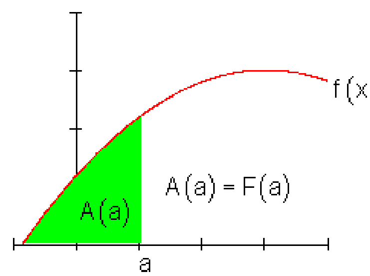
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زمورږ په دې پرابلم مورږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

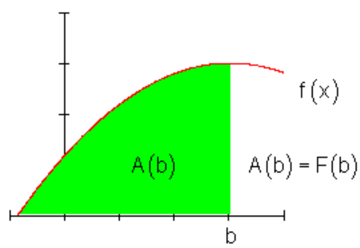
(c) ketabton.com: The Digital Library



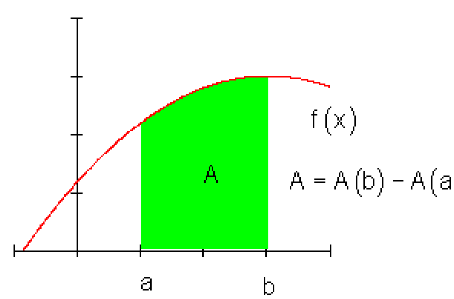


د يوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د يوې سطحې، چې د يوې په پام کې نيولې $f(x)$ تابع گراف لاندې ده تر x_0 ځاى پورې او يوې $F'(x)$ تابع، چې د$F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړيکې شته دی، يعني $F'(x)=f(x)$





د انتروال $[a,b]$ حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځاي $(A(b))$ b او سطحې په $(A(a))$ a ځاي کې .، يعني
$A= A(b) – A(a)$ په همدې توګه $F= F(b) – F(a)$ لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

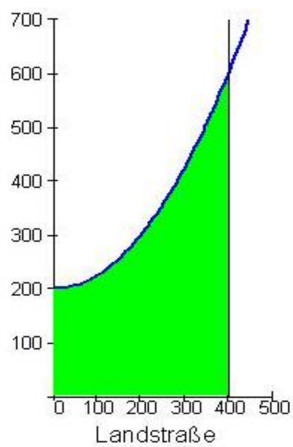
په انتروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتيګرال ټاکلی انتيګرال هم بلل کيږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره ښوولې:



$$A = \int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2 + 200\right)dx = \frac{1}{1200}x^3 + 200\cdot x\,|_0^{400}$$

$$= \frac{1}{1200}\cdot 400^3 + 200\cdot 400\left[\frac{1}{1200}0^3 + 200\cdot 0\right]$$

$$= \frac{1}{1200}\cdot 400^3 + 200\cdot 400 = 133333.\bar{3}$$

د انتيګرالوني قاعدی

د ناټاکلي اينتيګرال انتيګرالوني قاعدې: په لاندې اينتيګريشن قاعدوکې د اينتيګريشن ثابته باندې صرف نظر کيږيدلته مساوات تر يوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ يواځې يوه ثابته کيدی شي زياته يا کمه وي. دا قاعده

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی په ټاکلي انتیګرال کي ښوولي جملی سره سم ټاکلي ایتیګرال ته نقل شي یعني په ټاکلي ایتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چی د تېرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وښول شي.

جمله :

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع $f(x)$ په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a\in R$$

جمله: د جمعي (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې ایتیګرالونه کیدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنسټیزو اینتیګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$
$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو: $\int e^x dx = e^x + C \quad (a\in IR^+, a\neq 1)$

د ټولیز اکسپوننشل تابع a^x لپاره لرو: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

بیلګه :

دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3} dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8}2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8\cdot\ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c$

د لوګاریتمي توابعو انتیګرالونه

بنسټ:

د طبیعي لوګاریتم تابع $f(x)=\ln x (x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln x dx = x\cdot\ln x - x + c$ دی .

د ټولیز لوګاریتم تابع $f(x)=\log_a x, a\in IR^+, a\neq 1)$

لپاره $\int \log_a x dx = \frac{x\cdot\ln x - x}{\ln a} + c$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

ناټاکلی انتیګرال $\int \ln 3x dx$ غواړو پیدا کړو:

بنه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx \div \int \ln x dx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$
$$\int \ln 3x dx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

بنسټیز اینتیګرالونه په یوه جدول کې

د اینتیګرالولو او مشتق نیول د اړیکو په بنسټ کیدی شي چې د بنسټیزو اینتیګرالونو یو جدول ترتیب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټیزو توابعوبرعکس څرګندیږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x)dx$	نیونه یا فرضیه
1	x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

6	$\sin x$	$-\cos x + C$	
7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$
9	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in Z$

بیلګه :

د جدول او تېرو جملو څخه په ګټه لاندې ایتیګرالونه په لاندې ساده ډول په بنستیز توابعو بدلیدلی شي .

a) $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C$,...............................1,

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$, ...3,

c) $\int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}\, dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0)$, ...3,

d) $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x} dx = \int \cos x \, dx = \sin x + C$, ...(4,21) 6,

e) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi)$,   (4,11) 9,

f) $\int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi)$ (4,12) 8,

g) $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3} dx = \int \frac{1 - x^2}{x(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1,\ x \neq 0)$, $Nr.2$,

h) $\int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}$, ...5

<u>Substitutionlaw</u> بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه پورې مو فقط انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنيو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنيو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتین :د $f\,(g(x))$ یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه اینوول ، لنډ: بدلون) د نیونو یا فرضیو له مخې، چې u = g (x)نه برېکېدونکی یا متمادي او مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تېرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیګرالېدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور زنځیري تابع [f [g (x) وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق (g ' (x وي. سړی د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي یا ځاي په ځاي کوي u = g (x) :

مشتق $\frac{du}{dx} = G'(x)$ جوړوي په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي انتیګرالېدو وروسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې انتیګرال وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون یا په ځای کونه: $2x - 1 = u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلګه b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, مشتق $2 = du / dx$ همداسی $dx = (1/2)\, du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2}\int \cos u\, du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی ځنځیري تابع د لاینې دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لاینې تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تېرې جملی سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کېږ لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه: لرو $I = \int \sqrt{-3x+5}\; dx$

بدلون: $-3x + 5 = u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b)\quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \quad \Rightarrow \quad -2 = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c) \quad I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C.$$

د بنسټیزو اینتیګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولې x یواځي په جګ یا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اینتیګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لایني ترم (Term)پروت دی، کیدی شي چی د لایني بدلولو له لارې په بنسټیز اینتیګرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واړول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیاموجود وي، چی د اینتیګراند فورم ته راشو.

بیلګه 5.2:

$$a) \quad I = \int \frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2 = \left(\sqrt{2}x\right)^2, \quad d \cdot h \cdot \ I = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x = u, \qquad \sqrt{2} = \frac{du}{dx} \qquad dx = \frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}\,u + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}(\sqrt{2}x) + C.$$

$$b) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2 = 9(1-4x^2) = 9(1-(2x)^2), \ d \cdot h \cdot$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x = u, \qquad 2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = \frac{1}{2}du$$

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6}\text{Arcsin}\,u + C = \frac{1}{6}\text{Arcsin}(2x) + C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنستیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننني تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلګه 6.21: الف:

$$I = \int 4x\sqrt{x^2-1}\; dx$$

بدلون:د $x^2 - 1 = u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x\cdot\cos x\; dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\; dx$

$$I = \int u^3du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\; I = \int\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x\; dx$$

$$\ln x = u, \qquad :\frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\; I = \int \tan x\, dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}, d\cdot h.\quad I=\int\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x\,dx,$$

$$\cos x=u,\qquad -\sin x=\frac{du}{dx}\qquad \sin x\,dx=-du,$$

$$I=-\int\frac{1}{u}du=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

$$e)\ I=\int_0^1\frac{2x^2}{2-x^3}dx.$$

$$2-x^3=u,\qquad -3x^2=\frac{du}{dx}\qquad x^2dx=-\frac{1}{3}du,$$

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2du}{u}=-\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}\ln|2-x^3|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 2)=\frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) یعني د ښی وکیڼ(لور هم استعمال شي .
اینتیګرال f (x) dx کیدی شي چی په بل واړول شي چی x په یو مناسب بلواك (
g (t بدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. دا:
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهیدی شي چی سړی د بدلون وروسته یو ساده
او ممکن یو بنسټیز اینتیګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی
دی چی په یوه بلواك f (x) کی موجود » پیچلی « ترم h (x)د h (x = t (په بدلون
له منځ څخه وړي او بیا) که ممکن وي (د x په لوریی حلوي

$$x=g(t)=h^{-1}(t)$$

بیلګه 7.21: الف:

$$:a)\ I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\sqrt{x}-1=t,\qquad x;x=(t+1)^2,\qquad dx=2(t+1)dt:$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اینتګرال د دوه ایتکرالو جمعې ته بیایي، دلته

$x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کیږي لکه لاندې بلګه:

بیلګه:

عواړو د $f(x)=e^x$ مشتق بیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعني لرو:

$$f(x)=e^x\ \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$$

ګورو، چې $F'(x)=e^x=f(x)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو: $f(x)=e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx \neq e^{2x}+C$$

وي $F(x)=e^{2x}+C$ **که، دی** $F'(x)=2e^{2x}\neq f(x)$

له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

بیلګه:

د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسی

$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$
بدلون : $u(x)=2x=u$
جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$
$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$
د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$
نو لرو: $F(x)=\int (x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$
ازمايينت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه :
وښایی چې باور
لري. $f(x)=(x+1)^{2} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (x+1)^{2}dx$.
بدلون $u(x)=x+1=u$
جوړ کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^2\frac{du}{1}=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$$

بیرته- یا په ځټ بدلون: $\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

نو: $\int (x)dx=\int (x+1)^2dx=\frac{(x+1)^2}{3}+C$

بیلګه :

و بنایي چې باور لري:

$$f(x)=(3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (3x+6)^3dx$$

بدلون: $u(x)=3x+6=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=3 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$

$$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3du=\frac{u^4}{12}+C$$

بیرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$

نو لرو: $\int (x)dx=\int (3x+6)^3dx=\frac{1}{12}(3x+6)^4+C$

بیلګه :

$$f(x)=x\cdot\ln\left(x^2\right)\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx=?$$

بدلون : $u(x)=x^2=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u\cdot\ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون:

$$\frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

نو لرو:

$$\int (x)\,dx = \int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه :

وښایاست:

$$f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

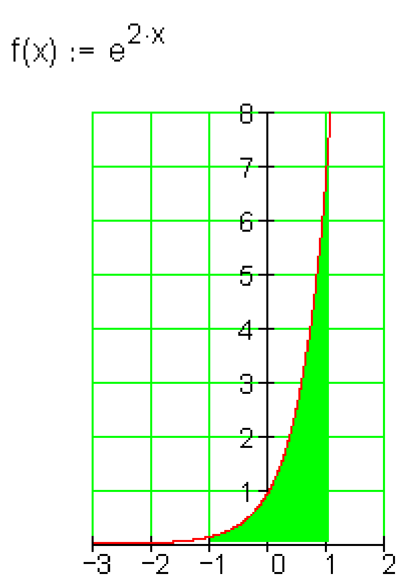
۳ – د پولو بدلون

- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2)dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

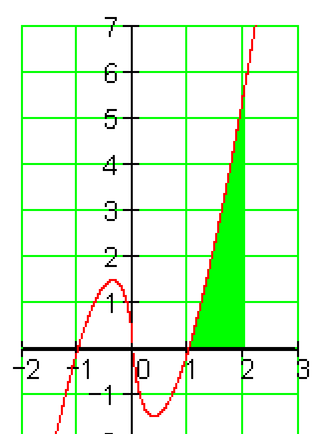
- لاندې پوله $u(1) = 1$
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتيګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}du = \int_1^4 \ln(u)du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

د $x < 2$ له پاره	$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$
د$x \geq 2$ له پاره	

$$A = \underbrace{\int_1^2 (e^x - 2)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 (e^x - 2)\,dx = \left[e^x - 2x\right]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = (e^2 - 2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

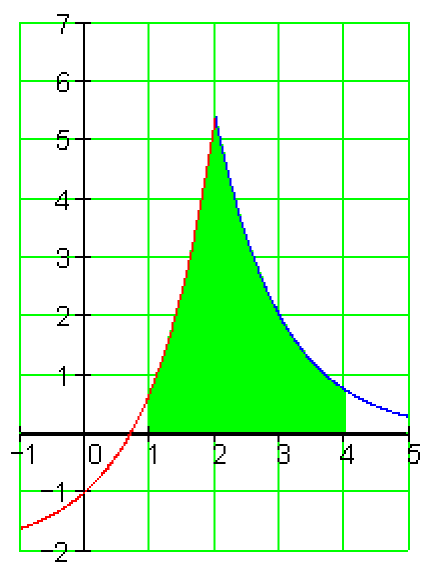
$$u(x) = -(x-2) = -x + 2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du\,;\ u(2) = 0\,;\ u(4) = -2$$

$$I_2 = -(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du = (e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$= (e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0} = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7,331}}$$



ټوټه انتيګرالونه Partialy Integration

ټوټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشمېرنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شمېرلو لپاره امکان دی. دا کېدی شي د مشتقشمېرني د برعکسکونی په خير وکتل شي.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه انتيګرالوني له پاره لاندې قانون کارول کيږي، چې د متمادي (نه پرېکېدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

دا قانون ټيک هلته ګټور دی، که د f مشتقنيولو سره يو ساده تابع منځ ته راځي.
پيل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنيوني) څخه لرو:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u'\cdot v = \int (u\cdot v)' - \int u\cdot v'$$

$$\int u'\cdot v = u\cdot v - \int u\cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

يا همدغسې، لکه په زياتو رياضي کتابونو کې چې پيداکيږي.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتيګرال محدود کړو، چې دا نا اړينو حدونو څخه چې ليد مو رابندوي، ازاد يو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندې انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالیدونکي تابع $g'(x)$ او همداسې یو ساده مستقکېدونکي تابع $f(x)$ لټوو.
نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو)مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{او} \quad g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې ځخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:
اوس دې u اوv په خوښه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې 'u او 'v دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتیګرالونې لار(طریقه)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه : کله کله کېدې شي ګټور وي، چې د مساوات ښې لور ته ټوټه انتیګرال د ځو واره انتیګرالونې وروسته بېرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کېږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x) + C$$

بیلګه ۲ :

د ځنو انتیګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیګرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کېدی شي دا بل ترم ،،له منځه یوړل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کېږدو او د f(x) له پاره، د انتیګرال لاندی ترم ، نو تری لاس ته راځي:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x &= [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]\\ &= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]\\ &= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C\end{aligned}$$

بېلگه ۳ :

که تر انتيگرال لاندې فقط يو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت څخه پاې ته نه رسيږي(نه پايول کيږي)(نه ختميږي) کېدی شي کله کله د ورزياتوني له لارې(ناڅرگند شته) ضريب "1" توته انتيگرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

که $f(x)=\ln(x)$ او $g'(x)=1$ کيږدو، نو لاس ته ترې راورې شو

$$\begin{aligned}\int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x &= x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= x\cdot\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x\\ &= x\cdot\ln(x) - x + C\end{aligned}$$

جمله : مونږ د دې لاندې انتيگرال نيسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توگه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv - \int v\,du\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

C د انتیګرالونی یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالونې د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

$\int x^2 e^x\,dx$ او $\int x^3 \sin(x)\,dx$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول

نیول ترواسه ورسره بلده لار شونې دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرخایونو **x1 = 2-** او **x2 = -4** سره د کرښیزو توابعو په ضربیونو تجزیه کیږي:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)\,(x-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې پیل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزيږي او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x - 4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضريبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه يعني کيڼ لور ته (A+B) افاده بايد پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځ**خه لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:**

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون يې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

ليکلى شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx = \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړني تابع جوړه کړئ: $F(x)=\ln x \quad \rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{x}$. دا چې طبيعي لوګايتم فقط له مثبت اعدادو شمېرل کيږي، نو يواځې ازښتونه نيسو.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right]dx = -1\ln|x-2| + 8\ln|x-4| + c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په پول راشنل تابع او اصلي مات راشنلمبع تېرته شي.
دا د ټوټه کسرونو ټوټه کووني له لارې کيري يا صورت نيسي.
بیلګه :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}\right]dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځایونو $x1 = -2$ او $x2 = +3$ کې په کښیزو فاکتورونو تحزیه کیري :

$$x^2+x-6 = (x-2)\,(x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بیا یې ضربوو :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}\right]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزیري او بیا سره ضربیري:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضریبونو پرتلي کوني له امله، چې د x ترمخه یعني کیڼ لور ته له (A+B) افادې څخه باید اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او یا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګوری) :

$$-5x+9 = (A+B)x\ (+3A-2B)$$

لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

$$-5 = A + B$$

$$9 = 3A-2B$$

د A او B پسي یې حل کړی:

$9 = 3(-5-B)-2B$

$9 = -15 -3B -2B \quad |+15$

$24 = -5B \quad |:(-5)$

<u>B=-4.8</u>

<u>A= (-5+4.8)= -0.2</u>

نو لیکلی شو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=\int[\frac{-0.2}{(x-2)}]dx+\int[\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x)=\ln x\to f(x)=\frac{1}{2}$$

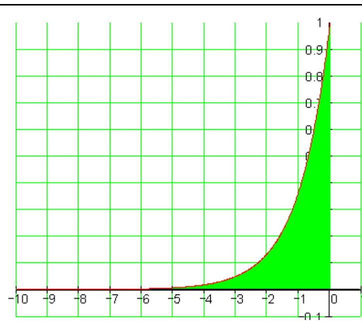
دا چې طبيعي لوګاريتم فقط له طبيعي اعدادو شمېرل کېدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نيسو.

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=-0.2\ln|x-2|-4.8\ln|x+3|+C$$

ناپاي(مبهوم) انتيګرال

تعريف : که په يوه ټاکلي انتيګرال کې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيګرال څخه غږيږو. په يوه مناسب ډول ناپا انتيګرال د عادي انتګيګرال د حد په څېړ تعرفيږي.
په دې توګه په زړه پورې پوهېدنې لاس ته راځي د بېلګې په توګه، چې څنګه د منفي تواند پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسېدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=2 \quad \text{او} \quad \int_1^\infty x^{-2}dx=1$$

هم او د دې معکوس انتيګارلونه $\int_1^\infty x^{-1}dx$ او $\int_0^1 x^{-1}dx$ ناپاي ته ځي يا له تولو حدونو اوړي يعنې د ناپای په لور ځي..	

د $f(x)=e^x$ ، ګراف او x-محور ترمنځ دې په انتروال $(-\infty;0]$ کې توله سطحه و شميرل شي، يعنې

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$$

تراوسه د يوه ټاکلي انتيګرال د پورته همداسې کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتيګرالونې ورشو ياا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې يا اوس د انتيګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتيګرال يو نامحدود انتيګرال بولو، د انتيګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتيګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په يوې بڼې منځ ته راځي:

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

د دې انتيګرال شميرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د يوه پای انتروال $[a;b]$ له پاره انتيګرال $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ شمېرو، بيا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ يا $a \to \infty$ همداسې $b \to -\infty$ يا $b \to \infty$ له پاره پولې جوړوو.
فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شمېرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^{x}$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^{x}\right]_{a}^{0}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^{0}-e^{a}\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{0}}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{a}}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بيلګه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\, u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^{u}\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{u}\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^{0}-e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^{0} - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1-0 = \underline{\underline{1}}$$

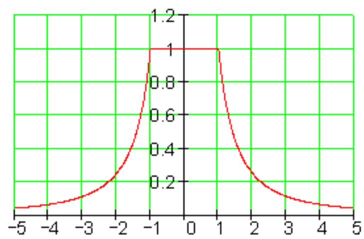
بيلګه:

د يوه يوځاي ايښول شوې يا يو ځاي شوې تابع بېلګه لرو:

د $x<-1$ لپاراه د $-1\le x\ 1$ لپاره د $x>1$ لپاره	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

.
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انتیګرال په برخو وېشنه يا ټوټه کونه:
لاندې د انتیګرالونو تمعه دې و شمیرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

لومړنی اند يا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلايلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتیګرال باید فقط یوځل وشمېرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1]-[-1] = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1+2+1 = \underline{\underline{4}}$$

تولګه
د انتیګرال هندسي تعریف

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx مخور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحلیلي تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\max \Delta x \to 0),........(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) تاکلی اینتیګرال بولو، یا

F- Riemann) د ریمن سطحه). دلته a د اینتیګراله ونې لاندې(کښته)پوله او د b اینتیګرالونې پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرالونې اینتروال او(f (Integrand) x)اینتیګرالېدونکی) او xد اینتیګرالونې) Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پیژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پیژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف:

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیگرال دی : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په یوه ایتروال کی نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینسوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

د ضربونو انتیګرالونه
که د دوه توابعو د ضرب انتیګرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمېړرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x \cdot \ln(x^2))\,dx = ?$$

بدلون <u>Substitution</u>

د ناټاکلي انتیګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

تراوسه پورې مو فقط د انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې راکوي. د لومړنی انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې ګوته ورته نیول کیږي.

جمله ۲ . ۶ : د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی $u = g(x)$ متمادي اوو مشتقوړدی او $y = f(u)$ متمادي، نو باور لري:)(کتاب کتل که لاندی بې د انتیګرال له نخښې)

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل : د (۲۱ . ۱۳) د ښي اړخ مشتق د ځنځیرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري (۱۳ . ۲۱.) قاعده د ضرب اینتګرالېدو(اینتیګریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیري بلواك $f[g(x)]$ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي $u = g(x)$: جوړوي $du/dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

د بریالي ایتګرالېدو(اینتیګریشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a :

لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : , $2x = u-1$ کشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

وموليدل چی څنځیري تابع د لاینې دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لاینې تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د جملی ۲۱ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کینې لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه 4.2: لرو $I = \sqrt{-3x+5}\ dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

b) $I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$

$-2x-3=u,\qquad -2=\frac{du}{dx}\qquad dx=-\frac{1}{2}du,$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

c) $I=\int\frac{2dx}{x+2}.$

$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

بیلګه:

$f(x)=e^{x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$

ځکه چې $F'(x)=e^{x}=f(x)$

مګر: $f(x)=e^{2x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{2x}\,dx\neq e^{2x}+C$

ځکه چې $F'(x)=2e^{2x}\neq \bar{f}(x)$ **که** $\bar{F}(x)=e^{2x}+C$ ؛ **وی.**

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلګه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = ?$$

بدلون : $u(x) = 2x = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$\int f(x)\,dx = \int e^{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

نو: $F(x) = \int (x)\,dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

ازمايښت : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2 = e^{2x} = f(x)$

بیلګه :

وښايئ چې $f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$ باور لري .

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$$

بدلون: $u(x) = x + 1 = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته ـ یا په ښځ بدلون:

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

نو:

$$\int (x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

بیلګه :

$$f(x) = (3x+6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = ?$$

بدلون:

$$u(x) = 3x+6 = u$$

جوړوو:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int f(x)\,dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3\,du = \frac{u^4}{12} + C$$

بیرته بدلون:

$$\frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$$

نو لرو:

$$\int (x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x\cdot\ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx = \int x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int\ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u\cdot\ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون: $\frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$

نو لرو: $\int(x)\,dx = \int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

د ټاکلو انتيګرالونو حل د بدلون له لارې

ټاکلي انتيګرالونه هم د بدلون له لارې حل کيږي.

بيلګه :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

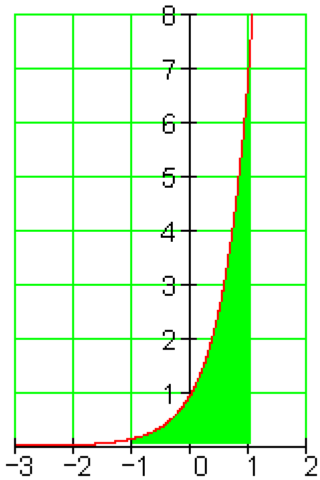
- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\,du = \frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3,627}}$$

$f(x) := e^{2 \cdot x}$



بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(x^{2}\right) \Rightarrow F(x) = \int_{1}^{2} 2x \cdot \ln\left(x^{2}\right) dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^{2}$

۲ – د ځای په په ځای کونه

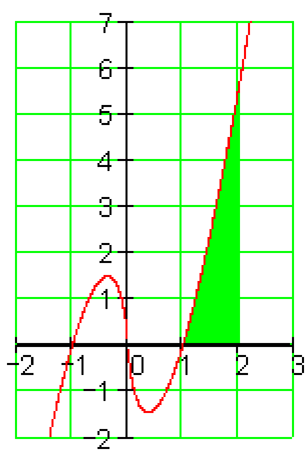
$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln\left(x^2\right) dx$$

$f(x) := 2x \cdot \ln\left(x^2\right)$



د انتيګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ – د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

- پورته پوله $u(2) = 4$

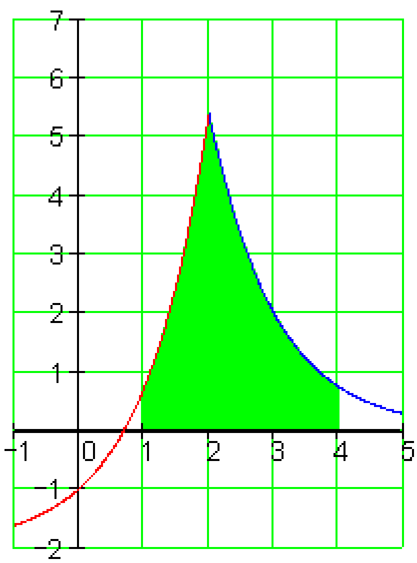
۴ – په انتيګرال کې ځای په ځايکړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u)\, du = \left[u \cdot \ln(u) - u\right]_1^4$$

$$= \left[4 \cdot \ln(4) - 4\right] - \left[1 \cdot \ln(1) - 1\right] \approx \underline{\underline{2,545}}$$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x)=\begin{cases} e^x-2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x<2$ له پاره د$x\geq 2$ له پاره

$$A=\underbrace{\int_1^2 (e^x-2)\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2 (e^x-2)\,dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=(e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du;\ u(2)=0;\ u(4)=-2$$

$$I_2=-(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du=(e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$=(e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0}=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7,331}}$$

جمله ۲ . ۶:

د ،،بدلون،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینښول ، لنډ: بدلون)قاعده: د نیونو لاندې چې $u = g(x)$ متمادي (نه پریکیدونکی) او د مشتق قابلیت لري او $y = f(u)$ متمادي دی، نو باور لري:

$$\int f\,[g(x)]\,g'(x)dx=\int f(u)du$$

حل : د (۲ . ۱۳) د بنې اړخ مشتق د ځنځیرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخې داسی دی

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کینې اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري (۲۱. ۱۳) قاعده د ضرب اینتګرالېدو(اینتیګریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیري بلواك $f[g(x)]$ وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي $u = g(x)$: جوړوي $du / dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

د بریالي ایتګرالېدو(اینتیګرېشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a : لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1)+C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, کشتق $2 = du / dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

وموليدل چی ځنځیري تابع د لاینې دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لاینې تابع مشتق ثابت دی او ثابت فاکتور د جملی ۲ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کینې لور ده) لیکل کیږي.

د بنستیزو اینتیګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولې x یواځي په جګ یا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اینتیګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لاینې ترم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(Term) پروت دی، کیدی شي چی د لایني بدلولو له لارې په بنستیز اینتیګرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واړول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیاموجود وي، چی د اینتیګراند فورم ته راشو.

بیلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\,u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x=u,\qquad 2=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{2}du$$

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{6}\mathrm{Arcsin}\,u+C=\frac{1}{6}\mathrm{Arcsin}(2x)+C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سرې بنستیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سرې بیا دنننی تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه 6.21: الف: $I = 4x\sqrt{x^2-1}\ dx$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot \tfrac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x\cdot \cos x\ dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int \frac{1}{x}\cdot \ln^2 x\ dx$$

$$\ln x = u, \qquad : \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int \tan x\, dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d\cdot h.\quad I = \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\ dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x\ dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e)\ I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3}dx.$$

$$2 - x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3}du,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2du}{u}=-\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}\ln\left|2-x^3\right|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 2)=\frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) يعني د ښى وکيڼ(لور هم استعمال شي .
اينتيګرال f (x) dx کيدی شي چی په بل واړول شي چی x په يو مناسب بلواك (
g (t)بدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. :دا
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهيدی شي چی سړی د بدلون وروسته يو ساده
او ممکن يو بنستيز اينتيګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی
دی چی په يوه بلواك f (x) کی موجود » پيچلی « ترم h (x)د h (x) t = h (x) په بدلون
له منځ څخه وړي او بيا) که ممکن وي (د x په لوريی حلوي

$$x=g(t)=h^{-1}(t)$$

بيلګه 7.21: الف: $a)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$:

$$\sqrt{x}-1=t,\qquad x;x=(t+1)^2,\qquad dx=2(t+1)dt:$$

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اينتګرال د دوه ايتکرالو جمعي ته بيايي، دلته

$x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I = \int \frac{dx}{\tan x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx,$$

$$\tan x = t, \qquad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt,$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot \sqrt{\tan x} + C.$$

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو: $\int x \cos(x)\, dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\, dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې ترګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv \\ &= uv - \int v\,du \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$:

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

انتیګرالوونی Integrand د x توان یا e^x سره

د ټوټه انتیګرالوني د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x^2 e^x\, dx \text{ او } \int x^3 \sin(x)\, dx$$

کېده شي په مدې لا حل شي:

یوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\, dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولي.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\, dx$

$dv = e^x\, dx$ داسې جې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\, dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\, dx$

نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره يوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو د پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتيګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتيګرال که کيڼ لور ته يوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتيګرالونې يوه په خوښه ثابته ده

د اينتيګرال شميرنې استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په ځلورم ځپرکي کې وويل شو چې ټاکلی اينتيګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د

سطحي مساحتA ښايي ، چې له منحنيy=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي يو چې y=f(x) د اينتيګرال اينتروال په دننه کې دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

--د يوې په خوښه تابع د منحني يا کرښې او د x محور ترمنځ او يا د دوه توابعو د سطحې شميرلو لپاره وړانديزونه وکړئ.

- دا هم د شميرلو لپاره په پام کې ونيسئ، که منحني يا د تابع کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- يوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتيګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- يوه په خوښه تابع وليکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بيا وڅېړئ، چې ولې؟

يادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد وليکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونيول شي، چې د سطحې واحد(يوون) ور سره شته دی. که دا ورسره ليکل شوی نه وي، خو بايد تل په پام کې وي.

دا پورته فعاليتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

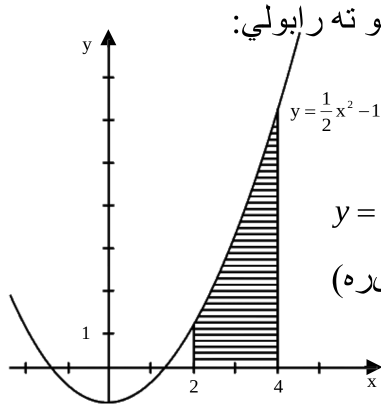


Bild 21,3

بيلګه ۵ . ۱ :

د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېړه)

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)dx=\left(\frac{1}{6}x^3-x\right)\Big|_2^4$$

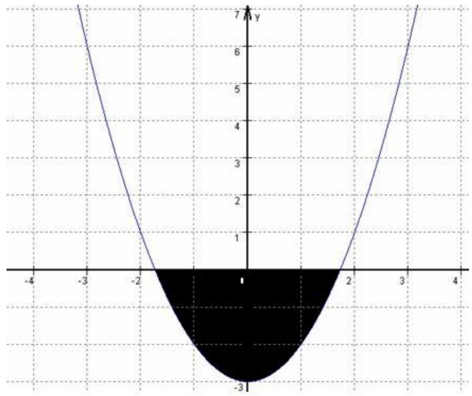
$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اينتيګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اينتيګرال مطلقه ارزښت نيسو يعني منفي اينتيګرال.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



بېلګه ۵ . ۲ :

د $f(x)=x^2-3$ ګراف د x محور سره يوه سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ د تولې سطحې مساحت وشمېرئ.

تګلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دې لپاره چې د انتيګرال حدونه لاس ته اروړی شو، بايد صفرځايونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ – اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتيګرال ليکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پوري انتيګرال شمېرو او نتيجه يې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بېلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحې مساحت د $y=\frac{1}{2}x^3-5\ ,\ y=0\ ,\ x_1=-1\ ,\ x_2=2$ ترمنځ دی: (لاندې ځیره)

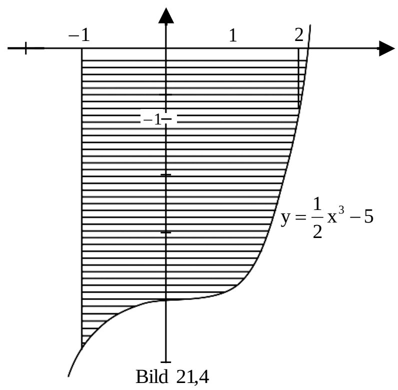
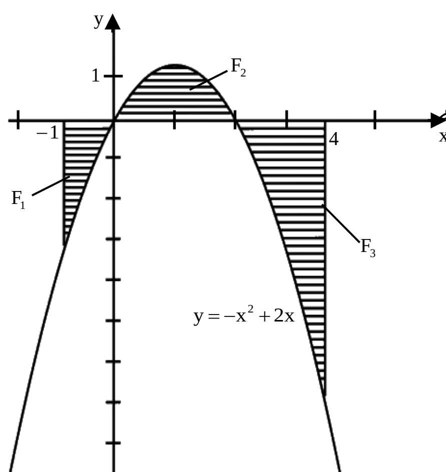


Bild 21,4

$$A=|\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx\ |$$
$$=-\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx$$
$$=(-\frac{1}{8}x^4+5x\ )|_{-1}^{2}$$
$$=(-2+10+1/8+5)=\frac{105}{8}$$

بیلګه:

د لاندې پولو $x_1=-1$ تر $x_2=4$ اودمنحني $y=-x^2+2x$ او $y=0$ ترمنځدx- محور پورته او کښته پرته سطحه (په مخامخ ځېره کي نښانه شوې ده) دې وشمیرل شي



حل : د تابع $y=-x^2+2x$, د $x1=0$ د صفرځایونو $x_1=0$ او $x_2=2$ تر منځ پرته غوښتونکي سطحه دx-محور پورته، نوره کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A=-F_1+F_2-F_3$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx-\int_{2}^{4}(-x^2+2x)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x=-1$ تر $x=4$ او د کږې $y=-x^2+2x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $y = 0$ ترمنځ (د x – محور پورته او کښته)

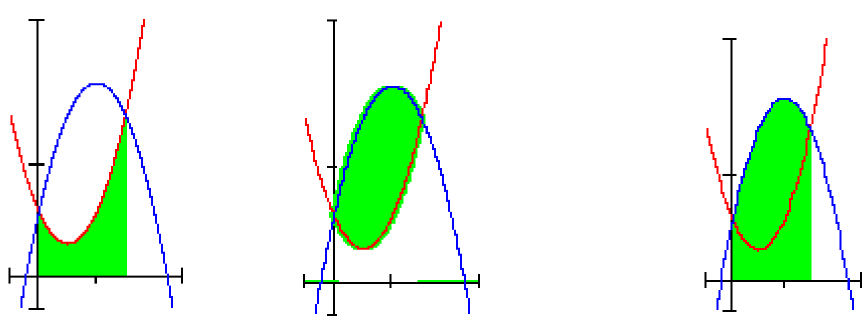
له دوه ګرافونو څخه رابندي سطحې د مساحت شمرنه:

ننوتنه د يوه ډنډ يا يوه بند څېره دې دلته راوړل شي يا ديوه پټي ,چې له ګړو پولو را بند وي.

فعاليت:

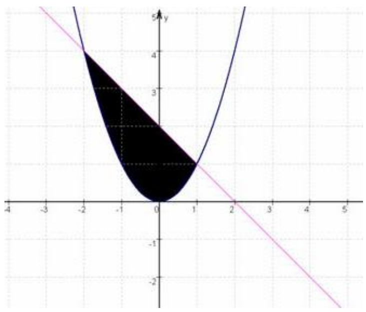
- که داسې يو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کيږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اينتګرالونو د کمښت له لارې و شميرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شيما څخه مخ ته ځو :



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = A_1 - A_2$$



بيلګه ۵ . ۵ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحې مساحت غواړو وشمېرو:

د تګلارې لار: دلته هم يو شکل يا ګراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.

۲ - د دې لپاره چې انتيګرال وشمېرو، د ګرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

P;q - فرمول

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توګه ليدل کيږي.

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس باور لري

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2 dx =$$
$$-1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$
$$=-1,5-6++=-4.5$$
$$A=4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f ګراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو ګرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A=\int_{a}^{b} (f(x)-g(x))\,dx$$

بېلګه ۵ . ٦ :

د توابعو $f(x) = x^2 -2x +2$ او $g(x) = -x^2+4x +2$ ګرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پيداکړو.
د دواړو ګرافونو د x–ارزښتونو غوښتکي(د تقاطع ټکي) د اينتيګرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواورديناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x =0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 = 0$ او $x_2 = 3$ د اينتېګرال ليميټونه يا پولې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

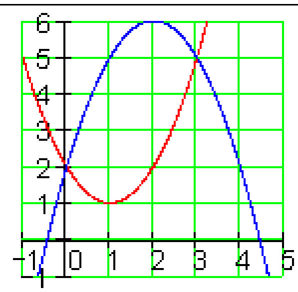
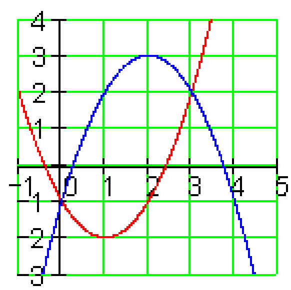
د اینتګرال جوړونه:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنخښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ څېړو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په دري واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمیرو.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتیګرال حدونه بې تغیره پاتېږي.

$$f(x)=x^2-2x-1 \quad \text{و} \quad g(x)=-x^2+4x-1$$

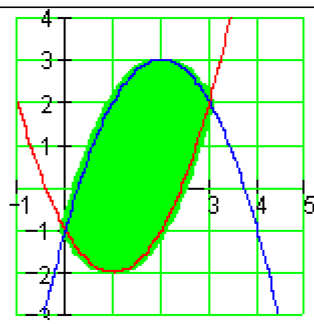
ځای په ځای کونه: $A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کيږي:

$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزيکي سطحه ښايي، بايد لاس ته راوړنه يو مثبت عدد وي. دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=|18-27|=|-9|=\underline{\underline{9}}\right|$$



د دې متود ټوليزه ونه(عموميت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:

که يوه سطحه د يوې پورته او يوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع f(x) او تابع g(x) پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شميرل کيږي.

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیکرالونې حدونه a او b د x – محور د دواړو ګرافونو د وضعیه قېمتونو غوځښکي دي

-- د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

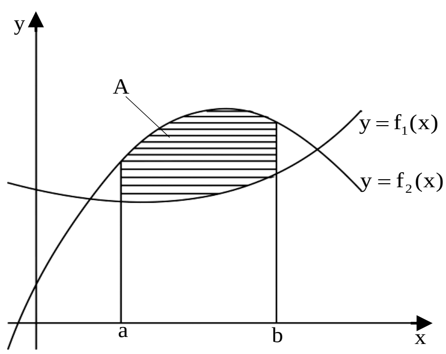


Bild 21,6

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

اینتیګرالوړاو $f_1(x)<f_2(x)$
په $[a,b]$ اینتروال کې (ش ۱ . ۶) داسی لاس ته راوړل کیږي چې دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحد کم کړئ.

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

سرې په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك چې $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اینتروال $[a,b]$ کومه یوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بیلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$

حل : د ایتیګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوځښکي(د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1=-x^2+1$$

$$2x^2=2$$

$$x^2=1 \qquad x_1-a=1\,,\ x_2=b=-1$$

د اینتیګرلولو په اینتروال $[-1\,,\,1]$ کی لرو $-x^2+1>x^2-1$

(که چیرې په اینتروال $[a,b]$ او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کي ونه نیول شي، نو د ځرګند اینتیګرال به منفی شي او سرې(لکه د مخه چې ویل شوي) بیا داینتیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

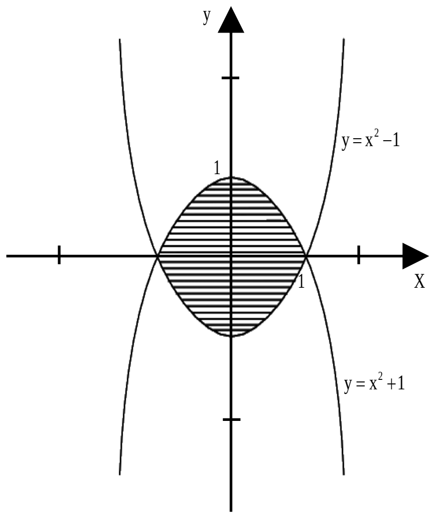


Bild 21.7

$$A=\int_{-1}^{1}\left[-x^2+1-(x^2-1)\right]dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)\,dx$$
$$=(-\frac{2}{3}x^3+2x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

بیلګه ۵ . ۸ :
د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ سطحه شمیرل کیږي.
y=(x-1)²,y=-4x+4,y=4

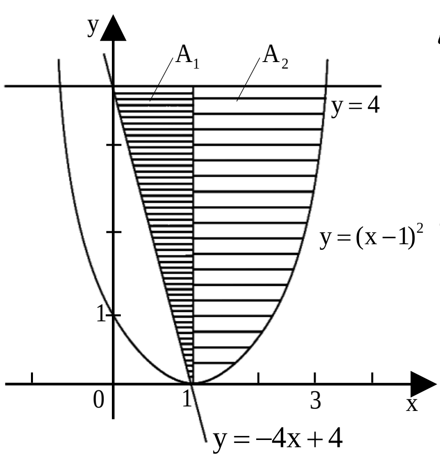


Bild 21.8

حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه سطحوA1 او A2 له یوځاي کیدو څخه لاس ته راځي.
A1د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي

کواور ینات(x –محور) غوڅټکی دی،
د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4=-4x+4,\ x_1=0$ په همدې ډول د

بني غوڅټکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$-4x+4=(x-1)^2,\ x^2+2x-3=0$$

$$x_{2,3}=-1\pm 2,\ x_3=1.$$

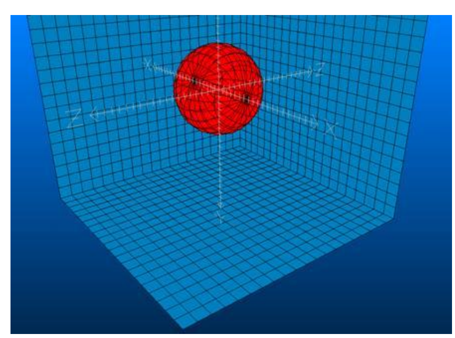
ګورو چیA2د y=-4 او y=(x-1)² تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعیه قیمت د بښي غوخښکي د y=4 او y=(x-1)² .

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1[4-(-4x+4)]dx+\int_0^1\left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1(-x^2+2x+3)\,dx=2x^2\Big|_0^1+(1/3x^3+x+3x)\Big|_4^3=7\frac{1}{3}$$

د څرخیدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توګه د مستطیل حجم ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د کرې، استوانې او د مخروط حجمونه، چې تراوسه مو لوستلي و لیکئ.

یادونه: دا دې تل په پام کې ونیول شي: که د انتیگرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د یوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره لیکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخdدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په یوه څرخېدونکي محور باندې د یوې کرښې یا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه یا منحني په یوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اویا زیات له زیاته یې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به یې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور څرخېدنه(څرخون)

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیگرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د یوه څرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم(ډکی)

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انټروال [a,b] کې د f تابع له گراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او$x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انټروال دf تابع گراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2\ dy$$

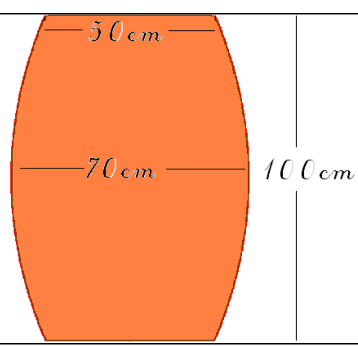
که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)|\, dx$$

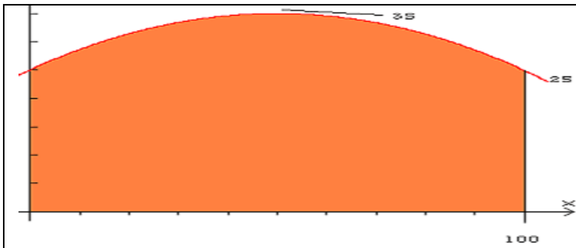
د f' مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ(min/max) توابع یو مثبت انتیګرال تظمینوي.

د سطحې په څرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f)^2\, dx$$

	د یوه مرتبان حجم: د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جګوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	که مرتبان په $90°$ درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژئ تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.

حل: د پارابول د تابع لیکبڼه کېدی شي ساده په ککرټکي یا راس باندې ولیکل شي.

ټولیز باور لري:

$f(x) - a\cdot(x-5)^2 + 3.5$ (dm ارزښت په دیسیمتر)

په څرګند دول 5- د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزونې ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x) = -a\cdot(x-5)^2 + 3.5$$

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2 + 3.5$

له دې a دی: $\frac{2.5-3.5}{25} = -0.04$

او مساوات پوره بلل کیږي. $f(x) = -0.04\cdot(x-5)^2 + 3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال یا عمودي فورم بدلوو:

$$f(x) = -0.04x^2 + 0.4x + 2.5$$

تابع مربع کړئ $f(x) = (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دی $f(x)=0.0016x^2-0.032x^3-0.04x^2+2x+6.25$

لومړنی تابع

$$f(x)=\frac{0.0016x^2}{5}\cdot x^5-\frac{0.032x^3}{4}\cdot\frac{-0.04x^2}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x$$

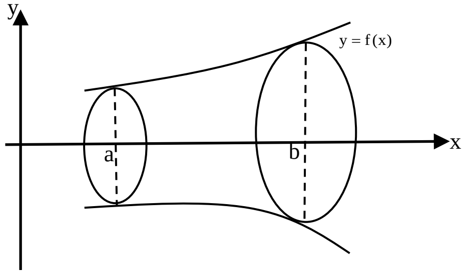
د حجم شمیرلو لپاره ټاکلی انتیګرال دی؛

$$\pi\cdot\int_0^{10}(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^{10}(-0.0016x^2-0.032x^3-2x+6.25)\ dx$$
$$=\pi\left[\frac{0.0016}{5}\cdot 10^5-\frac{0.032}{4}\cdot x^4-\frac{0.04}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x\right]_0^{10}$$
$$=\pi\left[32-80-13\frac{1}{3}+100+62.5\right]_0^{10}$$
$$=\pi\ \cdot 101.167$$

د حجم واحدونه (یوونونه)

دا چې موږ له پیله په دیڅیمتر شمیرنه کړې، نو طبعآ دا په لیتر شمیرل کیږي.

$$=317.824\ liter$$



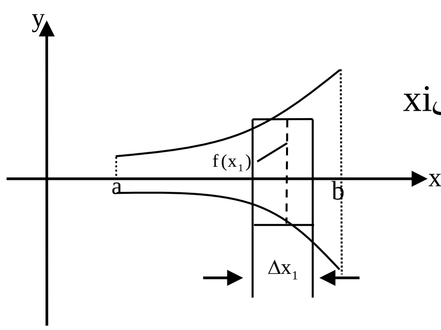
د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ سطحه چی دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹). دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې یا- راغلي دڅرخیدونکي بدن ډکی(حجم) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکی(حجم):
په انټروال[a,b]کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چې د سطحو $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپيداکيږي داسی دی:

$$V=\pi\cdot\int_a^b[f(x)]^2\,dx$$



ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعې له لارې چې وړانګه يې(f(xi، جګوالی يې xi
د i=1,2,3,...n لپاره لری.
(ش: 5. 10) دi-مې توټې
(سليندر ډکی(حجم) دی.

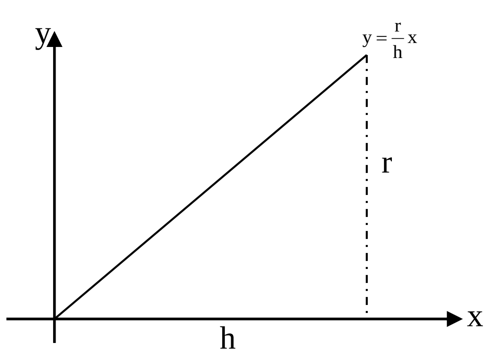
$$\Delta_iV=\pi\cdot[f(x_i)]^2\cdot\Delta x_i$$

د ټولو n سليندرونو يا توتو زياتون

$$V_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i=\sum_{i=1}^{n}\pi[f(x_i)]^2\cdot\Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اينتيګرال د تعريف سره سم

حجم (ډکی) راکوي. $V=\pi\cdot\int_a^b[f(x)]^2\,dx$



بيلګه ۵ . ۹ :) دمخروط يا کيګل ډکی
(حجم) د $y=\frac{r}{h}x$ کرښې (د سرچيني
تيره کرښه د $\frac{r}{h}$ جګوالي سره) او دx- محور
(y =0) د حدونو$x=0$ تر $x=h$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورې(ش . ١١)

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

دا له بنسټيزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتيجه ده.

بيلګه ٥ . ١٠:

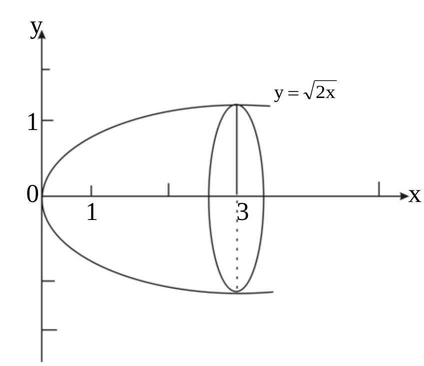
د $y = \sqrt{2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

ترمنځ د x-محور باندې څرخېدلو جوړ(توليد) شوی جسم څرخېدلی پارابولوييد دی (ځ ٥ ړ ١٢)

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^3 = 9\pi.$$



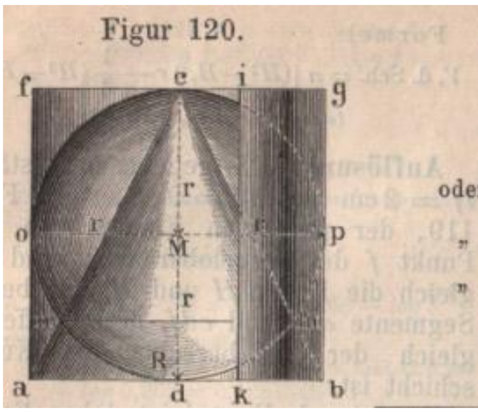
د ارښيميدس جمله Archimedischer Satz

د توتې، غونډارې(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوانه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 1886 زکـ يوه درسي کتاب څخه



Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: „ : „ : „ $= 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

„ : „ : „ $= 6 : 4 : 2$

„ : „ : „ $= 3 : 2 : 1$

Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der **Archimedische Satz.**

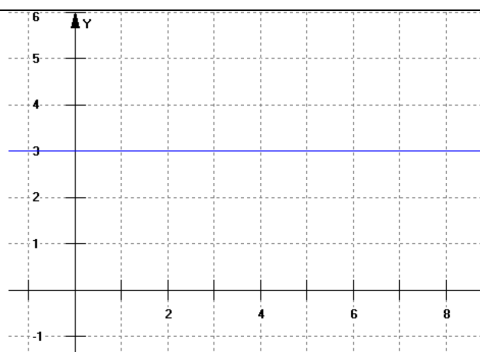
د پورته الماني پښتو:ارښيمېدس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب يي وموندده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښيمېدس جلې په نامه نومول شوې.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بېلګه ۵ . ۱۱:

استوانه(توته):

استوانه د x په محور د $f(x) = c$ يوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.



د يوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په [0;5] انټروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نيسو او غواړو يوه لار پيدا کړو ، چې د هغې لارې د انتيګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو.
د سطحې مساحت د لاندې انتيګرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\, dx$$

که د دې ناپای ډېرو مستطيلونو(د f(x) د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغلېدونکې پنډوالې dx سره) انتيګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

دا په دې معنا چې دا انتيګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد يوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

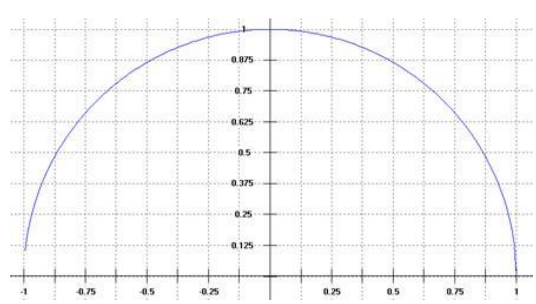
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45 - 0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډارى يا غنډوسکه(توپ)):



(c) ketabton.com: The Digital Library

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع څرخېدني څخه غونډارى يا كره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شكل.

دا تابع هم كېدى شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونكي تابع يې q(x) = π[f(x)]² ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بيا حجم وشمېرل شي.

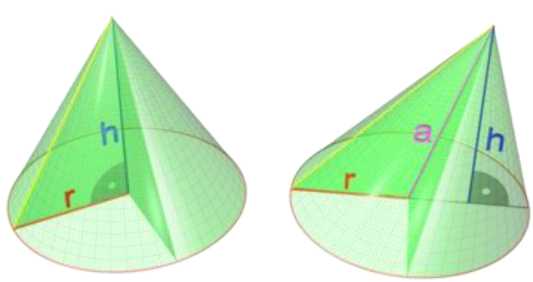
په دې بېلګه كې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع څرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، يعني په انتروال [1;1-] كې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروط Kegel (Geometrie)

دا هم ممكن ده، چې يو مخروط د يوه منظم n زاويو (اړخيزې(كونجيز) څخه رابندې بنستيزې سطحې(د n لپاره چې ناپاي ته ځي) اهرام ته ور نژدې كړو.



د مخروط حجم:

د انتيګرال په مرسته د يوه مستقيم مخروط د حجم د شمېرلو يوه بله مرستندويه لار. يو د كارتيزي وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په كار اچول كيږي، د هغه سره چې د مخروط څوكه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرچينه $(0|0)$ او منځ ټکی په ټکي $(0|h)$کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنيو توتو(استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونيسو، چې جګوالی(پنډوالی) يې dx دی. داچې د داسې يوې توتې يا استوانې ګردې توتې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعيه قېمت سيستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې) باور لري.

د يوه ناپاي کوچنی توتې(استوانې) وړانګه:

$$r\,z(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د يوې ناپاي کوچنی توتې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\, dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنيو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره يې ټاکلی انتيګرال جوړوو، د انتيګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاي چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بیا یې انتیګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونیسئ.

$$\pi\int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دی د یوه مخروط د حجم معیاري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نژدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi\cdot\int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ۱۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انتروال کې د وضعیه قیمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

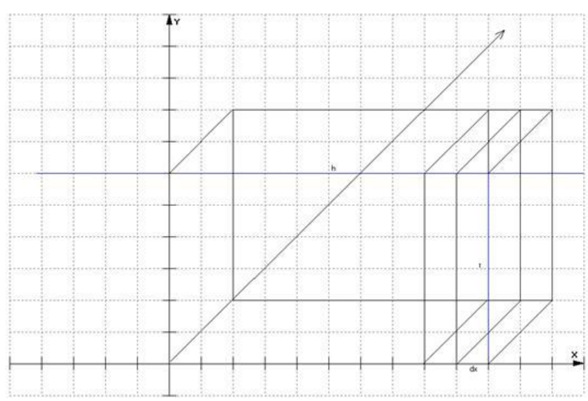
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16}\, dx = 0.4\pi$$

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\, dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم حجم.

شپږ اړخیز جسم یا مکعبډوله - 2.1 Quader



دا لید شکل د استوانې څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکې dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوځي (قاطع) سطحه وشمیرل شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

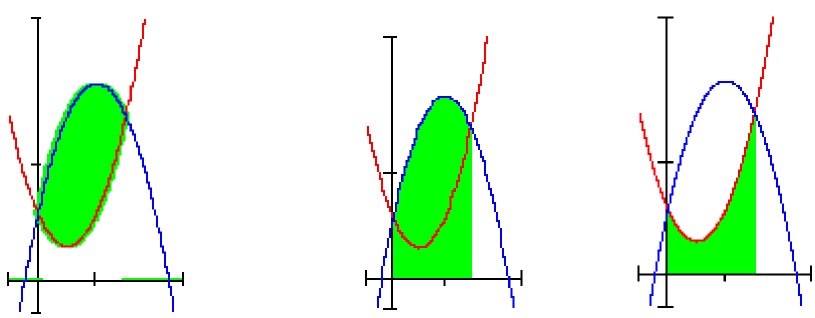
په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژی تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو، نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

ټولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعنې منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما ځخه مخ ته ځو :



A، A_1 ،A_2

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د يوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال
$[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$
ترمنځ جوړيږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخيدنه

د يوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په $[a,b]$ انتروال دf تابع ګراف
دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي بايد د $y = f(x)$
بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي
يوغږيز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شايد ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه
شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی يوغږيز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بيا
ځانله شمېرل کيږي او سره جمعه کيږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \, dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکی(حجم):
په اينتروال$[a,b]$کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چی د سطحو
$y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپيداکيږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{توته(استوانه)} : V_{غونداری(کره)} : V_{مخروط} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کټرو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نږدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نږدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخېدنې څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع یې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

تمرینونه
د بن

ستیز انتیګرال د جدول په کارونه یا استعمال لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int (x^3 - 5x^2 + 7x - 2)dx$, b) $\int (2/x^3)\, dx$, c) $\int (1/3)\sqrt[3]{x}\, dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$, e) $\int \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}\, dx$, f) $\int (\sqrt[3]{x^4} + 1)\, dx$,

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $\int \sqrt[3]{x^{-3}}\,dx$, h) $\int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}\,dx$, i) $\int 3\cdot 2^x\,dx$,

j) $\int \frac{1}{2\sin^2 x}\,dx$, k) $\int \frac{1}{3+3x^2}\,dx$, l) $\int \cos\varphi\cdot s\,ds$,

m) $\int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}$, n) $\int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt$, o) $\int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\,du$.

۱ . ۲ – د بیرته په اکلي انتیګرال وروسته یې انتیګرال ونیسئ

a) $\int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}\,dx$, b) $\int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}\,dx$, c) $\int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$,

d) $\int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\,dx$, e) $\int (-2-2\tan^2 x)\,dx$, f) $\int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}\,dt$.

۳ – لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_0^1 \frac{1}{2}e^x\,dx$, b) $\int_\pi^{2\pi} \cos x\,dx$, c) $2\int_2^3 dt$,

d) $\int_0^\pi \cos\pi \sin x\,dx$, e) $\int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}$, f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}\,dx$,

g) $\int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\,dx$, h) $\int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}\right)dx$, i) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\,dt$,

j) $\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\,du$, k) $\int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\,dx$, l) $\int_a^b a^x\,dx$.

۴ – د بدلون یا سبستچیشن له لارې یې انتیګرال وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\int \sqrt[3]{2x-7}\,dx$, b) $\int \frac{dx}{-x+1}$, c) $\int 2^{3x+6}\,dx$,

d) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx$, e) $\int \frac{dx}{1+(x+1)^2}$, f) $\int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}\,dt$,

g) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx$, h) $\int \frac{3x\,dx}{-x^2+1}$, i) $\int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx$,

j) $\int 7\cos^7 x\sin x\,dx$, k) $\int (1-2\sin x)^3\cos x\,dx$, l) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x}\,dx$,

m) $\int \cot t\,dt$, n) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}\,dx$, o) $\int \frac{\operatorname{Arc}\sin u}{2\cdot\sqrt{1-u^2}}\,du$,

p) $\int \frac{\sqrt{2\ln x+3}}{3x}\,dx$, q) $\int e^x\cdot\cos e^x\,dx$, r) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\,dx$.

۵ . د تر زیرنیونی فورمیدلون وروسته او په بنستیز اینتیګرال ۱۰ او ۱۱ د بدلون له لارې یې اینتیګرال وشمیری ،

a) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$, b) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$, c) $\int \frac{dx}{3+5x^2}$,

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$, e) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}$, f) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$,

g) $\int \frac{dx}{x^2-10x+34}$, h) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+30}$, i) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$.

۶ لاندې ټاکلي اینتیګرالونه وشمیری

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3}$, b) $\int_{-1}^{0} e^{3x}\,dx$, c) $\int_{0}^{2} 2^{2x+1}\,dx$,

d) $\int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}\,dx$, e) $\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x}\ln x\,dx$, f) $\int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$,

g) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$, h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}$, i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\,dx$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . د جملې ۲۱ . ۸ استعمال په بنسټ یې (ټوټه اینتیګرالونه) اینتیګرال کړی

a) $\int 0{,}2x \cdot \sin x\, dx$, b) $\int 4x^3 \cdot \ln x\, dx$, c) $\int \cos^2 x\, dx$,

d) $\int \cos x \cdot \sin x\, dx$, e) $\int x^2 \cdot \sin x\, dx$, f) $\int x \cdot (\cos x + 1)\, dx$,

g) $\int x^3 \cdot e^x\, dx$, h) $\int \mathrm{Arc}\sin x\, dx$, i) $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln x\, dx$,

j) $\int \mathrm{Arc}\tan x\, dx$.

لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_{-1}^{1} x \cdot e^x\, dx$, b) $\int_{1}^{2} \ln x\, dx$, c) $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$,

d) $\int_{0}^{\pi} e^x \cdot \sin x\, dx$, e) $\int_{0}^{\pi} x^3 \cdot \sin x\, dx$, f) $\int_{0}^{\pi} x^4 \cdot \sin x\, dx$.

د هغې هوارې دننه وشمیرئ، چې د وکړ شوو مساواتو کړو څخه راښنده شوې وي

a) $y = e^{0{,}5x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

b) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

c) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $y = 9$, $x = -3$, $x = 3$;

d) $y = \cos x$, $y = 0$

e) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;

f) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$;

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

h) $y = x^3 + 7$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

i) $y = x^3 + 7$, $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$;

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$, $y = 3 - 4x$;

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

k) $y=\frac{1}{x}, \quad 3y+3x=10;$

l) $y=\cos x, \quad y=\sin x$

m) $y=\sqrt{3x+1}, \quad y=1, \quad x=8;$

n) $y=\frac{x^2}{4}, \quad y=\frac{8}{4+x^2};$

o) $y=x^2, \quad x=y^2;$

p) $y=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{x^3}, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=3;$

q) $y=2\sin x, \quad y=\sqrt{3}\tan x, \quad x=[0, \pi/2)$

f) $y=\tan x$

کرښه چې په کوم $y=\tan x$ پرتو ټکو $(0,0)$ او $(\pi/4, 1)$ تیریږي
د x –محور باندې د ورکړ شوو مساواتو سره د ګرو ترمنځ هواره څرخي
د راپورته شوي څرخیدونکی بدن یا جسم ډکی یا حجم وشمیرئ. پام
دې وي، چې په ورکړشوي حالت کې ورکړشوې هواره د دوه کرو څخه
رابنده ده، نو له دې امله د لوي کرې ډکی څخه د کوچنی کرې ډکی
کمیږي.

---

a) $y=x^2, \quad y=0, \quad x=h;$ b) $y=\sqrt[3]{x^2}+1, \quad y=0, \quad x=-2, \quad x=2$

c) $y=e^x, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=2;$ d) $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=2;$

e) $y=2\sqrt{x}, \quad y=2x;$ f) $y=4x-x^2, \quad y=0;$

g) $y=\sin x, \quad y=0, \quad x\in[0,\pi].$

ترایخ (څلورګوډی، چې ټیك دوه اړخونه یو د بل غبرګ وي) د کونجونو
$(1,0),(5,0),(1,3),(5,5)$ د x–محور باندې څرخي، وشمیرئ
الف) د جوړې شوې هوارې دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د څرخیدونکی بدن ډکی

د کږو $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = -x+6$ ترمنځ هواره د x– محور باندې څرخی، وشمیری

الف) د کږې غوښتکو د پروت محور سره

ب) د کږو ترمنځ هواره

پ) د څرخیدونکی بدن ډکی

د هغهٔ څرخیدونکی بدن ډکی وشمیری، کوم چی په اینتروال $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ کی د x–محور پورته خواته د کږو $y = \sin x$ او $y = \cos x$ ترمنځ

پرته هواره، چی د x–محور باندې څرخیږي!

۱۴ نیمګردی $y = \sqrt{9-x}$ د x–محور باندې څرخیږي. د ګوډیبرخی ډکی وشمیري د پولو $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ او ترمنځ !

۱۵ د څرخیدونکی ایلیپسوئید ډکی څومره لوي دی، کوم چی د x–محور پورته خوا ته پرته د ایلیپسی نیمی هوارې د رابندوونکی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کږې سره د x–محور باندې تولیدوي؟

د ځپرکي نور تمرینونه:

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5} \qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$$

$$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1} \qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2} \qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$$

۱ - لاندې نااصلي پولینومونه دې د یوه ټول کسري پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعې په څېر ولیکل شي.

۲ - لاندې پولینومونه د جمعې په څېر ولیکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6}$ $b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}$

$c)\ \frac{4x+10}{x^2+6x+8}$ $d)\ \frac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$

$e)\ \frac{4x^2+6x-20}{x^3-4x}$ $f)\ \frac{14}{x^2+20x+51}$

۳ – د لاندې اصلي پولينومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$ $d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$

٤ - د لاندې اصلي پولينومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$a)\ \frac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

٥ - د لاندې پولينوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \frac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

٦ – و ښايئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$a)\ f(x)=2x^2+4x-7 \quad , \quad f(x)=4x+4$

$b)\ F(x)=(x^2-x)^3 \quad , \quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$

$e)\ F(x)=\frac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\frac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$

۷ - وښایئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\frac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتیګرالونه پیداکړئ او ټیکوالی یې و ازمایئ.

$a)\ \int x^3dx \qquad b)\ \int 7dx \qquad c)\ \int xdx \qquad d)\ \int (1-x^2)dx$

$e)\ \int (x+\frac{1}{x})dx \qquad f)\ \int (e^x+\cos x)dx \qquad g)\ \int \frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad h)\ \int \frac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx \qquad k)\ \int (2+e^x)dx \qquad l)\ \int (1+\ln x)dx \qquad m)\ \int (\sqrt{x}+\sin)dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx \qquad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx \qquad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad i)\ \int_{-2}^{2} x^3dx$

$j)\ \int_2^6 (1+x)dx \qquad k)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx \qquad l)\ 0\int_{-2}^{2} (\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3})dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۷ د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه یې سره پرتله کوئ.

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und - \int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \quad \wedge \quad -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0} \sin x dx \quad \wedge \quad -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx$$

۱۷– هر دوه انتیګرالونه د یوه انتیګرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3} 3x^{2}dx + \int_{5}^{3} 3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$$

۱۸- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2} e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8}\sqrt{1+x}\,dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5} 2^{4-x}dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi}\sin^{2} x dx$$

۱۹ – د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتیګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x} 5t^{4}dt\ ,\quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x} e^{t}dt\ ,\quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتیګراند توابع ته د انتیګرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2}\ ,\ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x}\ ,\ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2} x}\ ,\ a=0 \qquad d)\ f(x)=2\ ,\ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتیګرال په استعمال سره لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx, \quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx, \quad f)\ \int(\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx, \quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx, \quad i)\ \int 3\cdot 2^x dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx, \quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx, \quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\quad ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt, \quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$ --------

۲۲ - د بیرته په بنسټیز اینتیګرال بدلون وروسته یي اینتیګرال ونیسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx, \quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx, \quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx, \quad e)\ \int(-2-2\tan^2 x)dx, \quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx, \quad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx, \quad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi\sin x\ dx, \quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, \quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2}(2x-1)\,dx, \quad h)\ \int_0^8\left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx, \quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du, \quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\ dx, \quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې یي اینتیګرال وشمیري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx, \quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1}, \quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx, \quad e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2}, \quad f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int\frac{3x\,dx}{-x^2+1},\qquad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

۲۵- د تر زیرنیوني فورمبدلون وروسته او په بنسټیز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې یي اینتیګرال وشیمری

$$a)\ \int\frac{dx}{1+4x^2},\qquad b)\ \int\frac{dx}{2+4x^2},\qquad c)\ \int\frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\qquad e)\ \int\frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\qquad f)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int\frac{dx}{x^2-10x+34},\qquad h)\ \int\frac{dx}{3x^2-6x+30},\qquad i)\ \int\frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیري:

$$a)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4x-1)^3},\qquad b)\ \int_{-1}^{0}e^{3x}dx,\qquad c)\ \int_{0}^{2}2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1}\frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\qquad e)\ \int_{e}^{e^x}\frac{1}{x}\ln\times dx,\qquad f)\ \int_{2}^{4}\frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\cos x\ dx,\qquad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{2+8x^2},\qquad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې توټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

$$a)\ \int 0,2x\cdot\sin x\ dx,\qquad b)\ \int 4x^3\cdot\ln x\ dx,\qquad c)\ \int\cos^2 x\ dx$$

$$d)\ \int\cos x\cdot\sin x\ dx\qquad e)\ \int x^2\cdot\sin x\ dx\qquad f)\ \int x\cdot(\cos x+1)\,dx$$

$$g)\ \int x^3\cdot e^x\ dx,\qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x\ dx,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم: څمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د کټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرزي شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي ځانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرزي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې ځانګه او اباسین نومیږي. ځانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹ ۹۷ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library