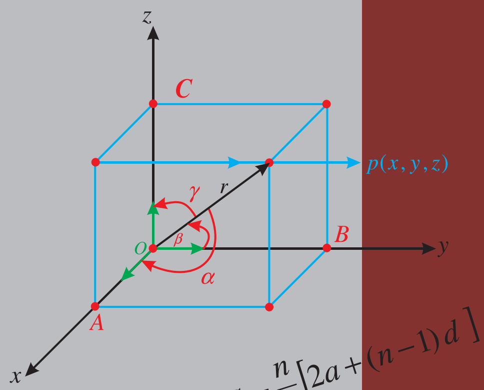
د پوهنې وزارت

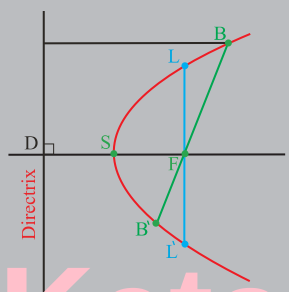
د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس
د مرکز معینیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

ریاضي ۱۱

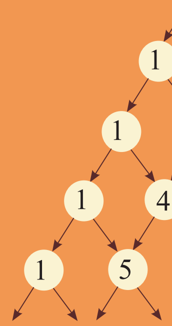
ټولګی



$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$



ریاضي ۱۱ ټولګی



ره لري. پیرودل
ونکو سره به بي

د چاپ کال ۱۳۹

د پوهنې وزارت

د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزنې او

د ساينس د مرکز معينيت

د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف

لوی رياست

رياضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ. ش.

ليکوالان:

- پوهنمل طلاباز حبيب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړی
- مهربه ناصر د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړې
- پوهندوی خالقداد فيروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړی
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی

ژباړونکي:

- سرمؤلف نظام الدين د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی
- پوهنمل طلاباز حبيب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړی
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی
- مختار نويد د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی

علمي او مسلکي ايډيټ:

- ډاکټر عطاء الله واحديار د پوهنې وزارت ستر سلاکار او د نشراتو رئيس.
- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوی رياست کې.
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی

د ژبې ايډيټ:

- محمد قدوس ذکوخيل

ديني، سياسي او کلتوري کميټه:

- مولوي عبدالوکيل د اسلامي تعليماتو علمي غړی.
- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوی رياست کې.

د څارنې کميټه:

- دکتور اسدالله محقق د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزنې او د ساينس مرکز معين
- دکتور شېر علي ظريفي د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستيال عبدالظاهر گلستاني د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوی رئيس

طرح او ډيزاين:

وليد «نويد» نسيمي

بسم الله الرحمن الرحیم

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی   دا عزت د هر افغان دی

کور د سولې کور د تورې   هر بچی یې قهرمان دی

دا وطن د ټولو کور دی   د بلوڅو د ازبکو

د پښتون او هزاره وو   د ترکمنو د تاجکو

ورسره عرب، ګوجر دي   پامیریان، نورستانیان

براهوي دي، قزلباش دي   هم ایماق، هم پشه یان

دا هیواد به تل ځلیږي   لکه لمر پر شنه آسمان

په سینه کې د آسیا به   لکه زړه وي جاویدان

نوم د حق مودی رهبر   وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزير پيغام

ګرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختيا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعليمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختګ او ټولنې د اړتياوو له مخې رامنځته کيږي. ښکاره ده چې علمي پرمختګ او ټولنيزې اړتياوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعليمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښايي چې تعليمي نصاب د سياسي بدلونونو او د اشخاصو د نظريو او هيلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتيب شوی دی. علمي ګټورې موضوعګانې پکې زياتې شوې دي. د زده کړې په بهير کې د زده کوونکو فعال ساتل د تدريسي پلان برخه ګرځېدلې ده.

هيله من يم دا کتاب له لارښوونو او تعليمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د ميتودونو د کارولو له لارې تدريس شي او د زده کوونکو ميندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکيفيته ښوونه او روزنه کې پرله پسې ګډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هيلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې برياوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ ګران ښوونکي د تعليمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤوليت په ريښتوني توګه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زيار کاږي چې د پوهنې تعليمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دين له بنسټونو، د وطن دوستی د پاک حس په ساتلو او علمي معيارونو سره سم د ټولنې د ځرګندو اړتياوو له مخې پراختيا ومومي.

په دې ډګر کې د هېواد له ټولو علمي شخصيتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له ميندو او پلرونو څخه هيله لرم چې د خپلو نظريو او رغنده وړانديزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تآليف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتيب کې يې مرسته کړې، له ملي او نړيوالو درنو مؤسسو، او نورو ملګرو هېوادونو څخه چې د نوي تعليمي نصاب په چمتو کولو او تدوين او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې يې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزير

لړلیک

سرلیک	مخونه
لومړی څپرکی مخروطي مقاطع	
مخروطي مقاطع	۳
بیضوي	۵
د بیضوي معادله	۹
د بیضوي معادله چې مرکز یې یو کیفي ټکی وي	۱۳
پارابولا	۱۷
د پارابولا معادله	۱۹
د هغې پارابولا معیاري معادله چې راس یې یو اختیاري ټکي وي	۲۳
هایپربولا	۲۷
د هایپربولا معادله	۲۹
د هغې هایپربولا معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي	۳۳
دیوې کربنې مو قعیت نظرمخروطي مقاطعو ته	۳۷
د څپرکي مهم ټکي	۴۱
د څپرکي پوښتنې	۴۴
دویم څپرکی مثلثات	
د ساین قانون	۴۹
د کوساین قانون	۵۵
د ټانجنټ قانون	۵۹
مثلثاتي مطابقتونه	٦۳
مثلثاتي معادلې	٦۹
دویمه درجه مثلثاتي معادلې	۷۵
د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو یا سیستمونوحل	۷۹
د څپرکي مهم ټکي	۸۹
د څپرکي پوښتنې	۹۱

دریم څپرکی فضايي هندسه

- اساسي مفاهیم او اکسیومونه ۹۵
- په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي ۹۷
- په فضا کې موازي مستقیمونه ۱۰۱
- په فضا کې د دوو مستقیمو کرښو تر منځ زاویه ۱۰۳
- په فضا کې موازي مستقیمونه او موازي مستوي‌گانې ۱۰۵
- په فضا کې متعامدې مستقیمې کرښې او مستوي‌گانې ۱۰۷
- په فضا کې موازي مستوي‌گانې ۱۰۹
- د څپرکي مهم ټکي ۱۱۱
- د څپرکي پوښتنې ۱۱۳

څلورم څپرکی ترادفونه

- ترادفونه ۱۱۷
- حسابي ترادف ۱۱۹
- هندسي ترادف ۱۲۷
- د ترادفونو قسمي مجموعه ۱۳۳
- د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي مجموعه ۱۳۷
- د یوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل ۱۴۱
- لایتناهي هندسي سلسلې ۱۴۳
- د څلورم څپرکي مهم ټکي ۱۴۷
- د څپرکي پوښتنې ۱۴۹

پنځم څپرکی لوګاریتم

- اکسپوننشیل تابع ګانې ۱۵۳
- لوګاریتم ۱۵۷
- لوګاریتمي تابع ګانې ۱۵۹
- معمولي لوګاریتم ۱۶۳
- د لوګاریتم قوانین ۱۶۷
- د لوګاریتم د قاعدې اړول په بله قاعده ۱۷۱
- کرکټرستیک او مانتیس ۱۷۵
- د لوګاریتم جدول ۱۷۹
- انتي لوګاریتم ۱۸۳
- خطي انټرپولېشن ۱۸۵
- د لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو حل ۱۸۹
- دریاضیکی عملیوپه سرته رسولوکې له لوګاریتم څخه کار اخېستنه ۱۹۳
- د څپرکي مهم ټکي ۱۹۷
- د څپرکي پوښتنې ۱۹۹

شپږم څپرکی متريکسونه

- متريکسونه ۲۰۵
- د متريکسونو ډولونه ۲۰۹
- د متريکسونو جمع او تفريق ۲۱۳
- په متريکس کې د سکالر ضرب ۲۱۵
- د دوو متريکسونو ضرب ۲۱۷
- د يوه متريکس ترانسپوز متريکس ۲۲۱
- ديترمينانت ۲۲۳
- د ديترمينانت خاصيتونه ۲۲۷
- د 2×2 مرتبې متريکسونو ضربي معکوس ۲۲۹
- له معکوس متريکس څخه په کاراخيستنې د خطي معادلو د سيستم حل ۲۳۱
- د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه ۲۳۵
- د معادلو د سيستم حل د ګوس(Gouse) په طريقه ۲۳۹
- د شپږم څپرکي مهم ټکي ۲۴۳
- د څپرکي پوښتنې ۲۴۵

اووم څپرکی وکتورونه

- د وضيعه کميتونو په قايم سيستم کې وکتورونه ۲۴۹
- د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی ۲۵۱
- وکتورونه په سطح او فضا کې ۲۵۳
- په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات ۲۵۵
- د يوه وکتور د جهت زاويې او کوساينونه ۲۵۹
- د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل ۲۶۱
- د وکتوري ضرب حاصل ۲۶۵
- د څپرکي مهم ټکي ۲۷۵
- د څپرکي پوښتنې ۲۷۷

اتم څپرکی احصایه

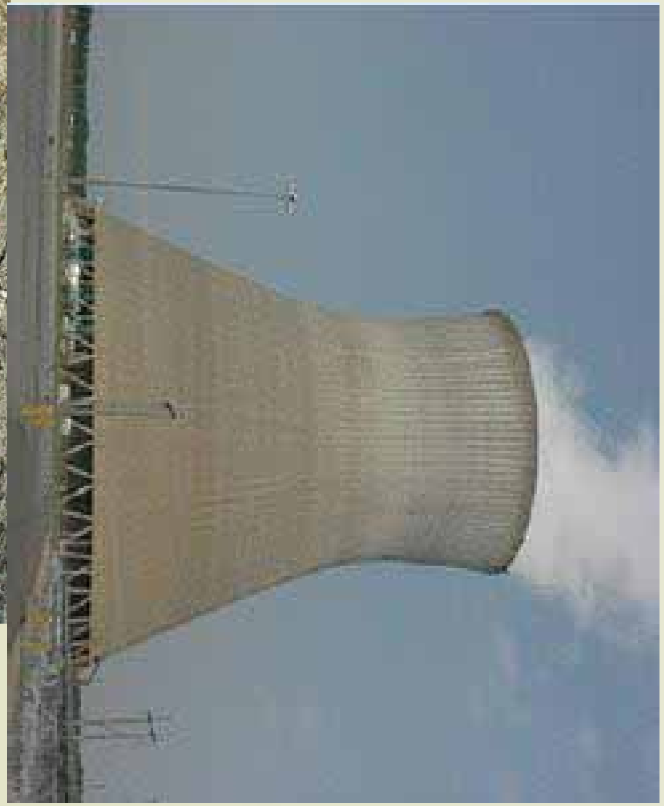
- دبدلونونو ضریب ۲۸۱
- په نورمال منحني کې پراګنده ګي(تېتوالی) ۲۸۳
- دنورمال توزیع دډول شاخصونه ۲۸۵
- څو متحوله ټولنې ۲۸۷
- د پراګنده ګي ګراف ۲۸۹
- پیوستون او دپیوستون ضریب ۲۹۱
- د خطي میلان معادله ۲۹۵
- د اتم څپرکي مهم ټکي ۲۹۹
- د څپرکي پوښتنې ۳۰۱

نهم څپرکی احتمالات

- پرموټېشن یا ترتیب ۳۰۵
- ترکیب یا کمبنیشن ۳۰۹
- ترکیب ۳۱۱
- تبدیل ۳۱۳
- د بینوم قضیه ۳۱۷
- دوه جمله یي احتمال ۳۱۹
- د څپرکي مهم ټکي ۳۲۳
- د څپرکي پوښتنې ۳۲۴

لومړی څپرکی

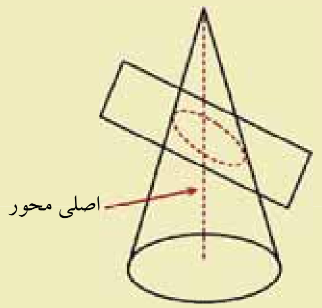
مخروطي مقاطع



مخروطي مقاطع

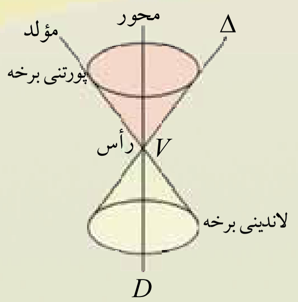
sections of Conic

آیا ویلای شئ چې د یوې مستوي او مخروط د تقاطع له ګډ فصل څخه څه ډول منحنۍ ګانې په لاس راځي.



د مخروطي مقاطعو تعریف

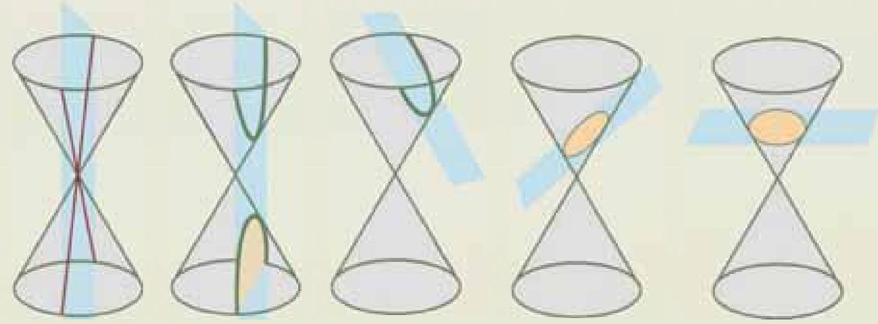
د Δ او D دوه مستقیم خطونه داسې په پام کې نیسو چې یو بل د V په ټکي کې قطع (پرې) کړي. که چیرې د D خط ثابت او د Δ خط د هغه په چاپېرو څرخیږي، له دې څرخولو څخه په فضاکې دوه شکلونه چې یو یې د V (ټکي) پورته او بل یې د V د ټکي کښته خواته جوړیږي. هر یو یې مخروط دی، لکه مخامخ شکل د D مستقیم خط د مخروط محور او د Δ مستقیم خط د هغه مولد دی. د یوې مستوي په واسطه د یوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفې منحني ګانې منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کیږي. په راتلونکې کې به هر یو په تفصیل سره ولوستل شي.



فعالیت

- یو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلي محور باندې عمود او یا له قاعدو سره موازي وي، ویلای شئ، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې د مستوي او مخروط له اصلي محور سره یې زاویه قایمه نه وي (نسبت اصلي محور ته مایل)، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره موازي وي، تقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه یې سر په سر (منطبق) او قاعدې یې موازي وي، د یوې متسوي په واسطه چې اصلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ویلای شئ چې له ګډ فصل څخه یې څه ډول منحني په لاس راځي؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط اصلي محور په بر کې ولري، تقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نو ګډ فصل یې یوه دایره ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي اومخروط له اصلي محور سره یې زاویه قایمه نه وي، (مایل) لاس ته راغلي شکل الیپس (Ellipse) یا بیضوي ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړي وي چې اصلي محور ته موازي او هغه په برکې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له ګډ فصل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوې مستوي دوه سر په سر یا څوکه په څوکه مخروطونه چې اصلي محور ته موازي وي قطع کړي وي، له ګډ فصل څخه یې هایپربولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي اصلي محور په برکې ولري، نو ګډ فصل یې له دوو متقاطع کرښو څخه عبارت دی. چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوي دي.

پوښتنې

1- د پورتني شکل په پام کې نیولو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې ګډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.

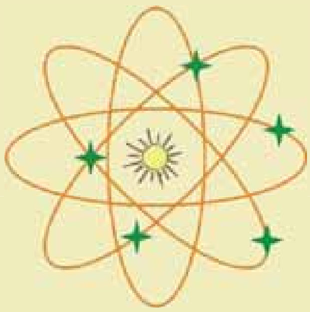
2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکه په څوکه مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

3- د یوې مستوي او مخروط ګډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په دې حالت کې شکل رسم کړئ؟

بیضــوي

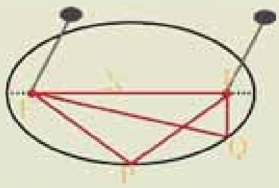
Ellipse

د سیارو حرکت د لمر په شاوخوا یا شمسي نظام څه ډول منحني ګاني جوړوي؟



فعالیت

- د یوې سپینې کاغذي پاڼې پر مخ دوه ستنې په یوه معین او ثابت واټن سره د F او F′ په دوو ټکو کې وټومبئ.
- د یو تار څوکې چې اوږدوالی یې د $\overline{FF'}=2c$ څخه زیات دي، په دواړو ستنو کې وتړئ، د لاندې شکل په پام کې نیولو سره یو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وڅرخوئ.
- هغه شکل چې د یوې بشپړې دورې په لاس راځي څه ډول منحني ده؟

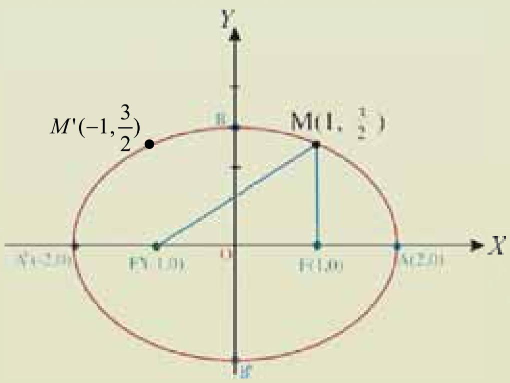


له پورته فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

پایله: هغه شکل چې ددوو ستنو تر منځ د معین او ثابت واټن په اندازه د تار په غاړه د پنسل له څرخولو څخه په لاس راځي، د الپس منحني بلل کیږي، د F او F′ ټکي د الپس د محراقونو په نامه یادیږي.

فعالیت

- په مخامخ شکل کې د F،F′، M،M′، A′ او A ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو فارمول څخه په کار اخیستنې د $|MF'|$,$|MF|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پیدا کړئ او بیا د $|AA'|$ او $|MF|+|MF'|$ اوږدوالي یو له بل سره پرتله کړئ.



- د $M'(-1,\frac{3}{2})$ ټکی د الپس په محیط باندې په نښه او همدارنګه د M′ ټکی هم په پام کې ونیسئ.
- وروسته د $|M F'| + |M F|$ او $|M' F| + |M' F'|$ قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

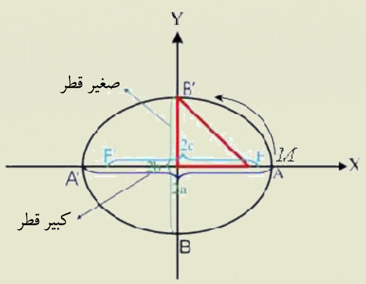
له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ځای پر ځای ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی ولري، بیضوي بلل کیږي، مستقر ټکی چې په F او F′ تورو ښودل شوي، د الپس محراقونه او A', A د الپس راسونه چې $AA' = 2a$ ثابت اوږدوالی دی.

$$|M'F| + |M'F'| = 2a \quad , \quad |MF| + |MF| = 2a$$

$$|M'F| + |M'F'| = |MF| + |MF'| = 2a$$

د الپس قطرونه او راسونه:



الپس بې شمیره قطرونه لري، لوی یې کبیر قطر یا اوږد قطر چې له محراقونو څخه تیرېږي او بیضوي په دوو ټکو د A', A کې قطع کوي، د کبیر قطر یا Major axis په نامه او کوچنی قطر یې د FF′ د نیمایي په ټکي عمود دی چې د صغیر قطر یا Minor axis په نامه یادیږي. د A, A' او B, B' ټکی د الپس راسونه دي، کبیر قطر په A, A' چې اوږدوالی یې یعنې $AA' = 2a$ او صغیر قطر په B, B' چې اوږدوالی یې $BB' = 2b$ دی، ښودل کیږي.

یادداښت

که چېرې د M ټکی د صغیر قطر په راسونو یعنې په B یا B' باندې منطبق شي، په دې صورت کې له پورته شکل څخه لیکلای شو: $\overline{MF} = \overline{MF'}$

له بلې خوا پوهیږو چې:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a$$

$$\overline{MF} = a$$

د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه:

د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړیکي د فیثاغورث د قضیې له مخې لیکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

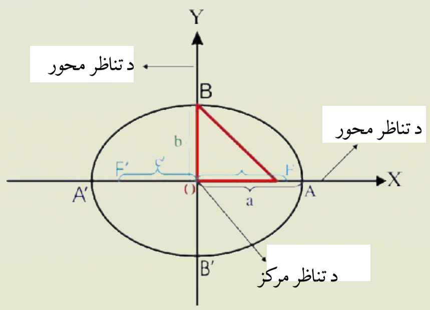
$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

د الپس تناظري مرکز او تناظري محور:

الپس دوه تناظري محورونه لري چې یو یې لوی محور د $A\ A'$ پر قطر باندې منطبق دی چې محراقي محور هم بلل کیږي او بل یې کوچنی تناظري محور چې د $B\ B'$ پر قطر باندې منطبق دی.

د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی د الپس تناظري مرکز بلل کیږي او په (O) سره ښودل کیږي.



$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$

$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$

$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

عن المرکزیت (**Eccentricity**): د یوې بیضوي شکل د عن المرکزیت په واسطه ټاکل کیږي عن المرکزیت د محراق او لوی محور له نسبت څخه عبارت دی، د بیضوي عن المرکزیت په e سره ښودل کیږي او د $e = \frac{c}{a}$ په شکل تعریف شوی دی.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهیږو چې په هره بیضوي کې $0 < c < a$ دی، نو $0 < e < 1$ کیږي. د بیضوي د عن المرکزیت او قطرونو ترمنځ داسې رابطه شته $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

زده‌کوونکي دې د قطرونو او محورونو ترمنځ د رابطې په کارونې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.

يادونه: که چيرې د e قيمت صفر ته نژدې شي، محراقونه يې د مرکز خوا ته نژدې کيږي. دلته بيضوي تقريباً دايروي شکل غوره کوي. که چيرې e د 1 عدد ته نژدې شي، په دې صورت کې محراقونه د قطرونو د راسونو خواته نژدې کيږي چې يو اوږد شکل غوره کوي، د بيضوي په ډيرو مسايلو کې د عن المرکزيت څخه کار اخيستل کيږي.

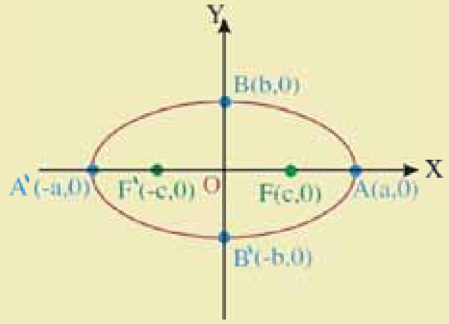
پوښتنې

1 – که چيرې په بيضوي کې د کبير قطر او صغير قطر اوږدوالی يو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحنی په لاس راځي؟

2 – که چيرې د بيضوي عن المرکزيت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت کې د کبير قطر او صغير قطر نسبت پيدا کړئ.

د بیضوي معادله

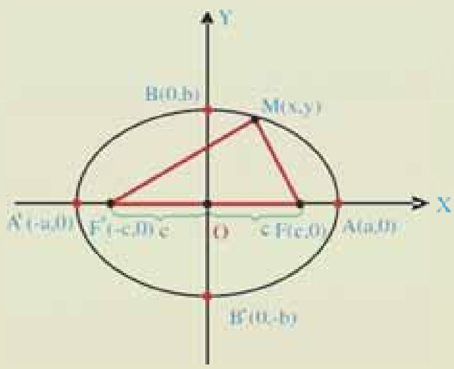
آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو
په مبدا کې وي، پیدا کولای شئ؟



فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي او محراقونه یې د x د محور پـه مـخ وټاکئ.
- د $M(x,y)$ یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د بیضوي د تعریف رابطه نظر د M ټکی ته ولیکئ.
- د M او F د ټکو ترمنځ واټن او همدارنګه د M او F' د ټکو ترمنځ واټن پیـدا کـړئ او د دوو ټکـو تـرمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

ثبوت لومړی حالت: موږ لرو:



$$|MF|+|MF'|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

یا:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته لیکو چې:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2-2cx-c^2-y^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\quad /\div(-4)$$

یا
$$a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

د پورته رابطې دواړه خواوې بیا مربع کوو او لیکو:

$$(a^2+cx)^2=(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2[(x+c)^2+y^2]$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$a^4+c^2x^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-c^2x^2-a^4=0$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

څرنگه چې $a^2=b^2+c^2$ دي، نو $b^2=a^2-c^2$ کیږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توگه لیکو:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad a>b$$

پورتنی معادله دداسې بیضوي معادله را ښیي چې د محراقونو وضعیه کمیات یې $(C,0)$, $(-C,0)$ او د x پر محور باندې واقع دي.

ثبوت دویم حالت: که چیرې د بیضوي محراقونه د y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بیضوي معادله عبارت ده له:
$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

زده کوونکي دې بیضوي رسم، د اوږد قطر، لنډ قطر او محراقونو مختصات دې ولیکي.

لومړی مثال: که چیرې د y پر محور باندې د بیضوي د اوږد قطر اوږدوالی یعنې $|AA'|=6$ او لنډ قطر اوږدوالی یعنې $|BB'|=4$ واحده وي، د بیضوي معادله پیدا کړئ.

حل:

$$|AA'|=2a=6$$
$$2a=6 \quad \Rightarrow \quad a=3$$
$$|BB'|=2b=4 \quad \Rightarrow \quad b=2$$

اوس د a او b قیمتونه په عمومي معادله کې ایږدو او معادله لیکو:
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

دویم مثال:که چیرې د یوې بیضوي د اوږده قطر اوږدوالی $|AA'|=10$ او لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=8$ واحده وي، د بیضوي د اوږده او لنډ قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن‌المرکزیت قیمت پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پوهېږو چې:

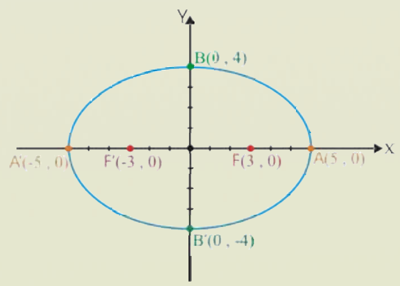
$$|AA'|=2a=10 \quad \Rightarrow \quad a=\pm5$$
$$|BB'|=2b=8 \quad \Rightarrow \quad b=\pm4$$

لیدل کیږي چې $a>b$ دی، نو اوږد قطر یې د x پر محور باندې پروت دی، د اوږده قطر د راسونو مختصات له $A(5,0)$ او $A'(-5,0)$ څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له: $B(0,4)$ او $B'(0,-4)$ څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیداکولو لپاره د c قیمتونه پیداکوو:

$$a^2=b^2+c^2$$
$$\Rightarrow (5)^2=(4)^2+c^2$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 5^2-4^2=25-16=9$$
$$c=\pm3$$



د محراقونو مختصات له $F(3,0)$ او $F'(-3،0)$ څخه عبارت دي.

عن‌المرکزیت: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ دي

دریم مثال: د داسې بیضوي ګراف رسم کړئ چې معادله یې $4x^2+y^2=16$ وي، د راسونو او محراقونو مختصات یې پیدا کړئ.

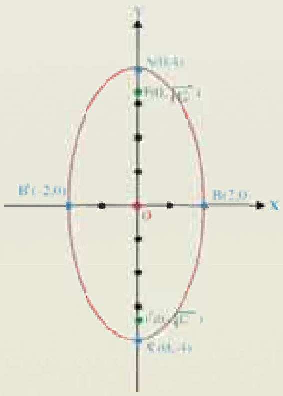
حل: د معادلې دواړه خواوې په 16 وېشو:

$$\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{16}{16}$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

د راسونو مختصات:

$$a^2=16 \quad \Rightarrow a=\pm4 \quad \Rightarrow A(0،4) \; ، \; A'(0 \; ، \; -4)$$
$$b^2=4 \quad \Rightarrow b=\pm2 \quad \Rightarrow B(2،0) \; ، \; B'(-2 \; ، \; 0)$$

د محراقونو مختصات:



$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$
$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$
$$F(0,\sqrt{12}),\ F'(0,-\sqrt{12})$$

خلورم مثال: د بیضوي د محیط پر مخ د یوه ټکي مختصات $P(2,4)$ او د محراقونو مختصات یې له $F(3\sqrt{2},0), F'(-3\sqrt{2},0)$ څخه عبارت دي. د اوږده او لنډ قطر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل: د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې: $|PF| + |PF'| = 2a$

د PF او PF′ د فاصلو اوږدوالی پیدا کوو $|PF| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$ او $|PF'| = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2}$

پورتني قیمتونه د تعریف په رابطه کې اېږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}}\right)^2 = (2a)^2$$
$$38+12\sqrt{2} + 2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2})} + 38 - 12\sqrt{2} = 4a^2$$
$$76 + 2\sqrt{1444-288} = 4a^2 \Rightarrow 76 + 2\cdot 34 = 4a^2$$
$$\Rightarrow 76+68 = 4a^2 \Rightarrow 144 = 4a^2 \ /\div 4$$
$$\Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = \pm 6$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 = 18 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$
$$2a = 2\cdot 6 = 12$$
$$2b = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\cdot\sqrt{2}$$

پوښتنې

1 – لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر اوږدوالی د راسونو او محراقونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

$a)\ \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ $\qquad b)\ \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

2 – د هغې الپس معادله ولیکئ چې عن‌المرکزیت یې 0.8 وي.

د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

ایا دداسې بیضوي معادله پیدا کولای شو چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

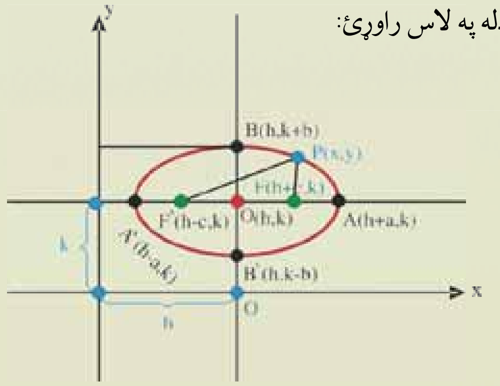
فعالیت

یوه بیضوي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ چې مرکز یې (h,k) او لوی قطر یې د x له محور سره موازي وي.

د $P(x,y)$ یو ټکی د بیضوي په محیط باندې په پام کې ونیسي او هغه له F او F' سره ونښلوئ.

د بیضوي د مرکز مختصات (h,k) په پام کې نیولو سره د محراقونو F او F'، راسونو A , A' او B, B' وضعیه کمیات په شکل کې وښیاست.

د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې او د بیضوي د تعریف د رابطې په کارونې سره معادله په لاس راوړئ:



$$|\overline{PF}|+|\overline{PF'}|=2a$$

$$|\overline{PF}|=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$|\overline{PF'}|=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

یا:

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع او له اختصار وروسته لاندې رابطه په لاس راځي:

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[(x-h)+c]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[(x-h)+c]^2$$

$$x^2-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2hx+h^2+2cx-2hc+c^2$$
$$4hc-4cx=4(a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2})$$
$$hc-cx=a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$
$$c(h-x)-a^2=-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} \quad /\div(-1)$$
$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع او ليکو:

$$c^2(h-x)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[\{x-(h+c)\}^2+(y-k)^2]$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[(x-h)+c]^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$
$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$-(x-h)^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=-a^2(a^2-c^2)$$

څرنگه چې په بيضوي کې $a^2-c^2=b^2$ کېږي، نو ليکلای شو:

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^2b^2 \quad / \div(-a^2b^2)$$
$$=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

لومړی مثال: د يوې بيضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د انجامونو مختصات چې معادله يې $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ ده، پيدا او گراف يې رسم کړئ.

حل: څرنگه چې نوموړي معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات يې $(6,-4)$ ده، لوی محور يې د x له محور سره موازي دی.

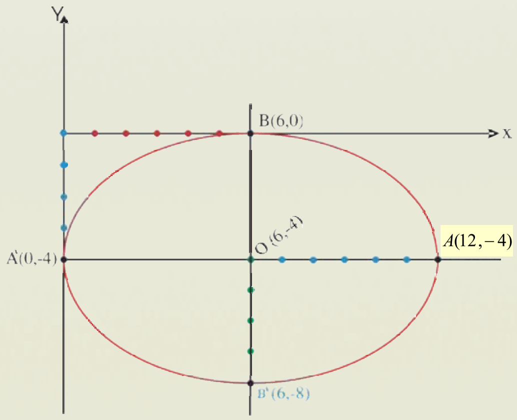
$$a^2=36\Rightarrow a=\pm6$$
$$b^2=16\Rightarrow b=\pm4$$
$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\pm2\sqrt{5}$$

د A او A′ مختصات عبارت دي له:

$$A(h+a\ ,\ k)=A(6+6،\ -4)=A(12،\ -4)$$
$$A'(h-a\ ,k)=A'(6-6،\ -4)=A'(0،\ -4)=A'(0،\ -4)$$

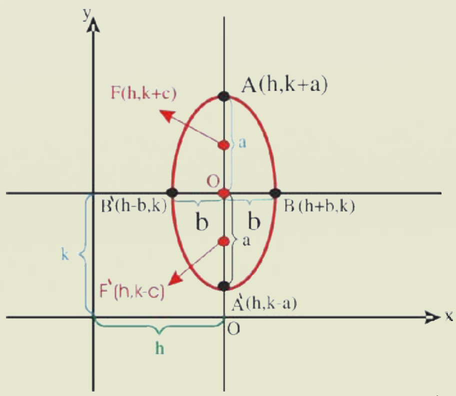
د B او B' مختصات عبارت دي له:

$$B(h,k+b)=B(6,-4+4)=B(6,0)$$
$$B'(h,k-b)=B'(6,-4-4)=B'(6,-8)$$
$$F(h+c,k)=F(h+c,k)=(6+2\sqrt{5},-4)$$
$$F'(h-c,k)=F'(h-c,k)=(6-2\sqrt{5},-4)$$



دويم حالت: که چېرې محراقي محور د y له محور سره موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$
$$A(h\,,k+a)\,,\ A'(h,k-a)$$
$$B'(h-b\,,k)\,,\ B(h+b,k)$$
$$F'(h,k-c)\ ,\ F(h\,,k+c)$$



د محراقونو او راسونو مختصات دې زده کوونکو ته دنده ورکړل شي.

يادونه: د $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادله هم د بيضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې $A\neq C$ او هم علامه وي، يعني $C>0$ ، $A>0$ يا $C<0$ ، $A<0$

دويم مثال: د $16x^2+25y^2-64x+50y-311=0$ معادله د بيضوي د معياري معادلې په ډول وليکئ.

حل: د مربع له بشپړولو څخه په کار اخيستنې سره يې په معياري ډول بدلوو .

$$16x^2+25y^2-64x+50y=311$$
$$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$$
$$16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+2y+1-1)=311$$
$$16[(x-2)^2-4]+25[(y+1)^2-1]=311$$
$$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$$
$$=16(x-2)^2+25(y+1)^2=311+64+25$$
$$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$$

د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 وېشو: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

پورتنی معادله دداسې بیضوي معادله ده چې مرکز يې د $(2, -1)$ ټکی دی.

دریم مثال: د بیضوي لاندې معادله د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

حل : لومړی معادله ترتیب بیا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخېستنې سره هغه په معیاري شکل بدلوو:

$$x^2+4x+9(y^2-2y)-23=0$$
$$x^2+4x+(2)^2-(2)^2+9[y^2-2y+(1)^2-(1)^2]-23=0$$
$$\underbrace{x^2+4x+(2)^2}_{\text{کامله مربع}}-(2)^2+9\underbrace{\left[y^2-2y+(1)^2\right]}_{\text{کامله مربع}}-(1)^2-23=0$$

$$(x+2)^2-4+9(y-1)^2-9-23=0$$
$$(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0$$
$$(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

د مساوات دواړه خواوې په 36 وېشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$
$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

پوښتنې

1. د بیضوي په لاندې معادلو کې د مرکز، محراقونو او راسونو مختصات پیدا کړئ.

$a)\ \frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ $\qquad b)\ x^2+2y^2+4x-12y+20=0$

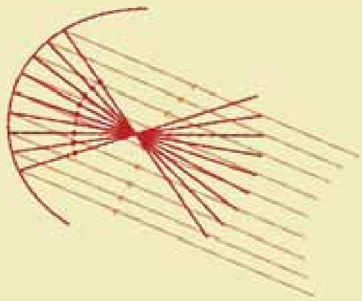
2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکز يې د $(0,2)$ ټکی، محراق يې د $(2, 6)$ ټکی او د $(4,6)$ له ټکې څخه تیره شي.

3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او همدارنګه د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المرکزیت پیدا او ګرافونه يې رسم کړئ.

$a)\ 9x^2+25y^2-36x-150y+36=0$ $\qquad b)\ 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

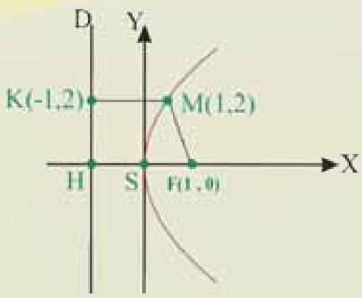
پارابولا

Parabola



که چېرې د لمر وړانګې په يوې معقرې عدسيې ولوېږي، انعکاسي(منعکسه) وړانګې يې له کوم ټکي څخه تيرېږي؟
دغه ټکی څه نوميږي او د عدسيې ګډ فصل له يوې متقاطع مستوي سره چې د عدسيې محور په برکې ولري. څه ډول منحني ده؟

فعاليت

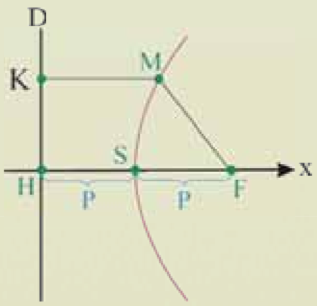


د فعاليت د سرته رسولو لپاره مخامخ شکل په پام کې ونيسئ په شکل کې د M، F او K ټکو مختصات درکړل شوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د FM او KM هر يو اوږدوالی پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

له پورته فعاليت څخه لاندې تعريف بيانولای شو:

تعريف: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکي او يوه ثابت مستقيم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کيږي. دغه ثابت يا مستقر ټکی د پارابولا محراق (F) او د D ثابت مستقيم خط ته د پارابولا موجه (Directrix) وايي $\overline{MF} = \overline{MK}$

هغه مستقيم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تير او د موجه (D) پر مستقيم خط عمود وي، د پارابولا د محراقي يا تناظري محور په نامه ياديږي.



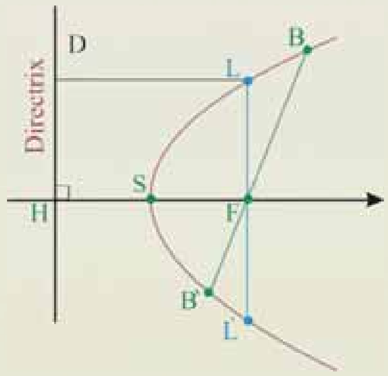
د تناظري محور او منحني ګډ ټکی د پارابولا راس او په S سره ښودل کيږي.

آيا ويلای شئ چې S د $\overline{FH}$ نيمايي ټکی دی، ولې؟

په پارابولا کې عن المرکزيت $(e = 1)$ دی ولې؟

د پارابولا وترونه:

هغه مستقیم خط چې د پارابولا دوه ټکي سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کیږي. په شکل کې $\overline{BB'}$ چې د پارابولا له محراق څخه تیر شوي دی، محراقي وتر دی او LL' چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کیږي.



پوښتنې

د پارابولا د محراقي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ څو برابره دی.

د پارابولا معادله

د هغې پارابولا د معادلې د پیداکولو لپاره چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې وي، لاندې فعالیت پـه پـام کې ونیسئ.

$$y^2 = 4px$$
$$x^2 = 4py$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو قایم سیستم په پام کې ونیسئ او د y له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منحني داسې رسم کړئ چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې وي.
- د x پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله یې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ ، هغه لـه F سره ونښلوئ او د M له ټکي څخه یو عمود پر هادي(موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته یې K ووایاست.
- د F او K د ټکو مختصات ولیکئ.

اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د F, M او K, M ټکو ترمنځ فاصله پیداکړئ او بیا د پارابولا معادله د $|MF| = |MK|$ له رابطې څخه په لاس راوړئ.

ثبوت لومړی حالت: پوهیږو چې:

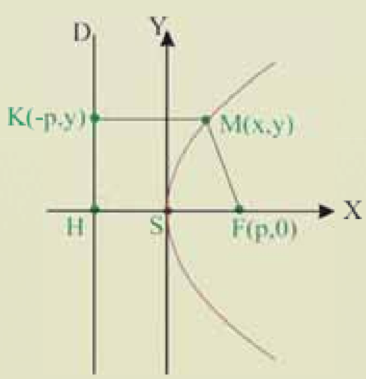
$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$
$$|MK| = x + p$$

اوس د $|MF|$ او $|MK|$ قمیتونه د $|MF| = |MK|$ په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$

د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

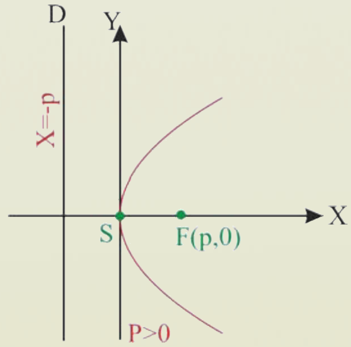
$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2})^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4px$$

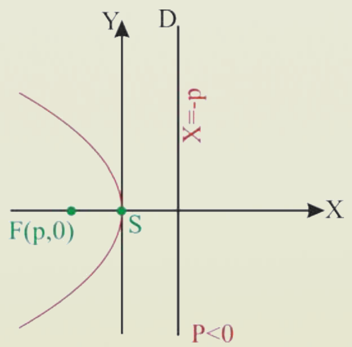


وروستی رابطه دداسې پارابولا معادله راښيي چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې $F(p,0)$ د پارابولا محراق د x پر محور باندې پروت دی او موجه خط يې $x=-p$ دی.

که چيرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور ښي خواته خلاصه ده.

که چيرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کيڼې خواته خلاصه ده.





لومړی مثال: د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات يې $F(2,0)$، د هادي مستقيم خط معادله $x=-2$ سره وي او همدارنګه د عمودي وتر د انجامونو مختصات يې پيدا کړئ.

حل: د محراق مختصات چې د x په محور باندې دي، وبلاې شو $P=2>0$، له دې امله د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

لرو چې: $y^2=4px$

اوس د $P=2$ قيمت په معادله کې ايږدو:

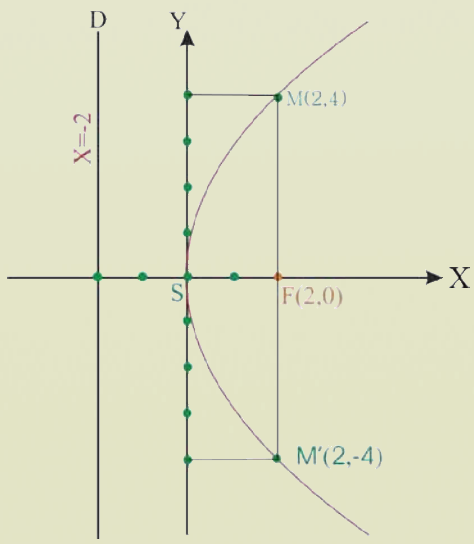
$$y^2=4\cdot 2x \quad \Rightarrow \quad y^2=8x$$

که چيرې د $x=2$ قيمت د $y^2=8x$ په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجامونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:

$$y^2=8\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad y^2=16$$

$$y=\pm 4$$

$$M(2,4) \quad , \quad M'(2,-4)$$

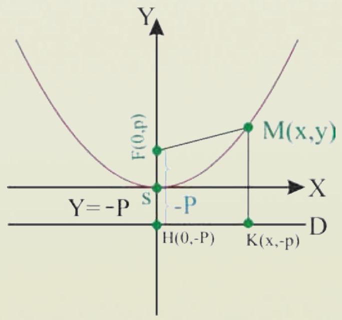


د پورته معلوماتو له مخې $y^2=8x$ پارابولا ګراف رسم کړئ.

دویم حالت: که چیرې د پارابولا محراق (F) د y پر محور باندې پروت او د D مستقیم خط د x له محور سره موازي وي، د پارابولا معیاري معادله پیدا کړئ.

حل: د پورته غوښتنې لپاره په پارابولا باندې یوټکی، لکه: $M(x,y)$ په پام کې نیسو، د پارابولا د تعریف له مخې لیکلای شو:

ثبوت:



$$|\overline{MF}| = |MK|$$

$$|\overline{MF}| = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

$$|\overline{MK}| = \sqrt{(x-x)^2+[(y-(-p)]^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2+(y-p)^2})^2 = (\sqrt{(y+p)})^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-p)^2 = (y+p)^2$$

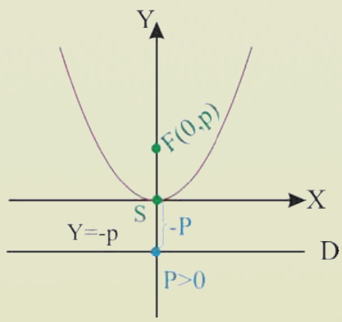
$$\Rightarrow x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2$$

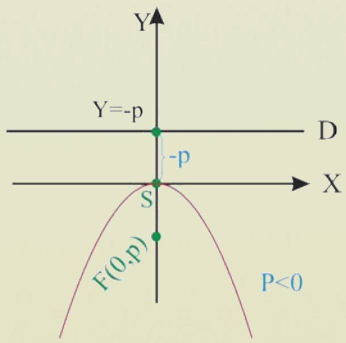
$$\Rightarrow x^2 = 4py$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس یې د وضعیه کمیاتو د سیستم په مبدا کې او محراقي محور یې د y محور دی چې د محراق مختصات یې $F(0,p)$ او $y=-p$ یې د هادي مستقیم خط معادله ده.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.



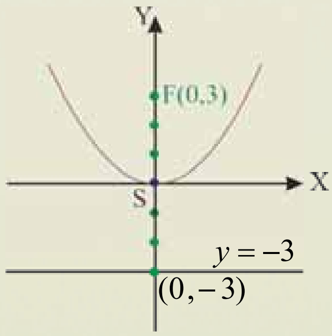


دویم مثال: د $x^2=12y$ په معادله کې د پارابولا د راس، محراق مختصات، د هادي خط معادله پیدا اوګراف یې رسم کړی.

حل : **لومړي** د $x^2=4py$ په معادله کې د p قیمت په لاس راوړو.

$$4p=12$$
$$p=3$$

څرنګه چې $P=3>0$ څخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.



1 – د راس مختصات عبارت دي له: $\left.\begin{array}{l} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ 3y=0 \Rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow S(0,0)$

2 – د محراق مختصات عبارت دي له : F (0, 3)

3 – د هادي خط معادله عبارت ده له: $y=-p \Rightarrow y=-3$

پوښتنې

1 – د $y^2-4x=0$ او $x^2=2y$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعیه کمیات او د هادي (موجه خط) معادلې پیدا اوګرافونه یې رسم کړئ.

2 – د لاندې قیمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پیدا کړئ.

$a)\ S(0,0) \qquad F(0,5)$

$b)\ S(0,0) \qquad F(-2,0)$

د هغې پارابولا معياري معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي

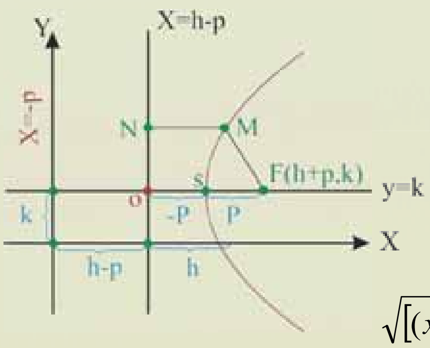
آيا د داسې پارابولا معادله پيداکولای شوچې د راس مختصات يې د وضيعه کمياتو په مبداکې نه وي.

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

فعاليت

- يوه پارابولا د وضيعه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې مرکز يې (h,k) او د تناظري محور يې د x له محور سره موازي وي.
- د پارابولا په منحنى باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ او هغه له F سره ونښلوئ، بيا د M له ټکي څخه يو عمود خط پر ها دې خط(موجه) باندې رسم او هغه ته N ووایاست.

اوس د دووټکو ترمنځ د فاصلې څخه دپيداکولو په ګټې اخېستنې سره د F, M او N, M ټکو ترمنځ فاصله پيدا کړئ، بيا دهغې پارابولا معادله چې مرکز يې $S(h,k)$ ده، په لاس راوړئ.



ثبوت:خرنګه چې د F او M ټکو وضيعه کميات پيژنو او همدارنګه د N وضيعه کميات له $(h-p, y)$ څخه عبارت دی، د پارابولا د تعريف له مخې ليکو

$$|MF| = |MN|$$

د دوو ټکوتر منځ د فاصلې له مخې لرو:

$$\sqrt{[(x-(h+p)]^2 + (y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-p)]^2 + (y-y)^2}$$

د واړه خو اوې مربع کوو او له اختصار وروسته ليکو:

$$[(x-(h+p)]^2 + (y+k)^2 = [x-(h-p)]^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 2(h+p)x + (h+p)^2 + y^2 - 2ky + k^2 = x^2 - 2(h-p)x + (h-p)^2$$

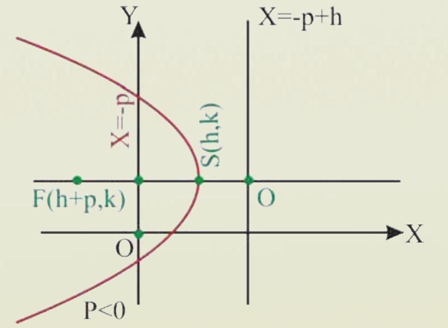
د پورته رابطې له پراختيا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

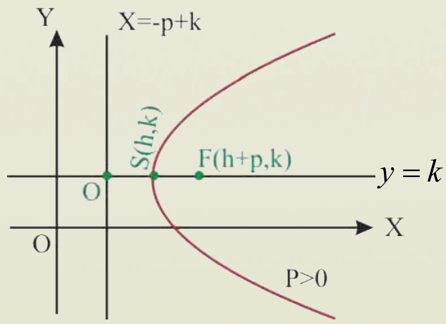
$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$$
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

پورتنی معادله د هغې پارابولا معادله ده، چې د راس وضعیه کمیات یې $S(h,k)$ محراق یې $F(h+p,k)$ او د موجه خط معادله یې $x=-p+h$ ، تناظري محور یې $y=k$ دی.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.





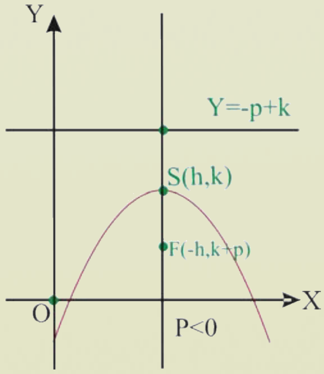
دویم حالت:د هغې پارابولا معادله چې تناظري محور یې د y له محور سره موازي وي، عبارت ده له: $(x-h)^2=4p(y-k)$

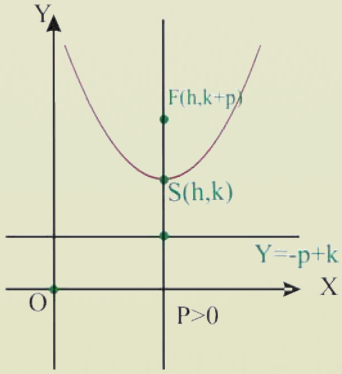
چې د پارابولا د راس مختصات $S(h,k)$ او د محراق مختصات یې $F(h,k+p)$ دي.

$y=k-p$ د پارابولا د هادي خط معادله او $x=-h$ تناظري محور دی.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





لومړی مثال: غواړو د $(x-1)^2=12(y-2)$ د پارابولا په معادله کې د راس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا کړو.

حل: څرنګه چې معادله د $(x-h)^2=4p(y-k)$ عمومي شکل لري.

نو $k=2, h=1$ کيږي، په دې صورت کې د پارابولا درأس وضعيه کميات عبارت دي له: $S(1,2)$

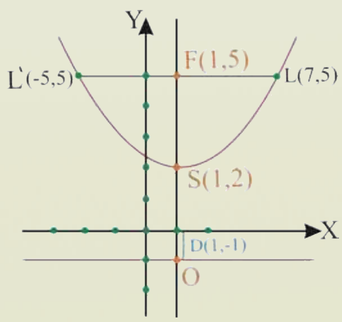
$$4p=12 \Rightarrow p=\frac{12}{4}=3$$

د محراق مختصات: $F(h,k+p)=F(1,2+3) \Rightarrow F(1,5)$

د موجه خط معادله $y=k-P \Rightarrow 2-3=-1$

د تناظر محور: $x=h \Rightarrow x=1$

د عمودي وتر دانجامونو د مختصاتو د پيداکولو لپاره د y قيمت چې په محراق کې لرو په عمومي معادله کې اېږدو يعنې $y=5$ دی.



$$(x-2)^2=12(5-2)$$
$$(x-1)^2=12\cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2=36$$
$$(x-1)=\pm 6$$
$$x_1=6+1=7,\ x_2=-6+1=-5$$
$$L(7,5) \quad L'(-5,5)$$

دويم مثال: د $(y-4)^2=-6(x+3)$ معادله په پام کې ونيسی، د پارابولا دراس او محراق مختصات د موجه خط معادله، تناظري محور معادله، د عمودي و تر د انجامونو مختصات پيدا او گراف يې رسم کړئ.

حل: دراس مختصات: $k=4, h=-3 \Rightarrow S(-3,4)$

$$4P=-6 \Rightarrow P=-\frac{3}{2}$$

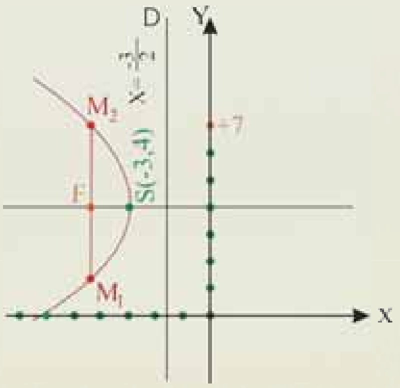
څرنگه چې $-\frac{3}{2}<0$ ده، نو د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.

د محراق مختصات: $F(h+p,k)=(-\frac{9}{2},4)$

موجه خط معادله عبارت ده له: $x=h-p \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

د تناظري محور معادله: $y=k \Rightarrow y=4$

د $x=-\frac{9}{2}$ قيمت په معادله کې اېږدو او د عمودي وتر د انجامونو مختصات په لاس راځي.



$$(y-4)^2=-6(x+3)=-6(-\frac{9}{2}+3)$$
$$(y-4)^2=9 \;\Rightarrow\; y-4=\pm 3$$
$$y_1=3+4=7$$
$$y_2=-3+4=1$$
$$M_2(-\frac{9}{2},7)\;,\; M_1(-\frac{9}{2},1)$$

یادونه: د $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$ د معادلې ګراف یوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې $C\neq 0\;,\;A=0$ وي یا $C=0, A\neq 0$ وي).

پوښتنه: د $(x-h)^2=4p(y-k)$ معادله په پراختیایي ډول ولیکئ.

دریم مثال: د $y^2-2y+8x+25=0$ پارابولا معادله، د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ د راس، محراق مختصات، د مؤجه خط معادله او تناظري محور یې پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوي معادله کې $A=0$ دی، نو نظر د y متحول ته یې، مربع بشپړوو.

$$y^2-2y+(1)^2-(1)^2+8x+25=0$$
$$(y-1)^2+8x+24=0 \;\Rightarrow\; (y-1)^2+8(x+3)=0$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+3)$$

په معادله کې لیدل کیږي: $4P=-8 \;\Rightarrow\; P=-2$

دراس مختصات: $k=1\;,\;h=-3 \;\Rightarrow\; S(-3,1)$

$F(h+p,k)\Rightarrow F(-3-2,1)\Rightarrow F(-5,1)$ ، د موجه خط معادله $x=h-p \;\Rightarrow\; x=-3+2=-1$

تناظر محور عبارت له $y=1 \;\Rightarrow\; y=k$ څخه دی.

پوښتنې

1ـ د لاندې پارابولا معادله پیدا کړې، په داسې حال کې چې:

$a)\;\; S(1,3), F(-1,3)$

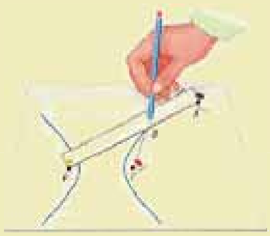
2- د $(y-1)^2=12(x-4)$ په معادله کې د پارابولا دراس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله او د تناظر محور پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

3- لاندې معادلې د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ او ګراف یې رسم کړئ.

$a)\;\; y^2-6y+8x+41=0$　　$b)\;\; x^2-2x-6y-53=0$

هایپربولا

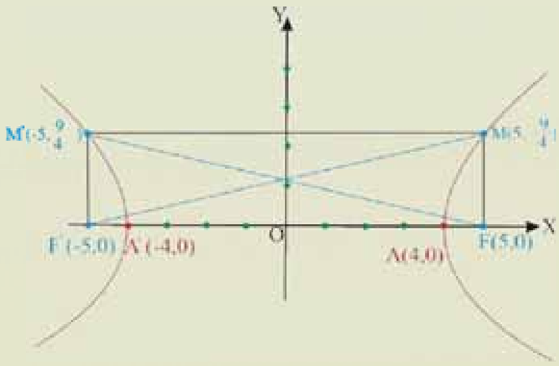
Hyperbola



په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو مستقرو ټکو څخه تل له یوه ثابت اوږدوالي سره مساوي وي، څه ډول یوه منحني کیدلای شي؟

فعالیت

- په لاندې شکل کې د A, M', M, F', F او A' ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې دپیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د $|MF|, |MF'|$ او $|AA'|$ اوږدوالي پیدا کړئ.
- د $|MF| - |MF'|$ د تفریق حاصل په لاس راوړئ او د $|AA'|$ له اوږدوالي سره یې پرتله کړئ.
- پورتني فعالیت د M' ټکي لپاره تطبیق او پایله یې ولیکئ
- د $|MF| - |MF'|$ او $|M'F| - |M'F'|$ د تفریق حاصل یو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتني فعالیت له سرته رسولو وروسته لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې دهغه ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ځای پر ځای ټکو څخه تل مساوي اوږ دوالی ولري، هایپربولا Hyperbola بلل کیږي.

دوه مستقر ټکي د ها یپربولا د محراقونو په نامه یادیږي، په شکل کې F او F' د هایپربولا محراقونه M او M' د هایپربولا دوه اختیاري ټکي دي، په دې صورت کې لیکو:

$$|M'F| - |M'F'| = |MF| - |MF'| = |AA'| = 2a$$

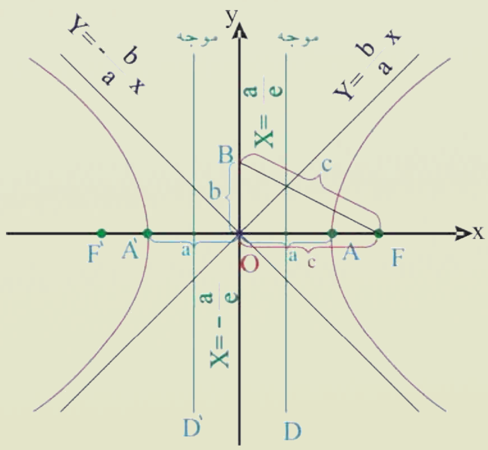
د FF' منځنۍ ټکی د هایپربولا مرکز دی، دمرکز او هر یوه راس ترمنځ فاصله، لکه بیضوی په هایپربولا کې هم $AA'=2a$ او $FF'=2c$ اوږدوالی لري.

د هایپربولا تناظري محورونه او راسونه:

د بیضوي په ډول هایپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې یوېې په FF' باندې منطبق او د هایپربولا له راسونو څخه تیرېږي. بل یې د FF' عمودې نیمايې کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی یا ځای، دهایپربولا مرکز بلل کیږي. هغه تناظري محور چې له FF' څخه تیرېږي، د متقاطع محور په نامه یادیږي، څکه چې هایپربولا د A او A' په دوو ټکو کې قطع کوي چې دې دوو ټکوته د هایپربولا راسونه وایي او اوږدوالي له $|AA'|=2a$ څخه عبارت دی.

هغه خط چې د هایپربولا په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هایپربولا نه قطع کوي، خو د مرکز دواړو خواوته د B او B' دوه ټکي په پام کې نیسو چې $OB=OB'=b$ وي، دا دوه ټکي د هایپربولا غیر حقیقي راسونه بلل کیږي چې $|BB'|=2b$ غیر حقیقي محور دی.

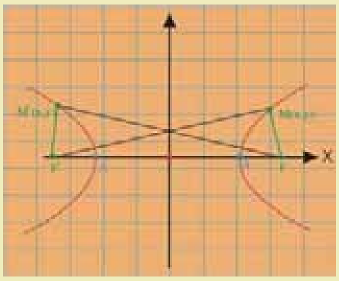
په یوه هایپربولا کې د b,a او c اوږدوالو ترمنځ داسې رابطه شته: $c^2=a^2+b^2$



عن المرکزیت: څرنگه چې په هایپربولا کې $c>a$ دي، نو $e>1$ کیږي. چې د c,b,a او عن المرکزیت ترمنځ د $e=\sqrt{1+\frac{b2}{a2}}$ رابطه شته. زده کوونکي دې د $e=\frac{c}{a}$ له رابطې څخه په کار اخیستې سره نوموړي رابطه په لاس راوړي.

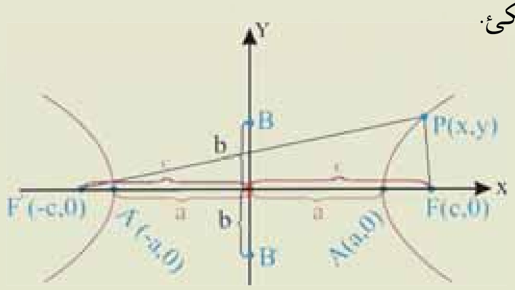
د هايپربولا معادله

آيا داسې يوه هايپربولا رسمولاي شئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي؟



فعاليت

- داسې هايپربولا رسم کړئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي.
- د $P(x,y)$ ټکی په هايپربولا باندې وټاکئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ
- د F, P او F' ټکو ترمنځ د هايپربولا د تعريف رابطه وليکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د PF او PF' فاصلې پيدا کړې او بيا د هغو تفاضل په لاس راوړئ.



د هايپربولا د تعريف له مخې ليکو: $|PF'|-|PF|=2a$

د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فارمول څخه ليکلای شو.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

د مساوات د دواړو خواوله مربع او انکشاف څخه وروسته لرو:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$
$$\Rightarrow 4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ /\div 4$$
$$\Rightarrow cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بيا هم د مساوات دواړه خواوې مربع او انکشاف ورکوو:

$$(cx-a^2)^2=a^2(x-c)^2+y^2$$
$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$
$$c^2x^2-2a^2\cancel{c}x+a^4=a^2x^2-2\cancel{a}^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4 \quad \Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c > a$ دی، نو $c^2 - a^2 > 0$ کیږي، له بلې خوا پوهیږو چې $c^2 - a^2 = b^2$ ده، نو په پورته افاده کې د $c^2 - a^2$ قیمت په ایښودلو سره لیکلای شو: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

د مساوات د واړه خواوې پر a^2b^2 باندې وېشو:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

پورتنې معادله د داسې هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیات په مبدأ او محراقونه یې په افقي محور پراته دي.

دویم حالت: که چیرې متقاطع محور یعنې AA' د y پر محور پروت وي، یعنې محراقونه په عمودي محور پراته وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده له:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

پوښتنه

پورته فارمول او همدارنګه د محراقونو او راسونو مختصات دې د شکل له مخې د زده کوونکو په واسطه پیداشي.

د هایپربولا موجه خط:

که چیرې د هایپربولا محراقونه د x یا y په محورونو پراته وي، په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ویلای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندې عمود دي چې د هغو فاصله د هایپربولا له مرکز څخه د $\pm\frac{a}{e}$ یا $\pm\frac{a^2}{c}$ څخه عبارت ده.

د هغې هایپربولا د ها دې خط معادلې چې محراقونه یې د y پر محور باندې پراته دي له $y = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

او د هغې هایپربولا د ها دې خط معادلې چې محراقونه یې د x پر محور باندې پراته دي له $x = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

د هایپربولا مجانبونه:

هغه مستقیم خطونه چې د هایپربولا له مرکز څخه تیر اوپه لایتناهي کې د هایپربولا له منحنې سره مماس وي. د هایپربولا مجانبونه بلل کیږي .

د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هایپربولا معادله په پام کې نیسو:

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2$$
$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2)$$
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}\left[x^2(1-\frac{a^2}{x^2})\right]$$
$$\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

که چیرې په پورتني رابطه کې x لایتناهي ته نژدې شي د $\frac{a^2}{x^2}$ کسر د صفر خواته نژدې کیږئ په پایله کې $\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$ د یوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې $y=\pm\frac{b}{a}x$ لاس ته راځي.

نو $y=\pm\frac{b}{a}x$ د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هایپربولا محراقونه د x پر محور باندې پراته وي.

که چیرې محراقونه د y پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې یې له $y=\pm\frac{a}{b}x$ څخه عبارت دي.

لومړی مثال: د هایپربولا د $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسونو مختصات، د موجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا او په شکل کې وښایاست.

حل: د رأسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4\Rightarrow A(4,0),A'(-4,0)$

د محراقونو مختصات: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\pm2\sqrt{5}$

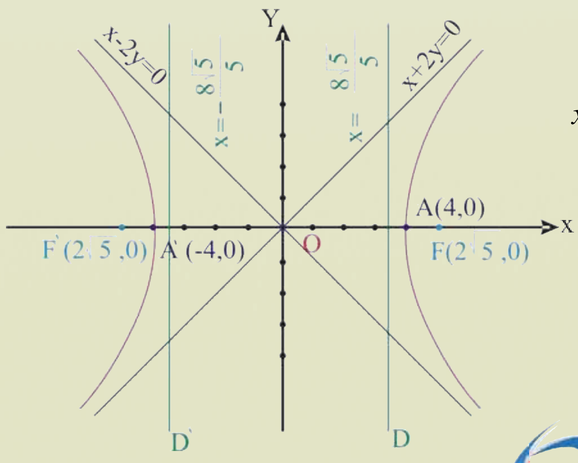
$$\Rightarrow F(2\sqrt{5},0),F'(-2\sqrt{5},0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنګه چې محراقونه د x پر محور باندې پراته دي.

له دې امله:

$$x=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\frac{4^2}{2\sqrt{5}}=\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}x\quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{2}{4}x=\pm\frac{1}{2}x$$
$$2y=\pm x$$

یا: $x=\pm2y\quad\Rightarrow\quad x+2y=0,x-2y=0$



دويم مثال: وښياست چې $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, د هايپربولا يوه معادله ده، په نوموړې معادله کې د محراقونو، راسونو مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلې پيدا او ګراف يې رسم کړئ.

حل: پورتنی معادله د هايپربولا د معياري معادلې شکل لري چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې او د y محور يې متقاطع محور دی چې محراقونه ور باندې پراته دي.

د راسونو مختصات: $A(0,2)\ ,\ A'(0,-2)$ $\qquad a^2=4\Rightarrow a=\pm2$

$$b^2=9\Rightarrow b=\pm3$$

د محراقونو مختصات: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=4+9=13\Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$

د مجانبونو معادلې: $F'(0,-\sqrt{13})\quad , \quad F(0,\sqrt{13})$

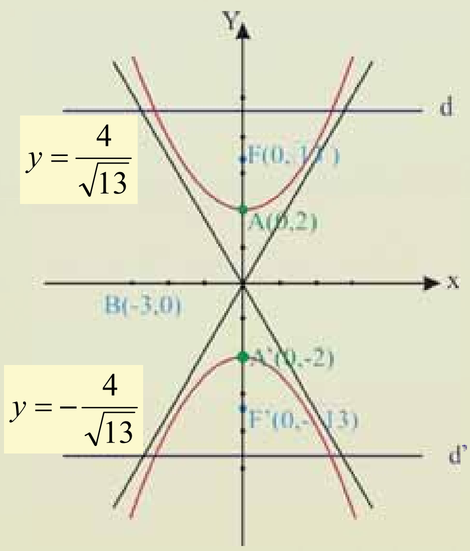
څرنګه چې متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{b}x\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{2}{3}x\ \Rightarrow\ 3y=\pm2x$$

$$3y-2x=0\qquad , \qquad 3y+2x=0$$

د موجه خط معادله: څرنګه چې د هايپربولا راسونه د y پر محور باندې پراته دي، نو د موجه خطونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm1{,}1$$



پوښتنې

د $4x^2-y^2=16$ هايپربولا له معادلې څخه د محراقونو وضعيه کميات، د راسونو وضعيه کميات، د موجه خط معادلې او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او په پای کې يې ګراف رسم کړئ.

د هغې هایپربولا معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

آیا د داسې هایپربولا معادله شته چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

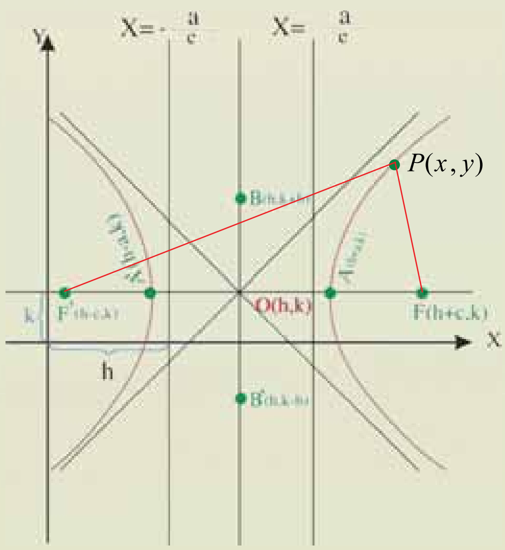
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په سیستم کې داسې هایپربولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات یې (h,k) او متقاطع محور یې موازي د x له محور سره وي.
- په هایپربولا باندې د $p(x,y)$ یو ټکی په پام کې ونیسئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.
- د هایپربولا د معادلې په پام کې نیولو سره د (h,k) ټکي د محراقونو مختصات یعنې F او F'، د راسونو مختصات یعنې B, A', A او B' په شکل کې وښایاست.

د هایپربولا د تعریف له مخې لیکو:

$$|PF'|-|PF|=2a$$



د دووټکو تر منځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

یا

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

د پورتنې مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{[x-(h+c]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2$$

د مشابه حدونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو: $cx-(ch+a^2)=a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$

بیاهم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\{cx-(ch+a^2)\}^2=\left\{a\sqrt{\{x-(h+c)\}^2+(y-k)^2}\right\}^2$$

$$c^2x^2-2cx(ch+a^2)+(ch+a^2)^2=a^2[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

د ضرب، او طاقتونو له ساده کولو وروسته مشابه حدونه جمع او تفریقوو او پورتني رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2-a^2x^2+2c^2hx+a^2hx+c^2h^2-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-2hx(c^2-a^2)+h^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x^2-2hx+h^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c^2-a^2=b^2$ دي، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو: $b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$

دواړه خواوې په a^2b^2 ویشو:

$$\frac{\cancel{b^2}(x-h)^2}{a^2\cancel{b^2}}-\frac{\cancel{a^2}(y-k)^2}{\cancel{a^2}b^2}=\frac{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h+a,k)\quad A'(h-a,k)$

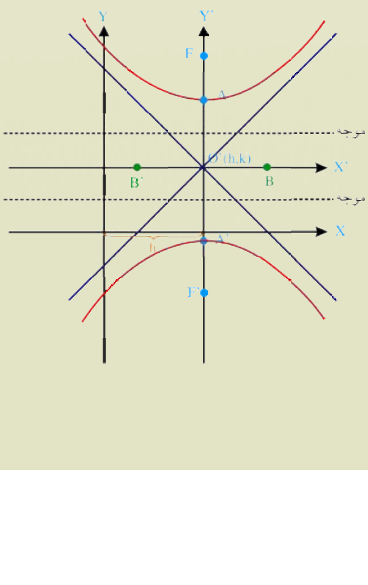
د غیر حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k+b)\quad B'(h,k-b)$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)\ ,\ F'(h-c,k)$

د مجانبونو معادلې: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

که چیرې د هایپربولا د مرکز مختصات (h,k) او متقاطع محور یې موازي د y له محور سره وي په دې صورت کې د هایپربولا معادله عبارت ده له: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

زده کوونکي دې د مرکز مختصات، د محراقونو مختصات، د موجه خط معادله او د مجانبونو معادلې ولیکي؟



دویم حالت: که چیرې محراقونه د y له محور سره موازي پر متقاطع محور پراته وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده، له:

$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ د شکل له مخې د هایپربولا د رأسونو مختصات، محراقونو مختصات د مؤجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.

یادونه: د هایپربولا غزول شوي معادله له $AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A \neq B$ یا $A = B$ خو مختلف الاشاره وي.

څرنګه کولای شو، د هایپربولا غزول شوي معادله په لاس راوړو؟

لومړی مثال: د $9(x-3)^2 - 4(y+1)^2 = 144$ معادله په پام کې ونیسئ، د مرکز، د راسونو، محراقونو مختصات او همدارنګه د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.

حل: راکړل شوي معادله په معیاري ډول لیکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144} - \frac{4(y+1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

د مرکز مختصات: $k=-1, h=3$ یعني $(3,-1)$ دي

د راسونو مختصات: $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

$$A(h+a,k) = A(3+4,-1) = A(7,-1)$$

$$A'(h-a,k) = A'(3-4,-1) = A'(-1,-1)$$

او همدارنګه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6 \\ B(h,k+b) = B(3,6-1) = B(3,5),\ B'(h,k-b) = B'(3,-6-1) = B'(3,-7) \end{cases}$$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k) = F(3+\sqrt{52},-1) \qquad F'(h-c,k) = F'(3-\sqrt{52},-1)$

پوهېږو چې په هایپربولا کې: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow c = \pm\sqrt{52}$

که چیرې متقاطع محور د x له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y-k = \pm\frac{b}{a}(x-h) \ \Rightarrow\ y = \pm\frac{6}{4}(x-3)-1 = \pm\frac{3}{2}(x-3)-1$$

$$y = \pm\frac{3}{2}(x-3)-1 \ /\cdot 2$$

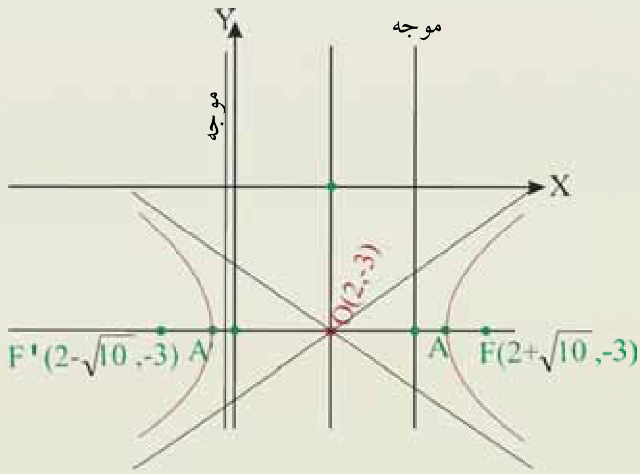
$$2y = \pm 3(x-3)-2 \ \Rightarrow\ 2y = 3x-9-2 \ \Rightarrow\ 2y-3x+11=0$$

$$2y = -3x+9-2 \quad \Rightarrow\ 2y+3x-7=0$$

دویم مثال: د $2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$ معادله په پام کې ونیسئ.

د هایپربولا د مرکز مختصات د راسونو مختصات، د محراقونو مختصات او د موجه خطونو معادلې، د محانبونو معادلې په لاس راوړئ.

حل:



$$2(x^2-4x)-3(y^2+6y)-31=0$$
$$2\left[(x-2)^2-4\right]-3\left[(y+3)^2-9\right]-31=0$$
$$2(x-2)^2-8-3(y+3)^2+27-31=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2+27-39=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2-12=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2=12$$
$$\frac{2(x-2)^2}{12}-\frac{3(y+3)^2}{12}=\frac{12}{12}$$
$$\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

پـورتني معادلـه پـه معيـاري ډول واړول شـوه، ليـدل كيـږي چـې $h=2$ او $k=-3$ دی، د مرکـز مختـصات يې: $O(2,-3)$

له بلې خوا:

$$b^2=4\Rightarrow b=\pm2 \quad , \qquad a^2=6\Rightarrow a=\pm\sqrt{6}$$
$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow\ c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{6+4}=\pm\sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: يې $F'(2-\sqrt{10},-3)$ ، $F(2+\sqrt{10},-3)$

د راسونو مختصات: $A'(2-\sqrt{6},-3)$ ، $A(2+\sqrt{6},-3)$

د موجه خطونو معادلې: $x-h=\pm\frac{a}{e}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{e}+h=\pm\frac{6\sqrt{10}}{10}+2$

د مجانبونو معادلې: څرنگه چې متقاطع محور د x له محور سره موازي دی، نو ليکلای شو:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$$
$$y+3=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)$$

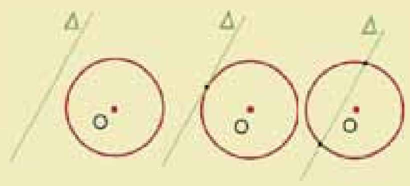
$$y=\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)-3 \quad /\cdot\sqrt{6}$$
$$\sqrt{6}y=2(x-2)-3\sqrt{6}$$
$$\sqrt{6}y=2x-4-3\sqrt{6}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\sqrt{6}y-2x+4+3\sqrt{6}=0}$$
$$\sqrt{6}y=-2(x-2)-3\sqrt{6}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\sqrt{6}y+2x-4+3\sqrt{6}=0}$$

پوښتنې

د $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ معادله د هايپربولا پر معياري معادلې باندې واړوئ.

دیوې کرښې مو قعیت نظرمخروطي مقاطعو ته

یوه اختیاري کرښه، یوه دایره د امکان په صورت کې په
څو ټکوکې قطع کولای شي؟



فعالیت

د O دایره او د Δ مستقیمه کرښه په پام کې و نیسئ:

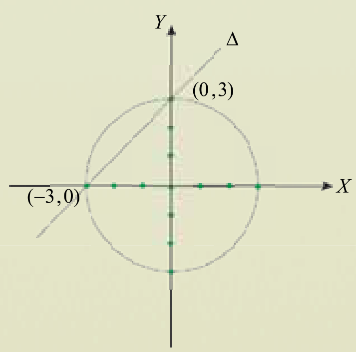
- یوه دایره او مستقیمه کرښه داسې رسم کړئ، چې یوازې یوګډ ټکي سره و لري.
- آیا کیدای شي چې یوه مستقیمه کرښه، یوه دایره له دو وټکو څخه په زیاتو ټکوکې قطع کړي؟
- که چیرې د یوې دایرې د مرکز او کرښې تر منځ واټن، د دایرې له شعاع یا وړانګې څخه لوی وي. دایره او کرښه څوګډ ټکي لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه مستوي کې یوه اختیاري کرښه او یوه دایره امکان لري، یوازې یوه، دوه او یا هېڅ ګډ ټکي ونلري.

لومړی مثال: د $x^2+y^2=9$ دایره او $y=x+3$ مستقیمه کرښه رسم او موقعیت یې وښایاست.

حل: په شکل کې لیدل کېږي، چې پورتني دایره او کرښه یو بل په $(0,3)$ او $(-3,0)$ دوو ټکوکې قطع کوي ددې پایلې د لاس راوړلو لپاره که چیرې د y قیمت د دایرې په معادله کې و ضع کړو عین نتیجه په لاس راځي:



$$x^2+y^2=9$$
$$y=x+3 \Rightarrow x^2+(x+3)^2=9$$
$$x^2+x^2+6x+9=9$$
$$\Rightarrow 2x^2+6x=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad x_2=-3$$

د x قیمتونه د $y=x+3$ په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي.

$$y_1=0+3 \Rightarrow y_1=3$$
$$y_2=-3+3 \Rightarrow y_2=0$$

د $(0,3)$ او $(-3,0)$ د دایرې او مستقیمې کرښې د تقاطع ټکی دی.

په دې ډول د پورتنیو قیمتونو په پام کې نیولو سره د $(0,3)$ او $(-3,0)$ مرتبې جوړې چې د واړو معادلو د تقاطع ټکي دي په لاس راځي.

په عمومي ډول کله چې د مستقیمې کرښې له معادلې څخه د x یا y متحول حل او د مخروطي مقاطعو په معادله کې یې کېږدو، د حل لپاره یوه دویمه درجه معادله لاسته راځي چې حل یې د Δ په قیمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندې ډول د څېړلو،او پام وړ، پایلې لري:

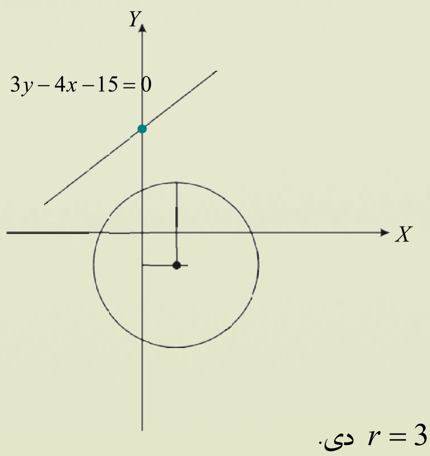
1- که چیرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول کرښه او منحني یوبل په دوو ټکوکې قطع کوي.

2- که چیرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مضاعف یا مساوي جذرونه لري او په دې ډول کرښه د مخروطي مقاطعو له منحني سره یوازې یو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي لري.

3- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، کرښه او منحني یو بل نه قطع کوي.

دویم مثال: د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ دایره او $3y - 4x - 15 = 0$ کرښه په پام کې ونیسئ او موقعیتونه یې له یو بل سره و څیړئ.

حل: دپورتنیو معادلو د بدلولو لپاره چې معیاري حالت ته راوګرځول شي، په لاندې ډول ګام پورته کوو:



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad C(1,-2)$$

له پورتنی معادلې څخه پو هیږو چې د دایرې مرکز $C(1,-2)$ او شعاع یې $r = 3$ دی.

همدغه راز د مستقیمې کرښې لپاره لرو: $3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$

که چیرې له پورتني معادلې څخه د y قیمت د دایرې په معادله کې کېږدو او معادله حل کړو، نو لاندې پایله په لاس راځي.

$$(x-1)^2+(\frac{4}{3}x+5+2)^2=9$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+(\frac{4}{3}x+7)^2=9 \quad \Rightarrow x^2-2x+1+\frac{16}{9}x^2+14\frac{4}{3}x+49-9=0$$

$$\Rightarrow \ 9\cdot\frac{25}{9}x^2-9\cdot\frac{50}{3}x+9\cdot 40=0$$

$$\Rightarrow 25x^2+150x+360=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=22500-36000=-13500 \quad , \quad \Delta<0$$

څرنګه چې $\Delta<0$ ده، کرښه او دایره ګډټکی نه لري.

دریم مثال : د $y=x-1$ د کرښې مو قعیت د $y-x^2+1=0$ پا رابولا ته وڅیرئ.

حل: د پورتني مسئلې د څېړلو لپاره د y قیمت د پارا بول په معادله کې و ضع کوو، او بیاګام په ګام د معادلې حل په پام کې نیسو:

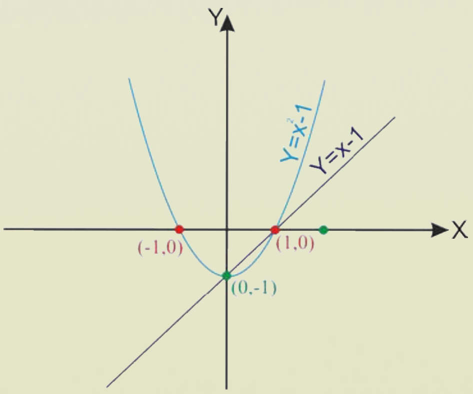
$$y=x-1$$

$$y-x^2+1=0 \quad \Rightarrow (x-1)-x^2+1=0$$

$$\Rightarrow x-1-x^2+1=0 \quad \Rightarrow x^2-x=0$$

$$\Delta=b^2-4ac \quad \Rightarrow \Delta=(-1)-4(1)(0) \quad \Rightarrow 1-0$$

$$\Rightarrow \Delta=1$$



څرنګه چې لیدل کیږي $\Delta=1>0$ څخه ده، نو موړي کرښه یعنې $y=x-1$ په لاندې ډول په لاس راځي او د $y-x^2+1=0$ پارابول یو بل په دوو ټکو کې قطع کوي چې د دې دویمې درجې معادلې حل

$$x^2-x=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=0$$

که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د کرښې په معادله کې کیږدو،نو د نوموړي کرښې او پارابولا د قطع کولوټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له : $(0,-1)\,,(1,0)$

دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کیږي.

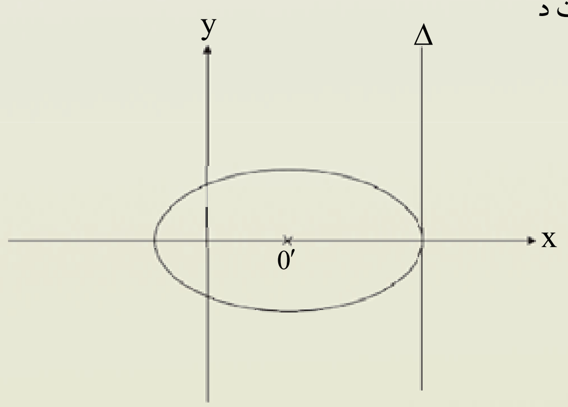
څلورم مثال: د $x = 5$ د مستقیمې کرښې او $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ بیضوي موقعیتونه وڅیړئ.

حل: که چیرې د $x = 5$ دمستقیمې کرښې قیمت د بیضوي په معادله کې کېښیږدو، نو په لاس راځي:

$$\frac{(5-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{9}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4} = 1 - 1 \Rightarrow y^2 = 0$$

څرنګه چې: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$



په دې ډول ویلای شو چې مستقیمه کرښه اوبیضوي یو ګډټکی لري چې په شکل کې په ښکاره ډول لیدل کیږي.

یادونه: د مخروطي مقاطعو غزیدلی یا انکشاف ورکړل شوي، معادله په لاندې ډول ده:

$$A, B, D, E, F \in IR \quad , Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

د پورتني معادلې د پیژندلو لپاره په یاد ولرئ چې:

1- که چیرې $A = B$ یو شان علامې ولري، یوه دایره ده.

2- که چیرې $A \neq B$ او یو شان علامې ولري، یو الیپس دی.

3- که چیرې $A \neq B$ یا $A = B$ او مختلفې علامې ولري، هایپربولاده.

4- که چیرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف یې یوه پارابولاده.

$Ay^2 + By + Cx + D = 0$ او $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$

پوښتنې

1- لاندې معادلې د هغوی د ګرافونو د منحنی له مخې و ټاکئ.

$a)\ y^2 - 2y + x + 3 = 0$ $b)\ 9x^2 + 9y^2 = 27$

$c)\ 25x^2 + 16y^2 = 400$ $d)\ x^2 - y^2 = 0$

$e)\ y^2 + 6y - x + 2 = 0$

2- د $9x^2 + 4y^2 = 36$ الیپس او $y = 3$ مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د $y = x$ خط او $x^2 - 2y^2 = 4$ هایپربول د تقاطع ټکي پیداکړئ.

د خپرکي مهم ټکي

مخروطي مقاطع: د يوې مستوي او مخروط د تقاطع ګډ فصل عبارت ده له: دايرې، پارابول،هـايپربولا، يـو ټکـی، بيضوي او يا دوه متقاطع کرښې.

بيضوي: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې لـه دوو مـستقرو ټکـو څخـه يـې د فاصلـو د جمعې حاصل يې يو ثابت اوږدوالی وي، بيضوي بلل کيږي ، مستقر ټکي چې په F' او F تـورو ښـودل شـوي، د بيـضوي محراقونه او $AA'=2a$ ثابت او ږدوالی دی

شمېره	معادلې	د مرکز وضيعه کميات	د اوږده قطر انجامونه	دلنډ قطر انجامونه	محراقونه
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې دي	$(c,0),(-c,0)$ د x پر محور باندې دي
2	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور باندې دي	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,c),(0,-c)$ د y پر محور باندې دي
3	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $a>b$	(h,k)	$(h\pm a,k)$ قطر د x له محور سره موازي دي	$(h,k\pm b)$ قطر د y له محور سره موازي دي	$(h\pm c,k)$ د x پر محور باندې دی
4	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ $a>b$	(h,k)	$(h,k\pm a)$ قطر د y له محور سره موازي دی	$(h\pm b,k)$ قطر د x له محور سره موازي دی	$(h,k\pm c)$ د y پر محور باندې دي

د بيضوي غزول شوي عمومي معادله عبارت ده له: $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$

په داسې حال کې چې $A>0$ او $C>0$ وي: (يعنې دواړه هم علامه وي).

$e=\frac{c}{a}$ دبیضوي دعن المرکز یت په نامه یادیږي.

پارابولا: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کیږي، دغه ثابت یا مستقر ټکي ته د پاراپولا محراق (F) او ثابت مستقیم خط ته د پارابولا ها دي(موجه) وایې، معادله یې $y^2=4px$ ده

شمیره	د پارابولا معادلې	دراس وضعیه کمیات	د محراق مختصات	د موجه خط معادله	تناظري محور
1	$y^2=4Px$	$S(0,0)$	$F(P,0)$	$x=-p$	$x=0$
2	$x^2=4Py$	$S(0,0)$	$F(0,P)$	$y=-p$	$y=0$
3	$(y-k)^2=4P(x-h)$	$S(h,k)$	$F(h+p,k)$	$x=h-p$	$y=k$
4	$(x-h)^2=4P(y-k)$	$S(h,k)$	$F(h,k+p)$	$y=k-p$	$x=h$

د پارابولا غزول شوي معادله $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ په داسې حال کې چې $A=0$ یا $C=0$ وي، نه دواړه. ($C\neq 0, A=0$ یا $C=0, A\neq 0$ وي) په پارابولا کې $e=1$ دی.

هایپربولا: په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تل ثابت اوږدوالی ولري، هایپربولا بلل کیږي.

دوه ثابت مستقر ټکي د هایپربولا محراقونه دي، د دواړو محراقونو ترمنځ فاصله $2c$ ده.

د هایپربولا معادله $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ د هایپربولا محراقونه پر افقي محور پراته دي).

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ د هایپربولا محراقونه پر عمودي محور پراته دي).

د هایپربولا معادلې	د مرکز وضعیه کمیات	د رأسونو وضعیه کمیات	غیر حقیقي رأسونه	محراقونه
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$S(0,0)$	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور پراته دي	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د x پر محور باندې
$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$S(0,0)$	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور پراته دي	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې	$F(0,\pm c)$ د y پر محور باندې
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$S(h,k)$	$A(h\pm a,k)$	$B(h,k\pm b)$	$F(h\pm c,k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	$S(h,k)$	$A(h,k\pm a)$	$B(h\pm b,k)$	$F(h,k\pm c)$

د موجه خطونو معادلې	د مجانبونو معادلې
$x=\pm\frac{a}{c}$	$y=\pm\frac{b}{a}x$
$y=\pm\frac{a}{c}$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
$x=h\pm\frac{a}{c}$	$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$
$y=k\pm\frac{a}{c}$	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

هایپربولا عمومي غزول شوې معادله: $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A=B$ یا $A\neq B$، خو مختلف الاشاره وي، عن المرکزیت $e>1$ دی.

د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه او کرښه تري تا وکړئ.

1- که چیرې یوه مستوي یو مخروط په مایل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط ګډ فصل عبارت دی له:

a) بیضوي b) دایره c) هایپربولا d) دوه متقاطع خطونه

2- د الپس محراقونه هغه ټکې دي چې د الپس له مرکز څخه:

a) برابر و اټن ولري b) مختلف و اټنونه لري

c) د اوږد قطر نیمایي واټن لري d) د لنډ قطر نیمایي ده.

3- که چیرې M د الپس یو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ داوږده قطر اوږ دوالې وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

a) $|MF|-|MF'|=2a$ b) $|MF|+|MF'|=a$

c) $|MF|+|MF'|=2a$ d) $|MF'|+|MF|=0$

4- د الپس عن المرکزیت له لاندې کومې یوې رابطې څخه په لاس راځي:

a): $e=\frac{a}{c}$ b): $e=\frac{c}{a}$ c): $e=\frac{b}{c}$ d): $e=\frac{c}{b}$

5- د لنډ قطر او محراقونو ترمنځ اړیکه عبارت ده له:

a) $a^2=b^2-e^2$ b) $a^2+b^2=c^2$

c) $a^2=b^2+e^2$ d) $a^2=b^2+c^2$

6- د $(y-k)^2=4p(x-h)$ په معادله کې $p>0$ سره وي، نو:

a) د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. b) دپارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

c) دپارابولا خوله ښي خواته خلاص ده d) دپارابولا خوله کیڼې خواته خلاص ده.

7- د $(x+1)^2=8(y-2)$ یو پارابولا معادله په پام کې ونیسئ. دمحراق وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

a) $F(-1,-2)$ b) $F(-1,4)$ c) $F(-1,2)$ d) $F(-4,-1)$

8- که چیرې F او F' د هایپربولا محراقونه وي، د p ټکې په کوم شرط د هایپربولا د محیط یو ټکی کیدلای شي؟

a) $|PF|+|PF'|=2a$ b) $|PF|-|PF'|=a$

c) $|PF|-|PF'|=2a$ d) $|PF|-|PF'|=0$

9: د $y = x^2$ د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

a) د y محور ته	b) د x محور ته

c) د x او y محورونو ته	c) د وضعیه کمیاتو مبدأ ته

10: په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربولا عن المرکزیت ښیې؟

a) $e<1$	b) $e=1$	c) $e>1$	d) $e=-1$

11: د $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

a) د y پر محور باندې دی.	b) د x پر محور باندې دی.

c) د x پر محور عمود دی.	d) د y له محور سره موازي دی.

12: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکی څخه مساوي فاصلې لري. د څه په نامه یادېږي؟

a) کره	b) دایره	c) پارابولا	d) بیضوي

13: د $y^2=-4(x+2)$ پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

a) $(2,4)$	b) $(4,2)$	c) $(2,0)$	d) $(-2,0)$

14: د $4x^2+4y^2+8y+3=0$ معادله عبارت ده له:

a) دایرې	b) بیضوي	c) پارابولا	d) هایپربولا

15: د $y=2x$ مستقیم خط د $\frac{(x-1)^2}{4}-(\frac{(y-2)^2}{9}=1$ هایپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

16: د $2y=3x$ مستقیم خط د $2y^2-6y+5x-12=0$ منحني په څو ټکو کې قطع کوي؟

17 : لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

$a)\ x^2+4y^2=4$	$b)\ 9x^2+2y^2=15$

$c)\ 16x^2-96x+9y^2+90y+225=0$	$d)\ x^2+12x-120y+288=0$

18: د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $a=-2$ ، $e=0,75$ دي او لوی قطر یې د y پر محور باندې پروت دی.

b) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $b=64$ $e=0,5$ دي او لوی قطر یې د x پر محور باندې پروت دی.

19: له لاندې معادلو څخه د بیضوي ټول اجزاوې پیدا کړئ.

a) $4(x-1)^2+y^2=4$	b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

20: د پارابولا لاندې معادلې لومړي په معياري شکل وليکئ او بياېې ګرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 - 11y = 0$

b) $y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$

21: د پارابولا لاندې هره يوه معادله په معياري ډول واړوئ:

a) $4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$

b) $2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$

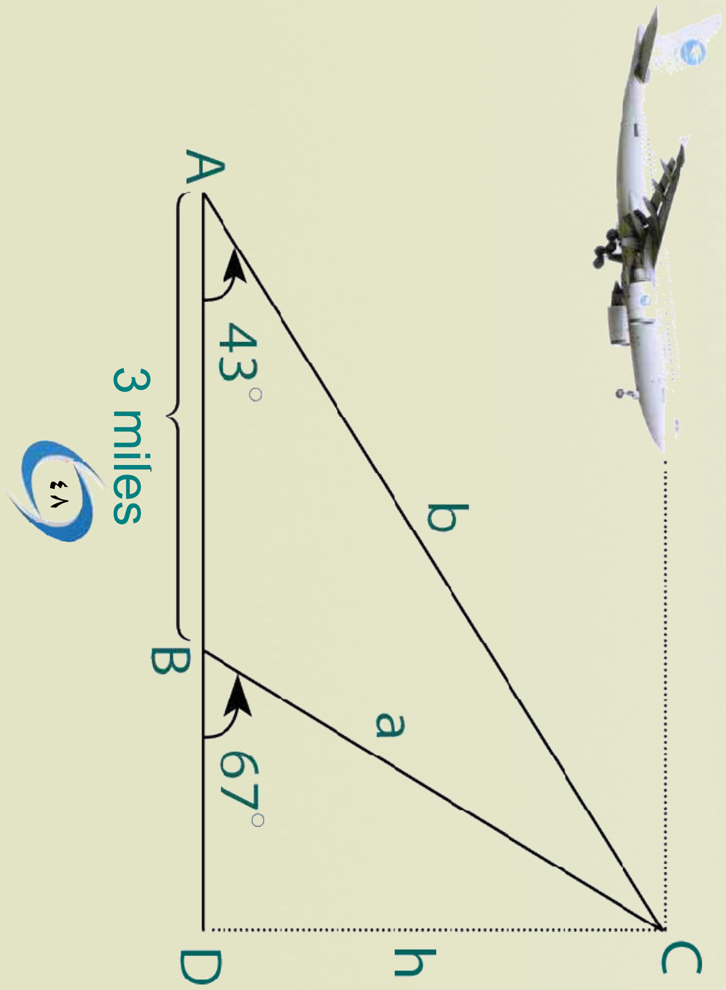
22: د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې $(-4,0)$ او $(4,0)$ د راسونو مختصات او $y = \pm\frac{5}{4}x$ د مجانبونو معادلې وي.

23: د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې $(-1,3)$ ، $(1,3)$ د راسونو مختصات او محراقي اوږدوالی يې 4 واحده وي.

24: د $y = 2x$ مستقيم خط د $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هايپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

دویم څپرکی

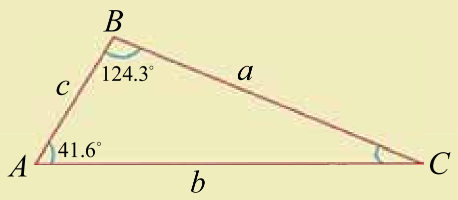
مثلثات


A
B
C
D
43°
67°
3 miles
a
b
h

د ساین قانون

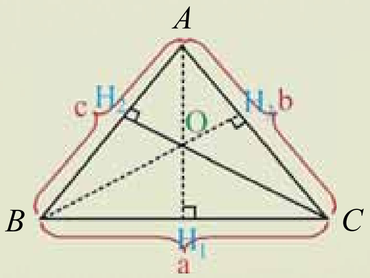
Law of sine

خرنګه کولای شو په مخامخ شکل کې د a د ضلعې او C زاويې اندازه پيدا کړو؟



فعاليت

- د ABC یو حادهالزاويه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی یې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعې د($\overline{AH_1}$, $\overline{BH_3}$, $\overline{CH_2}$) ارتفاعګانې رسم کړئ.
- د ABH_1 او BCH_1 په قايم‌الزاويه مثلثونو کې د ($\overline{AH_1}$) ارتفاع د $\sin B$ او $\sin C$ له جنسه پيدا او يو له بله سره یې پرتله کړئ.
- د ABH_3 او ACH_2 پــه قــايم‌الزاويــه مثلثونــو کــې د ($\overline{BH_3}$) ارتفاع د $\sin A$ او $\sin C$ له جنسه پيدا او يو لـه بله سره یې پرتله کړئ.



له پورتني فعاليت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړای شو.

ثبوت:

د ACH_1 او BAH_1 په قايم‌الزاويه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH_1} = c\sin B \quad .... \quad (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH_1} = b\sin C \quad .... \quad (2)$$

د (1) او (2) اړيکو له پرتلې څخه ليکلی شو چې:

$$c\sin B = b\sin C \,/ \div bc$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \quad \mathrm{I}$$

په همدې ډول د ABH_3 او BCH_3 په قایم‌الزاویه مثلثونو کې لیکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH}_3}{c} \Rightarrow \overline{BH}_3 = c\sin A \;......... (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH}_3}{a} \Rightarrow \overline{BH}_3 = a\sin C \;......... (4)$$

د (3) او (4) اړیکې له پرتلې څخه لرو چې:

$$c\sin A = a\sin C / \div ac$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \;.......... II$$

د I او II اړیکې له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

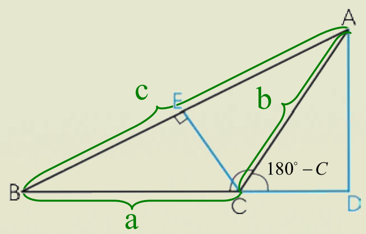
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

پایله: په هر $A\overset{\Delta}{B}C$ کې په داسې حال کې چې A, B, C زاویې او a, b, c د ضلعو اوږدوالې وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

پورتنۍ اړیکه(رابطه) په یوه مثلث کې د ساین د قانون(Law of sine) په نامه یادیږي.

د ساین د قضیې ثبوت په منفرج الزاویه مثلث کې:



د ABC په مثلث کې چې د C زاویه یې منفرجه ده په پام کې نیسو د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاع‌ګانې رسموو.

د ADC په قایم الزاویه مثلث کې لرو: $\sin(180^\circ - C) = \dfrac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متممو زاویو څخه پوهیږو چې: $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو:

$$\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} \;......(I)$$

همدارنګه د ADB له قایم الزاویه مثلث څخه لرو چې: $\sin B = \dfrac{\overline{AD}}{c} \;......(2)$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا یو پربل ویشو:

نو: $$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \;..........................(1) \longrightarrow \text{یا}\; \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$$

اوس د ACE په قايم الزاويه مثلث کې ليکلی شو:

$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b} .....(3)$$

د BEC په مثلث کې:

$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a} .....(4)$$

پورته 3 او 4 رابطې خوا په خوا يو پر بل وېشو او ليکو:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

يا

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} ......(5)$$

اوس د I او II رابطو له پرتلې څخه ليکلی شو چې:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

فعاليت

- زده‌کوونکي دې، د ساين قانون په قايم‌الزاويه مثلث کې وڅېړي او ثبوت دې کړي.

لومړی مثال: که چيرې د ABC په مثلث کې د $B = 60^\circ$, $b = 9cm$ او $c = 6\sqrt{3}\, cm$ وي، د يوې ضلعې او دوو زاويو اندازې يې پيدا کړئ؟

حل: د ساين د قضيې يا قانون له مخې ليکلی شو چې:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

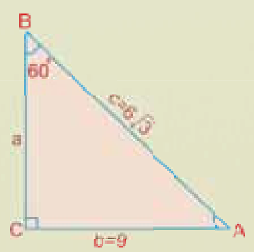
$$\frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3 \cdot 3}{9} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{9}} = 1 \Rightarrow \sin C = 1$$

څرنګه چې: $\sin 90^\circ = 1$ دی، نو: $C = 90^\circ$

همدارنګه پوهېږو چې په يوه مثلث کې:

$$A + B + C = 180^\circ$$
$$A + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$
$$A = 180^\circ - 150^\circ$$
$$A = 30^\circ$$



د a ضلعي قيمت په لاندې ډول پيداکولی شو :

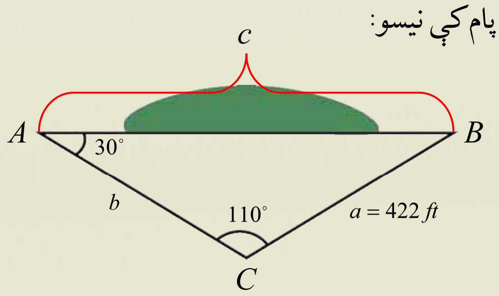
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}\Rightarrow a=\frac{\sin A\cdot b}{\sin B}\Rightarrow a=\frac{\sin 30^\circ\cdot 9}{\sin 60^\circ}$$

$$a=\frac{\frac{1}{2}\cdot 9}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow a=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

$$a=3\sqrt{3}\,cm$$

دويم مثال: يو ساختماني انجينر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې يې يوه غونډۍ پرته ده پيداکړي.

حل: د ساين د قانون په کارولو سره $\sin A$ او $\sin C$ په پام کې نيسو:



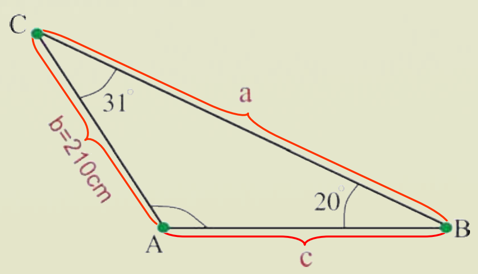
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{422\,ft\cdot\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

څرنګه چې: $\sin 110^\circ=0.9396$ او $\sin 30^\circ=0.5$ دی.

نو: $c=\frac{422\,ft\cdot 0.9396}{0.5}\Rightarrow c=793.0224\,ft$

دريم مثال: په مخامخ شکل کې د دوو زاويو او يوې ضلعې اندازه راکړل شوې ده، د يوې نامعلومې زاويې او دوو ضلعو اندازه پيداکړئ.



حل: پوهېږو چې د يوه مثلث د داخلي زاويو مجموعه 180° ده؛ نو نامعلومې زاويې په داسې پيداکولی شو:

$$A=180^\circ-(31^\circ+20^\circ)=180^\circ-51^\circ$$

$$A=129^\circ$$

د a دپیداکولو لپاره لاند تناسب په پام کې نیسو:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 129^\circ}{a} = \frac{\sin 20^\circ}{210}$$

$$a = \frac{\sin 129^\circ \cdot 210cm}{\sin 20^\circ}$$

څرنګه چې $\sin 20^\circ = 0.342$ او $\sin 129^\circ = 0.7771$ دي؛ نو:

$$a = \frac{0.7771 \cdot 210}{0.342} = \frac{163.191}{0.342} = 477.166cm$$

$$a = 477.166cm$$

اوس د c ضلعې اوږدوالی د $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$ له رابطې څخه پیدا کوو:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{210} = \frac{\sin 31^\circ}{c}$$

$$c = \frac{210cm \cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

څرنګه چې $\sin 31^\circ = 0.5150$ او $\sin 20^\circ = 0.342$ دی د پورته قیمتونو په اېښودلو سره لیکلای شو چې:

$$c = \frac{0.5150 \cdot 210}{0.342} = \frac{108.15}{0.342} = 316.2$$

یادونه:

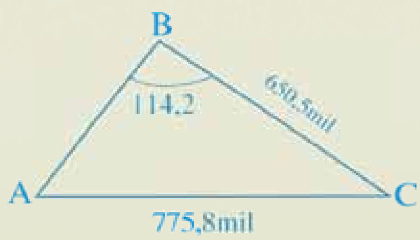
د ساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

- دوې زاويې او دمنځ ضلع يې معلومه وي.(ASA)، A زاويه او S ضلع ښيې.
- دوه ضلعې او د منځ زاويه يې معلومه وي.(SAS)، S ضلع او A زاويه ښيې.

پوښتنې

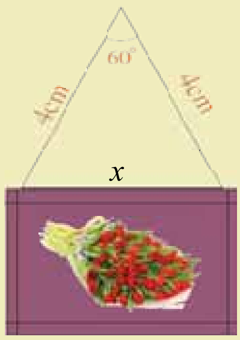
1. که چیرې د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a = 8$, $b = 5$ او $c = 10$ واحده وي، د B د زاویې انـدازه پیدا کړئ.

2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟



د کوساین قانون

Law of cosine



د یوه شکل چارت د مېخ په مرسته د دېوال پر مخ ځړول شوی دی، که چیرې د مېخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یو $4cm$ وي او د منځ زاویه یې 60° وي، د (x) د تار د دوو ټکو ترمنځ واټن د کوم قانون په مرسته پیداکولی شو؟

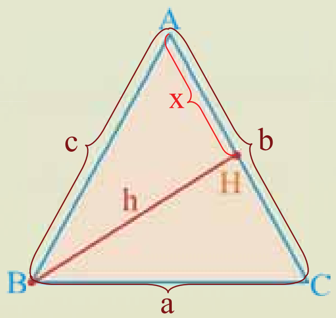
فعالیت

- د ABC کیفي مثلث رسم او د هر رأس مخامخ ضلعې په ترتیب سره په c, b, a وښایاست.
- د B له رأس څخه د $\overline{AC}$ پر ضلع ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوو قایم‌الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په قایم‌الزاویه مثلثونو کې د $\overline{BH}$ او $\overline{HC}$ قیمتونه د B او C زاویو د cos له جنسه، په ترتیب سره پیدا او د فیثاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستی رابطه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتو:

ثبوت: د ABC په حاده‌الزاویه مثلث کې د $\overline{BH}$ ارتفاع رسموو

$$\overline{CH} = b - x \quad , \quad \overline{AH} = x \quad , \quad \overline{BH} = h$$



د BCH په قایم الزاویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b - x)^2 + h^2 \quad .... \quad \text{I}$$

د AHB په قایم الزاویه مثلث کې د h اوږدوالې پیداکوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \quad .... \quad \text{II}$$

د I او II له اړیکو څخه لیکلی شو چې:

$$a^2 = (b - x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

د AHB په قايم‌الزاويه مثلث کې:

$$coA = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos A$$

په پورتنى اړيکه کې د x پر ځاى $c \cdot \cos A$ قيمت ايږدو، نو:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$ يا $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

پايله:په هر مثلث کې دا لاندې اړيکې سمې دي:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$ يا $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$ يا $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$ يا $$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

فعاليت

- په همدې مثلث کې دې دوې نورې اړيکې يعنې $\sin C$ او $\sin B$ زده‌کوونکي ثبوت کړي.

يادونه: د کوساين قانون هغه وخت کارولى شو چې:

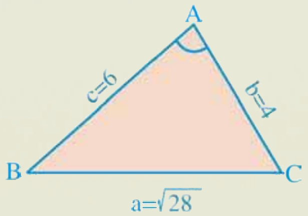
- چې دوې ضلعې او د منځ زاويې يې معلومې وي.(SAS)، S ضلع او A زاويه ښيي.
- د مثلث درې ضلعې معلومې وي.(SSS)، S يوه ضلع ښيي .

د ساين او کوساين د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پيداکولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

د يوه مثلث د عناصرو پيدا کول	
راکړل شوى معلومات	د کارولو فورمول
(SSS) ضلع، ضلع، ضع	د کوساين او وروسته دساين قانون
SAA (زاويه، زاويه، ضلع)	د ساين قانون
ASA (زاويه، ضلع، زاويه)	د ساين قانون
SAS (ضلع،زاويه، ضلع)	د کوساين قانون وروسته د ساين
AAA (زاويه، زاويه، زاويه)	امکان نه لري

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې د هغو دریو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د A زاویې اندازه وټاکئ.

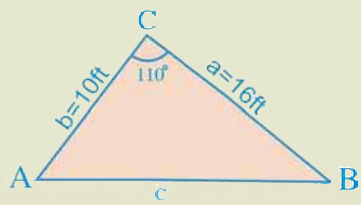
حل:



$$a=\sqrt{28}\quad,\quad b=4\quad,\quad c=6\quad,\quad A=?$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$
$$(\sqrt{28})^2=(4)^2+(6)^2-2\cdot4\cdot6\cos A$$
$$28=16+36-48\cos A\quad\Rightarrow\quad 28=52-48\cos A$$
$$48\cos A=52-28\quad\Rightarrow\quad 48\cos A=24$$
$$\cos A=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$
$$\boxed{A=60^\circ}$$

دویم مثال: د ABC په مثلث کې چې چیرې دوې ضلعې یې هر یوه $a=16$, $b=10$ واحده او د منخ زاویه یې $C=110^\circ$ وي، د c ضلعې اوږدوالی پیدا کړئ.

حل:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$c^2=(16)^2+(10)^2-2(16)10\cos 110^\circ$$
$$c^2=256+100-320\cos 110^\circ$$
$$c^2=356-320\cos 110^\circ$$
$$c=\sqrt{356-320\cos 110^\circ}$$

څرنګه چې : $\cos 110^\circ=0.342$ دی، نو:

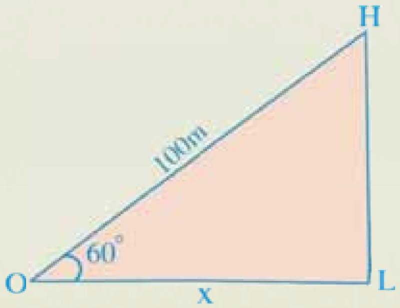
$$c=\sqrt{356-320(0.342)}\quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{356-109.44}$$
$$\boxed{c=15.70}$$

دریم مثال: یو پتنګ(کاغذ پران) له $100m$ واټن تار سره په هوا کې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره 60° زاویه جوړه کړې وي، له ځمکې څخه د پتنګ لوړوالی پیدا کړئ.

حل: د OHL په قایم‌الزاویه مثلث کې لرو، چې:

$$\cos 60^\circ=\frac{\overline{OL}}{\overline{OH}}=\frac{x}{100}\quad\Rightarrow\quad x=100\cdot\cos 60^\circ=100\cdot\frac{1}{2}=50m$$

د کوساین قانون له مخې لرو چې:



$$\overline{HL}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OL}^2 - 2\overline{OH}\cdot\overline{OL}\cdot\cos 60^\circ$$

$$\overline{HL}^2 = (100)^2 + (50)^2 - 2\cdot 100\cdot 50\cdot\frac{1}{2}$$

$$\overline{HL}^2 = 10000 + 2500 - 5000$$

$$\overline{HL}^2 = 7500m^2 \quad \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}\,m$$

$$\overline{HL} = 86.6m$$

څلورم مثال: که چیرې د ABC په مثلث کې $b=5, c=8\,,\, A=60^\circ$ وي، د a او $\sin C$ اندازه پیدا کړئ.

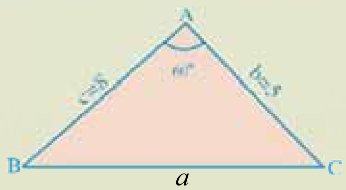
حل: لومړی د کوساین د قضیې په کارلوسره د a ضلع او بیا $\sin C$ پیدا کوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 + 64 - 80\cdot\frac{1}{2} = 89 - 40$$

$$a^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad a = 7$$

د ساین د قضیې له مخې لیکو چې:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$



$$\sin C = \frac{c\cdot\sin A}{a} = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

پوښتنې

1. که چیرې د ABC په مثلث کې $b=4ft\,,\, a=5ft$ او $A=45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاویې پیدا کړئ.

2. که چیرې په یوه مثلث کې $a=3cm$ او $b=9cm$ او د دوی ترمنځ زاویه 60° وي د c د ضلعې اوږدوالی پیدا کړئ؟

د ټانجنټ قانون

Law of tangent

په هر مثلث کې د زاويو او ضلعو ترمنځ د tan له جنسه مخامخ اړيکه شتون لري.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعاليت

- د ساين قانون مساوي په D وليکئ.
- د sin قانون هر دوه، نسبتونه يعنې $\frac{b}{\sin B}$ او $\frac{a}{\sin A}$ په جلا جلا ډول مساوي له D سره وليکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې وليکئ.
- دوه پورتنی اړيکې لومړی جمع او بيا يې تفريق کړئ.
- لاسته راغلي اړيکې يو پر بل وويشئ.
- الجبري محاسبې ترسره او د پايلې فورمول وليکئ.

پورته فعاليت په لاندې ډول ثبوتوو.

ثبوت: د ساين قانون په پام کې نيسو:

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=D$$

$$\frac{b}{\sin B}=D \Rightarrow b=D\sin B \quad , \quad \frac{a}{\sin A}=D \Rightarrow a=D\sin A$$

پورتنی اړيکې لومړی جمع او بيا تفريقوو:

$$a+b=D(\sin A+\sin B)$$
$$a-b=D(\sin A-\sin B)$$

پورتنی اړيکې يو پر بل ويشو:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cdot\cot\frac{A-B}{2}$$

خرنګه چې $\frac{1}{\tan\frac{A-B}{2}} = \cot\frac{A-B}{2}$ دی.

نو په پایله کې لیکلی شو چې:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- لاندې اړیکې پیدا کړئ.

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}} \quad , \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}$$

- پورتنی اړیکې په یوه مثلث کې د ضلعې او زاویې ترمنځ اړیکې د tan اړیکه بلل کېږي.

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې $\frac{b-c}{b+c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ او $A = 90^\circ$ دی، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې په هر مثلث کې:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$B + C = 180^\circ - 90^\circ$$

$$B + C = 90^\circ \quad \Rightarrow \frac{B+C}{2} = 45^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{b-c}{b+c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ A = 90^\circ \\ B = ? \\ C = ? \end{array}\right\} \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}} \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ \quad , \quad \tan\frac{B-C}{2} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{B-C}{2} = 30^\circ \quad \Rightarrow B - C = 60^\circ \ \ldots\ldots\ldots \ \mathrm{I}$$

$$A + B + C = 180^\circ$$

له بلې خوا په هر مثلث کې:

$$B + C = 180^\circ - A \quad \Rightarrow B + C = 180^\circ - 90^\circ$$

$$B + C = 90^\circ \ \ldots\ldots\ldots \ \mathrm{II}$$

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د نوموړي سیستم له حلولو څخه وروسته د B قیمت په لاس راوړو:

$$B-C=60^\circ \quad .... \ \mathrm{I}$$
$$B+C=90^\circ \quad .... \ \mathrm{II}$$
$$2B=150^\circ$$
$$\boxed{B=75^\circ}$$

اوس د B قیمت په اېښودلو سره د C زاویه پیدا کوو:

$$B-C=60^\circ$$
$$75^\circ-C=60^\circ$$
$$-C=60^\circ-75^\circ$$
$$\boxed{C=15^\circ}$$

دویم مثال: که چیرې د ABC په یوه مثلث کې $c=432$, $B=42^\circ\ 30'$ او $a=925$ وي، د مثلث نورې اجزاوې پیدا کړئ.

حل:

$$A+B+C=180^\circ \Rightarrow A+C=180^\circ-B \Rightarrow A+C=180^\circ-42^\circ\ 30'$$
$$A+C=179^\circ\ 60'-42^\circ\ 30' \Rightarrow A+C=137^\circ 30' \ .... \ \mathrm{I}$$
$$\frac{A+C}{2}=\frac{137^\circ\ 30'}{2} \Rightarrow \frac{A+C}{2}=\frac{136^\circ 90'}{2}=68^\circ\ 45'$$
$$\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{a+c}{a-c}$$

اوس د زاویې او ضلعو قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو، یعنې:

$$\frac{\tan 68^\circ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{925+432}{925-432} \Rightarrow \frac{\tan 68^\circ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{1357}{493}$$

یا:

$$1357\cdot\tan\frac{A-C}{2}=493\cdot\tan 68^\circ 45' \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2}=\frac{493}{1357}\cdot\tan 68^\circ 45'$$

له مثلثاتي جدول څخه پوهېږو چې $\tan 68^\circ\ 45' = 2.5714$ دی؛ نو:

$$\tan\frac{A-C}{2} = 0.9341 \quad \Rightarrow \frac{A-C}{2} = 42^\circ\ 59'$$

$$\boxed{A-C = 85^\circ\ 58' \ \ldots\ldots\ \mathrm{II}}$$

اوس د I او II اړيکو په پام کې نيولو سره ليکو:

$$A+C = 137^\circ\ 30' \ \ldots\ldots\ \mathrm{I}$$

$$A-C = 85^\circ\ 58' \ \ldots\ldots\ \mathrm{II}$$

$$2A = 222^\circ\ 88'$$

$$\boxed{A = 111^\circ\ 44'}$$

$$C = 137^\circ\ 30' - A \ \Rightarrow\ C = 137^\circ\ 30' - 111^\circ\ 44'$$

$$C = 136^\circ\ 90' - 111^\circ\ 44'$$

$$\boxed{C = 25^\circ\ 46'}$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \ \Rightarrow\ b = c\cdot\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = \frac{432\sin 42^\circ\ 30'}{\sin 25^\circ\ 46'}$$

$$\sin 42^\circ\ 30' = 0.6756$$

$$\sin 25^\circ\ 46' = 0.4346$$

$$b = \frac{432}{0.4346}\cdot 0.6756 = 994.01\cdot 0.6756 = 671.5582cm$$

پوښتنې

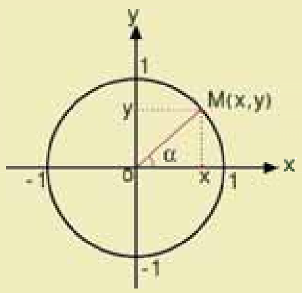
د لاندې ورکړل شوو عناصرو له مخې د مثلث نامعلومې اجزاوې پيدا کړئ.

a) که چيرې $C = 75^\circ$, $B = 60^\circ$, $a = 35ft$ وي.

b) که چيرې $\alpha = 45^\circ$, $b = 37m$ او $\gamma = 75^\circ$ وي.

مثلثاتي مطابقتونه

Trigonometry identities



پوهېږو چې $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ يو الجبري مطابقت دی، ځکه د a او b په ټولو قيمتونو سره د مساوات داوړه خواوې برابرېږي.

آيا $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ يو مثلثاتي مطابقت کيدلی شي؟

فعاليت

- په لاندې جدول کې د α د مختلفو قيمتونو لپاره د A او B افادو قيمتونه بشپړ کړئ.

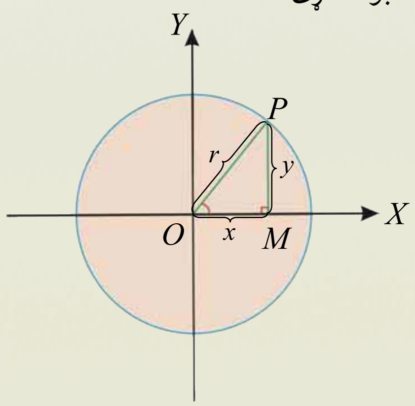
α	$A = \dfrac{\cot\alpha}{\csc - 1}$	$B = \dfrac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د A او B قيمتونه پرتله او اړيکه يې وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاسته راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ټولو قيمتونو سره ، د مساوات دواړه خواوې برابرې شي، مثلثاتي مطابقت بلل کيږي،لکه:
$$\frac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1} = \frac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$$
که α هر قيمت واخلي، د پورته مساوات دواړه خواوې مساوي کيږي.

د α د زاويې د هر قيمت لپاره د $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ مطابقت ثبوت کړئ.



ثبوت: د $C(O,r)$ په مثلثاتي دايره کې د OMP په قـايم- الزاويه مثلث کې ګورو او ليکلی شو چې:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \quad \text{او} \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

له بلې خوا د فيثاغورث له قضيې څخه لرو:

$$y^2+x^2=r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په r^2 ويشو:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2} \quad \text{يا} \quad (\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1$$

اوس د $\frac{y}{r}$ په ځای $\sin\alpha$ او $\frac{x}{r}$ په ځای $\cos\alpha$ ليکو.

نو ليکلی شو: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ يا $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

مثلثاتي اساسي اړيکې عبارت دي له:

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha \quad , \quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \quad , \quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

د مثلثاتو فرعي اړيکې عبارت دي له:

$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1 \quad , \quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad , \quad \sin\alpha\cdot\csc\alpha=1 \quad , \quad \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1 \quad , \quad tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

اوس غواړو د $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ اړيکه ثبوت کړو.

ثبوت: د فيثاغورث د قضيې په کارولو سره ليکو $x^2+y^2=r^2$

د مساوات دواړه خواوې په x^2 ويشو. $\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}\Rightarrow 1+(\frac{y}{x})^2+(\frac{r}{x})^2$

په نتيجه کې په پورته افاده کې د $\frac{r}{x}$ او $\frac{y}{x}$ د قيمتونو په ليکلو سره ليکو: $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

فعالیت

- د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې: $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

په عمومي توګه د مطابقتونو د حل یا ثبوت لپاره د مساوات له یوې خوا له افادې څخه د بلې خوا افاده لاسته راوړو، یعنې یوې خواته مختلفې عملیې لکه مربع کول، تجزیه، ضرب او نورې عملیې سرته رسوو، څو د بلې خوا افاده لاسته راشي، که چېرې په یوه الجبري افاده کې مثلثاتي نسبتونه یوه یا څو زاویې وي، مثلثاتي افاده بلل کېږي، د مثلثاتي اړیکو په واسطه مثلثاتي افادې ساده کولی شو.

د موضوع دلا ښه پوهېدو لپاره لاندې لارښوونې او مثالونه په پام کې ونیسئ.

لومړی مثال: د $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

دویم مثال: د $\sin^2\beta\cdot\cot^2\beta+\cos^2\beta\cdot\tan^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$ مثلثاتي مطابقت ثبوت کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta=\sin^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\cos^2\beta\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$+\tan^2\beta=\cos^2\beta+\sin^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$$

دریم مثال: لاندې افاده د $\cos\beta$ له جنسه حساب کړئ.

$$(1-\sin^2\beta)\ \ (1+\sec^2\beta)=?$$

حل: $(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta)=\cos^2\beta(1+\dfrac{1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta(\dfrac{\cos^2\beta+1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta+1$

څلورم مثال: ثبوت کړئ چې $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

حل:د مطابقت د کيڼ اړخ قوسونو ته انکشاف ورکوو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$
$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$$
$$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cdot 1=2$$

پنځم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

حل:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$
$$\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$
$$\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\csc A$$

شپږم مثال: وښاياست چې $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A$

حل:

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$
$$1+\cot^2 A=\csc^2 A$$
$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=\tan^2 A \quad\Rightarrow\quad \frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\tan^2 A$$
$$\tan^2 A=\tan^2 A$$

اووم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

حل: دکینې خوا په افاده کې د $\cot\alpha$ او $\tan\alpha$ قیمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه اېږدو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

اتم مثال: د $\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\tan x+\cot y$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\sin y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\sin y}\quad\Rightarrow\quad\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\cot y+\tan x=\tan x+\cot y$$

نهم مثال: د $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل: پوهېږو چې $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$ دی.

اوس د معادلې دواړه خواوې په $\frac{\tan x}{\tan x}$ کې ضربوو؛ نو:

$$\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

$$=\frac{\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2\tan x}$$

$$=\frac{\tan x-\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

لسم مثال: د $\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2\sec x$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{1+2\sin x++\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}$$
$$=2\sec x$$

پوښتني

1. د مثلثاتو د اساسي اړيکو په پام کې نيولو سره د هرې پوښتنې معادل افاده پيدا کړئ.

$a)\ \frac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ}$ $\quad b)\ \sqrt{\sec^2\beta-1}$ $\quad c)\ \frac{1}{\cos 80^\circ}$

2. هره افاده د $\sin\beta$ له جنسه پيدا کړئ.

$a)\ \cot\beta\cos\beta$, $\quad b)\ \cot^2\beta$

3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

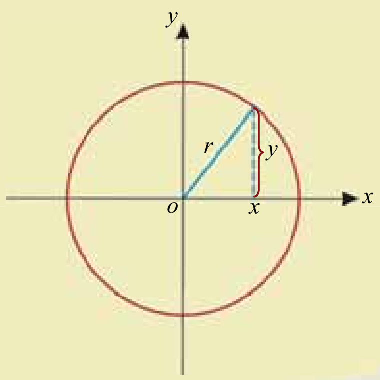
$a)\ \frac{\cos ec\alpha}{\cot an\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha$ $\quad b)\ \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

$c)\ \frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=tag\alpha$ $\quad d)\ \frac{\tan x-\cot x}{\tan+\cot x}=1-2\cos^2 x$

مثلثاتي معادلې

Trigonometric equation

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ يو مثلثاتي مطابقت دی، آيا $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$ يو مطابقت دی که يوه معادله؟



فعاليت

- په لاندې جدول کې د $1-2\sin\beta = 0$ او $1+tag^2\beta = \sec^2\beta$ د β د کومو قيمتونو لپاره صحيح دي.

β	$1-2\sin\beta = 0$	$1+\tan^2\beta = \sec^2\beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

- د β د مختلفو قيمتونو لپاره د $1+\tan^2\beta = \sec^2\beta$ او $1-2\sin\beta = 0$ ترمنځ څه ډول اړيکې شتون لري.
  - آيا $1+\tan^2\beta = \sec^2\beta$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟
  - آيا $1-2\sin\beta = 0$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف په لاس راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ځينو قيمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

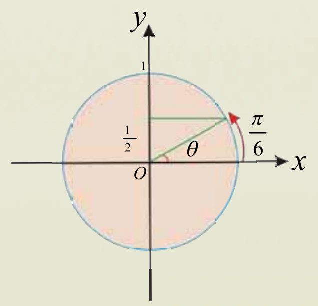
هر مثلثاتي مطابقت يوه معادله کېدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کېدلای.

هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په يو حالت باندې حلولای شو.

لومړی حالت: د $a\sin\alpha + b = 0$ معادله د پورتنی معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

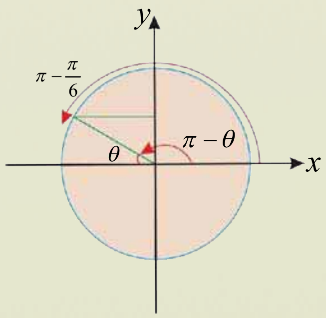
مثال: د $2\sin x - 1 = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: لومړی د $\sin x$ قیمت لاسته راوړو: $2\sin x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2}$



اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ شي.

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$



یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو او هغه زاویې پیدا کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \frac{\pi}{6}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ 4\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ \ldots,\ 2k\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z$$

په دویمه مثلثاتي دایره کې $(\pi - \theta)$ له رابطې څخه هغه زاویې پیداکوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z$$

نو د $\sin x = \frac{1}{2}$ د معادلې حل په لاندې دوو سټونو کې دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{6},\ 2\pi + \frac{\pi}{6}\ ,4\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ 2k\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z\right\}$$

په عمومي ډول پورتني سټونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1 \cup A_2 = A = \left\{x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \quad k \in Z\right\}$$

دویم مثال: د $2\sin x-3=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: $2\sin x-3=0 \Rightarrow 2\sin x=3 \Rightarrow \sin x=\frac{3}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو چې $\sin x=\frac{3}{2}$ شي، دا چې د هرې زاویې $\sin$ د -1 او $+1$ په منځ $(-1\le \sin x\le 1)$ دی، نو هغه زاویه چې $\sin$ یې $\frac{3}{2}$ وي، وجود نه لري، نو په دې اساس معادله حل نه لري.

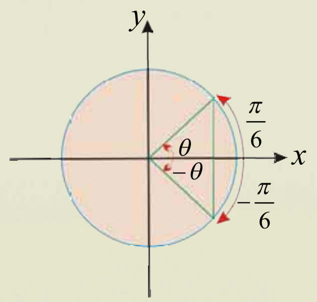
دویم حالت: $a\cos x+b=0$

د پورتنی معادلې د حل مناسب ځواب د پیداکولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $2\cos x-\sqrt{3}=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل:له پورتنی معادلې څخه $\cos x$ لاسته راوړو:

$$2\cos x-\sqrt{3}=0 \Rightarrow 2\cos x=\sqrt{3} \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



اوس د $[0, \pi]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو یا لټوو چې $\cos$ یې $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، هغه له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت دی، نو لیکلی شو چې $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$.

اوس د مثلثاتي دایرې په پام کې نیولو سره ټولې هغه زاویې چې $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، پیداکوو.

$$x=\frac{\pi}{6} \ , \ 2\pi+\frac{\pi}{6} \ , \ 4\pi+\frac{\pi}{6}\ldots$$

$$x=-\frac{\pi}{6} \ , 2\pi-\frac{\pi}{6} \ , \ 4\pi-\frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنیو حلونو سټ داسې لیکل کېږي: $x=2n\pi\pm\theta$

$$A=\left\{x/x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \wedge x=2k\pi-\frac{\pi}{6},\ k\in z\right\}$$

په عمومي توګه د هرې θ زاویې لپاره لیکو: $A=\{x/x=2k\pi+\theta \wedge x=2k\pi-\theta,\ k\in z\}$

دویم مثال: د $2\cos x+\sqrt{2}=0$ معادله په $(0\ ,\ 2\pi)$ انټروال کې څوحلونه لري؟

حل: $2\cos x=-\sqrt{2} \Rightarrow \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د $(0, 2\pi)$ په انټروال کې $\cos x=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ کېږي.

له دې امله د معادلې حل $x=\frac{3\pi}{4}$ په لاس راځي.

د حل سټ یې مساوي دی له:

$$A=\left\{x/x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\ \wedge\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in z\right\}$$

لیدل کېږي چې معادله د $(0\ ,\ 2\pi)$ په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=0}x_1=\frac{3\pi}{4}$$

$$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=1}x_2=\frac{5\pi}{4}$$

دریم حالت: $\tan x+b=0$

د عمومي حل د پیداکولو لپاره لاندې مثالونو ته ځیر شئ.

مثال: $\tan x-\sqrt{3}=0$ حل کړئ.

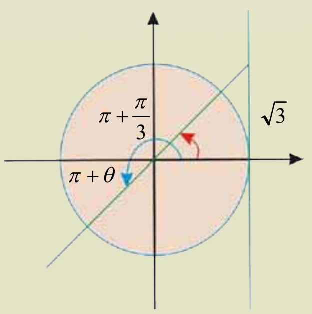
حل: له پورتنی تساوي څخه $\tan x$ په لاس راوړو: $\tan x=\sqrt{3}$

اوس د $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$ په انټروال کې د x هغه زاویه لټوو چې $\tan x=\sqrt{3}$ وي او هغه زاویه له $\frac{\pi}{3}$ یا 60° څخه عبارت دی.

له دې امله پورتنی معادله د $\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$ په صورت لاسته راځي، په مثلثاتي دایره کې وینو چې کومې زاوېې له $\tan\frac{\pi}{3}$ سره مساوي دي.

$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3},\ldots\right\}$$

$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3},3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ldots\right\}$$



په عمومي ډول پورتنی ستونه داسې لیکلی شو چې: $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{3}\quad k\in Z\right\}$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاویې لپاره لرو چې: $A=\{x/x=k\pi+\theta\ ,\quad k\in Z\}$

دویم مثال: لاندې معادله حل کړی.

$$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:

$$\tan x=\tan\frac{\pi}{6}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{6}$$

د معادلې د حل سټ $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{6}\quad k\in Z\right\}$

دریم مثال: د $\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})$ د معادلې حلونه د $[0\ ,\ 2\pi]$ په انټروال کې لاسته راوړئ.

حل:

$$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(x+\frac{\pi}{3})$$

$$2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

د k پر ځای صحیح عددونه لیکو، تر څو زاویې چې د $[0\ ,\ 2\pi]$ په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12}\ \begin{cases}\xrightarrow{k=0}\ x_1=\frac{7\pi}{12}\\[2mm] \xrightarrow{k=1}\ x_2=\pi+\frac{7\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}\end{cases}$$

څلورم حالت: د $\cot\ x+b=0$ معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

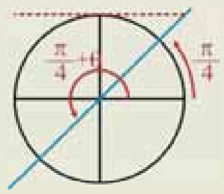
لومړی مثال: د $\cot\ x-1=0$ معادله حل کړئ.

حل: له پورتنی معادلې څخه $\cot x$ پیداکوو: $\cot x-1=0\quad\Rightarrow\quad\cot x=1$

اوس د $[0,2\pi]$ په انټروال کې هغه زاویه ګورو چې $\cot$ یې $(+1)$ وي او هغه زاویه لـه $\frac{\pi}{4}$ یا 45° څخه عبارت ده :

نو:

$$\cot x = \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$



$$x = \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, \ldots$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4}, 5\pi + \frac{\pi}{4}, \ldots$$

نو د معادلې د حل سټ په لاندې ډول دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, \ldots\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4}, 5\pi + \frac{\pi}{4}, \ldots\right\}$$

$$A = \left\{x / x = k\pi + \frac{\pi}{4}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} \quad k \in Z\right\}$$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره داسې ليکو:

$$A = \{x / x = k\pi + \theta \quad k \in Z\}$$

دريم مثال: د $\cot 3x = \cot x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پيدا کړئ.

$a)\quad 3\cos x + 5 = 0$

$b)\quad 4\tan x + \cot x - 5 = 0$

$c)\quad \tan x = \sqrt{3}$

دویمه درجه مثلثاتي معادلې

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړې دي اوس دویمه درجه مثلثاتي معادلې څېړو. د مثلثاتي معادلې عمومي شکل عبارت دی له: $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$ چې c, b, a او d ثابت عددونه دي.

$$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$$

لومړی مثال: د $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: په پورتنی معادله کې د $\sin x$ پر ځای y لیکو، او معادله داسې لیکلی شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچنی زاویه چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي، له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت ده نو:

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & \\ & k \in Z \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} & \end{array} \right\}$$

او یا لیکلی شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

په همدې ډول د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره ډېره کوچنۍ زاویه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول له مخې د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره $19^\circ\ 30'$ یا $\frac{13\pi}{120}$ دی.

$$A = \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{13\pi}{120} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{13\pi}{120} \end{array} \quad k \in Z \right\}$$

دویم مثال: د $\cos 2x + \sin x = 0$ معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ دی، نو لیکلی شو چې:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

که چیرې په پورتنی معادلې کې د $\sin x$ په ځای y وضع کړو، نو لیکو:

$$2y^2 - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2y+1)(y-1) = 0$$
$$2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = -1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 1$$

د $\sin x = y$ د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولي دي، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\sin x = y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\sin x = y_2 = 1$$

په دې ډول د $\sin x = -\frac{1}{2}$ لپاره هغه کوچنۍ زاویه چې $\sin$ یې $-\frac{1}{2}$ وي له $\frac{7\pi}{3}$ څخه عبارت ده.

بنا پر دې د حلونو سټ يې عبارت دی له:

$$A=\begin{cases}\sin x=1 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \sin x=-\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; x=\dfrac{7\pi}{6}\end{cases}$$

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{2}\,,\;2\pi+\frac{\pi}{2},\;4\pi+\frac{\pi}{2},\;\ldots\right\}$$

$$A_2=\left\{2\pi+\frac{7\pi}{6},\;4\pi+\frac{7\pi}{6},\,6\pi+\frac{7\pi}{6},\;\ldots\right\}$$

يا په عمومي ډول:

$$A=\left\{x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}\quad,\quad x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\;,\;n=0,1,2,3\;\ldots\right\}$$

دريم مثال: د $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$$
$$\sin x=0\quad\Rightarrow\quad x_1=0^\circ$$
$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$
$$2\sin x=\sqrt{2}$$
$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سټ عبارت دی له:

$$A_1=\{0^\circ\,,\,\pi\,,\,3\pi\,,\,5\pi\,,\,\ldots\}$$
$$A_2=\{2\pi\,,\,4\pi\,,\,\ldots\}$$

په عمومي توګه ليکلای شو:

$$x=n\pi+(-1)^n\theta$$

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د حل سټونه پیدا کړئ.

1- $\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

2- $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$

3- $\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو یا سیستمونو حل

د الجبري معادلو سیستم مـو حـل کـړ. آیـا د مثلثـاتي معادلو سیستم حلولای شئ؟

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

دغه معادلې په شپږو ګروپونو باندې وېشلی شو:

لومړی ګروپ: د دغه ګروپ معادلې په لاندې اتو سیستمونو کې راټولې شوې دي.

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده، x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.یو له دغـو سیستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases}\sin x + \sin y = a \ldots \ \mathrm{I}\\ x + y = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \ \mathrm{II}\end{cases}$$

د لومړی معادلې قیمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره لیکو، ځکه چې د دوو ساینونو مجموعه ده.

$$\sin x + \sin y = a$$

په دې اساس:

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a \ldots \ I\\ x + y = \alpha \ldots . II\end{cases}$$

اوس له II معادلې څخه د $x+y$ قیمت یعنې α د I په معادله کې اېږدو:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots \ I$$

د I اړیکې دواړه خواوې په $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ باندې وېشو:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

تبصره: د پورتني معادلې ښی لوری له $+1$ څخه لوی او له -1 څخه کوچنی نه دی، ځکه چې د قوس یـا زاویې ساین دی. یا په بل عبارت مربع یې له یو څخه لوی نه دی.

$$-1 \le \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

پورتنی غیرمساوات د $0 < \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} < 1$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

دواړه خواوې په $4\sin^2\frac{\alpha}{2} \ne 0$ کې ضربوو:

$$a^2 \le 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره صدق کوي او که نه؟ $a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$

د a او α قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$1 - 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \le 0 \Rightarrow 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 4(\sin\frac{\pi}{4})^2 \le 0$$

$$1 - 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 0 \Rightarrow 1 - 4\frac{2}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le 0$$

لیدل کیږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحویل د فورمولونو په مرسته د لومړي معادلې کیڼ لوری شکل ته تغییر ورکوو: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$

خرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ له دې امله $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ کېږي؛نو: $2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=1$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1\Rightarrow\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}\text{.........}\ I\\ x+y=\frac{\pi}{2}\text{........}\ II\end{cases}\ \Rightarrow\ 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ 2x=\frac{2\pi}{2}\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{2}$$

د x قیمت په I معادله کې اېږدو نو د y قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2}-y=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$y=0$$

دویم ګروپ: ددغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\cos y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\sin y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cos x\cdot\cos y=a\end{cases}$$

خرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی له: $-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$

دویم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړي.

$$\begin{cases}x+y=\pi\\ \sin x\sin y=1\end{cases}$$

حل: په پورتنی سیستم کې $a=1$ ، $\alpha=\pi$ دی د دغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos\ \frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

د سیستم د حل شرط ته په کتنې سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2\frac{\pi}{2} \le a \le \sin^2\frac{\pi}{2}$$
$$0 \le a \le 1$$

د II معادلې کیڼ لوری د تحویل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

څرنګه چې $\sin x \sin y = 1$ دی، بنا پر دې $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2$

له بلې خوا $x+y=\pi$ دی نو: $\cos(x-y) - \cos\pi = 2$

همدارنګه پوهېږو چې $\cos\pi = -1$ دی.

نو:

$$\cos(x-y) - (-1) = 2 \Rightarrow \cos(x-y) + 1 = 2$$
$$\Rightarrow \cos(x-y) = 2-1 \Rightarrow \cos(x-y) = 1$$
$$\cos(x-y) = \cos 0^\circ$$
$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

د I له معادلې څخه د x قیمت پیداکوو:

$$x + y = \pi \Rightarrow x + x = \pi \Rightarrow 2x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad , y = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow x = y = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}$$

دریم ګروپ: دغه ګروپ څلور لاندې سیستمونه تشکیلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases}$$

چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

دریم مثال: لاندې مثلثاتي سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases}$$

حل: لیدل کېږي چې دغه سیستم له دریم ګروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کړنه کوو یعنې د سیستم دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

د $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ او $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ قیمتونه په پورتني اړیکه کې اېږدو:

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

څرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ سره کېږي.

$$\cot\frac{\pi}{4}\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا $\cot\frac{\pi}{4}=1$ دی نو معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2} = \tan 15^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$x-y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

د معادلو سستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} \\ x-y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

اوس د x قیمت په پورتنی یوه معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x - y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} - y = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = y \Rightarrow \frac{2\pi - \pi}{6} = y$$

$$y = \frac{\pi}{6}$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3} \text{ او } y = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$$

خلورم گروپ: دغه گروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases}$$

څرنګه چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $a^2 - 4 + 4a\cot\alpha \geq 0$

څلورم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

حل: کولی شو لومړی معادله داسې ولیکو: $\tan(x-y) = \tan\frac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهېږو چې $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} = \sqrt{3}$

د $\tan x - \tan y = -2\sqrt{3}$ قیمت په پاسنی معادله کې اېږدو:

$$\frac{-2\sqrt{3}}{1 + \tan \cdot \tan y} = \sqrt{3}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\sqrt{3}$ باندې وېشو او لیکو.

یا: $\dfrac{-2}{1 + \tan \cdot \tan y} = 1 \Rightarrow 1 + \tan x \cdot \tan y = -2$

یا: $\Rightarrow \tan x \cdot \tan y = -3$

نو:

$$\begin{cases} \tan x \cdot \tan y = -3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathrm{I} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \ldots\ldots\ \mathrm{II} \end{cases}$$

د $\tan x$ قیمت له II معادلې څخه په لاس راوړو په I کې یې ایږدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$

$$(-2\sqrt{3} + \tan y)\tan y = -3$$

$$\tan^2 y - 2\sqrt{3}\tan y + 3 = 0$$

$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

هغه مثبت کوچنی قوس چې په دغه معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $y = \frac{\pi}{3}$

د y د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$x = 2\frac{\pi}{3}$$

پنځم ګروپ: دغه ګروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

د تېر په څېر بیاهم α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y معلوم قوسونه یا زاویې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $-1 \le \frac{1+a}{1-a}\cos\alpha \le 1$

پنځم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7\frac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم ګروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول یې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

د $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ او $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$ قیمتونه په اړونده اړیکه کې اېږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$

د $x+y$ قیمت د سیستم له لومړی معادلې څخه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنګه چې $\tan x \cdot \tan y = 0$ سره راکړل شوی دی، نو لیکو:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو باید صورت يې له صفر سره برابر شي؛ یعنې:

$$\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x - y = \frac{5\pi}{6}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له:

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x - y = 5\frac{\pi}{6} \\ x + y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \quad , \qquad x = \pi$$

د x قیمت د I په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=5\frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi-y=5\frac{\pi}{6} \quad , \quad -y=\frac{5\pi}{6}-\pi$$

$$y=\pi-\frac{5\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{6\pi-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

شپږم گروپ: په دغه گروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له: $-1 \le \dfrac{a-1}{a+1}\sin\alpha \le 1$

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=-3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{-3-1}{-3+1}=2$$

د مساوات په کیڼي خوا کې د صورت او مخرج قیمتونه د sin او cos له جنسه داسې ایږدو:

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}=2 \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2$$

$$2\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

څرنگه چې $x-y=\dfrac{\pi}{2}$ دی، نو:

$$2\sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\sin(x+y)=\frac{1}{2}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $\frac{\pi}{6}$ چې د معادلو لاندې سیستم جوړوو:

$$x+y=\frac{\pi}{6}$$

$$x-y=\frac{\pi}{2}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6} \text{.....I} \\ x-y=\frac{\pi}{2} \text{.....II} \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

د x قیمت د I په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3}+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$

$$y=\frac{\pi-2\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$

$$y=-\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او ووایاست چې په کوم ګروپ پورې اړه لري؟

$a)\ \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases}$ $\qquad b)\ \begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$

د څپرکي مهم ټکي

د ساین قانون: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې شته:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه د ساین د قانون په نوم یادېږي.

د کوساین قانون: د ABC په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالي یې a, b او c وي، د ضلعو او زاویو تر منځ لاندې اړیکې شته:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

د tan قانون: د ABC په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاویو ترمنځ د tan له جنسه لاندې اړیکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}} \quad , \quad \frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}} \quad , \quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مثلثاتي مطابقت: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې د ټولو قیمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي.

مثلثاتي معادلې: هغه مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلثاتي معادلو سیستمونه

مثلثاتي معادلو سیستمونه په لاندې شپږو ګروپونو وېشل شوي دي:

لومړی ګروپ:

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases}$$

څلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases}$$

پنځم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپږم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په ځیر سره ولولئ، هرې یوې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب یې په نښه کړئ.

1. که چیرې $A = 20^\circ$, $b = 10$, $c = 7$ وي، د a د ضلعې اوږدوالی عبارت دی له:

$a)$ 16.4 $b)$ 16 $c)$ 15.9 $d)$ 16.8

2. که چیرې $a = 8$, $b = 5$ او $c = 10$ وي، د B زاویې اندازه عبارت ده له:

$a)$ 28° $b)$ 29° $c)$ 29.4° $d)$ 28.5°

3. که چیرې $A = 48^\circ$, $B = 22^\circ$ ، $a = 5$ وي د b اوږدوالی عبارت دی له:

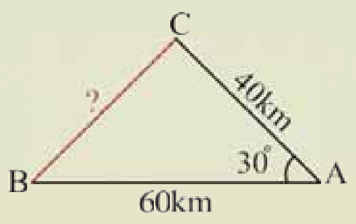
$a)$ 8 $b)$ 8.5 $c)$ 9 $d)$ -9.5

4. د $\sec x(\sec x - \cos x)$ مثلثاتي مطابقت مساوي دی له :

$a)$ $\tan x$ $b)$ $\dfrac{1}{\tan x}$ $c)$ $\cot x$ $d)$ $\tan^2 x$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که چیرې د $A = 30^\circ$, $c = 8$, $b = 5$ واحده وي، د a ضلع او $\sin C$ پیدا کړئ.
2. که په یوه مثلث کې $a = 8$, $b = 5$, $c = 10$ واحده وي، د B زاویې اندازه پیدا کړئ.
3. د ABC په مثلث کې که $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ او $A = 30^\circ$ وي، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.
4. دوې بېړۍ د A له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پیل کوي چې د منځ زاویه یې 30° ده، که له یوه ساعت څخه وروسته، لومړی بېړۍ $40\,km$ او دویمه بېړۍ $60\,km$ واټن وهلی وي، د دوو بېړیو ترمنځ واټن پیدا کړئ.



5. د $\cot^2 \beta$ د $\sin \beta$ او $\cos \beta$ له جنسه محاسبه کړئ.

6. لاندې مطابقتونه ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$ $\qquad b)\ \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

$c)\ \tan A+\cot A=2\csc 2A$ $\qquad d)\ \dfrac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\cot\dfrac{B}{2}$

$e)\ \dfrac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\dfrac{A}{2})$ $\qquad f)\ \cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

$a)\ \cos^2 x+\cos^4 x=0$ $\qquad b)\ \tan^2 x-4\tan x+3=0$

$c)\ 4\cos\beta-2=0$ $\qquad d)\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

$e)\ \cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

8. آیا د $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ مساوات یو مطابقت دی او که معادله؟

9. لاندې افادې ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$ $\qquad b)\ 1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=?$

$c)\ \cos 4x+2\sin^2 2x$ $\qquad d)\ (\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2$

10. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخیص او بیا یې حل کړئ.

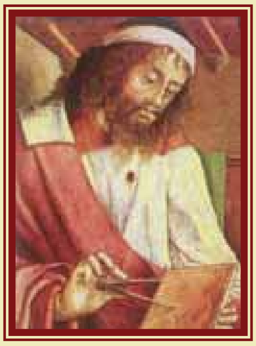
$a)\ \begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \cos x\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ $\qquad b)\ \begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$

دریم څپرکی

فضايي هندسه

اقلیــدس د دوه اړخیــزې(دوه‌بعــدي) او درې اړخیزې(درې بعدي) هندسې بنسټ ایښودونکی دی.

اساسي مفاهيم او اکسيومونه



د اقليدس د هندسي مفاهيمو څېړنې په دوو بعدونو کې د مسطحې هندسې په نامه يادېږي.
هغه هندسي مفاهيم، چې په درېو اړخونو(بعدونو) کې څېړل کېږي، فضايي هندسه نومېږي.

فعاليت

- د مفاهيمو په برخه کې لکه لومړني اصطلاحات، دليل، برهان او قضيو په هکله فکر وکړئ. خپل مينځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.

له پورتني بيان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعريف وکړو:

لومړنۍ اصطلاحګانې Postulates: د هر علم په برخه کې د لومړنيو اصطلاحګانو څخه سترګې پټولای نشو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي لومړني اصطلاحات بلل کېږي. لکه: ټکی(نقطه)، کرښه(خط)، مستوي او فضا.

منطقي دليل او برهان Logical Reason: برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړنو څخه و روستنيو څېړنو ته رسېږي چې د هغې سموالی مخکې منل شوی وي. موږ هم کولای شو، هغه و منو.

قضيه Theorem : هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يو لړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی(نقطه): موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنی اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، دميزڅنډه او د خط کش تېغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. د مستقيم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه يوازې او يوازې يوه مستقيمه کرښه تيرېدلای شي مستقيم خط د لومړنی اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

بايد فکر مو وي چې يو مستقيم خط دواړو خواوو ته تر لايتناهي پورې غزيدلای شي.

لومړی اصل: دوې ښکاره او ټاکلې نقطې يوازې او يوازې يو مستقيم خط څرګندوي.

دويم اصل: هر مستقيم خط لږ ترلږه دوې څرګندې نقطې لري چې په يو مستقيم خط باندې واقع دي، لږ تر لږه داسې درې نقطې شتون لري چې په يوه مستقيم خط باندې واقع نه وي.

دريم اصل: کولای شو په يوه مستقيم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ يوه دريمه نقطه په لاس راوړو.

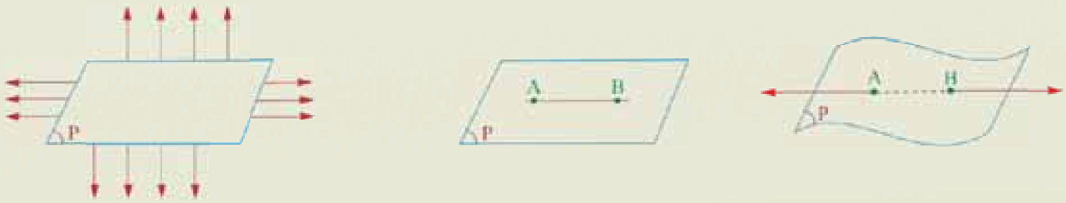
مستوي: د ولاړو اوبو سطح او د ټولګي تخته د مستوي مفهوم څرګندوي او مستوي د لومړنی اصطلاح (تعريف شوې نه ده) په توګه منل کېږي.

لومړی اصل: په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د يوه مستقيم خط په استقامت واقع نه وي.

دويم اصل: له هرو دريو نقطو څخه، چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تيرېږي.

دریم اصل: که چیري د یوه مستقیم خط دوې نقطې په یوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی.

په مسطحه هندسه کې د مستوي رسمیدلوته اړتیا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه دکاغذ مخ، د لرګي تخته، چې هر یو یې یوه مستوي څرګندوي رسمیږي، خو په فضایي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتیا شته، ځکه چې په فضایي هندسه کې مستوي یوه نه، بلکې ډیرې دي. زیاتره په فضایي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطیل او یا هوارې سطحې په واسطه ښودل کیږي او په یوه کونج کې یې یو توری لیکي.



مستوي نه ده   محدوده مستوي   نا محدوده مستوي

دا مستوي ګانې چې په تېرو شکلونو کې لیدل کیږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلایتناهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي ګانې په پورته شکلونو کې لیدل کیږي هغه متوازي الاضلاع او مستطیل نه دي، بلکې د مستوي په یوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او ریاضي کې استعمالیږي، په فضایي هندسه کې هم استعمالیږي.

هغه اکسیومونه، چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضایي هندسه کې هم له دې اکسیومونو څخه کار اخیستل کیږي.

سربیره په مسطحه هندسه په فضایي هندسه کې هم یو لړ ځانګړي اکسیومونه شته چې په لاندې ډول بیانیږي.

د مستوي لومړنی اکسیوم: هغه مستقیم خط چې د مستوي دوې مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

د مستوي دویم اکسیوم: له هغو دریو نقطو څخه چې په یوه مستقیم خط واقع نه دي، یوازې او یوازې یوه مستوي تیریږي.

د متقاطع مستوي ګانو اکسیوم: که چیرې دوې مستوي ګانې یو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چیرې یو ګډ مستقیم خط ولري، د غه متقاطع خط ته د دوې مستوي ګانو مشترک فصل وایي.

فضا: فضا هم د لومړنی اصطلاح (تعریف شوې نه ده) په توګه پېژنو.

لومړی اصل: دلایتناهي نقطو مجموعې ته فضا وایي.

دویم اصل: لږتر لږه څلور داسې نقطې شته چې په یوه مستوي کې واقع نه دي.

پوښتنې

1. څرګنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکی مېز د څلورو پښو لرونکی مېز په پرتله ټینګ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنی اصطلاح ګانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تیریدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.

په درېٖ بُعدي فضا کې کرښه او مستوي

په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم

کوم حالتونه لري؟

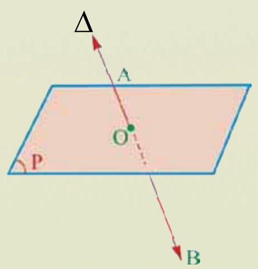
درېٖ بُعدي فضا:

هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درېٖ بُعدي فضا ده. دا درېٖ بُعدي فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومونو څخه ده.

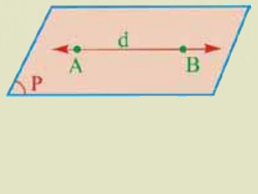
فضا دلایتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتیب سره یو بعد، دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د سټ یوه برخه(جزء) دی.

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت: یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي لاندې درې حالتونه لري:

1. **که چیرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. دمثال په ډول په دې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي د O په نقطه کې قطع کړې ده.**

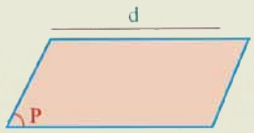


2. که چیرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه له مستوي سره منطبقه



ده او یا داسې ویل کېږي چې مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله ده،د مثال په ډول د d مستقیم د P په مستوي کې شامل دی.

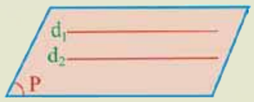
3. که چیرې یوه مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره هیڅ ګډه نقطه و نه لري، دا مستقیم له مستوي سره موازي دي، مثلاً په لاندې شکل کې د d مستقیم خط له P مستوي سره موازي دی.



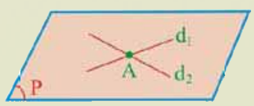
له یو بل سره د دوو مستقیمو کرښو نسبي حالت:

1- که چیرې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې شامل وي، نوموړي خطونه د همغې مستوي خطونه بلل کیږي، او یو له لاندینیو حالتونو(وضعیتونو)څخه لري.

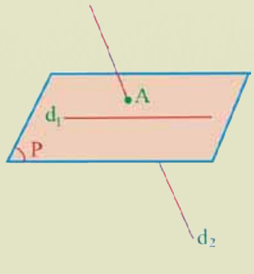
په یوې مستوي کې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل کېږي چې هېڅ ګډټکی ونه لري.



2- په یوه مستوي کې دوه خطونه، چې یوه ګډه(مشترکه) نقط ولري، متقاطع خطونه بلل کیږي.

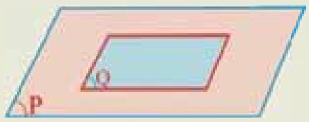


3- دوه مستقیم خطونه چې په یوه مستوي کې پراته نه وي او کومه مشترکه نقطه هم و نه لري، متنافر خطونه بلل کیږي؟

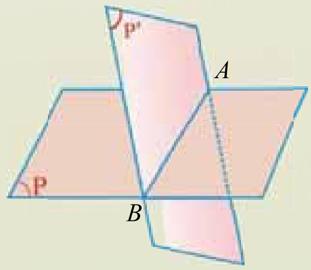


د دوو مستويګانو نسبي حالت:

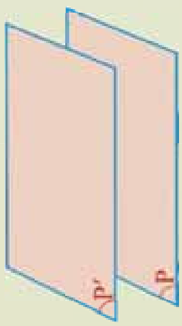
په عمومي ډول دوې مستويګانې لاندې درې حالتونه لري.



منطبق: که چیرې دوې مستويګانې لږ تر لږه درې مشترکې نقطې ولري چې د یو مستقیم خط په امتداد پرتې وي، یو پر بل منطبقې مستويګانې بلل کېږي، لکه په مخامخ شکل کې د P او Q دوې مستويګانې یو پر بل منطبقې دي.



متقاطع مستويګانې: که چیرې دوې مستويګانې یو ګډ مستقیم خط ولري متقاطع مستويګانې بللې کېږي. دغه د AB مشترک خط ته مشترک فصل هم وایي. لکه مخامخ شکل.



3- که چیرې دوه مستويګانې هیڅ کوم ګډ ټکی و نه لري، سره موازي دي، د مثال په توګه د P او P' مستويګانې.

فعالیت

- په فضا کې له یوې نقطې څخه څو مستقیم خطونه تیرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقیم خطونه تیرېږي؟
- له یوې نقطې څخه څو مستوي ګانې تیرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تیرېږي؟
- له دریو نقطو څخه څو مستوي ګانې تیرېږي چې درې واړې نقطې پکې شاملې وي؟

پوښتنې

1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرتې دي، د کوم دليل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟

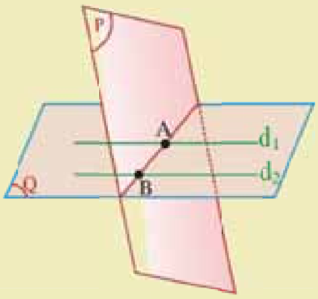
2- که د Δ مستقيم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مسقيم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

3- که چيرې د AB مستقيم خط او د P مستوي د M او K دوې ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقيم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

4- د B, A او C نقطې د P په مستوي کې واقع دي او هم د B, A او C نقطې د p' په مستوي کې پرتې دي، د P او p' مستوي‌ګانې يوه له بلې سره څه اړيکه لري؟

په فضا کې موازي مستقیم خطونه

آیا په فضا کې مستقیم خطونه موازي دي؟



تعریف:

دوه مستقیم خطونه چې په یوې مستوي کې پراته او ګډه نقطه و نه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

د موازاتو اکسیوم: له یوې خارجي نقطې څخه له یوې مستقیمې کرښې سره یوازې او یوازې یوه موازي مستقیمه کرښه رسمولای شو او بس.

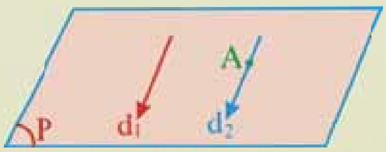
فعالیت

- د A ټکی د P مستوي او د d_1 مستقیم خط چې د A ټکی وربانديې پروت نه وي، په پام کې ونیسئ؟
- د A ټکی او د d_1 له مستقیم خط څخه څو مستويګانې تېریدلای شي؟ ولې؟

له پورتني فعالیت څخه د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: له یوې خارجي نقطې څخه له یوه مستقیم خط سره یوازې یو موازي مسقیم خط رسمولای شو او بس.

ثبوت: د A له نقطې او د d_1 له مستقیمې کرښې څخه یوازې یوه د P مستوي تیرېږي، ولې؟



اوس د P په مستوي کې د A له نقطې څخه یوازې د d_2 مستقیم خط د d_1 له مستقیم خط سره موازي رسمولای شو.

(پورتنی ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتنی دعوا چې ټکی او خط په فضا کې وي، هم سموالی لري.

فعالیت

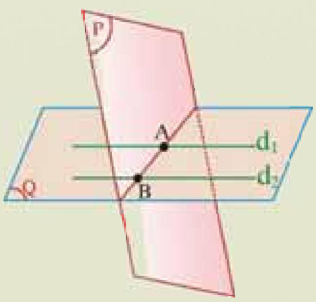
دوه د d_1 او d_2 موازي خطونه او یوه د A نقطه د P له مستوي څخه بهر(خارج) په پام کې ونیسئ.

- آیا د d_1 او d_2 مستقیم خطونه یوه بله مستوي ټاکلي شي؟
- که چیرې د P مستوي د Q مستوي د A په ټکی کې قطع کړي، آیا د P مستوي به د d_2 مستقیم خط هم قطع کړي؟
- آیا دوې مستوي‌گانې یوه بله د یوه مستقیم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: که دوه مستقیم خطونه موازي وي او مستوي یو له هغو څخه قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

ثبوت: د d_1 او d_2 یو له بل سره موازي مستقیمونه د Q په مستوي کې پراته دي.



که د P مستوي د d_1 مستقیم د A په نقطه کې قطع کړي، نوموړې مستوي د d_2 مستقیم هم د B په نقطه کې قطع کوي د تعریف له مخې د d_1 او d_2 موازي خطونه یوه د Q مستوي ټاکي، د P او Q مستوي-ګانې د A یوه مشترکه نقطه لري، که چیرې دوې مستوي‌ګانې یوه بله په یوه نقطه کې قطع کړي، نو ویلای شو چې هغوی یو بل د یوې مستقیمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې امله د P او Q مستوي‌ګانې د d_2 مستقیمه کرښه د B په نقطې کې هم قطع کوي. ځکه یو مستقیم خط چې په یوې مستوي کې له دوو موازي خطونو څخه یو قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

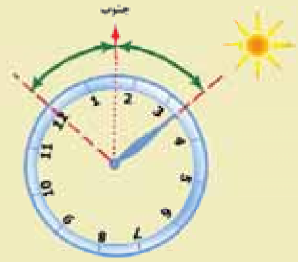
پوښتنې

1- که چیرې دوه مستقیم خطونه له یوه دریم مستقیم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقیم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟

2- که چیرې د E او F مستوي‌ګانې سره موازي او د L_1 مستقیم خط د E مستوي کې او د L_2 مستقیم خط د F په مستوي کې واقع وي آیا $L_2 // L_1$ دی؟

3- که د E او F مستوي ګانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آیا د E او F ګډ فصل د E او P له مشترك فصل او د F او P له مشترك فصل سره موازي دی؟

په فضا کې د دوو مستقیمو کرښو تر منځ زاویه



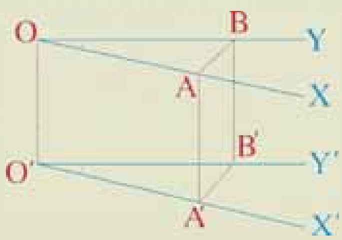
که چیرې د یوې زاویې دوراني لوری د ساعت د عقربې په مخالف لوری حرکت وکړي، زاویه مثبت او که د ساعت د عقربې په همجهت(عین لوری) وي زاویه منفي ده.

فعالیت

- د XOY او $X'O'Y'$ زاوېې داسې په پام کې ونیسئ چې ضلعې یې سره موازي او هم جهته وي.
- د $\overline{OX}$ او $\overline{O'X'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{O'A'}$ دوه مساوي قطعه خطونه او د $\overline{OY}$ او $\overline{O'Y'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ مساوي قطعه خطونه بیل کړئ.
- د $OAA'O'$ شکل، کوم هندسي شکل لري، دلیل یې ووایاست، د OAB او $O'A'B'$ جوړ شوې مثلثونه له یو بل سره څه اړیکه لري؟

د پورتني فعالیت له مخې د قضیې متن او ثبوت په لاندې ډول بیانولی شو.

قضیه: په فضا کې دوې زاوېې، چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعې ولري، یوه له بلې سره مساوي دي.



ثبوت: د XOY او $X'O'Y'$ زاوېې په پام کې نیسو، داسې چې $\overline{OX} // \overline{O'X'}$ او $\overline{OY} // \overline{O'Y'}$ دي، یو لوری(یوجهت) هم لري. په شکل کې د OX او $O'X'$ پر خطونو د $\overline{OA}$ او $\overline{A'O'}$ قطعه خطونه سره مساوي موازي او هم جهته دي.

نو د $OAA'O'$ شکل یوه متوازي‌الاضلاع ده. له دې امله د $\overline{BB'}$ او $\overline{OO'}$ قطعه خطونه موازي، مساوي او هم لوري(هم‌جهت) دي. نو $ABB'A'$ هم یوه متوازي‌الاضلاع ده او $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ دی.

د $O'A'B'$ او OAB مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{OA}=\overline{A'O'}$ او $\overline{OB}=\overline{O'B'}$ دي

له دي امله $A\hat{O}B=A'\hat{O}'B'$ دي.

د قضيې پايله:

i) که په ترتيب سره د دوو زاويو ضلعې موازي او هم لوري وي، نومورې زاويې يو له بل سره مساوي دي.

ii) که د دوو زاويو يوه، يوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو يوه، يوه ضلع يې موازي او مختلف جهتونه(لوري) ولري، د دغو دواړو زاويو پراخوالي $180°$ دی.(ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده).

د دوو متنافر و مستقيمو کرښو ترمنځ زاويه:

تعريف: په فضا کې د دوو متنافر و مستقيمونو ترمنځ زاويه له هغې زاويې څخه عبارت ده چې د يوې مستوي په يوه اختياري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقيمونو د رسمولو په واسطه حاصليږي

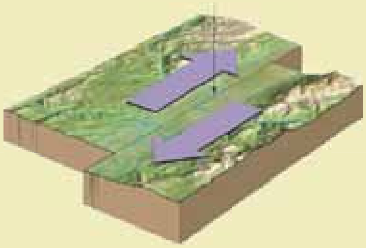
پوښتنې

1- که د دوو زاويو پراخوالی سره مساوي وي او د يوې زاويې يوه ضلع د بلې زاويې ضلعې سره موازي وي، آيا د هغو زاويو نورې ضلعې يو له بل سره موازي دي. ولې؟

2- که د دوو زاويو ضلعې سره موازي وي، ثابت کړئ چې د دغو زاويو، ناصف‌الزاويې سره موازي او يا سره عمود دي.

3- د d_1, d_2 دوو متنافرو مستقيمونو ترمنځ زاويه پيدا کړئ.

په فضا کې موازي مستقيمونه او موازي مستوي‌گانې



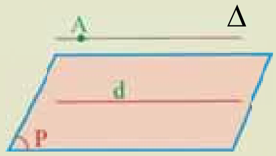
يوه مستقيمه کرښه هغه وخت له يوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هيڅ ګډ ټکی و نه لري.
مستوي‌گانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هيڅ ګډ ټکی و نه لري.

فعاليت

که چيرې د d مستقيم د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د P د مستوي بهر او د d مسقيم سره موازي وي، آيا د Δ مستقيم د P له مستوي سره موازي کيدلای شي؟

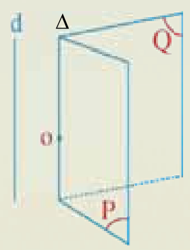
- دوې د P او Q متقاطع مستوي‌گانې او يو مستقيم خط له دغو مستوي گانو څخه بهر د P او Q له مستوي‌گانو سره موازي په پام کې ونيسئ.
- د d مستقيم(مشترک فصل) د Δ له مستقيم خط سره موازي کيدای شي؟
- له يوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 دوو مستقيمو کرښو سره څو موازي مستوي‌گانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعاليتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضيو متن او ثبوت په ترتيب بيانوو.

قضيه: که يو مستقيم خط د يوې مستوي له يوه خط سره موازي وي. نوموړی مستقيم خط له همدې مستوي سره موازي دی.



ثبوت:د d مسقيم خط چې د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د p د مستوي بهر او د d له مستقيم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د Δ مستقيمه کرښه د p له مستوي سره موازي ده، که د p مستوي د Δ مستقيمه کرښه قطع کړي، د d مستقيمه کرښه چې د Δ له مستقيمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضيې خلاف ده، ځکه د d مستقيمه کرښه د P په مستوي کې پرته ده، نو د p مستوي د Δ مستقيم قطع کولای نشي.

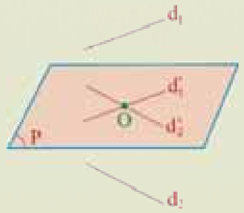
قضیه: که یوه مستقیمه کرښه له دوو متقاطع مستويګانو سره موازي وي، نوموړې مسقیمه کرښه د نوموړو مستويګانو له ګډ فصل سره موازي ده.



ثبوت: د P او Q دوې متقاطع مستويګانې په پام کې نیسو چې هره یوه یې د d له مستقیمې کرښې سره موازي ده، لکه مخامخ شکل.

که د P، Q د مستويګانو د Δ په مشترك فصل باندې د O نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د d له مستقیمې کرښې سره یو موازي رسم کړو، دا موازي د Δ په مستقیمې کرښې منطبق کېږي ځکه Δ یوازینی خط دی چې په دواړو مستويګانو یعنې په P او Q کې شامل دی.

قضیه: د (O) له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 مستقیم خطونه چې یو له بل سره موازي نه دي یوازې یوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.



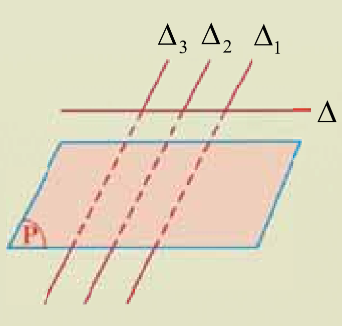
ثبوت: د (O) له نقطې څخه د d'_1 او d'_2 خطونه چې په پرتیب له d_1 او d_2 مسقیمونو سره موازي وي، رسموو د P مستوي چې د (O) له نقطې څخه تیرېږي او د d'_1 او d'_2 مستقیمې کرښې په خپل ځان کې لري له d_1 او d_2 سره موازي دي؟ ولې؟

که چیرې d_1 او d_2 یو له بل سره موازي وي، نو d'_1 او d'_2 یو پر بل منطبق کېږي.

پوښتنې

1- که چیرې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستويګانې له هغو سره رسمولای شئ؟

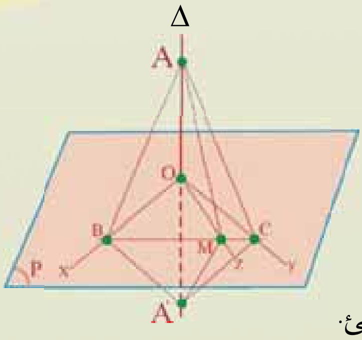
2- که چیرې د Δ_1 , Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او د Δ مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.



په فضا کې متعامدې مستقیمې کرښې او مستوي ګانې

که د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي په (O) ټکي کې عمود وي، آیا هغه ټول مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تیریږي، د Δ په مستقیمې کرښې باندې عمود دي؟

فعالیت



- مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د $\overline{ox}$ او $\overline{oy}$ مستقیمونه د Δ په مستقیم د (O) په نقطه کې عمود رسم کړئ.
- د P په مستوي کې د OZ اختیاري مستقیمه کرښه په پام کې ونسیئ.
- د Δ له مستقیمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ مساوي‌الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.

یو اختیاري قاطع داسې رسم کړئ چې د $\overline{OX}$ مستقیمه کرښه د B او $\overline{oy}$ مستقیمه کرښه د C او د $\overline{OZ}$ مستقیمه کرښه د M په نقطو کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ له $\overline{AA`}$ سره څه اړیکه لري.

- د OZ مستقیمه کرښه د Δ پر مستقیمه کرښه عمود ده؟ ولې؟

د پورتنې فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت داسې بیانوو.

قضیه: که د Δ یوه مستقیمه کرښه پر هغو دوو مستقیمو کرښو چې دواړه د Δ مستقیمه کرښه د (O) په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستقیمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د (O) له نقطې څخه تیریږي، عمود ده.

ثبوت: دوې مستقيمې کرښې د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ په پام کې نيسو، دا دوه مستقيمونه د Δ پر مستقيم چې د(O) له نقطې څخه تيرېږي، عمود دي او د P مستوي جوړوي، د P په مستوي کې د OZ اختياري(کيفي) مستقيمه کرښه په پام کې نيسو، د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاکوو.

او د P په مستوي کې يو قاطع رسموو چې د $\overline{OX}$ B او د $\overline{OY}$ C او oz مستقيم د M په نقطه کې قطع کړي.

$\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ دواړه $\overline{AA'}$ منځنې عمودونه دي؛ نو

$$\overline{BA} = \overline{BA'}$$
$$\overline{CA} = \overline{CA'}$$

د ABC او $A'B'C'$ مثلثونه انطباق منونکی دي. د انطباق منلو د عمليې په وخت کې د C, B او M نقطې ثابتې پاتې کېږي او د A نقطه په A' او $\overline{MA}$ په $\overline{MA'}$ منطبق کيږي، نو ليکلی شو. $\overline{MA'} = \overline{MA}$

د $M\overset{\Delta}{A}A'$ مثلث متساوي الساقين دي او د $\overline{MO}$ منځنی(ميانه) په عين وخت کې د $\overline{AA'}$ منځنی عمود دی په نتيجه کې د Δ مستقيمه کرښه د $\overline{OZ}$ پر مستقيمې کرښې باندې عمود دی.

فعاليت

- که د B او C نقطې د P او Q له ټکو څخه متساوي الفاصله وي، د BC مستقيمې کرښې هره نقطه له P او Q څخه متساوي‌الفاصله ده. اوس د X يوه اختياري(کيفي) نقطه د BC پر مستقيمه کرښه وټاکئ او ثابت کړئ چې X د P او Q څخه متساوي الفاصله دی.

پوښتنې

1- که چيرې د d_1 او d_2 خطونه يو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستويګانې رسمولای شئ؟

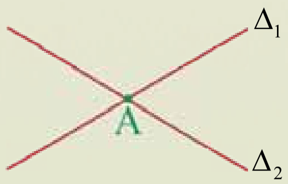
2- که د L خط د P پر مستوي عمود وي، آيا ټولې هغه مستويګانې چې د L خط په کې پروت دی د P په مستوي باندې عمود دی؟

په فضا کې موازي مستوي ګانې

دوې مستوي ګانې چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستوي ګانې بلل کېږي.

فعاليت

- د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه، چې د A په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونسيئ
- له دې دوو مستقيمو خطونو او د A له نقطې څخه يوه مستوي تيرولی شو.
- له دې مستوي څخه بهر د d_1 او d_2 دوې مستقيمې کرښې چې په ترتيب سره د Δ_1 او Δ_2 سره موازي او يو بل د B په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.

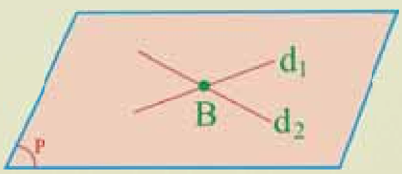


- هغه مستوي چې د Δ_1 او Δ_2 او د A له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د d_1 او d_2 مستقيمو کرښو او د B له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت له تر سره کولو وروسته د قضيې متن او ثبوت بيانولی شو.

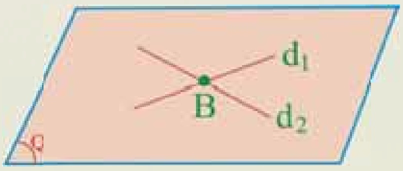
قضيه: که د يوې مستوي دوې متقاطع مستقيمې کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستقيمو کرښو سره موازي وي، نوموړې مستوي ګانې سره موازي دي.

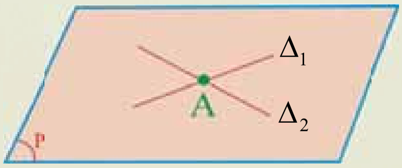
ثبوت: د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه د A په نقطه کې متقاطع دي او يوه د P مستوي جوړوي. د B له نقطې څخه(چې د P مستوي بهر ده) د d_1 او d_2 مستقيم خطونه له Δ_1 او Δ_2 سره موازي رسم شوي دي، چې d_1 او d_2 هم يوه د Q مستوي جوړوي، ثابتوو چې د P او Q مستوي ګانې سره موازي دي.



ځرنګه چې d_1 او Δ_1 سره موازي دي، نو d_1 د P له مستوي سره هم موازي دي. همدارنګه d_2 له Δ_2 سره موازي دي نو d_2 هم د P له مستوي سره موازي دی. اوس که چیرې د P او Q مستویګانې یو بل سره قطع کړې، مشترك فصل یې هم په همدې وخت کې له d_1 او d_2 سره موازي کیږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه متقاطع دي، په نتیجه کې د P او Q مستویګانې یوه بله سره قطع کولای نشي، نو یو بل سره موازي دي.





پوښتنې

که چیرې د E او F مستویګانې سره موازي وي او د L_1 مستقیمه کرښه په E مستوي او د L_2 مستقیمه کرښه د F په مستوي کې پرته وي، آیا $L_1 // L_2$ دی؟

د څېړکي مهم ټکي

1- دفضایي هندسې بنسټیز مفاهیم او اکسیومونه:

لومړنی اصطلاحګانې Postulates:

هغه مفاهیم او مفکورې، چې پرته له کوم تعریف څخه منل کیږي، لومړني اصطلاحات بلل کېږي د مثال په توګه. ټکی(نقطه)، کرښه (خط)، مستوي او فضا.

دلیل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ویل کیږي چې له یو لړ مخکینیو سمو وړاندیزونو او څېړونو څخه و روسته وروستیو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، موږ هم کولی شو، هغه و منو.

قضیه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت یولړ منطقي دلایلو ته اړتیا ولري، قضیه بلل کیږي.

ټکی(نقطه): موږ نقطه د یو ذهني مفهوم په ډول پیژنو او هغه د لومړنی اصطلاح(تعریف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقیم خط: کش شوی تار، د مېز څنډه او د خط کش تېغه د مستقیم خط مفهوم او مطلب بیانوي. مستقیم خط د لومړنی اصطلاح(تعریف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسیوم: هغه مستقیم خط چې د یوې مستوي دوې مختلفې نقطې سره ونښلوي، په همغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دویم اکسیوم: له هرو دریو نقطو څخه چې د یوه مستقیم خط په استقامت پرتې نه وي، یوه مستوي تیرېږي.

د متقاطع مستویګانو اکسیوم: که چیرې دوه مستویګانې یو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چیرې یو مسقیم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستویګانو مشترک فصل وایي.

فضا: فضا هم(تعریف شوې نه ده) لومړنی اصطلاح په توګه پېژنو.

لومړی اصل: فضا د لایتناهي نقطو مجموعه ده.

دویم اصل: لږتر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په یوه مستوي کې واقع نه دي.

په درې بُعده فضا کې خط او مستوي:

درې بعدي فضا: هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بعدې فضا ده.

له يو بل سره په فضا کې د دوو مستقيمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

متقاطع

متنافر

د يوې مستقيمې کرښې او يوې مستوي نسبي حالت

متقاطع

منطبق

موازي

د دوو مستويگانو نسبي حالت

منطبق

متقاطع

عمود

په فضا کې موازي مستقيمونه:

دوې مستقيمې کرښې چې په يوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستقيمونه بلل کېږي.

په فضا کې د دوو مستقيمونو تر منځ زاويه: په فضا کې دوې متوازي الاضلاع او هم جهته زاويې سره مساوي دي.

په فضا کې موازي مستقيمونه او مستوي: يو مستقيم خط له يوې مستوي سره هغه وخت موازي بلل کېږي، چې هيڅ مشترکه(ګډه)نقطه ونه لري.

په فضا کې متعامد مستقيمونه او مستويګانې:

که د Δ مستقيم د (O) په نقطه کې د P پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقيم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تېرېږي، د Δ پر مستقيمه کرښه باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي‌ګانې: دوې مستويګانې، چې هيڅ ګډ ټکی ونه لري، موازي مستوي‌ګانې بلل کېږي.

د ځيرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا او کرښه ترې تاو کړئ.

-1 د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. که د A او B د نقطو فاصله له p مستوي سره مساوي وي، د P مستوي په هر حال کې:

a _ د AB له خط سره موازي دی

b _ د AB خط يې له منځه تيريږي

c _ د AB خط عمودي ناصف دی

d _ د AB له خط سره موازي دي يا له AB څخه تيريږي

-2 که د Δ خط د P د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a _ د Δ خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.

b _ د Δ خط يوازې د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.

c _ د Δ خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.

d _ د Δ خط يوازې د P مستوي له يوه خط سره موازي دی.

-3 په دقيق ډول له لاندې کومو اجزاوو څخه يوه مستوي نه تيريږي له:

a _ هغو درې نقطو څخه چې پر يو مسقيم واقع دی.

b _ له دوو متقاطع خطونو څخه

c _ د يو خط او د هغې له خارجي نقطې څخه

d _ څلور متمايزې(مختلفې نقطې)

-4 له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه وي.

a _ که د Δ مستقيم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه يوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د P له مستوي سره موازي دی.

b _ که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' يو له بل سره موازي دي.

c _ که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.

d _ که دوې مختلفې مستوي‌گانې په يوه نقطه کې شريکې وي، نو نوموړې مستوي‌گانې د ياد شوې ټکي په امتداد شريکې دي.

-5 د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خو د P پر مستوي عمود نه دی. دا خط د P د مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

a) 0 b) 1 c) 2 d) بې شمېره

6- له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې هر وخت سم نه دي.

a _ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمایز وي، نوموړی خط د هغې له مستوي سره موازي دی.

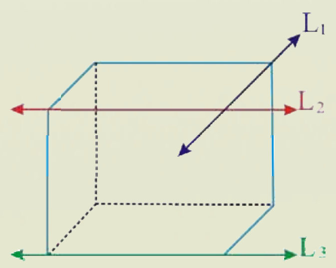
b _ که یو خط یو له متقاطع مستویګانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

c _ که یو خط یوه له دوو موازي مستویګانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

d _ که یوه مستوي یوه له دوو موازي مستويګانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

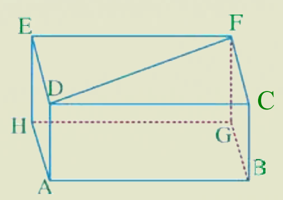
لاندې سوالونه حل کړئ:

1- که دوه مستقیم خطونه له یوې مستوې سره موازي وي، نوموړي خطونه خپل منځ کې عمود کیدای شي.



2- په لاندې مستطیل کې د L_1, L_2 او L_3 خطونو موقعیت نظر یو بل ته څرګند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې یې موازي او کومې جوړې متنافرې دي؟

3- که د P_1 او P_2 مستويګانې د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستويګانې په خپل منځ کې موازي دي؟



4- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي یو مستطیل دی.

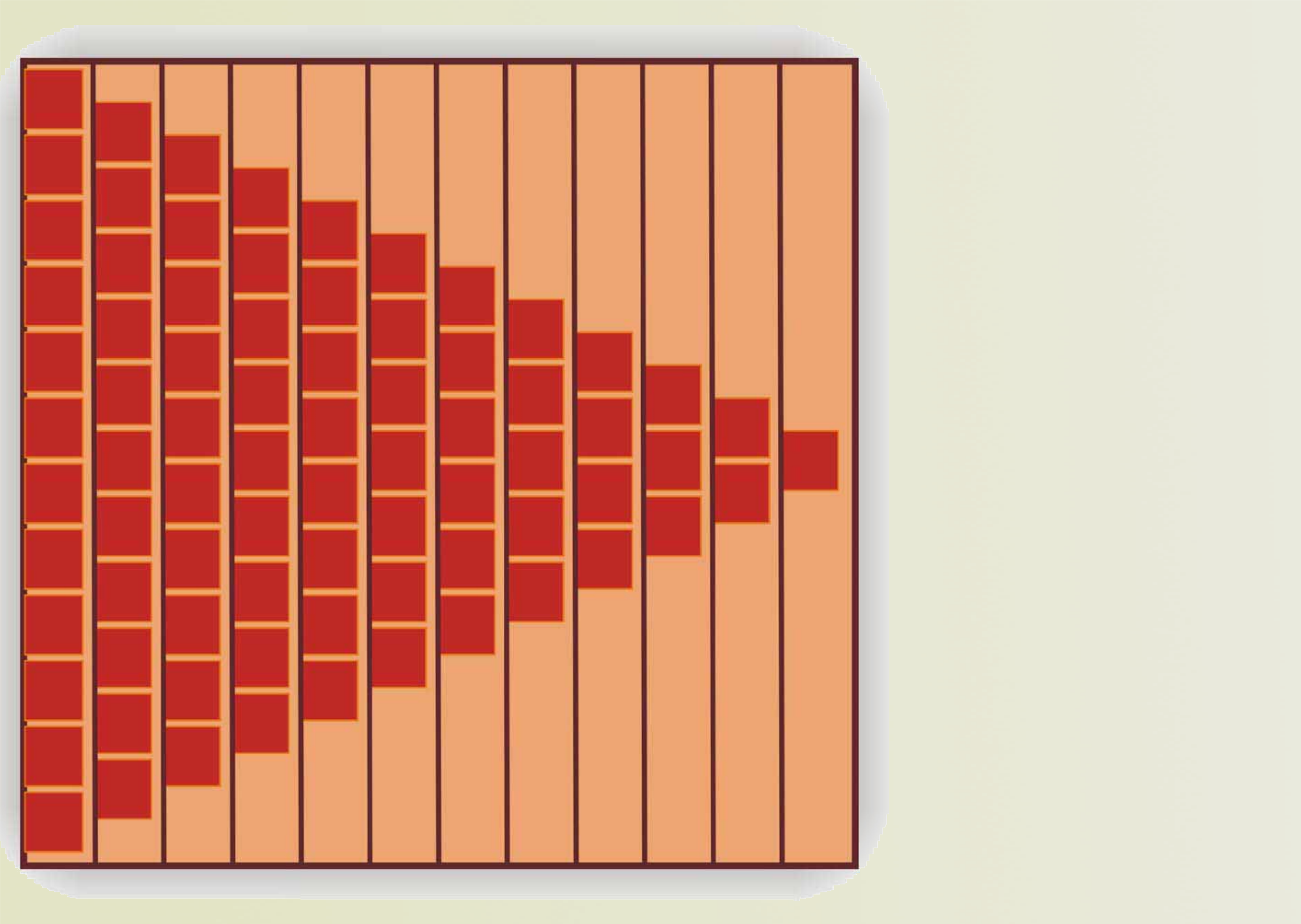
a _ د دوو مستويګانو نومونه واخلئ چې پر AD عمود وي او ووایئ ولې عمود دي؟

b _ د دریو قطعه خطونو، نومونه واخلئ چې پر $ABCD$ مستوي باندې عمود وي.

c _ د $E\hat{D}F$ زاویه قایمه ده.　　　d _ د $D\hat{F}C$ زاویه قایمه ده.

څلورم څپرکی

ترادفونه او سلسلې



ترادفونه

Sequence

په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.

هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.

تعریف: د $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادېږي،
یا په بل عبارت ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه‌یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه‌یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم(نامرتب) دعددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونوڅخه هر یو د نوموړي ترادف حدونه دی، a_1 یې لومړی حد او a_2 یې دویم حد او a_n دترادف n – ام حد دی، ترادف په لنډه ډول داسې لیکي: $\{a_n\}_{n\in IN}$ په دې حالت کې a_n د ترادف n – ام حد دی.

د جفتو عددونو ترادف	$2, 4, 6, 8, \dots, 2n$
د طاقو عددونو ترادف	$1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$
د 5 د مضرب عددونوترادف	$5, 10, 15, 20, \dots, 5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري n – ام حد په واسطه ټاکل او تعریفېږي؛ مثلاً:

$$a_n = 2n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
$$b_n = 2n-1 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
$$c_n = 5n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

فعالیت

- د $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}\}$ ترادف په پر مختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.
- د $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ترادف په پرمختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتېږي متزاید ترادف بلل کېږي، لکه د جفت، طاق او 5 مضرب عددونوترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمېږي، متناقص ترادف بلل کېږي، لکه: د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \dots, \frac{1}{5n}$

لومړی مثال: د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{3}{n}$ ترادفونه متزايد دی، که متناقص؟

حل:

$$a_n = n^2 \quad , \quad n = 1,2,3,\ \dots \quad , \quad a_n = 1,4,9,16,25,36,\ \dots$$

$$b_n = \frac{3}{n} \quad , \quad n = 1,2,3,\ \dots \quad , \quad b_n = 3,\frac{3}{2},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5},\ \dots$$

ليدل کېږي چې د a_n د ترادف د حدونو عددي او عددي قيمت په تدريجي ډول زياتېږي، نو د a_n ترادف متزايد، همدارنگه ليدل کېږي چې د b_n د ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول کمېږي، نو د b_n ترادف يو متناقص ترادف دی.

يادونه: هغه ترادفونه چې دحدونوشمېر يې معلوم وي معين ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، د غير معينو ترادفونو په نامه يادېږي.

دويم مثال: که د يوه ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ وروستې حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه يې پيدا کړئ.

حل: د 5 لومړنيو حدونو د پيداکولو لپاره $n = 1,2,3,4,5$ قيمتونه ورکوو او په ترادف کې يې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر(حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad , \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n = 3 \quad , \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n = 4 \quad , \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n = 5 \quad , \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

پوښتنې

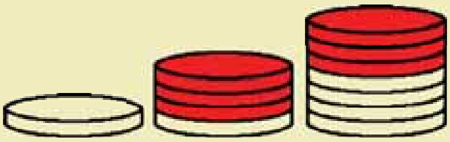
1- په لاندې ترادفونوکې $n-$ام حد وټاکئ؟

$$\left.\begin{array}{l} 1,3,5,7,\ \dots \\ \frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9}\ ,\ \dots \end{array}\right\}$$

2- که يو ترادف $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه يې وليکئ.

حسابي ترادف

Arithmetic Sequences



که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې(متعاقبو) حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي ،ترادف په څه نوم یادېږي.

فعالیت

- مخامخ عددونه په پام کې ونیسئ $5,8,11,14,17,20$
- د لومړي او وریسي حدونو ترمنځ توپیر څو دی؟
- د پورتنیو عددونو ترتیب له څو حدونو څخه جوړ شوی دی؟
- له ښي څخه کيڼې خوا ته د پورتنیو عددونو ترادف ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله بیانېږي:

تعریف: که په یوه حسابي ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، هغه د حسابي ترادف په نوم یادېږي.

دغه ثابت عدد له ګډ توپیر(Common deference's) څخه عبارت دی او په d سره ښودل کېږي که d یو مثبت عدد($d>0$) وي، ترادف متزاید او که d منفي($d<0$) وي، ترادف متناقص بلل کېږي، لکه په لاندې مثالونو کې:

$$2,5,8,11,14,17,\ \dots$$

$$\left.\begin{aligned} d&=5-2=3\\ d&=8-5=3\\ d&=11-8=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ d=3>0$$

نو ترادف متزاید دی.

$$4,0,-4,-8,-12,-16,-20,\ \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} d=0-4=-4 \\ d=-4-0=-4 \\ d=-8-(-4)=-4 \\ d=-12-(-8)=-4 \\ d=-16-(-12)=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow d=-4<0$$

ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې یو ترادف ولیکئ چې لومړی حد یې $\frac{3}{2}$ اوګډ توپیر یې 2 وي.

حل: څرنګه چې لومړی حد یې $a_1=\frac{3}{2}$ اوګډ توپیر یې $d=2$ دی، نو:

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots$$

$$a_2-a_1=d \quad\Rightarrow\quad a_2=a_1+d$$

$$a_3-a_2=d \quad\Rightarrow\quad a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$$

$$a_4-a_3=d \quad\Rightarrow\quad a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$$

اوس د $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ ,a_n$ قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$$a_1\ ,(a_1+d)\ \ ,\ \ (a_1+2d)\ \ ,\ \ (a_1+3d),\ \ldots$$

$$\frac{3}{2}\ ,\ (\frac{3}{2}+2)\ \ ,\ \ (\frac{3}{2}+2+2)\ \ ,\ \ (\frac{3}{2}+2+2+2),\ \ldots$$

$$\frac{3}{2},\ \ \frac{7}{2}\ \ ,\ \ \frac{11}{2}\ \ ,\ \ \frac{15}{2},\ \ldots$$

دویم مثال: کوم یوله لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$a)\ \ 1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\ \ldots$

$b)\ \ 1,2,4,8,16,\ \ldots$

د a جزء حل: د حسابي ترادف د تعریف په پام کې نیولو سره د حدونو ګډ توپیر په لاس راوړو:

$$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4$$

$$d=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

$$d=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$
$$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$
$$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو حدونو تر منځ ګډ توپیر $\frac{1}{2}$ ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف د تعریف پر بنسټ ویلی شو چې نوموړی ترادف یو حسابي ترادف دی.

د b جزء حل:

$1 \ , \ 2 \ , \ 4 \ , \ 8 \ , \ 16$

$d = 2 - 1 = 1$

$d = 4 - 2 = 2$

$d = 8 - 4 = 4$

$d = 16 - 8 = 8$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو عناصرو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد نه دی، نو یاد شوی ترادف حسابي ترادف نه دی.

په یوه حسابي ترادف کې د n-ام حد ټاکل:

که چیرې د یوه حسابي ترادف $a_1, a_2, \ldots, a_n$ لومړی حد په a او ګډ توپیر یې d وي، د n-ام حد د پیداکولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه ګټه اخلو، ددې کار لپاره د $5, 7, 9, 11, \ldots$ ترادف په پام کې نیسو.

$5, 7, 9, 11, \ldots$

$d = 7 - 5 = 2$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$

$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \ldots$

$5, 5 + 2, 5 + 2 \cdot 2, 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ldots$

$a_1 = 5, \ a_2 = 5 + 2 \cdot 2 \ , \ a_3 = 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ \ldots$

د پورتني مثال په پام کې نيولو سره په عمومي توګه کولای شو وليکو چې:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_1\\
&a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d\\
&a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d\\
&a_4 - a_3 = d \Rightarrow a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d\\
&\vdots\\
&a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

لومړی حد	دويم حد	دريم حد	څلورم حد		n - ام حد
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	....	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4		a_n

په پايله کې په لاس راځي چې د a , d , n او a_n ترمنځ لاندې اړيکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه ... , 12 , 5 , -2 حسابي ترادف 30 - ام حد پيدا کړئ.

حل:

$$
\left.\begin{aligned}
&a_1 = -2\\
&d = 5-(-2) = 7\\
&n = 30\\
&a_{30} = ?
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&a_n = a + (n-1)d\\
&a_{30} = -2 + (30-1)7\\
&a_{30} = -2 + 29 \cdot 7\\
&a_{30} = -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201
\end{aligned}
$$

دويم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

$$35 \ , \ 40 \ , \ 45 \ , \ldots , 2000$$

حل: پوهېږو چې:

$$
\left.\begin{aligned}
&a = 35\\
&d = 40 - 35 = 5\\
&a_n = 2000\\
&n = ?
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&a_n = a + (n-1)d\\
&2000 = 35 + 5n - 5\\
&2000 = 30 + 5n\\
&2000 - 30 = 5n\\
&1970 = 5n \Rightarrow n = 394
\end{aligned}
$$

فعالیت

- که چیرې په یوه حسابي ترادف کې $d = 4, a_1 = -11$ وي، a_2 او a_3 حدونه پیدا کړئ.

د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه د a_{n+1}, a_n, a_{n-1} ولرو، په داسې حال کې چې $n = 2,3,4$ دی.

$$a_{n-1} + a_{n+1} = [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + nd]$$
$$= [a_1 + nd - 2d] + [a_1 + nd] = [a_1 + nd - 2d + a_1 + nd]$$
$$a_{n-1} + a_{n+1} = [2a_1 + 2nd - 2d] = 2[a_1 + (n-1)d] = 2a_n$$
$$\Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \quad \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n = \frac{7+23}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

دویم مثال: د x عدد داسې وټاکئ چې د $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}}, \underbrace{2x-4}_{a_n}, \underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$ درې حده حسابي ترادف تشکیل کړي، ترادف یې ولیکئ.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \Rightarrow 2x - 4 = \frac{3x+3+2x+1}{2} = \frac{5x+4}{2}$$
$$4x - 8 = 5x + 4 \quad \Rightarrow 4x - 5x = 4 + 8 = 12 \quad \Rightarrow -x = 12$$
$$x = -12$$

ترادف یې عبارت دی له: $2(-12)+1 \quad , \quad 2(-12)-4 \quad , \quad 3(-12)+3$

$$-24+1, -24-4, -36+3 \quad \Rightarrow -23, -28, -33, -38, -43, \ ....$$

یادونه

که د یوه حسابي ترادف $n-$ ام او $m-$ ام حدونه معلوم وي، یعنې:

$$a_n = a + (n-1)d \quad .... \ I$$
$$a_m = a + (m-1)d \quad .... \ II$$

نو د I له اړیکې څخه د II اړیکه کمو، په پایله کې کولای شو ګډ توپیر داسې په لاس راوړو

$d = \dfrac{a_n - a_m}{n - m}$ (ثبوت یې د زده‌کوونکو دنده ده) چې په یاد شوي فورمول کې d ګډ توپیر، a_n د ترادف

$n-$ام حد، a_m د ترادف $m-$ام حد دی.

لومړی مثال: د یوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد یې 47 دی، ګډ توپیر او لومړی حد یې پیدا کړئ، په پای کې یې ترادف بشپړ کړئ.

$$\square,\ \square,\ \square,\ \square,\ 27,\ \square,\ \square,\ \square,\ 47$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 47 \\ n = 9 \\ a_m = 27 \\ m = 5 \\ d = ? \\ a = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} d = \dfrac{a_n - a_m}{n - m} = \dfrac{47-27}{9-5} = \dfrac{20}{4} \\ d = 5 \\ a_n = a + (n-1)d \quad \Rightarrow \quad 47 = a + (9-1)5 = a + 40 \\ \Rightarrow \quad 47 - 40 = a \quad \Rightarrow \quad a = 7 \end{array}$$

ترادف یې عبارت دی له: $7,12,17,22,27,32,37,42,47$

هارمونیکي ترادف: د $\{a_n\}$ یوه ترادف ته هغه وخت هارمونیکي ترادف وایي چې معکوس یې $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ یو حسابي ترادف وي.

لومړی مثال: د $2,4,6,8,10,\ \ldots$ ترادف یو حسابي ترادف دی، ځکه چې $d = 2$ دی، د دغه ترادف د حدونو معکوس یعنې $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{10},\ldots$ یو هارمونیکي ترادف تشکیلوي.

دویم مثال: د طبیعي عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی.

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ \ldots\ ,\frac{1}{n}$$

$$\{a_n\} = \frac{1}{n}$$

دریم مثال : که چیرې په یوه هارمونیکې ترادف کې $a_1=\frac{1}{4}$ او $d=-3$ وي، هـارمونیکې تـرادف یـې پـه لاس راوړئ

حل:

$$\frac{1}{4}\,,\,(\frac{1}{4}-3)\,,\,(\frac{1}{4}-3-3)\,,\,(\frac{1}{4}-3-3-3)\,,\,(\frac{1}{4}-3-3-3-3)\,,\,\ldots$$

$$\frac{1}{4}\,,-\frac{11}{4}\,,-\frac{23}{4}\,,-\frac{35}{4}\,,-\frac{47}{4}\,,\ldots$$

آیا د طبیعي طاقو عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی، $n-$ ام حد یې ولیکئ.

هـارمونیکي حـسابي اوسـط: کـه درې مسلـسل عناصـر a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} پـه داسـې حـال کـې چـې $n=2\,,\,3\,,\,4\ldots$ دی، له یوه حسابي ترادف څخه وټاکل شـي، څرنگـه چـې $\frac{1}{a_{n-1}},\frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_{n+1}}$ د یوه هارمونیک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2}=\frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2a_{n+1}\cdot a_{n-1}}$$

$$a_n=\frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

په پایله کې پورتنی اړیکه چې هارمونیک حسابي اوسط ښیې، لیکلای شو:

$$\boxed{a_n=\frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونیکې اوسط پیدا کړئ.

حل: له $a_n=\frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ فارمول څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$a_n=\frac{2(2\cdot 8)}{2+8}=\frac{2\cdot 16}{10}=\frac{16}{5}=3.2$$

پوښتنې

1- د مخامخ ترادف 35 -ام حد پیدا کړئ. $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ ,\ ...$

2- آیا $\frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}$ یو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتنې د سموالی په صورت کې یې مشترک توپیر پیدا کړئ.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که $a_1 = -\frac{1}{2}$ ، $a_{10} = \frac{84}{2}$ وي د d قیمت په لاس راوړئ.

5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف نه دی.

$a)\ 2\ , \frac{9}{4}\ , \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, ...$

$b)\ 3\ , 6\ , 9\ , 12, ...$

هندسي ترادف

Geometric Sequences

که د شطرنج د يوې تختې په لومړی خانه کې يوه دانه غنم او په دويمه خانه کې يې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستی خانه کې په مخکنی خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخيره خانه کې(يوه د شطرنج تخته 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.

فعاليت

- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونيسئ. $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48, \ldots$
- د پورتني ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړيکه موجوده ده؟
- د پورتني ترادف د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

پايله

هغه ترادف چې د دوو پر له پسې حدونو ترمنځ نسبت يې يو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه يادېږي، يعنې:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q \quad , \; n = 1,2,3, \ \ldots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته q ګډ نسبت او a_1 د ترادف لومړی حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت پېژندل کېږي چې لومړی حد او ګډ نسبت يې معلوم وي.

لومړی مثال: د ... , 6 , 12 , 24 , 48 , 96 هندسي ترادف په پام کې ونیسئ، ګډ نسبت یې په لاس راوړی.

حل: هر حد يې په مخکيني حد باندي وېشو:

$$96 \quad 48 \quad 24 \quad 12 \quad 6$$

$$q=\frac{48}{96}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{24}{48}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{12}{24}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

فعالیت

- په یوه هندسي ترادف کې $a_1=2$ او $q=3$ دی، a_2 , a_3 او a_4 حدونه پیدا کړئ.

یادونه

$q>1$ لپاره ترادف متزاید دی.

$q<1$ لپاره ترادف متناقص دی.

$q=1$ لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

دویم مثال: د $...,100,300,900,2700$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او ګډ نسبت یې په لاس راوړئ او ووایاست چې پورتنی هندسي ترادف متزاید دی او که متناقص.

حل:

لومړی حد $=a=2700$

ګډ نسبت $=q=\frac{900}{2700}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

په پورتني مثال کې $1>\frac{1}{3}=q$ دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

په هندسي ترادف کې د n – ام حد پیدا کول:

که په یوه هندسي ترادف کې a لومړی حد، q ګډ نسبت او n د ترادف د حدونو شمېر وي،نو د n – ام حدد پیدا کولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چیرې هندسي ترادف د $a_1, a_2, a_3, a_4,$ .... په پام کې ونیسو، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$a_1 = a_1$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

اوس د $a_1, a_2, a_3, a_4,$ .... په ترادف کې یې قیمتونه ږدو:

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n - ام حد
a_1	a_2	a_3	a_3	, ... ,	a_n
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	, ... ,	$\downarrow$
a_1	$a_1 q$	$a_1 q^2$	$a_1 q^3$	, ... ,	$a_1 q^{n-1}$

یعنې په هندسي ترادف کې n – ام حد یا عمومي حد، د دغې اړیکې $a_n = a \cdot q^{n-1}$ په واسطه پیدا کېږي.

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پیدا کړئ.

حل: $5\,,\,-10, 20, -40, \ldots\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} a=5 \\ q=\dfrac{-10}{5}=-2 \\ n=6 \\ a_6=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_6=5(-2)^{6-1} \\ a_6=5(-2)^5 \Rightarrow a_6=5(-32) \\ a_6=-160 \end{array}$$

دویم مثال: د $\ldots\ldots\,,\,2\,,\,4\,,\,8$ هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=12 \\ a=8 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_{12}=8(\dfrac{1}{2})^{12-1}=8(\dfrac{1}{2})^{11}=8\dfrac{1}{2^{11}} \\ a_{12}=\dfrac{8}{2^{11}}=\dfrac{2^3}{2^{11}}=2^{3-11}=2^{-8}=\dfrac{1}{2^8}=\dfrac{1}{256} \end{array}\right.$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که a, M, b د هندسي ترادف پر له پسې حدونه وي، د M, a او M, b ترمنځ اړیکه پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} q=\dfrac{M}{a} \\ q=\dfrac{b}{M} \end{array}\right\} q=q \Rightarrow \frac{M}{a}=\frac{b}{M} \Rightarrow M^2=a\cdot b$$

$$M=\sqrt{a\cdot b}$$

له پاسني فورمول څخه ویلی شو که چېرې a او b دوه مثبت حقیقي عددونه وي، نو د M حقیقي مثبت عدد ته د a او b هندسي اوسط(Geometric mean) وایي.

دریم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پیداکړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=12 \end{array}\right\} M=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$M=6$$

څلورم مثال: د $32, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 2$ هندسي ترادف نا معلوم حدونه پیداکړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=2 \\ n=5 \\ a_5=32 \\ q=? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_5=a\cdot q^{n-1} \quad \Rightarrow 32=2q^{5-1} \Rightarrow 32=2q^4 \\ q^4=\frac{32}{2}=16 \quad \Rightarrow q^4=16 \quad \Rightarrow q^4=2^4 \Rightarrow \boxed{q=2} \end{array}$$

$$a_1=2$$

$$a_2=a_1\cdot q=2\cdot 2=4$$

$$a_3=a_2\cdot q=a_1q^2=2\cdot 2^2=8$$

$$a_4=a_3\cdot q=a_1\cdot q^3=2\cdot 2^3=16$$

نو هندسي ترادف یې عبارت دی له: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 یا $2,4,8,16,32$

فعالیت

- که په هندسي ترادف کې a_n, $n-$ام حد، n د ترادف د حدونو شمېر او q ګډ نسبت وي، د q لپاره عمومي فورمول پیداکړئ.

لومړی مثال: x داسې وټاکئ چې له لاندې حدونو څخه یو هندسي ترادف جوړ شي.

$$x-1 \ , \quad x+3 \quad , \quad x+1$$

$$M=\sqrt{a\cdot b} \quad \Rightarrow (x+3)=\sqrt{(x-1)(x+1)} \quad \Rightarrow (x+3)^2=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+6x+9=x^2-1 \Rightarrow 6x+10=0 \ , \quad x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$$

$$x=-\frac{5}{3}$$

پوښتنې

1- د هندسي ترادف 5 حدونه داسې وليکئ چې لومړی حد يې 5 او اخيري حد يې $\frac{5}{16}$ وي.

2- کوم يو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

$a)\ \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \ldots$

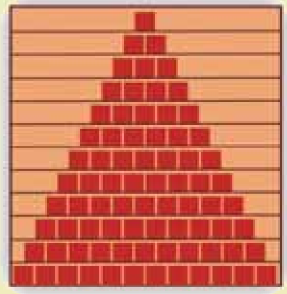
$b)\ -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$

3- د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \ldots$ هندسي ترادف دوولسم حد پيدا کړئ.

4- د $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړي.

5- د $27, ?, ?, ?, \frac{1}{3}$ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

د ترادفونو قسمي مجموعه



a - په لسم کتار کې د قوطیو شمېر څو دی؟

b - په الماری کې د ټولو قوطیو شمېر پیدا کړئ؟

فعالیت

- د $2,4,6,8, \ldots$ ترادف په پام کې ونیسئ.
- د دویم او دریم حدونو د جمعې حاصل ولیکئ.
- د لس لومړیو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړئ.
- د n – ام حد د جمعې حاصل ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله بیانېږي:

څرنګه چې د لومړی n حدونو د جمعې حاصل مشکل دی چې ټول n حدونه یې ولیکو، نو څکه یې دوه یا درې لومړی حدونه لیکو او وروسته له درېو ټکو n – ام حد لیکو.

څرنګه چې یو ترادف د بې نهایت حدونو لرونکی دی، که د زیاتو حدونو د جمعې حاصل، لکه: 100 , 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعې حاصل یې سرخوږي جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف n لومړیو حدونو a_1 , a_2 , a_3 , … , a_n د جمعې حاصل په لاندې ډول لیکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

د اسانتیا او لنډیز لپاره په محاسبو کې د $\sum$ له سمبول څخه کار اخلي.

د $\sum$ پورتنی او ښکتنی نښې دا راښیي چې i له 1 څخه تر n پورې ټول تام عددونه اخلي، i د انډکس په نامه یادېږي. د یوې مجموعې د انډکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د i, n, k, j حروف ډېر معمول دي.

مثلاً: $\sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{i=1}^{n} 2i = \sum_{j=1}^{n} 2j = 2\cdot1 + 2\cdot2 + 2\cdot3 + \cdot\cdot\cdot + 2n$

لومړی مثال: لاندې مجموع($\sum_{i=1}^{7}$) په غزیدلي شکل ولیکئ.

حل: $\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{i}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{1089}{420}$

دويم مثال: لاندې د جمعې حاصل د مجموعې ($\sum$) په شکل وليکئ.

$a)\ 1+3+5+7+\ \dots\ +(2n-1)$

$b)\ 1+4+9+\ \dots\ +n^2$

د a جزء حل:

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

د b جزء حل:

$$1+4+9+\ \dots\ +n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2$$

دریم مثال: لاندې مجموعه په پرمختللي(غزیدلي) شکل ولیکئ.

$$\sum_{i=4}^{n}i(i+2)=?$$

حل:

$$\sum_{i=4}^{n}i(i+2)=4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+7(7+2)+\dots+n(n+2)$$
$$=4\cdot6+5\cdot7+6\cdot8+\dots+n(n+2)$$
$$=24+35+48+63+\dots+n(n+2)$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې $\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}=\frac{7+1}{7-1}+\frac{8+1}{8-1}+\frac{9+1}{9-1}+\frac{10+1}{10-1}=\frac{8}{6}+\frac{9}{7}+\frac{10}{8}+\frac{11}{9}$$
$$=\frac{4032+3888+3780+3696}{3024}=\frac{15396}{3024}=\frac{5132}{108}$$

تر اوسه مو یوازې د یوه ترادف د n حدونو د جمعې حاصل وڅېړل، که وغواړو د یوه ترادف $\{a_n\}_{n \in IN}$ د ټولو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړو، په دې صورت کې لیکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

په دې حالت کې i ټول طبیعي عددونه اخېستلای شئ.

د $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ سلسله د بې نهایت سلسلې (Series) په نامه یادېږي.

د $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ عددونه د سلسلې حدونه او a_n د سلسلې $n-$ام حد یا دسلسلې عمومي حد بلل کېږي.

څرنګه چې موږ نشو کولای، د عددونو بې نهایت شمېر جمع کړو، خو یه ریاضي کې د ځینو قاعدو په کارولو سره کولای شو، یوې سلسلې ته دیوې مجموعي نسبت ورکړو، خو دلته غواړو د یوې سلسلې د n حدونو مجموعه پیدا کړو.

د یوې سلسلې د n لومړیو عناصرو مجموعه $\ldots + a_n + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_k$ د نومورې سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه یادېږي، که هغه په S_n وښیو، نو لرو:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_k$$

مثال: د $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ سلسلې S_6 او S_8 حساب کړئ.

حل:

$$S_6 = 1+2+3+4+5+6 = 21$$
$$S_8 = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$$

که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ او $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دوې سلسلې او c یو ثابت عدد وي لاندې، خاصیتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ \dots \ + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

پوښتنې

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

a) $\sum_{i=1}^{6} \sqrt{i}$ b) $3\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$ c) $\sum_{k=1}^{3} (4k^2 - 3k)$

2. لاندې مجموعې د $\sum$ په شکل کې ولیکئ.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20}$

b) $1 + 4 + 9 + \dots + n^2$

c) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

a) $\sum_{i=4}^{n} i(i+2)$ b) $\sum_{i=1}^{n} (3i - 2)$ c) $\sum_{i=1}^{n} (2 + 5i)$

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي مجموعه

که $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ یو حسابي ترادف وي، نو $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ د یوې حسابي سلسلې قسمي مجموعه کیدلای شي؟

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \\ d = \\ a_n = \end{array}\right\} ?$$

$$1+2+3+4+\dots+n=$$

$$\frac{n}{2}\cdot[2a+(n-1)\cdot d]$$

که چیرې دیوه حسابي ترادف د حدونو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ویل کېږي. یاپه بل عبارت د یوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وایي.

په یوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد یې a ګډ فرق یې d او اخیري حد یې a_n وي، د حدونود جمعي لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S = a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\dots+(a_n-2d)+(a_n-d)+a_n \quad \dots \text{I}$$

$$S = a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+(a_n-3d)+\dots+(a+2d)+(a+d)+a \quad \dots \text{II}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S=\underbrace{(a+a_n)+(a+a_n)+(a+a_n)+(a+a_n)+\dots+(a+a_n)+a+a_n}_{n \text{ ځلې } n(a+a_n)}$$

$$2S=n(a+a_n) \quad \Rightarrow S=\frac{n}{2}(a+a_n)\dots\text{I}$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع راښیي چې لومړی حد، اخیري حد اود جملاتو شمېر یې معلوم وي.

لومړی مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې $a_n = 25, a = 4$ او د حدونو شمېر يې 8 وي.

حل:

$$a = 4$$

$$a_n = 25 \qquad S = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

$$n = 8 \qquad S = \frac{8}{2}(4+25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$$

که چيرې په يوه حسابي سلسله کې لومړی حد، د حدونو شمېر او ګډ توپير ورکړل شوی وي، د جمعې حاصل يې له لاندې اړيکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2}\left[a + a + (n-1)d\right] \Rightarrow S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \;\ldots\ldots\ldots\; \text{III}$$

دويم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 7 \\ d = 4 \\ n = 201 \\ S_{201} = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \\ S_{201} = \frac{201}{2}\left[2\cdot 7 + (201-1)4\right] \\ S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200\cdot 4) \;\Rightarrow\; S_{201} = \frac{201}{2}(14+800) = \frac{201}{2}\cdot 814 \\ S_{201} = 81807 \end{array}$$

فعالیت

- د طبیعي عددونو سلسله په پام کې ونیسئ لومړی حد، ګډ توپیر او n – ام حد یې ولیکئ وروسته د مسلسلو طبیعي عددونو د جمعې دحاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبیعي جفت پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم یوه حسابي سلسله ده چې فورمول یې په لاندې ډول په لاس راوړو: $2+4+6+8 \ \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ d=2 \\ n=n \\ S_n=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \\ S_n=\frac{n}{2}[4+2n-2]=\frac{n}{2}(2+2n) \quad \Rightarrow S_n=n(n+1) \end{array}$$

درېیم مثال: د جفتو پر له پسې عددونو د سلسلې $(2+4+6+8+\ldots)$ د 200 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=200 \\ S_{200}=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=n(n+1) \\ S_{200}=200(200+1) \quad \Rightarrow S_{200}=200(201) \\ S_{200}=40200 \end{array}$$

فعالیت

- د طبیعي طاقو پرله پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پیدا کړئ.

او د طبیعي پرله پسې عددونو د جمعې حاصل د $S=\frac{n}{2}(n+1)$ فورمول په واسطه محاسبه کېږي(د پورته فورمولونو ثبوت د زده‌کوونکو دنده ده).

پوښتنې

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او n – ام حدونه پیدا او همدرانګه د نومورو ترادفونو د لس حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$i)\ \ 2,0,-2,-4,\ \dots$

$ii)\ 1,5,9,13,\ \dots$

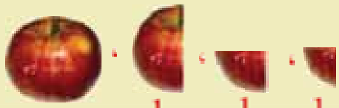
$iii)\ -2,-1,0,1,2,\ \dots$

2. که یو ترادف د $2,5,8,11,\ \dots$ په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

$a)\ \ S_8$ $\qquad$ $b)\ \ S_{10}$

د یوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل

که چیرې یوه مڼه نیمه او نیمه بیا نیمه او همداسې ادامه ورکړو یو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړی برخې نیولې، څو برخې سره جمع کړو چې د جمعې حاصل مساوي په 2 منو شي.



$1 \; , \; \frac{1}{2} \; , \; \frac{1}{4} \; , \; \frac{1}{8}$

فعالیت

- یو هندسي ترادف چې لومړی جمله یې a_1 او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت یې مساوي په q راکړل شوی وي، لاندې فعالیت سرته ورسوئ.
- د ترادف دویمه جمله څو ده؟
- که چیرې دو یمه جمله په q کې ضرب شي، دضرب حاصل یې له دریمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د n جملو د جمعې حاصل د فورمول پیداکولو لپاره څه وړاندیز لرې؟

پایله:

په یوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکیني حد له ضرب څخه په q کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره یوه باوري خبره ده، په دې ډول د یوه هندسي ترادف $\{a_n\}$ د n جملو د جمعې د حاصل $(S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n)$ قیمت عبارت دی، له: $q \neq 1$, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

د پورتنۍ اړیکې ثبوت کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \; ... \; + a_1q^{n-1} \quad .... \; I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \; ... \; + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad .... \; II$$

له I اړیکې څخه د II اړیکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)} \quad , \quad q \neq 1$$

پاسنۍ اړیکه هغه اړیکه ده، چې د هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل په لاس راکوي.

لومړی مثال: په یوه هندسي ترادف کې لومړی حد $a_1 = 2$ او ثابت نسبت $q = \frac{1}{2}$ دی.
د پاسني ترادف 5 لومړی متوالي حدونه او د لسو جملو د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ده، نو:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} a_1 = 2(\frac{1}{2})^0 = 2 & a_4 = 2(\frac{1}{2})^{4-1} \\ a_2 = 2(\frac{1}{2}) = 1 & a_4 = 2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \\ a_3 = 2(\frac{1}{2})^{3-1} = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} & a_5 = 2(\frac{1}{2})^4 = 2\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$S_n = a_1\frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024}\cdot\frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

دویم مثال: د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کېږي؟

$$2, 6, 18, \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} \\ 80 = \frac{2[(3)^n - 1]}{3-1} \\ 80 = (3)^n - 1 \Rightarrow 80 + 1 = (3)^n \\ 81 = 3^n \Rightarrow (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$

یعنې د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کېږي.

پوښتنې

1. په $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د $3, 6, 12, \ldots, 384$ هندسي ترادف د حدونو شمېر او مجموعه پیدا کړئ.
3. په $4, 12, 36, \ldots$ ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د n − ام حد قیمت پیدا کړئ.

لایتناهي هندسي سلسلې

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانی لیدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنی کېږي.
أیا هر هندسي ترادف یوه عدد ته نږدې کېږي؟

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}\ ,\ |q|<1$$

که چیرې په یوه هندسي سلسله کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر یې معلوم نه وي، هغه د متباعدې سلسلې (Divergent series) په نامه یادېږي.

او که چیرې $|q| < 1$ وي، هغه د متقاربې سلسلې (Convergent series) په نامه یادېږي. د متقاربو او متباعدو سلسلو د جمعې حاصل د پیداکولو فورمول:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$$

که سلسله متباعد $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر بې نهایت وي، یعنې $n \to \infty$ نو پوهېږو چې:

$$S_\infty = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_\infty = \infty$$

که سلسله متقارب ($|q|<1$) او د جملو شمېر بې نهایت وي، نو $q^n \to 0$ کوي.

$$S = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a\cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

یعنې که سلسله متقارب ($|q|<1$) او د جملو شمېر یې بې نهایت وي، د نوموړې سلسلې د جمعې حاصل عبارت دی له:

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}$$

لومړی مثال: د $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$ سلسلې د جمعې حاصل محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a=1$, $q=\frac{1}{2}$ دی، څرنګه چې $|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=2$$

دویم مثال: که په یوه هندسي سلسله کې $a_1=27$ او $q=\frac{1}{3}$ وي، د سلسلې دحدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $|q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$a_1+a_2+a_3+\ \dots\ =\frac{a}{1-q}$$

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{\frac{3-1}{3}}=\frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$27\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{2}=40.5$$

دریم مثال: $0.6\overline{23}$ پیریودیک(متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$0.6\overline{23}=0.6232323\ldots=0.6+0.023+0.00023+0.0000023+\ \dots$$
$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+\ \dots$$
$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{10000})+\ \dots\ ]$$

په پاسنی سلسله کې $a=1$ او $|q|=\left|\frac{1}{100}\right|=\frac{1}{100}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+\ldots]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{100}{99}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{617}{990}$$

څلورم مثال: د $0.\bar{3}$ متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر واړوئ.

حل: پوهېږو چې:

$$0.\bar{3}=0.3333\ \ldots\ =0.3+0.03+0.003+0.0003+\ \ldots$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ \ldots$$

$$=\frac{3}{10}[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ \ldots\ ]$$

لیدل کېږي چې په پاسنی سلسله کې $a=1$ او $|q|=\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$0.\bar{3}=\frac{3}{10}\cdot\frac{a}{1-q}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\ 0.\bar{3}=\frac{1}{3}$$

پوښتنې

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

$i)\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots$, $ii)\ 5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots$

2. لاندې اعشاري پيريوديک(متوالي) کسرونه په عام کسر واړوئ.

$a)\ 0.2\overline{4}$ $b)\ 0.\overline{5}$

د څلورم څپرکي مهم ټکي

د ترادف تعریف: $a_1, a_2, a_3, \ \ldots\ , a_n$ د عددونو د ترادف په نامه یادېږي.

پاسنی هر یوه عدد ته د ترادف حد یا جمله وایي، a_1 د ترادف لومړی حد او a_n د ترادف $n-$ام حد دی

یا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي.

حسابي ترادف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد وي، نو نوموړی ترادف د حسابي ترادف په نامه یادېږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1}, a_n, a_{n-1} ولرو، نو: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$

په حسابي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول $a_n = a+(n-1)d$

هندسي ترادف: هغه ترادف چې د هغه د هر حد او مخکیني حد تر منځ نسبت یو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه یادېږي، په هندسي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول: $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه $a_{n+1}\ , a_n\ , \ a_{n-1}$ په داسې حال کې چې $n = 2, 3, 4, \ \ldots$ هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت له: $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$

د ترادفونو قسمي مجموعه: $\sum_{1=1}^{n} a_i = a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_n$ د بې نهایت سلسلې (Series) په نامه یادېږي.

او د $\sum_{k=1}^{n} a_k = \ +\ldots+ \ a_1+a_2+a_3+$ د نوموړې $n-$ام سلسلې د جمعي قسمې حاصل دی.

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي حاصل جمع: $S = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

د هندسي ترادف د n لومړیو جملو قسمي حاصل جمع: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

بې نهایت هندسي سلسلې: په یوه هندسي سلسله کې که $|q| < 1$ وي، سلسله متقارب او د n جملو د جمعې حاصل یې د $\frac{a}{1-q}$ عدد ته نږدې کېږي او قیمت یې د دغه فورمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر یې هم بې نهایت وي، سلسله متباعد او د n لومړیو جملو مجموعه یې هم بې نهایت ده، یعنې $S_n = \infty$

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب یې پیدا او له هغه څخه کرښه تاو کړئ.

1. د $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ ترادف $n-$ام حد کوم دی؟

$a)\ \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ $\quad c)\ \frac{n}{n-1}$ $\quad d)\ \frac{n+1}{n}$

2. که $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف $n-$ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد $\frac{11}{7}$ دی؟

$a)\ 3$ $\quad b)\ 4$ $\quad c)\ 5$ $\quad d)\ 6$

3. د $-9, -5, -1, 3, \ldots$ حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

$a)\ 35$ $\quad b)\ 38$ $\quad c)\ -35$ $\quad d)\ -38$

4. د $0.1, 0.4, 0.7, 1, 1.3, \ldots$ حسابي ترادف ګډ توپیر عبارت دی، له:

$a)\ 0.3$ $\quad b)\ 0.1$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2}{3}$

5. د $96, 48, 24, 12, 6, \ldots$ هندسي ترادف ګډ نسبت عبارت له:

$a)\ -\frac{1}{2}$ $\quad b)\ \frac{1}{2}$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2}{3}$

6. د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \ldots$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

$a)\ \frac{3}{512}$ $\quad b)\ \frac{5}{510}$ $\quad c)\ -\frac{5}{512}$ $\quad d)\ \frac{5}{512}$

7. د یوه هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

$a)\ S_n = a\frac{1+q^n}{1-q}$ $\quad b)\ S = a\frac{q^n-1}{q-1}$

$c)\ S = a\frac{1+q^n}{1+q}$ $\quad d)$ هیڅ یو

8. په بې نهایت هندسي متقاربو سلسلو کې ګډ نسبت عبارت دی، له:

$a)\ q = 0$ $\quad b)\ |q| > 1$ $\quad c)\ |q| < 1$ $\quad d)$ هییڅ یو

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1. څو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د څلورو مضرب وي؟
2. د 21 او 31 ترمنځ په بېل بېل ډول درې حسابي وسطونه وليکئ. $21, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, 31$
3. که ديوه حسابي ترادف د لومړی او وروستی جملې مجموعه ($a_1 + a_n = 24$) او د n لومړيو جملو مجموعه يې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟
4. د لاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
   $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$
5. که د يوه هندسي ترادف دويمه جمله 6 او اوومه جمله يې 192 وي ،ګډ نسبت يې وټاکئ.
6. د يوه هندسي ترادف د 8 لومړيو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره ،د هغه د څلورو لومړيو جملو دی، د نوموړي ترادف ګډ نسبت حساب کړئ.
7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.

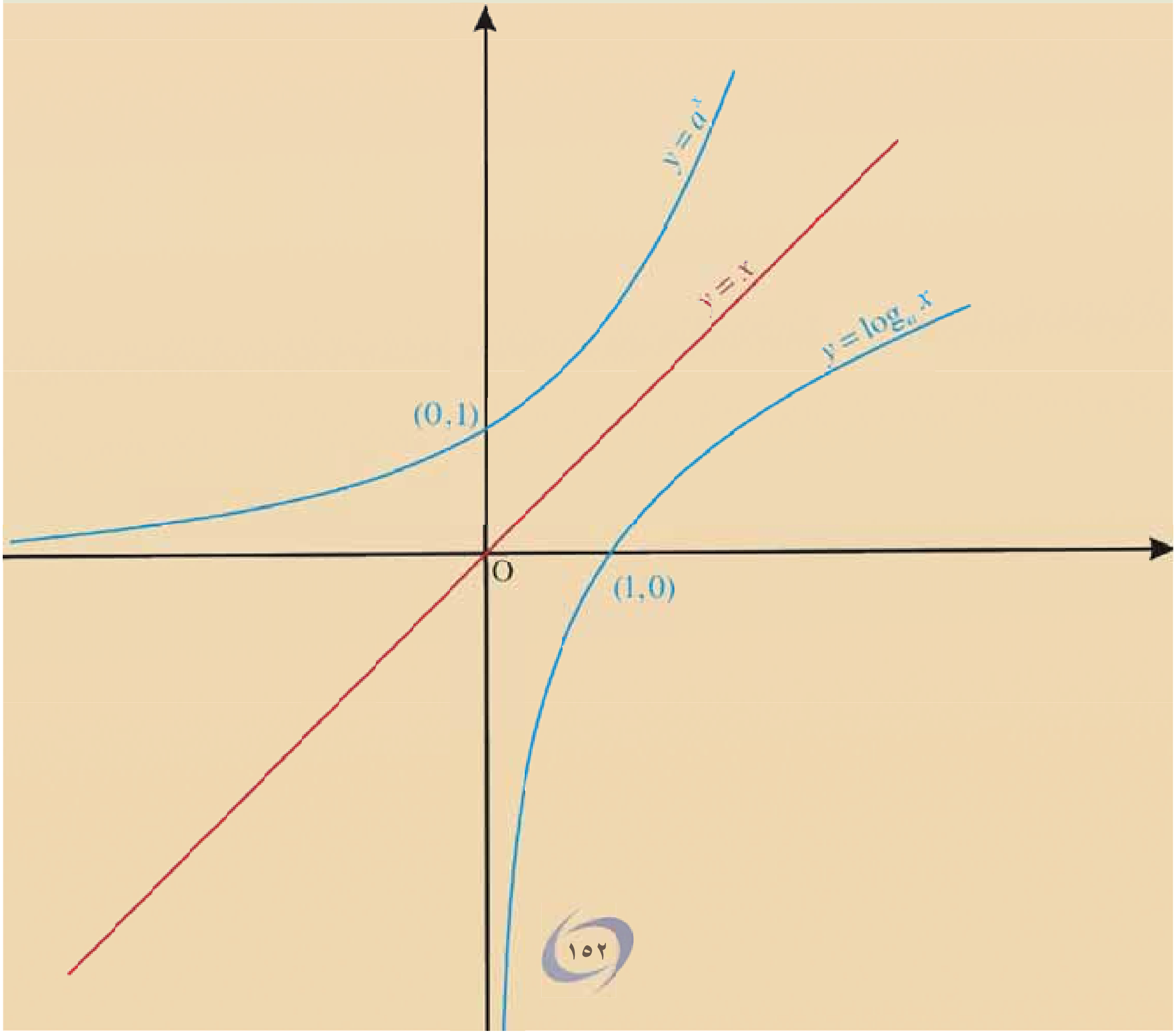
$0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \ldots$

8. د يوه ناپايه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد يې $\frac{1}{9}$ دی، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.
9. د 3 او 96 عددونو تر منځ 4 هندسي وسطونه په بېل بېل ډول وليکئ.
   $3, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, 96$
10. د $\ldots + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 2$ هندسي سلسلې د اته لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
11. که $a = 4$ او $d = 3$ وي، هارمونيکي ترادف د $n = 12$ لپاره په لاس راوړئ.
12. لاندې پيريوديک(متوالي) کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

$a)\ 2.\overline{8}$ $\qquad b)\ 3.\overline{57}$

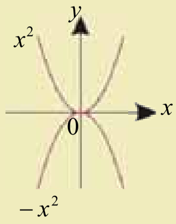
پنځم څپرکی

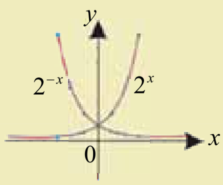
لوګاریتم


$y = a^x$
$y = x$
$y = \log_a x$
(0,1)
O
(1,0)

اکسپوننشیل تابع گاني

Exponential function





پوهیږئ چي د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ تابع گانو گرافونه نظرد y محور ته یوله بل سره متناظر دي. آیا تراوسه مو د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع گانو د گرافونو په هکله فکر کړی دی؟

تعریف

که چیرې a یو مثبت عدد او $a\neq 1$ وي، نو د $f(x)=a^x$ تابع ته د a په قاعده اکسپوننشیل تابع وایي.

$$a\in IR^+\setminus\{1\}\quad,\quad x\in IR\quad,\quad f:\ IR\to IR^+$$

$$f(x)=a^x$$

$f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ اکسپوننشیل تابع گاني د 2 په قاعده دي.

فعالیت

- د $x\in Z$ مختلفو قیمتونو لپاره د $f(x)=2^x$ تابع گراف رسم کړئ.
- د $f(x)=2^x$ تابع گراف د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آیا د $f(x)=2^x$ تابع متزایده، متناقصه او که ثابته ده؟ ولې؟

د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع گانوگرافونه دوضعیه کمیاتویه سیستم کې رسم او یوله بله سره یې پرتله کړئ.

- پورتنی فعالیت د $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابع لپاره سرته ورسوئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

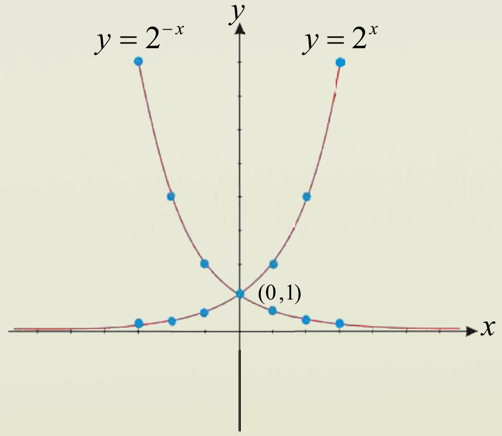
د $f(x)=2^x$ تابع قیمت د $x\in Z$ ټولو قیمتونو لپاره همیشه مثبت ده

د $y=2^x$ او $y=2^{-x}$ تابع گانو گرافونه نظر y محور ته متناظر دي، یعنې د $y=2^x$ تابع گراف هر ټکی د $y=2^{-x}$ تابع گراف له هر ټکي سره یوپه یو متناظر دی.

که چیرې په اکسپوننشیل تابع کې $a>1$ وي متزاید، که $a<1$ وي متناقص او که $a=1$ وي ثابته تابع ده.

د $y=2^{-x}$ تابع متزاید ده، ځکه چې $a=2>1$ دی.

د $y=2^{x}$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه رسموو.



د $y=2^{x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

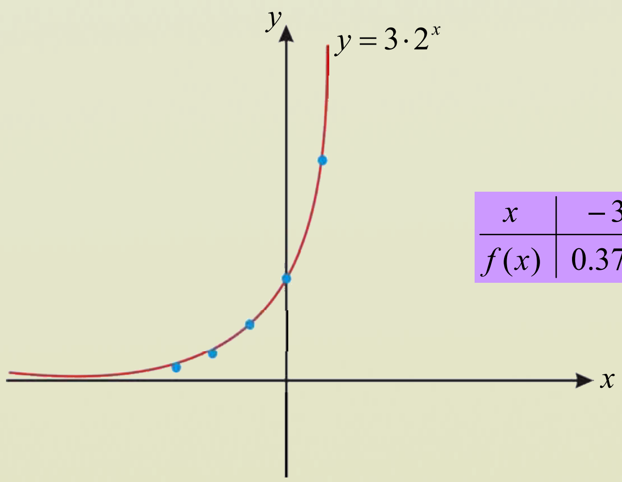
د $y=2^{-x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

مثال: د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع ګراف رسم کړئ

حل: د پایلې په پام کې نیولوسره پوهیږو چې د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع قاعده $a=2$ ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننشیل تابع متزایده ده ،ددې لپاره چې د پورتنی اکسپوننشیل تابع ګراف دقیق رسم کړو، نو د x متحول ته مختلف قیمتونه ورکوو د y قیمتونه پیدا او په یوه جدول کې یې لیکو، وروسته دغه ټکی (x او y) د قایمو مختصاتو په سیستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته یې ګراف رسم کیږي.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24

فعالیت

- د $f(x)=a^x$ اکسپوننشیل تابع په پام کې نیولو سره د x او y ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a\cdot x)=(f(x))^a$$

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه: له تیرو معلوماتو څخه په‌گټه اخیستنې سره د اکسپوننشیل تابع خواص په لاندې ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
2. هره اکسپوننشیل تابع یوپه یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1=x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

4. هره اکسپوننشیل تابع د $a>1$ لپاره متزایده او د $a<1$ لپاره متناقصه ده.
5. د هرې اکسپوننشیل تابع گراف د $(0,1)$ له ټکي څخه تیریږي.
6. د $f(x)=a^x$ او $g(x)=a^{-x}$ اکسپوننشیل تابع‌گانو گرافونه نظر y محورته متناظر پراته دي
7. هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تابع یې $Log_a x$ دی او د $f(x)=a^x$ اکسپوننشیل تابع معکوس تابع $g(x)=a^{-x}$ دی.

پوښتنې

دلاندې اکسپوننشیل تابع ګانو ګرافونه په قایمو مختصاتوکې رسم کړئ.

$a)$ $f(x) = 2 \cdot 3^{x}$

$b)$ $f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$

$c)$ $f(x) = (-2)^{x}$

$d)$ $f(x) = (-2)^{-x}$

لـوگاریـتم

Logarithm

آیاکولای شئ چې اکسپوننشیل تابع په بل ډول هم ولیکئ؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعالیت

لاندې جدول بشپړکړئ

درکړل شوي عددونه $= y$	10000	1000	100	0.01	0.001	0.0001
طاقت لرونکي عددونه $= a^x$	10^4				10^{-3}	
توان $= x$			2			-4

- د 10^{-3} طاقت لرونکی عدد قاعده او توان څو دي؟
- آیا دیوه عدد قاعده او توان د 1 عدد کیدلای شي؟
- آیا تاسوکولای شئ چې طاقت لرونکی عدد په بل ډول وښایاست؟

د پورتني جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعریف کولای شو، بیان کړو.

تعریف: د طاقت لرونکي عدد یوې بیلې ښوونې ته لوګاریتم وایي، یا په بل عبارت د مجهول توان محاسبه د لوګاریتم په نامه یادیږي .

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنی اریکه کې a ته د لوګاریتم قاعده (Base) او y ته لوګاریتمي عدد وایي، د یوه طاقت لرونکی عدد توان له لوګاریتم څخه عبارت دی ،که د قاعدې په اندازه توان لوړشي، راکړل شوی عدد په لاس را کوي.

په تیر جدول کې د 10د قاعدو توانونه دراکړل شوو عددونو له لوګاریتم څخه عبارت دي.

د ساري په توګه: $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوګاريتم قاعده کيدای شي.

مثال: د لوګاريتم د تعريف په کارولو سره لاندې افادې په معادلو(طاقت لرونکو عددي) افادو واړوئ.

$a)\ \log_2 8 = 3$

$b)\ \log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$

پوښتنې

1. لاندې لوګاريتمي اړيکې د هغوی په اړوندو افادو واړوئ.

$a)\quad \log_{10} N = x$

$b)\quad \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

$c)\quad \log_9 81 = 2$

$d)\quad \log_5 5 = 1$

2. لاندې افادې (طاقت لرونکی عددونه) د لوګاريتم په شکل وليکی

$a)\quad 4^3 = 256$

$b)\quad 2^5 = 32$

$c)\quad 10^4 = 10000$

$d)\quad 10^{-1} = 10^y$

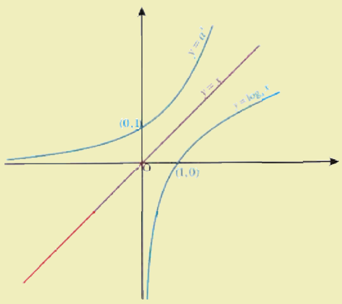
$e)\quad y = 2^x$

$f)\quad y = 3^x$

لوګاریتمي تابع ګانې

آیا ویلی شي چې کوم ډول تابع ګانې معکوسې تابعګانې لري؟

آیا ویلی شي هغه تابع ګانې چې معکوس لري، په قایمو مختصاتو کې نظر کوم مستقیم خط ته متناظرې دي.



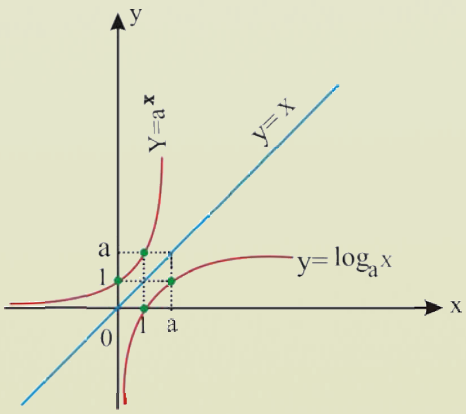
تعریف: د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي او هره اکسپوننشیل تابع لوګاریتمي تابع ده. د یوې $(a \in IR^+$ او $a \neq 1)$ اکسپوننشیل تابع، معکوسه تابع د a په قاعده، هغه لوګاریمي تابع ده چې د $\log_a x$ سره ښوول کیږي.

هره لوګاریتمي تابع، معکوسه تابع لري چې د $f(x) = a^x$ او $g(x) = \log_a x$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابع-ګانې او ګرافونه یې د $y = x$ مستقیم ته متناظر دي.

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

$$f^{-1} : IR^+ \rightarrow IR,\ f^{-1}(x) = \log_a x,\ a \in IR^+,\ a \neq 1$$

د $f(x) = a^x$ تابع ګراف د $x = 1$ لپاره لاندې شکل لري.



x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

که چیرې $a > 1$ وي، نود $\forall x_1 , x_2 \in IR$ لپاره لرو چې:

که $\log_a x_1 > \log_a x_2$ وي؛ نو $x_1 > x_2$ دی.

د $f(x) = a^x$ تابع ګراف د $x = 0$ لپاره $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

لومړی مثال: د $y = 3^x$ او $y = \log_3 x$ تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: د $y = 3^x$ تابع په پام کې نیسو:

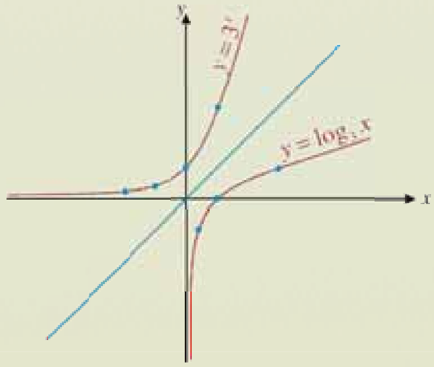
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس $y = \log_3 x$ تابع په پام کې نیسو:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \log_3 1 \end{array}\right\} (1,0) \qquad \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = \log_3 3 \end{array}\right\} (3,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = \log_3 \frac{1}{3} = y = \log_3 3^{-1} = -1 \end{array}\right\} (\frac{1}{3}, -1)$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1



فعالیت

د $y=2^x$ او $y = (\frac{1}{2})^x$ اکسپوننشیل تابعګانو ګراف په پام کې نیولو سره او د اکسپوننشیل تابع ګانو د تعریف له مخې ددوی دارونده معکوسو اکسپوننشیل تابع ګانو قیمتونه د $x = 1, 2$ لپاره پیدا کړئ او نتیجه یې په عمومي ډول ولیکئ.

پایله: د هرې لوګاریتمي تابع لکه $y = \log_a x$ د یوې اختیاري قاعدې لپاره لرو.

$$\log_a 1 = 0 \ , \ \log_a a = 1 \ , \ a \in IR \ , a > 0 \ , a \neq 1$$

دویم مثال: که چیرې $f(x)=\log_3 x$ راکړل شوی وي نو $f(3)$, $f(9)$, $f(3^{-2})$, $f(1)$ په لاس راوړئ.

حل: په راکړل شوي تابع کې د x پر ځای قیمتونه ایږدو.

$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(3)=\log_3 3=1$$
$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(9)=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2\cdot 1=2$$
$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(3^{-2})=\log_3 3^{-2}=-2\cdot\log_3 3=-2\cdot 1=-2$$
$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(1)=\log_3 1=0$$

دریم مثال: که $\log_3 x=4$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: پورتنی لوګاریتم د طاقت په شکل لیکو $\log_3 x=4 \Leftrightarrow x=3^4 \Rightarrow x=81$

د تیرومعلوماتو په کارو لوسره د لوګاریتمي تابع خاصیت په لاندې ډول بیا نیرو.

د لوګاریتمي تابع خاصیتونه:

1. د لوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه د مثبتو عددونو ، له سټ څخه عبارت ده.
2. څرنګه چې $\log_a 1$ د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوګاریتمي تابع یوازې یو جذر $x_0=1$ لري چې په ترتیب سره د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتوکې د $(1,0)$ له ټکي څخه تیریږي.
3. هره لوګاریتمي تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعنې دهر $x_1\neq x_2$ لپاره تل $f(x_1)\neq f(x_2)$ دی.

د 2 په قاعده لوګاریتم:

د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x=16,\frac{1}{8}$ لپاره پیداکړئ.

حل: په راکړل شوی تابع کې د x پرځای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$$f(x)=\log_2 x \Rightarrow f(16)=\log_2 16=\log_2 2^4=4\cdot\log_2 2=4\cdot 1=4$$
$$f(x)=\log_2 x \Rightarrow f(\frac{1}{8})=\log_2(\frac{1}{8})=\log_2 2^{-3}=-3\log_2 2=-3\cdot 1=-3$$

فعالیت

- د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x=28,\sqrt{2}$ لپاره په لاس راوړئ.

پوښتنې

1. د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمتونه په $f(2)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{32})$, $f(32)$ کې پیداکړئ.
2. د $f(x)=\log_3 x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

معمولي لوګاريتم *Common logarithm*

طبيعي لوګاريتم *Natural logarithm*

آيا يوازي 2 او 3 د لوګاريتم قاعدي دي او که نور عددونه هم د لوګاريتم قاعده کيداى شي ؟

$$\left.\begin{matrix}\log_e N \\ \log_{10} 10^3\end{matrix}\right\} = ?$$

تعريف

خرنګه چې ومو ليدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کيداى شي د لوګاريتم قاعده شي، خويه عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کيږي.

1 - هغه لوګاريتم چې قاعده يې 10 وي، د معمولي لوګاريتم Common logarithm يـا اعـشاري (Briggs) لوګاريتم په نامه ياديږي چې د log په سمبول يې ښيي او په لاندې ډول ښودل کيږي.

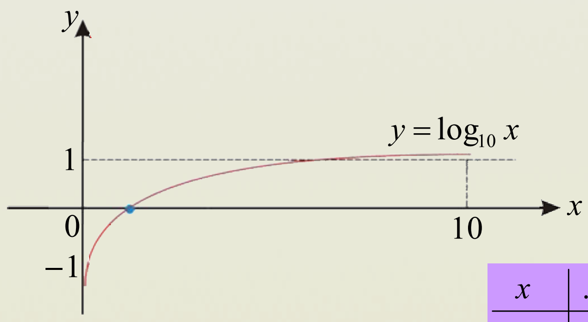
$$f : IR^+ \longrightarrow IR\ ,\ \ f(x) = \log_{10} x = \log x$$

مثال: د $10^{-1}, 10^3, 10^2, 10^1$ او 10^0 عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

حل:

$$\log_{10} 10^0 x = \log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$$
$$\log_{10} 10 = \log 10 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$
$$\log_{10} 10^2 = \log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$
$$\log_{10} 10^3 = \log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$
$$\log_{10} 10^{-1} = \log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$
$$\vdots$$
$$n \in z\ ,\quad \log_{10} 10^n = \log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

د x د مختلفو قیمتونو له مخې یې ګراف رسموو



x	$...10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log x$	$...-3$	-2	-1	0	1	2	3

2 - هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي د طبیعي لوګاریتم(Natural logarithm) په نامه یادیږي او په ln سره ښوول کیږي، e یو ناطق عدد دی چې تقریبي قیمت یې عبارت دی له: $e = 2.718281828\cdots$ چې د $(1+\frac{1}{x})^x$ فورمول څخه هغه وخت چې x بې نهایت ته نږدې شي په لاس راځي د e قیمت پیداکول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د e عدد د اویلر عدد په نامه یادیږي او $f(x) = e^x$ تابع د طبیعي اکسپوننشیل تابع په نوم یادیږي او داسې هم لیکي: $Exp(x) = e^x$

د $y = e^x$ تابع ګراف لکه $y = a^x$ تابع ګراف په څیر ده.

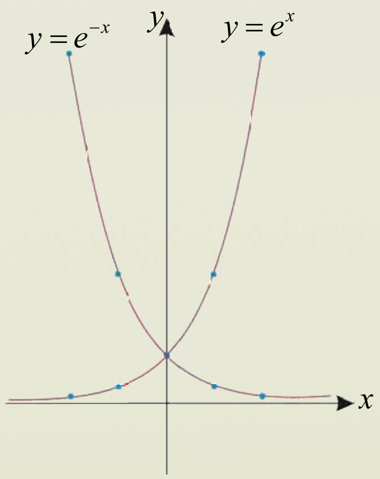
د $y = e^x$ په تابع کې x ته مختلف قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د $y = e^{-x}$ په تابع کې x ته بېلابېل قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

د پورتنيو تقريبي قيمتونو په پام کې نيولو سره د $y = e^{x}$ او $y = e^{-x}$ تابعگانو گرافونه رسموو:



د طبيعي لوگاريتم مطالعه په لوړو رياضياتوکې لکه ساينس، انجنيري، تجارت او تخنيک کې زيات استعمال لري.

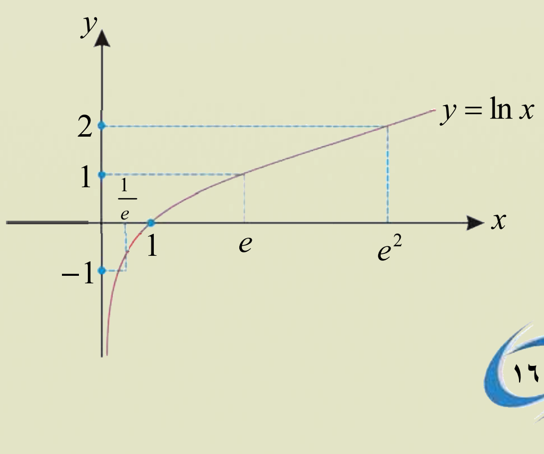
د طبيعي لوگاريتم د تابع $y = \ln x$ گراف په لاندې ډول دی.

مثال: $\ln e^{-2}$, $\ln e^{-1}$ $\ln e^{0}$, $\ln e^{3}$, $\ln e^{2}$ او $\ln e^{1}$ پيدا کړئ.

حل: د تعريف په پام کې نيولو سره لرو چې: $y = \ln x = \log_e x$

$$\ln e^{1} = y \Leftrightarrow e^{y} = e^{1} \Rightarrow y = 1$$
$$\ln e^{2} = y \Leftrightarrow e^{y} = e^{2} \Rightarrow y = 2$$
$$\ln e^{3} = y \Leftrightarrow e^{y} = e^{3} \Rightarrow y = 3$$
$$\ln e^{0} = y \Leftrightarrow e^{y} = e^{0} \Rightarrow y = 0$$
$$\ln e^{-1} = y \Leftrightarrow e^{y} = e^{-1} \Rightarrow y = -1$$
$$\ln e^{-2} = y \Leftrightarrow e^{y} = e^{-2} \Rightarrow y = -2$$

د $y = \ln x$ تابع گراف عبارت دی له:



فعالیت

- د $y = \ln \frac{1}{e7}$ قیمت پیداکړی او د $\log 0.0001$ قیمت په لاس راوړئ.

پوښتني

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\log_e e^8$ $\qquad$ $b)\ln \frac{1}{e^{-3}}$

$c)\log 0.01$ $\qquad$ $d)\log \frac{1}{10^{-2}}$

د لوګاریتم قوانین

Low of logarithm

پوهیږي چې د عـددونو طاقت خپـل قـوانین لـري، آیـا د عددونو لوګاریتم هم قوانین لري او که نه؟

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

فعالیت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قوانین ولیکئ.
- د طاقت لرونکو عددونو د تقسیم قوانین ولیکئ.
- هر عدد د صفر او یاد یوه په توان مساوي په خودی؟

د طاقت قوانینو ته ورته لوګاریتم هم ځینې قوانین لري

لومړی قانون: د هر عدد لوګاریتم د لوګاریتم د تعریف پـه سـاحه کې پـه خپلـه قاعـده مـساوي پـه یـو دی؛ مـثلاً:

$$a \in IR,\ a \neq 1, \log_a a = 1$$

ثبوت: پوهیږو چې $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\},\ a^1 = a$ دي، نو $\log_a a = 1$

لومړی مثال: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$

دویم قانون: د 1 عدد لوګاریتم په هره اختیاري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً: $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}\ , a^0 = 1$ نـو

$$\log_a 1 = 0$$

دویم مثال: $\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

دریم قانون: د دوو یا څوعددونو د حاصل ضرب لوګاریتم د هغو د لوګاریتمونو له مجموع سره مـساوي دی یعنـې:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

ثبوت: که چیرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرو

$$x = a^p \quad \ldots \quad \text{I}$$

$$y = a^q \quad \ldots \quad \text{II}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا ضربوو: $I \cdot II \Rightarrow x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

د پورتنی اړیکي له دواړو خواوي لوګاریتم نیسو: $\log_a(x \cdot y) = p + q$

د p او q قیمتونو په اېښودلو سره لیکو: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

لومړي مثال: د 50 عدد لوګاریتم په لاس راوړئ.

حل: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

دویم مثال: $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

حل:

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2 \cdot 8) = \log_4(4 \cdot 4)$$
$$= \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$$

فعالیت

- دلاندي غیر مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښایاست.

$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a(x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

خلورم قانون:د دوو عددونو د تقسیم لوګاریتم د لوګاریتمونو له تفاضل سره مساوی دي، یعني:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت: که چیرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرو:

$$\left.\begin{array}{l} x = a^p \ldots\ldots\ldots\ I \\ y = a^q \ldots\ldots\ldots\ II \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log_a x = p \\ \log_a y = q \end{array}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا یو په بل وویشو.

$$\frac{I}{II} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

د پورتني اړیکې له اطراف څخه لوګاریتم نیسو: $\log_a \frac{x}{y} = p - q$

د p او q قیمتونو په ایښودلو سره لیکو: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

لومړي مثال: د $\log\frac{5}{2}$ محاسبه کړئ داسې چې $\log 2 = 0.3010,\ \log 5 = 0.6900$ وي.

حل: $\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3980$

دویم مثال: $\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: ثلورم قانون له ښي لوري څخه چپ لوري ته تطبیقوو.

$$\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) = \log_y \frac{10y^2x}{2xy}$$
$$= \log_y(5y) = \log_y y + \log_y 5$$
$$= \log_y 5 + 1$$

پنځم قانون: د یوه توان لرونکي عدد لوګاریتم مساوي دی د توان او د طاقت د قاعدې د لوګاریتم له حاصل ضرب سره یعنې که چیرې $(a^x)^n$ ولرو نو $\log_a x^n = n\log_a x$ دی.

$$\log_a x^n = \log_a(x \cdot x \cdot x \cdot \ \dots \ \cdot x)$$
$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{lag_a x \text{ خلې } n}$$

په پایله کې $\log_a x^n = n\log_a x$

له پنځم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو ولیکو.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a (x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

لومړی مثال: $\log 625 = ?$

حل: $\log 625 = \log 5^4 = 4\log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دویم مثال: دغه لوګاریتم $\log_3 \sqrt[3]{9}$ پیدا کړئ؟

حل: $\log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 \sqrt[3]{3^2} = \log_3 (3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

فعالیت

- لاندې لوګاریتمونه پیداکړئ.

$\log_3(0.12) = ?$ $\qquad \log_5 \sqrt{8} = ?$

پوښتنې

1. لاندې ضربي افادې د جمعي د حاصل په شکل او دجمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل ولیکئ او د امکان په صورت کې یې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ \log_4(5x^2) = ?$

$b)\ \log_{10}(10x^2y) = ?$

$c)\ \log_{10} 5 + \log_{10} 20 = ?$

$d)\ \log_{12} 36 + \log_{12} 4 = ?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستې ځواب په لاس راوړئ.

$a)\ \log_7 \frac{63}{49} = ?$

$b)\ \log \frac{125}{80} = ?$

$c)\ \log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$

$d)\ \log_{10} 1000 - \log_{10} 100 = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\ \log_{10}(0.0001)$

$b)\ \log_2(8)^{-\frac{1}{3}}$

د لوګاريتم د يوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د يوه عدد لوګاريتم په يوه مشخصه قاعده راکړل شوی وي، څرنګه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده واړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

شپږم قانون: په عين قاعده مساوي دی په د دوو عددو نو د تقسيم د حاصل لوګاريتم:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت: د $\log_b m = y$ ثبوت لپاره معادل شکل يې ليکو يعنې $m = b^y$ اوس له اطرافو څخه د a په قاعده لوګاريتم نيسو:

$$\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y \log_a b$$

اوس د y قيمت په پورتني اړيکه کې اېږدو:

$$\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$$

د پورتنی اړيکې دواړه خواوې په $\log_a b$ ويشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال: $\log_9 27$ محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په کار اخيستنې سره لرو:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

دويم مثال: $\log_3 75$ حساب کړی.

حل: بيا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3\cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

یادونه: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی، د هغه عدد له منفي لوګاریتم څخه چې هغه د کو لوګاریتم (co-logarithem) په نامه یاد یږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = co\log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5\log_2 2 = -5\cdot 1 = -5$

اووم قانون: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی په: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\frac{1}{\log_M a} = x$ نیسو: $\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1$

د 1 عدد په ځاي ليکلی شو چې $\log_M M = 1$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M \Rightarrow a^x = M$$

اوس د دواړو خواوو لوګاریتم نیسو یعنې $\log_a M = x$

په پورتنی اړیکه کې د x په ځای قیمت ایږدو: $\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a}$

مثال $\log_{125}\sqrt{5} = ?$

حل: $\log_{125}\sqrt{5} = \log_{125}(5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$

فعالیت

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$$\log_{64} 2 = ? \qquad \log_4 \sqrt{25^6} = ?$$

اتم قانون: دیوه عدد لوګاریتم په توان لرونکي قاعده مساوي دی په $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_a x = m$ نیسو او هغه داړوند طاقت په شکل لیکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه لوګاریتم نیسو: $\log_{a^n} x = \frac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

اوس د m په ځای قیمت اېږدو:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

له پورتنې قانون څخه لاندې پايلې په لاس راځي

$1)\ \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x \qquad 2)\ \log_{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \log_n x \qquad 3)\ \log_{a^n} x^n = \log_a x$

لومړی مثال: $\log_{25} 125 = ?$

حل:

$$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

دويم مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}}\log_3 3 = \frac{6}{1}(\frac{3}{-1})\cdot 1 = -18$$

فعالیت

د پورتنيو خاصيتونو په کارولو سره لاندې لوګاريتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوګاريتم په معکوس ډول وليکئ. $\log_3 6 = ?$

b) $\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$

د معمولي او طبيعي لو ګاريتمونو ترمنځ اړيکه: د دغو دوو لوګاريتمونو(اعشاري او طبيعي) په پام کې نيولو سره يعنې د 10 او e عددونه د $\log_a x = \log_b x.\log_a b$ له اړيکې څخه په ګټې اخيستنې چې b, a او x مثبت عددونه a او b د 1 خلاف دي:

که چيرې $a = e$ او $b = 10$ وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهېږو چې $\log_e x = \ln x$ دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

که چیرې $b=e$ او $a=10$ وضع شي، نو:

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x = \log x = \log_e x \cdot \log_{10} e$$

$$\log x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

خرنگه چې $\log_{10} e = 0.4343$ دی، نو لاندې اړیکه لرو:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

لومړی مثال: د $\ln 4.69$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

دویم مثال: د $\log 6.73$ قیمت پیدا کړئ په داسې حال کې چې $\ln 6.73 = 1.9066$ وي.

حل: د تیرې اړیکې په کارولو سره لرو چې:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

$$\log 6.73 = 0.4343 \cdot \ln 6.73$$

$$= 0.4343 \cdot 1.9066 = 0.8280$$

پوښتنې

لاندې لوگاریتمونه ساده کړئ.

$a)\ \log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = ?$ $b)\ \log_9 27 = ?$

$c)\ \log_8 4 = ?$ $d)\ \log_{121} 14641 = ?$

$e)\ \ln 672000$ $f)\ \ln 0.00927$

$g)\ \ln 672000$ $h)\ \ln 0.235$

کرکټرستیک او مانتیس

Characteristic and Mantissa

پوهیږو چې:

$$\log_{10}1000=3\ ,\ \log_{10}100=2\ ,\ \log_{10}1=0$$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو دشمیر او لوګاریتم ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\}=?$$

تعریف

پوهیږو چې د x هر حقیقي مثبت عدد د $x=S\cdot 10^n$ په شکل لیکل کیدای شي، داسې چې $1\le S<10$ او n یو تام عدد وي.

که چیرې د x لوګاریتم غوښتل شوي وي، په لاندې ډول یې پیداکولای شو.

$$\log x=\log(S\cdot 10^n)=\log S+\log 10^n=\log S+n\log 10=\log S+n$$

د $\log S$ په هغه صورت کې چې $1\le S<10$ وي، S د x د لوګاریتم مانتیس یا اعشاري برخه او n چې یو تام عدد دی، د x د لوګاریتم مشخصه یا کرکټرستیک خخه عبارت دی. څرنګه چې $1\le S<10$ دي نو.

$$\log 1\le\log S<\log 10$$
$$0\le\log S<1$$

له پورتني اړیکې څخه داپایله په لاس راځي چې دیوه عدد لوګاریتم د یو او صفر ترمنځ قرار لري.

فعالیت

- لاندې جدول بشپړکړئ.

د عددونو توان لرونکی شکل	$0.001=10^{-3}$	$0.01=10^{-2}$	$1=10^0$	$1000=10^3$	$4=10^{0.602}$	$7=10^{0.845}$	$10=10^1$	$20=10^{1.390}$
د عددونو لوګاریتمي شکل	$\log_{10}0.001$		$\log_{10}1$			$\log_{10}7$		$\log_{10}20$
لوګاریتم	-3	-2		3	0.602		1	

د هغو عددونو لوګاریتمونه چې د 0، 10، 100, 1000، 0.01 د 0.001 عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له څو سره دي؟

- آیا هر څومره چې عدد لوی شي لوګاریتم یې هم لوئیږي؟
- له 1 څخه د کوچنیو عددونو د لوګاریتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چیرې $1 \le x < 10$ سره وي، کرکټرستیک یې صفر دی.
- که چیرې $10 \le x < 100$ وي کرکټرستیک یې مساوي له 1 سره دی.
- که چیرې $100 \le x < 1000$ وي، نو کرکټرستیک یې 2 دی.

دیوه عدد په لوګاریتم کې صحیح برخه کرکټرستیک او اعشاري برخه یې مانتیس نومیږي.

هغه وخت چې عدد د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکل شي، د 10د عدد توان له کرکټرستیک څخه عبارت دی.

د عدد لیکنې علمي طریقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د 10د توان په څیر ولیکو، لکه: د N عدد داسې لیکو $N = a\cdot10^n$ چې په دې حالت کې $1 \le a < 10$ او nیو تام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکئ.

$a)$ 2573 $b)$ 573216 $c)$ 0.0028

حل :

$a)$ $2573 = 2.373\cdot10^3$

$b)$ $573216 = 5.73216\cdot10^5$

$c)$ $0.0028 = \frac{28}{10000} = \frac{28}{10^4} = 28\cdot10^{-4} = 2.8\cdot10\cdot10^{-4} = 2.8\cdot10^{-3}$

قاعده: که چیرې دیوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نود هغه عدد دلوګاریتم کرکټرستیک مساوي دی، د صحیح برخې د ارقامو په شمیر، منفي یو.

دویم مثال: د $\log 526.9$ کرکټرسټیک مساوي له څو سره دی؟

حل: د صحیح ارقامو شمیرله 3 سره برابر دی، نو کرکټرسټیک یې $3-1=2$ دی.

او له یوه څخه د کوچنیو عددونو کرکټرسټیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري د علامې دښي خوا د صفرونو له شمیر څخه، د یوه په اندازه زیات دی.

دریم مثال: د $\log 0.002$ کرکټرسټیک مساوي په څو دی؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 0.002 &= \log(2\cdot 10^{-3})\\ &= \log 2 + \log 10^{-3}\\ &= \log 2 - 3\log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

نو کرکټرسټیک یې -3 دی.

له تیرو دوو مثالونو څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکټرسټیک په لاس راوړو.

لوګاریتمونه		کرکټرسټیک
$\log 89435$	$5-1$	4
$\log 56.784$	$2-1$	1
$\log 0.995$	$0-1$	-1
$\log 0.0789$	$-1-1$	-2

پوښتنې

دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست؟

$a)\ \log 0.9560$ $\quad b)\ \log 956.0$

$d)\ \log 2345$ $\quad e)\ \log 3.875$

$c)\ \log 9560$ $\quad f)\ \log 0.0009560$

د لوګاریتم جدول

ځرنګه چې په تیرلوست کې مو ولوستل چې د یوه عدد لوګاریتم لـه دوو برخو(کرکټرسټیک او مـانتیس) څخه تشکیل شوی دی. د مانتیس د پیداکولو لپاره پـه څه ډول عمل کوئ.

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\} = ?$$

د مانتیس د پیدا کولو طریقه:

پوهیږو چې هر لوګاریتمي عدد له دوو یعنې صحیح او اعشاري برخوڅخه جوړ شوی دی، ځرنګه چې صحیح برخه یا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخی او مانتیس یې د لوګاریتمې جدول لـه مخې چې مخکې ترتیب شوی، ټاکل کېږي، دغه جدول تر 7،ځینې تر 5 او ځینې یې تر 4 او 3 اعشاري خانو پورې ترتیب شوی چې د مانتیس د پیداکولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري تامو عددونو د ارقامو د شمیر په پام کې نیولو سره جدولونه نومول شوی دي. لکه 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د یوه عدد د مانتیس د پیداکولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نیول کېږي په دې ډول چې ښي لوری دیوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د ښي خواله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانتیس څخه عبارت دی.

مثال:

حل:

$$\log 765 = ?$$

$$\log 765 = \log(7.65 \cdot 10^2)$$

$$= \log 7.65 + \log 10^2$$

$$= \log 7.65 + 2$$

مانتیس کرکټرستیک

د 2 عدد د کرکټرسټیک څخه عبارت دی او دمانتیس د پیداکولو لپاره یعنې $\log 7.65$ په 76 سطر او 5 - ام ستون کې ګورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي یعنې د نوموړي عدد مانتیس 0.8837 دی چې په حقیقت کې د 765 عدد مانتیس دی.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74										
75										
76	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
77										
78										
79										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دویم مثال: $\log 70.9$ په لاس راوړی؟

حل:

$$\log 70.9 = \log(7.09 \cdot 10)$$
$$= \log 7.09 + \log 10^1$$
$$= \log 7.09 + 1$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	**8506**
⋮										
79										
⋮										

د 709 عدد د 9 ستون لاندې لیٹوو چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي یعنې د 7.09 عدد مانتیس 0.8506 دی، په پایله کې یې لوګاریتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

دریم مثال: د 0.0247 لوګاریتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\log 0.0247 = \log(2.47 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 2.47 + \log 10^{-2}$$
$$= \log 2.47 - 2$$

د 2.47 عدد په 24 – ام سطر او 7 – ام ستون لاندې لټوو چې له 3927 عدد سره مطابقت کوي يعنې د 2.47 عدد مانتيس عبارت دی له: 0.3927 په پايله کې د لوګاريتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \bar{2}.3927$$

يادونه: څرنګه چې مانتيس هميشه مثبت دی، که کرکټرستيک منفي وي او وغواړو دواړه د يوه مثبت عدد په شکل وليکو، نو منفي علامه د کرکټرستيک له پاسه ليکو؛ مثلاً په پورتني مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \bar{2}3927$$

فعاليت

- د لوګاريتم د جدول په پام کې نيولو سره 9280 عدد لوګاريتم حساب کړئ.

څلورم مثال: د لاندې جدول په پام کې نيولوسره د $15, 105, 900, \frac{3}{4}, 0.007$ عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

عددونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوګاريتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$$\log 15 = (3\cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\begin{aligned}\log(105) &= \log(5\cdot 3\cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7\\ &= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570\\ &= 2.02079\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(900) &= \log(9\cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2\\ &= 0.95424 + 2\\ &= 2.95424\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(\frac{3}{4}) &= \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206\\ &= -0.12486\end{aligned}$$

$$\log(0.007) = \log(7\cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \bar{3}.84570$$

پوښتنې

1. دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول وواياست او مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړئ.

$a)\ \log 222$ $\qquad b)\ \log 0.921$

$c)\ \log 928$ $\qquad d)\ \log 527$

$e)\ \log 0.024$ $\qquad f)\ \log 2400$

$h)\ \log 0.00024$ $\qquad j)\ \log 24$

2. د لاندې لوګاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

$a)\quad \log(2.73)^3$ $\qquad b)\quad \log\sqrt[5]{0.0762}$

انتي لوګاریتم

Anti Logarithm

که چیرې د یوه عدد لوګاریتم راکړل شوي وي څرنګه کولای شو، عدد یې پیدا کړو؟

$\log 481 = 2.6821$

$\log N = 1.6580$

$N = ?$

تعریف: که چیرې $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم بلل کېږي یعنې $y = anti\log x$

مثلاً که چیرې $\log 34 = 1.5315$ وي، نود 1.5315 انتي لوګاریتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

فعالیت

- که چیرې $\log N = 2.8779$ وي، نو د N عدد و ټاکئ.
- د نومورې عدد کرکټرسټیک پیدا کړئ.
- د مانتیس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

څرنګه چې د 2 عدد کرکټرسټیک دی، نو N یو درې رقمي عدد دی، مانتیس یې په جدول کې له 75 سطر او 5 ستون سره مطابقت لري، نود N عدد عبارت دی له: 755

لومړی مثال: د $\log N = 2.9939$ د N عدد په لاس راوړئ.

حل: د نوموړي لوګاریتم د مانتیس برخه یعنې 0.9939 د لوګاریتم په جدول کې پیدا کوو، ګورو چې په کوم سطر او ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې لیکو چې د ستون عدد د اړوند سطر ښي لوری ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه یعنې د 986 عدد مانتیس 0.9939 دی. په پورتني پوښتنه کې 2 د کرکټرسټیک په توګه راکړل شوی، نو د صحیح رقمونو شمیرې 3 دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له 986 یعنې: $N = 986$

$\log 986 = 2.9939$

$anti\log 2.9939 = 986$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.5 9.6 9.7 9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952

دويم مثال: که چيرې $\log N = 0.9791$ وي N په لاس راوړئ.

حل: دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پيدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه د تير په شان ليکو، څرنگه چې 953 مانتيس ښيي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنگه چې کرکټرستيک صفر دی، نو مطلوب عدد يعنې N يو صحيح رقم لري چې عبارت دی له:

$$N = 9.53$$
$$\log 9.53 = 0.9791$$
$$anti\log 0.9791 = 9.53$$

دريم مثال: $\log N = -3.0531$ دی، د N عدد پيدا کړئ.

په مثال کی ليدل کيږی چې کرکټرستيک او مانتيس دواړه منفي دی او په جدول کې منفي عدد وجود نه لری، ددې لپاره چې مانتيس مثبت شي، د 1 عدد له مانتيس سره جمع او له کرکټرستيک څخه يې کموو، په مساواتو کې تغيرنه راځي.

اوس کولای شو د مانتيس 0.9469 په مرسته د N عدد له جدول څخه پيدا کړو، چې عبارت دی له 886.

کرکټرستيک ښيي چې د اعشاري د علامې او له چپې خوا څخه د لومړی 8 عدد تر منځ دري صفرونه ځای لري

$N = 0.000885$ نو $anti\log -3.05531 = 0.000885$

څلورم مثال: دلاندې عددونو لوگاريتمونه محاسبه کړئ.

$a)$ 2 $b)$ 0.2 $c)$ 0.02 $d)$ 0.0002

حل:

$a)\ \log 2 = 0.3010$

$b)\ \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \bar{1}.3010$

$c)\ \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \bar{2}.3010$

$d)\ \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \bar{4}.3010$

له پورتني مثال څخه دا پايله په لاس راځي چې ديوه عدد د لوگاريتم مانتيس يوازې د رقمونو په ترتيب پورې اړه لري په پورتني مثال کې ټول عددونه يو شان مانتيس 0.3010 لري، ښي او يا چپ لوري ته د صفرونو زياتول په مانتيس باندې کومه اغيزه نه لري.

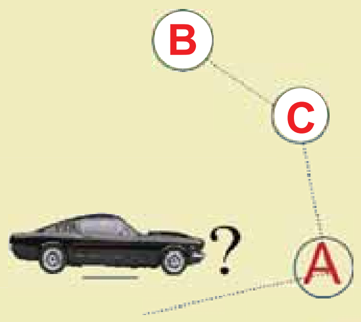
پوښتنې

دلاندې هر يوه انتی لوگاريتم قيمت په لاس راوړئ.

$a)\ anti\log 4.9479$ $b)\ anti\log -5.0521$

خطي انټرپولېشن

Linear Interpolation



یوګرندی موټر په متوسط سرعت په 30 دقیقوکې د A ښارته او یونیم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښارته رسیږي، وواياست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښار ته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کې ورسیږي.

فعالیت

- که چیرې $\log A = a$, $\log B = b$ راکړل شوي وي او $\log C = c$ وي، په داسې حال کې چې $A < C < B$ دی.
- $\log C$ د حقیقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکل ووایاست چې که (a, b) یوبل ته نژدې عددونه وي، نود C لوګاریتم چیرې پروت دی؟
- د a او b تر منځ قیمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

پایله: که چیرې دیوه نامعلوم قیمت د پیداکولو لپاره چې ددوو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلوموعددونو په مرسته نامعلوم عدد پیداکړو، په دې صورت کې نوموړې طریقه د خطي انټرپولېشن په نامه یادیږي.

که یو څلور رقمي عددلکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوګاریتم له دري رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوګاریتم د خطي انټرپولېشن په واسطه پیداکولای شو.

لومړی مثال: د $\log 5.235$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونو په منځ کې پراته دي چې لوګاریتمونه یې په جدول کې شته، او په لاندې ډول یې په لاس راوړو.

$$\log 5.230 = 0.7185$$
$$\log 5.240 = 0.7193$$

څرنګه چې $5.23 < 5.235 < 5.24$ دی، نو:

$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$
$$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$$

که چیرې $\log 5.535 = x$ په پام کې ونیسو ، نو په دې صورت کې لیکو چې: $0.7185 < x < 0.7193$

د عددونو د لوگاریتم او مانتیسو نو ترمنځ تو پیر په پام کې نیسو.

	عددونه	لوگاریتمونه	
د عددونو توپیر 0.010	5.240	0.7193	د لوگاریتمونو توپیر 0.0008
0.005	5.235	x	d
	5.230	0.7185	

د خطي انټرپولیشن په طریقه کې له دې څلورو عددونو څخه یو تناسب چې یو لـه بـل سـره متناسـب دي جـوړوو او نامعلوم قیمت پیدا کوو یعنې:

$$\frac{d}{0.0008}=\frac{0.005}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.005\cdot 0.0008}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.000004}{0.010}=0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عددله مانتیس سره جمع کوو. چې حاصل یې د مطلوب عدد لوگاریتم دی.

$$0.0004+0.7185=0.7189$$
$$\log 5.235=0.7189$$

دویم مثال: د 0.0007957 عدد لوگاریتم پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\begin{aligned}\log 0.0007957&=\log(7.957\cdot 10^{-4})\\&=\log 7.957+\log 10^{-4}\\&=\log 7.957-4\log 10\\&=\log 7.957-4\end{aligned}$$

د 7.957 عـدد لوگـاریتم پـه جـدول کـې نـشته، لیـدل کېـږي چـې کرکټرسـټیک یـې 4 − دی، خـو د 7.96 او 7.95 عددونو لوگاریتم په جدول کې شته.

$$\log 7.960=0.9009$$
$$\log 7.950=0.9004$$

څرنگه چې $7.960 > 7.957 > 7.950$ نو:

$$\log 7.950<\log 7.957<\log 7.960$$

د $x = \log 7.957$ په پام کې نیولو سره، دخطي انټرپولیشن پواسطه یې لوګاریتم په لاس راوړو.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{عددونه} & \text{لوګاریتمونه} & \\ \text{د عددونو توپیر } 0.01 & & 7.96 & 0.9009 & \\ & 0.007 & 7.957 & x & d \quad 0.0005 \text{ د لوګاریتمونو توپیر} \\ & & 7.950 & 0.9004 & \end{array}$$

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005\frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو: $0.9004 + 0.0004 = 0.9008$

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

دریم مثال: 4.5544 عدد انتي لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: که چیرې $anti\log 4.5544 = x$ وضع شي، نو باید x پیداکړو، له پورتني اړیکې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د 4.5544 عدد په جدول کې نشته، خو د 0.5539 او 0.5551 عددونه په جدول کې شته، انتي‌لوګاریتم یې پیداکوو، ددغه عددونو په مرسته د x قیمت د انټرپولیشن په طریقه پیداکوو، د عددونو تفاضل لکه په تیرو مثالونوکې په لاس راوړو او تناسب یې د تیرېه شان تشکیلوو.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{عددونه} & \text{مانتیسونه} & \\ \text{د عددونو توپیر } 0.01 & & 3.59 & 0.5551 & \\ & d & t & 0.5544 & 0.0005 \quad 0.0012 \text{ د مانتیسونو توپیر} \\ & & 3.58 & 0.5539 & \end{array}$$

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

د t د قیمت پیداکولو لپاره د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$$
$$= 3.5842$$
$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$
$$\log x = \log 35842$$

هغه وخت چې ددوو عددونو لوګاریتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$$x = 35842$$

پوښتني

په لاندي اړیکو کې د x او z قیمتونه پیدا کړئ.

$a)\quad z = \log 0.001582 \qquad b)\quad x = \log 6.289$

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو حل

Exponential and logarithmic equations

آیا تر اوسه مود $\log_2(x^2-1)=3$ او $5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$ معادلو د حل په اړه فکر کړی دی؟

د x په کومو قیمتونو پورتني مساوات سم دی؟

څرنګه کولای شو په دغه ډول معادلاتو کې د x مجهول قیمت وټاکو.

$$\log_2(x^2-1)=3$$
$$5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$$

تعریف

هغه معادلې چې توانونه یې مجهول وي، د اکسپوننشیل معادلو په نامه یادیږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره که چیرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانینو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم یو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که $2^{x-1}=32$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خوا وو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1}=32 \Rightarrow 2^{x-1}=2^5 \Rightarrow x-1=5 \quad , \quad x=6$$

دویم مثال: د $8^{3x-1}=2^4$ اکسپوننشیل معادله حل او وازموئ.

حل:

$$8^{3x-1}=2^4$$
$$(2^3)^{3x-1}=2^{3(3x-1)}=2^4$$

څرنګه چې قاعدې یو له بل سره مساوی دي، نو توانونه یې هم مساوی دي؛ نو لیکو:

$$3(3x-1)=4$$
$$9x-3=4 \Rightarrow 9x=4+3$$
$$9x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

آزمونه:

$$8^{3\frac{7}{9}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}} = 2^4 \Rightarrow 8^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow 2^4 = 2^4$$

فعالیت

- د $16^{x+1} = 64^{x-2}$ اکسپوننشیل معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

لوګاریتمي معادلې:

هغه لوګاریتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادیږي. له یوې لوګاریتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیداکولو لپاره لومړی معادله د لوګاریتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشیل معادلو څخه په کار اخیستنې سره د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوګاریتمي معادلو بېلګې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوګاریتمي معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2-1) = 3$$

پورته لوګاریتمي شکل داسې لیکو :

$$x^2 - 1 = 2^3$$

$$x^2 = 1 + 8 = 9$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9} \quad , \qquad x = \pm 3$$

دويم مثال: په $\log_3(x+2)=2\log_3 9$ لوګاريتمي معادله کې د x قيمت پيدا کړئ.

حل:

$$\log_3(x+2)=2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2)=\log_3 9^2$$

څرنګه چې د لوګاريتمونو قاعدې سره مساوي دي، نوعددونه هم يوله بل سره مساوي دي.

$$x+2=9^2 \Rightarrow x=81-2$$
$$x=79$$

دريم مثال: په $\log_{\sqrt{5}} x-\log_{\sqrt{5}} 3-\log_{\sqrt{5}} 5+\log_{\sqrt{5}} 4=0$ لوګاريتمي معادله کې د x قيمت په لاس راوړئ.

حل: د دوو عددونو د لوګاريتم د ضرب او وېش په کارولو سره پورتنۍ معادله په لاندې ډول لیکو :

$$\log_{\sqrt{5}} x=\log_{\sqrt{5}} 3+\log_{\sqrt{5}} 5-\log_{\sqrt{5}} 4=\log_{\sqrt{5}}\frac{3\cdot 5}{4}=\log_{\sqrt{5}}\frac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{15}{4}$$

څلورم مثال: په $\log_3(3^{2x}+2)=x+1$ معادله کې د x قيمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\log_3(3^{2x}+2)=x+1 \Rightarrow 3^{2x}+2=3^{x+1}$$
$$3^{2x}-3^{x+1}+2=0 \Rightarrow 3^{2x}-3\cdot 3^x+2=0$$
$$(3^x)^2-3\cdot 3^x+2=0$$

که $3^x=t$ وضع کړو،نو:

$$t^2-3t+2=0 \Rightarrow (t-1)(t-2)=0$$
$$t_1=1 \quad , \quad t_2=2$$

$$3^x=t_1=1 \Rightarrow 3^x=3^0 \Rightarrow x_1=0$$
$$3^x=t_2=2 \Rightarrow \log_3 2=x \Rightarrow x_2=\log_3 2$$

پنځم مثال: په لاندې لوګاريتمي معادله کې د x قيمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2+36)-2\log(-x)=1$$

حل:

$$\log(x^2+36)-\log(-x)^2=1$$

$$\log\frac{x^2+36}{x^2}=\log10\Rightarrow\frac{x^2+36}{x^2}=10$$

$$x^2+36=10x^2\Rightarrow10x^2-x^2-36=0$$

$$9x^2=36\Rightarrow x^2=4$$

$$x_{1,2}=\pm2\quad,\quad x_1=2\quad,\quad x_2=-2$$

پوښتني

په لاندې لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو کې د x قیمت په لاس راوړئ.

$a)\quad (11)^{3x-1}=11$

$b)\quad 7^{2x-1}=3^{x+3}$

$c)\quad \log\sqrt{x}+3=4$

$d)\quad \log_5\frac{x-1}{x-2}=2$

دریاضیکی عملیوپه سرته رسولوکې له لوګاریتم څخه کار اخېستنه

آیا کولای شو د اعشاری عددونو عملیې لکه ضرب، تقسیم، توان او جذر د لوګاریتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{28.8}{78.8} \\ 3.17\cdot 88.2 \end{array}\right\} = ?$$

د ضرب حاصل پیدا کول د لوګاریتم په مرسته: کولای شو دوو یا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوګاریتم د لاندې قانون له مخې پیدا کړو: $\log(M\cdot N)=\log M+\log N$

لومړی مثال: غواړو چې د $3.17\cdot 88.2$ عددونو د ضرب حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس لیکلای شو:

$$\log(3.17\cdot 88.2)=\log 3.17+\log 88.2$$
$$=0.5011+1.9455=2.4466$$

لیدل کېږي چې د0.4466 مانتیس عدد په جدول کې نشته، خود 0.4456 او0.4472 مانتیسونو عددونه په جدول کې شته.

له جدول څخه لیدل کېږي چې:

$$anti\log 0.4456=2.79$$
$$anti\log 0.4472=2.80$$

$$\text{د عددونو توپیر } 0.01\begin{array}{c}\\ \left[\begin{array}{ll} & 2.79 \\ d\left[\begin{array}{l} t \\ 2.80 \end{array}\right. & \end{array}\right.\end{array}\quad \begin{array}{c} \text{مانتیسونه} \\ \left.\begin{array}{l} 0.4456 \\ \left.\begin{array}{l} 0.4466 \\ 0.4472 \end{array}\right]0.0006 \end{array}\right]0.0016 \text{ د مانتیسونو توپیر} \end{array}$$

عددونه	مانتیسونه
2.79	0.4456
t	0.4466
2.80	0.4472

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}\Rightarrow d=\frac{0.0006\cdot 0.01}{0.0016}=\frac{0.00006}{0.0016}$$
$$d=0.00375$$

د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

په داسې حال کې چې $anti\log 2.4466 = 297.375$ دی، نو: $3.17 \cdot 88.2 = 297.375$

آیا پوهیږی؟

ددوو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوگاریتم د جمعې حاصل پیدا کوو ، وروسته یې انتي لوگاریتم په لاس راوړو چې دغه انتي لوگاریتم د نومړو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.

فعالیت

- د $62 \cdot 74.2$ د ضرب حاصل د لوگاریتم په واسطه پیدا کړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوگاریتم په مرسته:

کولای شو د لوگاریتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستنې سره ، د دوو اعشاري عددونو دتقسیم حاصل په لاس راوړو یعنې: $\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$

مثال: غواړو د $\frac{8750}{3.49}$ خارج قسمت د لوگاریتم پواسطه پیداکړو.

حل:

$$\log \frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

د لوگاریتم له جدول څخه لروچې:

$$\log 8750 = 3.9420$$

$$\log 3.49 = 0.5428$$

$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$

$$anti\log 3.3992 = 2507$$

$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

یادونه: ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پیداکولو لپاره لومړی دمقسوم له لوګاریتم څخه د مقسوم علیه لوګاریتم کموو، وروسته ددغه تفاوت انتي لوګاریتم په لاس راوړو چې داد مطلوب خارج قسمت حاصل دی.

فعالیت

- د $\frac{374}{16.2}$ حاصل د لوګاریتم په مرسته په لاس راوړئ.

د لوګاریتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:

د هغو توان لرونکو عددونو محاسبه چې توانونه يې تام او يا کسرونه وي، د لوګاریتم له پنځم قانون څخه کار اخلو يعني $\log M^n = n\log M$

مثال: غواړو چې د $(1.05)^6$ عدد محاسبه کړو.

حل:

$$\log(1.05)^6 = 6\log 1.05 = 6(0.0212)$$
$$= 0.1272$$

بناپردی $anti\log 0.1272 = 1.340$

په لنډ ډول ویلای شوچې: دیوه توان لرونکي عدد قیمت پیداکولو لپاره لومړی د عدد توان په لوګاریتم کې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انتي لوګاریتم د توان لرونکي عدد قیمت دی.

فعالیت

- د $(694)^{\frac{2}{3}}$ عدد قیمت د لوګاریتم په واسطه پیدا کړئ.

پوښتنې

1. لاندې د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوګاریتم په واسطه حساب کړئ.

$a)\ \dfrac{8}{737} = ?$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{32.2}{25.1} = ?$

3. لاندې توان لرونکي عدد دلوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

د څپرکي مهم ټکي

اکسپوننشیل تابع: که a یو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $f(x) = a^x$ تابع اکسپوننشیل تابع د a په قاعده نومیږي.

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه:

- د اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او دقیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف چې $a \neq 1$ وي، منحني یې د $(0،1)$ له ټکي څخه تیریږي.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف نظر y محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوس تابع یې $Log_a x$ دی.

لوګاریتمي تابع: $y = \log_a x$ چې د $y = a^x$ اکسپوننشیل تابع معکوس دی، د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي.

دلوګاریتمي تابع خواص

- دلوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه مثبت حقیقي عددونه تشکیلوي.
- د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتو کې د $(1،0)$ له ټکي څخه تیریږي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تابع $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هرې لوګاریتمي تابع $f(x) = \log_a x$ مجانب، د y محور دی.

د لوګاریتم قوانین:

- لومړی قانون $\log_a a = 1$
- دویم قانون $\log_a 1 = 0$
- دریم قانون $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- څلورم قانون $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- پنځم قانون $\log_a x^n = n \log_a x$
- شپږم قانون $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون $\frac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$
- اتم قانون $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

د لوګاریتم ډولونه:

معمولي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې 10 وي، معمولي لوګاریتم یا اعشاري (Brigys) لوګاریتم بلل کیږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کیږي.

طبیعي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي، د طبیعي لوګاریتم په نامه یادیږي، چې طبیعي لوګاریتم د ln په سمبول ښودل کیږي یعنې $\log_e x = \ln x$

کرکټرستیک او مانتیس

کرکټرستیک که چیرې $\log x = n + \log S$ وي داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد دی n د مشخصې یا کرکټرستیک په نامه یادیږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کیږي.

مانتیس: د $(\log S)$ اعشاري برخه د مانتیس په نامه یادیږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، مانتیس یو مثبت عدد د صفر او یوه ترمنځ دی.

انتي لوګاریتم (antilogarithm): که $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم دی یعنې

$y = anti \log x$

خطي انټرپولیشن: که یو نامعلوم عدد ددوو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، پدې صورت کې دا طریقه د خطي انټرپولیشن په نامه یادیږي.

اکسپوننشیل او لوګاریتمی معادلې

- **اکسپوننشیل معادلې** هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توانونه مجهول وي، د اکسپوننشیل معادلې په نامه یادیږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره د طاقت له قوانینو څخه ګټه اخلو.
- **لوګاریتمي معادلې** هغه لوګاریتمي مساوات چې په هغوی کې مجهول موجودوي، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادیږي.

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا او له هغه څخه کرۍ تاو کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوي له څو سره دی؟

$a)\ 4$ $b)\ -4$ $c)\ 3$ $d)\ -3$

2. د $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ اړيکه کې د b قيمت عبارت دی له:

$a)\ \frac{1}{4}$ $b)\ 81$ $c)\ \sqrt{81}$ $d)\ -4$

3. د $\log_3 81 - \log 0.01$ افادې قيمت په لاس راوړئ.

$a)\ 0$ $b)\ 4$ $c)\ 8$ $d)\ 9$

4. د x قيمت په $\log 81 - \log 2x = \log 3$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

$a)\ 2$ $b)\ 3$ $c)\ 4$ $d)\ 5$

5. $\log_2 16 = ?$

$a)\ 4$ $b)\ 3$ $c)\ 5$ $d)\ -4$

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 4$ $d)\ 5$

7. د $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ قيمت عبارت دی له :

$a)\ \frac{1}{2}$ $b)\ -\frac{1}{2}$ $c)\ 1$ $d)\ -1$

8. د x قيمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له :

$a)\ x=-3$ $b)\ x=9$ $c)\ x=-9$ $d)\ x=3$

9. د $\log 234.21$ مشخصه ياکرکټرستيک عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ 1$ $c)\ 2$ $d)\ 3$

10. د يوه عدد دلوګاريتم معکوس عبارت دی له:

$a)\ \log_a m = \frac{1}{\log_a m}$ $b)\ \log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$ $c)\ \log_a m = \frac{1}{\log_m a}$ $d)$ هيڅ يو

1. په لاندې معادلوکې د x قیمت پیدا کړئ

$a)\ 3^x = 3^{3x+2}$ $\quad b)\ 3^{2x} = 9^{4x-1}$

$c)\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ $\quad d)\ 16^{x+1} = 64^{x-2}b$

$e)15^{2x-1} = 7^{x+1}$ $\quad f)\ \log\sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2}\log x$

$g)\log(4x-3) = 2 - \log 20$ $\quad h)\ \log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2$

2- لاندې لوګاریتمي افادې د لوګاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$a)\log_8 3\sqrt{4} = ?$ $\quad b)\log_3 \frac{1}{243} = ?$

$c)\log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $\quad d)\log(\frac{8}{\sqrt{128}}) = ?$ $\quad e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\quad \log_8\sqrt[3]{4} = ?$ $\quad b)\quad \log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\quad \log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $\quad d)\quad \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$ $\quad e)\quad \log\frac{8}{\sqrt{128}} = ?$

4. لاندې انتي لوګاریتمونه پیدا کړئ.

$a)\ 1.7300$ $\quad b)0.8954$ $\quad c)4.5682$ $\quad d)\overline{2}.1987$

5. دلاندې هر عدد لوګاریتم حساب کړئ.

$a)89500$ $\quad b)\ 91$ $\quad c)3065.3$ $\quad d)\log 0.002$

6. د لوګاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$a)\quad 2.01\cdot 52.9$ $\quad b)\quad (0.0062)(-34.8)$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ 0.888 \div 256$ $\quad b)\ 17.3 \div 7.47$

8. د لاندی توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)(7.42)^3$ $\quad b)(-84.7)^2$ $\quad c)\sqrt{418}$ $\quad d)\sqrt{0.21}$

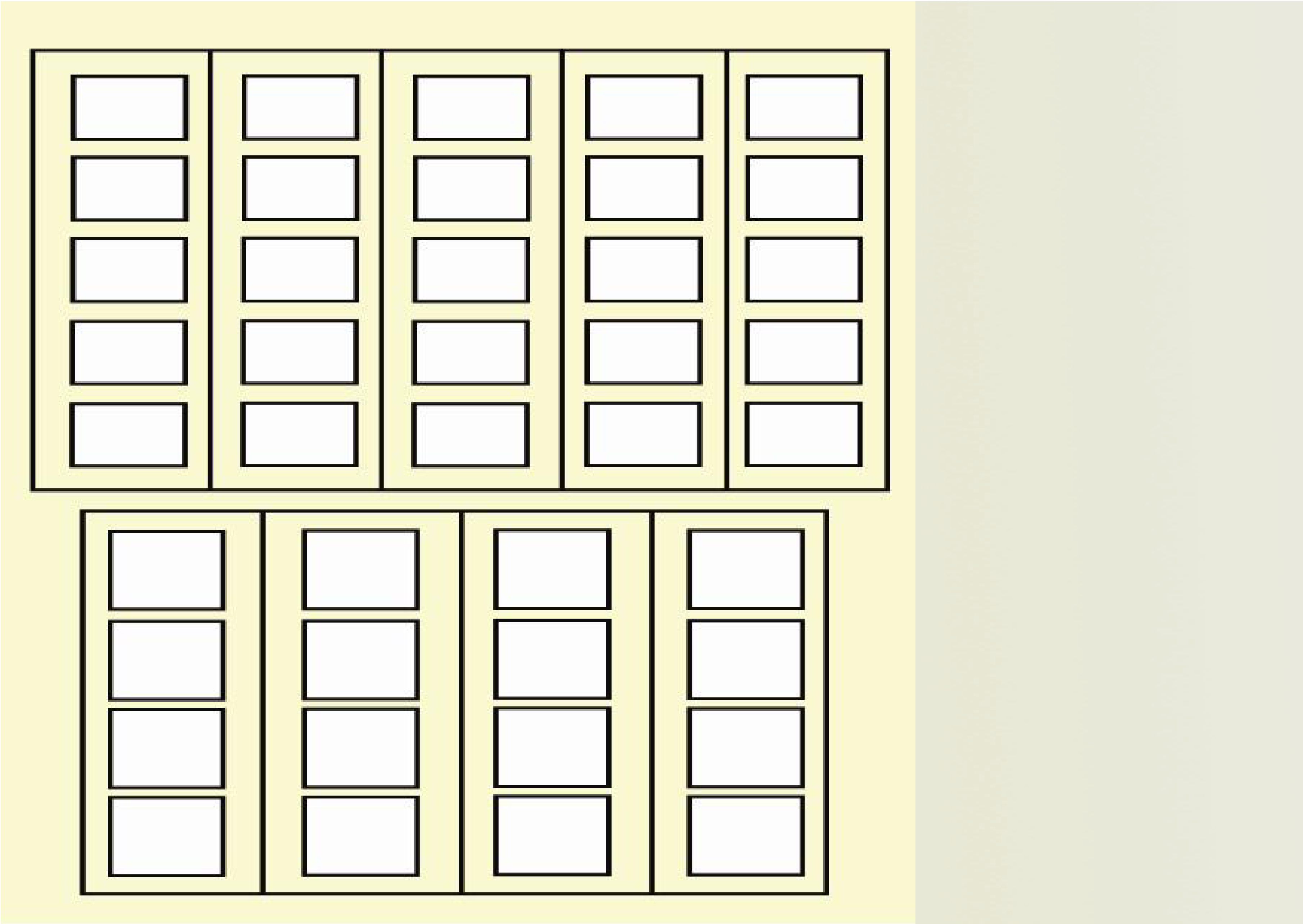
د لوګاریتم جدول چې مانتیس یې څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

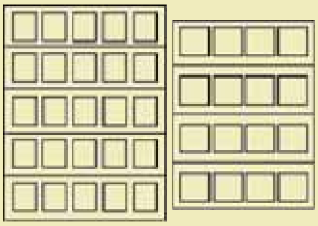
شپږم څپرکی

مټریکسونه



متریکسونه

Matrixes



د څو پوړيزې ودانۍ تصوير په پام کې نيسو، هره ودانۍ څو پوړه لري، په مخامخ شکل کې وينو چې د لويې ودانۍ د کړکيو شمېر $5 \cdot 5 = 25$ دی، د کوچنۍ ودانۍ د هر پوړ کړکۍ وشمېرئ.

فعا ليت

- د قايمو مختصاتو په سيستم کې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ.
- د M ټکی متناظر يعنې $M'(x',y')$ نظر x محور ته وټاکئ.
- د M او M' مختصاتو تر منځ اړيکې وليکئ.
- پورتنۍ اړيکې د ضريبو-نو په څېر وليکئ.
- د پورتني فعاليت ټول مراحل، د p او د هغه متناظر p'، نظر y محورته S او د هغه متناظر S' نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سرته ورسوئ.

د پورتني فعاليت له اجراء څخه وروسته لاندې پايله ليکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{M}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{M'}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

په دې معنی چې د M ټکی د $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ په واسطه د M' په ټکي بدل او يا اوښتی دی.

پوهېږئ چې هر يو $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ د وضعيه کمياتو په مستوي کې د يوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ يوه نوې وسيله ده چې د لومړي ځل لپاره تاسو له هغې سره مخامخ کېږئ.

په همدې ډول: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هر يو د p', p او s', s دټکوبدل شوي وسيله ده.

لاندې هرې يوې وسيلې ته (چې دټکود بدلولو د بدليدو دنده په غاړه لري) متريکس وايي.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

تعريف: د شيانو، عددونو يا تورو ګيډئ چې په سطري او ستوني ډول، په يوه مستطيلي جدول کې ترتيب شي، د متريکس (Matrix) په نامه يادېږي.

د مستطيلي جدول هر عنصر د متريکس د عنصر په نامه يادېږي. لوی حروفونه د $A, B, C\ldots$ متريکس ښيي او واړه حروفونه $a, b, c\ldots$ د متريکس عناصر دي.

د عددونو هر يولاندی جدول يو متريکس په ګوته کوي.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 7 & 5 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{لومړی سطر} \\ \text{دويم سطر} \\ \text{دريم سطر} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \text{لومړی ستون} & \text{دويم ستون} & \text{دريم ستون} \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{لومړی سطر} \\ \text{دويم سطر} \\ \text{دريم سطر} \end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} & 7 & -2 \end{pmatrix} \text{سطر}$$

که چيرې a د يوه متريکس په $i-$ام سطر او $j-$ام ستون کې ځای ولري، هغه د a_{ij} په شکل ښوول کېږي چې i او j طبيعي عددونه دي، په ترتيب سره د سطر او ستون له شمېر څخه ښکارندويي کوي.

$i=1,2,3\ldots \, , \, j=1,2,3\ldots$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

د میټریکس مرتبه: که د A د میټریکس د سطرونو شمېر m او د ستونونو شمېر یې n وي، وایو چې د A میټریکس مرتبه د $m\times n$ څخه عبارت دی اوداسې ویل کېږي m په n کې میټریکس او لیکو $A=(a_{ij})_{m\times n}$ د هر میټریکس د سطرونو او ستونونو شمېر د همغه میټریکس مرتبه ښیي.

فعالیت

- د لاندې میټریکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه میټریکس چې یو سطر او یو ستون لري یعني $A=(X)_{1\times1}$، نو د A میټریکس د هغه له داخلي عدد سره مساوي دی. $A=(7)_{1\times1}=7$

مثال: لاندې میټریکسونه د مستطیلي جدول په ډول ولیکئ.

$a)\quad (a_{ij})_{2\times2}=(i+j)_{2\times2} \qquad\qquad b)\quad (a_{ij})_{3\times2}=(i\cdot j)_{3\times2}$

حل: د پورتني هر مثال د حل لپاره لومړی د میټریکس عمومي شکل لیکو، د a جزء د میټریکس عمومي شکل 2×2 کې یو میټریکس دی.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=i+j$

$a_{11}=1+1=2\ ,\ a_{12}=1+2=3\ ,\ a_{21}=2+1=3\ ,\ a_{22}=2+2=4$

په پایله کې غوښتل شوی میټریکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

د b جزء): د b جزء د میټریکس عمومي شکل یو (3×2) کې میټریکس دی، یعني 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$a_{11}=1\cdot1=1\ ,\ a_{21}=2\cdot1=2\ ,\ a_{31}=3\cdot1=3$

$a_{12}=1\cdot2=2\ ,\ a_{22}=2\cdot2=4\ ,\ a_{32}=3\cdot2=6$

په پايله کې غوښتل شوی مټريکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

دوه، هم مرتبه مټريکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر يو په يو سره مساوي وي،
مثلاً: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$ هغه وخت يوله بل سره مساوي دي چې $a=-1$ او $b=2$ وي، آيا
$(1 \quad 2)$ او $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ مټريکسونه يوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟

پوښتنې

1. د لاندې مټريکسونو مرتبې وليکئ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. لاندې مټريکسونه د مستطيلي جدول په شکل وليکئ.

$a)\ (a_{ij})_{3\times3} = (2i+3j)_{3\times3}$ $\qquad$ $b)\ (a_{ij})_{2\times3} = (\frac{i}{j})_{2\times3}$

د مېټريکسونو ډولونه

د مېټريکسونو مخامخ شکلونه څو سطرونه او څو ستونونه لري؟

آیا صفرونه د مېټريکس عناصر کیدای شي؟

$$\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$$

$$(4 \quad 5 \quad 6)$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

1. **سطري مېټريکس(Row Matrix):** هغه مېټريکس چې يوازې او يوازې يو سطر ولري، سطري مېټريکس يې بولي، مثلاً: $A=(4 \quad 5 \quad 9 \quad 0)_{1\times 4}$

2. **ستوني مېټريکس (Column Matrix):** هغه مېټريکس دی چې يوازې يو ستون ولري، د ستوني مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً: $A=\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}_{3\times 1}$

3. **صفري مېټريکس(Null matrix):** هغه مېټريکس چې ټول عناصر يې صفرونه وي، له صفري مېټريکس څخه عبارت دی او د $0_{m\times n}$ په شکل یې ښيي.

$$0_{2\times 4}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{2\times 4} \qquad 0_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

4. **مربعي مېټريکس(Square Matrix):** که چيري په يوه مېټريکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېر سره برابر $(m=n)$ شي، د مربعي مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\5 & 7 & 9\\-1 & 0 & 2\end{pmatrix}_{3\times 3} \quad , \quad m=n \Rightarrow 3=3$$

هر مربعي مېټريکس دوه قطرونه لري.

هغه قطر چې عناصر يې $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ وي، اصلي قطر(Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې $a_{n1}, \ldots, a_{1n}$ وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.

اصلي قطر   فرعي قطر

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فرعي قطر   اصلي قطر

فعاليت

- داسې متريکسونه وليکئ چې مرتبې يې 3×1 , 1×4 وي، دا څه ډول متريکسونه دي؟

5. **قطري متريکس** (Diagonal Matrix)**:** هغه متريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري متريکس په نامه يادېږي.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times2} \quad ، \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

6. **سکالر متريکس** (Scalar Matrix)**:** هغه قطري متريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر متريکس په نامه يې يادوي، لکه:

$$A=\begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & K & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & K & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & K \end{pmatrix}_{m\times n}$$

7. **واحد متريکس** (Unite Matrix)**:** که چېرې په يو سکالر يا قطري متريکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول متريکس ته واحد متريکس وايي او په I_n سره ښوول کېږي.

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots0 \\ 0 & 1 & 0\ldots0 \\ 0 & 0 & 1\ldots0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0\ldots1 \end{pmatrix}$$

فعالیت

- یو د 3×3 مرتبې مټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر یې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د 3×3 مرتبې مټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتني عناصر یې ټول صفرونه وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانېږي:

که چیرې په یوه مربعي مټریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني ټول عناصر یې صفرونه وي، په دغه صورت کې مټریکس د مثلثي مټریکس (Triangular matrix) په نامه یادېږي.

کـه چیـرې د اصـلي قطـر پـورتني ټـول عناصـر صـفرونه وي، د پـورتني مثلثـي مټـریکس (Upper triangular matrix) او که چیرې د اصلي قطر ښـکتني ټـول عناصـر صـفرونه وي، د ښـکتني مثلثي مټریکس (lower triangular matrix) په نامه یادېږي.

په لاندې مثالونو کې A یو پورتنی مثلثي مټریکس او B ښکتنی مثلثي مټریکس دی.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&7&9\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&9\\0&0&4\end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) مټریکس:

که چیرې د A متقابل مټریکس په $(-A)$ سره وښودل شي نو، دا هغه مټریکس دی چې هر عنصرد د A متناظر عنصر متضاد دی. که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو مټریکس وي، نومتقابل(متضاد) مټریکس یې $(-A)$ په لاندې ډول تعریفېږي:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\overset{\text{متقابل}}{\Rightarrow}-A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&5\\-1&2&0\\2&-3&-4\end{pmatrix}\Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2&-4&-5\\1&-2&0\\-2&3&4\end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. لاندې مېټريکسونه په پام کې ونيسئ، مرتبې او اړوند نومونه يې وټاکئ:

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e) $E=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ f) $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

g) $G=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ h) $H=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

د مېټريکسونو جمع او تفريق

Addition and subtraction of Matrix

په مخامخ مېټريکسونو کې د هغوی د جمعې او تفريق

په اړه د امکان په صورت کې څه ویلای شئ.

$$\left.\begin{array}{l} A+A= \\ A-A= \\ A+B= \\ A-B= \\ B+B= \\ B-B= \end{array}\right\} ?$$

1) **د مېټريکسونو جمع**:

که چيرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دوه مېټريکسونه وي، نو $A+B=C$ عبارت له هغه مېټريکس څخه دی چې د C_{ij} هر عنصر يې د a_{ij} او b_{ij} د جمعې له حاصل څخه لاس ته راغلی وي، يعنې د دوو مېټريکسونو جمع کول يوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو مېټريکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنګه چې C_{ij} د دوو حقيقي عددونو د جمعې حاصل دی، نو:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow (a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7+(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=C_{3\times 2}$$

2. **د مېټريکسونو تفريق**:

د جمعې عمليې ته ورته کولای شو، د دوو مېټريکسونو تفاضل يا د تفريق حاصل په لاس راوړو. که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ وي، نو د تفريق حاصل يې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

فعاليت

- که $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ وي، $A-B$ په لاس راوړئ.

د مټریکسونو د جمعې او تفریق خاصیتونه:

1. د مټریکسونو جمع کول دبدلون خاصیت لری، خو د مټریکسونو تفریق د بدلون خاصیت نه لري، یعنې:

$A+B=B+A$

$A-B\neq B-A$

2. د مټریکسونو جمع او تفریق اتحادی خاصیت لری. $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$

3. د عینیت عنصر (Identity Element) د مټریکسونو په جمع کې صدق کوي ،خو د مټریکسونو په تفریق کې صدق نه کوي. $A+0=0+A=A$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو مټریکسونو مرتبه سره برابره (3×3) ده، نو کولای شو د تفریق حاصل یې په لاس راوړو.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-11&2-1&3-5\\2&-0&5-3&4-0\\6&-2&0-5&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&1&-2\\2&2&4\\4&-5&-5\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د یوه مثال په واسطه وښایاست چې $A-B\neq B-A$ دی.

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&6\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&5&-1\end{pmatrix}$ وي، د امکان په صورت کې $A+B$ او $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې د A او B مټریکسونو مرتبې سره خلاف دی، له دې امله یې جمع او تفریق امکان نه لري، ځکه د A د مټریکس مرتبه 3×2 او د B مټریکس مرتبه 2×3 ده.

پوښتنې

لاندې مټریکسونه د امکان تر حده جمع او تفریق کړئ:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

په متریکس کې د سکالر ضرب

مـوږ د متریکسونو د جمعې او تفریـق قاعـده ولیدلـه، کـه $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یـو **متریکس** او K یـو سـکالر وي، د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ.

$$K\cdot A=K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ یو **متریکس** او k یو سکالر وي، د $K\cdot A$ حاصل په لاس راوړئ.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad KA=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- د $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **متریکس** په کوم عدد کې ضرب شي، تر څو یې د ضرب حاصل یو واحد متریکس شي.

کولای شو د فعالیت له اجراء وروسته یې په لاندې ډول تعریف کړو.

تعریف: که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو **متریکس** او $K\in IR$ یو حقیقي عدد وی، نو د KA له C له **متریکس** څخه عبارت دی، داسې چې د C_{ij} هر عنصر د K د ضرب حاصل په a_{ij} کې دی.

$$C_{ij}=K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $K=2$ وي، د KA د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$KA=2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot3 & 2\cdot6 \\ 2\cdot2 & 2\cdot1 & 2\cdot0 \\ 2\cdot1 & 2\cdot0 & 2(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

په متریکس کې د سکالر ضرب خاصیتونه:

که چیرې A او B دواړه د یو شان مرتبې متریکسونه، α او β دوه حقیقي عددونه وي، نو:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=2$ راکړل شوي وي، وښایاست چې

$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

حل:

$$\alpha(\beta A)=3\left[2\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}2\cdot 3 & 2\cdot 6\\ 2(-3) & 2\cdot 9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}6 & 12\\ -6 & 18\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 6 & 3\cdot 12\\ 3(-6) & 3\cdot 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\ \beta)A=(3\cdot 2)\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\cdot 3 & 6\cdot 6\\ 6(-3) & 6\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha\ A)=2\left[3\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix}3\cdot 3 & 3\cdot 6\\ 3(-3) & 3\cdot 9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9 & 18\\ -9 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$

پوښتنې

1. که چیرې $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=2$ او $\beta=1$ راکړل شوي وي. په متریکس کې د سکالر ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

2. که $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $K=3$ وي، KA او $\frac{1}{K}A$ پیدا کړئ.

د دوو مېټريکسونو ضرب

Multiplication of two Matrixes

آياد دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شئ؟

تاسو د دوو مېټريکسونو د جمعې لپاره پيدا کړل چې $A+B=B+A$ دی، د مېټريکسونو د ضرب لپاره څه فکر کوئ؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=?$$

تعريف

دوه مېټريکسونه د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ په پام کې ونيسئ، د دې لپاره چې دا دواړه مېټريکسونه يو په بل کې ضرب شي، نو بايد د لومړي مېټريکس د ستونونو شمېر د دويم مېټريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د مېټريکسونو د ضرب حاصل بيا هم يو مېټريکس دی ،لکه: $C=(a_{ij})_{m\times p}$ چې د سطرونو شمېر يې د لومړي مېټريکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر يې د دويم مېټريکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

د دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کړنه کوو:

د لومړي مېټريکس لومړی سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په همغه سطر کې يې ليکو، په دويمه مرحله کې بيا هم د لومړي مېټريکس دويم سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه(دويم سطر) کې يې ليکو، دغه عمل ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي مېټريکس په دويم مېټريکس کې ضرب شي، په دغه ډول د مېټريکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښيو.

$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=(C_{ij})_{m\times p}$$

لومړی مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل: د دوو متریکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهېږو:

دویم پړاو

لومړی پړاو

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+0\cdot(-1)\\ -1\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: بیا هم د متریکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخیستنې لرو چې:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}(2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} & (2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\\ (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} & (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot2+(-1)(-1) & 2\cdot3+3\cdot0+(-1)\cdot2\\ (-2)(1)+1\cdot2+2(-1) & -2(3)+1\cdot0+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+6+1 & 6+0-2\\ -2+2-2 & -6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 4\\ -2 & -2\end{pmatrix}_{2\times2}$$

درېیم مثال: $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}$ وي $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل :

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+3\cdot6 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot7\\ 5\cdot3+2\cdot6 & 5\cdot2+2\cdot1 & 5\cdot0+2\cdot7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+18 & 2+3 & 0+21\\ 15+12 & 10+2 & 0+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 5 & 21\\ 27 & 12 & 14\end{pmatrix}$$

فعالیت

• که $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ وي، د ضرب دحاصل دشتون په صورت کې AB او BA پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

ځلورم مثال: که $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ او $D=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ وي، CD او DC پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

حل:

$$CD=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(-3)+(-1)(-4) & 2\cdot 4+(-1)(-3) \\ 1(-3)+2(-4) & 1\cdot 4+2(-3) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -6+4 & 8+3 \\ -3-8 & 4-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3\cdot 2+4\cdot 1 & (-3)(-1)+4\cdot 2 \\ -4\cdot 2+1\cdot(-3) & -4(-1)+(-3)\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -6+4 & 3+8 \\ -8-3 & 4-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$$

معلومېږي چې $CD=DC$ دی.

د مېټریکس د ضرب خواص:

لومړی خاصیت: په عمومی ډول د دوو مېټریکسونو په ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعنې که A او B دوه مېټریکسونه او AB او BA تعریف شي، نو: $AB\neq BA$

په ځانګړي حالت کې د $m\times m$ مرتبې مېټریکسونه د تبدیلی خاصیت لري.

دویم خاصیت: د مېټریکسونو د ضرب د ضرب اتحادي خاصیت لري. که چیرې B,A او C د $m\times n$ مرتبې مېټریکسونه وي، نو $(AB)C=A(BC)$

دریم خاصیت: د مېټریکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

a) $A(B+C)=AB+AC$

b) $(A+B)C=AC+BC$

c) $K(AB)=(KA)B=A(KB)\quad,\quad K\in IR$

d) $IA=AI=A$

پوښتنې

د لاندې مټریکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=?$$

$$b)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=?$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=?$$

د یوه مټریکس ترانسپوز مټریکس

Transpose of Matrix

که په یو مټریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بـدل شـي نـوي مټریکس چې پـه لاس راځي په څه نوم یادېږي.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ مټریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونوته او ستونونه سطرونو تـه ولېـږدوی، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي وېې لیکئ.
- که چیرې د یوه مټریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړو(افقي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو)، هغه نوی مټریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړي مټریکس سره مساوي دي، نوی مټریکس په څه نوم یادېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: که چیرې د یوه مټریکس چې مرتبه یې $(m\times n)$ وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي، له ترانسپوز(Transpose) مټریکس څخه عبارت دی، د A ترانسپوز مټریکس په A^T ښودل کېږي. د ترانسپوز مټریکس مرتبه $(n\times m)$ ده.

مثلاً: که چیرې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times3}$ وي، نو ترانسپوز مټریکس یې عبارت دی له: $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times2}$، کـه یـو ترانسپوز مټریکس یعنې A^T له خپل ځان یعنې A سره مـساوي شـي، نـو پـه دې صـورت کـې A مـټریکس تـه متناظر مټریکس (Symmetric Matrix) وایي.

مثلاً: $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ یو متناظر مټریکس دی، ځکه: $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=A$

د متناظر مټریکس پېژندل: په متناظرو مټریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظراو مساوي دي:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & f \\ c & f & d \end{pmatrix}$$

د ترانسپوز مټریکس خواص:

لومړی خاصیت: د یوه ترانسپوز مټریکس ترانسپوز له خپل لومړي مټریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ترانسپوز مټریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له ترانسپوز مټریکسونو سره مساوي دی. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

او یا په عمومي ډول $(A \pm B \pm C \pm \ldots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \ldots$

دریم خاصیت: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت: $(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad , \quad \alpha \in IR$

$$(-A)^T = -A^T$$

فعالیت

- که چیرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، وښایاست چې:

$$(A-B)^T = A^T - B^T \quad , \quad (A+B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې مټریکسونو ترانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

پوښتنې

1. د A او B مټریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ترانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

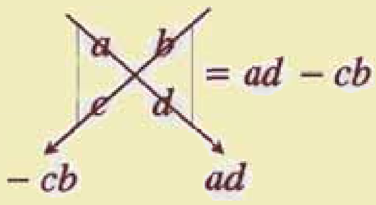
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

2. په پورتنیو مټریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ترانسپوز مټریکس 4 خاصیتونه وښایاست.

دیترمېنانت

Determinant

په یوه عددي مثال کې یو مربعي مټریکس داسې وټاکئ چې د $ad-bc$ حاصل تفریق مساوي په صفر شي.



تعریف

که چیرې د A مټریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مټریکس له دیترمېنانت څخه عبارت دی، د $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ د مټریکس دیترمېنانت په $|A|$، det A او یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ په ډول ښوول کېږي.

په همدې ډول که چیرې د $n\times n$ مرتبې یو مټریکس چې n سطرونه او n ستونونه ولري، اړوند دیترمېنانت یې له n درجې څخه دی. د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یو مربعي مټریکس په پام کې نیسو او د تعریف سره سم لرو چې:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}_{nxn}$$

د 2×2 مرتبې مټریکسونو د دیترمېنانت محاسبه: د $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مټریکس دیترمېنانت په لاندې ډول تعریفوو.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال: د $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ مټریکس دیترمېنانت حساب کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-7\cdot 4=6-28=-22$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ مټریکس دیترمېنانت محاسبه کړئ.

د 3×3 مټريکسونو د ديترمېنانت محاسبه: د $A_{3\times3}$ مټريکس، ديترمېنانت په پام کې نيسو:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: د $A_{3\times3}$ ديترمېنانت د محاسبې لپاره لاندې ګامونه په پام کې نيسو:

لومړی پړاو: اول ستون او درېم سطر له منځه وړو(حذفوو)، د 2×2 مرتبې ديترمېنانت محاسبه او د لومړي ستون او درېم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})a_{31}$$

دويم پړاو: دويم ستون او درېم سطر حذف، د 2×2 مرتبې ديترمېنانت محاسبه او د دويم ستون او درېم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو ، هېره دې نه وي چې د ديترمېنانت د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومې:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})a_{32}$$

درېم پړاو: درېم ستون او درېم سطر له منځه وړو(حذفوو)، د 2×2 مرتبې ديترمېنانت محاسبه، د درېم سطر او درېم ستون د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})a_{33}$$

څلورم پړاو: د 1، 2 او 3 ټول پړاوونه سره جمع کوو، په دې ډول د A ديترمېنانت مقدار په لاس راځي.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})\,a_{31}-(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})\,a_{32}+(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})\,a_{33}$$

$$=a_{12}\,a_{23}\,a_{31}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{21}\,a_{13}\,a_{32}+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

مثال: د لاندې ديترمينانت مقدار په لاس راوړئ.

$$B=\begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}$$

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

$$\text{I)}\ \begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=(6\cdot 2-1(-3))\cdot 4=(12+3)\cdot 4=15\cdot 4=60$$

$$\text{II)}\ \begin{vmatrix}2 & 6 & 3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=-(2\cdot 2-5(-3))(-1)=4+15=19$$

$$\text{III)}\ \begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=(2\cdot 1-5(6))\cdot 7=(2-30)\cdot 7=-28\cdot 7=-196$$

$$\text{I}+\text{II}+\text{III}=60+19-196=-117$$

فعاليت

- د $A=\begin{vmatrix}a & 0 & 3\\ -4 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}$ له ديترمينانت څخه د a قيمت په لاس راوړئ.

دويمه طريقه: **د ساروس په طريقه د ديترمينانت محاسبه**: په دغه طريقه کې د ديترمينانت دوه لومړي ستونونه ښي لورې ته په لاندې ډول تکرار ليکو:

$$A=\left|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\right|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$

فرعي قطرونه

اصلي قطرونه

د اصلي قطر عناصر يوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصر يوله بل سره ضربوو او وروسته يې جمع کوو، همدارنګه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د A د مېټريکس ديترمينانت مقدار په لاس راځي:

$$|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

په دغه طریقه کې کولای شو د لومړی او دویم ستون د لېږد په ځای لومړی او دویم سطر د دیترمینانت لاندینی برخې ته انتقال کړو او د تېر په ډول کړنه سرته رسوو.

$$\begin{array}{r|ccc|l} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \text{فرعي قطر} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \text{فرعي قطر} \\ \text{اصلي قطر} & a_{31} & a_{33} & a_{32} & \text{فرعي قطر} \\ \text{اصلي قطر} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ \text{اصلي قطر} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \end{array}$$

دویم مثال: د لاندې دیترمینانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

حل:

$$|M| = \left|\begin{matrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{matrix}$$

$$= \left(3\cdot 3\cdot 6 + 2\cdot 0\cdot 5 + (-1)(-4)(-2)\right) - \left((-1)\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot 0(-2) + 2(-4)\cdot 6\right)$$

$$= (54+0-8) - (-15+0-48) = 46+63 = 109$$

فعالیت

- لاندې د $|A|$ دیترمینانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړني سطرونه د دیترمینانت لاندې برخې ته ولېږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې دیترمینانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, $b)\ \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$, $c)\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, $d)\ \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

2. د لاندې دیترمینانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, $b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

د ديترمېنانت خاصيتونه

که چيرې په يوه ديترمېنانت کې د سطر ځاى لـه ستون سره بدل شي، د ديترمېنانت په قيمت کې تغير راځي او که نه؟

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

فعاليت

- د $|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ او $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ ديترمېنانتونه محاسبه کړئ.
- د $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}$ ديترمېنانت پـه پـام کې ونيسئ، ترانسپوز يې پـه لاس راوړئ ، وروسته يې $|A^T|$ (ديترمېنانت) محاسبه کړئ او وښاياست چې $|A^T|=|A|$.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي.

که چيرې $A_{n\times n}$ يو متريکس وي، د $|A|$ ديترمېنانت لپاره لاندې خواص صدق کوي.

1. که د $A_{n\times n}$ متريکس د يوه سطر او يا يوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د A ديترمېنانت مساوي له صفر سره دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0\ ,\quad |A|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & e & f\end{vmatrix}=0$$

2. که چيرې د $A_{n\times n}$ متريکس دوه سطرونه يا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند ديترمېنانت يې مساوي له صفر سره دی.

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

3. که د $A_{n\times n}$ متريکس د يوه سطر او يا يوه ستون عناصر د بل سطر او يا ستون د عناصرو ګډ فکتور وي، نو $|A|=0$ دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ \lambda a & \lambda b & \lambda c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda(0)=0$$

4. د A متريکس ديترمېنانت او A^T متريکس ديترمېنانت يو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول ديترمېنانت ځينې نور خاصيتونه يا ځانګړنې هم لري، لکه:

که چیرې په یوه دیترمېنانت کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو ځایونه یو له بل سره بدل شي، د دیترمېنانت اشاره بدلون مومي.

لومړی مثال: د $|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ دېترمېنانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دېترمېنانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

$$B=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} =(0+24-4)-(4+6+0)=20-10=10$$

لیدل کېږي چې د A په دیترمېنانت کې دویم ستون له لومړی ستون سره بدل شوی، په ورته ډول کولای شو،دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو،نوداسې پایله په لاس راځي: $|A|=-|B|$

که د K یو ثابت عدد په دیترمېنانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربېدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیترمېنانت ګډعامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه ګډ عددوټاکوچې د دیترمېنانت ګډ فکتور بلل کېږي.

دویم مثال: د $|A|$ دیترمېنانت ګډ ضربي عامل پیدا کړئ.

$$A=\begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

حل: لیدل کېږي چې د دیترمېنانت په لومړی ستون کې د 4 عدد ګډ ضربي عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیترمېنانت ګډ ضربي عامل دی.

$$|A| = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 21 \\ 5 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

د دېترمېنانت دخواصو په مرسته د لاندې دېرمېنانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

د 2×2 مرتبي مېټريکسونو ضربي معکوس

Multiplication inverse of 2×2 matrixes

آيا د حقيقي عددونوضرب قاعده مو په ياد ده؟

د a حقيقي عدد ضربي معکوس کوم عدد دی؟

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

په همدې ډول د ځينو مربعي مېټريکسونو لپاره هم دا خاصيت، د مېټريکسونو د خاصيتونو په پام کې نيولو سره شتون لري.

فعاليت

- د $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريکس په پام کې ونيسئ او ديټرمېنانت يې محاسبه کړئ.
- د $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريکس د A له مېټريکس سره ضرب او پايله يې وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

تعريف: د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ غير صفري مربعي مېټريکس په پام کې نيسو، که چېرې د B مربعي مېټريکس داسې موجود وي، چې: $AB=BA=I$

په دې صورت کې د B مېټريکس د A د مېټريکس معکوس بلل کېږي او هغه په A^{-1} سره ښيي. له دې امله ليکلې شو چې: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

په ياد ولرئ: د A مربعي مېټريکس ته منفرد مېټريکس(Singular Matrix) ويل کېږي، کله چې $|A|=0$ وي او همدارنګه د A مربعي مېټريکس ته غير منفرد مېټريکس(non singular matrix) ويل کېږي، که چېرې $|A|\neq 0$ وي.

له دې امله هغه وخت يو مېټريکس د معکوس مېټريکس لرونکی دی چې:

1. مېټريکس مربعي وي.
2. ديټرمېنانت يې د صفر خلاف وي.

لومړی مثال: وښاياست چې $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ يو د بل معکوس دي.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)(-7)+3(-2) & (-1)(-3)+3(-1) \\ 2(-7)+(-7)(-2) & 2(-3)+-7(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ليدل کېږي چې: $AB=BA=I$ دی، نو A او B يو د بل معکوس دي.

الحاقي مېټريکس(Ad joint of matrix): د 2×2 مرتبې الحاقي مېټريکس د پيدا کولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځايونه سره بدلوو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره ليکو، هغه نوی مېټريکس چې لاس ته راځي، له الحاقي مېټريکس (ad joint=adj) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ K=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت يو مېټريکس معکوس مېټريکس لري چې ديترمېنانت يې د صفر خلاف وي، يعنې $|A|\neq 0$ وي. البته د بحث موضوع 2×2 مرتبې مېټريکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ Adj\ A \qquad |A|\neq 0$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، معکوس مېټريکس يې پيدا کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18+10=8\neq 0$

ليدل کېږي چې د A مېټريکس ديترمېنانت د صفر خلاف دی، نو د A مېټريکس معکوس مېټريکس لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

ازموينه:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

په عمومي ډول ويلی شو، د هر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مېټريکس چې ديترمېنانت يې د صفر خلاف يعنې $|A|\neq 0$ وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې مېټريکسونو څخه کوم يو مېټريکس معکوس لري.

$a)\quad A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad b)\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې مېټريکسونو معکوس مېټريکس په لاس راوړئ او وازموئ.

$1)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad 2)\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad 3)\quad C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

له معکوس مټریکس څخه په کاراخېستني د خطي معادلو د سیستم حل

آیا تر اوسه مو له معکوس مټریکس څخه په ګټه اخېستنې د خطي معادلو د سیستم د حل په اړه فکر کړی دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعالیت

د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ په پام کې و نیسئ:

- د ضریبونو مټریکس، د مجهولینو مټریکس، د ضریبونو او مجهولینو مټریکس ولیکئ.
- هر مټریکس د معادلې په ډول ولیکئ.
- د لاس ته راغلي معادلې اطراف د ضریبونو د مټریکس په معکوس کې ضرب کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرنګه چې A د سیستم د چپ لورې د ضریبونو مټریکس، B د ښي لورې د ثابتو عددونو ستوني مټریکس او X د مجهولو عددونو ستوني مټریکس دی، نو د A^{-1} په پام کې نیولو سره سیستم داسې حلیږي:

$$A\,X = B$$
$$A^{-1} \cdot A\,X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$
$$IX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

لومړی مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخېستنې سره، د $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ خطي دوه مجهوله سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیترمېنانت د صفر خلاف دی، نو د A مټریکس معکوس لري او په لاندې ډول یې په لاس راوړو:

$$Adj\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 5-2\cdot 7 \\ -1\cdot 5+1\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15-14 \\ -5+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ,\ x=1\quad ,\qquad y=2$$

دویم مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخیستنې سره د دغه خطي معادلو $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 3x-\ y=3 \end{cases}$ سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\ ,\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ ,\quad A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5+6=1\ \Rightarrow\ A\neq 0$$

لیدل کېږي چې $|A| \neq 0$ دی، نو A معکوس متریکس لري.

$$AdjA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ -3\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ -6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = 4 \quad , \quad y = 9$$

دریم مثال: د x او y په کومو قمیتونوکې لاندې معادلې په یو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases}$$

د یاد شوی سیستم حل د سیستم د ضریبونو د متریکسونو له تشکیل څخه په لاس راوړو:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

څرنګه چې د A متریکس دیترمینانت صفر دی، نو د A متریکس معکوس نه لري، په پایله کې ویلای شو چې سیستم حل نه لري.

پوښتنې

له معکوس مټریکس څخه په ګټه اخیستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

Crammer's rule

آیا کولای شو، د ضریبونو د مټریکس د دیترمینانت او

لـه مجهولینـو یعنـي د z, y, x سـره د متنـاظرو

مټریکسونو د دیترمینانت په واسطه د خطي معادلو د

سیستم حل پیدا کړو؟

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

د خطي درې مجهوله معادلو سیستم په پام کې نیسو او د ضریبونو مټریکس یې په A سره ښیو:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د y, x او z قیمتونه له لاندې اړیکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې $|A| \neq 0$ وي.

$$X = \frac{|A_x|}{|A|} \quad , \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} \quad , \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنیو اړیکو کې $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ په ترتیب سره د y, x او z اړوند متناظرو مټریکسونو دیترمینانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کړنه کوو، د سیستم زیات شوي مټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړي ستون(د x ضریبونو) په ځای ځلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو، د 3×3 مرتبې مېټریکس دیټرمېنانت په لاس راوړو او د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون(د y ضریبونه) په ځای ځلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو او د 3×3 مرتبې د مېټریکس دیټرمېنانت محاسبه کوو. او د $|A_z|$ د محاسبې لپاره دریم ستون(د z ضریبونو) په ځای ځلورم ستون ځای په ځای کوو او د 3×3 مرتبې مېټریکس دیټرمېنانت قیمت په لاس راوړو.

فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په ګټې اخېستنې سره $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ پیدا کړئ.

لومړی مثال: د $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

حل: $A=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-6)=1+6=7\neq 0$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دي؛ نو سیستم حل لري.

اوس زیات شوی مېټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-(-6)}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$x=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{7}=\frac{2-6}{7}=-\frac{4}{7}$$

دويم مثال: لاندې درې مجهوله سيستم د کرامر په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 3x-2y+2z=-4 \\ x+3y+z=5 \\ 2x+2y-z=11 \end{cases}$$

حل:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} =-9-4+4-12-6-2 \\ =-21-8=-29\neq 0 \end{array}$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دئ نو له دې امله سيستم حل لري.

$$|A_x|=\left|\begin{array}{ccc|cc} -4 & -2 & 2 & -4 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 11 & 2 & -1 & 11 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} =12-22+20-(66-8+10) \\ =10-68=-58 \end{array}$$

$$X=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_y|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -4 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 11 & -1 & 2 & 11 \end{array}\right| \begin{array}{l} =-15-8+22-(20+33+4) \\ =-23+22-57=-58 \end{array}$$

$$y=\frac{|A_y|}{A}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_z|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 11 & 2 & 2 \end{array}\right| =99-20-8-(-24+30-22)$$

$$=71+16=87$$

$$z=\frac{|A_z|}{A}=\frac{87}{-29}=-3$$

میزان:

د y, x او z په لاس راغلي قیمتونه په اصلي سیستم کې وضع کوو:

$$3(2)-2(2)+2(-3)=6-4-6=-4 \quad \Rightarrow \; -4=-4$$
$$2+3(2)-3=2+6-3=8-3=5 \quad \Rightarrow \; 5=5$$
$$2(2)+2(2)-(-3)=4+4+3=11 \quad \Rightarrow \; 11=11$$

پوښتنې

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

د معادلو د سیستم حل دګوس($Gouse$) په طریقه

آیا کولای شو له میټریکس څخه په کار اخیستنې سره د x, y او z مجهول قیمتونه پیدا کړو.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

دګوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو میټریکس او ثابت قیمتونه لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنی عملیې(جمع، تفریق، ضرب او تقسیم) سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهوله له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کیږي ، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د میټریکس سطرونه په $R_1, R_2, R_3, \dots\dots\dots$ ښیو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل:د ضریبونو میټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{لومړی سطر منفي دوم سطردتفریق حاصل په دویم سطر کې}]{R_1 - R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{دویم سطر په(1-) کې ضرب بدلون په دویم سطر کې}]{R_2 \cdot (-1) \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y = 2\,, \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4=x=1 \end{array}$$

پاملرنه: $R_1 - R_2 \to R_2$ په دې معنا چې له لومړي سطر څخه دویم سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2(-1) \to R_2$ داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

فعالیت

- د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندې درې مجهوله معادلو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینوضریبونو او ثابتو عددونو متریکس لیکو:

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په لومړي پړاو کې د x ضریب په دویم سطر کې له منځه ورو. داسې چې لومړی سطر په -3 کې ضرب د دویم سطر له دوه چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په دویم ګام کې د x ضریب په دریم سطر کې له منځه ورو داسې چې لومړی سطر په -2 کې ضرب له دریم سطر سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

په دریم پړاو کې د y ضریب له دریم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په -8 کې ضرب د دریم سطر له 7 چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array}\right)$$

له دريم سطر څخه کولای شو، د z قيمت په لاس راوړو:

$$-35z=-105 \Rightarrow z=3$$

د z قميت په دويم سطر کې وضع او د y قيمت په لاس راوړو:

$$-7y+7z=7 \Rightarrow -7y+21=7 \Rightarrow -7y=-14 \quad , \quad y=2$$

په دريم پړاو کې د y او z قيمتونه په لومړي سطر کې ايږدو او x په لاس راځي.

$$2x+3y-z=5 \Rightarrow 2x+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2x+3=5$$
$$2x=5-3=2 \quad , \quad x=1$$

د خطي معادلو د سيستم حل عبارت دی له: $(x,y,z)=(1,2,3)$

دريم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سيستم دګوس په طريقه حل کړئ.

$$2x_1+4x_2+6x_3=18$$
$$4x_1+5x_2+6x_3=24$$
$$2x_1+7x_2+12x_3=40$$

حل:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow[-2R_1+R_2\to R_2]{\text{لومړی پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{\text{دويم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+R_3\to R_3]{\text{دريم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

ليدل کېږي چې په لاس راغلی متريکس کې د x_1, x_2 او x_3 ضريبونه په دريم سطر کې صفر دی، په داسې حال کې چې په ياد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غير ممکن دی چې($x_1=x_2=x_3=0=10$) نو سيستم حل نه لري.

فعالیت

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

پاملرنه: که چیرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو مټریکس تشکیلوو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$$

د شپږم څپرکي مهم ټکي

د مېټريکس تعریف: یوه ګېډۍ عددونه یا توري چې په سطري او ستوني ډول په یوه مستطیلي جدول کې ځای پر ځای شوې وي. د مېټريکس(Matrix) په نامه یادېږي.

د مېټريکسونو ډولونه:

- **سطري مېټريکس**: هغه مېټريکس چې یوازې یو سطر ولري.
- **ستوني مېټريکس**: هغه مېټريکس چې یوازې یو ستون ولري.
- **صفري مېټريکس**: هغه مېټريکس چې ټول عناصر یې صفرونه وي.
- **مربعي مېټريکس**: هغه مېټريکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر یې سره برابر وي.
- **مساوي مېټريکسونه**: دوه مېټريکوسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر یې یو په یو سره برابر او مساوي وی.
- قطري مېټريکس هغه مېټريکس چې ټول عناصر یې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطر ي مېټريکس بلل کېږي.
- **سکالر مېټريکس**: هر قطري مېټريکس چې د اصلي قطر عناصر یې سره برابر وي، سکالري مېټريکس بلل کېږي.
- **واحد مېټريکس**: په هر سکالري مېټريکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مېټريکس بلل کېږي.

په مېټريکسونو باندې لومړني عملیات:

- **د مېټريکسونو جمع او تفریق**: د مېټريکسونو جمع او تفریق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

د مېټريکسونو د جمعې او تفریق خواص:

1) $A+B=B+A$

2) $A-B\neq B-A$

3) $(A\pm B)\pm C = A\pm(B\pm C)$

4) $A+0=0+A=A$

5) $A+(-A)=-A+A=0$

په مېټريکس کې د سکالر ضربول: که $K\in IR$ او $A=(a_{ij})_{m\times n}$ وي، نو:

$$KA = K(a_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

په مېټريکس کې د سکالر ضرب خواص:

a) $\alpha(A+B)=\alpha\ A+\alpha\ B$

b) $(\alpha+\beta)A=\alpha\ A+\beta\ A$

c) $\alpha(\beta\ A)=(\alpha\ \beta)A=\beta(\alpha\ A)$

د دوو مېټريکسونو ضرب: د دوو مېټريکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي مېټريکس د ستونونو شمېر، د دویم مېټريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ وي، نو:

$$A\cdot B = (a_{ij})_{m\times n} \cdot = (b_{ij})_{n\times p} = (C_{ij})_{m\times p} = C_{m\times p}$$

يعنې د دوو مېټريکسونو د ضرب حاصل هغه دریم مېټريکس دی چې د سطرونو شمېر يې له لومړي مېټريکس سره او د ستونونو شمېر يې له دويم مېټريکس سره برابر وي.

د مېټريکسونو د ضرب خواص: که A او B دوه مېټريکسونه وي، نو:

1) $AB \neq BA$ 2) $(AB)C = A(BC)$

3) $A(B+C) = AB + AC$ 4) $I \cdot A = A \cdot I = A$

5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د یوه مېټريکس ترانسپوز مېټريکس: که د یوه $A_{m\times n}$ مېټريکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوی مېټريکس چې لاسته راځي ،د ترانسپوز مېټريکس په نامه یادېږي. د A ترانسپوز مېټريکس په A^T سره ښيي.

مثلثي مېټريکس: که په یوه مېټريکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی مېټريکس د مثلثي مېټريکس په نامه یادېږي.

متناظر مېټريکس: که د A یو مېټريکس له خپل ترانسپوز A^T مېټريکس سره برابر شي($A = A^T$) نو د A مېټريکس ته متناظر مېټريکس وايي.

ديترمېنانت: که د A مېټريکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مېټريکس له ديترمېنانت څخه عبارت دی، او د $|A|$ یا $\det A$ په شکل سره ښودل کېږي.

د ديترمېنانت خواص:

1. که د $A_{n\times n}$ مېټريکس د یوه سطر او یا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو ديترمېنانت یې صفر دی، یعنې:
$\det A = |A| = 0$
2. که د ديترمېنانت دوه سطرونه او یا دوه ستونونه سره برابر(مساوي) وي، نو ديترمېنانت یې صفر دی. $|A| = 0$
3. که $A_{n\times n}$ مېټريکس د یوه سطر یا ستون عناصر د بل سطر یا ستون د عناصرو مضرب وي، نو ديترمېنانت یې صفر دی. $|A| = 0$
4. د A مېټريکس او د A ترانسپوز مېټريکس ديترمېنانتونه سره مساوي وي، یعنې: $|A^T| = |A|$

د مېټريکسونو ضربي معکوس: د $A = (a_{ij})_{m\times n}$ مربعي مېټريکس په پام کې نیسو ،که چیرې د B مربعي مېټريکس داسې موجود وي چې $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د B مېټريکس د A د مېټريکس معکوس دی او د A د مېټريکس معکوس مېټريکس په A^{-1} سره ښيي: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سیستم حل:

- له معکوس مېټريکس څخه په ګټه اخیستنې د خطي معادلو د سیستم حل.
- د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه.
- دګوس په طریقه د خطي معادلو د سیستم حل.

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کړۍ تاو کړئ.

1. که $|A|=3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیدا کړئ.

$a)\ \frac{1}{3}$ $\quad b)\ 9$ $\quad c)\ \frac{1}{9}$ $\quad d)\ 3$

2. که $A=\begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس منونکی مټریکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

$a)\ m=1,\frac{1}{2}$ $\quad b)\ m\neq 1$ $\quad c)\ m=0$ $\quad d)\ m\neq 1,\frac{1}{2}$

3. که $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وي، د x هغه مټریکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه $Ax=A^{-1}$ کې صدق وکړي.

$a)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ $\quad b)\ \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ $\quad d)\ \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ مټریکس لاندې د $y=2x$ د خط بدلون منونکي خط پیدا کړئ.

a) د y محور $\quad$ b) د x محور $\quad c)\ y+2x=0$ $\quad d)\ y=0$

5. د x په کومو قیمتونو دغه دیترمینانت $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ صفر دی؟

6. $a)\ x=1,2$ $\quad b)\ x=3,1$ $\quad c)\ x=\frac{1}{2},3$ $\quad d)\ x=3,2$

7. د $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ 29$ $\quad b)\ 39$ $\quad c)\ 19$ $\quad d)\ 9$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

$a)\ 3A-2B \qquad b)\ -4A+3B$

2. فرض کړئ که $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ

او ووایاست چې $AB=BA$ دی.

3. لاندې مټریکسونه په پام کې ونیسي:

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

اشتراکي خاصیت، توزیعي خاصیت او د مټریکسونو ضرب د درو مټریکسونو لپاره وښایاست.

4. لاندې دیترمینانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

5. د لاندې مټریکس معکوس مټریکس د الحاق(ad joint) په طریقه پیدا کړئ.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & -9\end{pmatrix}$$

6. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د کرامر په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}2x+y+z=6\\ x-2y+2z=10\\ 3x-y-z=4\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}x_1-2x_2=4\\ 2x_1+4x_2=5\end{cases}$$

7. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

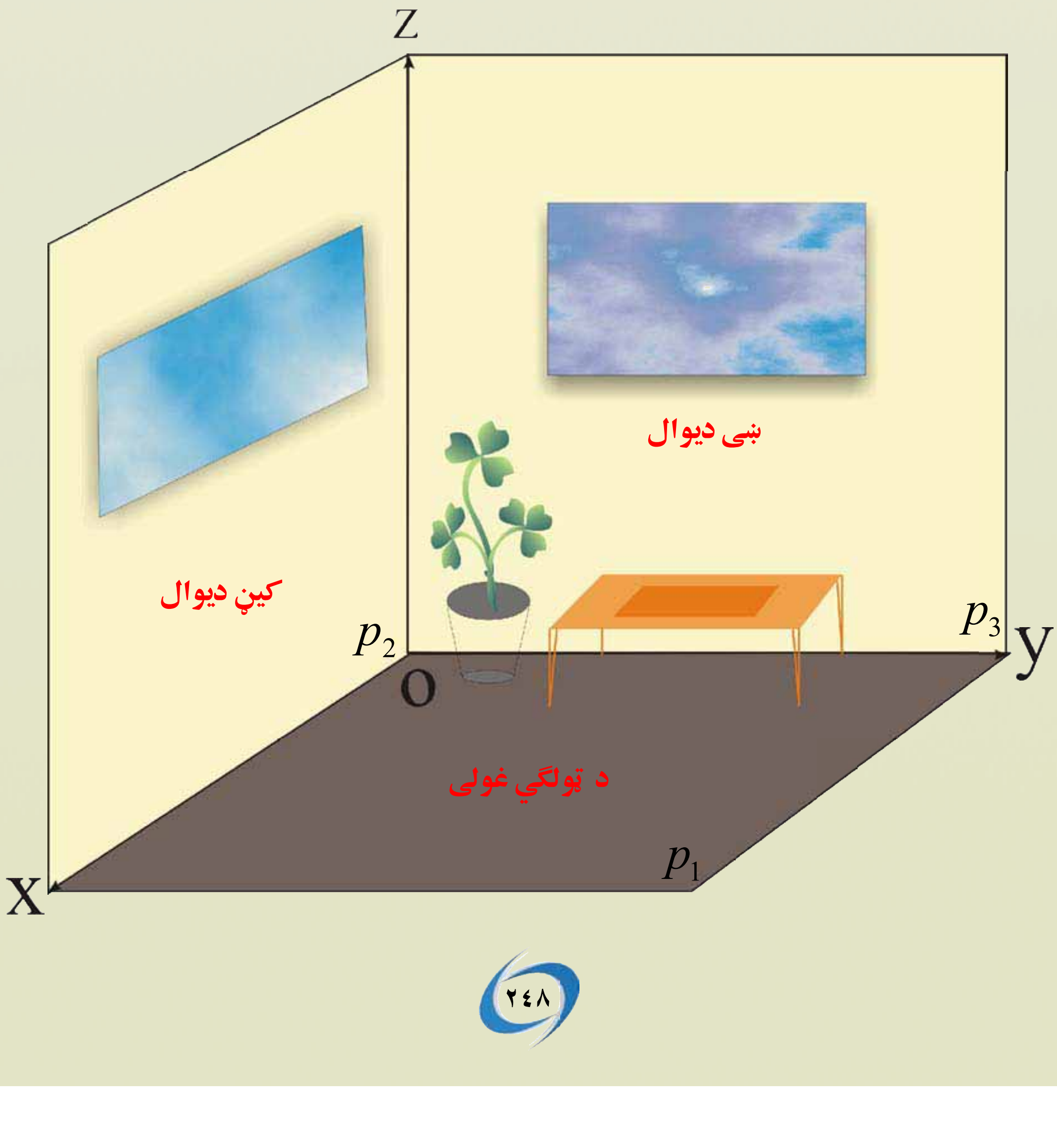
$$a)\ \begin{cases}2x-3y+3z=0\\ 3x+2y-5z=0\\ 5x-4y-2z=0\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}2x+3y-7=1\\ 2y+27=-2\end{cases}$$

8. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د معکوس مټریکس په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}3x+y+1=0\\ 4x+3y-2=0\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}x-y=2\\ x+2y=-1\end{cases}$$

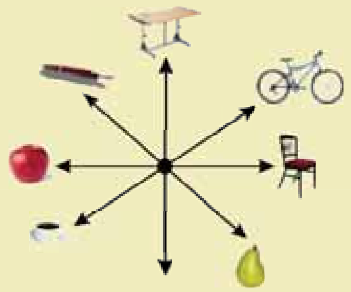
اووم څپرکی

وکتورونه


Z
کيڼ ديوال
ښی ديوال
p_2
p_3
y
o
د تولگي غولی
p_1
x

د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه

له یوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شیانو ته لنډه لاره په نښه کړئ.



تعریف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وايي، یا په بل عبارت هغه کمیت چې هم مقدار لري او هم جهت لري؛ لکه قوه، فاصله، تعجیل او داسې نور. هر غشی د یو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه یادیږي.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکی یې د $B\ (5,5)$ مختصات ولري.
- د پورتنی راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قایمو مخصاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه یې توپیر سره ولري.
- یو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتني وکتور سره مساوي او مخالف لوري او شعاع وکتور وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله ترلاسه کېږي.

پایله: په یوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، نولرو چې:

1. د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کېږي، چې اوږدوالی یې مساوي، $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ موازي او د یو جهت لرونکي وي.
2. که چېرې یو وکتور $\vec{AB}=0$ وي، په دې صورت کې د $\vec{AB}$ وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کیږي.

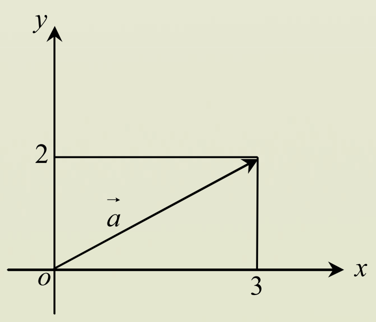
3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کیږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بیلګې په توګه:

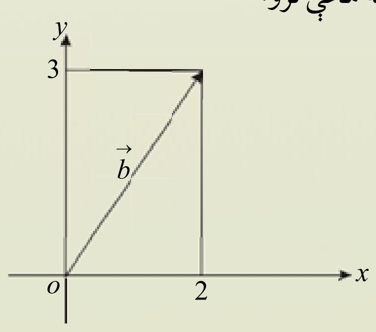
که $\vec{OA}=\vec{a}$ وي، نو $\vec{AO}=-\vec{a}$ دی، په داسې حال کې چې $(|\vec{OA}|=|\vec{AO}|)$ وي.

تعریف: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښوول کېږي $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په داسې حال کې چې a_x د x پرمحور وضعیه کمیت او a_y د y پرمحور د $\vec{a}$ وکتور فاصله او ترتیب ښیي.

لومړی مثال: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ او $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ وکتورونه وښایاست؟

حل: د پورتني تعریف له مخې لرو:





یادونه: د یو وکتور د ښوولو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قایم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.

پوښتني

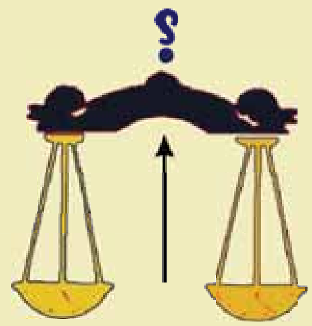
1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:

a. د هر یوه وکتور دري ممثل وکتورونه رسم کړئ.

b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.

c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی

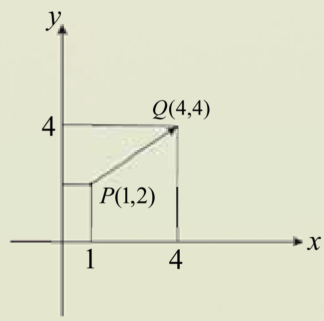


د تلې دوه یو شان او هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې تړل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل غوره کړي؟

فعالیت

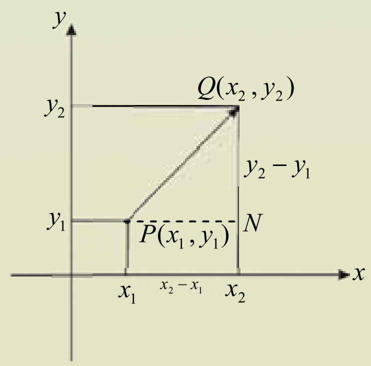
د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څیر $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ ټکې په پام کې ونیسئ:

- د $\overrightarrow{PQ}$ د وکتور اوږدوالی څومره دی؟
- آیا د $\overrightarrow{PQ}$ د وکتور د اوږدوالی یا د P او Q دوو ټکو ترمنځ د واټن لپاره فارمول ورکولای شئ؟
- د $\overrightarrow{PQ}$ د منځني ټکي وضعیه کمیتونه څومره دي؟
- آیا کولای شئ د دوو ټکو د واټن او د هغوی د منځني ټکي
- لپاره د فورمول په واسطه یو عمومي حالت څرګند کړئ؟



د پورتني فعالیت له پاې څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

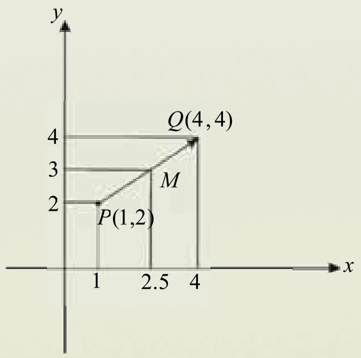
پایله: د $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې $P(x_1,y_1)$ مبداء او $Q(x_2,y_2)$ انجام دی په دې صورت کې وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ سره ښیو، د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث په پام کې نیولو سره د $|\vec{a}|$ د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$



- د $\overrightarrow{PQ}$ منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x_1+x_2}{2}\\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$$

لومړی مثال: د $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟



حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+4}{2}\\ \frac{2+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{6}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\ 3\end{pmatrix}$$

نو د منځني ټکي وضعیه کمیت له $M=\begin{pmatrix}2.5\\ 3\end{pmatrix}$ څخه عبارت دی او د P او Q د دوو ټکو د واټن د پیداکولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

$$|\vec{PQ}|=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_x^{\ 2}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

دویم مثال: د $A(2,4)$ او $B(5,5)$ د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\ \frac{5+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\ \frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\ 4.5\end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

پوښتنې

د لاندې درکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او منځني ټکي پیدا کړئ.

$i)\ B(2,7) \quad , \quad A(3,4)$

$ii)\ N(5,1) \quad , \quad M(1,5)$

$iii)\ Q(8,8) \quad , \quad P(1,8)$

وکتورونه په سطح او فضا کې

د تلسکوپ په واسطه د ستورو د تګلوري لیدل په فضاکې ځانګړي وکتورونه ښيي.

د يوې سطحې پرمخ د وکتورونو لپاره يوه بېلګه راوړلای شئ؟

فعالیت

د لاندې شکل له مخې د وضعیه کمیاتو د قایم سیستم او د $IR^2=\{(x,y)\ /\ x,y\in IR\}$ سټ په پام کې نیولو سره لاندې فعالیت سرته ورسوئ.

- د وضعیه کیماتو په سیستم کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د $\vec{u}$ یو شعاع وکتور چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ دي، د وضعیه کمیتونو په سیستم کې وښیئ.
- په مستوي کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دي، په مستوي کې له $\vec{u}$ یو وکتور سره څه توپیر لري چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ وي؟
- د $\vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ دوه اختیاري وکتورونه او $a\in IR$ یو سکالر لپاره په هندسي توګه د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې په جلا جلا ډول وښیئ، چې:

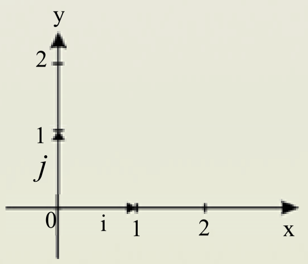
i) $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ (د جمعي قاعده)

ii) $a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$ (دسکالري ضرب قاعده)

تعریف: د هغو ټولو مرتبو جوړو سټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبیق وي، د IR^2 (مستوي) د وکتورونو فضا او یا په مستوي کې د وکتور په نامه یادېږي.

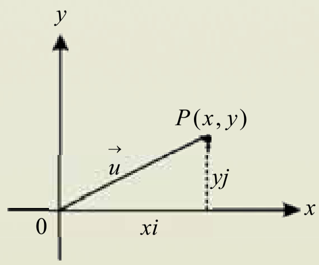
له پورتني فعالیت او تعریف څخه لاندې پایله لاسته راځي:

پایله: د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ دي. هر اختیاري وکتور $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ لپاره لرو:



$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$



$\vec{i}$ او $\vec{j}$ واحد وکتورونه دي چې د x او y محورونو په امتداد پراته دي.

واحد وکتور(unit victor): هغه وکتور دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزاید لپاره ترې کار اخلي.

لومړی مثال: که $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

(i): $\vec{u}+\vec{v}=?$ (ii): $4\vec{u}+2\vec{v}=?$ (iii): $\vec{u}-\vec{v}=?$

(iv): $\vec{u}-\vec{u}=?$ (v): $|\vec{u}|=?$

حل:

$$i)\quad \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}$$

$$ii)\quad 4\vec{u}+2\vec{v}=4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}$$

$$iii)\quad \vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=-\vec{i}-8\vec{j}$$

$$iv)\quad \vec{u}-\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$$

$$v)\quad |\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

پوښتنه

1. که $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ وي، $\vec{u}+2\vec{v}$ ، $\vec{u}-2\vec{v}$ او $2\vec{u}+4\vec{v}$ پیدا کړئ.

په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضا کې یو ټکی وټاکئ آیا داسې یوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غولي او مجاور دیوال ته وټاکو؟

تعریف

درې بُعدي IR^3 فضا د ټولو هغو مرتبو درې ګونو (x, y, z) څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعریفیږي:

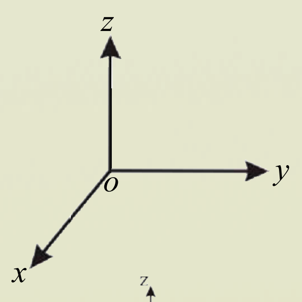
$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x, y, z) / x, y, z \in IR\}$$

هغه درې مستویګانې p_3, p_2, p_1 چې دوه په دوه یو په بل عمود دي، د درې بُعدي فضا د مختصاتو مستویګانې بلل کیږي.

د دغو مستویګانو د دوه په دوه ګډ فصل درې قایمې زاویې جوړوي چې هغه د درې بُعدي فضا قایم مختصات بولي. د درې بعدي فضا قایم مختصات داسې نوموي چې که یو تن ودریږي، هغه محور چې د لیدونکي د تنې په لور دی، د z محور او هغه محور چې د لیدونکي د لید په لور دی د y محور او هغه محور چې د لیدونکو د ښي لاس په لور پروت دی، د x محور دی او د دغو درې وارو محورونو د تقاطع ټکی له O ټکي څخه عبارت دی . چې د قایمو مختصاتو مبداء ښیي.

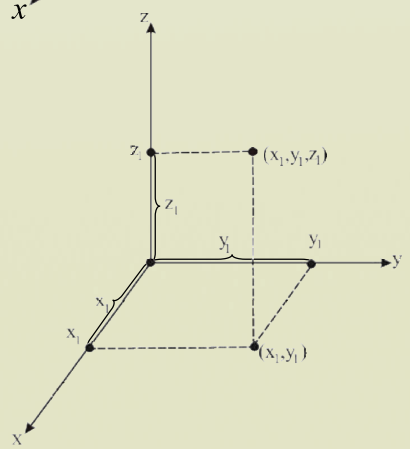
په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبارت دی چې له درې وارو مستویګانو څخه یې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستویګانو څخه په $|x|$، $|y|$ او $|z|$ سره ښیي.



په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي د ځای ټاکل:

د درې بعدي فضا په قایمو مختصاتو کې د $A(x_1, y_1, z_1)$ ټکي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور باندې د مختصې د علامې په پام کې نیولو سره فاصلې جلا کوو، لومړی د x له محور څخه موازي خط د y له محور سره رسموو، د تقاطع ټکی یې چې (x, y) دی، پیدا او وروسته له یاد شوي ټکي څخه یو بل خط موازي د z له محور سره رسموو، په پایله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتیب د ټکي ټاکل په درې بعدي فضا کې بشپړیږي.



یادونه: په درې بعدي فضا کې د y, x او z مختصو منفي جهتونه د نومړو محورونو له امتداد یافته څخه عبارت دی.

فعالیت

- د $A(2,4,3)$ او $B(-2,-3,3)$ ټکي د درې بعدي فضا قایم سیستم کې وښایاست.

په فضا کې د $P(x,y,z)$ یو ټکی چې د $\vec{OP}$ وکتور له $\vec{u}$ سره مساوي دی، د IR^2 د فضا په شان په درې بعدي په فضا یا IR^3 کې هم د جمعې او سکالري ضرب قاعدې د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دواړو وکتورونو لپاره او د a سکالر لپاره صورت نیسي:

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$$ (د جمعې قاعده)

$$a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\\az\end{pmatrix}$$ (د سکالري ضرب قاعده)

لومړی مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ وي، $\vec{v}+\vec{w}$ ، $\vec{v}-\vec{w}$ ، $2\vec{w}$ او $\left|\vec{v}-2\vec{w}\right|$ پیدا کړئ.

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\1+4\\3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$ii)\quad \vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1-4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$iii)\quad 2\vec{w}=2\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$iv)\quad \left|\vec{v}-2\vec{w}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2+2\\1-8\\3-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+3^2}$$
$$=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$$

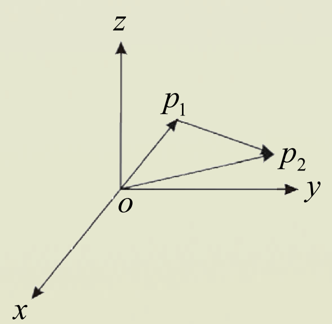
یادونه:

A- کیدای شي سطحې ته ورته درې واحد وکتورونه $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ چې:

$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ دي، په درې بعدي فضاکې په پام کې نیول شوی، د z,y,x محورونو په امتداد د واحد د وکتورونو په نامه یاد کړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نیولو سره د $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ هر اختیاري وکتور د واحد وکتور په پام کې نیولو سره په لاندې توګه ښودلی شو:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

B- **په فضاکې د دوو ټکو ترمنځ واټن:** که چېرې $\vec{OP_1}$ او $\vec{OP_2}$ د $P_1(x_1,y_1,z_1)$ او $P_2(x_2,y_2,z_2)$ د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توګه لرو:



$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p_1p_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

نو د P_1 او P_2 د ټکو ترمنځ د واټن د پیداکولو لپاره لرو:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

پورتنی فورمول د P_1 او P_2 ټکو ترمنځ واټن ښیي.

C- که په درې بُعدې فضاکې د یو ټکي واټن له مبدأ څخه مطلوب وي یعنې $(x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$ او $(x_2,y_2,z_2)=(x,y,z)$ وي؛ نو د ټکي واټن له مبدأ څخه د لاندې فورمول په واسطه پیداکولای شو:

$$\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

دویم مثال: که $\vec{a}=(-5\ ,\ 4\ ,\ 5)$ وی؛ نو د نوموړي شعاع وکتور طول څو دی؟

حل: د شعاع وکتور موقعیت ته په کتنې څرنګه چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیاتو په مبدأکې پرته ده د C جز له فورمول څخه ګټه اخلو:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2++y^2+z^2}=\sqrt{(-5)^2+4^2+5^2}=\sqrt{25+16+25}=\sqrt{66}$$

دریم مثال: که $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{v}=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=6\vec{i}-9\vec{j}-3\vec{k}$ راکړل شوی وي.

وموميء $\quad ii)\ \left|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\right|=?\qquad i)\ \vec{u}+2\vec{v}=?$

حل: لرو چې:

$$i)\ \vec{u}+2\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+2(4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k})$$
$$=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+8\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}=(10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k})$$
$$ii)\ \left|(2-4-6)\vec{i}+(3-6-9)\vec{j}+(1-2+3)\vec{k}\right|=\left|-8\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k}\right|$$
$$=\sqrt{(-8)^2+(-12)^2+2^2}=\sqrt{64+144+4}$$
$$=\sqrt{212}$$

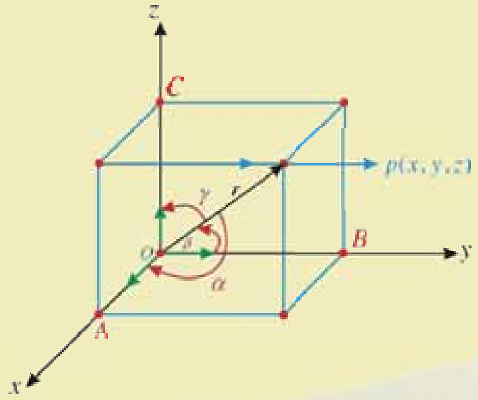
پوښتنې

1. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیداکړئ.
2. په دریم مثال کې چې $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

$a)\ 2\vec{u}-6\vec{v}+4\vec{w}=?\qquad b)\ |\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}-2\vec{w}|=?$

3. $\vec{u}$ او $\vec{v},\vec{v}$ او $\vec{w},\vec{w}$ او $\vec{u}$ وکتورونو ترمنځ واټن پیداکړئ.
4. هغه وکتور واحدونه پیداکړئ چې د $\vec{v},\vec{u}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته دي؟

د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه



تعریف: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورونو سره په ترتیب د β, α او γ زاویې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په پام لیکلای شو:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$
$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_x$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_y$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_z$$

کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور د جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$
$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cos\beta$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\gamma$$

د پورتنیو اړیکو چپ لوری مربع کوو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

پوهېږو چې $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ دی، نو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، داسې چې د پورته شکل په شان α, β او γ په ترتیب سره د $\vec{v}$ وکتور زاویې او $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

- آیا ویلاي شئ چې د α , β او γ زاویې په کومه اندازه تحول کوي؟
- آیا له پورتنیو زاویو څخه یوه یې منفي کیدای شي؟
- که چیرې له زاویو څخه یوه یې صفر شي، د وکتور د موقعیت په هکله څه ویلای شئ؟
- د $\vec{v}$ د وکتور جهت زاویو کوساین لپاره یوه ګډه اړیکه پیداکړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسیږو:

پایله: که په فضاکې د $\vec{v}$ یو وکتور، چې صفر نه وي، یعنې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ، راکړل شوی وي، نو د جهت د زاویو د کوساینونو ترمنځ لاندې اړیکې شته:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

د پورتنی پایلې د ثبوت لپاره پوهیږو، چې:

$$\left|\vec{v}\right|=\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|=\left|x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور یا د $\vec{v}=\vec{OP}$ مسیر عبارت دی، له:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\begin{pmatrix}\frac{\vec{v}_x}{|\vec{v}|}\\ \frac{\vec{v}_y}{|\vec{v}|}\\ \frac{\vec{v}_z}{|\vec{v}|}\end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. که $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ وي، پیداکړئ؟

a) $\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=?$ b) $v-3\vec{w}=?$ c) $\left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

2. د α اندازه داسې پیداکړئ چې د $\alpha\,\vec{i}+(\alpha+1)\,\vec{j}+2\vec{k}$ وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینرۍ او فزیک په زده کړه کې په کاریږي او د هغو ترمنځ زاویې په پام کې نیولو سره له یو سکالري کمیت سره مساوي دی، که چیرې: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ وي، نو $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ دی، که نه؟

تعریف

$\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي یا فضا کې په پام کې نیسو.

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ سکالري ضرب حاصل په $\vec{u}\cdot\vec{v}$ سره ښیو، چې حاصل یې عبارت دی، له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه جوړه کړې او $(0\leq\theta\leq\pi)$ سره دي.

فعالیت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نیولو سره وښایاست، چې:

i) $\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$

ii) $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{i}=0$

iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

iv) که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د صفر خلاف او $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ وي، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

- د دوه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ وکتورونو لپاره د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ضرب حاصل د $a_1a_2+b_1b_2$ له سکالري قیمت سره مساوي دی.
- په فضا کې د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ د ضرب حاصل مطلوب یا غوښتل شوی په دې ډول چې $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل لپاره له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پایله: که $\vec{u}$، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ درې اختیاري وکتورونه او c یو حقیقي عدد وي، نو لرو:

(i $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \;\Rightarrow\; \vec{u}\perp\vec{v}$

(ii $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (د ضرب تبادلوي خاصیت یا خانګړتیا).

(iii $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,\vec{w}$ (د ضرب توزیعي خاصیت په جمع).

(iv $(c\cdot\vec{u})\,\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$ در ضرب توزیعي خاصیت.

لومړی مثال: که $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ دوه وکتورونه د صفر خلاف وي، د سکالري ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

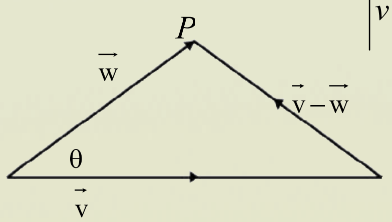
حل: د تعریف له مخې لرو چې:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$
$$=a_1\cdot a_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\cdot\vec{k})$$
$$+c_1\cdot a_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\cdot\vec{k})=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

دویم مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ د یو مستوي دوه وکتورونه وي، وښایاست چې:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=x_1x_2+y_1y_2$$

حل: د تعریف له مخې لرو: $|\vec{v}-\vec{w}|^2=|\vec{v}|^2+|\vec{w}|^2-2\vec{v}\cdot\vec{w}\cdot\cos\theta$



ځرنګه چې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$، $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ په پایله کې $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$ دي، نو د پورتنۍ اړیکې څخه لرو:

$$|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2=|x_1^2+y_1^2|+|x_2^2+y_2^2|-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2x_1x_2-2y_1y_2=-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta\,/\div -2$$

$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}$$

دریم مثال: کـه چېرې د $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ او $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ وکتورونـه درکـړ شـوي وي، د سـکالري ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

حل: د فورمول په پام کې نیولو سره لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=i^2+4j^2+k^2=1+4+1=6$$

څلورم مثال: وښایاست چې د $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ او $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ وکتورونه یو پر بل عمود دی.

حل: په دې هکله لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})(4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})=(2)(4)+(-4)(-3)+(5)(-4)$$
$$=8+12-20=0 \quad\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

څرنګه چې د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

پنځم مثال: د α قیمت داسې پیدا کړئ چې د $3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ او $2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$ وکتورونـه یـو پربـل عمود وي.

حل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو له عمود والي څخه دې پایلې ته رسېږو چې: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ دی، نو لرو:

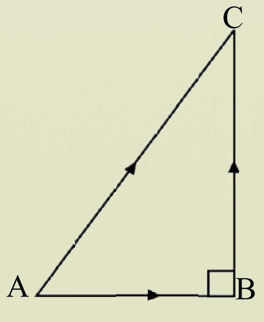
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k})(3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k})=0 \quad\Rightarrow\quad 6+\alpha+5\alpha=0\ ,\ \alpha=-1$$

شـپږم مثـال: وښایاسـت چې د $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ او $3i-4j-4k$ وکتورونـه د یـو قـایم الزاویه مثلث ضلعې دي.

حل: کـه $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ او $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ د مطلوب مثلث دوه ضلعې پـه پـام کـې ونیـسو، نـو دریمه ضلع یې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نیولو سره چې د مثلث دریمـه ضـلع تـاکې عبارت دی له:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

(چې د مثلث لـه دریمـې ضـلعې څخه عبـارت دی) $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ اوس ښـیو چې نومـوړی مثلث قـایم الزاویه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ وي.



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$
$$=(2)(1)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$$

پوښتنې

1. وښاياست چې د $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ د وکتور مرتسمونه د $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ واحد کتورونو په امتداد په ترتيب سره له c,b,a سره مساوي دي.

2. وښاياست چې هر $\overset{\Delta}{ABC}$ کې لاندې اړيکې وجود لري:

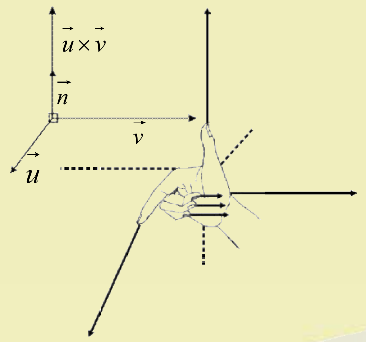
$i)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \qquad ii)\ a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$

3. ثبوت کړئ چې: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

د وکتوري ضرب حاصل

The cross Product

د راکړل شوي شکل له مخې د کوم لاس (ښي یا کیڼ) په واسطه د $\vec{v}\cdot\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتورونه داسې وښيو چې $\vec{u}$ د ورغوي په جهت، $\vec{v}$ د ځنګل په جهت او $\vec{u}\times\vec{v}$ د ښي لاس د غټې ګوتې په لور واقع شي؟



تعریف

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په $\vec{u}\times\vec{v}$ چې($\vec{u}$ کرس $\vec{v}$ لوستل کیږي) عبارت دی، له: یعنې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta)\,\vec{n}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ $(0\le\theta\le\pi)$ وکتورنو تر منځ زاویه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د وکتورونو په واسطه جوړه شوي مستوي له عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، د ښي لاس قاعدې په واسطه (Right hand rule) ښودل کیږي.

د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورنو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمه ده چې د وکتورونو خطي ترکیب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي(استقلال) په لنډ ډول تر څېړنې لاندې ونیسو.

1. **د وکتورونو خطي ترکیب**: د یوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

که $\vec{a}_n\,, \dots\,, \vec{a}_2\,,\vec{a}_1$ د یوه سټ وکتورونه او $\alpha_n \in IR\,, \dots\,, \alpha_2\,,\alpha_1$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتور په داسې حال کې چې $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$ وي، $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_n\,, \dots\,,\vec{a}_2\,,\vec{a}_1$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

لومړی مثال: که $\vec{a}_1=2i+j-3k$ او $\vec{a}_2=i+2j+2k$ وکتورونه راکړل شوي وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې $\alpha_1=5$ او $\alpha_2=2$ وي.

حل:

$$\vec{a} = 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k)$$
$$= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k$$
$$= 12i + 9j - 11k$$

د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

دویم مثال: کـه $\vec{a}_1 = (2,3)$ او $\vec{a}_2 = (5,1)$ وکتورونـه راکـړل شـوی وي، وښایاسـت چـې د $\vec{a} = (6\ ,-5)$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو خطي ترکیب دی.

حل: څرنگه چې $\alpha_1\ ,\ \alpha_2 \in IR$ سکالرونه دي، نو:

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,1)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1\ ,3\alpha_1) + (5\alpha_2\ ,\ \alpha_2)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2\ \ ,3\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 \ \ = -5 \end{cases}$$

له پورتني سیستم څخه د α_1 او α_2 قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$
$$6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18$$
$$\underline{-6\alpha_1 \pm 2\alpha_2 = \mp 10}$$
$$13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}$$
$$2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6$$
$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78-140}{13}$$
$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$
$$\vec{a} = (6\ ,\ -5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,\ 1)$$
$$\vec{a} = (6\ ,\ -5) = -\frac{31}{13}(2\ ,\ 3) + \frac{28}{13}(5\ ,\ 1)$$

یعنې که α_1 او α_2 قیمتونه په $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورنو کې ضرب شي، په پایله کې د $\vec{a}$ وکتـور پـه لاس راځـي، نو وموليدل چې $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونه د $\vec{a}$ د وکتور خطي ترکیب دی.

د طبعي واحد وکتورونو د خطي ترکيب په واسطه د يوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بلاخره په n بعدي فضاکې شعاع وکتورونه راکړل شوي وي. کولای شو هغه د واحد وکتورونو د ضريبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښيو.

a) که دوه بعدي فضا وي $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$

نو: $= x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$

که $e_1 = (1, 0)$ او $e_2 = (0, 1)$ وي.

نو: $(x_1, x_2) = e_1 x_1 + e_2 x_2$

او په بل ډول يې هم ليکلای شو:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$
$$= xe_1 + ye_2 = xi + yj$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$$
$$= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$$

څرنګه چې $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ او $e_3 = (0,0,1)$ په درې بُعدي فضاکې واحد وکتورونه دي، نو:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$
$$(x, y, z) = xi + yj + zk$$

c) په عمومي حالت کې که فضا n بعدي وي

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, x_n)$$
$$= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

په داسې حال کې چې $e_1, e_2, \ldots, e_n$ طبعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه په يوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي (خطي استقلال) لري، که چيرې دغه خطي ترکيب $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ مساوي په صفر وي او همدارنګه $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ وي.

فعاليت

که $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ وي وښاياست چې S خطي خپلواکي لري.

غیر خپلواک خطي وکتورونه: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونه خطاً مربوط(خطي غیر خپلواک) یا خطي انحصار لري، کله چیرې یوازې او یوازې $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ وي او کم ترکمه یو له ضریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ څخه د صفر خلاف وي.

یادونه:

ددې لپاره چې د وکتورونو یو سټ په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: د وکتورونو ترکیب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره یې مساوي نیسو.

دویم پړاو: د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

دریم پړاو: د معادلاتو سیستم تشکیلوو.

څلورم پړاو: د معادلاتو سیستم د سکالرونو لپاره حلوو،په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شي نو وایو چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چیرې له ټولو سکالرو څخه کم ترکمه یو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

مثـــــال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونـــــه پـــــه لانـــــدې ډول راکـــــړل شـــــوې دي $\vec{a}_1 = (1,2,0)$, $\vec{a}_2 = (0,3,1)$, $\vec{a}_3 = (2,3,1)$ وښایاســـت چـې $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ او $\vec{a}_3$ وکتورونـــه خطـي خپلواکي لري او که نه؟

حل: د خطي خپلواکو وکتورونو له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې کولای شو، ولیکو:

لومړی پړاو: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(0,3,1) + \alpha_3(2,3,1) = 0$

دویم پړاو:

$$= (\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0)$$
$$= (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$$

دریم پړاو:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

څلورم پړاو: اوس د معادلاتو سیستم د α_1 ، α_2 او α_3 لپاره حلوو:

$$\alpha_2 = -\alpha_3$$
$$2\alpha_1 + 3(-\alpha_3) + 3\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0\ ,\ \alpha_1 = 0$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$$
$$0 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$
$$0 + 3\alpha_2 + 0 = 0 \Rightarrow 3\alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = 0$$

خرنگه چې $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ دي، نو نوموړی وکتورونه خطي خپلواکي لري.

فعالیت

د تعریـف لـه مخې د ښـي لاس د قاعـدې پـه واسـطه د $\vec{u}\times\vec{v}$ او $\vec{v}\times\vec{u}$ مسیر او یا جهت په مخامخ شکل کې وښیي.

- وښایاست چې $\vec{i}\times\vec{i}=0$ او $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ دی.
- د پورتنیو څېړنو له مخې د $\vec{j}\times\vec{j}$ ، $\vec{k}\times\vec{k}$ ، $\vec{j}\times\vec{k}$ او $\vec{k}\times\vec{i}$ وکتورونو د ضـربونو حاصـل پـه هکلـه څه ویلای شئ؟
- وښایاست چې: $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{u}=0$ دی.
- **په عمومي ډول ویـلای شـو چې د $\vec{i},\vec{j}$ او $\vec{k}$ وکتورونـو د ضـرب حاصل په دایروي ډول د لومړني او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه د ورکړل شوي دایرې په څېر لاس ته راځي.**

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

پایله: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو (چې صفر نـه وي). د وکتـوري ضـرب لـه حاصل څخه او د ښـي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

i) $\vec{u}\times\vec{u}=0$

ii) $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$

iii) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

iv) $\vec{u}\times(k\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=k\,(\vec{u}\times\vec{v})\ ,\quad k\in IR$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعریف له مخې د پورته پایلې ثبوت دې زده‌کوونکو ته پرېښودل شي.

لومړی مثـال: کـه چېرې $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وکتورونـه صفر نـه وي، نو وښایاست چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\vec{k}$$

حل: د تعریف په کارولو لرو، چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

$$=a_1a_2(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\times\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\times\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\times\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+c_1a_2(\vec{k}\times\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\times\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\times k)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{array}\right\}\ ,\quad \left.\begin{array}{l}\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\end{array}\right\}\ ,\quad \left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{k}\times\vec{k}=0\end{array}\right\}$$

$$=a_1b_2\cdot\vec{k}-a_1c_2\cdot\vec{j}-b_1a_2\cdot\vec{k}+b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\,\vec{j}-c_1b_2\cdot\vec{i}$$

$$=(b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\cdot\vec{j}+a_1b_2\cdot\vec{k})-(c_1b_2\cdot\vec{i}+a_1c_2\,\vec{j}+b_1a_2\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

دویم مثال: وښایاست چې د $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ لپاره د $\vec{a}\times\vec{b}$ حاصل له $(-\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k})$ سره مساوي دی.

حل: د لومړي مثال په کارولو سره پوهیږو، چې:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=8(\vec{i}\times\vec{i})+4(\vec{i}\times\vec{j})-2(\vec{i}\times\vec{k})$$

$$+4(\vec{j}\times\vec{i})+2(\vec{j}\times\vec{j})-(\vec{j}\times\vec{k})+4(\vec{k}\times\vec{i})+2(\vec{k}\times\vec{j})-(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$=0+4\vec{k}+2\vec{j}-4\vec{k}+0-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{i}-0=-3\vec{i}+6\vec{j}$$

د مخلوط ضرب حاصل(دري ګوني ضرب) Triple Product

تعریف: د دوو یا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امکانه شته چې هر یو یې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نیسو:

i) د $(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$ دضرب حاصل.

د پورتنیو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، یو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د $\vec{c}$ په وکتور کې ضرب شوی چې له پایله یې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له $\vec{c}$ د وکتور سره هم جهت دی.

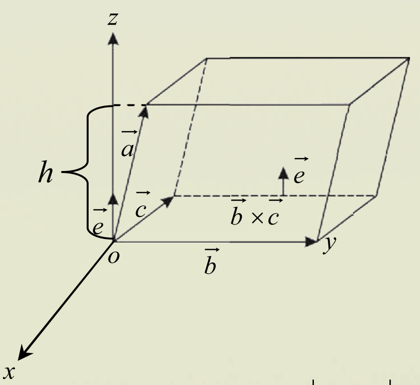
په پورتني ضرب کې لاندې قانون شته: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \neq (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \neq (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

د $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ وکتور جهت د $\vec{a}$ د وکتور هم جهت او د $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ وکتور جهت د $\vec{b}$ د وکتور هم جهت دی.

i) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$

iii) $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$



iv) د $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ اریکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې a, b او c د متوازي‌السطوح اضلاع دی، څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي د $|\vec{b}\times\vec{c}|$ متوازي‌السطوح قاعده او h د متوازي‌السطوح جګوالی دی، نو له دې امله:

د متوازي‌السطوح حجم $= v = |\vec{b}\times\vec{c}|(\vec{a}\cdot\vec{e}) = \vec{b}\,|\vec{a}\times\vec{c}|\,\vec{e}$

$$v = \vec{b}(\vec{a}\times\vec{c}) = |\vec{b}\times\vec{c}|\,h$$

تطبیقاتي مسئلې:

1- که چیرې $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب او غوښتل کیږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، ایا دغه وکتور یوازنی وکتور دی، که څنګه؟ دلیل مو څه دی؟

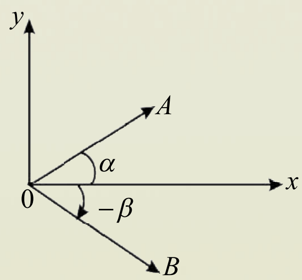
حل: د ښي لاس د قاعدې په کارولو پوهیږو چې د $\vec{a}\times\vec{b}$ وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}$$

نو د $\vec{a}\times\vec{b} = 7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$ وکتور پر $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه یوازیني عمود وکتورونه دي، بلکې $\vec{b}\times\vec{a}$ وکتور هم د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په وکتورونو عمود دي، یعنې لرو:

$$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k} = -(7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}) = -\vec{a}\times\vec{b}$$

2- ثبوت کړئ چې د α او β د هرې اختیاري زاویې لپاره $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin B$.



حل: که $\vec{OA}$ او $\vec{OB}$ دوه وکتورونه د x, y په مستوي کې داسې راکړل شوي دي چې د x له محور سره د α او β زاویې جوړې کړي، له شکل څخه پوهیږو: $\hat{AOB} = \alpha+\beta$

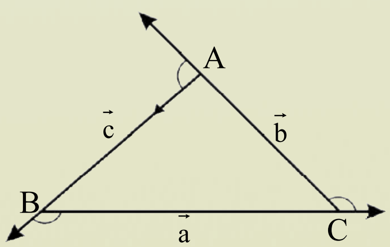
له بلې خوا پوهیږو چې $\vec{OA} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$ او $\vec{OB} = \cos(-\beta)\,\vec{i} + \sin(-\beta)\,\vec{j}$ نو لرو:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} = (\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})\times(\cos\beta\,\vec{i} - \sin\beta\,\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{k}(-\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta) = -\vec{k}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \left|\vec{OA}\right|\times\left|\vec{OB}\right| = \left|-\vec{k}\right|\cdot\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$$

3- په یوه کیفي مثلث کې وښیئ، چې: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$



حل: فرضوو چې د لاندې شکل له مخې د $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ او $\overline{AB}$ د مثلث د ضلعو په امتداد راکړل شوي دي، نو لرو: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$

$$\Rightarrow \vec{b}+\vec{c} = -\vec{a} \quad \text{..........} \ (i)$$

که د مساوات دواړه خواوې په $\vec{c}$ وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c} = -\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{c}) = -\vec{a}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$$

$$\vec{c}\times\vec{c} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a} \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{b}\times\vec{c}\right| = \left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$$

دپورتینو مساواتو د تعریف له مخې داسې لیکلای شو:

$$|\vec{b}|\ |\vec{c}|\sin A = |\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin B$$

$$\Rightarrow\quad |\vec{b}|\,|\vec{c}|\ \sin A = |\vec{c}|\,|\vec{a}|\sin B \quad\Rightarrow\quad b\sin A = a\sin B\ /\div AB$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \quad \dots\dots\dots\ (ii) \qquad \text{یا} \qquad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad \dots\dots\dots\ (ii)$$

د پورته په شان که چیرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په $\vec{b}$ وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b} = -\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{b}\times\vec{b} = 0 \quad\Rightarrow\quad (\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$|\vec{c}|\,|\vec{b}|\sin A = |\vec{b}|\,|\vec{a}|\sin C$$

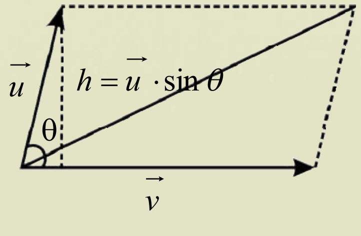
$$c\sin A = a\sin C\ /\div ac$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \dots\dots\ iii \qquad \text{یا} \qquad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له پرتلې (مقایسې) څخه د ساین قضیه لاسته راځي: $\dfrac{a}{SinA} = \dfrac{b}{SinB} = \dfrac{c}{SinC}$

4- **د یوې متوازي الاضلاع مساحت**: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاویه θ د لاندې شکل په څیر په پام کې نیسو. ګورو چې $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د متوازي الاضلاع ضلعې دي چې د هغې د مساحت د پیداکولو لپاره کولای شو، ولیکو:

ارتفاع × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت



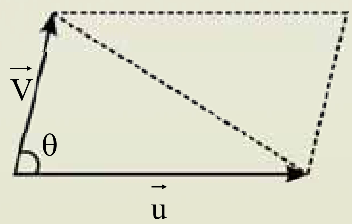
څرنګه چې: $|\vec{v}|$ = قاعده او $|\vec{u}|\sin\theta$ = h = ارتفاع ده

$|\vec{u}|\,|\vec{v}|\sin\theta = |\vec{u}\times\vec{v}|$ = د متوازي الاضلاع مساحت

یعني د یوې متوازي الاضلاع مساحت، د یوې متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعې هم دي.

پایله: څرنګه چې د یوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نیمایي دی، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نیولو سره عبارت دی، له:

$$\text{د مثلث مساحت} = \frac{1}{2}\,(\text{د متوازي الاضلاع مساحت}) = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$$



پوښتنې

1. که $\vec{a}_1 = t^2+t+2$ ، $\vec{a}_2 = 2t^2+t$ او $\vec{a}_3 = 3t^2+2t+2$ وي وښایاست چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري؟
2. وښایاست چې $\vec{a} = 2i+3j+4k$ او $\vec{b} = 4i+6j+8k$ وکتورونه یو له بل سره کوم ډول خطي اړیکه لري؟
3. ثبوت کړئ چې $\vec{a}_1 = 2i$ ، $\vec{a}_2 = 5j$ او $\vec{a}_3 = 9k$ وکتورونه خطي خپلواکي لري.
4. د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې د $A(1,-1,1)$ ، د $B(2,1,-1$ او $C(-1,1,2)$ وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنګه هغه واحد وکتور چې پر ABC مستوي عمود وي، مطلوب دي.
5. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پیدا کړئ چې: د $P(0,0,0)$، $Q(-1,2,4)$ ، $R(2,-1,4)$ او $S(1,1,8)$ وکتورونو په واسطه ځانګړې شوې وي.
6. که $\vec{u} = 2i-j+k$ ، $\vec{v} = 4i+2j-k$ سره وي، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

i) $\vec{u}\times\vec{u}$ ii) $\vec{u}\times\vec{v}$ iii) $\vec{v}\times\vec{u}$

د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه: هغه کمیتونه چې هم جهت اوهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی یې مساوي او عین جهت ولري، یو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه یادیږي. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کیږي. یو وکتور په مستوي کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ په څیر ښودل کیږي. چې a_x د x او a_y د y محور پرمخ له فاصلې او ترتیب څخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که $P(x_1,y_1)$ وکتور مبداء او $Q(x_2,y_2)$ د پای ټکی د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور وي. په دې ډول $\vec{a}$ وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ ښیو او د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث او $|\vec{a}|$ وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د P او Q ټکو ترمنځ واټن، $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=|\vec{a}|=$ د $\vec{a}$ اوږدوالې د P او Q منځني ټکی $\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=M$ د $\vec{PQ}$ د منځني ټکي وضعیه کمیتونه یا مختصات دی.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکړل شوی وکتور په عین جهت پروت او یو واحد اوږوالی ولري، د واحد وکتور په نامه یادیږي.

مثال: $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په قایم سیستم کې د x او y د یوې مستوي د محورونو په جهت واحد وکتورونه دي، په داسې حال کې چې $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ په فضاکې د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د x، y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو سکالري ضرب: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل یې په مستوي او فضاکې عبارت دی له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,Cos\theta$

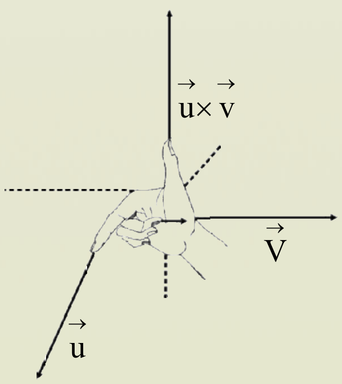
په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه ده. او د وکتوري ضرب حاصل یې یو وکتور دي چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ په واسطه ښودل کیږي، عبارت دی، له: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\,Sin\theta\cdot\vec{n}$

په داسې حال کې چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ پر وکتورونو عمود دی او $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونه سره د ښي لاس قاعدې په واسطه تړاکل کیږي.

د ښي لاس قاعده: که د شهادت ګوته په قایم ډول کږه شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت ګوته د $\vec{u}$ محور په جهت، د خنګل په جهت د $\vec{v}$ محور او غټه ګوته د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور حاصل ضرب ښیي.

په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

که $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ ورکړل شوی وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضرب یعنې $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارت دی له:

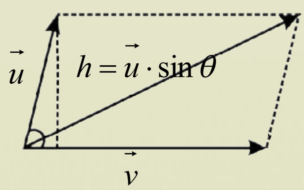


$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مساحت او د وکتوري ضرب حاصل: د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د وکتوري ضرب قیمت یې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شکل کې تشکیلیږي.

د متوازي الاضلاع مساحت $=|\vec{u}\times\vec{v}|$



د څېړکي پوښتنې

1): که $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ وي:

a): $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b): $\vec{b}\cdot\vec{a}$ مطلوب دی

2): که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د $\vec{op}$ او $\vec{OQ}$ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د P او Q په مستوي کې د $xi+yj$ په څېر ولیکئ.

3): که چیرې $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ او $D(-2,2)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$ وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4): که چیرې $A(2,5)$ ، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{AB}=?$ $ii)\ 2\vec{AB}-\vec{CB}=?$ $iii)\ 2\vec{CB}-2\vec{CA}=?$

5): که چېرې $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ ورکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ $ii)\ \vec{v}-3\vec{w}$ $iii)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

$iv)$: د $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ راکړل شوو وکتورنو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

6): د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ، $\vec{b}\cdot\vec{a}$ او وکتوري ضرب حاصل د $\vec{a}\times\vec{b}$ او $\vec{b}\times\vec{a}$ پیدا او دوه په دوه یې پرتله کړئ، که چیرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توګه وي:

$$i)\ \begin{cases}\vec{a}=2i+j-k\\ \vec{b}=i-j+k\end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases}a=i+j\\ b=i-j\end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases}\vec{a}=3i-2j+k\\ \vec{b}=i+j\end{cases} \qquad iv)\ \begin{cases}\vec{a}=-4i+j-2k\\ \vec{b}=2i+j+k\end{cases}$$

7): د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کيږي:

$i): \quad P(0,0,0), \quad Q(2,3,2), \quad R(-1,1,4)$

$ii): \quad P(1,-1,-1), \quad Q(2,0,-1), \quad R(0,2,1)$

8): د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوي وي.

$i): \quad A(0,0,0), \quad B(1,2,3), \quad C(2,-1,1), \quad D(3,1,4)$

$ii): \quad A(1,2,-1), \quad B(4,2,-3), \quad C(6,-5,2), \quad D(-3.5,-4)$

$iii): \quad A(1,-1,1), \quad B(-1,2,2), \quad C(-3,4,-5), \quad D(-3,5,-4)$

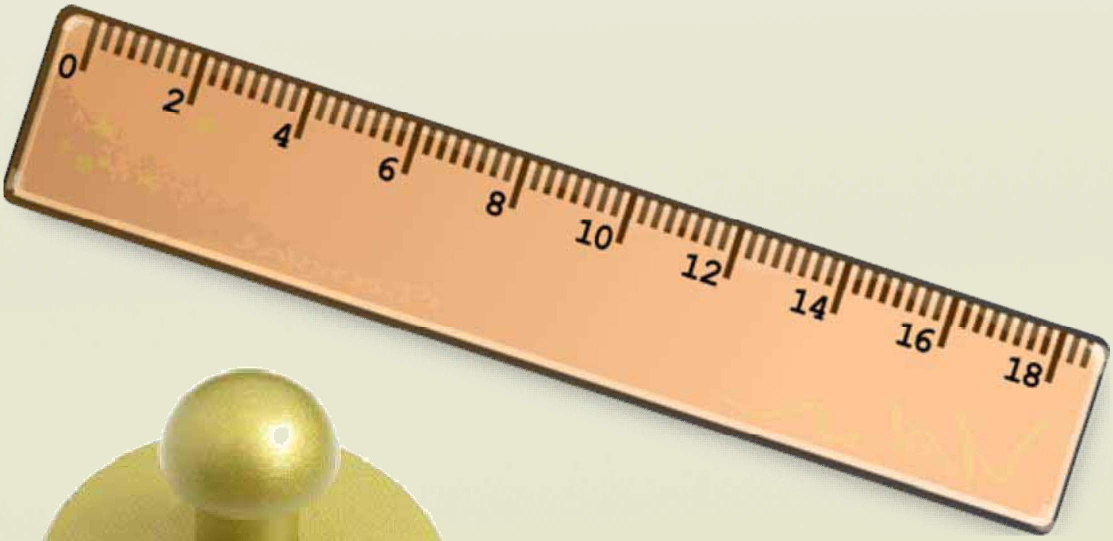
9): کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

$i): \quad \vec{u} = 5i - j + k, \quad \vec{v} = j - 5k, \quad \vec{w} = -15i + 3j - 3k$

$ii): \quad \vec{u} = i + 2j - k\ , \quad \vec{v} = i + j + k, \quad \vec{w} = -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j}$

اتم څپرکی

احصائیه



$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

دبدلونونو ضریب

Coefficient Variations

که چیرې د یوې ټولنې پراګنده ګي په متر او د بلې ټولنې په کیلوګرام ښودل شوې وي. آیا فکر کولای شئ چې دغه دواړه پراګندګي په دواړو ټولنوکې د پرتلې وړ دي او که نه؟

$$\frac{150kg}{170cm} = ? \quad \frac{\text{وزن}}{\text{ونه}}$$

فعالیت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولګي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کونکو ونه او وزن تشخیص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن واریانس او معیاري انحراف محاسبه کړئ.
- آیا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولینو د پراګندګي د میزان پرتله د واریانس او معیاري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟
- که چیرې معیاري انحراف په اوسط ووېشل شي، نو د په لاس راغلي مقدار یا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو یا تغییراتو ضریب یا نسبي پراګنده ګي داسې کارونې لري، چې واریانس او معیاري انحراف هغه نه لري. یو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د یادولو وړ ده.

دبدلونونو یا تغییراتو ضریب چې په $C \cdot V$ ښودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معیاري انحراف پر اوسط مطلق بې واحده عدد دی په لاس راځي یعنې:

$$\text{دبدلونونو یا تغییراتو ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \qquad \text{یا} \qquad C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضریب په لاس راځي:

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضریب یوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعریف شوی وي.
- که چیرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضریب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډېټا په یو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

- که په ټوله ډېټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

لومړی مثال: د لاندې ډېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1,3,5\}$$

حل: د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+3+5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$S^2=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{(1-3)^2+(3-3)^2(5-3)^2}{3}=\frac{4+4}{3}=2.67$$

$$S=\sqrt{2.67}$$

$$C\cdot V=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{2.67}}{3}=0.543$$

دویم مثال: د تصویري تلویزوني لامپونو یو تولیدونکی دوه ډوله لامپونه A او B تولیدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي.

د کوم یوه تصویر لامپ تصویر له پاسینو ډولونو څخه د نسبي پراګنده ګي(یا دبدلون ضریب) قیمت زیات دی؟

حل: د فورمول له مخې لرو چې:

$$C\cdot V_A=\frac{S_A}{\bar{x}_A}=\frac{280}{1495}\cdot 100=18.7\%$$ د A لامپونو د بدلون ضریب

$$C\cdot V_B=\frac{S_B}{\bar{x}_B}=\frac{310}{1875}\cdot 100=16.5\%$$ د B لامپونو د بدلون ضریب

څرنګه چې $C\cdot V_A>C\cdot V_B$ څخه دی، له دې کبله د A لامپ ډېره پراګند ه ګي لري، ولې ټېنګښت یې کم دی.

پوښتنې

1. دلاندې ډېټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

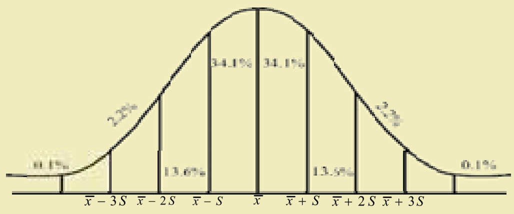
1 3 4 5 6

2. که چیرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغییراتو ضریب څو دی؟
3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن دبدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغییر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟

په نورمال منحني کې پراګنده ګي(تيتوالی)

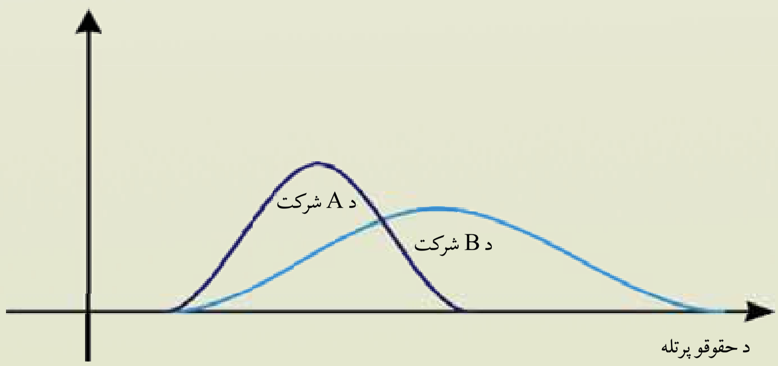
اوريدلي به مو وي چې وايي: يـو ښـه تـصوير د زر کلميو ارزښت لري.

لاندي شکل تـه وګـورئ، د هغـه پـه اړونـد فکـر او بحث وکړئ.



فعاليت

لاندې دوه ګرافونو د دوه A او B شرکتونو د حقوقو تأديه ښيي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تاديه ډيره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تأديې په ميزان کې خپلو کارمندانو ته لږه پراګنده ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تأديات سره پر تله کړئ.

لاندې ټکي د اوسط او معياري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.

- که چيرې $\bar{x}$ اوسط او S معياري انحراف وي؛ نو 68% دپلټنې موارد د $(\bar{x}-S\ ,\ \bar{x}+S)$ په فاصله کې يعنې د اوسط په شا او خوا د معياري انحراف په فاصله کې ځای لري.
- 96%د پلټنې موارد د$(\bar{x}-2S\ ,\ \bar{x}+2S)$ په فاصله کې يعنې د اوسط په شاوخوا د دوه معياري انحرافونو په فاصله کې ځای لري .
- 99% د پلټنې موارد $(\bar{x}-3S\ \ ,\ \bar{x}+3S)$ په فاصله کې يعنې د اوسط په دواړو خواوو درې معياري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

- په یوه نورمال منحني کې له $2S$ څخه ډېر انحراف غیر عادي او له $3S$ څخه زیات انحراف زیات غیر عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط څخه فاصله یا واټن ولري؛ نو باید د پراګنده ګي یا تیتې ډېټا په نامه وګڼل شي.

مثال: که د یوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500 افغانۍ او معیاري انحراف یې مساوي په 700 افغانۍ وي نو:

الف: له نورمال توزیع څخه د فیصدي په ګټه اخېستو، د ورکړل شوي معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: آیا ویلای شي چې د 1400 افغانیو معادل معاش یو غیر عادي معاش دي؟

د الف حل: لومړی د $\bar{x}\pm S$ ، $\bar{x}\pm 2S$ ، $\bar{x}\pm 3S$ قیمتونه په لاس راوړو.

فیصدي	فاصله د افغانیو له مخې	فاصله د S له مخې
68%	11800 – 13200	$\bar{x}\pm S$
96%	11100 – 13900	$\bar{x}\pm 2S$
99.6 %	10400 – 14600	$\bar{x}\pm 3S$

د ب حل: لومړي $\bar{x}-1400$ په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ یعنې 1400 افغانیو په اندازه 1500 افغانۍ له اوسط څخه ډېرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په S وویشو په لاس را ځي:

$$\frac{1500}{700}=2.1$$

په دې ډول د 1400 افغانیو معاش غیر عادي معاش دی، ځکه چې د 2S له اندازې څخه زیات او له $\bar{x}$ څخه پورته دی.

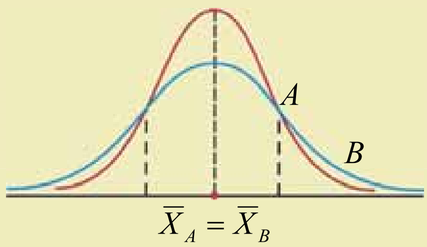
پوښتنه

که چیرې 62.28% فیصده مشاهدات د $(\bar{x}-S\,,\,\bar{x}+S)$ په فاصله کې پراته وي، آیا ویلای شئ، چې 95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالې منحني سره وښایاست؟

دنورمال توزیع دډول شاخصونه

د مرکزي پراګندګي دوه شاخصونه يو زيات شمېر د يوې احصايوي مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي.

ددې لپاره چې د يوې احصايوي مجموعې اطلاعات، تناظر او د مثبت او منفي اشارو لرونکي وي؛ نو له کوم ډول منحني څخه بايد ګټه واخلو.



فعاليت

- په يو ه نورماله توزيع کې وسط، اوسط او د موډ شاخصونه څه وخت سره مساوي دي؟
- که توزيع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او موډ دکميتونو په اړه څه فکر کوي؟
- که چيرې يوه توزيع متناظر ه وي؛ نو د اوسط او وسط تفاضل څو ده؟
- که چيرې دواړه توزيع ګانې يو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جګوالي او ټيټوالي له اړخه به څه وضعيت ولري؟

دتوزيع د ډول شاخصونه په دوو لاندې حالتونو څېړل کېږي:

1- **د خيمېدلو**(skewness)**(خميده ګي) شاخص**: هغه توزيع چې د اوسط په دواړو خواوو متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضريبونو ښودل کېږي.

الف: د خمېدلو ضريب: دا هغه شاخص دی چې د خمېدلو د ميزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\overline{x})^3}{S^3}$$

هغه عدد دی چې يوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخيستل کېږي.

که $\alpha_3 = 0$ وي؛ نو توزيع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي؛ توزيع مثبت خمېدل (possitve skewness)لري، يعنې ښې لورې ته خمېدګي لري.

او که $\alpha_3 < 0$ وي؛ توزيع منحني منفي خمېدل (negative skewness)لري يعنې کيڼ لورې ته خمېدګي لري.

که چيرې دکثرت جدول موجود وي، خمېدګي(عدم تناظر) يې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i-\overline{x})^3}{S^3}$ فورمول په واسطه پيداکېږي. چې f_i فريکونسي ښيي.

ب: د پيرسون د خمېدلو ضريب: د پيرسون ضريب په لاندې ډول تعريف شوی دی.

$$Sk_{(p)} = \frac{3(\overline{x}-med)}{S}$$

په مناظره توزيع کې د پيرسون د خلميدلو ضريب مساوي په صفر دی. د پيرسون د خمېدلو د لو ضريب مثبت او منفي قيمتونه په ترتيب سره د توزيع د منحني مثبت يا منفي خمېدل ښيي.

2- **د پړسوب شاخص kurtosis:** د پړسوب شاخص ددې ښودونکی دی چې د توزیع یوه منحني څه وخت جګه او څه وخت ټیټوالي لري.

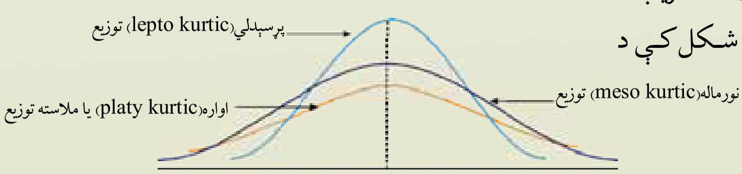
د پړسوب شاخص هغه معمولي شاخص دی چې د يوې منحني د پړسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پړسوب شاخص فورمول $\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i - \bar{x})^4}{S^4}$ دی چې دلته f_i فريکونسي، x_i ډېټا او $\bar{x}$ د x_i اوسط او S معیاري انحراف دی.

د پړسوب شاخص د توزیع په ځای او پراګنده ګي پورې اړه نه لري. دغه شاخص د پرتله کېدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د α_4 ضريب د درې ډوله خمېدلو او پړسوب ډولونه چې په شکل کې د هغوی توزیع ښودل شوې ده ښيي.



حل: د نورمالي توزیع د پړسوب د درجې او میزان د پرتله کېدو لپاره لکه یو سټنډرډ په کار اچول کېږي.

د نورمالي توزیع لپاره د α_4 قیمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چیرې α_4 له 3 څخه زیاته وي نظر نورمال منحني ته د منحني پړسوب زیات دی.

یا په بل عبارت یوه پړسیدلي توزیع چې څوکه لري او که چیرې α_4 له 3 لږ وي، نظر نورمالي منحني ته یې پړسوب کم دی چې د ملاستې یا اوارې توزیع په نامه یادیږي.

پوښتني

د یوه ټولګي د زده‌کوونکو د احصایې د مضمون نمرې په لاندې ډول ورکړ شوي دي، د پیرسون د پړسوب ضریب حساب کړئ.

نمرې	د زده‌کوونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2

څو متحوله ټولنې

که چیرې د خپل یوه ټولګیوال د ونې په اندازه وپوهیږئ، کولای شئ هغه ته په پام د هغه د وزن په اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

فعالیت

آیا په تېرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند یو ځای مطالعه او څېړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د یوه سړي د ونې او وزن مقدار د یو متحول په توګه کولای شو چې ارائه کړو؟
- که وغواړو چې د یوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅېړو، نو دغه یوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولګیوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- په لاس راغلې ډېټا د مرتبو جوړو په توګه ولیکئ.
- هغه ټکی چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کېږي، څه ډول شکل لري؟د یوه خط په واسطه یې وصل کړئ.
- آیا ویلای شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعالیت څخه پوهېږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولین دي. تر اوسه مو په تېرو درسونو کې داسې ټولنې پلټلې چې ټولنو په هغوی کې یوازې یو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولنې ولټوو چې دوه او یا له هغو څخه زیات متحولین ولري، دکار دآساني لپاره معمولاً د یو یا څو متحولینو تر منځ درياضيکي اړيکې په مرسته د قايمو مختصاتو په قايم سېستم کې جوړيږي.

په لومړي ګام کې په دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات را ټول شي او په دويم ګام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولينو په څېر په يوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلېدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته يو ګراف را ښيي.

مثال: یو متخصص د غذایي رژیم یو ډول تأثیر په یو شمېر موږکانو څېړلی دی. په دې ډول یې د هر موږک لومړنی وزن اندازه کړی او بیا یې د عملیې په تطبیق پیل کړي چې په پای کې یې بیا د موږکانو وزن اندازه کړی چې لاندې ډېټا په لاس راغلې ده: $(1,8),(2,3),(1,7),(3,5),(2,4)$

په دې ډول لومړی مختصه د موږک لومړنی او دویمه مختصه د موږک وزن دغذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته ښیي.

- ډېټا په یوه سطري او ستوني جدول کې ترتیب کړئ؟
- که چیرې ډېټا د یوې ټولنې په څېر وګڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولین ولري؟

حل: لاندې سطري جدول په پام کې نیسو:

د موږکانو شمیر	1	2	3	4	5
د موږکانو لومړني وزن	1	2	1	3	2
د غذايي رژیم له تطبیق څخه وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نیسو.

د موږکانو شمیر	د موږکانو لومړني وزن	د غذايي رژیم له تطبیق څخه وروسته د موږکانو وزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

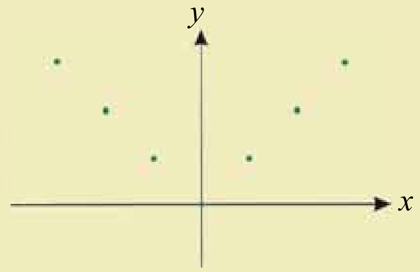
پاسنی ډېټا یوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

پوښتنه

د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکتورنه، لکه اوبه کود د کود ډول لمر او د خاورې ډول موثر ګڼل کېږي، آیا ویلی شئ چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولینو سره سروکار لرئ؟

د پراګنده ګي ګراف

Scatter diagram



مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتیب او ریاضیکي معادله یې ولیکئ:

فعالیت

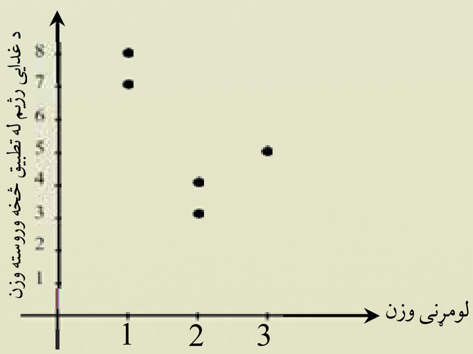
لاندې مرتبې جوړې ورکړل شوي دي:

(1,2) (2,3) (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو ګراف په دقیق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او ریاضیکي معادله یې پیدا کړئ.
- په لاندې ډول د دغې ډېټا د هر یوه، دویمه مختصه په لاندې ډول بدلوو.
- د هر ټکي لپاره یوه سکه پورته وغورځوئ، که شېر راغله په y یو واحد اضافه او که خط راغی له y څخه یو واحد کم کړئ، د په لاس راغلو ټکو یا تغییراتو ګراف رسم کړئ.
- دغه عملیه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قیمتونه زیات یا کموي، بدلون مه ورکوئ په x او y پورې تړلې قیمتونه څنګه تغیر کوي؟

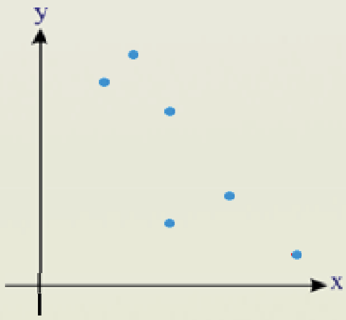
مثال: لاندې مرتبې جوړې چې پر موږکانو دغذایي رژیم تأثیراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې ونیسئ: (2,4) (3,5) (1,7) (2,3) (1,8)

دغه مرتبې جوړې د مخامخ شکل په څېر په یوه مستوي کې ښودل شوي دي.

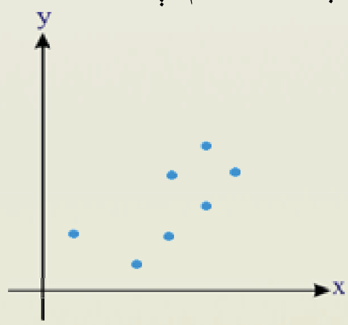


پاسنی ګراف چې د موږکانو وزن راښیي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه په مستوي کې ده چې د اړونده ډېټا په اندازه کیدلو په یوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سیستم کې لاسته راځي.

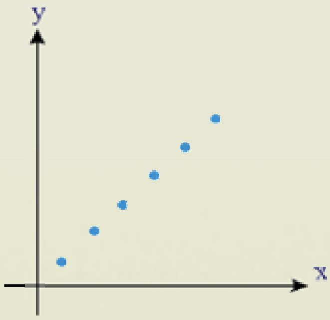
مثلاً: لاندې ګرافونه په پام کې ونیسئ:



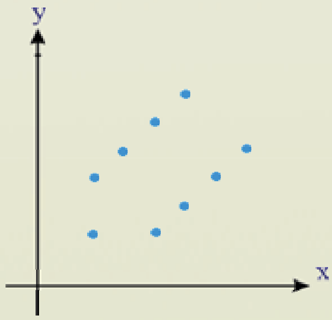
(ب)



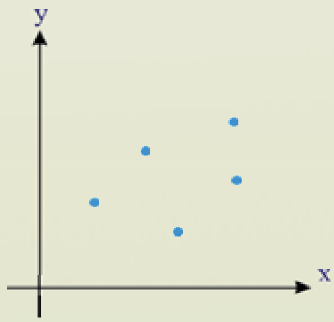
(الف)



(هـ)



(د)



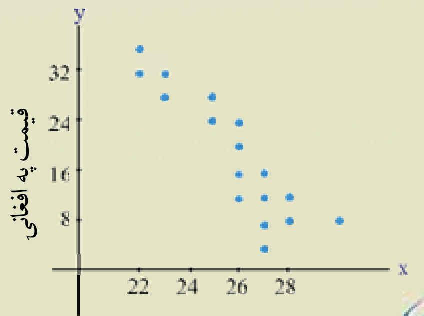
(ج)

د(الف) په ګراف کې لیدل کېږي چې که چیرې د x قیمتونه زیات شي؛ نو د y قیمتونه هم زیاتېږي، خو د (ب) په ګراف کې بر عکس د x د قیمتونو په زیاتوالي د y قیمتونه کمېږي.

د(ج) په ګراف کې د x په قیمت کې تغییرات هیڅ ډول اطلاع د y دبدلونونو په اړوند نه ورکوي ځکه د x قیمت په درلودلو سره په ډېر پام په دې ګراف کې د(الف) او (ب) ګرافونو په پرتله زیاته ده، د ( )په ګراف کې د y د قیمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.

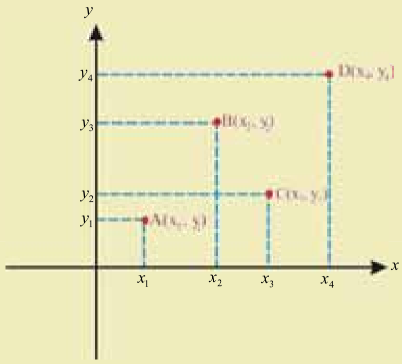
پوښتنې

لاندې ګراف دیو شمیر تراکترونو عمر راښیي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکه یا ارتباط وینې؟ توضیح یې کړئ.



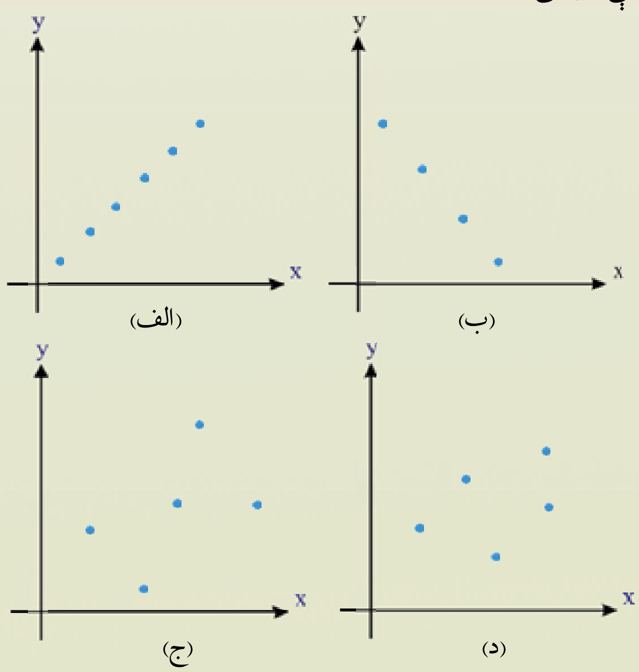
پیوستون او دپیوستون ضریب

د A, B, C او D ټکي لکه مخامخ شکل راکړل شوي دي، آیا شوني ده چې ټکي په یوه مستقیمه کرښه سره وصل شي، ولې؟



فعالیت

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ:



- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د y متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېرېږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د x او y تر مینځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د(ج) او(د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې پراته وي؟
- د(ج) او (د) په شکلونو کې د x او y ترمنځ اړیکې په څه ډول دي؟
- - د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د(ج) او(د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او ووایئ چې د y د متحول خطا د x د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

له پاسني فعاليت څخه داسې پوهېږو چې که چيرې ټکي په مستوي کې يوې مستقيمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې y د متحول خطا نظر x ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د y خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معيار غواړو در وپېژنو چې د ټکو پيوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پيوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوې ده، د پيوستون د ضريب په نامه ياد او په r سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$r = \frac{\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{n} - (\text{د } y \text{ ګانو اوسط})(\text{د } x \text{ ونو اوسط})}{(\text{د } y \text{ ګانو معياري انحراف})(\text{د } x \text{ ونو معياري انحراف})} = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S_x\,S_y}$$

مثال: دموړکانو د لومړني وزن او غذايي رژيم څخه وروسته ډېټا لکه لاندې جدول په پام کې ونيسئ.

د x او y دضرب حاصل	له عمليې څخه وروسته وزن y	لومړني ورن X	د موړکانو شميره
8	8	1	1
6	3	2	2
7	7	1	3
15	5	3	4
8	4	2	5
$\sum 44$	$\sum 27$	$\sum 9$	

دلومړني او وروسته د غذايي رژيم د وزنونو تر منځ د پيوستون ضريب محاسبه کړئ.

حل: که چيرې X لومړني وزنونه او y د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته وزنونه او $n = 5$ د موړکانو شمېر په پام کې ونيسو، نو د X او y اوسطونه عبارت دي له:

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \qquad , \qquad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$S_x^2 = \text{د } x \text{ ونو واريانس} = \frac{(1-1.8)^2+(2-1.8)^2+(1-1.8)^2+(3-1.8)^2+(2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64+0.04+0.64+1.44+0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$S_y^2 = \text{د } y \text{ ګانو واريانس} = \frac{(8-5.4)^2+(3-5.4)^2+(7-5.4)^2+(5-5.4)^2+(4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76+5.76+2.56+0.16+1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}} = \frac{\sum x \cdot \sum y}{n} = \frac{(1\cdot8)+(2\cdot3)+(1\cdot7)+(3\cdot5)+(2\cdot4)}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

په دې ډول په پایله کې د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته را ځي:

$$r = \text{د پیوستون ضریب} = \frac{8.8-(1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\cdot\sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

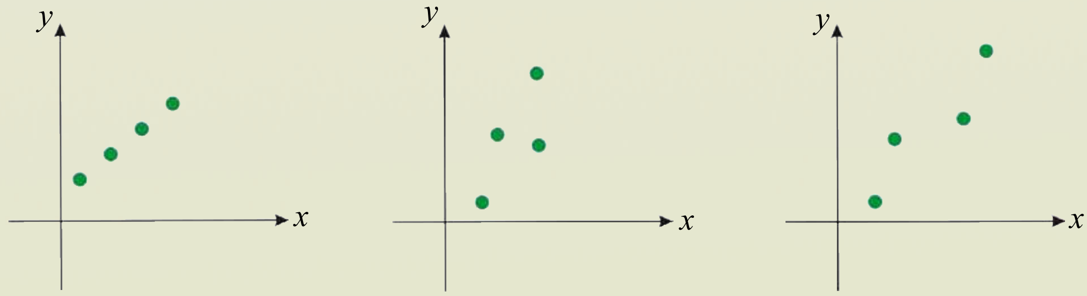
اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پیوستون د -0.67 ضریب د x او y ترمنځ د ډېر پیوستون ښودونکی ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پیداکېدو لپاره د پیوستون ضریب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې په لاس راوړو:

مثال: لاندې جدولونه په پام کې و نیسئ:

x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

x	y
1	3
2	5
3	7
4	9



(ج) (ب) (الف)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په یوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب ډېر لوړ قیت لري.

د (ب) په شکل کې ټکي د یوې مستقیمې کرښې په شاخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د(الف) حالت ته د ټکو تر منځ د پیوستون ضریب لږ دی د (ج) په شکل کې څرنګه چې ټکي د مستقیمې کرښې د(ب) د حالت په اندازه نږدې پراته دي، نو باید ضریب یې په دې حالت کې د(ب) له حالته زیات، خو د(الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلي لپاره موضوع په لاندې ډول څېړو، د پیوستون ضریب د(الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{د } x \text{ ونو واریانس} = \frac{(-1.5)^2+(-0.5)^2+(0.5)^2+(1.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{د } y \text{ ګانو واریانس} = \frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو دضرب حاصل} = (1\cdot 3)+(2\cdot 5)+(3\cdot 7)+(9\cdot 4) = 70$$

$$r = \text{دپیوستون ضریب} = \frac{\frac{70}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}} = \frac{17.5-15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

د پیوستون ضریب د (ب) په حالت کې:

$\bar{y} = \frac{24}{4} = 6$, $\bar{x} = 2.5$

$\frac{16+0+0+16}{4} = 8$ = د y ګانو واریانس ، $1.25 =$ د x ونو واریانس

$2+12+18+40=72$ = د x او y ګانو د ضرب د حاصل مجموعه

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{\frac{72}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

د (ج) په حالت کې د پیوستون ضریب: $\bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75$, $\bar{x} = 2.5$

$4.6875 =$ د y ګانو واریانس ، $1.25 =$ د x ونو واریانس

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{4} = 16.75$$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{16.75-(2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25}\sqrt{4.6875}} = \frac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې y لږ خطا ولري(د x او y مقدارونه خط ته نږدې پراته دي) که چیرې د پیوستون ضریبونه 1او -1 وي، x او y پر یوه مستقیمه کرښه پراته دي. غیر له هغه ځخه د پیوستون ضریب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.

پوښتنې

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده.

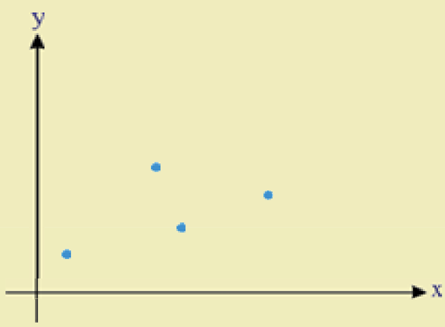
x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ډېټا دپیوستون ضریب محاسبه کړئ.

2- د خپلو ټولګیوالو د ونې او وزن تر منځ د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

د خطي میلان معادله

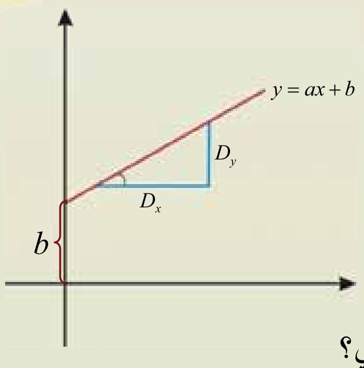
The linear regression equation



فرض کړئ چې یو پاشلي ګراف په لاندې ډول راکړل شـوی وي. یـوه مـستقیمه کرښـه چـې معادلـه یـې د $y = ax+b$ پـه ډول ورکـړل شـوي وي، پیـدا کـړئ چې ګراف یې ټولو ټکو ته نږدې فاصله یا واټن ولري.

فعالیت

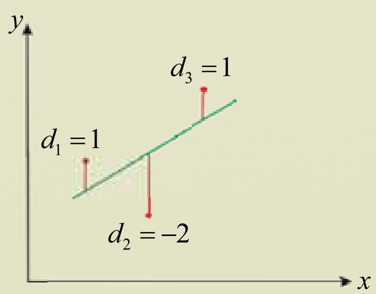
په مخامخ شکل کې یوه خطي تابع(لومړی درجه) چې ګراف یې مستقیمه کرښه ده، رسم شوې ده.



- د $y = ax+b$ خطي تابع کې a او b څه ډول مقدارونه دي؟
- د $y = ax+b$ په تابع کې د x او y متحولین په کوم نوم یادیږي؟
- د $y = ax+b$ مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ؟
- د $y = ax+b$ په معادله کې د y بدلون ، د یو واحد په اندازه په x کې و ټاکئ؟
- د $y = ax+b$ معادله کې که چیرې $a > 0$ وي؛ د تابع ګراف متزاید او که متناقص دی؟

همدغه راز که چیرې $a < 0$ سره وي، د تابع ګراف څه شکل لري؟
او که چیرې $a = 0$ وي، د تابع دګراف شکل و ټاکئ؟

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:



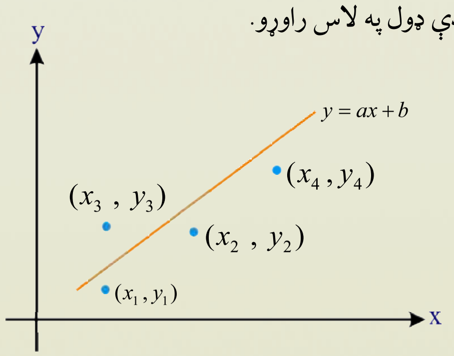
د فاصلو مجموع $d_1+d_2+d_3$ او $d_1^2+d_2^2+d_3^2$ محاسبه کړئ.

له پاسني فعاليت څخه پوهېږو چې د $y = ax + b$ معادله يوه خطي تابع ده چې د a ضريب ددې معادلې ميل جوړ وي او کله چې a مثبت وي، مستقيمه کرښه متزايد او که چيرې a منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.

پاملرنه وکړئ چې که د (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړې ټکي د مستقيمې کرښې په ګراف پروت دی.

هر څومره چې د ټکو پاشل مستقيمې کرښې ته نژدې وي، نو د پيوستون ضريب به -1 او $+1$ ته ورنژدې وي، که چيرې د يوې مستقيمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پيوستون ضريب مناسب او کولای شو د y د متحول په مرسته متحول وټاکو او که چيرې مستقيمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې يوه تګلاره چې د لږکيو(ميتود اصغري سازي)[1] مربعو په نامه يادېږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.

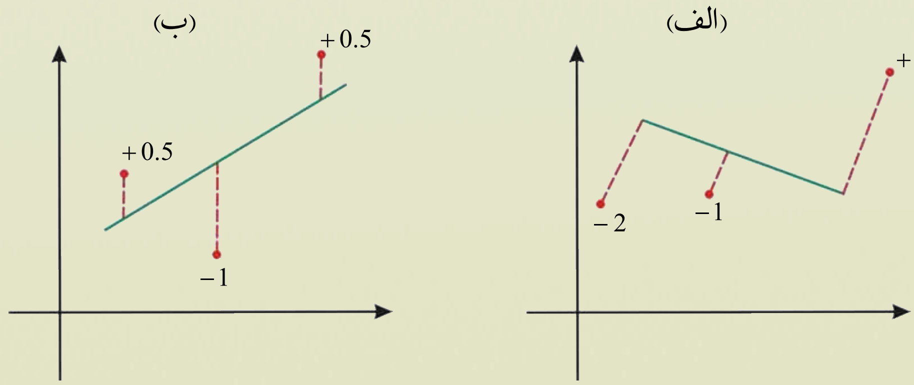
فرض کوو چې د پاشلو ټکو ګراف(متفرقه دياګرام يا Scatrter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.



او غواړو داسې يوه کرښه چې معادله يې $y = ax + b$ وي، د ټکو له منځ څخه داسې تېره کړو چې ټولو ټکو ته نږدې وي. په دې تګلاره کې بايد په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمودي انحرافونو د دويم توان مجموع له مستقيمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نيسو:

x	1	5	9
y	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډېټا لپاره رسموو او د کرښو خطاوې له مشاهدو څخه تشخيصوو.



[1] the method of least square -

ښکاره ده چې رسم شوې کرښه د (ب) په حالت کې په مرتبو د(الف) له حالته ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاګانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

د (ب) حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعې حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله ویلای نشو چې کومه کرښه یوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې خطاوې مثبت او منفي یو بل له منځه یو نسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$$ د خطاګانو د دویم توان مجموع

$$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 =$$ د خطاګانو ددویم توان مجموع

له دې کبله د کرښې د خطاګانو د دویم توان مجموع څرنګه چې د(ب) په حالت کې نظر له(الف) حالت څخه یې قیمت لږ دی، نو ویلی شوچې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاګانو د مربعګانو مجموع یې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ریګریشن کرښې وایي.

که چیرې د ریګریشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپیرچې منځ ته راځي په $\bar{y}$ وښیو، په دې صورت کې د دویمو توانونو د مجموع د لا کوچنې والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$= \sum (y-\bar{y})^2 = \sum [y-(ax+b)]^2$$ د خطاګانو ددویمو توانونو مجموع

$$= \sum (y-b-ax)^2$$

$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2 + ...$$

په دې حالت کې x او y ثابت، a او b متحولین دي.

پرته له دې مونږ هغه تګلاره چې د a او b د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لویدلې، ورننو ځو، یوازې د هغوی د محاسبې خطا په پام کې نیسو:

$$b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

د a او b د محاسبې دغه لاره چې د لږکیو مربعګانو تګلارې په نامه یادیږي.

پایله: د ریګریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاند وینې لپاره د بل متحول په حسابولو چې ورسره تړلی دی، د استفادې وړ ګرځي.

مثال:لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د y د ریگریشن کرښه نظر x ته په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې:

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$\overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{4+3+2+1+0}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$S_x^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{2}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5}=2 \quad \Rightarrow S_x=\sqrt{2}$$

$$S_y^2=\frac{\sum(y_i-\overline{y})^2}{n}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5} \qquad \Rightarrow S_y=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sum x\,y}{n}=\frac{4+6+6+4+0}{5}=\frac{20}{5}=4$$

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum xy-\overline{x}\cdot\overline{y}}{S_x\cdot S_y}=\frac{4-3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{-2}{2}=-1$$

له دې کبله:

$$b=\overline{y}-b\overline{x}=2-b\cdot 3$$

$$a=r\frac{S_y}{S_x}=-1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$$

$$b=\overline{y}-b\overline{x}=2-(-1)(3)=2+3=5$$

په دې ډول د ریگریشن معادله عبارت ده له: $y=ax+b=-x+5$

پوښتنه

که چیرې $y=2x+3$ د y د ریگریشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راکړل شوي وي، د y اوسط څومره وي؟

د اتم څپرکي مهم ټکي

د بدلون ضریب: د بدلون ضریب د معیاري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق بې واحده عدد دی؛ لکه:

$$\text{د بدلون ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

دغه ضریب ډېر ځلې د فیصدي په ډول ښودل کېږي چې د تحول د ضریب په نامه يادېږي.

$$\text{د تحول ضریب} \quad C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

د بدلون ضریب د مثبتې ډېټا لپاره تعریفېږي، په ياد يې ولرئ که چیرې ډېټا سره مساوي وي، نو د پراګندګۍ ټول شاخصونه مساوي له صفر سره دي.

په نورمال منحني کې پراګنده‌ګي: نورمال منحني د احصایوي مجموعې يوه داسې توصیفي وسیله ده چې په نورمال منحني کې ډېټا په نورمال توزیع او کثرت منحني کې متناظر پراته دي؛ نو واریانس عمده نقش لري، په حقیقت کې د دوو پارامترو مشخص کیدل او معیاري انحراف په نورمال توزیع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ډول شاخص د محاسبې زمینه برابره ده.

د نورمال توزیع شکل شاخصونه: د اوسط او معیاري انحراف په مرسته کولای شو د لید خرنګوالی د کږېدو(خمېدو) او پرسېدو(اوج) په ډول په ښه توګه څرګند او وړاندې کړو.

د کږېدلو شاخص د کږېدو او پیوستون ضریبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازو د پرتله کولو لپاره پکارېږي په لاندې ډول لیکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i - \bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad SK_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$$

د پرسېدو(جګېدلو) شاخص د پرسېدو د ضریب α_4 په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{S^4} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

څومتحوله ټولنې: په احصایوي څېړنو کې تر ټولو لویه موخه(هدف) وړاندوینه او د یو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دی. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړیکې څېړل زموږ مقصد وي، په حقیقت کې هدف یوه دوه متحوله ټولنه ده؛ لکه د یو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړیکه د صحت او حرکت د میزان ترمنځ اړیکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړیکه او یا هم د یوې دایرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړیکه چې ټولې دغه راز اړیکې دوه متحوله ټولنې بیانوي. د آسانتیا لپاره معمولاً د دوه یا څو متحولینو ترمنځ اړیکه د ریاضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

د پراګنده‌ګي ګراف: د پراګنده‌ګي ګراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل پـه يـوه مستوي کې د قايمو مختصاتو په سېستم کې ښوول کېږي. کيداى شي د ټکو او پراګنده‌ګي ګراف په مرسته درې ډوله اطلاعـات زمـوږ پـه اختيار کې راکړي.

الف: آيا داسې نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړيکه ښيي، شته او که نه؟

ب: د يو ډول اړيکې د شتون په صورت کې دغه اړيکه خطي ده او که نه؟

ج: که چيرې اړيکه خطي وي، نو څه ډول اړيکه ده؟

پيوستون او د پيوستون ضريب: پيوستون د متحولينو ترمنځ د اړيکو د مېندلو درجه ده، کله کله دواړه متحـولين په يوه لورې بدلون کوي يعنې x او y دواړه په يوه کرښه لـوى او يـاهم کـوچني شـي، چې پيوستون يـې مـستقيمه کرښه ده. که چيرې د دوو متحولينو اندازه يو د بل پر خلاف بدلون وکړي يعنې که چيرې x لـوى شـي y کـوچنى کېږي. او يا هم برعکس صورت نيسي.

د پېژندنې ډېر ښه معيار د پيوستون شتون او نه شتون دى او حتا د خطي پيوسـتون ډول، جهـت او ميـزان د پيوسـتون ضريب دى، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - (\bar{x}\,\bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنيو اړيکو کې $\sum xy$ د x ونو او y ګانو د ضرب د حاصـل مجمـوع، $\bar{x}$ د x ونـو اوسـط او $\bar{y}$ د y ګـانو اوسط دى، همداراز S_x د x ونو معياري انحراف او S_y د y ګانو معياري انحراف دى.

د ريګريشن کرښه: ريګريشن(تخميني) د تابع د يوه متحول له قيمـت لاسـته راوړل او سـنجش څخـه عبـارت دى، چې د يو يا څو مستقلو متحولينو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولينو ترمنځ اړيکې افاده کوي، د ريګرېشن معادلې په نامه يادېږي.

کولاى شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعګانو د محاسبې په طريقـه حساب او همدارنګـه د a او b ضـريبونه د دغـې طريقې په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \qquad , \qquad b = r\frac{S_y}{S_x}$$

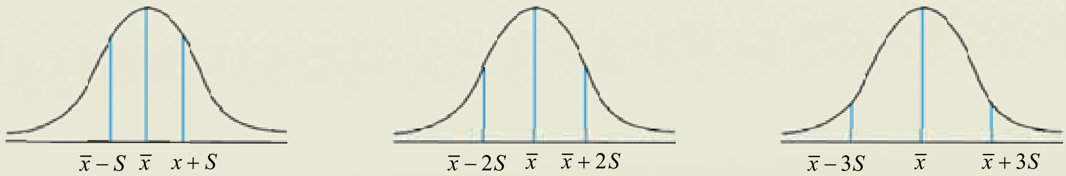
چې S_y د y معياري انحراف او S_x د x معياري انحراف دى، په داسې حال کې چې r د پيوسـتون ضـريب، $\bar{x}$ د x ونو اوسط او $\bar{y}$ د y ګانو اوسط دى.

د څپرکي پوښتنې

1-که چیرې په یوه ټولنه کې چې اوسط یې $\bar{x}=50$ او واریانس یې $S^2=64$ سره وي، د بدلون ضریب y چې له $y=2x+10$ رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

2-که چیرې د هر زده کوونکي په نمرو کې 20% نمبرې ورزیاتې شي، نو د نمبرو د بدلون په ضریب څه اغیزه کوي؟

3- د هغو ټولنو فیصدي چې په لاندې درکړل شوو منحني ګانو کې پرته ده، ولیکئ؟



4- لاندې اړیکو ته په پاملرنې وواياست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړیکې دي.

الف: ستاسو د ټولګیوالو د ونو اندازه؟

ب: د یو شي د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړیکه؟

ج: د یوې استوانې د حجم، جګوالي او د قاعدې د مساحت تر منځ اړیکې؟

5- د یو ټولګي د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زدکوونکو د نمبرو تر منځ چې د 20% له مخې اخیستل شوی دی، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دي:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)
(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)
(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړیکو له مخې ګراف رسم او خپلې پایلې وڅېړئ؟

6- مخامخ ډېټا په پام کې ونیسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوې ډېټا کې د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

7- که چیرې د پیوستون ضریب صفر ته نژدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

8- که چیرې د پیوستون ضریب د $+1$ او -1 عدد ته نژدې وي، نو د y د خطا په اړوند څه وایئ؟

9- د سروې له مخې چې د یوه ښوونځي په دو A او B ټولګیو کې شوې ده، لاندې عددونه د کیلوګرام په حساب د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

د پاسنیو اعدادو په پام کې نیولو سره:

الف: د ډېټا د پراګندګۍ ګراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندې مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقیمه کرښه نظر د ریګرېشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چیرې x او y سره بشپړ پیوستون او معکوس ولري، یعنې $S_x = S_y$، نو د y نسبت x ته د ریګرېشن خط کوم دی؟

1) $y=-\frac{1}{2}x+b$ 2) $y=\frac{1}{2}x+b$ 3) $y=x+b$ 4) $y=-x+b$

11- د 20 تنو زده کوونکو د ریاضي او فزیک د مضمون 20% د آزموینې پایلې چې په لاندې ډول ورکړ شوې، رسم کړئ؟

زده‌کوونکي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
د ریاضي نمرې	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
د فزیک نمرې	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

زده‌کوونکي	12	13	14	15	16	17	18	19	20
د ریاضي نمرې	12	10	16	18	12	6	14	14	12
د فزیک نمرې	6	12	16	12	12	8	12	14	16

ـ د ریګریشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

ـ آیا د دوو آزموینو د پایلو تر منځ اړیکې شتون لري؟

12- پر چنګښو د خوراک د مالګې د 5 او یو فیصده محلول اغیزې د یون پلازما پر میزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

د مالګې په محلول کې د پاتېکېدو وخت	50	40	30	20	10	5	0
د یون پلازما میزان(mm)	136	132	126	122	118	110	90

ـ په پاسنی جدول کې متحولین وڅېړئ؟

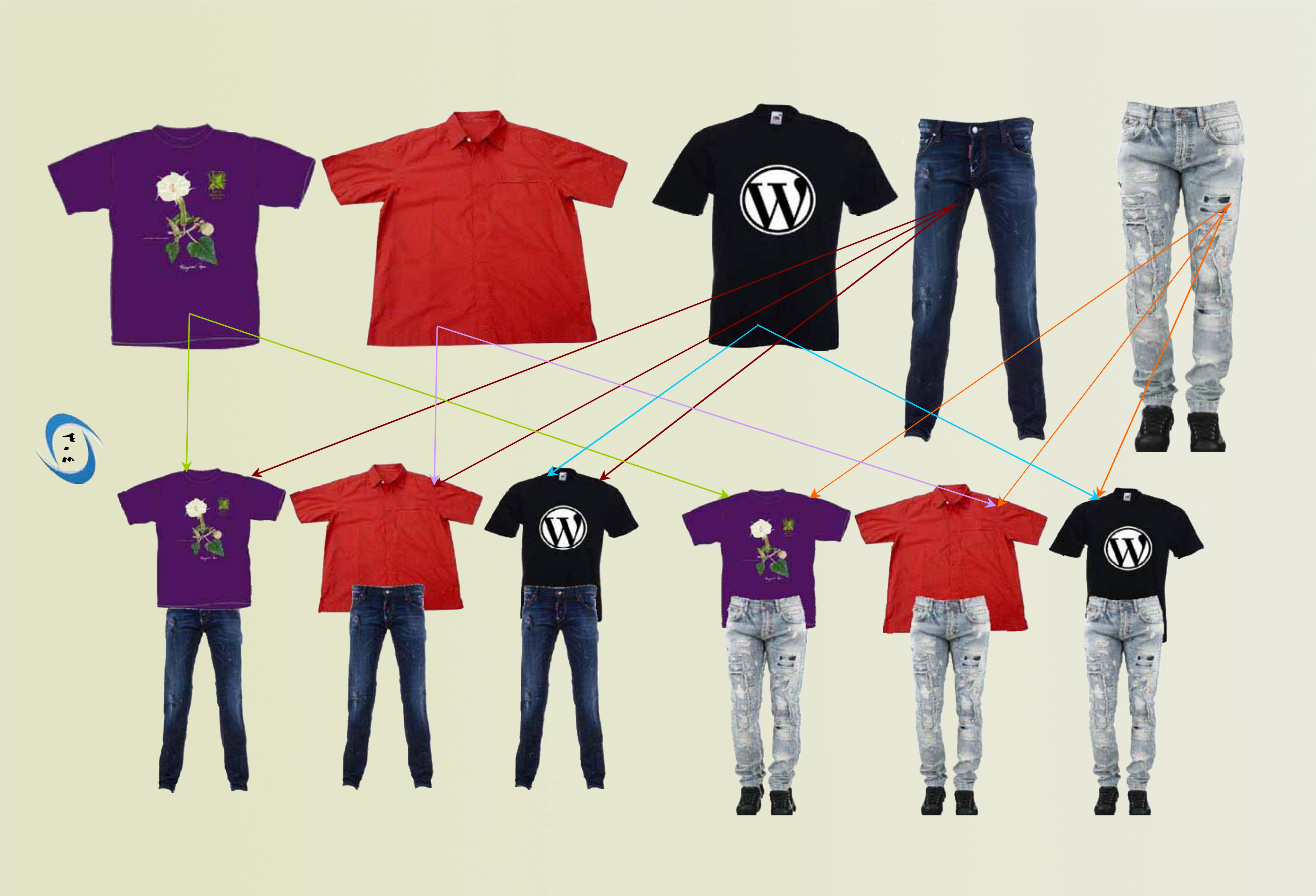
ـ په پورتنیو متحولینو کې کوم یو خپلواک او کوم یو ناخپلواک متحول دی؟

ـ یو داسې ګراف رسم کړئ چې د دواړو متحولینو ترمنځ اړیکه وښیي؟

ـ د دې ګراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښایاست؟

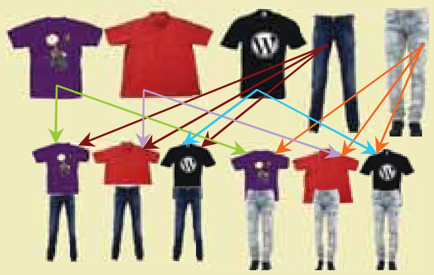
نهم څپرکی

احتمالات



پرموټېشن یا ترتیب

Permutation



که چېري درى بيلابيل کميسونه او دوه پطلونونه ولرو، په څو ډوله کولای شو هغه سره جوړه جوړه واغوندو؟

فعالیت

خپل درې تنه ملګري وآزمويئ چې په څو ډوله کولای شي په يو کتار کې و درېږي؟

- له درې يو رقمي اختياري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنيو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څو درې رقمي عدونه جوړولاي شو، په دې شرط چې په عددکې رقم تکرار نه وي.
- د پاسني فعاليت د اول، دويم او دريم پاراګراف پايلې سره پرتله او ووايي چې څه اړيکی سره لري؟

له پاسني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پایله

د n شيانو د ترتيب د شمېر ډولونه چې سره خوا په خوا راشي عبارت دي له:

- كه تکرار مجاز نه وي مساوي په $n\cdot(n-1)\ \ldots\ 2\cdot 1$ سره دي.

- كه تکرار مجاز وي مساوي په $\underbrace{n\cdot n\cdot\ \ldots\ \cdot n}_{n \text{ ځلې}} = n^n$ سره دي.

تعريف: د يوه طبيعي عدد لپاره د $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot n)$ حاصل ضرب په لنډ ډول په $n!$ (n – فکتوريل) ښودل کيږي. او د تعريف له مخې $1!=1, 0!=1$ سره دي.

2: د n عنصرونو د ترتيب ډولونه چې د n غړو د پرموټېشن(Permutation) په نامه هم يادېږي په P_n سره ښودل کيږي.که چيرې تکرار په ترتيب کې ناشوني او يا مجازنه وي.

نو د پاسني تعريف په پام کې نيولو سره $P_n = n!$ سره کيږي.

که چیرې په ترتیب تکرار شوني او یا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتیب ډولونه او یا پرموټېشنونه په مجاز تکرار کې $P_n^{(k)} = \dfrac{n!}{k!} \quad , \quad (k \le n)$

لومړی مثال:

(i) : د لاندې عددونو قیمت پیدا کړئ.

$$3!, 8!, 5!$$

(ii): د هر يو طبيعي عدد لپاره وښيئ چې $n! = n(n-1)!$ سره ده؟

حل (i): د تعریف له مخې لرو چې:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$
$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

(ii) پوهېږو چې: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot n = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot n-1)(n) = n(n-1)!$

دويم مثال: د آزموینې لپاره په یوسالون کې 16 زده کوونکي له بېلابېلو ټولگیو د سوېې آزموینې لپاره راغونډ شوې دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 مېزونو تر شا په لیکه کښېنئ چې د هر یو د ځای تغییر د ناستې یو حالت وشمېرل شي.

حل: پوهېږو چې ځواب 16! دي چې تکرار پکې ناشونی دی. که چیرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتیب د n شیانو چې k عدده یې د مثال په ډول په تکراري ډول راښکاربږي، نو په دې صورت کې لرو چې: $P_n^{k} = \dfrac{n!}{k!} \quad , \quad (k \le n)$

مثلاً په پاسني مثال کې، که چیرې 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځایونه په خپلو لاسي بکسونو ونیسي او له دې څخه 4 تنه یو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 43680$$

که چیرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونیسو، نو په دې صورت کې د $P_n^{(k_1, k_2, \ \ldots \ , k_n)}$ n ترتیبه یا پرموټېشنونه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقیقت کې، m گروپه شیان چې هر یو یې په ترتیب سره د $k_1!, k_2! \cdot \ \ldots \ \cdot k_n!$ په اندازه سره یو شان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1, k_2, \ \ldots \ , k_n)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ \ldots \ \cdot k_n!}$$

دریم مثال: له پنځه $(5,5,5,4,4)$ عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهېږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمیر عبارت دي له: $P_3^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

55544 , 55454 , 54554 , 45554 , 45545

45455 , 44555 , 54545 , 55445 , 54455

څلورم مثال: د سبا کاروان ټرانسپورټي شرکت د کابل جلال‌آباد په لین کې 5 لوی سروېسونه او د جلال‌آباد- کنړ په لاره 3 مېنې بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نوموړي ټرانسپورټ په سروېسونو او مېنې بسونو کې له کابله- کنړ ته سفر وکړو؟

حل:پوهېږو له کابله تر جلال‌آباد پورې د نوموړي شرکت له سروېسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د مېنې بس د انتخاب چانس له جلال‌آباد څخه تر کنړه، د نوموړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساي دي په: $5 \times 3 = 15$

پنځم مثال: د $8,7,2$ او 5 عددونو په مرسته څو دري رقمي عددونه(پرته له تکراره) جوړولای شو.

حل: دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

$\boxed{4}$ دامکاناتو ډولونه	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$
د لومړي رقم ځای	د دویم رقم ځای	د دریم رقم ځای

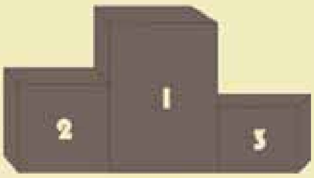
پوهېږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ او د فورمول له مخې لروچې: $p_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

پوښتنې

1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم یې 2 او وروستی رقم یې مساوي په 4 وي، په عدد کې هیڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د یوه ګردی میز په شاوخوا کښېني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کېني.
3. په څو ډوله کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زېړ توپونه سره خوا په خوا په یو کتار کې کېږدو. (د هم رنګه تو پونو په کتار کې د هم رنګه توپونو ځای بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.)

ترکیب یا کمبینیشن

Combination



د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونه او ترتیبونه څه سره توپیرلري؟

مخکي له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسوو، لاندې تعریف چې په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.

تعریف

د $\binom{n}{k}$ لیکدود چې n د k له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د بینوم د ضریبونو په نامه یادېږي چې k د بینوم توان ښیي او په لاندې ډول دی:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0\le k\le n \ , \ k\wedge n\in IN$$

فعالیت

د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره، د بینوم د $(a+b)^2$ د دوه حدي په انکشاف کې د بینوم ضرایب چې مساوي په $\binom{2}{k}$ $k=0,1,2,$ سره دی، پرتله کړئ:

$$(a+b)^2=\boxed{}\,a^2+\boxed{}\,ab+\boxed{}\,b^2$$

- د بینوم ضریبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د $\binom{2}{k}$ له $k=0,1,2$ قیمتونو سره پرتله کړئ؟
- څرنګه چې $\binom{2}{0}=\binom{2}{2}=1$ سره دي، وبلای شئ چې د هر $n\in IN$ لپاره $\binom{n}{n}$ او د $\binom{n}{0}$ قیمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟
- د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د بنیوم د ضریب د دویم حد قیمت د $\binom{n}{k}$ له مخې حساب کړئ.
- د $\binom{4}{k}$ $k=0,1,2,3,4,$ قیمتونه د بینوم د انکشاف له کومو ضریبونو سره مساوي دی، ویې لیکئ؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هر n او k طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې $0\le k\le n$ سره دی لرو:

(i) $\binom{n}{n}=1 \quad , \quad \binom{n}{0}=1$

(ii) $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$

(iii) له n څخه د r شیانو ترکیبونه عبارت د یو n عنصره سټ د غړو د ترکیب یا کمبینیشن د r له n شیانو څخه ده چې په C_r^n سره ښودل کېږي او قیمت یې عبارت دی له: $C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره ګانو، 4 تنه و ټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کېدلای شي؟

حل: لیدل کېږي چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نشته؛ یعنې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي؛ نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب څخه ده چې له 7 تنو څخه 4 تنه و ټاکو؛ نو لرو چې: $C_4^7=\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3!\cdot4!}=\frac{5\cdot6\cdot7}{6}=35$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مشرتابه لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسؤول په توګه و ټاکل شي، په دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کېږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، ځکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب په داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤول دی، په داسې حال کې چې د CABD په ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤول ګڼل کېږي.

دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموټېشن څخه ده چې له 7تنو څخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دي؛ یعنې لرو چې: $P(7,4)=\frac{7!}{(7-4)!}=\frac{7!}{3!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120\cdot7=840$

پوښتنې

1- له اوو حرفونو څخه لکه A,B,C,D,E,F او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟

2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 ټیمونه ګډون لري. په څو ډوله ټیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟

3- له 4 نارینه وو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم یې مالي مسؤول وي.

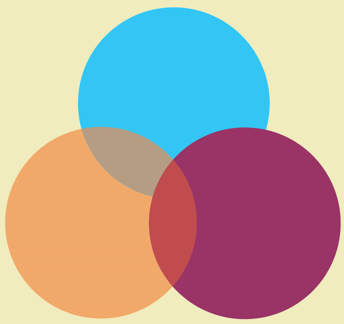
ترکیب
Combination

آيا پوهېږئ چې اصلي رنګونه کوم دي؟

د نارنجي او بنفش رنګ ترکيب کوم رنګ دی؟

ستاسو په نظر ژېړ رنګ د کومو رنګونو له ترکيبه جوړېږي؟

آسماني رنګ، بنفش رنګ، نارنجي رنګ.



فعاليت

د خپلو 5 تنو ټولګيوالو څخه 3 تنه په خو ډوله ټاکلی شئ؟

- موضوع په عملي توګه په ټولګي کې تجربه او حالتونه یې و شمېرئ؟
- که چيرې له 5 تنو زده‌کوونکو څخه 3 تنه داسې و ټاکل شي چې، لومړی کس سرګروپ، دويم د سرګروپ مرستيال او دريم تن منشي وي، د دري تنو ګروپ، د ټاکلو ټول ډولونه څو دي؟
- د پورتني فعاليت لومړی او وروستی جزء یو تر بله څه توپير لري؟
- آيا فکر کولای شئ د پاسنيو ګروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟

له پاسني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: دلته د k په شمېر غړو يو ګروپ له يو سټ څخه چې n غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نيسي چې په يوه کې ترتيب په پام کې دی، خو په بل کې ترتيب مهم نه شمېرل کېږي، يوازې د هغوی ترکيب د پام وړ دی.

په دې ترتيب د يو ترکيب يا کمبينيشن چې k شيان له n بېلابېلو شيانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعريف کې بيانېږي.

تعريف: د k شيانو ترکيب له يوه n عنصره سټ څخه چې په C_k^n ښودل کېږي او عبارت له $\binom{n}{k}$ ترکيبي امکاناتو څخه دی چې د k په شمېر غړي يې پرته له ترتيب څخه ټاکل کېږي، عبارت دی له:

$$C_k^n=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\quad,\quad 0\le k\le n$$

لومړی‌مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتیب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟

حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_4^{30}=\binom{30}{4}=\frac{30!}{4!(30-4)!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26!}{26!\cdot 4!}=27405$$

دویم مثال: له $A=\{1,2,3,4,5\}$ سټ څخه څو 3 عنصره فرعي سټونه په لاس راځي؟

حل: پوهېږو چې مسئله په حقیقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمیر یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_3^5=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=10$$

پوښتنې

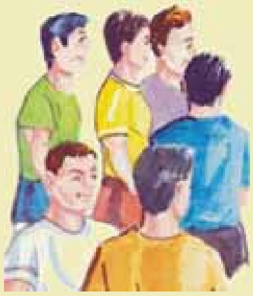
1- که چیرې په یوه آزموینه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو په نښلولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

3- که چیرې $P(n,2)-C_2^n=36$ سره وي، د n قیمت پیدا کړئ؟

تبدیل

Variation



په یوه المپیاکې له 10 ورزشي ټیمونو څخه په څو ډولونو د سرو زرو، سپینو زرو او برونزو مډالونه شتون لري؟

فعالیت

- د n بیلابیلو شیانو په پام کې نیولو سره د k په شمیر شیان ټاکو، د هغوی مجموعي شمېر څو دی؟
- که چیرې د k شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، دریم او ... شتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟
- د پاسنیو دوارو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

پایله: د هغو ترکیبونو شمېر چې د k غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له n غړو څخه په پام کې وي، نو په دې صورت کې یې شمېر مساوي په $k!\cdot C_k^n$ سره کېږي.

دغه ترکیب د وریشن Variation یا تبدیل په نامه یاد او په V_k^n سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخاباتي غونډه کې له 30 تنو ګډون کوونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

حل: مسئله په حقیقت کې د 4 تنو تبدیل له 30 تنو څخه ده، چې د تعریف له مخې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30\cdot 27\cdot 29\cdot 28\cdot 26!}{26!} = 657520$$

پورتني حالات چې تر اوسه مو د ترتیبونو، ترکیبونو او تبدیلونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جدول کې را ټول شوي دي.

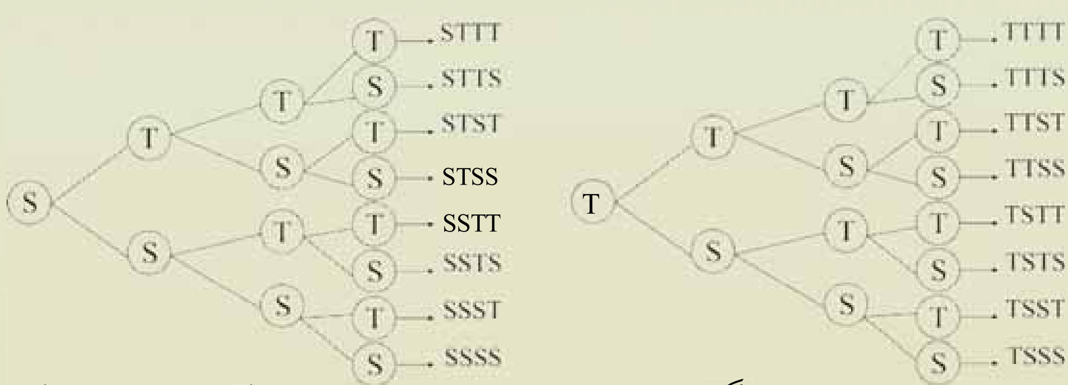
د ټاکنو ډول k غړي له n غړو څخه	د امکاناتو شمیر	
	پرته له تکراره $k \le n$	له تکرار سره $k \le n$
ترتیب یا پرموټېشن	$P(n,k) = n! \quad , \quad n = k$	$P(n,k) = \frac{n!}{k!}$
ترکیب یا کمبېنیشن	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل یا وریشن	$V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

پوښتنې

1- په یوه ورزشي سیالۍ کې د فوټبال 12 ټیمونه، په څو ډوله لومړی، دویم او دریم مقام ګټلی شي؟

2- د یوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله 2 تنه د ټولګي د استازي او د استازي د مشر مرستیال په توګه ټاکلی شو؟

مثال: د یوې سکې په اچولو سره چې د راتګ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راتګ احتمال یې مساوي په $\frac{1}{2}$ دی، په پام کې ونسئ، که چیرې سکه 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغورځوو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه‌یي فضا کې په یوه ونه‌ییز ګراف کې لاندې حالت لرو: (شیر $= S$ او خط $= T$) دی.

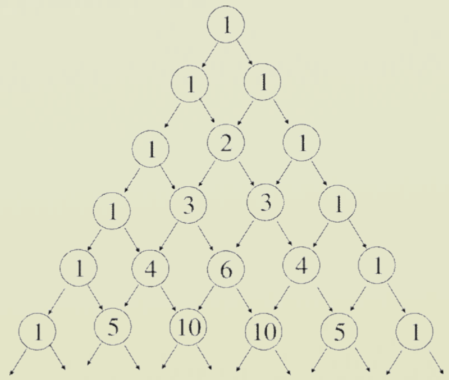


د پاسني مثال د شیر او خط د راتګ احتمال په یو، دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

د سکې غورځول	هیڅ ځل: خط	هیڅ ځل: احتمال	یو ځل: خط	یو ځل: احتمال	دوه ځله: خط	دوه ځله: احتمال	دري ځله: خط	دري ځله: احتمال	څلورځله: خط	څلورځله: احتمال
د خط د راتګ شمېر	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{16}$
			1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{4}{16}$
					2	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{6}{16}$
							3	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{4}{16}$
									4	$\frac{1}{16}$

که چیرې جدول ته په ځیر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدونو ثابت غړي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راوپېژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادېږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کیڼې او ښي خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر بینهایت پورې دوام ورکړو، چې که چیرې هغوی د یو دوه جمله‌یي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه د راکړل شوي پاسکال مثلث عددونه دي؛ مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

جمله‌يي په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه ترې تاوشوې ده یو شان ده:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^3$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

چې دغه ضریبونه د $(a+b)^n$ په انکشاف کې n د k له پاسه د ضریبونو استعمال په لاندې ډول لیکلی‌شو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د " $\sum$ " علامه د پاسنی مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په k– امه مرتبه کې عبارت دی له: $P(\text{خط راتگ}) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$

پوښتنې

1. **د فوټبال په یوه سیالی کې 12 ټیمونه ګډون لري، په څو ډوله کولای شو ګټونکي لومړی، دویم او دریم مقام ته وټاکو.**
2. **د یوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولګي د استازي او د استازي د مرستیال په توګه وټاکو.**

د بینوم قضیه

د پاسکال د مثلث له مخې د بینوم د انکشاف ضریبونه وټاکئ.

$$(a+b)^2 = \bigcirc a^2 + \bigcirc ab + \bigcirc b^2$$
$$(a+b)^3 = \bigcirc a^3 + \bigcirc a^2b + \bigcirc ab^2 + \bigcirc b^3$$
$$(a+b)^4 = \bigcirc a^4 + \bigcirc a^3b + \bigcirc a^2b^2 + \bigcirc ab^3 + \bigcirc b^4$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

فعالیت

- په یوه ناڅاپي تجربه کې چې یوازې دوه ناڅاپي پېښې د A او $\overline{A}$ پېښېږي، یعنې د $\{A,\overline{A}\}$ نمونوي فضا لري. د A د پېښې احتمال عبارت دی له:
- که چیرې $P(A)=P$ د A د پېښې احتمال وي، د هغې د مکمله پېښې احتمال یعنې $\overline{A}$ څو دی $P(\overline{A})=?$
- د پورتنۍ تجربې له بیا بیا تکرار څخه که چیرې د A حادثې پېښېدو ته 1 او د نه پېښېدو حالت ته یې 0 ووایو لاندې جدول د تجربې د بیا بیا تکرار یعنې $n=2$ لپاره بشپړ کړئ.

k	ممکنې پایلې	احتمال	د بینوم د ضریبونو ارایه
0		$(1-p)^2$	$\binom{2}{0}.p^0.(1-p)^2$
1	10	$2p(1-p)$	
2	11		$\binom{2}{2}p^2(1-p)^2$
		$(p+(1-p))^2$	$\sum\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=?$

د بینوم د حدونو د انکشاف مجموع یعنې $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ پیدا کړئ؟

له پورتنې فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه ناځاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غړي یې په مساوي احتمال په تجربه کې بیابیا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په n ځله تکرارکې د بینوم د انکشاف k – ام حدکې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه یادېږي او لیکو:

$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ سره کېږي.

مثال: له n تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناځاپي ډول ټاکو، د k تنو انتخاب شوو خلکو له جملې څخه 2 تنه ټاکو، پیداکړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي. $P(k\le n)=?$

حل: په دې ډول د Ω په نمونه‌یي فضاکې داسې فرضوو چې د هرې ورځې احتمال $\frac{1}{365}$ او د زېږېدنې ورځ د سوال وړ ده نه، د زېږېدنې کال.

په دې ډول Ω په نمونه‌یي فضاکې ټول امکانات له 365 ورځونه څخه د k شمېر لپاره عبارت دی له:

$|\Omega|=(365)^k$

په دې ډول اوس که چیرې د A ناځاپي پېښه چې لږترلږه دوه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د A د حادثې مکمله په پام کې نیسو، په دې ډول $\overline{A}$ عبارت له هغې ناځاپي پېښې څخه ده چې k تنه په بېلابېلو ورځو کې زېږېدلي دي. په دې ډول $\overline{A}$ عبارت د k پرموټېشن له 365 څخه ده چې لرو: $P(\overline{A})=(365,k)=\frac{365!}{(365-k)!}$

په دې ډول: $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{|\overline{A}|}{|\Omega|}=1-(365,k)=1-\frac{365!}{(365-k)!}\cdot\frac{1}{(365)^k}$

پوښتنې

وښیئ چې:

$(I)\qquad \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

$(II)\qquad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

دوه جمله يي احتمال

آيا کولای شو چې د هرې نمونه‌يي فضا پايلې په دوه ناخاپي پېښو چې له يو بل سره هيڅ ګډ عنصر نه‌لري، ترتيب کړو.
موضوع د سټ د تيوري له مخې په يوه اختياري نمونه‌يي فضا کې، دوه ناخاپي پېښو ته چې اتحاد يې نمونه‌يي فضاوې په مثال کې يې تشريح کړې.

فعاليت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه يې پېژنئ يا دونه وکړئ او يوه نمونه‌يي فضا د دوه اتفاقي يا ناخاپي پېښو په اړه چې ټوله نمونه‌يي فضا يې يوازې دوه غړي ولري.
- آيا هغه ناخاپي تجربې چې نمونه‌يي فضاګانې يې له 2 څخه زيات غړي لري. کولای شو په داسې نمونه‌يي فضاګانو واړوو چې يوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
- په عمومي ډول څه ډول کولای شو چې يوه نمونه‌يي فضا چې ډير غړي لري، په يوه داسې نمونه‌يي فضا چې 2 غړي لري، واړوو؟
- که چيرې د دا ډول فضاګانو د يو غړي د پيښې احتمال p وي، د بلې پيښې د احتمال قيمت به څو وي؟
- که چيرې تجربه n ځلې سرته ورسوو، او د k په شمير له n ځلې ($0 \le k \le n$) ورل او نور يې بايلودل وي، د k ځلې بریالیتوب (P) په n ځلې تکرار کې پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: د هرې ناخاپي تجربې نمونه‌يي فضا کولای شو چې په داسې يوې نمونه‌وي فضا واړوو چې دوه غړي ولري.

– که چيرې د دا ډول نمونه‌وي فضا د يو غړي احتمال (P) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال $1-p$ او بايلل دي.

– که چيرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د k – ام ځلي ورل په n ځلې تکرار کې او د بايللو احتمال به $q = 1-p$ سره دي، يعنې لرو چې:

$$k_{\text{،}}\ \text{– ام ځلي ورل په n ځلې تکرار کې} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

لومړی مثال: پاملرنه وکړئ چې که چيرې په يوه تجربه کې د ورلو احتمال $\frac{1}{2}$، د بايللو احتمال هم مساوي په $\frac{1}{2}$ سره وي، په دې ډول ناځاپي پيښو کې پورتنی اړيکه په لاندې ډول حسابېږي:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^k.(1-\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنی پايله د يوې تجربې په n ځله تکرار کې چې له هغې جملې څخه k ځلې يې ورل وي، يوې دوه عنصره نمونه‌يي فضا ته وځيرئ؟

دويم مثال: په يو 5 اولاده فاميل کې، د دې احتمال چې له اولادونو څخه 2 تنه هلکان او پاتې نجونې وي، څو دی؟

حل: که چيرې د اولادونو د هلك او نجلی زيږد برابر په پام کې ونيسو لرو چې:

څرنګه چې په دې مثال کې $p=\frac{1}{2}$ او $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ سره دی، نو ليکلای شو:

$$=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}=0.3125=31.25\%$$ د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نجونې وي.

دريم مثال: د رمل يوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پيدا کړئ چې په 4 ځلې غورځيدو کې راغلي خالونه له دريو څخه لږ وي؟

حل: که چيرې له 3 څخه لږ راتلل حالت ورل په پام کې ونيسو؛ نو:

$$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$

$$q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$

(د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لږ وي)$=\binom{6}{4}.\left(\frac{1}{3}\right)^4.\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}=0.0823=8.23\%$

څلورم مثال: یوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلو احتمال یې مساوي په $\frac{1}{3}$ وي، که چیرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شېر راشي، مطلوب دی.

حل: که چیرې د سکې د خط راتللو حالت ته وړل او احتمال یې p په پام کې ونیسو، نو د خط د نه راتللو یا شېر راتګ مساوي په $1-p$ سره دی؛ یعنې: $1-p=\frac{1}{3}p$

له دې څخه $p=\frac{3}{4}$ او $q=\frac{1}{4}$ په لاس راځي:

$$\left\langle \begin{array}{c}\text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدوکې}\\ \text{لږ تر لږه 3 ځله شېر راشي.}\end{array} \right\rangle = \binom{4}{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{\text{3ځلې شېر}}\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{1 ځل خط}}+\binom{4}{4}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\text{4 ځلې شېر}}=\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال یې له 0.99 څخه ډېر وي؟

حل: داسې فرضوو چې سکه n ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږتر لږه یو ځل سکه خط راشي مساوي ده په:

(د هر n ځلې شیر راتګ احتمال) $-1=$ دی، لږ تر لږه یو ځل خط راتلو احتمال

$$=1-\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

په دې ډول ددې شرط $1-\frac{1}{2^n}>0.99$ یا $\frac{1}{2^n}<0.01$ سره دی چې $2^n>100$ یا $n\geq 7$ سره کېږي.

په دې ډول باید سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږتر لږه یو ځل خط راشي، احتمال به یې له 0.99 څخه لوی وي.

پوښتنې

یوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پیداکړې چې:

(i): په 4 ځله غورځیدو کې، 2 ځلې خط راشي.

(ii): په 6 ځله غورځیدلې، 3 ځلې خط راشي

(iii): په 8 ځله غور ځیدو کې، 4 ځلې خط راشي.

(iv): فکر وکړئ چې که سکه $2n$ ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشي، د n په ډېریدو، د p بدلون په څه ډول دی؟

د خپرکي مهم ټکي

فکتوریل: د هر طبیعي n عدد لپاره د $1\cdot2\cdot3\cdot\ \dots\ \cdot n$ د ضرب حاصل په لنډ ډول په $n!$ (n فکتوریل) ښودل کېږي، د تعریف له مخې $0!=1$ سره دی.

پرموټېشن یا ترتیب: د n غړو ترتیب په p_n ښودل کېږي که چیرې:

- په ترتیب کې تکرار مجاز او ممکن نه وي: $P_n=n!$

خو که چیرې تکرار مجاز وي، د ترتیبونو شمېر مساوي په P_k^n سره ده او داسې معنا ورکوي چې k ځلې په n ځلې ترتیبونو کې تکرار وجود لري. چې د پورتني حالت په پام کې نیولو سره ټول حالتونه مساوي دي په:

$$P_k^n=\frac{n!}{k!}\quad,\quad k\le n$$

$\binom{n}{k}$ د n, k **له پاسه**: د $\binom{n}{k}$ د n, k له پاسه، د بینوم هغه ضریبونه دي چې k د بینوم د توان په ټاکلو سره، د ضریبونو لپاره داسې صورت نیسي:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\ ،\ n,k\in IN\ ،\ 0\le k\le n$$

- له n شیانو څخه د r شیانو ترکیبونه په:

$$C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\quad ،\quad r\le n$$

وریشن یا تبدیلونه: په ترتیبونو کې چې پر له پسې ترتیب د k انتخابي غړو له n غړو څخه مطلوب وي، په نامه دی، n په k بدیلونو یاد او لیکو:

$$V_k^n=k!\cdot C_k^n=k!\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}$$

دبینوم قضیه: د $(a+b)^n$ دو جمله‌یي انکشاف عبارت دی له:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$$

د یوې تجربې په n ځلې تکرار کې، چې هر حالت یې p او د $q=1-p$ احتمال لري.

د $k-$ام ځلې ورلو یعنې p له n ځلې څخه او نور پاتې حالتونه چې بایلول ګڼل کېږي؛ یعنې $q=1-p$ سره دي او صورت نیسي:

$$\left\langle \text{د k ځلې ورلو د احتمال قیمت د تجربې د n ځلې په پای کې} \right\rangle=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\ ،\ 0\le k\le n$$

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونيسئ:

$$S=\{0,1,2,3,4,5,6\}$$

(i): په څو ډوله کولای شو له پاسنيو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

(ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په يوه کتار کې څنګ په څنګ درېدلی شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبير، ياسر، هنزله او خبيب کولای شي، په يو کتار کې خوا په خوا د يو يادګاري تصوير د اخېستلو لپاره ودرېږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 ګروپونو ووېشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a+b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟