

له اوم تر دولسم ټولگي پوري

د بنوونځي د شميرپوهني کتابونو ته يو ځغلند پام.

د بنوونځي په کتابونو کې ستونځي هر اړخيزه دي، چې زه يې دلته په ټولو اړخونو نه غږيږم، داسې لنډ ليکم: کتابوه پند او په ځانگړي توگه يې په نور منځ پانگي برسیره، چې گوته ورته نيسم په ياد راوړم، چې د ټولو ټولگيو په کتابونو کې د احصايي او احتمالي برخه باندې نه ليکونکي پوه شوی، نه به پرې استاد او نه زده کوونکي پوه شي، داپه دې معنا، چې دا برخي بايد ترې لري شي .

زه په لاندې کې يواځې د کتابونو ناسمون ته گوته نيسم. د هر کتاب څخه داسې د نموني په څير څه رااځم.

د اوم ټولگي کتاب يوي برخي ته ځغلند پام:

له هرڅه لومړی د ست تعريف ورکوم، چې په راتلونکي کې د گران نصاب ليکونکي تعريف سره يو څه د پرتلي ورو:

تعريف: ست د څرگند ټاکلو يو له بل کره توپيرېدونکو شيانو ټولگه ده. شيان چې ست ترې جوړ شوی دی، د ست توکي يا غړي او که غواړی عناصر بللکيږي.

انگريزي پيژند يې:

A mathematical set is defined as an unordered collection of distinct elements

ست چې له توکو 2,3,4,5 جوړ وي، داسې ليکو:  $A = \{2, 3, 4, 5\}$

دلته 2 د ست A توکی دی، چې داسې يې ليکو:  $2 \in A$  (ويل 2 له A څخه يا 2 په A کې) او 6 د ست A توکی نه دی، چې داسې يې ليکو:  $6 \notin A$  (ويل: 6 له A څخه نه يا 6 په A کې نه).

يا دالاندې د کانتور تعريف، چې غوره يې همدا دی.

... G. Cantor, the principal founder of set theory, defined a set as "a collection into a whole, of definite, well-distinguished objects (called the 'elements' of the set) of our perception or of our thought."

Ketabton.com

ست په درې ډوله ليکل کيږي:

۱ - شميرنيزه ليکنډول:  $A = \{2, 3, 4, 5\}$

۲ - شننيز ليکنډول:  $A = \{x \mid x \in N \wedge 1 < x < 6\}$

۲ - لوستل: ست A د ټولو x ست دی، چې x يو طبيعي عدد دی، له 1 لوي او له 6 کوچنی دی. پورته  $\wedge$  د او په معنا دی.

۳ - د ون دياگرام سره ست انځوريزي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 & \\ 3 & 2 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 & \\ 3 & \end{matrix}$$

تشست: تشست يو ست دی، چې کوم توکی نه لري

لیکنود:

- 1 تشست په بنوونځي کې داسی لیکل، کیري : { }  
 2 بل ډول لیکنود یې داسی دی Ø

پام : دا مخامخ لیکنود د تش ست لپاره ناسم یا ناتیګ دی : {Ø}

دا پورته یومخ په شپږو مخونو کې لیکل شوي. وپه گورو، چې هغه ناسم دي.

اوس کتاب ته راځو

په دریم او څلورم مخ کې لیکي (دا بیخي هغه پیل دی)

هریک از تیم‌های فوق یک خصوصیت مشترک دارند یا به عبارت دیگر هر یک از این تیم‌ها یک مجموعه (ست) را تشکیل می دهند.

د لیکونکي سور لیکلی غوره دی او څه ترې نه پوهیدل کیري.

، خصوصیت مشترک ،، یعنی څه؟ او دا چې ،، ست جوړوي ،، یعنی ست څه شي دی؟ تراوسه د ست تعریف نه شته. دا لاندې هم ناسم څه ورکوي یعنی د ست د لیکني یو ډول یې په څو ډوله نوموي او بیا د ست د لیکلو څخه په ناسمه توګه غږیږي.

ست ها را می توانیم توسط اشکال مختلف نشان دهیم که بنام **دیاگرام وین** یاد می شوند. طور مثال می توان ست های  $A, B, C$  را در اشکال زیر نشان دهیم.

A ست شاگردان صف 7	B ست تیم والیبال	C ست تیم فوتبال
حسن احمد زلمی محمود قاسم صفت الله دین محمد نادر عزت الله عطاء الله	حسن احمد زلمی محمود قاسم	احمد قاسم صفت الله دین محمد نادر عزت الله عطاء الله

، ستها را میتوان توسط اشکال مختلف نشان دهیم ،، . پورته درې ډوله لیکل شوي دي. دا دون دیاگرام په توګه لیکنه ده، چې د ست یو ډول لیکندول دی، اشکال یې په دي توګه چې لیکونکي غواړي ولیکي، پاي ته نه رسیري. ،، بی شمیره نه لیکم، ځکه چې دا په ریاضي کې یو بله ترې پوهیدنه لري.

زما په اند به - که څه هم گران لیکونکي دي ته گوته نه ده نیولی- دا لاندې د ست تعریف وي، چې زما له پورته تعریف سره نیمګړی دی، چې اوس یې ورکړي.

یو شمېر خانګړو شیانو ته ست او پخپله شیانو ته د ست عناصر (غږي) وايي.

شيان خانګړي نه دي بلکه شیان ټاکلي يا تعين دي، گورو چې په پورته کې دا نه دي لیکل شوي، چې توکي يا عناصر یې یو له بل کره نوپیر لري، چې بی له دي تعریف ناسم دی.

اوس باید پوه شو، چې د سټ تعريف كوم دی؟

هودا اخر يې باید تعريف وي، چې له دې د مخه يې تش سټ په گوته کړي او د سټ ليکل هم. دا هرڅه سره گډوډ او هم ناسم دي.

۵ - مخ

### عناصر یک ست (Members of a Set)

ليکونکي دا په دوه مخه کې ليکلي او دا لاندې يې هم په دوه مخ کې ليکلي، چې موږ پورته د تعريف سره يوځای ليکلي او باید داسې هم وي.

اتم مخ

### طرق نوشتن یک ست

د اتم مخ پورې نور څه ليکل شوي؟

ليکونکي د سټ د ليکلو طريقې دوه بنايي او موږ وښوده چې په درې ډوله ليکل کېږي. ليکونکي دا يو ځل پورته ليکلي هم دي، چې دا يې تکرار دی.

مخ ۹

### ست های مساوی و ست های معادل (Equal and Equivalent Sets)

د لاندې څخه به وپوهیږو، چې داپورته عنوان داسې ليکلی شو:

مساوي ستونه او برابر زوريز - يا ايکويوالنت ستونه

The **cardinality** of a [set](#) A, written as  $|A|$  or  $\#(A)$ , is the number of elements in A. Cardinality may be interpreted as "set size" or "the number of elements in a set".

د سټ زور: د سټ د توکو تعداد ته د سټ زور وايو. په پورته تعريف کې يې د سټ د توکو تعداد ليکلی او يا د سټ پراخوالی. خو موږ او تاسې يې زور بللی شو او داسې يې ليکو:  $|A|$  or  $\#(A)$ .

For example, given the set  $A = \{1, 2, \text{kanada}, \text{afghanistan}, 0, 3\}$

we can count the number of [elements](#) it contains, a total of six. Thus, the cardinality of the set A is 6, or  $|A| = 6$ . Since sets can be infinite, the cardinality of a set can be an infinity.

دا لاندې تعريف ۲ او تعريف ۳ اړين نه دی، چې ويې ليکو، خو دلر روښانولو له امله يې ليکو.

دوه ستونه برابر زوريز دي - که ايکويوالنت ورته وايې هم خوښه مو - که د توکو تعداد يې سره برابر وي. په لاندې کې دا موضوع د فنکشن له لارې روښانه شوې، چې زه يې د روښانه ونې لپاره راوړم. د دې ټولگې لپاره يې دا پيژند نه دی.

Definition 1:  $|A| = |B|$  [\[edit\]](#)

Two sets  $A$  and  $B$  have the same cardinality if there exists a [bijection](#), that is, an [injective](#) and [surjective function](#), from  $A$  to  $B$ . Such sets are said to be *equipotent*, *equipollent*, or *equinumerous*.

For example, the set  $E = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$  of non-negative [even numbers](#) has the same cardinality as the set  $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  of [natural numbers](#), since the function  $f(n) = 2n$  is a bijection from  $\mathbf{N}$  to  $E$ .

Definition 2:  $|A| \geq |B|$  [\[edit\]](#)

$A$  has cardinality greater than or equal to the cardinality of  $B$  if there exists an injective function from  $B$  into  $A$ .

Definition 3:  $|A| > |B|$  [\[edit\]](#)

$A$  has cardinality strictly greater than the cardinality of  $B$  if there is an injective function, but no bijective function, from  $B$  to  $A$ .

If  $|A| \geq |B|$  and  $|B| \geq |A|$  then  $|A| = |B|$  ([Cantor–Bernstein–Schroeder theorem](#)). The [axiom of choice](#) is equivalent to the statement that  $|A| \geq |B|$  or  $|B| \geq |A|$  for every  $A, B$ .<sup>[3][4]</sup>

۲۱ - مخ

ست های متناهی و نامتناهی (Finite and Infinite Sets)

آیا تعداد ستاره گان که در آسمان می بینید قابل شمارش می باشند؟



هرگاه  $A = \{a, b\}$  باشد،  $A$  دارای دو عنصر و هرگاه  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  باشد،  $B$  دارای چهار عنصر می باشد. هرگاه ست اعداد طبیعی طاق بین 2 تا 20 را به  $C$  نشان دهیم،  $C = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$  بوده و دارای 9 عنصر می باشد.

**مثال اول:** ست حروف صدا دار زبان انگلیسی یک ست متناهی است:  $A = \{a, e, i, o, u\}$  که عناصر آن قابل شمارش اند

اما ست اعداد طبیعی یک ست نامتناهی بوده که طور زیر نشان داده می شود.  $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  که عناصر آن قابل شمارش نمی باشند

اگر عناصر یک ست قابل شمارش (معین) باشند، به نام ست متناهی یاد می شوند. و اگر عمل شمارش عناصر یک ست به انتها نرسد، این گونه ست را ست نامتناهی می گویند. ست خالی نیز یک ست متناهی است.

لاتدی پستو

که  $A = \{a, b\}$  وي،  $A$  دوه عنصره او که  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  وي،  $B$  څلور عنصره لري. که د 2 او 20 تر منځ د طبيعي طاقتو عددونو سټ په  $C$  سره ښکاره کړو، نو  $C = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$  دی او 9 عناصر لري.

**لومړی مثال:** د انگليسي ژبې د غږ لرونکو تورو سټ يو معين سټ دی.

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

چې عناصر يې د شمېر وړ دي:

خو د طبيعي عددونو سټ يو غير معين سټ دی چې په لاندې ډول ښودل کېږي.

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

چې عناصر يې د شمېر وړ نه دي:

دا چې دی ليکي،،، که عناصر ان قابل شمارس نميپاشد،، يا چې ،، عناصر يې د شمير وړ نه دي،، ناسمه ده.

سم يې: عناصر يې د شمير وړ دي، خو پای نه لري يعنې ناپای دي، يعنې هغه د عربي لامتناهي دي. دا په دې معنا، چې ټاکلي دي يعنې معين دي، شميرل يې پای ته نه رسېږي.

ناشميرنور هم شته، خو هغه بيا بله موضوع ده، دومره به يې ياد کړم، چې ريل عددونه ناشميرنور دي، چې دا په پوهنتون کې ښوول کېږي.

دوه څه ته گوته ونيول شوه، چې:

۱ - ،، چې عناصر يې د شميرلو نه دي،، ناسمه ده او

## (Finite and Infinite Sets)

۲ - د

ژباړه يا متناهي او نا متناهي ده او يا معين او نا معين ده، دواړه نه شي کيدی. معين او نامعين ليکنه ورته ناسمه ده. په سټ کې مهمې عمليې دي، چې ليکونکي يې ځنې يادې کړي، خو نه په ترتيب.

۱۲ - م مخ

اگر هر عنصر ست  $A$  در ست  $B$  و برعکس هر عنصر ست  $B$  در ست  $A$  شامل باشد می گوئیم که این دو ست با همدیگر مساوی اند و میتوانیم بنویسیم:

$$A \subset B \text{ و } B \subset A \Rightarrow A = B$$

پورته ليکنه بايد داسې وي::

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

پورته  $\wedge$  د او په معنا دی.

دا اصلاً داسې لنډ ليکل کېږي: که  $A$  د توکي په  $B$  کې خوندي وي يا د  $B$  توکي وي او د  $B$  توکي د  $A$  توکي وي، نو  $A$  او  $B$  سره مساوي دي يا  $A=B$  او په څټ يا برعکس..

هر سټ د خپل ځان برخسټ يا سبسټ دی.

## قیمت مطلقه یک عدد

د پورته عنوان لاندې گران لیکونکی د دوه مخونو په لویوالي دا تعریف لیکي:

## آموختیم که:

- هر عدد که صفر نباشد ( مثبت یا منفی ) قیمت مطلقه آن یک عدد مثبت است، قیمت مطلقه صفر مساوی به صفر است، یعنی:  $|0| = 0$  می باشد.
- قیمت مطلقه یک عدد و قیمت مطلقه متضاد آن باهم مساوی اند؛ یعنی:  
$$|-7| = | +7 | = 7$$

دا پورته څه چې لیکل شوي د عددونو مطلقه قیمت دی، خو د مطلقه قیمت تعریف باید وشي:

مور داسي لیکو:

تعریف: قیمت مطلقه یک عدد قرار زیل مییاشد:

$$|x| = x; x > 0$$

$$|x| = 0; x = 0$$

$$|x| = -x; x < 0$$

۱۳۰ - م مخ

دا لاندې یوه د هندسي څخه:

اگر مجموع دو ضلع از ضلع سوم کوچکتر باشد، مثلث تشکیل نمی شود.

داسي ليکنه ناسمه ده ، ، اگر..... ، ، که مثلث نه تشکیل کيږي، نو بيا ضلعي د کومه شوي، چې کوچنيوالي او لويوالي يې سره پرتله کوي؟

اگر نه خواهي مثلث تشکیل نه ميشود اگر به قسمي دیگر هم باشد. یو څه چې لیکل کيږي باید لیدور وي. یوه څیره چې نه وي، نو ضلع نه شته. له ضلعي چې غږېږي باید ضلعه وي.

دا خو کوم شکل یا څه شي نه دی.

گران لیکونکی باید دا داسي ولیکي:

د یوه مثلث د دوه ضلعو ( د مجموعي ) اوږدوالي د دريمي ضلعي د اوږدوالي څخه لوی دی یا د یوه مثلث د دوه ضلعو د اوږدوالي مجموعي څخه د دريمي ضلعي اوږدوالي کوچنی دی.

یا که غواړی، نو داسي ولیکي:

که د دوه کرښو د اوږدوالي مجموعه د یوې دريمي کرښې له اوږدوالي کوچنی وي، نو دا دري کرښې مثلث نه شي جوړولي. چې مثلث نه جوړوي، نو مخ د مخه يې ضلع هم نه شي بللی.

۱۴۸ - م مخ

دو مثلثی که یک ضلع و دو زاویه همجوار آن ها با هم مساوی باشند، یا یک زاویه و دو ضلع همجوار آن با هم مساوی و یا سه ضلع آنها با هم مساوی باشند. مثلث ها انطباق پذیر می باشند اما در مثلث های قائم الزاویه دو حالت دیگر نیز وجود دارد:

1- اگر وتر و یک زاویه حاده یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک زاویه حاده مثلث قائم الزاویه دیگر مساوی باشند، این دو مثلث با هم انطباق پذیراند.

2- اگر وتر و یک ضلع قائم یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک ضلع قائم مثلث قائم الزاویه دیگری مساوی باشند، این دو مثلث انطباق پذیراند.

اگر استاد محترم دقت ورزد، این دو حالت در مثلثهای قائم‌الزاویه، حالت‌های دیگری نیست.

در ۱ - دو زاویه و ضلع همجوار دو مثلث با هم مساوی میباشند و

در ۲ - در اینجا خم دو ضلع و زاویه بین آنها با هم مساوی می باشد، این حالت دیگر نیست.

دی باندی بسیا کوو. دا نور درسونه هم همداسی دی. زما په لیکنو کی دا شته. زما د کتابونو د کتلو نړیوال جال هم تاسو ته په گوته کوم.

## اتم تولگی

د اتم تولگی کتاب کی یو عنوان:

،، د حقیقی عددونو مفهوم،، لاندې بناغلی لیکونکی شپږ مخونه لیکي او هلته د هندسي څیرو تشریح راوړي، حال دا چې موږ له ریاضي څخه غږیږو. که په قائم‌الزاویه مثلث کی ضلعي سره پرتله کو، هغه یوه ریاضیکي موضوع ده. په هر صورت ډېره اوږده لیکنه، چې متن یې دومره باید نه وي، چې له چا څخه په کی لار ورکه شي.

د عددونو په عملیو کی - که د اووم تولگی دی یا د اتم تولگی- سیستم نه شته او پوره هم نه دی راوړل شوي. دلته پوره روښانتیا ته اړتیا شته.

۱۸ مخ

1- د جذرالمرعب عدد په خپل ځان کی ضرب، د ضرب حاصل جمع پاتې مساوي له اصلي عدد سره وي.  
2- د جذرالمرعب دوه برابره جمع یو (1) له پاتې څخه زیات دي.

موږ په جذر کی درې څه لرو. لومړي جذر، دویم د جذر لاندې عدد، دریم د جذر وپستلی عدد یعنی هغه عدد، چې د جذر نیونی څخه لاس ته راغلی وي. دی ته دی فکر وشي، چې له جذر وپستلي عدد څخه د جذر لاندې عدد څنګه بیرته لاس ته راوړو؟ .....

زه پوهیږم، چې ګران لیکونکی څه لیکل غواړي، خو دا په خبرو سم نه شي لیکلی. که د د ه دا خبرې په ریاضي ژبه ولیکل شي، نو یو څه به ترې لاس ته راشي چې پرې پوه به نه شو. راځي چې دا د خبرو څخه د ریاضي په ژبه ولیکو او وګورو، چې لیکونکی څه غواړي:

1 - جذرالمرعب عدد دی  $\sqrt{5}$  وي. په خپل ځان کی ضرب یې 5 دی. جمعه یې پاتې نه پوهیږم خو  $5+?$ ، چې څه شي. برابر په اصلي عدد؟ یعنی څه. اصلي عدد کوم دی.

2 - جذر مربع  $\sqrt{5}$ ، دوه برابره یې  $2\sqrt{5}$  جمعه یې 1 یعنی  $2\sqrt{5} + 1$  دی او پاتې به څه وي، چې دا ترې لوي وي؟

گورو، چي هرڅه گډ وډ دي او نه پوهيږم، چي دا څه به ده ولي ليکلي و؟.

مخ ۱۹

د جذري عددونو جمع او تفریق په داسې حال کې کیدای شي، چې تر جذرالمرج لاندې عدد او د جذرالمرج درجه یو ډول وي. د ورته(مشابه) عددونو ضربونه یو له بل سره جمع او یا یو له بله تفریقوو.

$$x\sqrt{a} \pm y\sqrt{a} = (x \pm y)\sqrt{a}$$

په عمومي توگه:

سم یې: د جذري عددونو یا په ټولیزه توگه د ریل عددونو جمعه او تفریق هر وخت کيږي. د دې لاندې او پورته لیکنو څوک نه شي پوهیدلی، چې گران لیکنې اصلاً څه لیکي یا وایي؟

په پورته سره لیکنه، چې د لیکنې لپاره غوره ده، څوک نه پوهيږي، خو موخه یې دا لاندې ده:

که ولرو، نو په دواړو د جمعي- تفریق اعضاو کې گډ ضریب له قوس دباندي راباسو او لیکو:

$$x\sqrt{a} \pm y\sqrt{a} = (x \pm y)\sqrt{a}$$

په داسې موضوعاتو کې ډېرو خبرو ته اړتیا نه شته او ځای هم نه لري.

۲۰- م مخ

فعالیت:

• د  $\sqrt{9+16}$  او  $\sqrt{9} + \sqrt{16}$  قیمتونه په لاس راوړئ، دا قیمتونه یو له بل سره پرتله کړئ؟

• د  $\sqrt{100-36}$  او  $\sqrt{100} - \sqrt{36}$  قیمتونه په لاس راوړئ، آیا دا دوه قیمتونه یو له بل سره مساوي دي؟

له پورته فعالیت څخه نتیجه اخیستل کيږي، چې:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

زه دا دلته نه بنایم. وخت نیسي، فقط داسې لیکم:

که  $a$  او  $b$  دواړه او یا یو یې د صفر سره برابر وي، نو بیا څنگه؟

څوک چې هر څه لیکي، هغه بندیزونه یا غزېدنې یې هم باید ورسره ولیکل شي.

۲۹- م مخ

**په یاد ولرئ:** که چېرې د یوه عدد توان او د جذر درجه یو له بل سره مساوي وي داسې

پایله لاسته راځي:

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

زما د روښانه ونې پیل:

که ولرو  $\sqrt{2^2}$  نو لاس ته ترې راځي  $\sqrt{4} = \pm 2$  بيا څه او

$$\sqrt{(-2)^2} = \pm 2 \text{ نو لرو}$$

او که  $(\sqrt{2})^2$  ولرو، نو فکر په کې وکړی. دلته دابراير په ۲ کيږي.

څه چې ليکو، نو د سمون په هکله يې بايد مسؤل وو.

په دې هکله زما د شميرپوهنې ستر کتاب کتلی شی.

۳۰ - مخ

په لاندي کې  $a, b, c$  د صفر سره نامساوي بايد نه وي، بلکه بايد منفي اعداد نه وي، په هغه حالت کې چې اکسپوننت يو جوړه يا جفت طبيعي عدد وي.

5<sup>3</sup>

**III - په عمومي توگه د ضرب په عمليه کې ويلای شو چې که چېرې قاعدې نامساوي او کسري توانونه يې مساوي وي، په داسې حال کې چې  $a, b, c$  او حقيقي عددونه او د صفر خلاف وي:**

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot c^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b \cdot c)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{abc}$$

دلته بايد دا نيونه يا فرصيه وي، چې د جذر لاندي عددونه منفي هم نه وي.

ستونځي: دلته ستونځي په دې کې دي، چې د يوه پلوه موضوع د وخت څخه د مخه ليکل شوي او له بله پلوه د ريښې درس پوره نه دی ليکل شوی او په همدې توگه د پوښتنې درس هم.

۳۰-م مخ

که د توان او جذر قوانين سم درس ته راوړل شوي وای، نو بيا دا هم ليکل کيده.

دا پورته په جملو تشریح ناسمه راځي. جمله سم يا پوره څه نه وايي.

لنډ: که مختلف، د صفر سره نابراير د قاعدې اعداد  $a, b, c$  همغه کسري توانونه ولري، نو ضرب يې داسې ليکل کيږي:

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot c^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b \cdot c)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{abc}$$

۶۹ مخ

په ورته شکلونو کې هم ډوله زاويې يو له بله سره مساوي دي او د هم ډولو ضلعو نسبت د يو ثابت مقدار لرونکي دي چې دې ثابت مقدار ته د ورته والی نسبت وايې که چېرې دوه شکلونه داسې اړيکي ولري، دا شکلونه، سره ورته شکلونه دي، دوه ورته شکلونه د (٣) نښې په واسطه نښي.

دې پورته کې روښانه نه ده او نه چيرته تعريف شوي، چې همدوله زاويې يا همدوله ضلعي په څه معنا دي؟ تيره کونجونه که مساوي وي يا نا مساوي، همدوله دي. همداسې پڅکونجونه، که برابر وي يا نابراير، خو همدوله دي او له دې.

سم: ورته - يا برابر ارزښته درېگودي څيرلي. دوه درېگودي ورته دي، که اړونده کونجونه يې سره برابر وي.

دا يې له څو جملو يوه جمله ده.

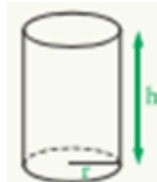
۱۴۳ - مخ

قیمه استوانه له دوو تطابق منونکو دایروي قاعدو او یوې جانبې سطحې څخه چې پر قاعدو پاندي عمود ده، جوړ شوي ده که چېرې د هغې ارتفاع په  $h$  او د قاعدې شعاع یې په  $r$  سره وښوئ نو د هغې ټول مساحت په  $A$  سره ښوئ:

پورته له دویمې کرښې: “... که ... سره ...، نو ... سره ښایو.”، دا د یوې وینا نتیجه نه ده.

که یو څه ولری، نو تری لاسته ... راځي. یعنی که ...، نو ... دلته گران لیکونکي سم نه لیکي.

سم: مور د توتي ارتفاع په ...، د دایرې وړانگه په ... او ټوله سطحه په ... سره ښایو.



$$s = 2\pi r \cdot h \text{ د جانبې سطحو مساحت}$$

$$2\pi r^2 = \text{د دوو قاعدو مساحت}$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h \text{ د استوانې کلي مساحت}$$

$$\pi = 3.14$$

$$A = 2\pi r(r + h)$$

د دایرې مساحت چیرته تعریف شوي؟؟؟ دایره په نهم ټولگي کې لوستل کیږي.

۱۵۹

له پورته فعالیت څخه لیکلای شو: کولای شو د قاعدې او قانون د بیانولو لپاره د تورو څخه کار واخلو څرنگه چې د تورو په ځای مختلف قیمتونه لیکلای شو نو دغه ډول توري متحول بلل کیږي.

۱۵۹

قاعده او قانون او بیانول یې او داسې لیکل یې چې له تورو څخه په کې کار اخلی؟

گران لیکونکي غواړي، چې د واریابل یا متحول یا تغیر خورونکي تعریف وکړي، خو تری پیچلی کیږي او لار تری ورکیري. لاندې ورسره پرتله کړی.

مور لیکو:

پیژند: هغه توري، چې د اعدادو ځای نیونکي وي یا د اعدادو په ځای لیکل کیږي، متحول یا تغیر خورونکي یا مجهول یا واریابل بلل کیږي، چې په  $x, y, z, \dots$  سره ښوول کیږي.

۱۸۳ - مخ

په پورته فعالیت کې د یوه کیلوگرام بورې د تلو او د مختلفو وزنو سره په تعادل کې راوړل د معادلې د مفهوم لپاره لاندې نتیجه په لاس راوړو.

۱۸۳

## تعریف

یو الجبري مساوات چې یو نامعلوم متحول ولري او د مجهول د ځینو قیمتونو لپاره صدق کوي معادله بلل کېږي، هغه عدد چې الجبري مساوات په یوه عددي مساوات بدلولي د معادلې حل یا ځواب بلل کېږي.

• هر هغه شی چې د معادلې په حل کې هغه ته قیمت پیدا کولو د معادلې مجهول بلل کېږي او هغه په  $x$  سره نښي.

په پورته لیکنه کې گران لیکونکي څه نه وایي او په څه ویلو هم نه پوهیږي. پښتو هم سمه نه لیکي.

سم یې داسې دی:

پیژند: که چیرې دوه ترمونه د مساوي نڅښې له لارې سره تړلي وي، دا برابران یا مساوات یا معادله بلل کېږي.

اتم ټولګي ته کتنه همدلته بس کولو. دا پسي هم دومره غورین نه دي.

## نهم ټولګی

اوم څپرکی

دویمه درجه یو مجهوله معادله

۱۷۷ - م مخ

له دې د مخه چې د لیکونکي په لیکنه پیل کولو، زه دې موضوع ته لنډه گوته نیسم، چې دا څه دي؟

دویمه درجه یو مجهوله معادله په نننیو ادباتو کې د مربع مساوات ( څلوری برابران) یا د مربع معادلې په نامه یادېږي، چې دا لاندې درې بڼې یې په کې څیرل کېږي:

لومړۍ بڼه:  $ax^2 + c = 0$

بڼه بدلون و  $x^2 = ?$  ته او د ریښه نیونې له لارې حل

دویم بڼه یا ډول:  $ax^2 + bx = 0$

د مجهولې یا متحولې  $x$  له نوکانو اېستلو له لارې حل.

$x(ax + b) = 0$  او د صفر ضرب جمله و کاروی.

دریمه بڼه:  $ax^2 + bx + c = 0$

مساوات په نورمال بڼه راوړی

$x^2 + px + q = 0$  او د  $P-q$  فرمول سره حل کړی.

$$D = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \text{سر د}$$

د  $D > 0$  لپاره دوه حلونه شتون لري.  $L = \{x_1, x_2\}$

د  $D = 0$  لپاره دبل حل شتون لري  $L = \{x_{1/2}\}$

د  $D < 0$  لپاره حل شتون نه لري.  $L = \{ \} = \emptyset$

دا پورته د شمیرپوهني په ادبیاتو د  $p-q$  فرمول په نامه یادېږي. د وینا جملې په مرسته د مربع مساوات سم یا نا سم حل ازمايل کېږي):

که مربع مساوات  $ax^2 + bx = 0$  دوه حلونه ولري، نو باور لري:

$$x_1 \cdot x_2 = q \quad \text{او} \quad -x_1 - x_2 = p$$

د یوه مربع مساوات کرښیزه بڼه:

$$L = \{x_1 | x_2\} \quad \text{دې د یوه مربع مساوات حل وي.}$$

$$\underbrace{(x - x_1)}_{\text{Faktor 1}} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Faktor 2}} = 0$$

نو باور لري: (ضرب)

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow L = \{x_1 | x_2\} \quad \text{یا}$$

لنډ او پوره پام ورته کړو: مربع مساوات یا دوه حل لري یا کوم حل نه لري او یا دبل حلونه لري. لیکونکي په اصلي برخه کې د مربع مساوات د لومړیو دوه بڼو سره تماس نه دی نیولی، یواځې دریمه بڼه یې تر څیړني نیولی او دا هم پوره ناسمه، چې روښانه به شي:

د لیکونکي لیکنه:

په ۱۷۷ مخ کې دروند لیکونکي لومړی بیلگه راوړي. تاسو دا وگورئ، چې څه لیکي او یا دلته یې دویمې درجې ته فکر کړئ؟

بل مخ کې مثال راوړي او بیا حل وروسته څیړي. هغه به وگورو، چې هغه به څه وي. د معادلې حل نه شته مثالونه راوړي اونور څه نه شته. دا ۱۷۷ او ۱۷۸ مخونه د درس سره سر او کار نه لري. دی د مکملې او نیمگړې معادلې غږېږي. زما لیکنه وگوري.

څو مخونه کار کوي، هغه هم ناسم او بیا په ۱۷۹ مخ کې د دویمې رجي معادلې حل ته راځي. مخ ۱۸۱ کې بیا بل عنوان غیر خطي اړیکې. زه نه پوهیږم چې ولې داسې زر زر دی خپل فکر بدلوي؟ لیکونکي لاندې لیکي:

$$(x + p)^2 = q^2$$

خو بیا یې د دې فرمول حل سره تماس نه دی نیولی  
۱۸۷-م مخ

محمد بن موسی دا لاره (طریقه) د دویمه درجه معادلې لپاره پیدا کړله. د دې طریقې په پوره کیدو سره د دویمې درجه معادلو په حل کې په بشپړه (عمومي) توگه گټه اخیستل کېږي، په دې تگلاره (روش) کې د  $x^2 + bx + c = 0$  دویمه درجه معادله په  $(x + p)^2 = q^2$  بڼه بدلېږي چې د تجزیې پراوونه یې عبارت له:

لیکونکي لاندې بیلگه هم د نورمال بڼې په لیکدود راوړي او د مربع د تکمیل له لارې مخ ته تللي، خو گورو، چې په اخر کې یې موضوع خرابه کړې او دا لاندې ناسم لیکي:  
لومړی مثال راوړي:

**لومړی مثال:** د  $x^2 + 2x - 8 = 0$  معادله د تکمیل مربع په تگ لاره حل کړئ.

**حل:** لومړی معادله په لاندې ډول لیکو:

$$x^2 + 2x = 8$$

د  $x$  د ضریب نیمایي په لاس راوړو، مربع یې له دواړو خواوو سره جمع کوو:

$$x^2 + 2x + 1 = 8 + 1$$

$$(x+1)^2 = 9$$

$$x+1 = 3$$

$$x = 2$$

او پسی لیکي.

**یادونه:** ټولې دویمه درجه معادلې نشو کولای په دې تگ لاره حل کړو ځکه دا لاره هندسي تعبیر ته اړتیا لري؛ نو ځکه په دې لاره نشو کولای هغه معادلې چې منفي جذرونه لري هم په

$$(x+1)^2 = 9$$

$$x+1 = 3$$

$$x = 2$$

حل نیمگړی او که غواړی ناسم دی او په لاندې توگه تصحیح کیږي:

د لیکونکي داسي

$$(x+1)^2 = 9$$

$$x+1 = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3 - 1$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -4$$

گورو، چې د لیکونکي د لیکنو په خلاف دوه حلونه شتون لري. بیا: مربع مساوات دوه حلونه یا یو ډبل حل لري او یا کوم حل نه لري.

۱۸۸ - م مخ

لاس راوړو.

لیکونکي پورته د مربع تکمیل څخه غږیږي او دلته یې په حل پیل کوي او دابیا نیمگړي پرېږدي. لیکونکي لیکي

• د  $ax^2 + bx + c = 0$  معادلې دواړه خواوې په  $a$  ویشو:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

• ثابت عددونه د معادلې یو خوا او مجهول حدونه د مساوي بلې خوا ته سره چاڼوو د  $x$  د

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right) \quad \text{ضرب د نیمایي مربع د معادلې دواړو خواوو ته جمع کوو:}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

د لنډې لیکنې لپاره  $b^2 - 4ac$  په  $\Delta$  سره ښوو.

لیکونکی لاندې د ښوونې نږدې اخره برخه راوړي او پسي حل نه پوره کوي او په لاندې توگه د فعالیت په نامه مخ ته ځي:

## فعالیت

هره دویمه درجه معادله چې  $ax^2 + bx + c = 0$  بڼه ولري، لاندې پوښتنو ته ځوابونه ووايي:

1- که  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$  وي؛ نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

2- که  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  وي؛ نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

3- که  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  وي؛ نو ایا معادله د حقيقي عددونو په سټ کې حل لري؟

زه نه پوهیږم، چې دی ولې دا حل سر ته نه رسوي؟

مساوات نه دی حل شوی. د دې موضوع اصلي برخه همدا ده، چې دا فرمول حل شي.

پسي بیا پایله لیکي:

**لومړۍ پایله:** د  $ax^2 + bx + c = 0$  دویمې درجه معادلې چې  $a, b$  او  $c$  حقيقي عددونه

او  $a \neq 0$  وي.

دا پورته داسې غزول کېدی شي. ،، .....،،. يعني دا به داسې وغزوو: د .... چې ... او ... وي، نو دا به ډېر ناسم کار دي.

دا پورته پایله نه ده، بلکه دا د مربع مساوات تعريف په بنسټ دی،  $a$  له صفر سره باید برابر نه وي، ځکه چې دامربع مساوات دی، پرته له دې بیا مربع مساوات نه شي کېدی.

بیا وایم: لیکونکي تل په دې ډول پایلې راوړي، چې سمې نه د او سمې يې هم نه راوړي.

که د لیکونکي پورته لیکنې ته پام وکړو، نو باور وکړی، چې پوره ستونځې لري.

گران لیکونکی غواړي ولیکي، چې:

په  $ax^2 + bx + c = 0$  مساوات کې  $a, b, c$  حقيقي اعداد دي او  $a \neq 0$  ده .

لیکونکي په لاندې کې هغه پورته فعالیتونه په پوره نامکمل ډول لیکي، چې د زده کوونکو لپاره د پوهیدلو نه دي او پسي بیا دویمه پایله لیکي، چې دا پایله نه ده، بلکه دا د وینا جمله ده، چې له مخې يې د مربع مساوات د حل سمون له دې لارې ښایي، يعني دا سمه جمله، چې باید وښوول شي. زه پوهیږم، چې دې څه لیکي، خو دی باید د زده کوونکو لپاره دا پوره ولیکي. جمله باید د کتاب لیکونکي له لورې ولیکل شي.

د  $\Delta = b^2 - 4ac$  د قاسمې په نوم یادېږي.

1- که  $\Delta > 0$  وي معادله دوه بېلابېل حلونه لري چې عبارت له:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2- که  $\Delta = 0$  وي معادله دوه مساوي یا مضاعف حلونه لري چې عبارت له:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3- که  $\Delta < 0$  وي معادله په حقيقي اعدادو کې حل نه لري.

**دويمه پایله:** د حلونو د جمع او ضرب حاصل

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

د جذرونو د جمع او د ضرب له حاصل څخه کولای شو د دویمې درجه معادلې په تجزیه کولو کې گټه واخلو.

نه پوهیږم، چې لیکونکي، دا پورته جمله ولې لیکلې؟ دا یې باید روښانه کړې وی چې څنگه؟

پایله: دا برخه پوره ناسمه ده او دا نورې هم که وڅیړو- ما پوره په غور لوستلې - هم همداسې ستونځمنې لیکل شوي.

د مربع مساوات د شمیرلو لپاره زما کتابونه کتلی شی

د مربع توابعو صفرځایونه

د دې لپاره چې د یوه مربع تابع صفرځایونه پیدا کړو، تل باید یو مربع مساوات حل کړو.

که دا دوه حټونه ولري، نو مربع تابع د گراف د x - محور په دوه ټکو کې غوڅوي..

که یو حل ولري، نو دا گراف د x محور په یوه ټکي کې لمسوي (د خپل ککرټکي سره).

که حل ونه لري، نو گراف د x - محور پورته لور ته یا کښته لور ته ځغلي او غوڅتکی نه لري.

د حل کنترول

لکه په هر مساوات کې کېدی شي حل داسې کنترول شي، چې د حلتوکي په سرچینیز مساوات کې ځاپه ځای شي، یعنی کنترول وکړي.

په مربع مساواتو کې دا ساده دی، د ویتا د ریښې [ملې سره.

د ویتا **Vieta** جمله :

که مربعیز مساوات  $x^2 + px + q = 0$  دوه حلونه ولري، نو باور لري:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{او} \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

۱۲۷ مخ کې عنوان: داچې لیکونکي ولې داسې عنوان د خپلو لیکنو له پاره راوړي نه پوهیږم. زه تراوسه دداسې کوم عنوان سره نه یم مخامخ شوی او یا شاید دی د څو جمله یي لاندې بل څه وپوهیږي. په دې هکله یې بیا د کتاب په دننه کې هم څه نه دي ويلي.



ليکونکي دا پورته عنوان چي ليکي باور وکړی، چي داسي څه په رياضي کي نه شته او دا سي څه چي په نور متن کي راوړي هم ناروا دي.

لکونکی په ۱۲۹ - م مخ کي

که چيرې په يوه الجبري افاده کي د مشابه جملاتو له ساده کولو څخه وروسته يوازې يو حد ولري، هغې ته يو حد، (Monomial) که جمع يا تفريق د دوحدونو ولرو هغې ته دوه حده يا (Binomial) که جمع يا تفريق د دريوحدونو ولرو هغې ته درې حده يا (Trinomial) اوکه له دريو حدونو څخه زيات حدونه ولرو پولينوم يا (Polinomial) په نامه يادېږي په دي شرط چه د تورو توانونه ئي مکمل عددونه وي هره الجبري افاده کي تر ټولو لوړ توان نسبت يوه ځانگړی متحول ته د الجبري افادې درجه نظر هغه متحول ته بلل کېږي.

زه پوهېږم، چي گران ليکونکي د مشابه جملاتو لاندې څه ويل غواړي، خو باور وکړی، چي داسي ويينه هيڅ ژبه کي نه شته او مور په رياضي کي د جملې لاندې يو ځانگړي څه پوهېږو. په شمير پوهنه کي هر نوم يو ځل کارول کيږي او جمله يو ځانگړی تعريف لري.

په نورو ادبياتو کي لومړی پولينوم تعريفېږي او بيا د هغې په بنسټ مونوم او ... تعريفوي.

په لاندې کي:

د دوو الجبري عبارتونو له ضرب څخه چي يوه گډه جمله ولري ليکلاي شو چي:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a \times b$$

په پورته گوره بيا الجبري عبارتونه او گډه جمله ليکي. زه نه پوهېږم، چي ډېر محترم ليکونکي دا نومونه له کومه ځايه رانيسي. که د الجبري عبارتونو څخه يي موخه الجبري افادې نه وي، نو زه پري نه پوهېږم. دا د جمعو ضرب دی، چي د دواړو ضربيونو په هر يو يي د جمعې په حالت دی، يو برابر زياته وونو يا زياتوونې ولري. دا د دوه جمعو ضرب دی او د دوه جمعو ضرب د همدې قانون له لاري مخ ته تللی شي. که  $a-b$  او  $c-d$  ولرو، نو داسي يي سره ضربوو:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

د بينوم فرمولونو حل هم همدسي دی، خو هغلته بيا دوه همغه يا مساوي ترمونو جمع يا تفريق سره ضربېږي، چي دلته يي نور نه غزوم.

نامساوات

۱۶۶ - م مخ

په لاندې مثال کي چي دی حل ورکوي، بايد وليکي چي مخرج د صفر سره برابر نه دی او دا چيرته؟

**مثال:** د  $\frac{2x}{5x+3} \geq 1$  کسري غیر مساوات حل کړئ.

**حل:** د غیر مساوات د حل سټ پیدا کولو لپاره لومړی کسري افاده یو وار د صفر څخه کوچنی یا لویه لیکو:

$$\frac{2x}{5x+3} \geq 1 \Rightarrow \frac{2x}{5x+3} - 1 \geq 0$$

$$\frac{2x - (5x+3)}{5x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{-3x-3}{5x+3} \geq 0$$

$$-3x-3=0 \Rightarrow x=-1$$

$$5x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{5}$$

اوس د غیر مساوات د علامې د ټاکلو له جدول څخه د غیر مساوات حل په لاس راوړو.

$x$		$-1$	$-\frac{3}{5}$	
$-3x-3$	+	0	-	-
$5x+3$	-	-	0	+
$\frac{-3x-3}{5x+3}$	-	0	+	-

نه دی تعریف شوی د نامساوي حل

له پورتنی جدول په پاملرنې سره د غیر مساوات حل عبارت دی له:  $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < -\frac{3}{5}\}$

په بشپړ ډول د کسري نامساوي د حل لپاره په لاندې ډول پر مخ ځو:

• غیر مساوات داسې لیکو چې له صفر څخه کوچنی یا لویه وي.

• غیر مساوات د علامو د ټاکلو له جدول څخه د غیر مساوات د حل سټ په لاس راوړو.

**حل:** د غیر مساوات د حل سټ پیدا کولو لپاره لومړی کسري افاده یو وار د صفر څخه کوچنی یا لویه لیکو:

$$\frac{2x}{5x+3} \geq 1 \Rightarrow \frac{2x}{5x+3} - 1 \geq 0$$

$$\frac{2x - (5x+3)}{5x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{-3x-3}{5x+3} \geq 0$$

$$-3x-3=0 \Rightarrow x=-1$$

$$5x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{5}$$

حل ته که وگورو، نو له نامساوات څخه گران لیکونکی مساوات ته راغلی، چې دا کار ناسم دی. هغه ریاضیکي حل چې په دې برسیره د داسې نامساواتو کېږي، محترم لیکونکي نه دی کړی. د هغې حل لپاره زما ستر کتاب وگورئ، چې دې ته ورته په کې شته:

د نهم ټولګي کتاب ته کتنه هم دلته رالندوو.

**لسم ټولګي ته:**

لسم ټولګی

له دې د مخه چې د گران لیکونکي د الجبري افادي او ثابتې تعریف ته راځو، زه دا لاندې تعریف ورکوم: متحوله: توري، چې د اعداد ځای نیونکي وي یا د اعداد ځای نیسي، متحولې بلل کېږي، چې د  $\dots, Z, Y, X$  سره بنول کېږي. نورې نومونې یې: مجهولې واریابې، تغیر خورونکي او اوبستونکي دي.

ثابته یا تل همغه: ثابت یا تل همغه: هغه اعداد چې تل همغه وي، نو ثابتې یا تل همغه بلل کېږي، لکه ۴ و ۵،  $e$  او  $\pi$  د اویلر عدد او  $\pi$  د دایرې عدد دی.

لاندي کي به ترم يا افاده لږ زوره وڅيړو:

۲- **ترمونه terms, Termen**: که په يوه لړۍ کې، يواځې ثابتې (همغه)، اووښتونې (مجهولي، واريابلي) نښلونې (نښلونې يعني جمع تفريق، ضرب او وېش) چې مخرج صفر نه وي) او تخنيکي نخښې (نوکانو يا قوسونو کې رابندول) کارول شوي وي، يانې اړيکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ويل کيږي. **گورو چې په پيژند کې د جذر عمليه نه راځي، نو له دې امله گرانو ليکونکو دلته او هم په نورو ځايونو کې دا سم نه دي ليکلي، چې جذر کې متحولي نيول شوي وي.**

که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو يوه ورزياته نخښه په نوکانو کې نيولکيږي، لکه:

$$T(x); T(x,y)$$

**بيلگه**

**الف**: ترم  $126 + 3/4$ ، چې اووښتونې نه لري په  $T$  سره په نخښه کوو او ليکو:

$$T = 126 + 3/4$$

$$T = 126 + \frac{3}{4}$$

**ب**: ترم  $10 + 2x$  چې اووښتونې  $x$  لري يانې  $T(x) = 10 + 2x$  د اووښتونو بنسټيږي د پيدايښتي گڼونو- يا د طبيعي اعدادو ډيري  $N^{\circ}$  وي تعريفږي د بنسټيږي سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتونې يا واريابلي  $x$  په ځاي يو پيدايښتي گڼ 2 کيږدو، نو د

$$\frac{x+2y}{x}$$

**پ**: يا  $(x+2y)/x$

دلته ماتلاندي يا مخرج اجازه نه لري، چې صفر وي.

$$T(x, 2y) = \frac{x+2y}{x} \quad \text{يا} \quad T(x, 2y) = (x, y) / x$$

ارزښتميرنه د  $x=2$  او  $y=3$  لپاره په دې ډول ده  $T(2,3) = (2+6) / 2 = 4$ :

تاسو دا لاندي د پورته تعريف سره پرتله کړئ، وبه گورئ، چې هغه تعريف، چې گران ليکونکي راوړي د سټ تشرحي ليکنډول دی د متحولي.

درېم مخ: عنوان: الجبري افادي

ليکونکي لاندي د متحول او ثابت تعريف داسې راوړي:

**متحول او ثابت (variable and constant):** متحول يو سمبول (Symbol) دی چې

د يوه غير خالي سټ د هر عنصر په ځای وضع کيږي. د مثال په ډول که

$$A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ او } x \leq 10\}$$

د پورته - له ما ورکړشري - تعريف سره بې پرتله کړئ. دا ده چې څه ليکلي، دا د سټ شننيز ليکنډول دی.

بيا د متحول تعريف يا پيژند: متحول هغه لويه ده، چې د عددونو ځايونو کې وي او ....

۶ - م مخ

پوه الجبري افاده كيدای شي چې ناطقه، غير ناطقه او يا پولينومي الجبري افاده وي. پولينوم هغه يوريا  
خو حده الجبري افاده ده چې د نورو نولونه يې د مكملو عددونو په سټ كې شامل وي.

په پورته تعريف كې به وگورئ، چې غير ناطقه الجبري افاده - د ليكونكي په موخه - نه شته، يعنې داسې افاده، چې  
متحول د جذر لاندې وي.

د پولينوم لپاره دا لاندې انگريزي هم وگورئ:

## Polynomials

Polynomials are algebraic expressions that include real numbers and variables. Division and square roots cannot be involved in the variables. The variables can only include addition, subtraction and multiplication.

Polynomials contain more than one term. Polynomials are the sums of monomials.

A monomial has one term:  $5y$  or  $-8x^2$  or  $3$ .

A binomial has two terms:  $-3x^2 + 2$ , or  $9y - 2y^2$

A trinomial has 3 terms:  $-3x^2 + 2 + 3x$ , or  $9y - 2y^2 + y$

The degree of the term is the exponent of the variable:  $3x^2$  has a degree of 2.

When the variable does not have an exponent - always understand that there's a '1' e.g.,  $1^x$

### Example:

$$x^2 - 7x - 6$$

(Each part is a term and  $x^2$  is referred to as the leading term.)

Term	Numerical Coefficient
$x^2$	1
$-7x$	-7
-6	-6

$8x^2 - 3x - 2$	Polynomial	
$8x^{-3} + 7y - 2$	NOT a Polynomial	The exponent is negative.
$9x^2 + 8x - \frac{2}{3}$	NOT a Polynomial	Cannot have division.
$7xy$	Monomial	

## د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

دا د پولینوم د لیکنې ډول دی، چې د درجې په جگیدونې ډول یا د درجې په تیتیدونې ډول لیکل کېږي.

### نزولي او صعودي پولینومونه

(Descending and ascending Polynomes):

که یو پولینوم د متحول له لورې توان څخه ټیټ توان ته ترتیب شوی وي، نزولي او که له ټیټ توان څخه لورې توان ته ترتیب شوی وي، صعودي ترتیب ورته وایي.

داسې عنوان نه شته. هغه د پولینوم د درجې جگیدنه او تیتیدنه ده یعنې د پولینوم لیکنه د

ascending or descending order په ترتیب دی. د پولینوم جگیدنه او تیتیدنه خو د پولینوم د لیکنو له لارې نه شی روښانه کېدی.

که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د دې توري لورې توان د پولینوم درجه ده او که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د لورې توان لرونکي مونوم درجه د دې پولینوم درجه ده. هغه پولینومونه چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه یې سره مساوي وي، د معادلې پولینوم په نامه یادېږي. او هغه پولینوم چې د ټولو حدونو توانونه یې سره مساوي وي، متجانس پولینوم دی.

پولینوم زیات وخت له یوه توري نه جوړېږي. ستا موخه ده، چې که پولینوم یوه متحوله یا مجهوله ولري. نه د توري لورې توان بلکه د مجهول یا متحول لورې توان.

د  $x$  د یوه راکړ شوي قیمت لپاره د  $P(x)$  په پولینوم کې د  $x$  پر ځای راکړ شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي که په یوه پولینوم کې د توري (متحول) پر ځای یو وضع شي د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راځي.

د لومړۍ جملې سمه، لنډه او پوهور لیکنه:

که په  $p(x)$  کې  $x$  پر ځای د  $x$  لپاره یو راکړ شوی قیمت وضع کړو، د پولینوم قیمت په لاس راځي.

اووم مخ:

د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

3x یا 16x ته مونوم يا (Monomial) (يو حده) الجبري افاده وايي.  $x-4$  يا  $ab-y$  ته باينوم (Binome) يا (Binomial) (دوه حده) الجبري افاده وايي او د  $2x^3-x-1$  الجبري

افاده ترينوم (Trinomial) (درې حده) الجبري افاده ده او  $\sqrt{2x}-\frac{1}{y}+1$  الجبري افادې ته مولتينوم (Multinomial) وايي.

ځينې وختونه پولينوم له يو، دوه، درې او څو متحولونو څخه جوړ شوی وي.

د  $2x^3-8x^2+7x+11$  پولينوم د يو متحول،  $2x^3-3y$  پولينوم د دوه متحولونو او

$x+y+z$  د دريو متحولونو لرونکی پولينوم دی چې په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

په الماني ادبياتو کې د مولتينوم څخه په دې موخه لکه چې ليکونکی ترې غريزې نه شته او د دې په ځای يې هغه غوره پولينوم دی، چې مونوم، بينوم او ترينوم هم په دې بنسټ تعريف شوي دي. زموږ ليکونکي د ډېرو شيانو لپاره د ،، حد،، وي کاروي. موږ څو حد هغه د پښتو ټولې ته وايو، چې زموږ ادبيات ورته په ډېره مينه برید وايي. مونوم هغه پولينوم دی، چې يو غړی ولري. يا په بل عبارت مونوم هغه لويه ده، چې له يوه غړي جوړه وي. يعنې ثابتي، ثابتي او واريابلې يا متحولي او .... څخه د يو بل سره د ضرب په حالت کې جوړه لويه. دا پورته، چې متحوله په مخرج کې ده او د جذر لاندې هم يوه الجبري افاده نه ده.

- A **monomial** is the product of non-negative integer powers of variables. Consequently, a monomial has NO variable in its denominator. It has one term. (**mono** implies **one**)

13,  $3x$ ,  $-57$ ,  $x^2$ ,  $4y^2$ ,  $-2xy$ , or  $520x^2y^2$

(notice: no negative exponents, no fractional exponents)

- A **binomial** is the sum of two monomials. It has two unlike terms.

(**bi** implies **two**)

$3x + 1$ ,  $x^2 - 4x$ ,  $2x + y$ , or  $y - y^2$

- A **trinomial** is the sum of three monomials. It has three unlike terms. (**tri** implies **three**)

$x^2 + 2x + 1$ ,  $3x^2 - 4x + 10$ ,  $2x + 3y + 2$

- A **polynomial** is the sum of one or more terms. (**poly** implies **many**)

$x^2 + 2x$ ,  $3x^3 + x^2 + 5x + 6$ ,  $4x - 6y + 8$

Polynomials are in **simplest form** when they contain no like terms.

$x^2 + 2x + 1 + 3x^2 - 4x$  when simplified becomes  $4x^2 - 2x + 1$

Polynomials are generally written in **descending order**.

**Descending:**  $4x^2 - 2x + 1$  exponents of variables decrease from left to right

$$4xy^2 + 3x - 5$$

terms

example of a polynomial

this one has 3 terms

يو مولتينوميال لکه گران ليکونکي، چې ليکلی د مونوميال او... کورنی سره څه اړیکه نه لري. پولينوميال، چې يو غړی ولري مونوميال بلل کيږي او داسې نور.

مور چې پولينومونه راوړو، نو يوه واريابله به لري او نه زياتي.

اوو لسم مخ

که پولينوم له يوه توري څخه جوړ شوی وي، د دې توري لوړ توان د پولينوم درجه ده او که پولينوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د لوړ توان لرونکي مونوم درجه د دې پولينوم درجه ده. هغه پولينومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولينومو په نامه يادېږي. او هغه پولينوم چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، متجانس پولينوم دی.

دا څه معنا لري، چې که پولينوم له يوه توري يا ډېرو تورو څخه جوړ وي؟ د محترم ليکونکي موخه د توري څخه متحوله ده، يعنې که يوه - يا دوه - او يا ... متحولي ولري، توري خو ضريبونه هم کيدی شي، چې متحول نه دي. ليکونکي د ليکنې له لارې د ليکلو سره ستونځې لري. هغه څه چې دی غواړي بايد د رياضي فرمول له لارې گوته ورته ونيسي.

۱۴ مخ

زه نه پوهېږم، چې محترم ليکونکي دلته د دايرې او د مثلث مساحت ټاکل ولي د پولينومونو لپاره راوړي. دا هندسه ده او هلته تعريف او تشریح دي. دا په هندسه کې د ځانگړو فرمولونو له لارې تعريف شوي. بيا هم دلته متحولي کومې دي او پولينوم دلته څنگه تعريف شوی. په پولينوم کې خو جذر نه دی تعريف.

**دریم مثال:** لکه څرنگه چې پوهیږئ د دایرې محیط (Circumference)  $C = 2\pi r$

له فورمول څخه لاس ته راځي چې که  $\pi = \frac{22}{7}$  او  $r$  د دایرې شعاع وي.

که د یوې دایرې شعاع  $r = 3\frac{1}{2}$  cm وي، ددې دایرې محیط (C) پیدا کړئ.

**حل:**

$$C = 2\pi r = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{2} \text{ cm} = 22 \text{ cm}$$

**څلورم مثال:** که  $a, b, c$  او  $C$  د مثلث د ضلعو اوږدوالی او  $P$  د مثلث د محیط نیمایي وي یعنې

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که په یوه مثلث کې د ضلعو اوږدوالی  $a = 9 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$ , او  $c = 15 \text{ cm}$  وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

**حل:**

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)} \\ = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 9^2} = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54 \text{ cm}^2$$

#### فعالیت

د استوانې حجم د  $V = \pi r^2 h$  له فورمول څخه لاس ته راځي، چې  $V$  د استوانې حجم،  $r$  د قاعدې شعاع او  $h$  د استوانې لوړوالی دی. که د یوې استوانې  $r = 5 \text{ cm}$  او  $h = 21 \text{ cm}$  وي، ددې استوانې حجم پیدا کړئ.

که گران لیکونکی دا پورته بیلگې د پولینومونو لپاره هم راوړي، پولینوم کې مو لاتراوسه مساوات نه دي تعریف کړي. سری کړی شي، چې پولینوم متحولو ته ارزښتونه ورکړي او بیا د پولینوم ارزښت وټاکي. سره له دې هم دا هم دا ۹ نښې بیلگې ناسمي دي.

د پورته دریم او څلورم تمرین لیکنه له یوې خوا د ژبې له امله پوره ستونځې لري او له بلې خوا نه پوهیږو، چې په پورته کې متحوله یا مجهوله کومه ده. دلته هندسي موضوعات حل شوي. داسې پوښتنه څوک نه کوي، لکه دا لاندې.

...، له فورمول څخه لاس ته راځي چې که  $\pi = \frac{22}{7}$  او  $r$  د دایرې شعاع وي، چې که  $\pi = \frac{22}{7}$  نه دی بلکه  $\pi = \frac{22}{7}$  داسې دی.

پوښتنه فقط داسې ده: که وړانگه ... وي، نو د گردې یا دایرې محیط پیدا کړئ. دا لا د مخه ټولگيو کې شمیرل شوي او فرمولونه یې هم ورکړي دي. نه پوهیږم، چې محترم لیکونکي، دا ولې په پولینومونو کې راوړي؟

$$1^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1^3 + 1^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

**شپږم مثال:** د  $(x-3y)^4$  د ضریبونو مجموعه پیدا کړئ.

**حل:**

$$(1-3 \cdot 1)^4 = (1-3)^4 = (-2)^4 = 16$$

**اووم مثال:** د  $(7x^2 - 5x - 1)^{600}(2x^3 - 1)^{17}(x+2)^4$  د ضریبونو مجموعه په لاس

راوړئ.

**حل:**

$$(7 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 1)^{600} (2 \cdot 1^3 - 1)^{17} (1+2)^4 = (1)^{600} (1)^{17} (3)^4 = 81$$

**اتم مثال:** که ددې توپ شعاع 6cm وي ددې توپ حجم پیدا کړئ.



**حل:**

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (6\text{cm})^3 = \frac{4}{3} \pi (216\text{cm}^3) = 288\pi\text{cm}^3$$

د  $x$  د یوه راکر شوي قیمت لپاره د  $P(x)$  په پولینوم کې د  $x$  پر ځای راکر شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي که په یوه پولینوم کې د تورې (متحول) پر ځای یو وضع شي د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راځي.

د .... راکر شوي قیمت لپاره .... د... پر ځای راکر شوی قیمت وضعه کوو.

داسې به ښه وای: که  $P(x)$  په پولینوم کې د  $x$  پر ځای راکر شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي

۶۹ - ۷۰

د تابع تعریف به هم داسې ورکړم: که د یوه سټ هر توکي د یوه بل سټ یا خپل ځان په ټیک یوه توکي تنظیم شي، نو دا نظم فنکشن (تابع) بلل کي (نور یې غزوم نه).

گران لیکونکی له تابع څخه غږیږي او په رښتیا چې څه لیکي هغه د تابع سره سر او کار نه لري. دې مساحت ته ځي بیا حجم معلوموي. ته نه پوهیږي، چې دا څرنگه د ریاضي د تابع څیرل دي. که دلته مستقلة مجهوله او تابع مجهوله وي، بیا به دا یو مربع مساوات وي، چې هغه داسې نه دي او نه داسې لیکل کیږي. د دې کاپي لاندې مربع تابع تعریف شوی ده.

که فکر وکړو، نو جمع، تفریق او ضرب هم د فنکشن په څیر تعریفولی شو، خو دا کار نه کوو، ځکه چې مور کلاسیک مخ ته ځو.

لیدل کیږي چې نفوس (Population)، یا  $P$  د وخت ( $t$ ) تابع ده یا  $p = f(t)$

3 - د دایرې مساحت ( $A$ )، د دایرې شعاع ( $r$ ) پورې اړه لري ( $A = \pi r^2$ )

4 - د کرې حجم ( $V$ ) د کرې په شعاع ( $r$ ) پورې اړه لري چې د  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  د معادلې په واسطه ښودل کیږي.

مربع تابع څه شي دی؟

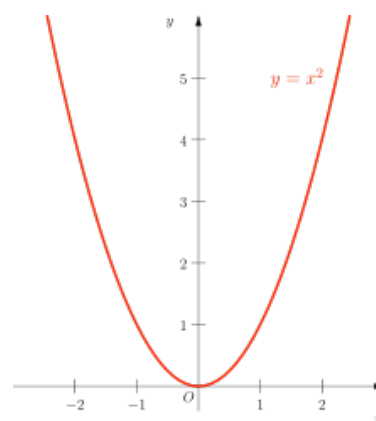
که موږ له مربع واوړو، نو سملاسي مو د هندسي مربع ته پام اوږي، خو په رياضي کې د دوه په توان تابع ته مربع تابع وايي او د درې په توان تابع ته مکعب تابع، او دا داسې ليکل کيږي

$$f(x) = x^2 ; f(x) = x^3$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0 \text{ سره}$$

او  $f(x) = x^2$  دالاندي گراف لري: گورو چې دا کږه (منحني) ده او نه سطحه.

زموږ سر او کار د داسې ليکنوسره دی. ما پورته وويل، چې جمع، ... د فنکشن په څير ليکلی شو، خو اوس دلته د بنوونځي لپاره دا کار نه کوو.



گورو، چې دلته د سطحې څخه نه ليدل کيږي او نه د حجم څخه.

زه نه پوهيږم، چې گران ليکونکي دا له کومه خايه ليکي؟

گورو، چې په دايره کې ساين او... فنکشنونه دي، خو د هغې سره موږ دلته سر او کار نه لرو، هغه په خپل ځای کې څير لکيږي، ځکه چې هغه الجبري فنکشنونه يا توابع نه دي.

د تابع تعريف: که چيرې د يوه سټ هر توکي د يوه بل سټ ټيک له يوه توکي سره ترتيب يا په نظم کې راشي، نو دا فنکشن (تابع) بلل کيږي. نورو ځايونو کې هم دا تعريف راغلی.

ناسو دا لاندي د پورته تعريف سره پرتله کړی، وبه گورئ، چې هغه تعريف، چې گران ليکونکي راوړی د سټ تعريف دی او نه متحولي.

### متحول او ثابت (variable and constant): متحول يو سمبول (Symbol) دی چې

د يوه غیر خالي سټ د هر عنصر په ځای وضع کېږي. د مثال په ډول که

$$A = \{x / x \in \mathbb{IN} \text{ او } x \leq 10\}$$

نو د  $A$  په سټ کې  $x$  له يوه څخه تر 10 پورې د طبيعي عددونو قيمتونه اخيستلای شي.  $x$ ، ته متحول (Variable) وايي. عموماً متحولونه د انگليسي ژبې د کوچنيو تورو لکه  $x, y, z$  او نورو په واسطه ښودل کېږي.

د يوه عدد قيمت تغير نه کوي، لکه د 4 عدد هېڅکله له 5 يا 3 او يا کوم بل عدد سره مساوي کېدای نه شي، نو ټول حقيقي عددونه ثابت (Constants) دي.

د حقيقي عددونو سربيره د انگليسي د ژبې توري لکه  $a, b, c, \dots$  او نور هم د ثابتو پر ځای کارول کېږي.

### الجبري افاده (Algebraic Expression): کېدای شي الجبري افاده له يوه ثابت، يو

متحول او يا د ثابتو او متحولونو له ترکیب څخه جوړه شوې وي. د الجبري افادو لاندې مثالونه وگورئ.

$$5\sqrt{x}, 4x + 5 + \frac{15}{t^2}, \sqrt{3x}, x^2 - x + 1, x, -12, 12 \text{ او داسې نور.}$$

په مثال کې د متحولي د جذر لاندې نيول يې الجبري افاده نه ده.

۴ مخ

په  $3x^2$  الجبري افاده کې 3 ته ضريب (Coefficient) وايي. په  $-\frac{1}{2}y$  کې د  $-\frac{1}{2}$  عدد او په  $x$  کې (1) ضريب دی.  $-3x^3y^3$  او  $15x^3y^3$  مشابه حدونه (Liketerms) دي چې مشابه متحولونه او مساوي توانونه لري، يوازې عددي ضريبونه يې سره توپير لري.

### د الجبري افادو ډولونه: الجبري افادې په دريو ډولو دي.

د الجبري افادو ډولونه: الجبري افادې په دريو ډولو دي.

### 1- پولینومي الجبري افادي (Polynomial algebraic expressions)

**پولینوم:** هغه یوه یا څو حده الجبري افاده، چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي، پولینوم نومېږي.  $x^3 - x + 1$ ،  $2x^2 + x - 1$ ،  $x - 1$ ،  $12$  او نور پولینومونه دي،  $x^{-2} + x - 1$  او  $\frac{1}{x} + x$  او  $x^3 + \sqrt{x} + \frac{y}{x^2}$  پولینومونه، نه دي، یا د پولینوم مشخصې دا دي:

- د ټولو متحولونو توانونه یې مکمل عددونه وي.

- په مخرج کې متحول ونه لري.

- متحول تر جذر لاندې نه وي.

**لومړی مثال:** په a)  $\sqrt{2x}$ ، b)  $2\sqrt{x}$ ، c)  $\frac{1}{y^2} - \frac{2}{x^3}$ ، d)  $x^{\frac{1}{2}}$ ، e)  $x^{-3} + x^2$ ، f)  $8p^2 + p^{2.2}$ ، g)  $9x^2 - \frac{7}{x^2}$ ، h)  $88$ ، i)  $6a^2 - 4a$  افادو کې:

a, h او i پولینومونه دي، خو b, c, d, e, f او g پولینومونه، نه دي. په یاد ولری چې هر پولینوم،

یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو هره ناطقه الجبري افاده پولینوم نه دی. د مثال په ډول:

$$x^3 + \frac{y}{x^2} + \frac{y}{x} + y^3$$

یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو پولینوم نه دی.

12 هم یو پولینوم دی ځکه چې:  $12 = 12x^0$  دی او صفر هم د مکملو عددونو په سټ کې شامل دی، خو  $5\sqrt{x}$  او  $\frac{5}{x^3}$  پولینومونه نه دي، ځکه  $5\sqrt{x} = 5x^{\frac{1}{2}}$ ،  $\frac{5}{x^3} = 5x^{-3}$  چې  $\frac{1}{2}$  او  $-3$ .

د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دي.

پولینوم د یو توري په واسطه لکه P بنودل کېږي، یو پولینوم چې له یو متحول څخه جوړ شوی و:

عمومي شکل يې په لاندې ډول دی.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

$n$  يو مکمل عدد او  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  ضربونه دي چې حقيقي عددونه دي. که  $a_n \neq 0$  نو  $n$  د پولینوم درجه ده.

### فعالیت

له  $-8$ ,  $-8x^2$ ,  $\sqrt{8x^3}$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $x$ ,  $2x^3 - x^2$ , او  $8\sqrt{x}$  الجبري افادو څخه کومه يوه يې پولینوم دی او کومه يوه پولینوم نه دی؟

**دویم مثال:** د  $P(x) = -5x^3 + x^2 - x + 12$  په پولینوم کې،  $n = 3$ ,  $a_n = -5$ ,  $a_1 = -1$  و  $a_0 = 12$  دی. او د  $11x^2 - 1$  په پولینوم کې،  $n = 2$ ,  $a_n = 11$ ,  $a_1 = 0$ , او  $a_0 = -1$  دی.

له  $-8$ ،  $-8x^2$ ،  $\sqrt{8x^3}$ ،  $\frac{1}{x}$ ،  $x$ ،  $2x^3 - x^2$  او  $8\sqrt{x}$  الجبري افادو څخه کومه یوه یې پولینوم دی او کومه یوه پولینوم نه دی؟

**دویم مثال:** د  $P(x) = -5x^3 + x^2 - x + 12$  په پولینوم کې،  $n = 3$ ،  $a_n = -5$ ،  $a_1 = -1$  او  $a_0 = 12$  دی. او د  $11x^2 - 1$  په پولینوم کې،  $n = 2$ ،  $a_n = 11$ ،  $a_1 = 0$  او  $a_0 = -1$  دی.

## 2- ناطقه الجبري افاده (Rational algebraic expression):

که یوه الجبري افاده د  $\frac{p}{q}$  ( $q \neq 0$ ) په شکل ولیکلای شو چې  $p$  او  $q$  پولینومونه وي. داسې الجبري افادې ته ناطقه الجبري افاده وايي. د مثال په ډول  $x^2 - \frac{1}{x^2}$  چې د  $\frac{x^4 - 1}{x^2}$  په شکل یې هم لیکلای شو چې یو متحول لري یوه ناطقه الجبري افاده ده. څرنگه چې هرې الجبري افادې ته یو مخرج ورکولای شو، نو  $(x^2 - 1)$  هم یوه ناطقه الجبري افاده ده، ځکه چې  $\frac{x^2 - 1}{1} = x^2 - 1$  دی.

## 3- غیر ناطقه الجبري افاده (Irrational algebraic expression):

داسې یوې الجبري افادې ته چې د دوو پولینومونو د خارج قسمت په بڼه یې نه شو لیکلای، غیر

331 seit

**شپږم مثال:**  $2x - 3y + 6 = 0$  معادله په نورمال شکل واړوی.

**حل:** د معادلې دواړه خواوې په  $\pm\sqrt{13}$  باندې ویشو. ددې لپاره چې ښي خوا مثبت وي د  $\sqrt{13}$  علامه باید منفي ونیول شي:

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{2x - 3y + 6}{-\sqrt{13}} = 0$$

نو  $\theta$  په دویمه ناحیه (ریڼه) کې ده.

د مثلثاتي جدول څخه لرو چې  $\theta = 123^\circ 40'$  ده نو ددې مستقیم خط نورمال معادله عبارت ده

$$x \cos 123^\circ 40' + y \sin 123^\circ 40' - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

له:

ناطقه الجبري افاده وايي، لکه:  $\sqrt{xy}$ ،  $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$  او  $\sqrt{y^2+1}$  د غير ناطقو الجبري افادو مثالونه دي.

يوه الجبري افاده کيدای شي چې ناطقه، غير ناطقه او يا پوليونومي الجبري افاده وي. پوليونوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د تورو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

دا لاندې انگرېزي ستونځې حل کوي.

## Rational Expressions

An expression that is the ratio of two [polynomials](#):

$$\frac{x^2 + 5}{x + 2}$$

← numerator

← denominator

A Rational Expression  
because it is a "ratio"  
of two polynomials

It is just like a fraction, but with polynomials.

*Other Examples:*

$$\frac{x^3 + 2x - 1}{6x^2}$$

$$\frac{2x + 9}{x^4 - x^2}$$

*Also*

$$\frac{1}{1 - x^2}$$

The top polynomial is "1" which is fine.

$$2x^2 + 3$$

Yes it is! As it could also be written:

$$\frac{2x^2 + 3}{1}$$

*But Not*



$$\frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x}$$

the top is not a polynomial (a square root of variable is not allowed)



$$\frac{1 - x}{1 + \frac{1}{x}}$$

1/x is not allowed in a polynomial

*In General*

A rational function is the ratio of two polynomials  $P(x)$  and  $Q(x)$  like this

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Except that  $Q(x)$  cannot be zero (and anywhere that  $Q(x)=0$  is undefined)

که تاسو په کمپیوټر (شمیروني) کې ایراشنل الجبرایک اکسپرېشن ورکړي، نو پرته له راشنل به بل څه په کې پیدا نه کړی. نه پوهیږم، چې لیکونکي به دا له کومه ځایه لیکلي وي. دا مې په ډېرو کتابونو او نت کې وکتل. ما په انگلیس ادبیاتو کې یوځای ولوستل چې: ایراشنل الجبرایک اکسپرېشن هغه دی، چې د پولینوم وېش له لارې نه شي لیکل کېدی. بیلگه یې هم نه وه او په پورته له ماڅخه راوړ شوي تعریف کې هم نه شته. الجبري

یوه الجبري افاده کېدای شي چې ناطقه، غیر ناطقه او یا پولینومي الجبري افاده وي. پولینوم هغه یو یا

څو حده الجبري افاده ده چې د تورو تواتونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

په لاندې به د کوم توري توان موخه وي

$$a^3x^2 + b^3x + c$$

پورته ټول توري دي، نو کوم یو به د پولینوم درجه وي؟ ریاضي یو ډېر څرکند علم دی او باید هر څه یې څرکند روښانه ورکړل شوي وي.

موږ ریاضي کې اوس له ځانه څه نه لیکو، دا مو یا باید له نورو کتابونو زده کړي وي او یا مو له نورو کتابون را اخستی وي.....

له ۳۹۳ - ۳۹۵ پورې

د ریاضي منطق

دا لاندې درې مخونه ما د ریاضي له منطق څخه رانیولې. زه نه پوهیږم، چې دلته ده څه او څنگه لیکلي، خو د ریاضي منطق په کې نه شته او زورول دي. زه نه پوهیږم، چې ،،د شهودي درک استدلال،، او همداسې د ،، استقرایي استدلال،، په گران لیکونکي له کومه ځایه رانیولې وي. که دا بیا یوبل ډول منطق وي، نو په هغې بیا زه نه پوهیږم، د ریاضي له منطق سره سر او کار نه لري.

**د شهودي درک استدلال**



پخوا تر ډیسر و پېر یو پورې خلکو فکر کاوه چې ځمکه هواره ده او ستوري د ځمکې پر شاوخوا غرخيږي.  
یا پوهيږي چې ځمکه کروي ده؟  
یا لمر د ځمکې پر شاوخوا او که ځمکه د لمر پر شاوخوا غرخيږي؟

**تعريف:** هغه طبیعي یا حسي پوهه چې دهغې په مرسته د یوې موضوع سموايي یا حقیقت او یا یو مفهوم پر ته له استدلاله قیلولو، له شهودي درک څخه عبارت ده چې کیدلای شي، دوخت په مختلفو مرحلو کې یوله بله سره توپیر ولري.

#### فعالیت

د لاندې شکل په نظر کې نیولو سره د مستقیم خط پر مخ د  $A$  او  $B$  دوی نقطې په پام کې ونیسئ:



یو سری غواړي چې ددې مستقیم خط پر مخ د  $A$  له نقطې څخه په دې ډول د  $B$  نقطې ته لاړشي چې د  $\overline{AB}$  د قطعه خط منځنی نقطه  $A_1$  کې توقف وکړي او بل وار چې د  $A_1$  نقطې ته رسیدلې دي، ددې لپاره چې د  $B$  نقطې ته ورسېږي، بیا د  $A_2$  په نقطه (د  $\overline{A_1B}$  د قطعه خط دتصیف نقطه) کې توقف وکړي، که په همدې ډول دوام ورکړي، نو لاندې پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ:

- ایا په پورته ډول چې د خط پر مخ د هرو دوو نقطو په منځنی نقطه کې توقف وکړي، پای لری؟
- که په همدې ډول تر پایه دوام ورکړئ، دا سری به د  $B$  نقطې ته ورسېږي؟
- که دا سری توقف و نه کړي او یا له لارې بیرته راونه گرځي، نو نه یوازې چې د  $B$  نقطې ته به ورسېږي، بلکې ترې تیر به هم شي. په دې اساس ددې مسألې د واقعیت او ستاسو د شهودي درک ترمنځ څه توپیر شته؟

- دویم زده کوونکي هم شوخي کړي ده.

- ناروغه دی، نه غواړي چې په ټولگي کې ولوسي.

له تعريف او د زده کوونکو له فعالیت څخه لاندې نتیجه پلاس راځي:

**نتیجه:** قیاس یا تمثیل په حقیقت کې د مختلفو مفهومونو په منځ کې دورته والي پیداکول دي. له دې سببه تمثیلونه کیدای شي، د ډیرو مفهومونو یا ریاضي د قضیو د درک کولو لپاره شهودي زمینه پیداکړي. تمثیلي استدلال د ثبوت په حیث نه شمارل کېږي، بلکې د ثبوت لپاره زمینه برابروي.

**لومړی مثال:** په علمه ژ به (مارخوړلی له برگ پرې څخه ډارېږي) دا یو قیاسي استدلال دی، ځکه چې برگ پری د مارسره پر تله شوی دی او دهغوی په منځ کې ورته والی لیدل شوی دی.

**استدلالی سوال**

یو زده کوونکی په لومړني صنفې ازمونه کې 100 نمرې اخلي او په دویم او دریم صنفې ازمونوکې هم 100 نمرې اخلي. په اخرني ازمونه کې څه نتیجه اخیستلای شئ چې دا زده کوونکی به خونمري واخلي؟



**فعالیت**

د مسلسلو طاقو طبیعي عددونو د جمعې حاصل په پام کې نیسو، ددې کار لپاره د یو 1 له عدد څخه پیل وکړئ او خالي ځایونه ډک کړئ

$$1+3 = \square = (\quad)^2$$

$$1+3+5 = \square = (\quad)^2$$

$$1+3+5+7 = \square = (\quad)^2$$

$$1+3+5+7+9 = \square = (\quad)^2$$

پورتنیو پوښتنو ته په پاملرنې سره لیدل کېږي چې د طاقو طبیعي عددونو د جمعې حاصل د طبیعي عددونو د شمیر له پوره مربع سره مساوي دی.

- آیا کولای شو نتیجه واخلو چې هر وخت د طاقو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل ددې عددونو د شمیر له مربع سره مساوي دی؟

- کونښی وکړئ له  $n$  طاقو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل لپاره فورمول په لاس راوړئ.

ډېورتني فعالیت د سرته رسولو په اساس لاندې نتیجه په لاس راځي:

**نتیجه:** استدلالی د یو شمیر مشاهدو پر بنسټ د عمومي نتیجې اخیستنې طریقه ده. په حقیقت کې یوې کوچنۍ نمونې ته په لویه نمونه عمومیت ورکول دي.

**لومړی مثال:** (موتی د خروار نمونه ده) دا خبره استدلالی ته اشاره کوي، ځکه په دې مثال

په هر صورت داپورته د پوهیدلو لپاره پوره ستونځې لري. د ریاضي منطق خورا ساده دی او زه له دې امله وړاندیز هم کوم، چې د اووم ټولګي په سر کې دي راشي.

## Was ist eigentlich ein algebraischer Ausdruck?

Statt Ausdruck kann man auch Term sagen: Es sind Summen und Produkte, die Variablen enthalten. Bei einem "algebraischer Ausdruck" kommen von den Variablen auch Potenzen vor. Haben alle Potenzen einen natürlichen Exponenten nennt man den algebraischen Ausdruck auch ganzrationalen Ausdruck oder Polynom in einer bestimmten Variable. Ein Bruch von zwei ganzrationalen Ausdrücken heisst ein gebrochen rationaler Ausdruck.

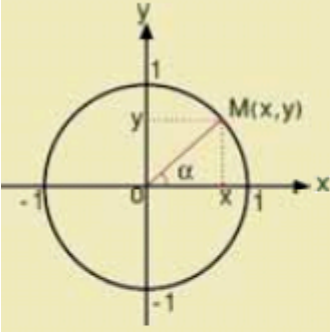
An algebraic expression that cannot be written as a quotient of [polynomials](#).

یولسم ټولگی

د ۱۱ - م ټولگی په درس کې د ترادفونو درس هم شامل دی. په ترادفونو کې هغه غوره او اصلي د څیړني موخه یې د ترادفونو پولې ته تلنه یا نه تلنه یا په انگریزي یې کونورگنت او دیوگنت دي، چې محترم لیکونکي دا هلته نه دي څیړلي.

**مثلثاتي مطابقتونه**

**Trigonometry identities**



پوهېږو چې  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  یو الجبري مطابقت دی، ځکه د  $a$  او  $b$  په ټولو قیمتونو سره د مساوات دواړه خواوې برابرېږي.

آیا  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  یو مثلثاتي مطابقت کیدلی شي؟

**فعالیت**

- په لاندې جدول کې د  $\alpha$  د مختلفو قیمتونو لپاره د  $A$  او  $B$  افادو قیمتونه بشپړ کړئ.

$\alpha$	$A = \frac{\cot \alpha}{\csc \alpha - 1}$	$B = \frac{\csc \alpha + 1}{\cot \alpha}$
----------	---	---

تعریف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاوې په ټولو قیمتونو سره ، د مساوات دواړه خواوې برابرې شي،

$$\frac{\cot \alpha}{\csc \alpha - 1} = \frac{\csc \alpha + 1}{\cot \alpha} \quad \text{مثلثاتي مطابقت بلل کېږي، لکه:}$$

دا برخه یې پوره نیمگړې پریښودې ده. د وکتور شمیرنه یې هم پوره او مناسب نه ده څیړلې. زه د ۱۱ - م ټولگی کتاب کې هندسي برخې ته داسې لږ ګوته نیسم:

۶۳ - مخ

ورکړشوی عنوان:  
مثلثاتي معادلي

• د  $\beta$  د مختلفو قیمتونو لپاره د  $1 + \tan^2 \beta = \sec^2 \beta$  او  $1 - 2 \sin \beta = 0$  ترمنځ څه ډول اړیکې شتون لري.

\_ آیا  $1 + \tan^2 \beta = \sec^2 \beta$  یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

\_ آیا  $1 - 2 \sin \beta = 0$  یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

**تعریف:** هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

هر مثلثاتي مطابقت یوه معادله کیدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کېدلای. هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په یو حالت باندې حلولای شو.

مطابقت خو مساوات یا معادله ده، نو دا پوښتنه ولې؟ پوښتنه هم باید د پوښتنې منطق ولري. پورته تعریف څخه داسې پوهیږو:

هغه مثلثاتي مساوات، چې ... د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي (د مساوات دواړه خواوې مساوي وي، دا د مساوات تعریف دی) مثلثاتي مساوات (معادلې) بلل کېږي.

مثلثاتي مساوات خو طبعاً مثلثاتي مساوات دي، که نه مثلثاتي مساوات مثلثاتي مساوات نه وي، نو بیا به څه وی؟

پورته پوښتنه شوې او له پوښتنې څخه یې لاس ته راوړنه بیا اعلان کړې. دا په دې معنا چې گوندې د پوښتنې له ځواب یې وروسته بیاتعریف تری لاس ته راوړي، او همداسې دا پورته تعریف کي چې څه راغلي، نه ژبه ده او نه ریاضي. روښانه ونه: که چېرې دوه الجبري افادې (دلته مثلثاتي افادې) د مساوات نڅښې له لارې سره تړلي وي، مساوات بلل کېږي. دلته مثلثاتي مساوات.

له یوې خوا مساوات او معادله هماغه معنا ورکوي، خو چې مور یې په افغانستان کې سره بیلوو، دا به ومانو، خو دا د مخه جمله وگورئ:،، مساوات... و چې .. د مساوات دواړه خواوې مساوي وي. ،، دا خو هیڅ نه وایي پرته له له دې چې مساوات، چې ... مساوات ... مساوات معادله بلل کېږي. که د پورته توپیر چا د دې لاندې سره و بنود. دا د مخه راغلی- نو ډېر به تکره وي. زه خو نه پرې پوهیږم او دا چې دې لیکي په دې هم نه پوهیږم.

**تعریف:** هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې په ټولو قیمتونو سره ، د مساوات دواړه خواوې برابرې شي،

$$\frac{\cot \alpha}{\csc \alpha - 1} = \frac{\csc \alpha + 1}{\cot \alpha} \quad \text{مثلثاتي مطابقت بلل کېږي، لکه:}$$

توپیر یې دا دی، چې په یوه کې ځنې او په بل ټول قیمتونه راغلي، خو مساوات خو لا له ورايه دي.

لومړی مثال: د  $\frac{\sin \alpha \cos \alpha \cdot \tan \alpha \cot \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$  مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

دویم مثال: د  $\sin^2 \beta \cdot \cot^2 \beta + \cos^2 \beta \cdot \tan^2 \beta + \tan^2 \beta = 1 + \tan^2 \beta$  مثلثاتي مطابقت ثبوت کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\begin{aligned} \sin^2 \beta \cot^2 \beta + \cos^2 \beta \tan^2 \beta + \tan^2 \beta &= \sin^2 \beta \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} + \cos^2 \beta \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \\ + \tan^2 \beta &= \cos^2 \beta + \sin^2 \beta + \tan^2 \beta = 1 + \tan^2 \beta \end{aligned}$$

دویم مثال: لاندې افاده د  $\cos \beta$  له جنسه حساب کړئ.

$$(1 - \sin^2 \beta) (1 + \sec^2 \beta) = ?$$

$$(1 - \sin^2 \beta)(1 + \sec^2 \beta) = \cos^2 \beta \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \beta}\right) = \cos^2 \beta \left(\frac{\cos^2 \beta + 1}{\cos^2 \beta}\right) = \cos^2 \beta + 1 \quad \text{حل:}$$

تريگونوميټريکي مساوات: یو تريگونوميټريکي مساوات هغه دی، چې په هغه کې د ټاکلکيدو متحوله د تريگونوميټريکي توابعو په مستقلة متحوله کې منځ ته راشي.

بيلگه:

تريگونوميټريکي مساوات

$$\sin x = \cos x$$

کې کيدی شي سړی د  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  اړیکو د بڼه بدلون له لارې و

$$\sin x = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

واړوي.

د مربع کولو له لارې لرو

$$\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$$

نودی

$$\sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

د دې حل سره

$$x = 45^\circ \pm k \cdot 90^\circ \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

همداسې د قوس اندازې له لارې

$$x = \frac{\pi}{4} \pm k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

دا چې مربع بڼه بدلون ورته يا اکويوالنت بڼه بدلون نه دی، نو دا حل بايد په وتونمسوات کې رښتيا وگڼل شي. له دې سره په وتونمسوات کې لاندې حل لاس ته راځي

$$x = \frac{\pi}{4} \pm 2k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

۷۰-م مخ

**لومړۍ حالت:** د  $a \sin \alpha + b = 0$  معادله د پورتنۍ معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پيدا کولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

پورته ليکنه د پوهيدلو نه ده. همداسې د لاندې هم د پوهيدلو څه نه لري.  
۷۳-م مخ

**څلورم حالت:** د  $\cot x + b = 0$  معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.  
**لومړۍ مثال:** د  $\cot x - 1 = 0$  معادله حل کړئ.

$$a \sin \alpha + b = 0$$

د سمون: لپاره به نسبتاً بڼه وای که داسې يې ليکلي وای: د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

مساوات

له يوې خوا څخه خو مساوات او معادله (Equation) همغه معنا ورکوي، خو چې مور يې په افغانستان کې سره بيلو، دا به و منو، خو دا د مخه جمله وگورئ:، مساوات... چې .. د مساوات دواړه خواوي مساوي وي. ،، دا خو هيچ نه وايي پرته له له دې چې مساوات، چې ... مساوات ... مساوات معادله بلل کيږي.  
بيا يې راوړو:

**تعريف:** هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ځينو قيمتونو سره د مساوات دواړه خواوي مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

دا به بې له رياضي داسې ووايو: زردالو ميوه، چې د دې ونې زردالو دی يا د دې ونې څخه راشکول شوی زردالو دی، وښايی، چې دا د دې ونې زردالو د دې ونې مندته ده (مور زردالو ته مندته وايو) .

۷۰-م مخ

**لومړۍ حالت:** د  $a \sin \alpha + b = 0$  معادله د پورتنۍ معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پيدا کولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

۷۳-م مخ

**څلورم حالت:** د  $\cot x + b = 0$  معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.  
**لومړۍ مثال:** د  $\cot x - 1 = 0$  معادله حل کړئ.

دا پورته ټول يو ډول بې څه ويني بيلگي دي.

۹۸-م مخ

## له یو بل سره د دوو مستقیمو کرښو نسبي حالت:

1- که چیرې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې شامل وي، نوموړي خطونه د هماغې مستوي خطونه بلل کېږي، او یو له لاندینیو حالتونو (وضعیتونو) څخه لري.

۱۰۰- م مح

### اوضاع نسبي دوو خط مستقیم با یکدیگر

هرگاه دو خط مستقیم در یک مستوی قرار گیرند، خطوط مذکور هم مستوی نامیده شده و یکی از وضعیت های زیر را دارا می باشند:

تر اوسه زموږ کار په مستوي کې دی او بل څه مو زده کړی ته نه دي رامنځ ته کړي، نو دا لیکنه ولې؟  
۱۰۴

### د قضیې پایله:

(i) که په ترتیب سره د دوو زاویو ضلعي موازي او هم لوري وي، نوموړي زاویې یو له بل سره مساوي دي.  
(ii) که د دوو زاویو یوه، یوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو یوه، یوه ضلع یې موازي او مختلف جهته (لوري) ولري، د دغو دواړو زاویو پراخوالي  $180^\circ$  دی. (ثبوت یې د زده کونکو دنده ده).

### د دوو متنافر و مستقیمو کرښو ترمنځ زاویه:

**تعریف:** په فضا کې د دوو متنافر و مستقیمونو ترمنځ زاویه له هغې زاویې څخه عبارت ده چې د یوې مستوي په یوه اختیاري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقیمونو د رسمولو په واسطه حاصلېږي

۱۰۶-م مخ گران لیکونکی د هندسې څیرو غږیږي، مگر عکس یې هیڅ ځای کې نه شته، چې دا پخپله درس د ناسمون سره مخامخ کوي او دا پورته د ،، قضیې پایله،، ناسمه ده. دا ۱۸۰ درجې نه ده. که چیرې گرام لیکونکی دې د دې څیره وباسي، نو وزته روښانه به شي..  
غوره یادونه: په زیاتو هندسي درسونو کې څیږي نه شته، چې دا هغه غوره نیمگرتیا بلل کېږي. دا په دې معنا چې درس ناسم دی.

### نتایج قضیه:

I- اگر اضلاع دو زاویه بالترتیب موازی و هم جهت باشند زوایای مذکور باهم مساوی می باشند.  
II- اگر یک یک ضلع دو زاویه موازی و هم جهت و یک یک ضلع دیگر آنها موازی و دارای جهات مخالف باشند. مجموع وسعت این دو زاویه  $180^\circ$  است، شاگردان نتایج را ثبوت کنند.

### زاویه بین دو خط مستقیم متنافر

**تعریف:** زاویه بین دو خط مستقیم متنافر در فضا عبارت از زاویه است که توسط ترسیم دو خط مستقیم موازی به آنها از یک نقطه اختیاری در یک مستوی حاصل می گردد.

**پایله:** که چیرې دیوه نامعلوم قیمت د پیدا کولو لپاره چې ددو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، په دې صورت کې نوموړې طریقه د خطي انټرپولیشن په نامه یادېږي. که یو څلور رقمي عدد لکه: 1.234 ولرو، نه شو کولای د هغه لوگاریتم له درې رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوگاریتم د خطي انټرپولیشن په واسطه پیدا کولای شو.

**د اکسپوننشل تابع خاصیتونه:** له تیرو معلوماتو څخه په گټه اخیستنې سره د اکسپوننشل تابع خواص په لاندې ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
2. هره اکسپوننشل تابع یوه یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

دا پورته ادعا چې گران لیکونکي د اکسپوننشل تابع لپاره کوي بیخي ناسمه ده. دا کیدی شي په هغه حالت کې صدق وکړي، چې برابر بنسټونه ولري. په داسې حال کې بیا د داسې ادعا راوړل نا اړین دي. که دا یوه الجبري تابع وي، نو د اینجکتیویني لپاره یې هم دا راورنه ناسمه ده، چې زه یې سمون په لاندې انگرېزي متن کې راوړم. ژباړې ته به یې اړتیا نه وي. یادونه: اکسپوننشل تابع الجبري تابع نه ده. دې ته ترانسځنډنت تابع وايي.

د لاندې انگرېزي ژباړه:  $f$  د یوه تابع وي، چې تعریفست یې  $A$  ده. تابع  $f$  د ټولو  $a$  او  $b$  لپاره چې په  $A$  کې دي، اینجکتیو ده ټیک هلته او هلته (ژباړي: یا هلته او په ځنډ یا دران جای و برعکس) که  $f(a) = f(b)$  وي، ځکه چې  $a=b$  ده، دا دی، له  $f(a) = f(b)$  لرو  $a = b$ . دې ته ورته یا دې ته ایکویوالنت یا هم ارزښته، که  $a \neq b$ ، نو  $f(a) \neq f(b)$ .

سیمبولیک،

$$\forall a, b \in A, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

کوم چې منطقي ایکویوالنت یا برابر ارزښته دی و کونترا پوزیتیو یا برعکس ته

$$\forall a, b \in A, a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

څیره یې لاندې شته

### Definition[\[edit\]](#)

For more details on notation, see [function\(mathematics\) § notation](#).

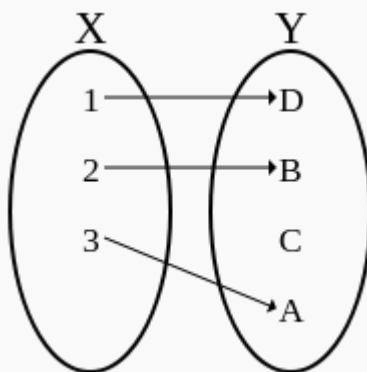
Let  $f$  be a [function](#) whose [domain](#) is a set  $A$ . The function  $f$  is **injective** if and only if for all  $a$  and  $b$  in  $A$ , if  $f(a) = f(b)$ , then  $a = b$ ; that is,  $f(a) = f(b)$  implies  $a = b$ . Equivalently, if  $a \neq b$ , then  $f(a) \neq f(b)$ .

Symbolically,

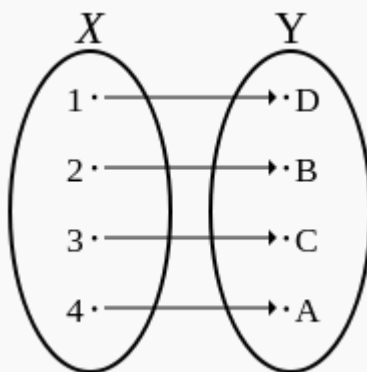
$$\forall a, b \in A, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

which is logically equivalent to the [contrapositive](#),

$$\forall a, b \in A, a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$



An injective non-surjective function (not a [bijection](#))



وايي چي موتی د خروار نمونه ده. دا بسيا کوي. نورې ليکنې هم په همدې توگه دي.

د ۱۲ ټولگي کتاب منځپانگي ته داسي ځغلند نظر او ټيکاوې يې:

دا چې ليکوالانو د دې لپاره، چې له ټولې يا ليميټ څخه پيل وکړي، له رديفون يا ترادفونو (پرله پسو) څخه يې پيل کړي او د همدې د پيل مخ څخه يې ناسم ليکلی. دا موضوع بايد په يولسم ټولگي کې په پوره پيمانه څيړل شوي وي، مگر هلته هم دا کار پوره نيکړی شوی. د پرلپسوي څيړنه ځکه اړيینه ده، چې و پوهيږو، د ناپاي غرو (دوی يې حدونه او يا جملې بولي) سره ترادف چيرته ځي، يوي ټولې ته ځي، له ټولو ټولو اوږي او که مبهمه يا ناتاکلي ټولې لري. په دې هکله د يولسم ټولگي ليکوالانو دا برخه پوره نيکړي پرېښودلې يا هغه اړيین څه يې هيڅ نه دي راوړي، چې زه دلته اوس په دې هکله پوره خبرې نه کوم او راځم د ۱۲ -م ټلگي کتاب ته.

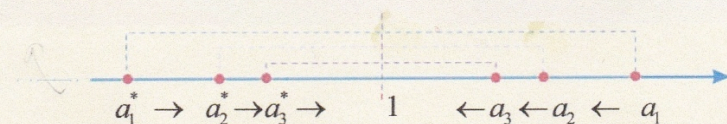
د دولسم ټولگي کتاب:

لومړي: په دولسم ټولگي کې پيل له ترادفونو شوی او په سر کې يې دوه ترادفونه راوړي او دا يې بيا په يوه گراف يا کرښه د بني او کيني لورې يوي ټولې ته ځغلولي. د کتاب ۳ -م مخ

**پایله:** لیدل کېږي، چې د  $a_n$  ترادف له بني لوري څخه د 1 او د  $a_n^*$  ترادف له کین لوري څخه د 1 عدد ته د  $n$

په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنی:

د  $a_n$  ترادف کله چې  $n$  بې نهایت ته تقریب وکړي، مساوي په (1) سره کېږي او همداشان د  $a_n^*$  د ترادف  $n - 1$  ام حد که  $n$  بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لېمیت مفهوم مو ښه څرگند کړي وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د گراف په پام کې نیولو سره تر څیړنې لاندې نیسو.

زه پوهیږم، چې دا کار دې درنو لیکوالانو ولې کړی؟

له همدې پیله روښانېږي، چې محترم لیکونکي د درس سره کومه بلدتیا نه لري.

په پورته کې دا دوه پرلپسې هیڅکله له 1 « سره نه برابریږي، لکه ښاغلی لیکوال چې لیکي.

پسې یې بیا د پرلپسې یا ردیفونو لپاره بیل بیل گرافونه کښلي.

په پرلپسېو یا ردیفونو کې چې مور لیمت راوړو، نو موخه ترې د پرلپسې کونورگنت او دیورگنت دي. په پرلپسې کې

اړین نه ده، چې د کونورگنت حالت کې دې پرلپسې له دواړو لورو پولې ته لاړ شي، خو داسې پرلپسې شته او هغه یو

ترادف دی نه دوه.

دویم: دا لاندې څه چې راغلي، هم کوم درس پورې اړوندوالی نه لري، همداسې څه یې لیکلي. دی د ناسم د ترادف درس

څخه سملاسي داسې یوې موضوع ته راغلی او بیا د بني او کین لوري لیمیت ته راځي او که وکتل شي، نو په لیکنو کې

کوم توپیر نه شته. دلته د زده کړې څه نه لیدل کېږي او دا اخره کرښه یې داسې ده، چې په دې موضوع کې کومه پوهه

هم نه لري.

که چیرې دا ټیک هم وي، نو ځای یې بې ځایه ځکه راوړي، چې د بني او کینې لور لیمتونه، چې هلته هم ناسم دي، په

اووم مخ کې څیړل (که چیرې څیړنه یې وپولو)

په لاندې کې، د متحول تقریب، یعنی څه؟ دا هیڅ مفهوم یا ترې پوهیدنه نه لري. که ... ترادف وي هم باید د ترادف په

ډول ولیکل شي او که تابع وي هم باید د تابع په ډول ولیکل شي.

**د متحول تقرب:** ویل کېږي چې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې  $x$  په اختیاري ډول د  $a$  عدد ته نږدی کېږي، یعنې د  $x$  او  $a$  ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد ( $\delta > 0$ ) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0: |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{یا} \quad x \rightarrow a \quad \text{یا} \quad |x-a| \rightarrow 0$$

**له بني لوري د متحول تقرب:** ( $x \rightarrow a^+$ ) که چېرې د  $x$  د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د  $a$  اختیاري عدد ته نږدی شي.

$$x: a+0.1, a+0.01, a+0.001, a+0.0001, \dots \rightarrow a^+$$

**له کین لوري د متحول تقرب:** ( $x \rightarrow a^-$ ) که چېرې د  $x$  د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي په داسې حال کې چې  $x$  په تدریجي ډول د  $a$  اختیاري عدد ته نږدی شي.

$$x: a-0.1, a-0.01, a-0.001, a-0.0001, \dots \rightarrow a^-$$

نو د  $x$  د متحول تقرب د  $a$  عدد ته معادل دی د  $x$  د متحول تقرب له بني لوري او د  $x$  د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$$

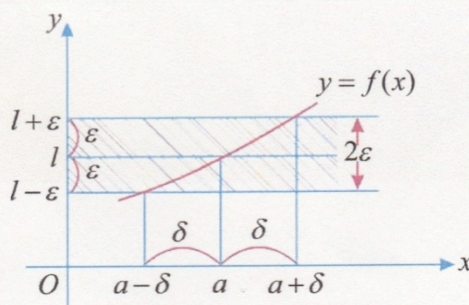
$$\forall \delta > 0: |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{یا} \quad x \rightarrow a \quad \text{یا} \quad |x-a| \rightarrow 0$$

ډول لیکنو سره گران لیکونکي بلدتیا نه لري او نه داسې څه د مخه راغلي، چې روښانه شوي وي داسې لیکني د ښوونځیو لپاره ستونځمنې دي. له دې امله ما هم په خپلو لیکنو کې نه وي راوړي. گورو چې د کتاب ناسمونکې هم دا څه ناسم یا بي له تشریح کارولي. په دې هکله زما لیکنه په لاندې کې شته.

دریم: په لاندې تعریف کې د پوهیدلو څه نه شته او په دې ریاضیکي تعریف خو نه پوهیږي، ځکه چې په لاندې بي د پوښتنې د حل نتیجه راوستلې او دا بحث له دې سره په رښتیا کې هیڅ سر او کار نه لري.

**تعریف:** که چېرې د  $f(x)$  تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د  $a$  عدد په هغې کې گډون لري کیدای شي چې تابع په  $a$  کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته نږدی شي نو د  $f(x)$  تابع د  $l$  عدد ته نږدی کېږي، نو ویل کېږي چې د  $f(x)$  تابع لېمیت عبارت له  $l$  څخه دی، کله چې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته

$$\text{تقرب وکړي نو داسې بي لیکو: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad f(x) \rightarrow l \quad \text{کله چې } x \rightarrow a$$



$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow (|x-a| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x)-l| \rightarrow 0)$$

دا سومبولونه  $\forall$  او  $\exists$  نه دي بنوول شوي، چې څه شی دی او څه بلل کيږي. بناغلي لیکونکی په اووم مخ کې بیلگه راوړي او بیا دا بنايي، بني او کيني لوري ليميت يې شميري.

باید د  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$  لپاره  $x \neq 3$  وليکي، چې هلته فنکشن تعريف نه دی. دی بیا په ناسمه توگه په جدول کې ليکي. دا چې دا باید څنگه وليکل شي، زماپه لیکنو کې شته.

دويمه بېلگه: ونيی چې  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$  سره دی.

حل: د بني او کيني خوا لېميتونه تر څپرني لاندې نيسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3 <sup>+</sup>
f(x)	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ 
  

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3 <sup>-</sup>
f(x)	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ 

ليدل کېږي چې د بني خوا او کيني خوا لېميتونه سره مساوي دي، نو  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$  دی.

په پورته کې  $x$  د 3 قيمت نه شي اخستلی، هلته فنکشن تعريف نه دی، نو له دې امله په جدول کې، نه د بني لوري او نه د کيني لوري دا ارزښت 3 اخستلی شي، هلته 3 ته ور نږدې کيږي. د بيلگې حل يې هم بيا سم نه دی کړي، په هغه ورسره بلده لار. دا هغه د کاغي او د زرکي خبره ده.....

**دويمه طريقه:** د لېميت د تعريف په پام کې نيولو سره فرضوو چې د هر اختياري کوچني عدد  $\varepsilon$  لپاره يو  $\delta$  شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = \left| \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} - 6 \right| = |x + 3 - 6| = |x - 3| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \delta$$

د بيلگې د حل نتيجه

$$\varepsilon = \delta$$

دا د دی بحث سره سر او کار نه لري يعني دا مو موخه نه ده، نو باید ووايم، چې دروند لیکونکي د موضوع څخه بوي هم نه وړي. (بخښنه دې وي، که زما لیکني داسې لږ توندي برېښي) او بي خايه مخ ته ځي، چې څه تری پوهيدل کيږي هم نه.

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومېږي چې  $\varepsilon$  له  $\delta$  سره اړیکه لري، که  $\delta$  ته قيمت ورکړو  $\varepsilon$  قيمت اخلي او که  $\varepsilon$  ته قيمت ورکړو  $\delta$  قيمت اخلي، بنا پر دې هغه تعريف چې د لېميت لپاره موجود دی سم دی او تابع لېميت لري، يعنې:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

دې پورته ته په لنډه توگه زما نوره لیکنه او ټيکاوې:

د کتاب په پيل کې راوړل شوي د مترادف يا پرلپسي موضوع باید د يوولسم ټولگي کتاب کې پوره څيړل شوي وي، مگر هلته يې يواځې دا نومونه راوړل شوي او نور لیکونکي - بي له دې، چې د موضوع اړين څه راوړي - له موضوع څخه تير شوی.

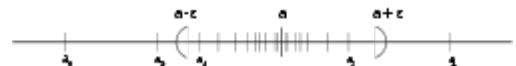
د دې موعوع څخه موخه د مترادف پولي ته تلنه يا کونورگنت او له پولي اووښتنه يا ناپای ته تلنه يا ډيورگنت او... دي، چې بي له دې په رښتيا کې د مترادف يا پرلپسي څيړنه کوم غوره والی يا اهميت نه لري، يعنې خپله موخه له لاسه

ورکوي. دا د یوولسم توکي د ترادف درس، نو په رښتیا کې خپل غوره والی او اړینوالی له لاسه ورکوي. نور سموالي او ناسمالي ته یې گوته نه نسیم، همدا بسیا کوي، چې څه په کې نه دي ویل شوي یا لیکل شوي.

د ۱۲ -م ټولګي کتاب ته:

یادونه: دا چې گومان کېږي د داسې لیکنو سره به بلدتیا لږ وي، نو تشریح به راڅخه لږ ډېره شي.

د ،، پوله ارزښت،، په څیره کې ښوونه



که  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  د حقیقي اعدادو (ګڼونو) ترادف یا پرلپسې وي، نو عدد  $a \in \mathbb{R}$  د دې ترادف یا پرلپسې پوله ارزښت بلل کېږي او پرلپسې  $a$  ته کونورګیر کېږي یا  $a$  ته هڅیږي یا نږدې کېږي، که د هر  $\varepsilon > 0$  لپاره په انټروال  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  کې له یوه اندکس یا پیژندنځېنې اخوا یا وروسته یا پسي د پرلپسې یا ترادف ټول غړي (دوي یې حدونه یا جملې بولي، نه پوهیږم ولې؟) د انټروال په دننه کې او فقط پای ډېر غړي له انټروال څخه دباندې پراته وي.

(دنورې اوږدې روښانه ونکې شنه څخه تیریرم)

لنډ پیژند یې:

عدد  $a \in \mathbb{R}$  د ترادف  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  پوله بلل کېږي، که د ټولو  $\varepsilon > 0$  لپاره یو طبیعي یا پیدایښتي عدد  $N$  شتون ولري، داسې چې  $|a_n - a| < \varepsilon$  باور ولري، که  $n \geq N$  وي.

دا پیژند راکوي، چې: د هر  $\varepsilon > 0$  لپاره یو ایندکس  $N$  شته، داسې چې له دې ایندکس یا پیژندنځېنې وروسته د پرلپسې (ترادف) ټول غړي د  $\varepsilon$  څخه په کم واټن له  $a$  لري پراته دي یعنې له  $\varepsilon$  څخه چې  $a$  ته څومره نږدې دی دا نور هم  $a$  ته نږدې دي.

د  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  د پولي ارزښت لیکلو لپاره خپل ځانله سومبول لرو:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

د دې لیکنود سره سم د یوې پرلپسې پوله ارزښت تعریف داسې رالښوولی شو:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

د داسې لیکنو لپاره د  $\varepsilon$  (لوسټل: ایپسیلون) توری ورځنی یا مروج شوی.

**بیلګه:**

په یوه بیلګه کې یې روښانه کوو:

د دې لپاره چې د  $\frac{1}{n}$  پرلپسې یا ردیف و  $0$  ته کونورګنت وښایو، یو د مخه ورکړ شوي  $\varepsilon$  ته یوه په خوښه طبیعي عدد یا ګڼ  $N$  ټاکو، چې له  $\frac{1}{\varepsilon}$  لوی وی، نو د ټولو  $n > N$  لپاره باور لري:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

موضوع اوردولی نه شم، ځکه چې دا یو درس نه دی، دا فقط په موضوع داسې لږ رڼا اچونه ده.

د فنکشن پوله ارزښت:

یادونه: د دې ۱۲ - م ټولګي د درس دا هغه اصلي موضوع ده.

د فنکشن پوله ارزښت په لاندې توګه پیژنو یا تعریفوو:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

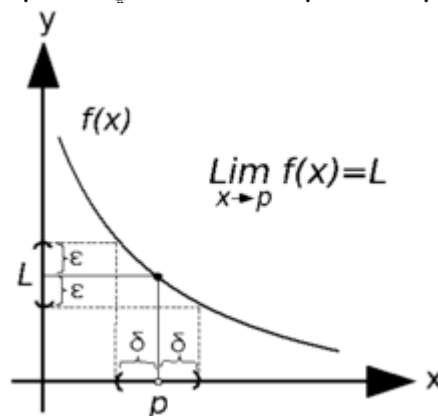
پیژند: د فنکشن  $f$  پوله ارزښت، د  $x$  لپاره چې  $p$  ته نږدې کیږي،  $L$  دی او داسې یې لیکو:

لوسنل یې هم همداسې دي لکه پورته تعریف

داسې یې شمیرپوهنیز لیک دود باندې تعریفوو:

فنکشن  $f$  پوله ارزښت  $L$  لري، که د هر  $\varepsilon > 0$  لپاره یو  $\delta > 0$  شتون ولري، داسې چې د هر  $x$  لپاره د  $0 < |x-p| < \delta$  سره  $|f(x)-L| < \varepsilon$  هم باور ولري.

د پورته شمیرپوهنیز یا ریاضیکي فنکشن پوله ارزښت لپاره لاندې څیره



پورته دوه تعریفونه برابر ارزښته دي یعنې له یوه څخه بل لاس ته راځي او په څنټ یا برعکس یعنې لیکو: تعریف: د فنکشن  $f$  پوله ارزښت، چې  $x$  و  $p$  ته نږدې کیږي،  $L$  دی، ټیک هلته یا هلته او هلته یا هلته او په څنټ، یا له دې لاس ته راځي او په څنټ یا برعکس چې د هر  $\varepsilon > 0$  لپاره یو  $\delta > 0$  شتون ولري، داسې چې د هر  $x$  لپاره د  $0 < |x-p| < \delta$  سره  $|f(x)-L| < \varepsilon$  هم باور ولري.

دلته هم په همدومره بسیا کوو، که څه هم روښانه کیدل نورې شننې ته هم اړتیا لري.

دې ته دلته په اخر کې بیا ګوته نیسم، چې دا شمیرپوهنیز یا ریاضیکي ډول لیکنې ستونځمنې دي او باید ترې تیر شو، د ترادفونو او فنکشنونو لپاره.

دا نور پاتې درس هم په همدې ترتیب ګران لیکونکي لیکلی چې زه نور پرې نه غږیږم. دا بسیا کوي، چې کتاب د ښوونځیو څخه راټول شي او له سره ولیکل شي.

ستاسو له سرې سینې څخه - که ومو لوسته- ډېره مننه.

ستاسو ډاکټر ماخان شینواری.



**Thank you for reading**

Find more e-books and articles on Ketabton - your multilingual digital library.

**[www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)**

*Ketabton - Pashto, Farsi, Arabic & English*