# شمیر پوهنه

## (ریاضي)

### ستر کتاب

Ketabton.com

لومړی برخه

دویم غځېدلی چاپ

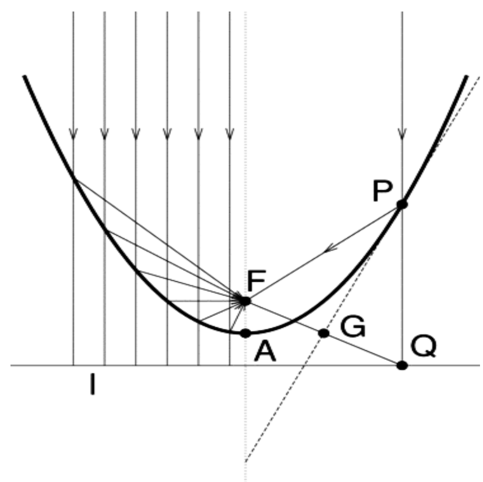
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میرې) شینواري

ketabton.com - The Digital Library

# شمیرپوهنه

(ریاضي)

# سترکتاب




دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرې شینواري

ketabton.com - The Digital Library

## دلوي ښښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

## کتاب پېژندنه

د کتاب نوم: د شمیرپوهنه ستر کتاب( لومړی برخ)

لیکونکی: ډاکتر ماخان،، میری،، شینواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپریدو لړۍ

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

## چاپ چارې

دانش خپرندویې ټولنې تخنیکې څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې لیکونکي یا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

ketabton.com - The Digital Library

## د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیوادولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

ketabton.com - The Digital Library

# د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي ډپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي ډپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترمانوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي ډپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنير او ډپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر ځانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپيرۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

ketabton.com - The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

| | | |
|---|---|---|
| ۱ ۰ | د شمیرپوهنې سم اند یا منطق | ۱ |
| ۱ ۰ ۱ | پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه | ۱ |
| ۱ ۰ ۲ | د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې | ۳ |
| ۱ ۰ ۳ ۰ ۱ | ثابتې ، اووښتوني یا واریابلې ، ترمونه | ۳ |
| ۱ ۰ ۲ ۰ ۲ | وینا | ۵ |
| ۱ ۰ ۲ ۰ ۳ | د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینخیپ | ۷ |
| ۱ ۰ ٤ | وینا فورم یا ۰بڼه او کوانتورونه | ۱۳ |
| ۱ ۰ ۵ | اړیین او پوره کیدونکي شرطونه | ۲۸ |
| ۱ ۰ ٦ | د شمیرکلیمه یا د لغاتو ............ | ۳۱ |
| ۱ ۰ ۷ | برابرون او نابرابرون | ۳۳ |
| ۱ . ۸ | تمرینونه | ۳۸ |
| ۲ ۰ | ډیر ئ پوهنه | ۳۹ |
| ۲ ۰ ۱ | د ډیرئ پوهنې کلیمه | ۴۰ |
| ۲ . ۲ | د ډېریو ترمنځ اړیکې | ۴۵ |

ketabton.com - The Digital Library

| | | |
|---|---|---|
| | برخه‌ېری | ۴۶ |
| | د یوې ډېرۍ توان یا تواندېری (توانسټ) | ۴۸ |
| ۲ ۰ ۳ | په ډیرۍ کې کارونې یا عملیې(۱) | ۵۰ |
| | غوڅه‌ېری یا متقاطعه‌ېری | ۵۲ |
| | د یوې ډېرۍ یا سټ کمپلیمنټ | ۵۷ |
| ۲ ۰ ٤ | ځیرونه | ۵۸ |
| | تمرینونه | ۶۷ |
| ۳ ۰ | د رییل ګڼونو سره د شمیرلو بنسټیزې... | ۷۰ |
| ۳ ۰ ۱ | د ګڼونو- یا اعدادو سیستم جوړښت | ۷۰ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ | پیداینتي یا طبیعي ګڼونه | ۷۰ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ الف | د پیداینت یا طبیعي ګڼونو جوړښت | ۷۱ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ب | د پیداینت ګڼونو انځورونه او شمیرنه | ۷۲ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ پ | د شمیرنې بنسټیز قوان ین | ۷۸ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ | ټولګڼونه | ۸۴ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ | الف د ویش تیوري | ۸۶ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب | غټ ګډ پرویشونی(بزګترین مقسوم علیه ...) | ۸۸ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۳ | راشنلګڼونه | ۱۰۶ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ٤ | رییلګڼونه | ۱۰۸ |
| ۳ ۰ ۲ ۰ ۱ | ماتشمیرنه | ۱۱۹ |

ketabton.com - The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| ۳ . ۳ | تمرینونه | ۱۳۰ |
| ٤ ۰ | پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر | ۱۴۱ |
| ٤ ۰ ۱ | توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت | ۱۴۱ |
| ٤ ۰ ۲ | ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره | ۱۴۴ |
| ٤ ۰ ۳ | توان د ریيلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره | ۱۵۱ |
| ٤ ۰ ٤ | ټولګه | ۱۵۲ |
| ۵ ۰ | لوګاریتم | ۱۵۸ |
| ۵ ۰ ۱ | د لوګاریتم کلیمه | ۱۵۸ |
| ۵ ۰ ۳ | ټولګه | ۱۶۶ |
| ٦ ۰ | ګونومتري | ۱۶۹ |
| ٦ ۰ ۱ | بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه | ۱۶۹ |
| ٦ ۰ ۱ ۰ ۱ | ټکی او کرښه | ۱۶۹ |
| ٦ ۰ ۱ ۰ ۲ | کونج | ۱۷۱ |
| ٦ ۰ ۱ ۰ ۳ | درېګوډۍ | ۱۷۴ |
| ٤ ۰ ۱ ۰ ٤ | کونکروانیځ او ورته والی | ۱۷۸ |
| ٦۰ ۱ ۰ ۵ | ولاړکونجیز دریګوډۍ | ۱۸۴ |
| ٦ ۰ ۲ | په ولاړکونجیز دریګوډۍ کې د ... | ۱۸۸ |
| ٦ ۰ ۳ | په یوونګردۍ کې د کونج بلواک .. | ۱۹۰ |
| ٦ ۰ ٤ | د ساین او کوساین جملې | ۱۹۵ |

ketabton.com - The Digital Library

| | | |
|---|---|---|
| ٦ ۰ ٥ | تریګنومتریکي کتمتوالی | ۲۰۵ |
| ۶ . ۵ | تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه | ۲۱۵ |
| ۰۷ | کمپلکس ګنونه | ۲۲۲ |
| ۰۸ | د ښووني یا ثبوت متودونه | ۲۳۵ |
| ۸ ۰ ۱ | سیده ښوونه | ۲۳۵ |
| ۸ . ۲ | ناسیده ښوونه | ۲۳۷ |
| ۸ ۰ ۳ | د پوره ایندکشن له لارې ښوونه | ۲۳۹ |
| ۹ | لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ... | ۲۴۳ |
| ۱۰۹ | لاینیز برابرون | ۲۴۴ |
| ۱۰ | کومبیناترویک، د بینوم جمله | ۲۶۶ |
| ۱۰ ۰ ۱ | فاکولتیت یا فاکتوریل | ۲۶۶ |
| ۱۰ ۰ ۲ | د بینوم ځله ونه | ۲۶۷ |
| ۱۰ ۰ ۳ | د بینوم جمله | ۲۷۰ |
| ۱۰ ۰ ٤ | کومبیناتوریک | ۲۷۴ |
| ۱۰ ۰ ٤ ۰ ۱ | پرموتیشن | ۲۷۵ |
| ۱۰ ۰ ٤ ۰ ۲ | واریيشن | ۲۸۰ |
| ۱۰ ۰ ٤ ۰ ۳ | کمبینیشن | ۲۸۶ |
| ۱۰ ۰ ٤ ۰ ٤ | د پرموتیشن، واریيشن او .... | ۲۹۱ |
| ۱۱ ۰ | لانیز الجبري برابرونونه | ۲۹۵ |

ketabton.com - The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| ١١ ٠ ١ | لانيز برابرون له دوه اوړيدونو يا ... | ٢٩٦ |
| ١١ ٠ ١ ٠ ٣ | دويمه درجه ديترمينانت او د كرامر... | ٣٠٧ |
| ١١ ٠ ١ ٠ ٤ | د گاوس الگوريتم | ٣١٢ |
| ١١ ٠ ١ ٠ ٥ | له دوه وو زيات برابرونونه له دوه ... | ٣١٦ |
| ١١ ٠ ٢ | لاينيز برابرونونه له درې .... | ٣١٧ |
| ١١ ٠ ٢ ٠ ١ | يو برابرون له درې ناپيژندونو سره | ٣١٧ |
| ١١ ٠ ٢ ٠ ٢ | دوه برابرونونه له درې ... | ٣١٨ |
| ١١ ٠ ٢ ٠ ٣ | دريمه درجه ديترمينانت او د ... | ٣١٩ |
| ١١ . ٢ . ۴ | د گاوس لگوريتم | ٣٢٢ |
| ١١ ٠ ٣ | په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ... | ٣٢٥ |
| ١١ ٠ ٣ ٠ ١ | د n -م درجې ديترمينانت او د ... | ٣٢٦ |
| ١١ ٠ ٣ ٠ ٢ | د گاوس الگوريتم | ٣٢٨ |
| | تمرنونه | ٣٣٣ |
| ١٢ | الجبري برابرونونه | ٣۴٠ |
| ١٢ ٠ ١ | نالاينيز برابرونونه | ٣۴٠ |
| ١٢ ٠ ٢ | څلورئ ئيز يا مربع برابرونونه | ٣۴٣ |
| ١٢ ٠٢ . ١ | د دوه په جگ برابرونونه ، د وييتا جمله | |
| ١٢ ٠ ٢ ٠ ٢ | څلورئ برابرونونه ، چې په نورمال | ٣٥٠ |
| ١٢ ٠ ٢ ٠ ٣ | د n -م درجې ځانگړي برابرو... | ٣٥١ |

ketabton.com - The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| ۳ . ۱۲ | دريمه درجه برابرونونه | ۳۵۷ |
| ٤ . ۱۲ | د ريښي برابرونونه | |
| ۱۳ | ترانسڅيندنت برابرونونه | ۳۷۵ |
| ۱ . ۱۳ | لوګاريتم برابرونونه | ۳۷۵ |
| ۲ . ۱۳ | اکسپوننشل- يا په جګګڼ برابرونونه | ۳۸۰ |
| ۳ . ۱۳ | ګونومتريکي يا کنجکچيز برابرونونه | ۳۸۵ |
| ۱٤ | له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت .. | ۳۹۶ |
| ۱ . ۱٤ | نابرابرونونه | ۳۹۶ |
| ۱ . ۱ . ۱٤ | بنسټيزې کليمې او شمير قوانين | |
| ۱ . ۱٤ الف | اينتروال | ۳۹۷ |
| ۲ . ۱ . ۱٤ | نابرابرونونه له يوې ناپيژندونکی... | ۴۰۰ |
| ۳ . ۱ . ۱٤ | د نابرابرونونو سيستم ... | ۴۰۹ |
| ٤ . ۱ . ۱٤ | نابرابرونونه له دوه ناپيژندونکو سره | ۴۱۱ |
| ۲ . ۱٤ | برابرونونه او نابرابرونونه .... | ۴۱۴ |
| ۱ . ۲ . ۱٤ | له مطلقه ارزښت سره شميرنه | ۴۱۴ |
| ۲ . ۲ . ۱٤ | برابرونونه له مطلقه ارزښت سره | ۴۱۵ |
| ۳ . ۲ . ۱٤ | نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره | ۴۲۰ |
| ۱۵ | بلواک يا  فنکشنونه  يا طابع | ۴۳۰ |
| ۱ . ۱۵ | د بلواک کليمه او د بلواک انځورونه | ۴۳۰ |

ketabton.com - The Digital Library

۲۰۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

## د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶
۱۰۱٦ کربښه ۴۶۶
۲۰۱٦ گردۍ ۴۷۵
۳۰۱٦ ایلیپسې ۴۸۲
٤۰۱٦ هیوپربول ۴۸۷
٥۰۱٦ پارابول ۴۹۲
٦۰۱٦ ټولگه ۴۹۴
۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲
۱۰۱۷ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲
په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲
۲۰۱۷ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹
۳۰۱۷ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲
٤۰۱۷ غبرگهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷
٥۰۱۷ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....
۱۰٥۰۱۷ د یوې کربښې وکتوري انځورونه ۵۲۱
۲۰٥۰۱۷ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴
٥۰۱۷ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

ketabton.com - The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| ۱۸ | پرلپسې او پرلپسې لړۍ | ۵۳۳ |
| ۱۸ ۰ ۱ | پیل | ۵۳۳ |
| ۱۸ ۰ ۲ | د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه | ۵۳۴ |
| ۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱ | مونوتوني پرلپسې | ۵۴۲ |
| ۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲ | اریتمیتیکي پرلپسې | ۵۴۵ |
| ۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳ | هندسي پرلپسې | ۵۴۷ |
| ۱۸ ۰ ۲الف | لړۍ | ۵۵۰ |
| ۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱ | هندسي لړی | ۵۵۵ |
| ۱۸ ۰ ۲ الف ۲ | اریتمیتیکي لړۍ | ۵۵۷ |
| ۱۸ ۰ ٤ | د پرلپسې او لړیو د پولې ... | ۵۵۸ |
| ۱۹ | د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه | ۵۷۸ |
| ۱۹ ۰ ۱ | بنسټیزې کلیمې | |
| | د پولو یا حدونو خویونه | ۵۸۶ |
| | د راشنل، کسري یا نسبتي | ۵۹۲ |
| | د مثلثاتي یا درېکوڼي کچ توابعو پولې | ۵۹۶ |
| | ناپرېکیدنې | ۶۰۴ |
| ۱۹ ۰ ۲ | په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې | |
| ۱۹ ۰ ۳ | د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه | ۶۱۰ |
| ۱۹ ۰ ٤ | د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه | |

ketabton.com - The Digital Library


د ښپرکي ټولګه ۶۱۶

۲۰ دفرنښيالشميرنه ۶۲۶

د تابع تغيرمنځ ارزښت(منځنی قيمت) ۶۲۶

په يوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸

د لحضوی(سترګورپ) تغير... ۶۳۰

کمښتوېش ( تقسيم تفاضل؟) ۶۳۱

دفرنشلوېش يا رابيليدنه يا مشتق ۶۳۳

کمښتوېش او مشتق يا رابيليدنه ۶۳۶

د $x_o$ په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳

د تانجنت پيژند او خويونه ۶۴۷

د تانجنت او عمود يا ولاړ ټوليز مساوات ۶۵۰

په بيديا کې جګوالی ۶۵۲

۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت يا جګيدنې غوره والی

۲ ۰ ۲۰ د فرنښيال يا رابيليدنې يا مشتق قاعدې ۶۵۶

د درېګوډيزو يا مثلثاتي ..... ۶۶۲

د اکسپوننشل يا په جګ توابعو.... ۶۷۰

د مشتق استعمال په طبيعي پوهن کې ۶۷۶

د ايمپليښيت توابعو مشتف ۶۸۳

د بنسټيزو رابيليدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

ketabton.com - The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| | ټولګه | ۶۸۸ |
| | د يوې تابع د مشتق قابليت | ۶۹۱ |
| | د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق | ۶۹۸ |
| ۲۰ .۳ | د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه | ۷۰۱ |
| | د رول قضيه | ۷۱۰ |
| | د وايرشتراس قضيه | ۷۱۱ |
| ۲۰ .۰٤ | افراطي ارزښتونه او اوړونټکی | |
| | د دفرنشل منځ ارزښت قضيه | ۷۱۲ |
| | يوعېريزې توابع | ۷۱۵ |
| | ځای اړوند افراطي ټکي | ۷۲۰ |
| | د انعطاف – يا اوړونټکی | ۷۲۴ |
| | د کوې يا منحني بحث يا خبرې | ۷۳۳ |
| | ناټاکلي حدونه يا پولې | ۷۴۶ |
| | د برنولي او د لو پيتال .... | ۷۵۰ |
| ۲۰ ۰ ۵ | د غتو ګټو پرابلم | ۷۵۷ |
| | تمرينونه | ۷۶۷ |
| | په ټوټه کسرونو ټوټه کونه | ۷۷۸ |
| ۲۱ | انتيګرالشميرنه | ۷۸۷ |
| | پيلراوړنه | ۷۸۷ |

ketabton.com - The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| ۲۱ | انتیګرالشمیرنه | ۷۸۹ |
| | د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال | ۷۹۰ |
| | بنستیزه یا لومړنی تابع | ۷۹۴ |
| | سطحه او لومړنی تابع | ۷۹۶ |
| | ناټاکلی انتیګرال | ۷۹۹ |
| | د ټاکلي انتیګرال شمیرنه | ۸۱۲ |
| | تکمیلیدونکي بنسټونه | ۸۱۴ |
| | د ټاکلي انتیګرال ځخه و ټاکلي ... | ۸۱۵ |
| | د انتیګرالوني قاعدې | ۸۱۷ |
| | د اکسپوننشل توابعو انتیګرال | ۸۱۹ |
| | د لوګاریتمي توابعو انتیګرال | ۸۱۹ |
| | بدلون قانون | ۸۲۱ |
| | توابع، چې بې د بدلون له لارې... | ۸۲۷ |
| | ټوټه انتیګرالونه | ۸۳۲ |
| | د ټوټه انتیګرالوني لار | ۸۳۴ |
| | د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال | ۸۳۸ |
| | ناپای(مبهم) انتیګرال | ۸۴۱ |
| | د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې | ۸۵۲ |
| | د انتیګرالشمیرنې استعمال | ۸۶۲ |

ketabton.com - The Digital Library



د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

ketabton.com - The Digital Library

# د مهربان او بخښونکی خدای(ج) په نامه

## سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چي پیل لري نو پاي هم باید ولري، د داسی یوه کار پیل او پای ته ځما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چی مړښت یی زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چی په یوه کار پیل وکړي، څکه چی سملاسی ورته څرګندیږي، چی په هیڅ شي کی څموږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوي په جوړښتیزه لور، په وراتی کی مو د نړی سرکښي ځانته ګټلی.
موږ ګورو چی په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چی تراوسه حتی هغه بنستیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چی مسلك ته اسانتیاوې پیښوي. له کومه ځاي چی ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او ستتونځي یي نه دي ګاللي، چی دلته طبعآ افراد ملامت نه دې، بلکه څموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنی او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودې دنده د حکومتونو ده، چي څموږ په هیواد کی څموږ حکومتونو خپل ځانونه د دې کار جوګه نه دې ګڼلي، کیدی شي چی ووایو چي په ریښتیني یي ددې کار مخه هم نیولی ده، چی په افغاني ژزبه دې څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار څکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چی زه په مسلکي اړخ کی یواځي، په علمي توګه په الماني ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

ketabton.com - The Digital Library



نومونه چې له دې دباندنيو ژبو را اړووم ، داچي په ښوونځي کي ځما ليك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنيزه توګه اړولی شم. ماته دا کليمي په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومی او يا کومي چي ماته معلومی دي او زه ورسره بلد يم هغه همغه وخت ماته د پوهيدلو له امله د ستونځو ډکی ښکاريدلی .

شمير پوهنه هم، د نورو پوهنو په څير، يوه پراخه پوهنه ده او زياتی ځانګکی لري. دا چي ځما په فکر دا متآسفانه نه يواځي زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبی په دې توګه يو لمړی علمي اثر دی، چي په دې بنستيزه توګه په درسي او تمرينی ډول سرته رسيږي.

نن نړی او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتياوده کوي، چي پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنستيزو ستوځوبيو ( د ستونځو حل باندې ) پيل نه دی کړی ، که دا په هره ځانګه کی هم وي. ځموږ پرابلمونه هراړخيز دي او هراخيزو هڅو ته مو ضرورت شته.

## شميرپوهنه څه شی دی ؟

شميرپوهنه يو مرستندويه پوهنه ده، چي په ټولو پوهنو کی تغبنتي يا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کی د پوهيدلو بنستيزه رينبه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعی ( پيداينبتی ) يعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کيميا وي يا فزيك، بيله شمير پوهنی يی وده او په پوهيدنه ناشونی ده. شميرپوهنه له بلی خوا يواځنی خپلواکه پوهنه هم ده. شمير پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب ليکلو زما زيات وخت په بر کی ونيوه او ليکل يی د پوره ستونځو سره

ketabton.com - The Digital Library



ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متأسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسې یوه کتاب لیکنې مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسې لیکنې څخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چې څموږ د هیواد ستنځي نوږې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چې خپلې د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم
-د لیکونکې راهڅونې دلیلونه یا د شوق رابیدارول
-دداسې کتاب لیکنه په هغه وخت کې شوني کیږي، چې د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنې د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یې هم نه لرم چې پیسې وګتم.

– وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چې له دې د مخه مې په سیاسي هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس مې خپل مسلك ته رامخه شوه.

– ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلې ټولنې او د خپلې ټولنې د خلکو سره مینه ولرې او په همدې ډول، د خپلې ټولنې او د ټولنې د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چې یوائې د خوبونو رېښتیا کولو لپاره په داسې کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځې په پوره مینه په غاړ واخستلې او دا کار مې په پوره مینه سر ته ورساوه.
-په دې برسیره لیکونکې دې وظیفې ته هم باید شعوري وي، چې دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسې لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

ketabton.com - The Digital Library



په کور کې هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنې یو غبرګوالی باید په کورنۍ کې وي، که داسې هم نه وي ، خو د داسې کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیبو ( ستونځو حل ) په خاطر، چې مونږ افغانان یې په ځانګړې توګه اقتصادی اړخ کې پوره لرو، چې نه یواځې د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کې ددې امله نه کوته چې امکانات یې ځما لپاره نه وو.

## دوم : د کتاب د لیکنو ستونځې:

د داسې کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چې زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

١ - دا کتاب په داسې ژبه لیکل کیږي چې له مرۍ څخه نیول شوې، زیندۍ شوې، خپه شوې، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځې په غرو او رغو کې ژوندۍ پاتې شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چې دا کرښې دا مطلب نه لري، چې ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلې ژبې په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چې خپلې ژبې، د خپل ولس ژبې ته ، چې کړیدلې او وروسته پاتې ساتل شوې، ګوته ونیسم. مونږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پریښوولې چې ولس یعنې د یوه هیواد د ژبې دپریښوولو حق څوک نه لري، نه دولت او نه افراد . دا کار متاسفانه د افغاني ژبې په ضد او بیا د ټولو په سر کې پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوک باید ګیله من نه وي.
افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چې یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشي یا بهتره پوهنیزه شي.

ketabton.com - The Digital Library



ژبه یواځې د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کې پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لاربنودې او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهې د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبې پرمخوده یو بل باندې سیده او په ځټ اغیز من دي، چې ولس وروسته پاتې وي، ژبه یې وروسته پاتې ده او که یوه ژبه وروسته پاتې وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد ځان کې نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چې کم له کمه بنسټیزې کلیمې په افغاني واړوم، چې دا کار مې په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله مې زیات فکر هم په کار اچولی چې مسلکي بنسټیزې کلیمې په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چې ټاکل شوي، داسې نومونه دي، چې د هغه شي ماهیت په کې روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چې په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.

په پوهنه کې له بلې ژبې تیریدنه ناشونې ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چې افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځې هلته کیږي، چې یوه ژبه له پوهنې وروسته پاتې وي. د پوهنیزې ودې سره ژبې ته د نورو ژبو لغات راننوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چې که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهانی مروجه لغاتو ولیکم.

دا چې افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم ژوندۍ شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبې ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبې د ژوندۍ څخه خلاسون یا د افغاني ژبې څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغې باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

ketabton.com - The Digital Library



د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوك د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسې یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.

دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولي، چې هغه مې په ټول کتاب کې شاید اصلاح کړې نه وي، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځې نه پیښوي لکه د بیلګې په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلې وه، چې وروسته مې شمیر پوهنې بانديې واړوله، شاید په ټولو ځایونو کې مې نه وي شمیرپوهنه کړي. دربهګوډې ما لمړی دریکونجی لیکلی وو، چې دا هم شاید د کتاب په اوږدوکې نه وي اصلاح شوی، داسې نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چې د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځې ه پیښوي.

۲ – تخنیکي ستونځې:

د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځي، چې څمور لپاره د داسې کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکي ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودي، نو له دې امله مې د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته مې سریښ کړې، چې کله کېږې هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چې دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکې او چاپوونکې به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښې څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطی به شوي وي،، خو په پوهیدلو کې به ستونځې پیښې نه کړي، د هغې بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.

ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

ketabton.com - The Digital Library



حرکت کی برکت ایښوولی دی.
لنډه دا، چی ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملګرو په فشار ما ، څما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

## دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیدایښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
څنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

## څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنستیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځای کړم.
ما د بنستیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند ( لنډ سمند ) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي ځیړل شوی.
څما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

ketabton.com - The Digital Library



اومه اتمه او نهمه برخه څمور په هیواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیري پوهی سره اشناییته هم خورا ضرور ده

شپږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کي د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی »دوستانو. زه له دي د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.

ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراګټوره مشوره هم راکړې.

زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاتړ کاوه، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یی کله کله ویل، چی ګوندې پیسی می باید ګټلی وی ، خو په دې پوهیږي، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنګه شوه نو ویل به یي چی نور دا د چرګانو ټونګي باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن ښاپیری څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی ښه تکړه ورته د لوي خداي(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

ketabton.com - The Digital Library



المان د پنځم ټولګی ښخه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی ترلی چاپ ته ورکړي شي.
زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.
که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په څانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. ځما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو.
له ما ښخه لټ بل ځوک نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

ketabton.com - The Digital Library



## افغاني ، يوناني او الماني الف بی

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ا | ب | پ | ت | ټ | ث | ج | چ |
| څ | ځ | ځ | ح | خ | د | ډ | ذ |
| ر | ړ | ز | ژ | ږ | ص | ض | ط |
| ظ | ع | غ | ف | ك | ګ | ق | ل |
| م | ن | و | ه | ي | ی | ې | ئ ۍ |

### يوناني الف بی

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Α | α | *Α* | *α* | Alpha |
| Β | β | *Β* | *β* | Beta |
| Γ | γ | *Γ* | *γ* | Gamma |
| Δ | δ | *Δ* | *δ* | Delta |
| Ε | ε | *Ε* | *ε* | Epsilon |
| Ζ | ζ | *Ζ* | *ζ* | Zeta |
| Η | η | *Η* | *η* | Eta |
| Θ | ϑ | *Θ* | *ϑ* | Theta |
| Ι | ι | *Ι* | *ι* | Iota |
| Κ | κ | *Κ* | *ϰ* | Kappa |
| Λ | λ | *Λ* | *λ* | Lambda |
| Μ | μ | *Μ* | *μ* | My |
| Ν | ν | *Ν* | *ν* | Ny |
| Ξ | ξ | *Ξ* | *ξ* | Xi |
| Ο | ο | *Ο* | *ο* | Omikron |
| Π | π | *Π* | *π* | Pi |
| Ρ | ρ | *Ρ* | *ϱ* | Rho |
| Σ | σ | *Σ* | *σ* | Sigma |
| Τ | τ | *Τ* | *τ* | Tau |
| Υ | υ | *Υ* | *υ* | Ypsilon |
| Φ | φ | *Φ* | *φ* | Phi |
| Χ | χ | *Χ* | *χ* | Chi |
| Ψ | ψ | *Ψ* | *ψ* | Psi |
| Ω | ω | *Ω* | *ω* | Omega |

### الماني الف بي

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | a | A | a | 𝔄 | 𝔞 |
| B | b | B | b | 𝔅 | 𝔟 |
| C | c | C | c | ℭ | 𝔠 |
| D | d | D | d | 𝔇 | 𝔡 |
| E | e | E | e | 𝔈 | 𝔢 |
| F | f | F | f | 𝔉 | 𝔣 |
| G | g | G | g | 𝔊 | 𝔤 |
| H | h | H | h | ℌ | 𝔥 |
| I | i | I | i | ℑ | 𝔦 |
| J | j | J | j | 𝔍 | 𝔧 |
| K | k | K | k | 𝔎 | 𝔨 |
| L | l | L | l | 𝔏 | 𝔩 |
| M | m | M | m | 𝔐 | 𝔪 |
| N | n | N | n | 𝔑 | 𝔫 |
| O | o | O | o | 𝔒 | 𝔬 |
| P | p | P | p | 𝔓 | 𝔭 |
| Q | q | Q | q | 𝔔 | 𝔮 |
| R | r | R | r | ℜ | 𝔯 |
| S | s | S | s | 𝔖 | 𝔰 |
| T | t | T | t | 𝔗 | 𝔱 |
| U | u | U | u | 𝔘 | 𝔲 |
| V | v | V | v | 𝔙 | 𝔳 |
| W | w | W | w | 𝔚 | 𝔴 |
| X | x | X | x | 𝔛 | 𝔵 |
| Y | y | Y | y | 𝔜 | 𝔶 |
| Z | z | Z | z | ℨ | 𝔷 |

اومیګا د پښتو دینه ↑ ګ په الماني کې نه

## شمیرپوهنیزې نخښې

مساوي .................. =

نامساوي ( نوروکتابونو کی ) ( ≠ ) ≠

کوچنی له .................. <

لوي له................ >

کوچنی یا مساوي له ......... ≤

لوي یا مساوي له ........... ≥

ډیر کوچني ................ ≪

ډیر لوي .................. ≫

ورته یا متناسب........... ~

کونگروانیټ ............. ≅

همداسی یا ښایي یا په گوره کوي

کټمټ................... ≡

غبرگ ................... ∥

ناغبرگ................. ∦

ولاړ په ................. ⊥

دریگوډی .............. △

گردی ................ ○

نیمی یا قطر............ ⊘

کونج .................. ∠

د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج $\angle(g,h)$

کرښه، له A و B ته .......... $\overline{AB}$

له A و B ته لوریزه کرښه..... $\overrightarrow{AB}$

ketabton.com - The Digital Library



لیندہ...................... AB

مطلقه ارزښت د ............ |a|

ایماجینار یوون (واحد )....... i

د اویلرګڼ = ...2,7182818 e

پي د لودولف ګڼ $\pi$ = ...3, 14149

د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي ->

ناپای.................. œ

د x فنکشن یا په واك چی بلواك مو بللی f(x)

(لوستل یي ( f د x یا د f, x لنډ : fx )

د x څیرونه په f(x) : لیکو: x → f(x) f: x →

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن h(x); g(x)

لیمس یا پوله.............. lim

| | | |
|---|---|---|
| | ساین .............. | sin |
| تریګونومتریکي | کوساین ............ | cos |
| بلواك | تانجنت ............ | tan |
| | کوتنجنت.......... | cot |
| | ارکوس ساین......... | arc sin |
| څیکلومتریکي | ارکوس کوساین ...... | arc cos |
| بلواك | ارکوس تانجنت ....... | arc tan |
| | ارکوس کوتانجنت..... | arc cot |

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیدایښتي لوګاریتم

ketabton.com - The Digital Library



کمپلکس گڼونه........... $\mathbb{C}$

رییلگڼونه .............. $\mathbb{R}$

ټولگڼونه .............. $\mathbb{Z}$

نامنفي ټولگڼونه یا

طبعي گڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي گڼونه ........... $\mathbb{N}$

تعریفډیرۍ ........... $\mathbb{D}$

ارزښتډیرۍ........... $\mathbb{W}$

حلډیرۍ ........... $\mathbb{L}$

د ډیرۍ A پوټنتڅډیرۍ $P(A)$

ډیرۍ.............. $M,N,A,B$

تشډیرۍ ......... $\emptyset$

برخه ډیرۍ...........

پورته یا لویډیرۍ ( چې بل ډیرۍ خوندي لري )

ټولنډیرۍ........... $\cup$

غوڅډیرۍ ........... $\cap$

د A کومپلیمنت ..... $CA , A'$

د ډیریو ورته والی ...... $A \sim B$

د ډیریو څل........... $A \times B$

لوستل B اتیران A یا - څل -

توپیرډیرۍ : A بي له B ده $A \setminus B$

دلته: a د b پرویشونی ده یا a b ویشي $a \mid b$

د a او b غټ گډ په ویشونی (لنډ : غ گ و ) $ggt(a,b)$

د a او b کوچني گډ زیاتځله (لنډ : ك گ ځ ) $kgv(a,b)$

ketabton.com - The Digital Library



| | |
|---|---|
| دلته : a د M توکی دی ........ | $a \in M$ |
| او a د M توکی نه دی ........... | $a \notin M$ |
| تولنخښه ( د ټولو x لپاره باور لري ) | $\forall$ |
| د موجودیت نخښه: یو x موجود دی | $\exists$ |
| کونیونکشن A او B لیکو | $A \wedge B$ |
| دیسینکشن A یا B لیکو ( کله کله الترناتیو ) | $A \vee B$ |
| ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي | $A \Rightarrow B$ |
| نیګیشن یا نه والی | $\neg$ |
| د A او B ویناو ورته والی یا اکویوالنت له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي. | $A \Leftrightarrow B$ |
| ماتریکس......... A نورو کتابونو کې $\|A\|$ | |
| دیترمینانت | $\|A\|$ |
| د a څخه n–امه ریښه | $\sqrt[n]{a}$ |
| د x اکسپوننشلبلواك | |
| د n – فاکولتیت یعنی $n!=1.2.3....n$ | $n!$ |
| بینومځلوونی لوستل: n په p باندې | $\binom{n}{p}$ |
| له a تر b واز اینتروال $= \{ x \mid a < x < b \}$ | $]a,b[$ |
| له a تر b بند اینتروال $= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$ | $[a,b]$ |
| کینې واز اینتروال $= \{ x \mid a < x \leq b \}$ | $]a,b]$ |
| ښی واز اینتروال $= \{ x \mid a \leq x < b \}$ | $[a,b[$ |

ketabton.com - The Digital Library



د زیاتون نخښنه (سیګما ) $\sum_{i=1}^{n}$

که د زیاتوننخښنه داسی وي

لوستل: له $i = 1$ تر $n$ پورې

څلنخښنه ( پي ) $\prod_{i=1}^{n}$

که داسی لیکل شوي وي

لوستل: له $i = 1$ تر $n$ پورې

پرموتیشن یا بدلون $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$

ketabton.com - The Digital Library

## ۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic ))

سم اند (سماند) یا منطق ( logic یونانی کلمه ده، چې اند( فکر) یا وی( لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس( ۳۸٤ تر ۳۲۲ ز ۰ ک۰ ا)) له خوا کېښول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دئ او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله خټه کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دئ نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې( متن ) لرودئ شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

## ۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښتي- یا طبیعي ژبه

اند ( فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بېلیدنه یې ناشوني ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

ketabton.com - The Digital Library



---

پوهنی( علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور( په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګړیتې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.

په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي ) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک ایښوولو ( ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنی ژبی ویناود څخه ګټه اخلي٠

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده٠

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit ) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي٠

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ایښوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي٠

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو ( Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت ( Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره ( متصور؟ ) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسې په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغهٔ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښونې دبنسټیزو نخښو څخه منځ ته راغلي. په درسې ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندې ډول دي:

ketabton.com - The Digital Library



---

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ .

## ۱ ۰ ۲ د شمیر پوهنی سم اند بنسټيزې کلمي

### ۱ ۰ ۲ ۰ ۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکي او د شیانو تړني په نخښو( سومبولونو) انځوریږي.

### ۱ – شمیرپوهنیزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې ( علامې): دا د یوه کره ټاکلې مانا لپاره نخښې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، $\pi$ ، e, او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د یوې ورکړ شوې ډیرۍ یا سټ ( په ډیرۍ پوهنه کی روښانه کیږي) داسې په زړه پورې توکی لپاره یوه نخښه ده، کومه چې د اووښتونویا متحولو بنسټیتټ یا-ډیرۍ بلل کیږي، دا په لاتین تورو په نخښه کیږي او کله کله په اندکس(ز۰ایندکسونو) یا پیژندنخښه index ( ز۰ پیژندنخښې Indices ) چې ایندکس د تورو پښو ته راځي په نخښه کیږي۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړیکنخښې : دا د شیانو اوګنونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نخښې دي لکه $<$ , $>$، $=$ , $\leq$, $\geq$ ,

- د نښلونو،کارونو، تړنو یا عملیونخښې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-) ، ځل-(ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نخښې: / ، : +, -, *

ketabton.com - The Digital Library



---

- تخنیکي نخښې : لکه سیمیکولوم (,, ,,)، نوکان ( ) او نور ډولونه یې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واریابلی( اووښتونې), ثابتی او د هغوي یوځاي اینودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکی نخښو یوځاي اینوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځی٠

(۱) ثابتې((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتیزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړیدونی یا واریابلې او ترمونه

بیلګه :

الف : د 3.( 1 + 2a ) – a + 144 یوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 3a – 6= 11x ).( 12 – b) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده اینوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یواځې ثابتې ( همغه )، اووښتونې( متحولې، واریابلې) نښلونې او تخنیکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړیکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پورې که واریابلی ولرې پیژندډیرۍ یا تعریفسټ هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو یا متحولو اصلی بنسټسټ یوه برخډیرۍ او یا هغې سره برابر برخه سټ یا - ډیرۍ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنسټډیرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې یا عملیې اجرا شي، که چېرې اووښتونې یا واریابلې د پيژندډیرۍ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو( اکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بیلګه :

ketabton.com - The Digital Library



الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتوني يا متحولې نه لري په Tسره په نخښه کوو او

ليکو: $T=126 + 3/4$ يا $T=126+\frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتوني يا متحولې x لري ياني $T(x) = 10 + 2x$ د ۰
اووښتونو بنسټيزې يا –ډېرې دې يا د طبيعي اعدادو ډيرىN°وي

تعريفډيرى د بنسټيزې سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتوني يا واريابلى x پۀ ځاي

يو پيدايښتې ګڼ يا طبيعي عدد 2 کيږدو، نو د ترم ارزښت دى : $T(2) = 14$

پ : $(x+2y)/x$ يا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دى چې دوه متحولې لري او په $T(x,y)$ سره يې په نخښه کوو ۰ د اووښتونو يا
متحولو بنسټيزې دې د پيدايښتي يا طبيعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعريفډيرى
N° ده۰ د y لپاره N ( پيدايښتى ګڼونډيرىN° تعريفډيرى لپاره ترم نه دى تعريف
ياپيژند نه لري)

د $x = 0$ لپاره ترم نه دى تعريف يا پيژند ند لري

د ترم $T(x,2y) = (x,y) /x$ يا $T(x,2y)=\frac{x+2y}{x}$

ارزښتشميرنه د $x=2$ او $y= 3$ لپاره په دې ډول ده: $T(2,3) = (2+6) / 2 = 4$:

يادونه: د ګڼونو لپاره دې دريمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼونډيرى ورکړ
شوي دي۰

۱ ۰ ۲ ۰ ۲ وينا Aussage

ketabton.com - The Digital Library



---

دا چې انسان د خپل چاپېریال د ټولو شیانو او پیداېښتونو سره لاس په ګریوان دی، نو پوښتنې او هیلې رامنځ ته کیږي،غوښتنې لري او ویناوې کوي، په کومو ویناو کې،

چې شیان او ریښتونی( واقعیتونه) بیرته هنداره ( منعکس) کیږي یا په یوه څه یا شي، چې وینا کیږي، نو موخه ترې د هغه څه ریښتون حالت یا ځاننیونه ده۰ یوه وینا په واقعیت کې ټیک هلته ریښتیا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت یا بهتره شي ځاننیونه په ریښتونې شته یا موجود وي، په بل حالت کې دا وینا ناریښتیا ( غلطه ) ده. موږ نیسو، چې دا څه دې په شمیرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پریکړه دې پرې کیدی شي۰

پژند( تعریف ) ۱ ۰ ۱ :

وینا د یوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دی)، د هغهٔ بیرته هندارونه یا منعکسونه ده۰ ( دا په دې مانا، چې وینا یو شی په وینا کې همهغسی ښایي لکه څنګه چې دی له دې امله شي هندارونه یامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کیږي یا په همدې ډول په نخښه کیږي۰

یا په بل عبارت وینا د کلیمو داسې هدفمند یوځایوالی یا یوځاي ایښوول دي، چې د یوه شی حالت (ځاننیونه) یا شکل او د شیانو ریښتونې اړیکی بیرته هنداره یا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه دریښتیاوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

یا په بل ډول :

د وینا لاندې سړی یو ژبنی یوون، یا یووالی ( واحد unit ,Einheit)پوهیږي، کوم چې د شي اړیکی ( د شي څرنګوالی) بیانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وینا په کومه ژبه، په پیداېښتي (طبیعي) او که په مصنوعي ژبه ویل شوې ( افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وینا د طبیعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځني ډول: یوه وینا یوه جمله ده یا فرمول دی، چې یا رښتیا او یا نارښتیا ده۰ داسې هم ویل کیږي، چې وینا یو «رښتیاارزښت » ،، رښتیا یا نا رښتیا ،، لري.

ketabton.com - The Digital Library



یعني : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړې د وینا « رېښتیا ارزښت»(رښښتیا یا نارښتیا) دی۰ نور خویونه په راتلونکې کې نه څېړل کېږي۰

وېناوې د لاتین په لویو تورو A , A* په نخښه کوو او داسې نور۰

## ۱ ۰ ۲ ۰ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یوائې یو ممکن « رېښتیا ارزښت» لرودی شي، دا په دې نامه، چې وینا یا رېښتیا

ده او یا ناریښتیا. ( د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ)۰

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دی. دوه ارزښتوالی او د

دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنۍ افاده یا وییئه د وینا په څېر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چې د
وینا‌ارزښت حتمآ باید څرګند یا معلوم نه وي۰ که بالاخره ټوله پوهنه د رښتیا لور غوره
کړي وي، بیاهم مو‌ږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چې د هغه شي حالت (ځاننیونه) افاده
کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چې پریکړه وشي۰

ټولې وېناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو وېشل کېږي، د رښتیا وېناو ټولګی او د

نارښتیا وېناو ټولګی یا کلاس(صنف)۰

که وینا رېښتیا وي، نو رېښتیا ارزښت یې رېښتیادی او په w سره یې ښایو، که وینا رېښتیا

ارزښت ناریښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا رېښتیا ارزښت

ناریښتیا دی

تکرار : هره جمله، چې « رېښتیا ارزښت» ( رېښتیا یا نا رېښتیا) ولري، وینا بلل کېږي

ketabton.com - The Digital Library



---

شمیرپوهنیز سم اند( منطق) د ویناو سره سر او کار لري..

بیلګې:

غونډاله ( جمله)

الف : » د کابل سین د کونړ له سین سره ګډیږي«ریښتیا وینا ده٠

ب : $3 + 4 = 7$ ریښتیا وینا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا ناریښتیا- یا ناتیک وینا ده٠( د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد یاګڼونه کتلکیدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو یې ؟ « نه شي کیدی یو ریښتیا ارزښت باندې تنظیم شي٠ له دې امله وینا نه ده٠

نورې بیلګې :

ویناوې دي:

(دپیتاګوراس (فیثاغورس) جمله٠

د کاتیتونو یا د یو بل سره ولاړو یا عمودو اړخونو یا ضلعو مربعګانو (څلوریو) زیاتون(جمعه) د هیپوتینوزې(اوږده اړخ قایمې زاویې ته مخامخ ضلعه یا قطر) د څلورۍ یا مربع سره برابر دی.

نورې بیلګې :

سرک لوند دی

ټول سپي خطرناک دي

$3 > 5$

ketabton.com - The Digital Library



په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځاي یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسیډ $CO_2$ وښايي

د دي پرخټ یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار;NaCl ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنګ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیدایښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دریو بی له پاتې ( باقي) نه ویشل کیږي

د وینا «ریښتیا ارزښت » ریښتیا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنۍ ښار دۍ

3 < 5 پنځه له دریو کوچنۍ دۍ

ټول لومړني اعداد یاګنونه ناجوړه ( طاق) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دۍ

هره یوه له دې ویناو « ریښتیا ارزښت » نا ریښتیا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوړه وایو۰

په لاندي کې به وڅیرو، چې ویناوې شته، چې نورې ویناوې د خپلې برخی په څیر په ځان کې خوندي( لنډ : خوندي) لري۰ داسي ویناوو ته یوځاېشوې یا یوځای ایښول شوې یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړۍ ! مرکبې ویناوې.

ketabton.com - The Digital Library



---

د دې لپاره بیلګه راوړو » کۀ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشوړ وي، نو داعدد یا ګڼ په 3 ویشوړ دی، یانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ویشوړ ده له دې لاس ته راځي، چی پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ویشوړ دی۰

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشوړ یا ټوټه کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي۰

لکه : سپین غر یوه خورا جګه څوکه لري

یوه بله بیلګه د یوځای شوې( ځنځیري) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي۰

څرګنده ده، چی دواړه ساده جملې د برخویناو په څیر یوځاي شوي ویناوې دي: » سپینغر خورا خواریکښ دی« همدا ډول » هغه (سپیغر) پوهیږي، چی نور کارته وهڅوي«۰

دا ویناوې کیدی شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیاارزښت یې همغه پاتې شي۰

د بیلګي په توګه:

۱ - سپینغرخورا خواریکښ دی۰ یا هغه پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چی هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی۰

۳ - دا چی سپینغر پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي ، نو سپیغر خورا خواریکښ دی۰

٤ – سره له دې، چی هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دی۰

ګورو، چی په دې ډول یو له بل توپیریدونکی تړلې یا ځنځیري، یا یوځاي شوی ویناوې جوړیږي، چی په خپله رښتیاارزښت کی یو له بل توپیر کیدی نه شي۰ د دوي توپیر د

ketabton.com - The Digital Library



دوي يو له بل سره تړلو ځرنګوالي له لارې مخ ته پروت دئ یا رامنځ ته شوی دئ٠
په لاندې کې به ممکنه« ویناتړنه» ( یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر ځیرنې لاندې ونیول شي.

پيژند ۱ ۰ ۲ :

یوه «ویناتړنه» یا یو «ویناتړاو» ( نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنۍ ویینې(افادې ) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډېرو ویناو څخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

موږ د سم اند یا منطق ستېرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یې یواځې او یواځې د «برخویناو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي٠

بیلګی

الف: سپین ډیر خواریکښ دئ، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي٠

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي٠

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمي ولید٠

## ۱ ۰ ۲ ۰ ٤ ویناتړنه یا وینابلواک ( - فنکشن یا – تابع)

د ویناتړنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که څوک د تړنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځاي شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځاي غواړو «ریښتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپيژنو. موږ پریکړه کوو، چی د په زړه پورې ویناوو ( ویناواریابلو یا وینا اووښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه p,q,r,... او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. موږ دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

ketabton.com - The Digital Library



---

ځاینیونکی(یوځائیز یا یوګوني) بلواک یا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه٠

یادونه: د بلواک یا تابع کلمه وروسته ځیرل کیږي، دلته د بلواک یا فنکشن پرځاي ویناترنه یا عملیه بسیا کوي. دا ځنی ویونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي یې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وینا تړاو یا ویناترنی(عملیې) «نه والی»: دیوی ویناP نه والی هغه وینا ده، چې هلته او یواځی هلته د ریښتیا ارزښت ناریښتیا لري، چیP ریښتیا ارزښت ریښتیا ولري٠

موږ د وینا P نه والی نفی په Pنه سره ښایو ، شمیرپوهنیزه نخښونه یې په لاندې توګه ده ¬p په یوه جدول کې ریښتیا فنکشن یا ریښتیابلواک کې داسی څرګند وو( دا چې زه کله کله هغه شمیرپوهنیز سومبول د نه p لپاره ¬p نه شم لیکلی، نو دا به همغسې p نه ولیکم.

| P | Pنه یا ¬p |
|---|---|
| w | F |
| f | w |

د یوې وینا P تکرار نه والي یا بیا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې یې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

| p | ¬p | ¬¬p |
|---|---|---|
| w | f | w |
| f | w | f |

ketabton.com - The Digital Library



---

دوه واره نه والی د همغې لومړنی وینا رښتیاارزښت لري

په پیداینښتي ژبه کی نه والی په«نه» یا « نا » خپل رښتینوالی مومي٠ «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی٠ دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی٠

نه والی ته بیلګه : د وینا ¬A نه والی : "3 < 7" وینا نهA ده: دا چی A رښتیا ده، نو ¬A نارښتیا ده٠

ترڼه(عملیه) یا کنجنکشن Conjunction ( لاتین: ترڼه، دلته د « او (and)» ترڼه یا تړاو):

## وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څېر یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼې لپاره بیلګی دي لکه پوښتني، امرونه او نظرونه یاعقیدې:

١ – هوا څنګه ده ؟

٢ - کورته لاړ شه

٣ – شین یو ښه رنګ دی٠

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتونې لري، اړیکنخښی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي٠ یوه د نخښو لړی کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګې په توګه

3 + x <5 د بنسټیزورشو N کې نه ریښتیا ده او نه ناریښتیا٠ دا له دې امله وینا نه ده٠ که چیرې د واریابلې یا اووښتونې یا متحولې پر ځای ٠ او ١ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا ترې منځ ته راځي٠

ketabton.com - The Digital Library



---

که چیرې په ځاي يې نور د پيدايښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بيا ناريښتيا ويناوې منځ ته ترې راځي۰

دا چی اووښتونې یا متحولې د بنسټډيرئ یا بنسټ سټ څخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک یا ازاده اووښتونی(متحولې) په نامه يادېږي۰

پيژند :

يوه وينابڼه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه يوه خپلواکه اوښتونې(متحوله) لري او د

- د دې اووښتونې په ځاي د بنسټيزې ورشو يا ساحې او يا
- د دې اووښتوني ترلو څخه د کوانتيفيکاتورونو( کوانتورونو) په مرسته يوه وينا جوړيدی شي.

يادونه :

که په لاندې کې د تړاو يا تړني کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه ياکنجنکشن conjunction دئ۰ له ګرامر سره په توپير، چې هلته تړنه يا تړاو يو « تړونتيکی، تړاولغات» ښايي په سم اند کې تړنه يو څرګند( دوه ځايلرونکی يا دوه ځاييزيا نوره هم ښه دوه ګونی) جملې تړل يا په بل عبارت دوه ځاينيونکې ( نوره هم ښه : دوه ييز يا دوه- ګونی) فنکشن يا تابع(بلواک) تعريفوي يا پيژنی۰

د « او» تړنه او نخښه يې $\wedge$

پيژند ۱ ۰ ۳ :

$p\wedge q$ دوه ويناوې p او q يانې د «او » يوځايوالیp او q يواځې او يواځې هلته يو ريښتيا ارزښت ريښتيا لري، چې p اوq دواړه ريښتيا ارزښت ريښتيا ولري۰ که له دې څخه يوه وينا هم نارښتيا وي، نو بيا د « او » تړنه نارښتيا ده ۰

ketabton.com - The Digital Library



د ترني نخښنه ددوه ويناو qاو p ترمنځ ليکل کيږي p/\q او ويل کيږي p او p
موږ د « او » ترنه په لاندې جدول کې روښانه کوو يا انځوروو:

يادونه: په لاندې کې w رښتيا او f نارښتيا په معنا دي

| p | q | p/\q |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

د « او » ترني ته بيلګه :

د دوه رښتينو ويناو د A وينا : ,, 7 < 3 ,, او د B وينا : 3 يو لومړنی ګڼ دی رښتيا وينا A /\ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

يادونه: موږ ګران لوستونکي به سره يوځاي فکر وکړو، چې دا پريمګنونه لومړي او که لومړني ګنونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګنونه لومړنی نه دي۰ دا ځکه لومړي ګنونه دي، چې له دوي له زياتون او يا کمون څخه لومړی ګنونه جوړيږي۰ موږ به يې زياتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ويناو دا ترنه يا کنجنکشن، چې مختلف رښتياارزښتونه ولري ياني د A وينا: 3 ,, 7 < ,, (رښتيا او د B وينا: « ۳ يو جوړه ګڼ دی ( نارښتيا)، نو A/\B وينا : چې ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « ( نارښتيا) ده۰ دا ويناترنه ويناارزښت نارښتيا لري۰

د دوه ويناو د « او» ترنه دA وينا: 7 < 3 او د B وينا « ۳ يو جوړه ګڼ يا جفتعدددی» يوه نارښتيا وينا ده : ۳ يو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

ketabton.com - The Digital Library



---

ومو لیدل، چی د « او » ترنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده ( عادي) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټۍ «پټیدځاي» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » ترنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښایي»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځاي پیدا کړ« او » دا پټیدځاي یې پټ واسته۰

۱ ) هلمند موړ(بډا) شو او هیواد یې پریښود ۰

۲ ) سره له دې، چې برلین کوچنۍښار دی‌هلته د منی د المپیک لوبې کیږي

۳ ) ۱۵ ګڼ جوړه دي، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونی‌دی

په ټولیزه توګه د « او » ترنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چی د جملی ټولی برخې رښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا ترنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخی سره په ترنه « او » وتړل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او بری یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» ترنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « ترنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله ترنه» تل ژوروالی ته راهڅوي: باید جوته شي، چی ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»ترنی پیژند یا تعریف یواځنی دی او دا \/ د یا ترننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p او q ترمنځ ځایول کیږي p\/q او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول څرګندیږي۰

ketabton.com - The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------------------

| p | Q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| w | W | w |
| w | f | W |
| f | w | w |
| f | f | f |

له دې پورته جدول څخه پوره جوتیږي، چې دیسجنکشن یا د « یا » تړنه $p \vee q$ یو داسې رښتیاتابع (-بلواک یا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رښتیا فنکشن رښتیا اخلي، کله چې کم له کمه د « یا » تړنې یو غړی د رښتیا ارزښت رښتیا ولري یا واخلي٠ که د دیسجنکشن دواړه غړي نارښتیا وي نو$p \vee q$ هم نا رښتیا دی٠ دا د رښتیا فنکشن کې د ځایونې « یا» څخه بل څه نه دي٠ یوه د «نه خوندیکونې» یا « نه ځایونې» یا « په برکې نه نیونې» د « یا » وییینه یا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « یا٠٠٠ او یا ٠٠٠» لیکل کیږي٠

بیلګه ( د « یا » تړنې ته):

د دوه رېښتینو ویناو د « یا» تړنه د A وینا: ,, 7 > 3,, اود B وینا: « ۳ د ٦ پرویشونی دی» یوه رښتیا وینا $A \vee B$ ده : «۳ له ۷ کوچنی دی او د ٦ پرویشونی هم دی»٠

د دوه ویناو تړنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وینا ,, 7 > 3 ,, رښتیا او د B وینا: ,, 7 =3 ,, ( نارښتیا) ، نو $A \vee B$ ده، چې 7 > 3 یا 7 = 3 دا وینا تړنه د رښتیا ارزښت رښتیا w لري٠

ketabton.com - The Digital Library



---

د دوه نارښتیا ویناو د « یا »( " Or" ) تړنه:

د A وینا : "7 > 3 " او د B وینا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دئ یوه نارښتیا وینا A∨B ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دی»

الترناتیوAltenative یا انتیوالنځ Antivalenz ویناوې : دا د » یا « ویناتړنه باید د « یا ... او یا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتیا ده، که چیرې دواړه ویناوی رښتیا وي۰

بیلګه : ( دوه الترناتیو ویناو ته ، چې رښتیا وي)

د وینا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دئ» د الترناتیو په نامه داسې دی « ۳ یا له ۷ کوچنئ دئ او یا یو لومړی ګڼ دی» نارښتیا دئ۰

بیلګی : ( نه والي، کنجنکشن، دیسجنکشن ته )

یادونه: په لاندې (Wahr) w د رښتیا او(Falsch)f د نارښتیا لپاره کارول شوي.:

ویناتړاو

| | | |
|---|---|---|
| A | $\pi$ پي تولګڼ دئ | f |
| B | $\pi$ ایراشنل ګڼ دی | W |
| C | صفر له پي$\pi$ کوچنی دئ | W |
| D | $\pi$ پي له دری کوچنی دئ | f |

ketabton.com - The Digital Library



| | | |
|---|---|---|
| <u>A</u> | $\pi$ تېولګښ نه دی | W |
| <u>C</u> | $\pi$ کوچنی برابر له صفر | F |
| A∨C | $\pi$ تېولګښ او له صفر لوي دی | f |
| B∧C | $\pi$ ایراشنل او له صفر لوي دی | W |
| A∨C | $\pi$پي تېولګښ یا له صفر لوي دی | W |
| A∨D | $\pi$ تېولګښ یا له ۳ کوچنی دی | f |

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغهٔ فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم۰ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دی، یانې د » او یا « امکان شته۰ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي۰ یانې دوه نرخونه باید ورنه کړای شي۰

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځیره دې یې په پام کې راولی۰ په شالت یا سرکت الجبر کې د کجنکشن یا د »او« ترنې« ریښتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه ترل شوي دي،

Bild 7.1

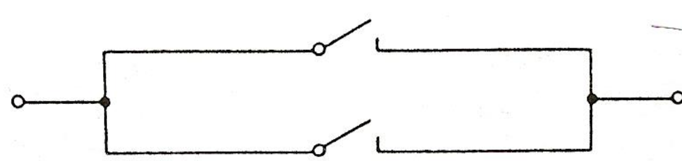


Bild 7.2

ketabton.com - The Digital Library



---

## کمپلکس ربښتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستۍبیلګه په ګوته کوي، چې داسی یوځاي شوي ویناوې جوړیدۍ شي، په کومو کې چې له یو زیات تړوني موجود وي۰

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملی کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی ( ربښتیا - بلواک یا ربښتیا فنکشن » نهp p\/ دی۰ د دې لپاره هم د ربښتیاارزښت فنکشن ورکول کیږي۰ د ربښتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا p نه ( دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp\/p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دۍ

د یوې وینا نه والی

| p | Pنه | p\/pنه |
|---|---|---|
| w | f | W |
| f | w | w |

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکیک کوونکي نه ده یوه وینا نهp\/p تل ربښتیا ده، بی له ځانګړي حالت او له دي خپلواک، چې p کوم ربښتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغې ربښتیابلواک کتمټ یا identisch(identic) ربښتیا دۍ( دا په دې مانا، چی که د ویناؤوښتونکې یا واریابلې ته هر ربښتیاارزښت ورکړ شي یاني ربښتیا یا نارښتیا تل د ربښتیا ارزښت ربښتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغو ربښتیاارزښت بلواک کتمټ نارښتیا دۍ ( دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتوني په هره وینا ارزښت وینا نارښتیا ارزښت غوره کوي)

ketabton.com - The Digital Library



---

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction ( د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

ربښتیاارزښت دې د وییني یا افادې نه(p\/q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د نهp\/q ربښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$
\begin{array}{l}
p...q....p \vee q....\neg(p \vee q)......\neg p...\neg q...\neg p \wedge \neg q \\
w...w......w.........f.............f.....f.........f \\
w...f.......w.........f.............f......w.........f \\
f...w........w.........f............w.......f.........f \\
f...f........f.........w............w........w.........w
\end{array}
$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویېنې یا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه ربښتیا بلواک یا – قنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه ربښتیا - ( او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکې جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو -وینا تړنه ) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعاً همغه نه پاتیږي، لکه

د بې نوکانو عملیې.

## ایمپلیکیشن implication (لاتین: درراګډول، خورول):

ketabton.com - The Digital Library



---

که دوه ويناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظيم يا ترتيب شي اپيليکيشن سومبول<= چې دا سومبول د دواړو ويناو Aاو B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نو B يا په همديډول «له A څخه B لاس ته راځي» وينا A ته پريميس Prämisse ( لاتين نيونه (فرضيه) وايي او وينا B ته کونکلوزيون Konklusion ( لاتين: پاي لاس ته راوړنه ) وايي۰ د دوه ويناو ايمپليکيشن تيک هلته نارښتيا دی، چې پريميسس رښتيا او کونکلوزيون نارښتيا وي۰ په بل ډول رښتيا دی۰

د دوه ويناو لاس ته راوړنه يا تعقيب د لاندې جدول له لارې يواځنی څرګنديدی شي

د لاس ته راوړنې يا ايمپليکيشن يا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول <=

| P | q | p=> q |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

دلته داسې يوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ويناو A اوB تيک هلته يو نارښتيا يوځاي شوې ويناچې په p=/>qسره ښايو)۰

کله چې لومړۍبرخه وينارښتيا او دومه برخه وينا نارښتيا وي په کمپيوتري يا پروګام ژبه کې داسې ويل کيږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې يا وينې په دې رښتيا فنکشن بيرته اړول کيږي. بيرته يا په څټ

ketabton.com - The Digital Library



---

راګرځېدلی شي. په ښکاره ډول د بېلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلويزيون کتلو ته کورته راځي.

نارېښتيا ده، که د جملې لومړئ برخه رښتياوي او دويمه نارښتيا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بېلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې څلورمه کرښه سره يو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې رښتيا همداسې نا رښتيا وي) پرابلمونه نه پيښوي، په دې حالت کې ټوله وينا رښتيا ده، که لومړئ برخه وينا نارښتيا او معکوس دويمه برخه رښتياوي، نو په دې حالت کې به د بېلګې په توګه جمله نارښتيا ونه ليدل شي( که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلويزيون ليدلو ته راشي)، نو بيا د دوه ارزښتوالي پرينځيپ له مخې يواځې دا ارزښت ،، رښتيا،، باقي پاتې کيږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg(p \vee \neg q)$ ټيک بيرته بيا(بيرته) د ايمپليکيشن د رښتيا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې يې: q که p، او يا هم p ، د q لپاره پوره کيدونکی شرط دی( په بل ډول يې: qد p لپاره اړيين شرط دی)

ورته والی :يوارزښتوالی(برابرارزښتوالی ) Äquivalent

که دوه ويناوې qاو p خپله ترنه په » ټيک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که» تنظيم کړي، دې ته ورته والی يا ايکويوالنت وايي۰ د ايکويوالنت سومبول دیَ ≈ د دواړو ويناو pاوq ترمنځ دا سومبول پروت دیَ p ≈q په دې مانا، چې p ټيک هلته که q ۰ ايکويوالنت سومبول يې په دواړو خواو ايمپليکيشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ويناو ايکويوالنت ټيک هلته رښتيا دی، که دواړه ويناوې رښتيا يا دواړه ويناوې نارښتيا وي۰

دا شي څرنګوالی يا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

ketabton.com - The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

| p | q | P⇔q |
|---|---|---|
| w | w | W |
| w | f | F |
| f | w | F |
| f | f | W |

سیده او مخامخ یا په ځنې دي په دې مانا وي، چی له p څخه q لاس ته راځی او په ځنې، یا نی له q څخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د وینابلواکو یا ـفنکشنونو ترمنځ اړیکې

د دوه ویناو ترڼه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د ویناو ربنتیاارزښت د ترڼوینااارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي۰ دا د یو ویناارزښت جدول له لارې څرګندیدی شي۰ ومو لیدل، چی ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی۰ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چی سره یوارزښته دي۰

| p | q | p ⇔ q | p=>q | q ⇒ p | (p ⇒ q) (q ⇒ p) |
|---|---|---|---|---|---|
| W | w | w | w | w | ...........W |
| *w* | *f* | f | f | *w* | .........*f* |
| F | *w* | *f* | *w* | *f* | .........F |
| *f* | *f* | w | w | *w* | .........*w* |

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p <=> q) <=> (p => q)(q => p)$$

ketabton.com - The Digital Library



دا ورته والي ويناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې يو بل سره بدل کړو يانی د يوه ځاي د بل سره بدل کړو٠ له دې ښخه پيچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کيږي٠

د دې ورته والی ويناتړني غوره بيلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$
$$(2)......(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او ديسجنکشن لپاره ديستريبوتيو قانون:

$$(3)\quad [p\wedge(q\vee r)] \ \square\ [(p\wedge q) \vee (p\wedge r)]$$

$$(4)\quad [p\vee(q\wedge r)] \ \square\ [(p\vee q) \wedge (p\vee r)]$$

## ١ ٠ ٤ ويناقورم يا - بڼه او کوانتورونه

وينا سم اند په لاندې ډول ساده تولیز کيدی شي٠ د بيلګي په توګه که مختلف شيان همغه خويونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وويلي - - يا افاده کړای شو: دلته د يناو پر ځاي د ويناقورم ښخه خبري دي، يا غږيږو٠ دا داسی ژبنی ويني يا افادې دي، چې د شيانو لپاره واريابلی يا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته يوه وينا شي٠ بيلګي يی په لاندی ډول دي

لومړی : x پر دوه ويشونی دی »

دويم : » z يو هوار ښلورګوډی( ځلورضلعي) » دی٠

دريم : «u له v ښخه لوي » دی او داسی نور

ketabton.com - The Digital Library



------------------------------------------------------------------------------

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته رښتیا یا نارښتیا وینا لاس ته راځي۰ که په دویم کی دz پرځاي «ډیرگوډی» (کثیرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو یوه رښتیا وینا لاس ته راځي۰

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو یوه نارښتیا وینا لاس ته راځی۰ دریم یوه اړیکه(ریلیشن( ده، چې هلته د انفرادیو د اینسولو ترتیب هم یو رول لري۰ دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا رښتیا وینا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي۰د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل۰( له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وایي۰

بیرته داسی لیکو P(x), Q(z), R(u,v)

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بنې څخه وینا جوړوي۰ چې کوانتیفیکیشن Quantifikationبلل کیږي۰ دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بنی افراد همغه خویونه ولري، چې ټولوینا (Allaussage) ورته وایو۰یاچې په پوښتل شوي چاپریال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خویونه ولري، دې ډول وینا ته موږ د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وایو۰ زموږ په بیلګه کې یی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پیداینتی یا طبیعي) ګڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کیږي

پنځم : ټولې څلوری (مربع) هوارې ډیرګوډی یا کثیرالاضلاع دي۰

د ټولکوانتور یا ټولوینا لپاره نخښه $\forall$

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتونوینا لپاره نخښه $\exists$

یادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څیر ده په پام کې دې وي، چې د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې ( ویاریابلی یا مجهولی) ورکول کیږي۰

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی یي لولو، چی یو x په P(x) کې شته

ketabton.com - The Digital Library



---

پنځه ۱   : $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دی ( یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه )

دا سومبول ∃ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰۰۰ شته»د وینابنۍ او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیرۍ کې، په کوم کې چې کم له کمه یوه داسې اووښتونې ځاي په ځایونه شته وي کومه چې وینابڼه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی ( د رښتیا شتون - موجودیت ویناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

( لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له( په) R (کې) شته ،د کوم لپاره چې0 =x+1 باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیرۍ یا ریل ا عدادو سټ R توکی دئ او ∈ په دې مانا دی، چې توګي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$$x^2 + 4x = 0$$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x= 0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

( په دې جمله کې حتی دوه رییلګنونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (2، -2)

جمله ( د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$$\exists x \notin R: x^2+1=0$$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

ketabton.com - The Digital Library



---

داسې وینابنې هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتوندېرۍ یا واریابلډېرۍ ټولو توکو لپاره رښتیا وینا شي۰

بیلګه: وینابنه « x په 2 ویشونی دئ » د جوړه ګڼونو هریوه لپاره رښتیا ارزښت لري په

دا سومبول $\forall$ په دې مانا دئ، چې « د ټولو x لپاره» د وینابنې او په همدې پورې اړوند د وینا متحولو ډېرئ یا سټ (ویناااووښتوندېرۍ یا واریابلډېرۍ) تړنه له دې سومبول سره یوه Universalaussage یونیورزالوینا یا ټولوینا منځ ته راځي۰ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتوندېرۍ) هر توکی لپاره د وینابنې څخه یوه رښتیا وینا جوړیږي۰

جمله : (دUniversalaussage یونیورزال- یا ټولیزې وینا یا ټولوینا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 \mid x$$

( د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ویشونی دئ )

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

( د ټولو ریيلاعدادو x لپاره, کوم چې له یوه لوي وي باور لري $x^2 > x$ )

جمله : ( د نارښتیا ټولیزې وینا لپاره )

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وینا نارښتیا ده، ځکه چې دا د $1 \le x \le 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وینا د ټولو ریل عددونو لپاره باور نه لري۰

۱ ۰ ۵ اړین – یا ضروري- او پوره کیدونکي شرطونه

د ایمپلیکیکشن سومبولA=>B («کهA نوB » « له A څخه Bلاس ته راځي»)یا په بل ډول : که A باور ولري، نوB هم باور لري»

ketabton.com - The Digital Library



---

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته٠

الف ) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دی»

ب ) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف ) وایي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چې آ پوره شي٠

بیا : وینا باور لري٠

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دی یا پوره کیدونکی دی یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

١ – ویناA : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « ګڼ n پر ٣ ویشونی دی»

$$A => B$$

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دی یا بسیا کوي، چې یو رییل ګڼ n پر ٣ ویشونی دی، که دا پر ٦ ویشونی وي٠
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ٣هم ویشونی دی ٠ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ٣ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي٠ د بیلګي په توګه ګڼ ٩ پر ٣ ویشونی دی ، مګر په ٦ نه دی ویشونی٠

٢ - وینا A : "n > 7"

وینا B :وي دې: n > 6

$$A => B$$

ketabton.com - The Digital Library



---

د دې لپاره دا پوره کیدونکی دی، چې یو رییلګڼ ن له ٦ څخه لوي دی۰ که اړیکې، چې ن له ٦ لو دی، باور ولري

داسې رییلګڼونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له۷ څخه لوي نه دي۰ د بیلګي په توګه ٥ ،٦، یا شپږ.نیم

د ب) فرمولبندي وایي، چې وینا ب باورلرل غوښتونکی یا اړیین یا ضرور دی، د دې لپاره، چې وینا A باور ولري۰

که وینا B باور ونه لري نو وینا A هم باور نه لري ۰

بیلګی د اړیین( ضروري ) شرطونو لپاره:

۱ – د دې لپاره، چې یوګڼ n پر 6 وویشل شي، اړین(ضرور) ده، چې دا ګڼ پر3 ویشونی وي۰ یو ګڼ، چې پر3 نه وي ویشونی، نو پر ٦هم ویشونی نه دی۰

۲ - ویناA : » څلور ګوډی یوه څلوری یا مربع ده«

وینا B : » څلور ګوډی څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې یوه څلورګوډی یوه مربع(څلوری ) ده دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه یې ولاړ نه وي، نو مربع یا څلوری نه ده که یوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړین نه ده، چې څلوری یا مربع دې وي۰

د برابروالي یا برابرارزښتي ( ایکویوالنت) سومبول«

A<=> B

(په دواړو لورو ایمپلیکیشن) لپاره په شمیرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وایي، چې A دB لپاره یو ضروري او پوره کیدونکی شرط دی۰ « دا وایي، چېA ټیک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

ketabton.com - The Digital Library



---

بیلګی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – ویناA : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دی، که دا عدد پر۳ او ۲ ویشونکي وي٠

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعي»

A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه( ضلعې ) ولري٠

۱ ٠ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم( ترې پوهیدنه)

پیژند ( تعریف ) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې ټیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي٠ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کي داسي نه ده٠

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د ټیک څرګندې پوهنې یوه نه پریښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای٠

ketabton.com - The Digital Library



---

## جمله څه شی دی ؟

ټولې ربښتوني ویناوې په شمیرپوهنه کې جملې بلل کیږي، چې د پیژندنې لپاره ښوونې یا ثبوت ته اړتیا لري ۰

## اکسیوم Axium څه شی دی؟

بې ثبوته ربښتینې وینا ته اکسیوم وایي

شمیرپوهنیزې یا د ریاضي جملې زیاتې نیونې( فرضیې) او ثابتول( غوښتنه،جوته ونه یا ښوونه) په بر کې- یا خوندي لري۰

که دا وینا داسې وي، نو پس داسې به هم وي۰ دلته که دا وینا داسې وي نیونه یا فرضیه ده او نو داسې هم ده۰ دا غوښتنه ده، چې باید ثبوت یا وښوول شي۰

اکسیوم : ۱ طبیعي عدد دئ ( پیانو Peano)

: ټکی هغه دئ، چې پر ویشونی نه وي یانې په ټکی ویشل بند دي۰ (Euklid)

: حتمي پیښه د پیښې امکان ۱ درجه لري۰

جمله: که درېګوډی ولاړکونجیز وي، نو( پس) د پیتا ګوراس (pythagoras ) درسې جمله باور لري

: یو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، باید ناجوړه( طاق) وي

: په اخره جمله کې نیونه(فرضیه) ده ( که یو پریم عدد له ۲ لوي وي۰۰۰) او ثبوت یې ( هر له دوه لوي عدد په دوه ویشل کیږي پس لومړی ګڼ نه شي کیدی، نو دا تل ناجوړه یاطاق دئ)په څټوالي یا تضاد کې پیژندل کیږي۰
تل داسې نه ده، چې د جملې د ربښتینوالی څخه دې د جملې په څټوالی یا تضاد هم ربښتیا وي۰

ketabton.com - The Digital Library



-------------------------------------------------------------------------------- ----

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ۲٪ هم ( رښتیا)

جمله: که ۲ ٪ پس ٦٪ هم ( نارښتیا)

۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دننني کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دئ۰

په ځټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دننني کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته( هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځنې او یواځنې تاکلی یا یواځنی تاکلی او په ځټ ) ولاړکونجیز دئ، کله چې دننني کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي څخه هر یو څو کلن دئ؟

د ځوي عمر په $x$ سره ښایو، نو د پلار عمر $7x-1$ دئ او د نیکه عمر $2(7x-1)+6$ کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دئ یانی :

ketabton.com - The Digital Library



---

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کيږي او ساده کيږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \;\; \vee \;\; 22x +3 = 113$$

په کينې ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزيات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دئ

نو دا ګڼې ۲۲ ځله x بيا ۱۱۰ کيږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده يانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ٥ کلن پلار ٣٤ کلن او نيکه ٧٤ کلن دئ۰

که ترمونه $T^{\wedge}$ او$T^{\circ}$ د برابروننخښنی = باندې يو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابرون پيداکيږي: $T^{\wedge} = T^{\circ}$ ۰

که چيرې ترمونه په دې نخښو $\leq$ , $\geq$ , $<$ , $>$ او(نابرابروننخښه =| ) يو له بل سره وتړل شي يو نابراون منځ ته راځې.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي يا مجهولو سره يوځاي شي، هغې ته د وينافورم يا نوره هم ښه وينا بڼه ويل کيږي۰

دا يا رښتيا يا نارښتيا وينا کيدی شي۰ که ناټاکلي، چې اوښتونې يې هم بولو( د بيلګې په توګه z , x , y ) پر ځاي د بنسټيزې ګڼونه وليکل شي۰ په برابرونپوهنه کې له پيژند – يا تعريفيدېزی ځخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم يا بڼې يو برابرون يا نابرابرون رښتيا وينا کړي۰

د يو برابرون يا نابرابرون (مساوات يا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې ويناښه پيژند - يا تعريفيدېزی پورې اړوند وي او دا وينا ريښتينې کوي، اوبيډيزی يا حلډيزی L کې پروت دی يا د برابرون يا نابرابرون په ډکوونکو ( پوره کوونکو) ډيريو پورې تړلې برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ريښتونې وينا ورکوي کټمټ يا (identisch, identic) وينا وايي۰

ketabton.com - The Digital Library



---

بیلګې :

الف )  $5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب ) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $-4 = x$ لپاره رښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په څټ $3.4 = 48$ پس- $L = \{ 4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 \Rightarrow L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب ) $x < 3 \Rightarrow L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی : الف ) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب ) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیرېکې سره برابر وي( یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیرۍ ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي۰

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

ketabton.com - The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

| | نابرابرون | براون |
|---|---|---|
| ۱ ) وينافورم کې کيدی شي،چې خواوې سره بدلې شي | T° < T^   T^ > T°<br>2x < 6   6 > 2x | T°=T^   T^ = T°<br>3x=5y   5y = 3x |
| ۲ ) که وينافورم په دواړو خواوو همغه ترم زيات يا کم شي او د يوې ورزيات ترم پيژندډيرى خوندې وساتل شي يا ځاي کړي | T^ < T° =><br>T^ ± T° < T° ± T^ | T^ = T°=><br>T^ ±T° = T°± T^ |
| يا تغير ونه خوري٠<br>مخامخ يا کينې لوربيلګه<br>کې تفريفډيرى تغير خوړلی | 3y < 4x ⇔<br>⇔ 4y±2x < 4x±2x | 2z = 8 =><br>2z ± 3 = 8 ±3 |

پر ځنډ بيلګه

2z=8 |=> 2z+3-z=8+3-z

دا چې z=4 دې نوي ورزيات شوي

ترم 3-zنه دی تعريف يا پيژندنه

لري، ځکه چې z - 3 يو پيدايينتي يا طبيعي ګڼ نه دی

۳ ) د وينافورم دواړه T^=T° ⇔ T^.T > T°.T ⇔ T^ <T°

ketabton.com - The Digital Library



---

| | | |
|---|---|---|
| اړخونه کیدی شي چې | T^ < T° ⇔ | T^.T =T°.T |
| له همغه مثبت ترم سره | T^:T>T°:T | ⇔T^:T = T° : T |
| ځل او یا په همغه ترم | T > 0 که | T > 0که وي |
| وویشل شي | 3y -12 < 30z -90 | 4x+2 = 10x-6 |
| | ⇔ y – 4 < 10z -30 | ⇔2x + 1 = 5x -3 |
| | ⇔ 4y -16 < 40z -120 | ⇔ 2xc + 10 = 50x-30 |
| ٤) د یوه برابرون | T^ <T° ⇔ T^.T > T°.T | T^=T° ⇔ |
| دواړه خواوې کیدی شي، | T^ < T° | T^.T =T°.T |
| چې له یوه منفی ترم سره | ⇔T^:T = T° : T | ⇔T^:T>T°:T |
| ځل شي یا دواړه خواوې په | T < 0 | T < 0 |
| همغه ترم وویشل شي٠ | -2y < -4 | 3x = 12 |
| که په دې فورم کې | ⇔ y> 2 | ⇔-9x= -36 |
| نابرابرونونه وي نو د | ⇔ 10y > 20 | ⇔ x = 4 |

برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي

یادونه :

په تولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه Tیو او T دوه په لاندۀ توګه د ایندکس سره په نخښه کوي: $T_1, T_2$

ketabton.com - The Digital Library



---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د رښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د رښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - ( A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

ketabton.com - The Digital Library

## ۲ ۰ ډيرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډيرۍ پوهنې يا سټ تيوري بايد خپل ځاي په شميرپوهنه او همدا ډول په نورو پيداينتي- يا طبيعی پوهنو کې نيولي وي، نو له دې امله د لنډ تير وخت را په دې خوا په پرمختللو هيوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځيو په ليکلوست کې پيل شوه، ځکه چې بې له ډيريپوهنې يا سټ تيوري شميرپوهنه بې مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې ليکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پيداينتي يا طبيعي ګڼونه يا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څيره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډيرۍ يا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډيري پوهنې (سټ تيوري)په پرمختللو هيوادونو کې هم د شلمې پيړۍ په دويه نيمه کې د ميندو او پلرونو لپاره ستونځې پيدا کړي، ځکه، چې دوي د ډيرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنيانو سره يې مرسته نه شوه کولی۰

د ډيرۍ کلمه له عدددونو يا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښوولـه لکه اوس۰

ketabton.com - The Digital Library



په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ یا ډېرئ پيژندل کيږي، لکه د ښوونځی نجوني او هلکان، یا په یوه ټولګی کې میزونه او چوکی، یا لکه هغه نیزوږي، چې نیز راوړي او د سپین په پټي کې يې ډیرئ ډیرئ اچولي یا د هسکې مینې د ښوونځي په لسم ټولګی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکیو او میزونو سټ یا ډيرئ.

د ډېرئ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډیرئ له کلیمي سره اوس بلد شوي یو که څه هم تربیلو بیلو پردیو نومونو لاندې، چې زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته یوائې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چې د ډیرئ څو مختلف پيژندونه یا تعریفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چې د ډیري پوهنې ( سټ تیوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوګرځي.

ډیرئ پوهنه د شمیرپوهنې سټه جوړوي او د شمیرپوهنې ټولې څانګې په ډیرئ پوهنه ودانې دي. نن شمیرپوهنه بې له ډیرئ پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه یې وزي.

پيژند ۲ ۰ ۱

الف : ډیرئ یا سټ د ټاکلو شیانو یا کلمو ټولګه ( یوځایوالی، مجموعه) ده، چې پخپله خوښه د یوې ټاکلې بنسټډیرئ یا بنسټ سټ څخه ، چې د پيژندلشویو اصولو یا کرکتریین له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شمیرپوه کانتور( George Cantor 1845 – 1918 ) پيژند:

زموږ د خیال یا لید څرګند ټاکلو ، ټیک یو له بل توپیرکیدونکو شیانو ټولګې ( یوځایټولولو یا مجموعې ) ته ډیرئ وایي او هر شي ته، چې ډیرئ یې جوړه کړې یا ډیرئ ترې جوړه شوې وي، د ډیرئ – یا سټ توکی وایی.

( Set and elements of set ډیرئ او د ډیرئ توکی)

پ : د مختلفو شیانو ټولګې یوه یوون یا یووالی ( واحد Einheit, unite) ته په

ketabton.com - The Digital Library



شميرپوهنه کې ډيرۍ وايي

يادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد يو يوون يا يووالی ښه نومه ونې دي٠ دا که څو واره وويل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلديږو٠

ت : څرګند شيان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر څيړنې لاندې نيول کيږي او د دې نخښو له امله يوځاي ټوليږي يا ټولګه جوړوي، ډيرۍ يا سټ تشکيلوي٠ ګډې نخښې کيدی شي ښکلا، کوچنيوالی او داسې نور وي٠

يادونه: د ګرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پيژندونو کې يې غوره او د پام وړ پيژند ياتعريف د جورج کانتور پيژند دی.

بيلګه :

ګڼونه يا عددونه، نومونه، او توري کيدی شي د ډيريو بيلګو په توګه راوړل شي٠

ګورو، چې د ډيرۍ يا سټ کلمه په شميرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډيرۍ د څنو شيانو زيات يوځاي کول موخه ده، د ځانګړو شرايطو لاندې.

په شميرپوهنه کې ډيرۍ په لويو لاتين تورو ليکل کيږي لکه ..A,B, او يا M,N,
X,Y,…. د ډيريو توکي د لاتين په کوچنيو تورو ليکل کيږي، لکه …a,b,c,
او …m,n,x,v,

د دې لپاره، چې وپوهيږو، چې ايا توکی a د ډيرۍ A توکی دی که نه نو ليکو: $a \in A$

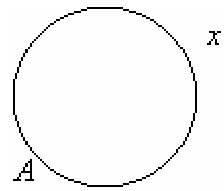
په پورته کې توکی a د ډيرۍ A توکی دی.

که a د A توکی نه وي ، نو ليکو: $a \notin A$ دلته a د ډيرۍ A توکی نه دی

دا پورته لينکدود له ښی وکيڼ لور ته هم ليکلی شو، چې پرلپسی لړۍ يې ساتلې پاتې شي٠ زه يې په څټ ليکنو سره ليکنيزې ستونځی لرم٠دا لاندې يې دياګرام دی، خو توکي يې بل ډول ليکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهيدلو ستونځ پيدا نه کړي

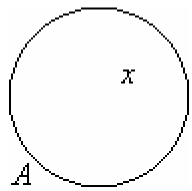
ketabton.com - The Digital Library






$a \in A$

( a  د A توکی  نه  دی)




$a \notin A$

( a د A توکی دی )

ډيرۍ A دې له a,b,c,d,e,f,g,h,  توکو جوړه وي، چې  په لاندې توګه يې ليکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډيرۍ يا سټ نخښه ده

يادونه : دا د ډيرۍ کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګريزي ده، په فارسي کې يې مجموعه بولي، چې ډيرۍ د شيانو مجموعه يا ټولګه  ده او په الماني کې ورته مينګې Die Menge وايي٠ هغه بنسټيزه خبره يې په پيژند يا تعريف کې ده، که موږ يې چې هرڅنګه وبولو، خو د يو بل څخه کره توپيرکيدونکو شيانو ټولګی ته ٠٠٠ وايو. د ټکو پر ځاي ، چې هر څه ليکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو يې هغۀ مناسبه نوموه ونه ډيرۍ ده، دا د کوټې کوټې څخه يا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاريږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شميرپوهنه کې بايد وکارول شي٠ زه  بيا په دې ټينګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی يا بل څوک يې که بل ډول بولی د انګريزي يا الماني يا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ  دی٠ د سټ مانا که په ډکشنري کی وګورئ ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب  دئ. ګوروو چې دا نوم اوس ژورنالستان هم زيات  کاروي او وايي، چې ډېرۍ يا ډېرۍ خلکو.... وکټل.

ketabton.com - The Digital Library



بیلګه ۲ ۰ ۱

الف ) $M_1$ ( لوستل Mایندکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces ایندکش پیژند نخښې ته وایي) دې د لومړیو ګڼونو ډیر ۍ ( اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب ) $M_2$ دې د لاندې برابرونونو یا مساواتو د اوبیونو(حلونو) ډیرۍ وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بیلګه ۲ ۰ ۲ :

الف ) د مساوات $(x+1)(x-2) = 0$ حل ډیرۍ $M_2$ ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب ) د جوړه (جفت) عددونو یاګڼونو ډیرۍ $M_3$ ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ....\}$

ډیرۍ لکه، چې ومو ویل د توکو د خویونو له لارې هم څرګندیدی شي یا ورکول کیدی شي۰

M = { x | ۰۰۰ سره د خوویونو x}

(لوستل: M د ټولو x ډیرۍ ده له خویونو ۰۰۰۰۰ سره )

بیلګه ۲ ۰ ۳

الف ) { د ټولو x سټ ، چې هلته x یو لومړنی عدد یا ګڼ دی| M = { x

b ) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$

ketabton.com - The Digital Library



تشډيرئ: ډيرئ، چې کوم توکی ونه لري تشډيرئ يا خالي سټ بلل کيږي او داسی يې ليکو: $\theta$ يا $\{\}=\emptyset$

دا دې د يوې ډيرئ يا سټ سره، چې يوائی له صفر څخه جوړه ده، نه بدليږي يانې

$$\{0\}\neq \{\} = \emptyset$$

بيلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x\in Z, x^2+x-\frac{3}{4}=0\}=\theta$$

ځکه، چې د برابرون يا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډيرئ

$$\{x|x^2+x-/4= 0 \} = \{ 1 / 2 \ , -3/2\}$$

کوم ټولګڼ يا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګڼونو پيژند ته دې پام وي، چې د راشنلګڼونو برخډيرئ ده۰دريمه برخه دې وکتلشي

بيلګه ۲ ۰ ٥ : د ز۰ کال د دويمې نيمايي مياشتو سټ يا ډيرئ په Ju , aug sep , ok,no, de سره ښايو او ليکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو يا نوره هم ښه داسی ليکلی شو: $jul\in A, jun\notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دئ

بيلګه ۲ ۰ ٦ : ټول منديزي، چې نن مازيګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون يا جماعت ته راغلي۰

بيلګه ۲ ۰ ٧ : د هغو ميږو ، غواوو او وزو ډيرئ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بيلګه ۲ : ٨ د ټولو هغؤ ګڼونو ډيرئ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ويشي يانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ٥ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱٥ ، ۳۰

ketabton.com - The Digital Library



داسې يې لیکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسې وايو، چې ډیری یا سټ M د ټولو هغو توکو x - لکه پورته - جوړ شوې، چې ۳۰ ویشي او داسې يې لیکو: $M =\{ x \mid$ د x ۳۰ پرویشونی ګڼ $\}$

د ټولو پیدايښتي یا طبیعي ګڼونو ډیری(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې يې لیکو:

$$N = \{ 1,2,3,4\ldots.\}$$

دا نه پای لرونکی یا لایتناهي ډیری( سټ) ده ، چې په لاندې ډول يې نخښه ده یا په لاندې ډول په نخښه کیږي: $\infty$

ګورو، چې په شمیرپوهنه کی موږ پر پای ګڼونو برسیره ناپای عددونو سره هم مخامخ یو۰

## ۲ ۰ ۲ د ډیریو ترمنځ اړیکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړیکی د برابروالی او خوندیوني یا خوندي لرنې ( مساویوالی او یو په بل کې ځاي لرلو) اړیکې دي۰

پیژند ۲ ۰ ۲ دوه ډیري یا سټونه $M_1$ او $M_2$ یو د بل سره برابرې دي، یانې

$$M_1 = M_2$$

که چیرې د ډیری یا سټ $M_1$ هر توکی د ډیری یا سټ $M_2$ توکی هم وي او پر ځښ یا برعکس هر د $M_2$ توکی د $M_1$ توکی هم وي۰

برابرې ډیری برابر توکي هم لري

ketabton.com - The Digital Library



د بیلګی په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې $M_1$ د $M_2$ سره برابر دئ

## برخډیرۍ(سبسټ subset)

پیژند ۲ ۰ ۳ :

یوه سټ $M_1$ د سټ یا ډېرۍ $M_2$ برخډیرۍ ( لاندې ډیرۍ، خوندي ډیرۍ یا سب سټ ) بلل کیږي یا $M_1$ په $M_2$ کې ځای ده یا نوره هم ښه $M_1$ په $M_2$ کې خوندي ده، لیکندود یا لیکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډیرۍ $M_1$ هر توکی دسټ یا ډېرۍ $M_2$ توکی هم وي۰

کیدی شي، چې $M_1$ د $M_2$ سره برابر هم وي، که برابروالی یا مساوات نا شوني وي نو بیا د اصلي برخډیرۍ یا اصلي سب سټ څخه غږیږو۰

پیژند ۲ ۰ ٤ :

یوه ډیرۍ یا سټ $M_1$ د $M_2$ اصلي برخډیرۍ ده او داسې یې لیکو: $M_1 \subset M_2$

ketabton.com - The Digital Library



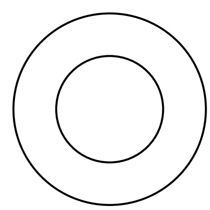
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د $M_2$ یو توکی د $M_1$ توکی نه وي۰

بیلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو $M_1$ په $M_2$ کې اصلی خوندي دی

ب ) د ټولو څلوریو ( مربعو) ډیرۍ د ټولوڅلورګوډیو( څلور اضلاعو) اصلي برخډیرۍ ده۰

پ) څیره ۱ ۰ ۱ په هواره یا سطحه کې ټکوډیرۍ ښایي، د کومو لپاره چې باور لري، که $M_1$ او $M_2$ د ټکو ډیرۍ یا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څیره کې وګورو، نو یوه ګردۍ ( دایره ) $M_1$ په بله لویه $M_2$ ګردۍ کې خوندي ده۰

تشډیرۍ په هره ډیرۍ کې خوندي ده۰ هره ډیرۍ په خپل ځان کې د نااصلي برخډیرۍ په څیر خوندي ده۰

یا دا پیژند :

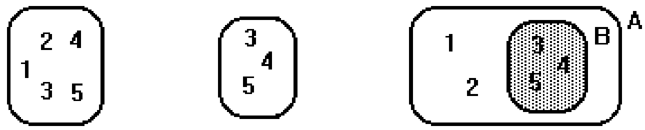
A⊆B که باور ولري : x∈ A ⇒x ∈ B

بیلګه:

A⊆A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

ketabton.com - The Digital Library






پيژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډيرۍ، چې هيڅ توکی ونه لري تشډيرۍ بلل کيږي او داسې يی ليکو: $M=\theta=\{\}$

يادونه : پام دې وي، چې صفر ډيرۍ او تشډيرۍ سره بدلې نه شي يانې لاندې ته:
$\{\}=\theta\neq\{0\}$

## د يوې ډېرۍ توان يا توانډېرۍ ( توانسټ)

پيژند ۲ ۰ ٦ :

د يوې ډيرۍ M د ټولو برخډيريو ډيرۍ پوتنځډيرۍ يا په توانډيرۍ(-سټ) بلل کيږي او داسې يې ليکو: P(M) په توانډيرۍ توکي لري، چی هر يو يی بيا خپله ډيرۍ ده۰

بيلګه : د $M = \{ a,b.c\}$ ډيرۍ دا لاندې په توانډيرۍ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډيرۍ چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټيک n جګ 2n توکی لري يانی : $n^{2n}$

دا پورته د جملې په څير د پوره ايندکشن له لارې اوبی ( حل-) کيدی شي( لومړۍ برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د ګرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي يې۰

پيژند ۲ ۰ ۷ : د ډيرۍM زور |M| لاندې د ډيرۍ د توکو تعداد ياګڼون پوهيږو۰ که دوه ډيرۍ M اوN همغه زور ولري هغه ته يوزوريزه – يا برابرزوريزه ډيرۍ وايو او داسې يې ليکو: $|M| = |N|$

ketabton.com - The Digital Library



د برابرونونو یا مساواتو او خوندې ساتنو خویونه

الف ) رفلکسیو- یا د انعکاس( هنداورنيزې) اړیکېreflexivity

هغه اړیکي، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ رینتوني وېناوې ورکړ شوي وي رفليکسيويا انعکاسي اړيکي بلل کيږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خوندي لرل اړیکې رفلکسیو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هیڅ ډېرۍ د خپل ځان اصلي برخډېرۍ یا برخسټ نه شي کیدی۰

ب) سیومتریکې اړیکې Symetric relation

هغه اړیکې سیومتریک بلل کیږي، چې د شیانو ترمنځ چې کارول کیږي یا استعمالیږي یو له بل سره بدلیدلی شي۰

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خوندي لرل سیومتریکې اړیکې نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړیکی $M_2 \subset M_1$ نارښتیا یا ناټیک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ ) ترانزیتیویتي Transitivity یا وړون اړیکې

ترانزیتیویتي هغه اړیکې دي، چې له یوه نه وبل ته یې د وړلو امکان شته یا موجود وي۰

له L = M او M = N څخه لاس ته راځي L = N

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

ketabton.com - The Digital Library



پورته داسې لولو: که $M_1$ د $M_2$ برخډيرئ او $M_2$ د $M_3$ برخډيرئ وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې $M_1$ د $M_3$ برخډيرئ ده

برابونونه يا مساوات او په بل کې ځايه ونه يا خوندي ساتنه ترانزيتيو اړيکې يا خويونه دي

## ۲ ۰ ۲ په ډيرئ کې کارونې يا عمليې

ټولنډيرئ (د اتحاد سټ )

پيژند۲ ۰ ۸ :

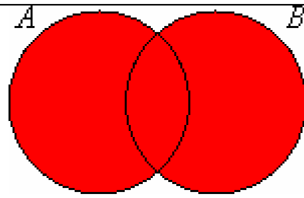
د دوه ډيريو $M_1$ او $M_2$ ټولنډيرئ(unionاتحاد سټ)، چې د ډيريو ټولنه ورته وايو ده:

$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسې پوهيږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډيرئ يا سټ ده، چې لږ تر لږه د $M_1$ او $M_2$ توکي هم خوندي ولري۰

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د $M_1$ يا $M_2$ توکی هم دئ ( پرتله ۱ ـمه برخه د يا سره پرتله) يانې دا د ټولنډيرئ توکی د $M_1$ يا $M_2$ او يا د دواړو توکي دي۰

يا لاندې دياګرام

| | |
|---|---|
|  | $A ? B$<br>$A \cup B$ ( B تولنه A)<br>x ) د $A$ سره $B$ اړيکې لري ) |

بيلګې

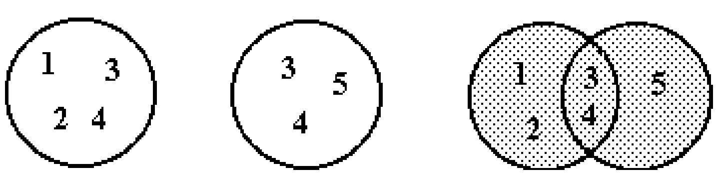
الف ) $M_1$ دې د ځوانانو ډيرى وي، چې بکلوريا لري او $M_2$ دې د هغو ځوانانو ډيرى وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډيرئ ده، چې بکلوريا او مسلکي شهادتنامې ولري او يا دواړه شهادتنامې ولري.

ب )

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

يا په لاندى توګه پيژند او بيلګه: A او B دې دوه ډيرى وي د دې ډيريو ټولنه داسي ليکو

B} ∈x∨A ∈B = {x | x∪A
∪A={1,2,3,4}    B={3,4,5}    A
B={1,2,3,4,5}




تل په ټکو ټکي شوې ټکيډيرى ټولنډيرى په ګوته کوي.

پ – ځيره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې ټکيډيرى په ګوته کوي، چې

ketabton.com - The Digital Library



الف ) ټکيپردۍ دي٠ ب) ګډ ټکی لري٠

پ) اړيکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره څيرې په لاندې کې په بيلګو کې راغلې دي٠

د ټولنې لپاره کموتاتيو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسي دلته(لنډ: لړۍ) د ډيريو په ټولنه کی رول نه لوبوي

يادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ٠٠٠ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بيا دا سره جمعه کړو لکۀ

1 , 1+2,1+2+3,1+2+3+4+,1+2+3+4++..+….

نو دا لړيپرلپسې يا لنډ: لړۍ بولو( پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زياتو ډيريو ټولنه لړۍپرلپسی( لنډ: لړۍ ) رول نه لري٠

اسوڅياتيو قانون باور لري٠

$$(M_1 \cup M_2) \cup M = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډيرۍ (د ډيريو غوڅی يا –متقاطع سټ) intersection

يادونه : دا کړی شو، چې د ډيرو ګډغوڅی وبولو( دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټيکوالی په کې نه شته)

پيژند:

ډيرۍ M د ډيرۍ $M_1$ او ډيرۍ $M_2$ غوڅډيرۍ يا د تقاطع سټ ده( لوستل: $M_1$

غوڅ(پرې)په $M_2$ ( لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

ketabton.com - The Digital Library



که د ډیری M ټول توکي د ډیری $M_1$ او ډیری $M_2$ توکی وي.

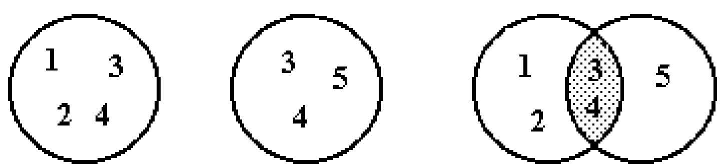
د غوڅډیری $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډیری $M_1$ او ډیری $M_2$ توکي دي ( د ۱ –مې بری د هم او هم په مانا یا د «او» په مانا)

یا دا پیژند :

د ډیریو A او B غوڅی $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بیلګه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3,4\}$




یادونه: دې پورته ډول دیاګرام ته د ون دیاګرام Venn-Diagram یا د Euler-Venn- Diagram وایی

بیلګې :

لومړی : یوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتیا څخه راځي، چې په $M_1$ یې په نخښه کوو. یوه بله ډله ، چې په $M_2$ یې په نخښه کوود کندهار او همغه د پکتیا زده کوونکي، چې په M سره یې ښایو، دي. د دې دواړو ډلو غوڅډیری

$M = M_1 \cap M_2$

د پکتیا زده کوونکي دي.

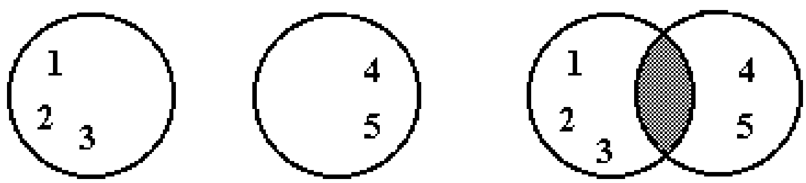
ketabton.com - The Digital Library



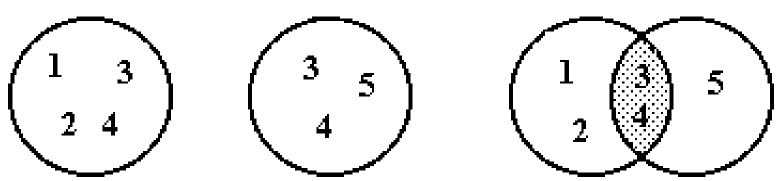
دويم:

$$M_1 = \{k,a,r\}, M_2 = \{u,r,s,e,l\},$$
$$M = M_1 \cap M \;\; = \{r,l\}$$

دريم څيره ۲ ۰ ۳ په هواره يا سطحه کې ښايي، چې الف) ګنون پردي دي




ب) يو بل سره ګډ ټکی لري




پ ) اړيکی

$$M_1 \subset M_2$$

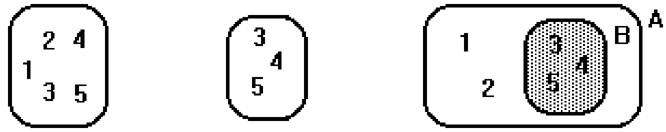
پوره کوي

بېلګه:

A⊆ A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

ketabton.com - The Digital Library






هغه ټکو باندې ټکي شوې ډېرۍ اصلي برخډېرۍ ده

دوه ډېرۍ، چې غوڅډېرۍ يې تشډېرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونيوله پردۍ بلل کيږي

د غوڅډېرۍ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډېرۍ لپاره کموتاتيو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوشياتيو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډېرۍکارونو يا ډېرۍ عمليو يانی ټولنډېرۍ او غوڅډېرۍ لپاره دواړه ديستريبوتيو قانونونه پوره کيږي يا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

( د ګڼونو د شميرکارونو يا عمليو لپاره يواځې يو دستريبوتيو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټوليزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

ketabton.com - The Digital Library



پيژند :

کمونډيرئ يا تفريق سټ $M_2$ د ډيرئ $M_1$ او ډيرئ M کموالی يا فرق دئ او

داسې يې ليکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د $M_1$ ډيرئ کمه شوې

يا کله چې د $M_2$ توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډيرئ $M_1$ توکي نه وي۰

ليکندود ياليکنډول :
$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A اوB توپيرډيرئ ياکمونډيرئ يا تفريقډيرئ له ټولو هغو توکوx جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دئ او x د B توکی نه دئ

بيلګې :

لومړئ : په يوه ټولګي کې $M_1$ د ټولو نارينه وو زده کړو ډيرئ ده او $M_2$ دټولو زده کړو ډيرئ ( د نارينه وو او ښځينه وو ) ، چې په شميرپوهنه کې لس نمرې وړي۰

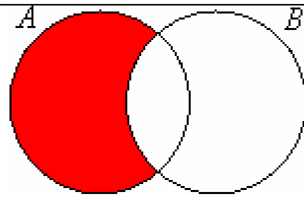
$M_1 / M_2$

د هغو زده کړو ډيرئ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډيرئ ده، چې په شميرپوهنه کې يې لس نمرې وړي۰

که په ټولګي کې يواځې نارينه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

يا دا لاندې :

| | |
|---|---|
|  | $A\backslash B$<br>( A بې له B )<br>( x له A سره B اړیکې‌لري ) |

دویم :

$$M_1=\{k,r,a,i\}, M_2=u,r,s,e,l\}$$
$$M_1/M_2=\{k,a\}, M_2/M_1=\{u,s,a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلګي را په ګوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

$$M_1/M_2 \neq M_2/M_1$$

## د یوې ډیرۍ یا سټ کمپلمنت یا پوره کوونکی :

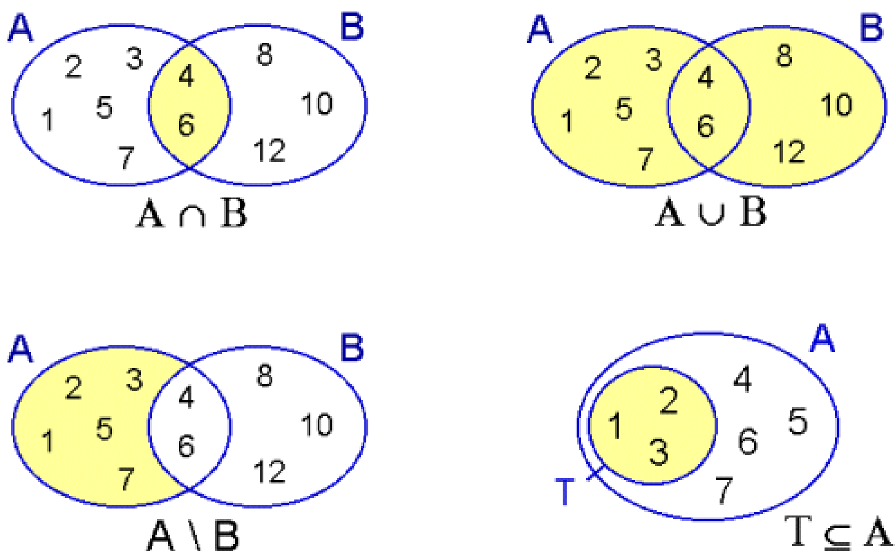
دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډیرۍ کی مو څیړلي۰ دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نورې دوه ځایزې کارونی یا عملیې دي۰

موږ بنسټډیرۍ په U او د ټولو هغو توکو ډیرۍ، چېU کې پراته دي یاني دU توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یاني د M توکي نه دي پوره ډیرۍ یا کمپلیمنت بولو او د $\bar{M}$ سره یې په نخښه کوو۰

په لاندې څیره کې بیا د ډیرۍ غوڅۍ، - ټولنه او – کمون او برخډیرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زیات پام را اړوو۰

ketabton.com - The Digital Library






پیژند:

پوره کوونکی- یا تکمیلډیری ( یا د یوې ډیری کمپلیمنت ) د یوې ډیری M پوره کوونکې ډیری $\bar{M}$ تیک هغه توکي لري( د بنسټډیری U څخه) ، کوم چې د M توکي نه وي٠

دوه ځله کمپلیمنټډیری جوړول خپلي لومړنی وینا ته ځي ، یاني $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلګه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنی د توپیر او برګ کورنی اوسیږي٠ که دا دوه کورنی یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیری یا تکمیلډیری بلل کیږي یاني دا کلی پوره کوي٠

## ۲ ٠ ٤ څیرونه mapping یا اړیکې:

ketabton.com - The Digital Library



يادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع كلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو .

په دې برخه كې لومړى د ډيرئ ضرب كلمه پيژنو يا تعريفوو او بيا د ضرب كلمې كارونه څيړو .

پيژند ٢ . ٩ : د دواړو ډيريو M يو او M 2 ډيريضرب( اتيرانضرب) هم ورته وايي، يانې په x سره ځليږي يا ضربيږي

$M = M_2 \times M_2$

د ټولو تنظيم يا ترتيب شويو توكو

$x \in M_1, y \in M_2$

جوړو (x,y) ډيرئ ده .

بيلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظيم له مخې ځل په ډيريو كې كموتاتيو نه دئ دا په دې مانا، چې

په ټوليزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

٢ – R دې د ټولو رييلګڼونو ډيرئ وي . په هندسي مانا د كرښې د ټولو ټكو ډيرئ . RxR د ټولو رييلګڼونو جوړو ډيرئ ده، په هندسي مانا د هوارې يا سطحې د ټولو ټكو ډيرئ ده .

پيژند ٢ . ١٠ :

د څيړونې F لاندې د دوه ډيريو د ضربډيرئ $M_2 \times M_2$ برخډيرئ پوهيږو .

ketabton.com - The Digital Library



پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیری، چې $x \in M_1$ له یوه یا ډیرو توکو $y \in M_2$ سره تنظیم یا بهتره په باندې ځیره شي٠

داسی هم ویلی شو: د1 M توکي د2 M په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا ځېړه کیږي٠

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوریجنل یا اصلي توکی او y ځیره توکی بلل کیږي٠

د ټولو اصلي توکو ډیری پیژندورشو یا تعریفورشو یا پیژنددیری یا تعریفډیری بلل کیږي او د ټولو ځېړه توکو ډیری د ځېړونې ډېری، ارزښتورشو یا ارزښتډیری بلل کیږي٠

بیلګی

$$M_1 = \{a,b,c,d\}, M_2 = \{1,2,3,4\}$$

د جدول په توګه دM یو توکو ځېړونه ونه یا ځېړه کوونه د M دوه په توکو

ځېړه توکی اصلي توکه یا ځیره کوونکی توکی

a -----------------------→ 1 , 2 ,5

b -----------------------→ 4

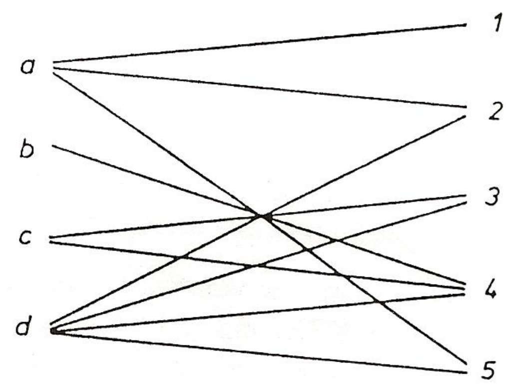
c -----------------------→ 3,4

d -----------------------→ 2,3,4,5

یا دا لاندې:

ketabton.com - The Digital Library






ځیرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

( د M یو او M دوه ډیریو د ټولو توکو جوړو ډیرۍ)

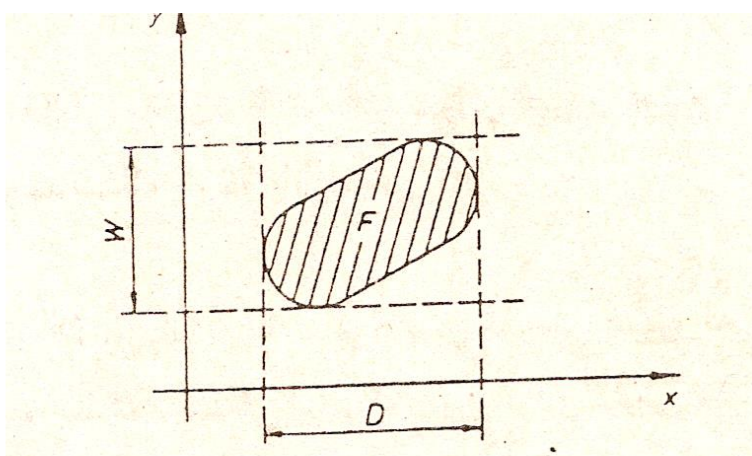



Bild 9.6 ځیره

دریم : هر پیداینښتي یا طبیعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې ځیره کیږي۰ داسې پیژند شوې یا تعریف شوې ځیره ونه په لاندې بڼه هم انځوریدلی شي۰

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

ketabton.com - The Digital Library



دلته هم N د پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیرئ٠ پیژندډیرئ یا تعریف- د ټولو پیدایښتي ګڼونوډیرئ ده او ارزښتډیرئ د ټولو جوړه ګڼونو ډیرئ ده٠

څلورم : که M یو په یوه ښوونځي کې د ښوونکو ډیرئ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګیو ډیرئ وي نو ښوونکي، چې په ټولګیو کې درس ورکوي دا یوه څېرونه ده٠ د ښوونکو ډیرئ د ځانګړو ټولګیو په ډیرئ کې

موږ د څېره ونې څلور حالتونه توپیروو:

پیژندونه( دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړئ بیلګه کې په څیره ونه F کې د1 M ، چې تعریفډیرئ D سره برابر دئ او M2 ، چې له څیره ډیرئ , W سره برابر دئ ، توکي مو مخ ته پراته دي٠

له یوې څیرونې Fغبرګېرو د1 M په M2 باندې٠ دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دویمه بیلګه کې ، نو د یوې څیره ونې F غبرګېرو له M1 په M2 کې ( دلته دې

« په » او ٫په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د یوې څیره ونې غبرګېرو د1 M په M2 کې دلته دې دریمه بیلګه په پام کې راواړل شي٠

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د یوې څیره ونې غبرګېرو له M1 په M2 باندې٠ دلته څلورمه بیلګه د بیلګي په توګه راوړو٠ د دې نیونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګیو ته درس ورکوي٠

ketabton.com - The Digital Library

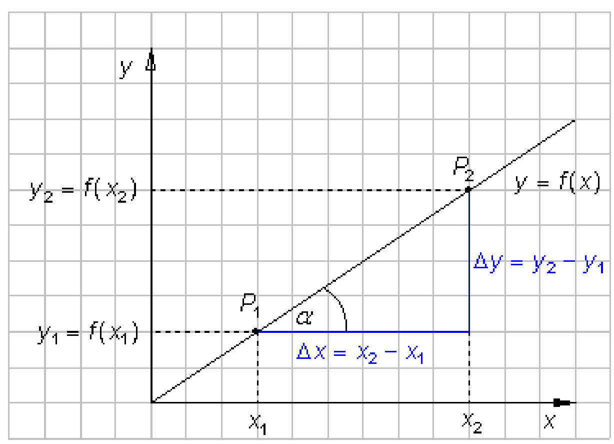


يادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شايد څيرې هم رانه شي، خو که لږ د شميرپوهنې سره بلد شو، بيا پرې پوهيدل ساده دي٠ زه مخ ته لرم، چې په دې هکله ليکلى کتاب، چې چاپ شوى نه دى دلته پر ليکه کړم، چې هلته بيا دا موضوع لږ غزيدلې ده٠

بيلګه ۲ ٠ ۵ : موږ په هواره يا سطحه کې څرګند شوې کړى د ډېريځل RxR په څير د برابرونونو له لارې رانيسو( R د ريبلګنونو ډېرى د ګنګربنې ټکې دې( ګڼونه دې وکتل شي))٠

الف ) $y = 2x$ يوه څيره ونه ده د R په R باندې ، څکه چې باور لري

$$D=W=R$$




يادونه : په پورته څيره کې برابرون $y = ax+b$ دى.

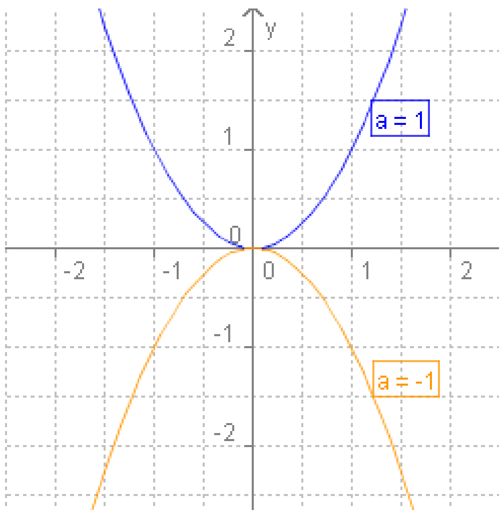
ب ) $y = x^2$

يوه څيره ونه ده د R په R کې ، څکه چې باور لري

$$D = R\ ,\ \ W = [0, \infty]$$

ketabton.com - The Digital Library





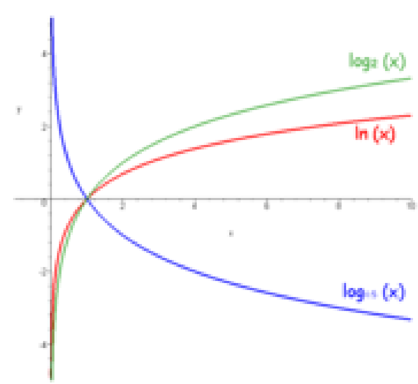

یادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ دول دی، چې b = 0 , c = 0 او a = 1 , a = -1 اینبول شوي دي.

پ ) y = log x

یوه خیره ونه ده له R په R باندې « حُکه چې باور لري.

$$D = (0,\infty) \wedge W = R$$



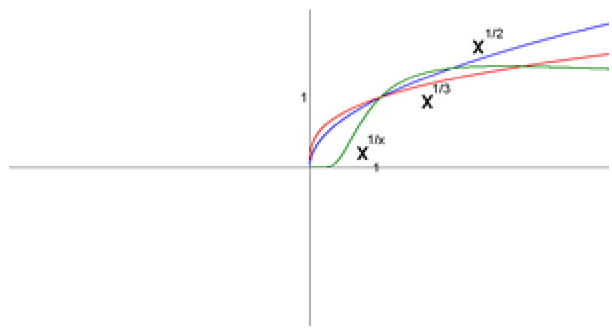
ketabton.com - The Digital Library



ت ) $y = +\sqrt{x}$

یوه ځیرونه ده له R په R ، څکه چې باور لري

$D = W[0, \infty]$




یادونه : پورته د دویې ،دریمې او په x -مې ریښې په مانا دی

ځیرې له ویکي څخه په مننه راکښته شوي دي٠

پیژند ۲ ٠

یوه ځیره ونه E یواځنی بلل کیږي٠ که هر $x \in D$ په ټیک یوه $y \in W$

باندې ځیره شي٠ دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ ټیک یووار په $y \in W$

تنظیمدیری یا جوړه ډیری کې رامنځ ته کیږي٠ یوه یواځنی ځیره ونه فنکشن

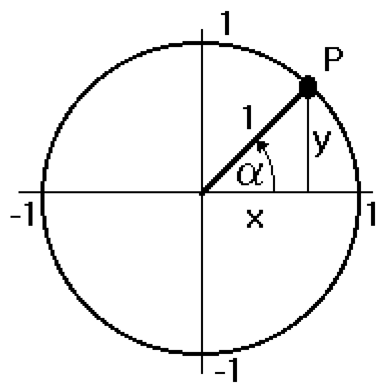
یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي٠

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنی ځیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم٠

ketabton.com - The Digital Library






بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ٥ کې له الف تر ت پورې تولې ځیروني فنکشنونه یا بلواک دی۰ د دې پر خټ لاندې برابرون ( یوونګردی یانې ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي ځیره ۰ ) انځور شوې ځیره ونه له R په R کې [1,1-]) D=W) فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه ځیرې لري یانې که په تنظیمجوړه کې د ځیره ونې لړي پرلپسې( لنډ:لړی ) بدله شي، نو یوې پرخټ ځیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : ځیره ونې F ته پرخټ ځیرونه $F^{-1}$ د ټولو جوړو (x,y) ډیری ده له $(x,y)\in F$ سره ۰

پیژند ۳ ۰ یوه ځیره ونه یویواځنی بلل کیږي، که یواځنیF او $F^{-1}$ یوازنی ځیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x\in D$ او $y\in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د ځیروني نوم څخه باید ونه ډار شو دا ځیره ونې ځیرې کووني (که څوک یو کالی یا رخت ځیرېکوي)او ځیره کووني توپیر، ځکه سره کیدی شي، چی هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ موږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه ( لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰
ډیرۍ پوهنه د شمیرپوهنې سټه ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وځیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د يوه کتاب په څير هم وړاندې شي.

۲ . ۵ تمرينونه

۱ – د لاندې ډېرۍ يا سټ توکي د شميرنې له لارې انځور کړئ

الف {$x$ لومړی عدد او $x < 20$ } $x$ | $x$ } ( لوستل: د ټولو عددونو $x$ ډېرۍ يا سټ، چې $x$ لومړنی عدد او $x < 20$ دی).

ب- $\{x|x^2+x-6=0\}$

پ-$\{x^2+x-6=0$ او $x>0$ | $x\}$ دا په نوکانوکې ټول له کيڼ ښي لور ته لولو

ت ) $\{x \mid x$ رييلګڼ او $x^2+1=0\}$ دا ټول له ښي او کيڼې لور ته ولولئ

۲ – د توکو $x, y, z$ اړلرونوالی و ډيري M ته وڅيړی !

الف ) M د لمړنيو ګڼونو ډيری

$x = 4, y = 5, z = 6$

ب ) M د لاندې مساواتو حلډيری ( اوبيلډيری )

$x^3 + x^2 - 6x = 0$

$x = 0, y = 2, z = 3$

پ ) M د ريشنلګڼونو ډيری چې په اينټروال [ 3 ,3- ] کی پراته دي

$x = -2, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = 1/3$

ت ) M د رييلګڼونو ډيری چی په اينټروال [ 3 ,3- ] کي پراته دي

$x = -4, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = 3$

۳ – د لاندې ډيريو ترمنځ کومی اسپکی پرتی دي

الف ) $M_1$ د ټول جفت ګڼونو ډيری

ketabton.com - The Digital Library



او $M_2$ د ټولو ټولګنونو ډیری

ب ) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$ , حلونو ( اوبیو ) ډیری

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ ) $M_1$ د ټولو ګنو ډیری چي پر ۶ ویشل کیږي.

او $M_2$ د ټولو ګنونو ډیری چي په ۳ ویشل کیږي !

او $M_3$ د ټولو ګنو ډیری چی په ۱۲ ویشل کیږي !

۴ – د ډیری $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډیري ورکړی !

۵ – د لاندي ډیریو څخه ټولنډیری ، غوڅډیري او دواړه ټوډیري جوړ کړی !

الف ) $M_1 = \{ k,a,m,e,l \}$ , $M_2 = \{m,a,u,l,t,i,e,r\}$

ب ) $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$, $M_2 = \{ 3 ,6 ,9,.... \}$

پ ) $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0\}$ , $M_2 = \{x \mid x^2-3x+2 = 0\}$

۶ – د یوه ډیری M او د تشډیري $\emptyset$ ټولنډیری، غوڅډیری او توپیرډیری جوړ کړی !

۷ – د یوه ډیری M او خپل همدي ډیری ټولنډیری ، غوڅډیری او توپیرډیری جوړ کړی !

۸ – وي دي $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8\}$

$M_3 = \{0 , 2 ,4 ,6 \}$ , $M_4 = \{ 6, 12 , 18 \}$

جوړ کړی : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3 ] \setminus M_4$ !

۹ – جوړ کړی

الف ) $M_1 \cup ( M_1 \cap M_2)$ پ ) $M \setminus \emptyset$

ب ) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت ) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دي

ketabton.com - The Digital Library



$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$

$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$

$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}, M_1 \setminus M_2 = \varnothing$

له دې پورته څخه $M_1$ او $M_2$ وټاکی !

۱۱ – وي دې

الف ) $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ ب) $M_1 \subset M_2$ ,

وټاکی: $M_1 \setminus M_2$ !

۱۲ – وي دی $M_2$ , $M_1$ (د نیمواز) اینتروال ټکي ډیري:

$M_1 = \{-3, 3\}, M_2 = [1, 7]$

وټاکی

الف ) $M_1 \cup M_2$ ب ) $M_1 \cap M_2$ پ ) $M_1 \setminus M_2$

ت ) $M_2 \setminus M_1$ ټ ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دې $M_2 = \{\{a, b\}$ , $M_1 = \{1, 2, 3\}$

الف ) د $M_1 \times M_2$ خل جوړ کړی

ددې لاندې ب ) تر ت ) برخی تمرین لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب ) دا لاندې کوم ډول ځیرونی دي

$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$

$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$

$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$

$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$

$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$

په ټولو حلنونو (اوبیو) کی $F_1$ تر $F_5$ ورکړی .

پ ) په ځټ ځیرونه ورکړی

ت ) د ځیرونو $F_1$ څخه تر $F_5$ پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځني دي ؟

ketabton.com - The Digital Library

# ۳ . دحقیقي اعدادو (-ګڼونو) سره د شمیرلو بنسټیزې نښلونې

( ترني، کارونی یا عملیي)

## ۳ ۰ ۱ د اعدادو د سیستم جوړښت

### ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ طبیعی اعداد یا -ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتیا درلوده۰ له دې امله يې پرمخ ودیینه کې هڅې وکړې، چی له ډیری (سیټ) (د لیکنې په دننه کې ډیری پوهنه هم څیړلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چی دا ډیری تشریح کړای شي او د انسانانو او چاپیریال( طبیعت) د پرلپسې اخ او ډب په نتیجه کې د ګڼ یا عدد وی( کلمه یا لغات) راپیداشوی، چې د عدد یا ګڼ کلیمي پربنسټ د ریښتینو شیانو څرګند څومره والي ( کمیت)Quantitative ترلاسه کړي۰ د طبیعی اعداد و څخه په ګڼلو یا که غواړې شمیرلو کې ګټه اخستل کیږي۰

ketabton.com - The Digital Library



## ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ الف د طبیعي عددونو(پیداېښتي ګنونو) جوړښت

پیژند (تعریف)۳ ۰ ۱:

الف ) ټول طبیعي اعداد د ډیری په څیر یوه ټولګه جوړوي او د طبیعي اعدادو ډیری یا سټ په نامه یادیږي یا یې طبیعي اعداد بولو او په N او همداسې N° سره یې په نخښه کوو۰

ډیر پای طبیعي اعداد شته ، ځکه چې په هر طبیعي عدد پسې راتلونکی طبیعي عدد هم شته دی ( یعنی په هرڅومره لوي طبیعي عدد پسې راتلونکی طبیعي عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کیږي)۰

## ب) دطبیعي ګڼونو(اعدادو) اکسیوماتیکيAxiomatic جوړښت

اکسیوم جمله ده، چې اوبیونه ( حل ) نه غواړي او همداسې منل کیږي۰ دا چې جمله ، اکسیوم څه دي په لومړی برخه یانې سم اند ( منطق ) کې دې وکتل شي۰

طبیعي عدد کلمه د جیوسیپې پیانو( Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز۰کال) اکسیومونو پر بنسټ لاندې پیژند لري یا په لاندې توګه تعریف کیږي:

۱ – د صفر ګڼ یو پیداېښتي ګڼ دی

۲ - د هرطبیعي عدد یا ګڼ m لپاره یو یواځنی ټاکلی طبیعي عدد n شته، چې سملاسي(ترلی) د m پسې ګڼ دی، د کوم لپاره چې لرو: $m+1 = n = m^\wedge$

دلته $m^\wedge$ د m پسې سملاسې یا ترلی ګڼ یا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبیعي عدد زیات له زیاته په یوه طبیعي عدد پسې سملاسي راتلونکی ګڼ دی۰

ketabton.com - The Digital Library



٤ – هیڅ طبیعي عدد نه شته، چی پسی راتلونکی پیداینسي عدد یې صفر وي٠

٥ – که طبیعي عددو ډیرئ M صفر د توکي په څیر ولري او که له هر طبیعي عدد m سره د هغه پسی ترلی راتلونکی عدد یا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبیعي عددونه خوندي لري یا په بل ډول » ټول طبیعي اعداد په کې ځاي دي٠

یادونه: ځنې ادبیاتو کې، د پیانو سیستم کې، د صفر په ځای ۱ لیکل شوی. په دې حالت کې بیا صفر ته د طبیعي عدد یا ګڼ په څیر نه کتل کیږي. که بیا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبیعي ا عدادو ډیرئ یا –ستڼ یې د صفر سره بولو.

## ۱ . ۱ ب : د طبیعی اعدادو یا ګڼونو انځورونه او سیستمونه:

طبیعي اعداد په نخښو ( دې ته په الماني کې Zifferوایي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څیرو، دی) انځوریږي. د دې لپاره چې دا لږ ځای ونیسي، نو د لویو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنیو سره یوځای کینښول شوې دي. دا چې څرنګه یوه د عدد یا ګڼ نخښه له بل توپیریږي، په لاندې ډول یې د زیاتون یا جمعي سیستم او ځای سیستم کې ښایو.

په زیاتون سیستم کې هر بنسټیز ،،ځای،، یو ،، ځای ارزښت،، لري. د څیفرونو زیاتون د یو په بل کې د ورزیاتشوي بنسټیز څیفر پخپله هغه عدد یا ګڼ ورکوي. بیلګه یې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنسټیزو څیفرونو جوړ شوی( ترې لاندې لسیز د اعدادو سیستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څیفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پیل راوړم:

ketabton.com - The Digital Library



| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| رومي عددونه: | M | D | C | L | X | V | I |
| عربي عددونه: | 1000 | 500 | 100 | 50 | 10 | 5 | 1 |

طبیعي عدونه له دې امله یو د بل ترڅنګ لیکو چې کم ځای ونیسي لکه د بیلګې په توګه:
CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کې، که بنسټیز کوچني ګڼنخښې لکه C , V , I د لوي ګڼنخښې و کینې لور ته ولیکل شي نو دا مانا لري چې دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی.
د بیلګي په توګه: XC = C - X .

**بیلګې: الف:** MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768
ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929
پ : CCCIV په دې مانا دی 304

**ځایسیستم:** په ځاي سیستم کې هره بنسټیزه نخښه یو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئیز ځاي سیستم ( پوزیشن سیستم ( (Positionssystem ) ): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئیزځای سیستم کې په دې ډول ده چې د یوه ورکړشوي ستې په بنسټ ( g ∈N ) g ≥ 2 هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوریدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \dots + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټیزې ګڼنخښې $a_i$، g د i = 0,1,2,...,k او k ≥ 0 د $0 \le a_i \le g-1$ چې $a_k \neq 0$ وي په کار راځي یا اړتیا ورته شته.
لیکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$$

که د بدلیدلو ( د بل څه سره ) امکانات رامنځ ته کیږي، نو بهتره به وي چې په

ketabton.com - The Digital Library



لاندې ډول ولیکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کې ګڼل په لسیز سیستم ( ګڼځای ارزښت ) باندې کیږي، چې تل داسې نه وه، لکه په افغانستان کې چې دا اوس هم د ډوډۍ پوړ لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

---

په لسیز سیستم کې ګڼځای «ارزښت» لري چې انځور شي، مګر په لرګي کې ځای ارزښت نه لري چې کرښه چیرته کښل شوې، هلته د پوړ کرښو له ګڼون یا تعداد څخه پور څرګندیږي.

بل د ګڼلو سیستم ، لکه د مخه مو چې تر پام لاندې ونیوه، د ګڼلو رومي سیستم دی چې نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډك، زیاتونسیستم(جمعي – ) څرګندیږي.

بیا هم غواړو چې دا په لاندې ډول ځانګړې کړو:

۱ – هره لاندې نخښه I, X, C کړای شي چې زیات ترزیاته ۳ ځله( ۳ واری ) په یو ګڼ کې پرله پسې یا څنګ تر څنګ راشي

۲ – هره، د ګڼ نخښه V, L, M, خورا زیاته یو ځل څنګ تر څنګ په یوه ګڼ کې راتلی شي.

۳ – که بنسټیز نخښه I, X او یا ..........__-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D یا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې یا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کمیږي .

زیاتون او کمون (جمعه او منفي )

ketabton.com - The Digital Library



۴ – په هرګڼ انځورونو (Zahlendarstellung ) کی کیدی شي چې یواځې یو بستیز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: MXCVII = 1098 مګر نه IMIC
۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمی نخښې په کار واچول شي.

**عربي ګڼونه** : دا ګڼونه، چې موږ ورسره بلد یو، د لسیز سیستم ګڼونه دي، چې عربي ګڼونه بلل کیږي. دا د ګڼلو لسیز سیستم عربو د هند څخه راوړی چې په دولسمه پیړۍ کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر( ۰ ) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر 9 پورې، چې

څیفر ورته واي (همغه عربي صفر دی) چې دلته ترې بنستیز ګڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چې ګوته مو ورته ونیوه زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، څکه چې د یو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښې زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د ګڼونو انځورول ساده دي.

**تعریف ۱ . ۱ ب** : په یو «ځای ارزښت سیستم» کی هغه ګڼ لوی دی چې زیات ځایونه ولري، که چیرې د ګڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي( مساوي وي ) نو هغه ګڼ ستر دی چې له کینې لورې یې نخښه لویه وي.

**لسیز – یا لسګونی سیستم**: لسیز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چي له انځورونې یې څرګندیږي. په لسیز سیستم کی د ګڼ انځورولو نخښې، لکه د مخه مو چې انځور کړې، ۹،۸،۷،۶،۵،۴،۳،۲،۱،۰ دي. ۱۰ ګڼ د لسیز سیستم بنستیزه نخښه ده. دا چې نور ګڼونه نه انځوریږي، نو ځای هلته ډك دی چې پرله پسی ( ترتیب یانظم ) د ۰ تر ۹ یعنی له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

ketabton.com - The Digital Library



په دې ډول د پسې جګ ځای یوون (واحد ) د په کار اچول شووګڼنخښو ګڼون (تعداد یا شمیر ) دی، څموږ په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی ) ډيري (set , die Menge) ۹ –امه برخه دې وکتل شي ) ) غږو ګنلو لپاره لاندې ګڼونه کفايت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او داسی نور. ټولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډيری N ويل کيږي. ددې لپاره ليکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, .....\}$$

موږ ګڼونه په کوچنيو لاتینی ټکو يا حروفو ښايو لکه a ,b,c, ... . n . دا رينښتوني

( رينښتينوالی يا واقعيت ) چی n دې يو طبعي ګڼ وي، داسی ليکل کيږي $n \in N$ يا $n \in N^*$ ( ويل کيږي چی: n د طبعي ګڼونوډيري N يا*N توکی دی(لنډ n د N يا *N څخه دی) ) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (ځيفر) توپير ته پام وي.

موږ دګڼونو ټاکلو لپاره بلد يا اشنا د نخښڼډيري لسيز سيستم په کار اچوو ( استعمالوو )

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نخښو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول يو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}\,.10^{n-2} + ..+ a_2\,.10^2 + a_1.10 + a_0\, 10^0$$

$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو ځيفرونو ډيري هم انځوريدی شي. د بيلګي په توګه په اينفورماتيك (Infrormatik ) کی، چی د دوالسيستم ( Dualsystem ) ( دوئيز سيستم) څخه کار اخستل کيږي. ددې لپاره دوه ګڼنخښي (ځيفرونه ) ليکل کيږي

ketabton.com - The Digital Library



$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسيز او دوه ئيز سيستمونو لمړني ګڼونه يو د بل ترڅنګ کښل شوي:

| دوه ئيز سيستم | لسيز سيستم |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 10 | 2 |
| 11 | 3 |
| 100 | 4 |

په ټوليزه توګه( عمومي توګه) دلته يو څيفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ يو طبيعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots\ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 \,,\; a_i \in N$$

بيلګه ۱ . ۱ :
$$59 = 1.\,32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$$
$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.\,2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

يا دونه :: څه لنډ لنډيزونه

د طبيعي اعدادو ډيرۍ يا سټ داسی په نخښنه کوو:

د پيدايښتي يا طبيعی ګڼونو ډيرۍ $N = \{ 1, 2 , 3 , \ldots \}$

دپيدايښتي ګڼونو ډيرۍ د صفر سره $N^\circ = \{ 0, 1 , 2 , \ldots. \}$

ketabton.com - The Digital Library



ه کتابونو کی دا د صفر نخښنه په لاندې برخه کی راځي٠

## ۳ ٠ ۱ ٠ ب د طبیعي اعدادو یا ګڼونو انځورونه:

طبیعي اعداد په نخښو انځوریږي٠ دا عددونه یا ګڼونه د ځان لپاره یو سیستم لري، چی هغه زیات یې موږ نه څیرو٠ زموږ لپاره غوره هغهٔ عربی اعداد یا ګڼونه دی٠

یا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد یو د لسیز ځایستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل٠ دا کورونه (خوني یا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نیوی شي او بیا یې هر ځاي یو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سیستم« دی٠ لومړي کور ته یویز، دوم ته لسیز، دریم ته سلیز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي٠

انځورونه یا څیفرونه یې دي : ٠ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټیز ګڼونو نخښی دي، نور یې په کورونو یا ځایسیستم باندې روښانه کیدی شي٠

پیژند ۳ ٠ ۱ ٠ ب :

په یو» ځاي ارزښت سیستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډیر ځایونه ولري٠ که چیرې د ګڼ د ځایونو یا کورونو ګڼون ( تعداد ) سره برابر وي٠ نو بیا هغهٔ ګڼ لوي دی، چی کیڼ لور یې ګڼنخښه لویه وي٠

## ۳ ٠ ۱ ٠ پ : طبیعي اعدادو کې د شمیرنې بنسټیز قوانین

اوس په لاندې ډول د پیداینست ګڼونو، په ټولیزه توګه د رییل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري( معتبر) بنسټیز د شمیرنې قوانین وړاندې کوو:

ketabton.com - The Digital Library



الف : د انډول (نظم یا ترتیب یا لوي واړه ترتیب( Anordnung) بنسټیز قوانین:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کی یا د نخښی خوله کی عدد یا ګڼ لوي دی او د وتلی کونج یا لوي کونج >که نخښه یا داسی کونجکی یا څټ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دی۰ که ګڼونه یا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لویواړه اړیکی داسی لیکو، یانې که $23 > 15$ ولرو نو ترې څرګندیږي، چی عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دی .

د دوه طبیعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړیکو څخه ټیک یوه اړیکه باور لري»

$$a < b \quad , a = b \quad , a > b$$

۲ ـ ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځاي توری ولیکو هم $a = a$ به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ریفلیکسیویتي Reflexivity )

۳ – له $a = b$ => ( لاس ته راځي) $b = a$ ( سیومتري، انډول، ورته واىي ( Symmetry

د انعکاسي (ایینه ونیز – یا هندارونیز) برابروالی یانی که چیري دا عددونه وراینه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابریږي۰ که انعکاسي(اینه ونیز)برابر نوم ورته کیږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به یې همغه سیومتري وبولو۰

٤ ـ له $a = b$ او $b = c$ => ( لاس ته راځی) $a = c$(ترانزیتیوTransitivity)

ترانزیتیو ګورو، چی یو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، ځکه چی دا ګڼونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا وړل کیږي۰

۵ – له $a < b$او $b < c$ => ( لاس ته راځی) یا $a < c$ یا $a<b, b<c \Rightarrow a<c$

وړاندیز : که چیری دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو ښه

ketabton.com - The Digital Library



به وي، خو له شمیرپوهنی پرته مانا باندی يې هم پوهیدنه ښه او اړیینه ده۰

ب : د زیاتون ( جمع) .Addition n بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو ، دوه یا څو ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیدایښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه( عملیه) «زیاتون یت جمعه » بولو، ځکه، چی ګڼونه یو په بل زیاتیږي۰

پیژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون (جمع) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی یا

۱۰ + ۱۸ = ۲۸

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتیږي، نو له دې امله يې «زیاتېدونی» ( ما تراوسه زیاتووني بللي، خو فکر کوم،چې زیاتیدوني يې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کیږي ۰ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وایه ۰ + زیاتوننخښه ده او = برابروننخښه ( مساوات علامه) بولو

دجمعې یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو a او b لپاره تل یو زیاتون ( جمع) a + b شته دی

۲ - یواځنوالی : له a' = a او b' = b څخه لاس ته راځي: a'+b' = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAWکموتاتیو- یا بدلون قانون دی:a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوشیاتیو - سره ګډېدنې قانون. لرو
(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – یا همغږیزوالي قانون :

ketabton.com - The Digital Library



له $a<b$ څخه لاس ته راځي $a+c<b+c$

یادونه : په $a+b=c$ کې $a$ او $b$ زیاتېدوني $a+b$ زیاتون او $c$ زیاتون ارزښت بلل کیږي

یادونه : په زیاتون کې لاندی زیاتونقوانین هم باوري دي:

ناپیلی توکی: په $N°$ کی یو توکی شته، چی که د هرپیدایښتي توکی سره په زیاتون یا جمعه کی ور زیات شي همغه توکي ورکوي٠ دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپیلی توکی کړی شو نالوریز وبولو،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې یې په زیاتون کې بدلون نه راولی یا د زیاتون ارزښت همغه پاتیږي، همداسې ناړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې یې وبولی٠

## پ : د کمون ( تفریق)Subtraction بنسټیز قوانین

پیژند:د پیدایښتي ګڼونو a او b لپاره، چې $a>b$ وي، یواځی یو x شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو ټیک یواځني شته دي( موخه x دی)

نومه ونې: b کمیدونی یا مفروق ( تراوسه مې کمونی بللی) a تریې کمونی یا مفروق منه $a+b$ کمون او x کمون- یا تفریق ارزښت بلل کیږي یا بولو :

موږ پورته د لاتین تورو لپاره طبیعي اعدادونخښی لیکو، چی ساده یې ونوموو:

$$20 – 10 = 10$$

ketabton.com - The Digital Library



په پورته کی موږ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه يې ۱۰ ده، نو له دی امله يې داسی نوموو:

تر مخ يادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، ځکه، چی ترې کميږي( ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کموونی« يا کميدونی( ع۰ مفروق) دا بل لس يې «کمون ارزښت» يا د کمون لاس ته راوړنه( لنډ: لاس ته راوړنه يا کمون) (ع ۰ حاصل تفريق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

## ت : د ځل ( ضرب)Multiplication بنسټيز قوانين:

۱ - د دوه پيدايښتي ګڼونوa اوb لپاره د پيدايښتي ګڼونو په ډېری کې تل يو ځلa.b شته دی. د a.b لپاره داسې هم ليکوab په پورته کې aاوb ځلووني ( ضريبونه) اوab=x « ځل ارزښت » يا ځل( حاصل ضرب) دی۰

وايي چی ضرب وهلو ته وايي او د جمع ( که جمعي) لنډه طريقه، چی۰۰۰۰وي يا د زياتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پيژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راويستلي وي۰

که ووايو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کيلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

ليکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کيلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضريبونو څخه به هم ځلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له $a = a'$ او $b = b'$ څخه لاس ته راځي $a'b' = ab$ ( يواځيتوب)

۳ - لرو $ab = ba$ کموتاتيو – يا د بدلون قانون

ketabton.com - The Digital Library



٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوشیاتیو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ ) د ویشوني- یا دیستریبوتیو قانون
Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګښتوالي یا یوغږیزوالي قانونMonotony

ټ – د ویش بنسټیز قانون Division

پیژند۳ ۰ ۲ :

که د دوه طبیعي عددونو a او b لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانی صفر نه وي یو طبیعي عددx شته، چی برابرون ( مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا b/a د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چی ماتګڼ(کسر) یې هم بولو

۱ – که $a / b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي ، نو یواځنی شته دی( یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی )

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ویش ارزښت، b ویشونی یا ویشه وونی دی، ځکه چی په یوڅه ویشل کیږي او a پرویشونی بلل کیږي، ځکه، چی څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم ، حاصل تقسیم ۰

ګورو چی له قاسم یا مقسوم او همداسی د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- یا پرې ویشونی ، ویشه ونی اوویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهېږ دي، خو په خواشینی به وه وایم، چی تراوسه په شمیرپوهنه کی ورسره نابلد یو ۰

ketabton.com - The Digital Library



که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وويشو، نو هر يوه ته درې کتابچې رسيږي٠ گورو، چې ۱۲ په يو څه ويشلکيږي، نو ويشونی يې ښه نوم دی٠ دا ۱۲ په څلور ويشل کيږي پر ۰۰۰ ويشل کيږي، نو له دې امله څلور پر ويشونی بولو، درې يې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسيم وايه، له دې امله ورته ويش ارزښت وايو او دا کارونه يا عمليه خو ويش بلل شوی٠

## ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ټولګنونه يا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبيعي عددونو a او b کمون يا تفريق (x= b-a ) ټيک او ټيک هلته يا هلته او هلته د طبيعي عددونو ډيری يا سټ کی شته، چې وي : $a \le b$

د شميرپوهنې نخښو باندې داسې ليکل کيږي:

$$x=b-a \Leftrightarrow a \le b$$

انګريزي يې if and only if ټيک او ټيک هلته يا هلته او هلته( دا شننه يا وينه پورته د شميرپوهنې نخښې ته ده)٠

که هغی نخښی ته وګورو، نو هم لاندې ترې څرګنديږي، له ښی لور کيڼ لاس ته راځی او په څټ( برعکس) له کيڼ لور ښی لاس ته راځی٠ يا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځی او په څټ٠

ټولګنونه يا تام اعداد هم د انسانانو د اړتياو پر بنسټ منځ ته راغلي ، يا منځ ته راوړل شوي٠که چيرې سپين د خړ ۱۰۰ افغانیپوروړی وي او سپين ورته اتيا افغانی ورکړي، نو سپين بيا هم شل افغانی پوروړی پاتيږي، دا په دی ما، چی ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ ګورو، چی ۲۰ – يو پيداينتي ګڼ يا طبيعي عدد نه دی٠يا 20- = 100 – 80

ketabton.com - The Digital Library



په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترېکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه يې طبيعي عدد نه دی۰ اوس يوه د اعدادو بلې ډيری پيژند ته اړ کيږو، چی هغه د ټولګڼونوډيری ده او دا د طبيعي عددونو او د طبيعي عددونو کمي( منفي) او صفر سره يوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي( په ډيری کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګڼونو ډيری ده او داسې يی ليکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پيداينتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو يا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پيداينتي ګڼونو مخنخښه په کموننخښه يا منفي نخښه باندې سنبالوويانې ( کيدی شي زموږ هيوادوال د څټ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زياتی يا کمی ښايي د ګڼ کيڼ لور ته ليکل کيږي، چې دا ما مخنخښه ليکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شميرقوانين په Z کې هم باور لري

د ټولګڼونوډيری

$$Z = \{ \ldots. -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots. \}$$

د مخه مو شميرقوانين، چې د پيداينتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګڼونو لپاره هم باور لري

د کمون يا تفريق بنسټقوانين ( پسی يا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګڼونو يا تام اعدادو a او b لپاره يو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چی a+x=b برابرون باوري دی

د ويش تيوري:

ketabton.com - The Digital Library



## ۳ . ۱ . ۲ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجز یې لپاره خورا ګټور دی باور لري

الف ) یو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦ ) ویشونی دی، که د اخر څیفر یا کور ( له اخره( موخه تری ښی لور دی) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنسټیزو څیفرونو ) څخه جوړ ګڼ په ۲ ( ٤ ، ۸ ، ١٦ ۰۰۰ویشونی وي) په دوه ویشونی ګڼ جوړه ( جفت) نومیږي او بل ډول یی ناجوړه( طاق) بلل کیږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهیدلی شو

ب ) یو ګڼ په ٥ ( ٢٥ ، ١٢٥ ، ٦٢٥ ، ۰۰ ) ویشونی دی، که د اخر( له ښي لور) بنسټیز څیفر ( د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنسټیز څیفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ ( ٢٥، ١٢٥ ، ٦٢٥ ۰۰۰) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وایي او موږ یې شاید لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ ولیکم، خو بیا دې هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دی ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي۰

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنسټیز ه ګڼونخښو(څیفرونو) زیاتون پوهیږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونیول شي۰

بیلګهٔ : د 126 پروت زیاتون یا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت) یو ګڼ په 11 ویشونی دی که د هغه ګڼ الترنیري( نخښه بدلونکی) پروت زیاتون۰ پر 11 ویشونی وي۰

ketabton.com - The Digital Library



الترنيري پروت زياتون، چې پروت کمون هم ورته وايي له بنسټيزو ځيفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زياتون ځخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ،۰۰۰ زياتون کمون پوهيږو ، بې له دې، چې ځاي ارزښت يې په پام کې ونيول شي يا په بل ډول، که د ناجوړه کور زياتون ځخه د جوړه د زياتون کم کړو۰

بيلګه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ويشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چې الترنيري زياتون ياني ۱۱ = ٤ – ۱۵ يې په ۱۱ ويشوني دی۰

ټ ) يو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که ( د ګڼ له اخر ځخه جړړشوي) د درېګوني ګڼونو زياتون پر ۳۷ وېشوني وي.

بيلګه:

37|(448+352+216+20)⇔ 37|1036 ځکه چې 37 |20216352448

ث ) يو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ويشوړ دی، که د هغه ( د ګڼ له لخ ځخه جوړ) درېګونی الترنيري زياتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشوني وي.

بيلګې : 37604 | 7 ځکه چې 7 | 567 ⇔(37-604)|7

13| (889-293+709-96) ⇔ 13|1209 ځکه ، چې 13 | 9679293889

ج) يو ګڼ په ۱۰۱ وېشوني دی، که (د ګڼ له اخر ځخه جړشوی) دوهګوني الترنيري زياتون په ۱۰۱ وېشوني وي.

بيلګه:

101|(69-06+63-03+79)⇔ 101|202 ځکه چې 101|7930630669

ketabton.com - The Digital Library



يادونه : که پيداښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت يې هر ګڼ وي او که يې‌داښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ويشي بې له پاتي ياني ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دی.

## ۳ . ۱ . ۲ب) خوراغټ ګډ پرويشونی او خورا کوچنی ګډ زياتځله

يا بزرګترين قاسم مشترک و کوچکترين مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرليک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي يې په لومړنيو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنيوګڼونو ځله وونو هر يوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانيسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان( په خپل ځای کې دې وکتل شي) يا جګګڼ بې ټيټ يا کم وي . ياني

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ ياني ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي ياني د دواړو ګڼونو پروېشونی

دی او خورا غټ پروېشونی هم دی. ياني ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پروېشونی دی.

ketabton.com - The Digital Library



---

لنډ : ۵۲ د یورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دئ.

داسې ګڼ ، خوراغټ ګډ پروېشونی، بولو ( لنډ ونه يې : غ ګ و )

هغه ګڼ، چې د دوه یا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته خورا,,

غټ ګډ پروېشونی ,, ( لنډونه: غ ګ و) وايو. یا

(Greatest commom divisor(g c d)(بزرګترین عامل ( مقسوم علیه ) مشترک)

اوس بیا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله وونې، له هر څخه يو چې په جګ توان وي

یانې خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بیا يې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ یانې ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زیاتځله دئ ( یانې ګډ په دواړو

وېشل کیږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دئ. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زیاتځله( څو برابره ) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (یانې ګډ) زیاتځله (ګډ څو واره) دئ

لنډ يې : خورا کوچنی ګډ زیاتځله ( لنډونه يې: خ ګ ځ) یا
(Least common multiple(l.c.m.)(کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالاضعاف الاقل)

ketabton.com - The Digital Library



ګران هیوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر یا بیخي پوهوړ او ساده وي.

وریسي داسي مخ ته ځو:

دا چې موږ په پیدایښت یا طبیعي ګڼونو کې له شمیرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پیژند ورکوو:

پیژند( تعریف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې ټولګڼونه وي۰ وایو چې « ګڼ a ګڼ bویشي» ( او یا هم a د bپرویشونې دئ او یا همa د b څو برابره ( زیاتځله ) دئ) که یو ټولګڼ u شته یا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره لیکوa|b (وایو، چې ګڼ aګڼ b ویشي ، خو اړیین یا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼ ورسره وویل شي۰

که a د bپرویشونی نه وي، نو د دې لپاره لیکوa|/b(دا نخښنه /| دې د نه ویشونی لپاره ومنل شي)

بیا لیکو، چې : پیدایښتي ګڼونه، چې په ۲ ویشل کیږي جوړه ( جفت) ګڼونه بلل کیږي او که نه نو ناجوړه ( طاق) ګڼونه بلل کیږي۰ د صفر ګڼ د پیدایښتي ګڼونو په ډیرۍ کې یو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې یا اوبیونې د دې ویشکلمی لپاره یو څو ساده شمیرقاعدې را یوځاي کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کیږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه یا زړه پورې ټولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

( ۱ ) 1 $\pm$ او a$\pm$ ویش ( دا په نامه « ساده» پرویشوني دي)

ketabton.com - The Digital Library



(۲ ) د ۱ پروېشونی ۱ او ۱ - دي

( ۳ ) تل باور لري، چې $0 | a$ او $a | 0$ يوائی په هغه حالت کې باور لري، چې $a = 0$ وي

( ٤ ) له $a|b$ او $b|c \Leftarrow a|c$

( ٥ ) له $a|b$ لاس ته راځي: $ac|bc$ ،که $c |= 0$ وي ، نو د دې په څېر هم باوري دي. دا په دې مانا چې، که $ac|bc$ وي، نو $a|b$ هم باور لري.د ګڼونو لیکدود له مخې، که نړیوالجال ته پورته شو داسې لیکو، که نه دا پورته بسیا کوي: $c \neq 0, a | b \Rightarrow ac | bc$

( ٦ ) له $a|b$ او $c|d$ څخه لاس ته راځي او په څېر $ac| bd$ لنډه لیکنه يې(که نج ته پورته شوه ): $a | b, c | d \Leftrightarrow ac | bd$

( ۷ ) له $a | b$ او $b| a$ لاس ته راځي $a = \pm b$

( ۸ ) له $a |b$ او $a|c$ څخه لاس ته راځي $a|(bx+cy)$ د ټولو ټولګڼونو $x$ او $y$ لپار

( ۹ ) ټیک هلته $a|b$ کله چی وي $|b| | |a|$،

(۱۰ ) که $a | b$ او $b = 0$ نه وي نو باوري دي $- | b| < a < |b|$

حل ( اوبي ) : ( ۱ ) له $a1 = (-a)(-1) = a$ لاس ته راځي

( ۲ ) له $a0 = 0$ لرو $a | 0$ . که وي $0 | a$ , نو يو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چی وي $0u = a$ او له کومی چی لاس ته راځي $a = 0$ .

( ۳ ) ساده دی.

ketabton.com - The Digital Library



( ۴ ) که $a \mid b$ او $b \mid c$ ، نو تېولګنونه $u$ او $v$ د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دې لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس $a \mid c$ .

( ۵ ) که $a|b$ ، پس يو تولګنې $u$ د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$ سره، د کوم څخه چې لاس ته راځي $ac \mid bc$ . د $c \neq 0$ لپاره دا اخرنخير په څټ کيدی هم شي.

( ۶ ) د $a|b , c|d$ او ( ۵ ) څخه لاس ته راځي چې $ac|bc$ او $bc|bd$ ، د ( ۴ ) له مخې $ac \mid bd$ .

( ۷ ) د $a \mid b$ او $b \mid a$ څخه د تېولګنونو $u$ او $v$ موجوديت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره. برسيره پر دې لاس ته راځي $a(uv) = a$ , پس $a=0$ يا $u=v=\pm 1$ . په لمړي حالت کی د $a \mid b$ له امله $b = 0$ , پس $a = b$ . په دوم حالت کی $a = \pm b$ دی.

( ۸ ) د تېولګنونو $u , v$ لپاره دي $au = b$ او $av = c$ ، نو له دې $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځي، پس $a \mid (bx+cy)$ د تېولو تېولګنونو $x$ او $y$ لپاره.

( ۹ ) وي دې $a|b$ . له $a \mid b$ ، $a| \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه او د ( ۴ ) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چی $|a| \mid |b|$ . په څټ: که $|a| \mid |b|$ باورلری، نو د $|a| \mid |b|$ ، $a \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه په ورته ډول لاس ته راځي $a \mid b$ .

( ۱۰ ) دی $a \mid b$ ، پس د ( ۹ ) هم $|a| \mid |b|$ . که $b \neq 0$ وي ، پس يو طبعي ګڼ $u$ لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چی $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

که $b|a$ د تېولګنونو $a,b$ لپاره د $b \neq 0$ سره، نو يو يواځنی معلوم ګڼ $q$ شته ( د $a$ او همداسی د $b$ «کومپليمنت پرويشونی» بلل کيږي )، چی لرو $a = bq$ .

په تېوليزه توګه لاندې جمله باور لري

ketabton.com - The Digital Library



جمله ۳ ۰ ۲ ( د ویش الګوریتم): a اوb دې تولګنونه وي۰ د $0 \neq b$ سره ۰ نو یواځني تاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شمیرلکیدونکي تولګنونه q اوr (چې د a پرb ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتی بلل کیږي، شته دی،د کومو لپاره چی باور لري: $a = bq + r \;\wedge\; |0| \leq r < b$

هر یو تولګڼ کم له کمه ساده پرویشونی لري یعنی $\pm 1$ او پخپله د دې تولګڼ زیاتیز( مثبت) او کمیز( منفي)۰ دې پرویشؤنو ته «سادهٔ پرویشونی» وایو۰

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو تولګڼ، چې یواځی او یواځې ساده پرویشونی ولري موږ ورته لومړنی ګڼونه وایو او دا لومړنی یا پریم ګڼونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړی ګڼ د پیدایښتي ګڼونوتوکی دی۰

هریو تولګڼ، چی لومړنی ګڼ نه وي د لومړنیو ګڼونو په ځلونو( ځله وونو)(ضریبونو) توته یا تجزیه کیدی شي۰

بیلګی :

1 - $240 = 24 \,.\, 10 = 3 \,.\, 8 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2^4 \cdot 3 \,.\, 5$

2- $2310 = 2 \,.\, 1155 = 2 \,.\, 3 \,.\, 385 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 77 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11$

$3750 = 25 \,.\, 15 \,.\, 10 = 5 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^4$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګڼونو کی ګڼ ۲ د دواړو پر ویشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګڼونو پرویشونی دی یانی $2.3 = 6$ برسیره پردې ګڼ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګڼونه ویشي او شاید په دې ګڼونو کی یو خورا غټ ګډ پرویشونی هم وي۰

ketabton.com - The Digital Library



په پورته درېواړو بيلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څير خوندي دي يانې دا ګڼونه ويش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګڼونو غ۰ګ۰پ دئ

پيژند ۳ ۰ پ :

a او b دې ټولګڼونه وي او d دې يو مثبت يا زياتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1)d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2)t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرويشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کيږي d لپاره داسی ليکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرويشونی( لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کيږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a او b پروېش پردي بلل کيږي يانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر وويشل شي.

يادونه : په زياتو ادبياتو کې لنډونه په درېتورو کيږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرويشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

يادونه: ما د خورا غټ ګډ پرويشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړانديز لري، نو زه يې ضرور په پام کی په پوره خوښی نيسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبياتو کې بزرګترين قاسم مشترک او کوچکتريب مضرب مشترک وايي او ذوالاضعاف الاقل يې هم بولي۰

يادونه : که چيرې d او *d دواړه د a او b غ ګ پ وي، نو له پورته پيژند څخه لاس ته راځي

ketabton.com - The Digital Library



چی $d \mid d^*$ او $d^* \mid d$ ، نو د $d \geq 0$ , $d^*$ له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله به وښايي ، چې داسې غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ ۰ ۳ :
په خوښه ټولګېونوa اوb لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو ټولګېونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل( اوبې): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون ( په پام کې دې وي چې د ( a , b ) تعریف په a او b کې سیومتریك دی) له امله اجازه لرو چې $b \neq 0$ ونیسو.
موږ اوس رکورسیف (rekursiv (دا په دې مانا چې د مخه غږي څخه وروستی یعني وریسی غړی لاس ته راوړلکیږي )
ټولګېونه......, $r_{-1}, r_0, r_1, r_2$ او .......... $q_1, q_2$ په لاندې ډول تعريفوو: وي دې $r_{-1} = a$ , $r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \neq 0$ لپاره ټولګېونه $q_i$ , $r_i$ داسې تعینوو چې $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

---

او $0 \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چې له جملې ( ۱ . ۳ ) څخه ممکن کیدی شي . باید یو نه منفي ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چې لرو $r_n \neq 0$ مګر $r_{n+1} = 0$ , چې بې له دې بیا یوه نه پای د طبعي ګڼونو لویدونکې یا کمیدونکې پرلپسې لاس ته راځي، کوم چې ناشونې(ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شیما ته لاربشودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

..................

..............

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

ketabton.com - The Digital Library



که دا مساوات د شکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسې) لاس ته راځي:

$r_n | r_{n-1} , r_n | r_{n-2} , \dots r_n | b , r_n | a$

دا په دې مانا چې $r_n$ د a او b یو غ گ و دی. t دې د a او b یو بل غ گ و وي، نو په دې حالت کې که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسې لرو

$t | r_0 , t | r_1 , t | r_2 ,\dots, t | r_{n-1} , t | r_n$

دا په دې مانا چې $|r|$ د a او b غ گ و دی.

هر د دې گڼونو $r_i$ د ( $-1\leq i \leq n$ ) سره، په ځانگړي ډول $r_n$ او ددې سره (a , b) یو د a او b لاینې کمبینیشن دی ، په لاندې ډول $au + bv$ , چې u او v ټولگڼونه دي.

$r_{-1} = a$ د

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د یوه i لپاره د $1 \leq i \leq n$ سره، که یو د a او b یو لاینې کمبینشن ښوونه د $r_{i-1}$ او $r_{i-2}$ لپاره همدا سم د لاسه پیداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د یوې داسې $r_i$ د ځای په ځای کولو له لارې هم ، چې په دې ډول د اینډکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. ( پای )

یادونه : د غ گ پ د ښوونې متود ، چې پورته او په لاندې بیلگه کې راوړل شي د اویکلید الگوریتم"Euklid Algorithmus„ د یوې گڼیزې دندې یا کارونی (عملیې) شیماتیکي اوبیونې( حل) متود په نامه یادیږي، نو له دې سره x او y هم له a څخه

$d = ax + by$ اکسپلیځیټExplizit ( لاتین: څرگند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي.

بیلگه:

غوښتنه (1764 , 2124 ) = d ۰ د اویکلید الگوریتم کارونی له لارې لرو:

$2124 = 1 . 1764 + 360$

ketabton.com - The Digital Library



$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

كه پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دئ

د دې لپاره ، چې$d$ له$x$ او $y$ سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1( 1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= ( -1) . 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه د$a$ او$b$ لپاره لاندې مهمه پيژند نخښه يا نخښونه لاس ته راځي

يادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښكاريږي، چې ګرانو لوستونكو ته يې بې له اوبيونې

وړاندې كړم، دا جملې په خته كې د ګڼونوتيوري دنده ده، چې په ګڼونتيوري كې بيا د ښوونې سره ښوول كيږي۰

جمله۳ ۰ ۹ :

$a$ او$b$ دې ټولګڼونه وي. د $a$ او$b$ يو ګډ پرويشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د $a$ او $b$ ګ غ پ دئ كله چې دا شكل $t = ax + by$ د $a$ او$b$ ټولګڼونو سره انځور كړای شو۰ په ځانګړي ډول $a$ او$b$ هلته او هلته ويشپړدي دي، كه ټولګڼونه $x$ او$y$ شته وي د كومو لپاره چې باور لر:

ketabton.com - The Digital Library



$$ax + by = 1$$

اوبیونه : د شرایطو ضرورت سم د لاسه له ۳ ږ ۶ څخه لاس ته راځي. دا چي شرایط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

ځو جملې په لاندې کې روړو، ګڼونتېړي پورې اړه لر او دلته يې نه ښايو.

جمله : ۱۰ . ۳

a اوb دې ټولګڼونه وي۰ د a اوb هر ګډ پرويشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = ( a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b يو ګډ پرويشونی هلته اوهلته غ ګ پ دئ چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

لیما۳ ۰ ۱۱( جمله ګئ)( اویکلید): په خوښه ټولګڼونو aاوb اوc لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعریف ۲ ت : $a_1 , a_2 , .... a_n$ دې ټولګڼونه وي $( n \geq 1 )$, او d دې يو نه منفي ټولګڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d | a_i$ د ټولو $n$ ,....,$i = 1$ لپاره

ب : له $t | a_i$ څخه د ټولو $n$ ,....,$i = 1$ لپاره لاس ته راځي $t | d$ .

نو d د $a_1,...., a_n$ غ ګ و بلل کیږي او د d لپاره هم داسې لیکو $( a_1 , .... , a_n )$.

ketabton.com - The Digital Library



د $a_n$ , .... , $a_1$ لپاره د داسې غ ګ و یواختنوب په ۴ . ۵ کې کتل کیدی شي او د موجودیت لپاره یې لرو :

جمله ۴ . ۱۳ : د خوښې تولګنونو $a_n$ , ... , $a_1$ لپاره ( $n \geq 1$ ) غ ګ و موجود او d د $a_n$ , ... , $a_1$ خطي (لاینې) کمبینیشن دی دا په دې مانا چې

$$d = a_1x_1 + ... +a_nx_n$$

د مناسبو تولګنونو $x_n$ , ... , $x_1$ لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$( a_1 , .... , a_n ) = ((a_1 ,..., a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولګنونو $a_n$ ,... ,$a_1$ د ( $n \geq 1$ ) لپاره. سړی کړی شي چې د $a_1$,...,$a_n$ غ ګ و پل په پل د اویکلید الګوریتموس له لارې پیدا کړي، چې دلته یې د اوبې یا حل ځخه تیریږو.

د اوبې یا حل لپاره یې د n په لور د پوره ایندکشن ځخه کار اخستل کیږي چې په ۸ –امه برخه کې ځیړل شوی دی.

بیلګي:

۱ - ګنونه 240 او 3750 غ ګ پ 30 = 2.3.5 لري

۲ – لرو 408 او 748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

ketabton.com - The Digital Library



پس غ ګ پ دی: 17 . 2<2> = (408,748 ) يا دا لاندې که ن ج پورته شول

$(408,748) = 2^2.17 = 68$

۳ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ 6 = (30.66.114 ) دی، ځکه، چې
30 = 2.3.5

او 66 = 2.3.11 او 114 = 2.3.19 دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرويشونی نه لري دا موږ پرويشپردی بولو، ځکه، چې دي:

65 = 5.13 /\ 54 = 2.3.3.3

## خورا کوچنی ګډ زياتځلی(کوچکترين مضرب مشترک )

موږ په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زياتځله ( لنډ: ک ګ ز) کليمې په څېړنه پيل کو٠ دا کلمه و غ ګ پ يوه دوه ييزه يا دوه ګونی يا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي ټوليز پيژند ورکوو

تعريف۲ . تې : $a_1 ,....., a_n$ دې ( $n \geq 2$ ) ټولګڼونه وي، او v دې يو داسی نه منفی ټولګڼ وي، د کوم لپاره چی باور لري:

الف – $a_i | v$ د $n , ... ,, i = 1$ لپاره

ب – له $a_i | w$ څخه د $i = 1 , ... , n$ لپاره لاس ته راځي $v | w$ .

نو v د $a_1 , ... , a_n$ کوچنی ګډ زياتځله( لنډ : ك ګ ځ ) بلل کيږي او داسې يې ليکو:

$$v = [a_1 , ... , a_n ]$$

ketabton.com - The Digital Library



پیژند (د دوه ګڼونو لپاره )

a او b دې تولګڼونه وي او v دې یو داسې نه کمیز یا نه منفي تولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

( ۱ ) $v|a$ او$v|b$

( ۲ ) له $a|w$ او $b|w$ څخه لاس ته راځي $v | w$

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زیاتځله ( لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کیږي او په لاندې توګه یې لیکو

$$v = [ a,b]$$

جمله :

په خوښه تولګڼونو $a,b,c,\ldots,n$ لپاره ک ګ ز شته دی او دا یواځنی دئ

$$[a,b,c,\ldots,n]$$

یادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونولاس ته راوړو:
دتولګڼونو ( $n \geq 3$ ) $a_1 , \ldots a_n$ لپاره لرو $[ a_1,\ldots,a_n ] = [ [ a_1 ,\ldots,a_{n-1} ], a_n]$
او هم $|a_1a_2| = [a_1 , a_2 ]$ ( $a_1 , a_2$ )

لاس ته راوړنې ( داهم په همدې مانا مګر د جملی په څیر دی ): د په خوښه
تولګڼونو $a , b , c$ لپاره باور لري: له $a | c , b | c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab | c$

د ګڼتیوري بنسټیزه جمله:

ketabton.com - The Digital Library



پیژنده :

یو تولګڼ$n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کیږي، که له ساده پرویشونv بل پرویشونی ونه لري۰

لومړي ګڼونه لاندې غوه خویونه لري.:

لیما (لکه کوچنی جمله ): که p یولمړی ګڼ وي او$p \mid a_1 \dots a_n$ د تولګڼونو $a_1, \dots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه یوه i د $1 \leq i \leq n$ سره.

حل ( اوبی ): حل یی د ایندوکشن له لارې صورت نیسی، چی ددې لپاره باید ۸ - امه برخه کتل شوي وي.

د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او لیما دې $n-1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بیا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځي چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مختنه تیرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \dots a_{n-1}$ وي ، نو داسې دی $p \mid a_i$ د یو i لپاره چې $1 \leq i \leq n-1$ وي د ایندکشن د نیونې په بنسټ.

د لومړنیو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتیوري بنسټیزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه ( د ګڼونتیوري بنسټیزه جمله):

هر یو پیداینتي ( طبیعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تیب پورې، په یواځني او یواځني ( یویواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په یواځی یو ډول لیکل کیدی شي او بس۰ کیدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضریبونه همغه دي)) ډول د لومړنیو ګڼونو ځل په څیر لیکل کیدی شي۰

اوبی : ښوونه د n په لور ایندکشن له لارې مخ ته بیایو (برخه ۸ دې ودې کتل شي )
د $n = 1$ لپاره باور لري، که. لکه معمول ، 1 د طبیعي ګڼونو د تش(خالي ) ځل په څیر تعریف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبیعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

ketabton.com - The Digital Library



شوي وي. موږ اوس ټول د n پرویشونی $t > 1$ په نظر کي نیسو. کم له کمه یو داسی ګڼ شته لکه n . که p د دې پرویشونو کوچنی پرویشونی وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بیا p یو پرویشونی q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چی q د n پرویشونی وي، نو دا به د p تعریف رد کړي. دا چی $n / p < n$ د ایندونکشن نیوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګنونو د څل په څیر لیکل کیدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2..p_r = p'_1p'_2...p'_s$ د n دوه ډوله د لمړیوګنونو د څل په څیرلیکنه . له $p_1 | p'_1...p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 | p'_i$ د یو i د $1 \leq i \leq s$ سره . د نمړې بدلولو له لارې دې وي $p_1 | p'_1$ . داچي بیا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2...p_r = p'_2....p'_s$ ، له کومو چی د ایدکشن له نیونی لرو $r - 1 = s - 1$ ، پس $r = s$ او ( او د ترتیب بدلون ) هم $p_i = p'_i$ له $2 \leq i \leq r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټیزې جملی د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

> **جمله** : هر طبعی ګڼ n په ټیك یو ډول په لاندې فورم انځوریدلی شي
> $n = \prod_p p^{\nu_p}$ ( $\nu_p$ د $\nu_p = 0$) یواځي د پای ډیرو p لپاره ).( $\nu$ نیولډ ...)
> چیرته چی p ټولو طبعي ګنونو کې په جګیدونکې لړۍ پرلپسې کې ځغلي.

یادونه: د عملي شمیرنې لپاره په هغو ګنونو چې جګ یې صفر وي تیریدل کیدی شي، لکه : $n = 2^2.7$ , $n = 28$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره
لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a , bc) = 1$، نو هم $(a , bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګنونو a , b , c لپاره

ketabton.com - The Digital Library



اوبی یا حل : نیولی دې وي چې $(a, bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به يې باور لرودی p/b یا p/c داد $(a,b)=(a,c)=1$ سره تضاد دی.

**جمله** : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو a | b هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \le \beta_p$

**لاس ته راوړني** : وي دې a او b له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورتوټونه( تجزیه ) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}\ ,\ [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو $\alpha_p$ او $\beta_p$ خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

**بیلګه** : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

**یادونه** : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګڼونوباندې غ ګ و او ک ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلمونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه؟ اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینبه نیسي:

ketabton.com - The Digital Library



لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورېزېشونه ( تجزيه ) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}, \quad [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چېرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو $\alpha_p$ او $\beta_p$ خوراکوچنۍ او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

**بېلګه** : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

يادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زياتو ټولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعماليدی شي.

يو څو په لمړيو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ايا ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود دي كه نه اويكليد لخوا ځواب وركړ شوی. لاندې يو ښكلي ځواب دی چې له هغه ريښه نيسي:

جمله: ناپاي ډير لومړني ګڼونه شته.

حل(اوبی) : موږ جمله ناسيده يا ناسمه ښايو ( ۸ –امه برخه دې وكتل شي ) او نيسو چې پايډير لمړی ګڼونه $p_1 , p_2 , p_3 , ........, p_r$ موجود دي. ګڼ $N = p_1p_2...p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په يوه لمړي ګڼ p ويشونكی دی. د نيونی له مخی لرو $p = p_i$ د $1 \le i \le r$ سره . د $P|N$ او $p \mid p_1p_2....p_r$ له امله لاس ته راځي $p \mid 1$ .کوم چې ناشونی دی ( ناممكن ) له دې امله بايد ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود وي.

ketabton.com - The Digital Library



یادونه : د میلاد څخه پخوا د« اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دغې متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~
~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~
37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~
~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ ~~57~~ ~~58~~ 59 ~~60~~ 61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~
~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ 71 ~~72~~ 73 ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~
~~78~~ 79 ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ 83 ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ 89 ~~90~~ ~~91~~
~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ 97 ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

## ۳ ۰ ۱ ۰ ۳ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

( لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسی ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چی دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راځیو Ration هوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی۰

یادونه : که / ولرو یانې که ولرو $a / b$ نو دا په دې مانا، چې$a$ په $b$ ویشل کیږي۰ که ولرو$\neq$ نود نابرابرونخښنه ده۰ دا په دې مانا، چی $b$ له $0$ سره برابره نه ده۰ د دوه ګڼونود $a$ او $b$ ویش $x = b / a$ د تولګڼونو په ډیری کې تل هلته شته دی، چې $a$ د $b$ تولګنیز څو ځله وي۰

ketabton.com - The Digital Library



د دې لپاره، چې بيا هم ويش$a : b$ ( دلته هم $b$ پر $a$ ويشل کيږي) کيدونی شي» سره له دې، چې ويش تل په ټولګڼونوکی پيژند نه لري يا تعريف نه دی يا صورت نه نيسي« بايد د ټولګڼونو ډيری ماتګڼونو(کسر) ډيری‌ته پراخه شي، چی د لومړي ځل لپاره افاده يا وپينه $b/a$ سومبوليک مانا لري، د نوو ګڼونو په څير نيسو او په ټولګڼونو يې ور زياتوو، نو هغهٔ ګڼونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګڼونه وايو۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څير ورکړ شوی دی

$cb / ca$ هلته باور لري، چې $c \neq 0$ دټولګڼ او $a |b$ د ماتګڼ په څير ورکړ شوي وي

د راشنلګڼونو ډيری، چې په $Q$ سره ښايو د ټولګڼونو ماتګڼو $b/a$ چې $a \neq 0$ او $a$ او $b$ د ټولګڼونو له ډيری وي، د ټولګڼونوپراخوالی دی او ټول د مخه تير بنسټيز قوانين په کې باور لري او د ويش بنسټيز قانون ته داسې پراخيدلی شي

ټ : د ويش(تقسيم) بنسټيز قانون( دوام)

۲ - د دوه راشنل ګڼونو $a$، $a \neq 0$ او $b$ لپاره يواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون يا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګڼونه هم د ورځنيو اړتياو پر بنسټ منځ ته راغلی

بيلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وويشو، نو د هر تن نيم من غن, راسيږي، چې دا نيم يې

راشنلګڼ دی، ياني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ يا $\frac{1}{2}$

دا بايد په ګوته کړو، چې راشنل ګڼونه د پای يا ناپای لسميز ګڼ په څير ليکل کيدی شي

ketabton.com - The Digital Library

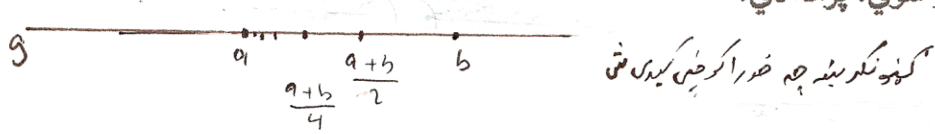


## ۳ ۰ ۱ ۰ ٤ - رییل گڼونه( Real numbers (reele Zahlen

( فرانسوي: په ریښتوني شته یا موجود)

د ریشنلګڼ په بنسټ هغه ورځنی تیوریکی اړتیاوي چی د شمیرعملیو بی بندیزه (نامحدود ) په کار اچولو یا استعمال ته موجود وي حل یا اوبی شوې او همدارنګه عملي اړتیاوي چی اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ریشنلګڼ له لارې کیدی شي چی د کرښی اوږدوالی تیك ورکړ شي یا په همدې مانا : په هرڅومره وړوکی ګڼونکرښه انتروال کی هم ناپای زیات ګڼونه، چی په ټکو یا نقطو انځور شوي، پراته دي.




د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بیا په یوه کرښه کی هر ټکی د ریشنلګڼ په ذریعه نه شي ښودل کیدی یا په بل عبارت د کرښی هر ټکی د ریشنلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چی د «ایریشنلګڼونو»په نامه یادیږي، کیدی شي د یوه پریودیکي( periodische ) (د ګڼونو کړی نه شلیږي ) ناپای لسیزمات له لارې وښوول شي.

د بیلګي په توګه د مربع د نیمي(قطر ) x اندازه چی د مربع یو اړخ ۱ وي نه شي کیدی چي په ریشنلګڼ وښوول شي. د پیتاګوراس د جملی په بنسټ د x لپاره لاندي مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$ , پس $x = \sqrt{2}$

ketabton.com - The Digital Library



د رييلګڼ کليمه يوه ژوره کليمه ده چې د پوهيدلو لپاره يې «پولی» ( ليمس lim ) ته اړتيا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کې به تر ځيړنی لاندې ونيول شي.

ډير اينتروالبنديدل چې په همغه يوه ټکی راځرخي مساوي(ورته ) ارزښته (Äquivalent لاتين :مساوي ارزښته) ليدل کيږي

رييلګڼډيری R چې په ريشنلګڼډيري د ايريشنلګڼډيري ورزياتول دي چې له ۲ . ۱ . ۱ . ۱ تر ۲ . ۱ . ۳ برخې پورې ټول بستزقوانين په کې باور لري. د رييلګڼ له لارې دکرښې ټول ټکي په بر کې نيول کيدی شي. په دې ډول رييلګڼونه ټولی د شميرلو او اندازه کولو اړتياوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د رييلګڼ حل يا اوبې نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتيا پيښيږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کې به تر ځيړنی لاندې ونيول شي.

يا دا لاندې په لنډه توګه:

موږ ګڼونه يا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګڼونه نه دي يانی که موږ د ۲ ګڼ ريښه(جذر) ونيسو، نو داسی يو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسميزه توګه پاي ته نه شي رسيدی يانی پريوديکی ( تل بيرته راګرځيدونی يا پسی نور هم پراخيدونی ) دي٠ داسی ګڼونو ته ايراشنل ګڼونه وايو٠

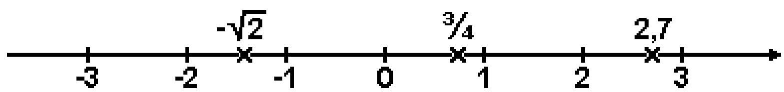
تل بيرته راګرځيدنيز ( periodi(cal تل بيرته راګرځيدوني ,Period د ګڼونو ځنځير نه شليږي

ketabton.com - The Digital Library



## ایراشنل – یا نانسبي عددونه یاګڼونه Irational numbers

د راشنل او ایراشنل ګڼونوټولنی ته رییل ګڼونه وایو( دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیری پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) . ۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیدایینتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي یانې ریل ګڼونکرښه




۳ ۰ ۲ - رابیلشوی( له نورو - ) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د رییل ګڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیرو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په رییلګڼونو کی څلور بنسټیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (وییني ) سره شمیرنه ( نوکان اینسوول)۰ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا ځلووني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه۰

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو ( کسرونو ) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول ( واړه کول ) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندي ( مخرج المشترک) جوړول۰ د داسی ماتلاندی( مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نوموني: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو۰

ketabton.com - The Digital Library



## ۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفريق (زياتون او كمون)

د زياتون او كمون بنستيزو قوانينو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a \, , \quad a - b = a + (-b),$$

$$(a+b+c\ldots-c-d-\ldots)+(e+f+\ldots-g-h-\ldots) = a+b+\ldots-c-d-\ldots+e+f+\ldots-g-h-\ldots$$

دا دا مانا لري، چې كه چيرې د نوكانو دباندې زياتوننخښنه ( د جمع علامه ) وي، نو د نوكانو څخه ويستلو كې ګڼې خپله مخنخښنه نه بدلوي۰ كه د نوكانو د باندې كموننخښنه (منفي نخښنه ) وي، نو د ګڼونو له نوكانو ايستلو په حال كې د نوكانو دننه نخښې بدليږي۰ يانې كموننخښنه زياتوننخښنه او زياتوننخښنه كموننخښنه كيږي۰ بيلګه يې لاندې ګورو

$$(a+b+\ldots-c-d-\ldots)-(e+f+\ldots-g-h-..)= a+b+\ldots-c-d-\ldots..-e-f-\ldots\ldots+g+h+\ldots$$

په همدې ترتيب كيدی شي نوكان هم ځاي پرځای شي۰

دلته بايد مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چې په ګڼكرښه د صفر څخه د يوه رييلګڼ واټن په ګوته كوي،

د كوم لپاره چې ليكو :

مطلق عدد يا - ګڼ يا بې اړيكو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زياتيزه او كميزه نخښنه يا مثبت او منفي نه ليكل كيږي يا يون( واحد) هم ورسره نه وي، دا ټيک او ټيک يو ګڼ ښايج او بس۰

$$|a| = a \;\; ; \;\; a > 0$$

ketabton.com - The Digital Library



$|a| = 0 \; ; a = 0$

$| a| = -a \; ; \; < 0$

یانې که a زیاتیزه یا مثبت وي،نو a پخپله لیکواو که a کمیزه یا منفي وي، نو a- لیکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 لیکو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخښی قوانین باور لري:

$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , ( -a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab$

که چیرته ډیر نوکبندونه راګرځیدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی

بیلګه:

$$(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac – ad + bc –bd)(e-f-g)$$

$$= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-) bdf+bdg$$

د ځانګړي حالت په توګه د بینوم پیژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$( a – b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$( a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

ketabton.com - The Digital Library



ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې تيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيږي :

**بيلګه ۱ . ۳ :**

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2 .$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2.$$

$$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2\ v)(4u - 2\ v)$$

۳ ، ۲ ، ۳ ويش

په پام دې کې ولرو، چې $b:a$ د $a = 0$ لپاره کوم مفهوم نه لري، پر صفر ويش ناشونی دی

په ويش کی نوکبندول د زياتون، کمون او ځل په څير ساده نه کيږي، په ويش کی د زياتون په ډول ليکل شوی هر توکی په ماتلاندې ويشل کيږي:

بيلګه ۳ ، ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\ abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

يا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

ketabton.com - The Digital Library



دې لاس ته راوړنې(نتيجې) ته سرې د ګډو ځلوونو يا فاکتورونو يا ځپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسيدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(\,a - 2b + 4c)$$

له دې ځايه کيدی شي، چې د پولينوم وېش بيل شي

بيلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \;\; \text{Rest} \;\; 5c \;\text{باقي}\; \Leftrightarrow$$
$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \;\text{لپاره}\; ab \neq 0,$$

د يوه زياتو يا چمعي وېش په يوه چمعه، کيدی شي د بينوم جګلې له لارې صورت ونيسي

بيلګه ۳ . ۶ :

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \quad \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b \;\text{لپاره}\; a \neq -b. >$$

بيلګه ۳ . ۷ :

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b \;\text{لپاره}\; a \neq -b. >$$

بيلګه ۳ . ۸ :

$$\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax \;\text{لپاره}\; ax \neq by,$$

دلته هم وېش د پاتې يا باقي سره شونی دی.

بيلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b :$

باقي يا پاتې $b^2$

له دې لاس ته راځی او په څنګ

ketabton.com - The Digital Library



بېلګه ۱ . ۱۰

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b}$$ لپاره $a \neq b$,

$C: (16u^2 - v^2) : (4u + \sqrt{2}\,v) = 4u - \sqrt{2}\,v$ Rest $v^2$ باقي $\Leftrightarrow$

$$\frac{16u^2 - v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

$$=4u-\sqrt{2}\,v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

د $4u \neq -\sqrt{2}\,v$ لپاره

فورمال وړ د دوه پولينومونو ويش دی ( برخه ۱۲ دې اندول(پرتله ) شي ):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0} = P_n(x) : Q_m(x),$$

که د ماتباندې پولينوم درجه د ماتلاندې پولينوم درجې لوي يا مساوي وي($n \geq m$).

موږ نيسوچې: $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ او $Q_m(x) \neq 0$ .

د دواړو ويشو« ټوټه ويشو» ( پارځيالويش( Partialdivision ) ) دا دی چې دا

د $P_n(x): Q_n(x)$ ويش په لاندې ډول وليکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \text{Polynom } 1 + \frac{\text{Polynom } 2}{Q_m(x)} ,$$

چېرته چې د پولينوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجې څخه کوچنۍ ده.

دې هدف ته په لاندې ډول رسيږو

۱ – سرې يواځې د جګ نظم غړي $a_nx^n : b_mx^m$ ويشي او له دې سره يوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}: Q_m(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + F(x) \qquad *$$

ketabton.com - The Digital Library



۲ – سرې (*) په ماتلاندې پولينوم $Q_m(x)$ ويشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راخي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چی د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل پولینوم $P_n(x)$ له درجی n څخه کم له کمه په یوکوچنی وي . د ګنونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چی $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – تورته ويش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعماليږي، د لاندنی نتیجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چیرته چي د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجي کوچنی وي.

د تورته ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلګه ۳ . ۱۱ . لمړی دې د تورته ویش ۱ او۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلګه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

ketabton.com - The Digital Library



| | $P_3(x) \quad : Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$ |
|---|---|
| $(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2(3x-2) =$ | $(6x^3 + 5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 \quad +F(x)$<br>$6x^3 -4x^2$ |
| $P_2(x) = P_3(x) -(a_3 /b_1) x^2Q(x) =$ | $9x^2 -3x +1$ |
| $F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$ | $(9x^2 - 3x +1) : (3x - 2)$ |

بیلګه ۱۲ . ۱۲ : د تیري ویش بیلګه ۱ . ۱۱د ( F ( x غلطي ته دوام ورکوو، ترڅو چی د لیکنی شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x):Q_1(x) = (9x^2-3x+1):(3x-2) = 3x+G(x)$$

$$3x.Q_1(x) \quad = \quad (9x^2-6x)$$

پاتي $=$ $3x+1$ یاباقي

$$G(x)= (3x+1):(3x-2)$$

له دې لاندې نتجه لاس ته راځي :

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)=2x^2+3x + G(x)$$

$$G(x) \quad = (3x+1):(ex-2) = \; 11 +H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x-2$$

یاباقي $=$ $3$ $=$ پاتی

$$H(x) = \; 3 : (3x-2)$$

پس باور لري

$$(6x^3+5x^2 - 3x+1) : (3x-2) = 2x^2+ 3x+1 + 3/(3x-2)$$

ketabton.com - The Digital Library



تول توټه ویش کیدی شي په لاندي ډول مخ ته یوړ شي .

$$\begin{array}{llllll} & & (1) & (4) & (7) & (۱۰) \\ & (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2) = & 2x^2 & +3x & +1 & +3/(3x-2) \\ (2) & \underline{6x^3-4x^2} & & & & \\ (3) & -9x^2-3x+1 & & & & \\ (5) & \underline{9x^2-6x} & & & & \\ (6) & 3x+1 & & & & \\ (8) & \underline{3x-2} & & & & \\ (9) & 3 & & & & \end{array}$$

دلته ( i ) د پرلپسی پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

$$\begin{array}{llllll} & & (1) & (4) & (7) & (10) \\ & (18x^4+15x^3+0x^2-2x+1):(3x^2+x-1) = & 6x^2 & +3x & +1 & +\frac{2}{3x^2+x-1} \\ (2) & \underline{18x^4+6x^3-6x^2} & & & & \\ (3) & 9x^3+6x^2-2x+1 & & & & \\ (5) & \underline{9x^3+3x^2-3x} & & & & \\ (6) & 3x^2+x+1 & & & & \\ (8) & \underline{3x^2+x-1} & & & & \\ (9) & 2 & & & & \end{array}$$

ketabton.com - The Digital Library



### ۳ ۰ ۲ ۰ ٤ ماتشميرنه ( کسرشميرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د ټولګڼونو m,n څخه د ريشنلګڼونو انځورونو لپاره تعريف شوې۰ کيدی شي، چې دا کلمهa/b ته، چې a او b ريېل ګڼونه دي، وغزول شي۰

بايد په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بيلګي په توګه:

ويش(a/(b-c تيک هلته مفهوم لري، چې b≠c وي۰ ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښايي

لکه a : b او يا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم بايد b |=0 وي.

په اخر کې بايد په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ کيدی شي او هم دواړه۰ دا بايد دلته هم په پام کې وي، چې هيڅ يو ماتلاندې ګڼ بايد صفر نه وي يانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور يو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کيدی دا موږ د ماتو مات ( کسرالکسر) بولو۰

بيلګې:

a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 ,

(a/b) : c = (a/b) / c b|=0, c|= 0

(a/b): (c/d) = (a/b) / ( c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0

يا په لاندې ډول:

ketabton.com - The Digital Library



$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c}, b \neq 0, c \neq 0, ..., \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

په ځو واره ماتګڼ کې باید اصلي ماتکرښه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټیکوالی مخه نیول شوي وي۰ په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} \neq \frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هریو ماتګڼ b|=0, a / b په یوه ګڼ c |= 0 پراخیدی او همداسې لنډیدی شي

یانې ماتلاندې او ماتباندې په یوه ګڼ c ځلیدی یا ویشل کیدی شي او دا کړنلار په اصلي

ګڼ کې تغیر نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c}, b \neq 0, c \neq 0$$

د ماتګڼ لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګڼ ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}, \frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c}; a \neq 0, y \neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یواځنی فکتور یا ځلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګي په توګه لاندې ماتګڼ

ketabton.com - The Digital Library



$(a+c):b+c)$ چې $b\neq -c$ وي نه شي لنډیدی دا $(a+c):(b+c)=a:b$

باور لري،چې $b \mid= 0, c = 0 \ \vee -c \mid= a, a = b$

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اړیین دی، چې ډیر ماتګښونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، ځکه چې یواځې هغهٔ مات یو په بل زیاتیدی یا یو له بل کمیدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه : $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}, c\neq 0$

که چیرې پرخښ یا برعکس ماتګښونه $a / b$ او $c/d$ د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زیاتوو او یا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې باید راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو څخه دی۰ د بیلګې په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}, b\neq 0, d\neq 0, f\neq 0 \Leftrightarrow bdf\neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{cb}{bd}=\frac{ad\pm cb}{bd}, b\neq 0, d\neq 0 \Leftrightarrow bd\neq 0$$

تل باید ماتګښونو ګنلو کې ماتلاندې سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بیلګه باندې ښایو

بیلګه: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}-\frac{1}{36}$

ketabton.com - The Digital Library



کيدی شي، چې اصلي ماتلاندې)ا۰م۰ل (وټاکل شي

= 2.3.5.6.15.36= 97200 ا ۰ م ۰ ل ۰

کيدی شي، چی ا۰م۰ل۰ د لومړنيو ګڼونو ځل په ځير هم وليکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3۰. 3.۰2۰36 = 2

---

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړګڼ يا لوړ جګګڼ يا لوړ طاقت لومړي ځلووني رانيول کيږي۰ چې ګڼل خورا ساده کوي۰

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=$$

$$\frac{90-60+36-30+12-5}{180}=\frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار ځنګه د ماتو په ټوليزه افاده استعماليدی شي لاندې بيلګه يی ښايي:

ketabton.com - The Digital Library



بيلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بيلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې يواځی د لاندې لپاره موخه ور دی $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره يانې

$$a.b(ab)(a^2b).(ab^2) = a^5.b^5$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

a = a

b = b

ab = a b

$a^2 . b = a^2 \quad b$

$ab^2 = a \quad b^2$

-------------------

دا ا۰م۰ل۰ په لاندې توګه دی $= a^2 \quad b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

ketabton.com - The Digital Library



بيلگه ۳ ۰ ۱٦ : د ويينې يا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a \neq 0, a \neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

$a^2$ - 1 = (a-1)(a+1)

$a^2$-4 = (a-2) (a+2)

---

$(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)$

دا پورته لاس ته راوړنه ا۰م۰ل۰- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په گوته کوي او له پورته ځخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

ketabton.com - The Digital Library



د دې مات ماتباندې صفر دېپه دې ډول په پورته پیل کې ورکړ شوې افاده یا وینه د صفر پیچلې لیکلو بیلګه ده او بس۰

د ځل او ویش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, b\neq \wedge d\neq \Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}; b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0 \Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بیلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بیلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

ketabton.com - The Digital Library



$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, \forall\, |a| \neq |b|$$

یادونه: په پورته لیکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم باید راغلي وی۰ دلته اړیین د ګڼونو شمیرقوانین دي او د ګڼونو پیژندل۰ د ګڼؤنو اړیکې د خوندیونې له لارې

$N \subset Z \subset Q \subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمیر قوانین، چې هغه زیاتون ، کمون ، ځل ، ویش دی او د ویش په بنسټ ماتشمیرنه۰ دا باید په همغه ساده ډول زده کړای شي۰

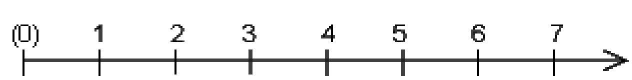
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړیین د ګڼونو شمیرنقوانین په لاندې توګه رالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهیدنه بسیا کوي۰

ګڼونډیرۍ ( لنډه ټولګه)

پیدایینتي – یا طبیعي ګڼونډیرۍ

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پیدایینتي ګڼونو انځورونه



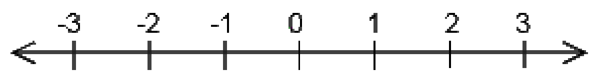
ketabton.com - The Digital Library



د ټولګڼونو ډيرى

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

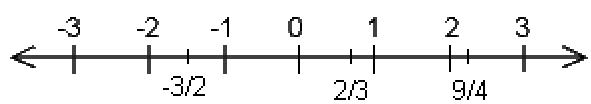
د ټولګڼونو ډيرۍ انځورونه په يوه کرښه




د راشنلګڼونو ډيرۍ

$$Q = \{\frac{p}{q} | p, q | Z \wedge q \neq 0\}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي




هر راشنل ګڼ د لسميز يا پريوديکی ګڼ په څير ليکل کيدئ شي

د ماتو سره شميرنه

د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زيات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بيا يې هم ترمنځ نور ګڼونه يا ځايونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دی او دې ګڼونو ته مو ايراشنل ګڼونه وويل ۰ لکه چې يو راشنلګڼ نه دئ

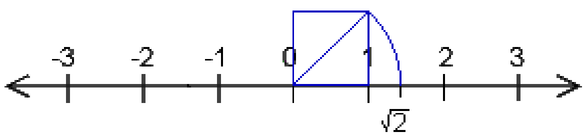
راشنل او ايراشنلګڼونه رييل ګڼونه جوړوي

## د رييل ګڼونوډيرۍ يا حقيقي اعدادو سټ

ketabton.com - The Digital Library



د رييلګڼونو ډيرۍ د ګڼونکرښی تولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکرښه کې روښانه ده




په رييلګڼونوکې بی له بنديزونو شميرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې بايد صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونولپاره باور لري

شميرډولونه لومړی پوړۍ

:Additionزياتون يا جمعه

زياتوونی +زياتونی = زياتون

د زياتون کموتاتيو قانون $a + b = b + a$

د زياتون اسوخياتيو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زياتون ته د يوه بی اغيزه يا ناپيلی توکی شتون$a + 0 = a$

مخامخ – يا په ښت ګن يا برعکس عدد$a + (-a) = 0$

کمون:Subtraktion

د زياتون په ښت کارونه يا عمليه ، تريې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$

ketabton.com - The Digital Library



بیلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوړۍ

ضرب یا ځل: فاکتور ( ځله وونی ضریب ) ۰ فاکتور( ځله وونی) ځل
د زیاتون تکرار، بیلګه. $4 + 4 + 4 = 3\cdot4 = 12$

د ضرب یا ځل کموتایتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب یا ځل اسوشیاتیو قانون $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

دستریبوتیو قانون $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلي توکي شتون( بي اغیزه توکی یې که وبولو هم بده به نه وي)

$a\cdot1 = a$

په ځېټ ارزښت یا برعکس قیمت $a\cdot(1/a) = 1$

یو ضرب ټیک هلته صفر دئ، چې د صرب یو ضریب صفر وي $a\cdot0 = 0$

ویش:
ویشونی : پرویشونی = ویش ( لوستل یې له ښي وکیڼ لورته)

ویش د ضرب یا ځل په ځېټ کارونه ده) $a:b=c$

$a\cdot x = b \Leftrightarrow x = b:a$

د بېلګې په توګه z.B.: $4\cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

ketabton.com - The Digital Library



## ۳ . ۳ تمرینونه

۱ – د اعدادو یا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ یا سټ کې د عدد a او عدد bلپاره د شمیرلو څلور قاعدې یا لارې باور لري؟

یادونه: دلته دې ترې کمونی یا مفروق منه او وېشونش یا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونی یا مفروق او پروېشونی یا مقسوم علیه تل b وي.

a) $a = 8,\quad b = 2$
b) $a = 5,\quad b = 8$
c) $a = 7,\quad b = 0$
d) $a = -6,\quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او یو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو یا ګڼونو او څخه تفرسق، ضر ب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتیجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ یادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi,\quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3},\quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0,\quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ییز سیستم کې لاندې ګڼونه یا اعداد انځور کړئ!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

ketabton.com - The Digital Library



۱ . ۵ – لاندې ربښتوني يا راشنل اعداد د کوټيو کې اچوني يا کوټی وني له لارې په نږدې ۵ ځايونو ټيک پيدا کړئ.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زياتيزو او ځليزو ( د جمعي او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړئ

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بينوم فرولونه

۳ . ۱ – د بينوم فرمولونه وکاروئ يا استعمال کړئ او د شونتيا سره سم يې ساده کړئ

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

ketabton.com - The Digital Library



c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې ويينې يا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکميلونې له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضريبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې ويينې يا افادې په ضريبونو ټوټه کړئ او تر شوونتيا پورې يې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$
d) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

ketabton.com - The Digital Library



4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$ b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$ c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$ d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان $(n=1,2,3,\ldots)$ له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$

b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

c) $(1 - 2n)^3$

d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ا رزښتونه له شمیره وباسئ، کوم چې $a,b,\ldots$ یې نه شي نیولی یا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$ b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$ c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$ d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$ b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$ c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$ d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

ketabton.com - The Digital Library



5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

## ۶ . ماتشميرنه يا كسرشميرنه

۶ . ۱ – لاندې كسرونه صورت او م خرج يعني د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنيو ضربيونو يا څلوونو له لارې لنډ كړئ

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$

b) $\frac{2\,730}{5\,005}$

c) $\frac{20\,520}{2\,280}$

d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا كوچنى ګډ زاتځلى (ذ الاضعافالاقل) پيدا كړئ

په لاندې كې und د او په معنا دى

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نوميزو يا برابرمخرج كسرونو شميرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7} - \frac{1-6}{7} + 2\frac{1}{7} - 7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5} - \frac{4-5}{5} - 5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26} + \frac{5-3}{13} + 3\frac{33}{39} - 0 \cdot \frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a} - \frac{1-a}{a}$

c) $\frac{(a-b)^2}{ab} - \frac{1-2ab}{ab} - \frac{a^2+b^2}{ab}$

ketabton.com - The Digital Library



b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنومیزو کسرونو جمعه او تفریق، په مخرج یا ماتلاندې کې ضربیونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نومیزو ماتونو(کسرونو) جمعه او تفریق( زیاتون او کمون)، جمعه مخرج یا ماتلاندې کې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره یو په بل پسې ورکړشوي ارزښت ځای په ځای کړئ‌او دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(کسرونه) سره یوځای کړئ! بیا په ټولیزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړئ او هغه ارزښتونه لرې کړي، چې د a د اخستلو یا نیولو اجازه نه لري.

ketabton.com - The Digital Library



| | |
|---|---|
| a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$ | د $a=1,2,3$ سره |
| b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$ | د $a=3,4,5$ سره |
| c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$ | د $a=2,3,4$ سره |
| d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$ | د $a=2,3,4$ سره |

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$

c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

ketabton.com - The Digital Library



c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو یا کسرونو ضربونه( یا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وینو یا افادو برعکس یا په څټ ارزښتونه پیدا کړئ.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

ketabton.com - The Digital Library



6.7.4. a) $\dfrac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}}$

c) $\dfrac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}}$

b) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1}{\frac{a^2+b}{b}-\frac{a+b^2}{a}}$

d) $\dfrac{\frac{a}{1-a}+\frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a}-\frac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}}$

c) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$

b) $\dfrac{\frac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-\frac{1}{ab}}{\frac{x}{a}-\frac{1}{b}}$

d) $\dfrac{\frac{1}{16a^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}+\frac{1}{2b}}+\dfrac{\frac{1}{16a^2}-\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}-\frac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\frac{1}{1-ab}}{1-\frac{1}{1-ab}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\frac{b}{a}}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\frac{a}{a-b}}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه يا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ ( که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

ketabton.com - The Digital Library



6.8.2. a) $\frac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\frac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\frac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\frac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\frac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\frac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\frac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\frac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0,4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\frac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\frac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\frac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\frac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\frac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\frac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\frac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\frac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\frac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\frac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

ketabton.com - The Digital Library



d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (-1) سره شمیرنه

الف- ورکړشوی دې وي/ a(b-c) /c . a=-1ځای په ځای کړئ او داسې لاس ترې راغلي کسر یا مات لپاره مختلف لیکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج ( ماتباندې او ماتلاندې) کې (-1) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر یا مات $(b^2 - a^2)$ /(-a-b) د (-1)سره پراخ کړئ او ساده یې کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج یا ماتلاندې کې (-1) له نوکانو راباسئ او دا وپینه یا افاده ساده کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

# ٤ ٠ توان ( پوتنځ) او ريښه ( جذر) ( Potenz , Wurzel Root)

په دې برخه کې د توان او جذر يا ريښي قوانين ترخيړنې لاندی نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې يا استعمال چټکتيا ته پرمختګ ( تکامل) ورکړو٠ دا مشوره کيږي، چې ريښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - يا جګعدد يې نسبي يا راشنل وي٠ د دې فورمال ټيک کره د ګڼلو قوانينو په څنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو ) هم ژور فکر وشي٠

د ريښي پيژند د خلاف يا پر ځښ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند ( ريښه ويستونی يعنی هغه ګڼ، چې ريښه يی وېستلکيږي يا نيول کيږي،د ريښی نخښې لاندی ګڼ او هم د ريښی ارزښت نامنفي اعداد ( ناکميز ګڼونه) وي٠ د توان زړه پورې ريل اکسپوننت ( په جګ) هلته کره دی يا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نيونه يا فرضيه شوي وي٠

٤ ٠ ١ توان ( پوتنځPotenz ) په ټولګڼيز يا تام عدد په جګ يل اکشسپوننت

ketabton.com - The Digital Library



---

پيژند ٤ ٠ ١:

د يوه په خوښه ريل ګڼ توان لاندې مورږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پوهيږو ٠ د دې لپاره ليکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ n = 1,2,3,…

اکسپوننت(جګګڼ، لنډ: جګ) اوb د پوتنځ يا توان ارزښت بلل کيږي٠

د بيلګي په توګه

$$a = a\ ,\ a^2 = a\ .\ a\ ,\quad a^3 = a.a.a$$

(4,1 ) د n = 0 لپاره کره ټاکل کيږي 1 = a° د 0 =| a سره

د پيژند يا تعريف پر بنسټ ( او د څه بنديزونو په څلورديوالی کې، چې لاندې شوي)
ښوول کيدی شي، چې د خوښی يا زړه پورې ريیلګڼونو $a,b \in R$ او $m,n \in N^*$
نامنفی ټولګڼونو اکسپوننت يا جګګڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;\ldots\ldots\ldots(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,6)$$

ketabton.com - The Digital Library



دا پورته د توان اړیکې د ټولګنيز مثبت جګړ یا اکسپوننت لپاره باور لري، کيدئ شي، چی ټولګنيونو ته وغزول شي، كه چيرې پيژند ورکړو یا تعريف کړو:

$$\frac{1}{a^n}=a^{-n};n=1,2,3,....,..a\neq 0,..................(4,7)$$

دا پورته د توان قوانین د ټولګنيز جګ(اکسپوننت) لپاره بی بندیزونو یوائې د نه ورکيدونکو رييل بنسټونو یاني د $a \mid= 0$ او $0 = \mid b$ لپاره باور ي دي . په (4,5) کې بيا بندیز $n \geq m$ اړيين نه دی.

د توان قوانين کيدئ شي په ښه بدلونکو افادو یا وييڼو وکارول- یا استعمال شي.

بيلګه4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2}=(4abx^{-2}y)^{-2}=4^{-2}a^6x^4y^{-2}=\frac{a^6x^4}{16y^2},abxy\neq 0$$

بيلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3}=\frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3}=\frac{3a^2}{4b},a>0,b\neq 0$$

بيلګه4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}}+\frac{a^6-a^5+2a^3-1}{a^{m+1}}-\frac{2a^2+1}{a^{m-2}}=$$
$$=\frac{a^5(3-a)+a^6-a^5+2a^3-1-a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}}=$$
$$=\frac{3a^5-a^6-a^5+2a^3-1-2a^5-a^3}{a^{m+1}}=\frac{a^3-1}{a^{m+1}},a\neq 0,m\in Z$$

ketabton.com - The Digital Library



پوتنځ زياتون او کمون کې بايد پام وي، چې يوازې د برابر پوتنځ ګڼونه يو له بل سره زياتيدی او يو له بل کميدی شي٠

بيلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بيلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بيا ګوته نيسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخښي کې دې توپير وشي٠ پوتنځ له مثبت - يا زياتونمخنخښي سره تل مثبت يا زياتيز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترځ کې، چې پوتنځ د منفي - يا کميز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زياتيز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - يا کمون ارزښت لري٠

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ...., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ٠ ٢ – ريښه او توان له ريشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پيژند ٤ ٠ ٢

د يوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ريښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

ketabton.com - The Digital Library



---

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره ليکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, .....................(4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0 ..............................(4,9)$$

دلته a راديکاند Radikand ، يا ګڼ، چې ريښه (جذر) يې نيولکيږي( موږ دا

ريښه نيووني يا ريښه ويستونى بولو) او n دريښې جګ(اکسپوننت) او b د

ريښې ارزښت يا ريښه ارزښت بلل کيږي.

بايد پردې ټينګار وشي، چې ريښه يوازې د نامنفى راديکاند يا ريښه ويستوني (ريښه نيوني) $a \geq 0$ راوستل کيږي يا نيول کيږي او پخپله په لاندې توګه يو نامنفي - يا ناکميز ارزښت لري يانى

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کوني لپاره لاندې يادونې شوي دي:

۱ – د جوړه $n = 2,4,6,...$ لپاره د $a<0$ سره ريښه b په رييلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي يا ناکميز يانې زياتيز ګڼ دى.

۲ – د جوړه او مثبت - يا زياتيز برابرون $b^n = a$

په ختې په ريښتوني دوه رييل اوبيوني ياحلونه لري د بيلګي په توګه $b^2 = 4$

ketabton.com - The Digital Library



---

یانې $n = 2$ او $a = 4$ اوبیونې

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي۰ د دې لپاره، چې د رادیکاند د شمیرلو کارونې یواځنۍ سرته ورسولی شو، باید د یوې اوبیونې لپاره پریکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . $n= 1 , 3 , 5$ او $a \geq 0$ لپاره

$$b^n = a$$

تل یواځني زیاتیز(مثبت) اوبی یا حل لري یانې $b \geq 0$

٤ – د ناجوړه n او کیمز یا منفي a لپاره $b^n = a$

تل یواځني یو منفی اوبی یا حل لري۰ یانې $b < 0$ د بیلګي په توګه دا $b^3= -8$ یواځې

اوبی $b = -2$ لري.

په هر صورت باید د جوړه... $n=2,4,6$ ګڼونو لپاره $a \geq 0, b \geq 0$ وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به یا ریښه شته نه وي او یا به یواځنی اوبی نه لري، یانې څو اوبی به شته وي

د ناجوړه یا طاقو,... $n = 1,3,5,$ لپاره کیدی شي، چې له دواړو غوښتنو تیر شو۰ دلته به یواځې تاوان یا زیان دا وي، چې د تولو ممکن حالتونو لپاره به بیل بیل د ریښې د قوانینو غوره کولو ته اړ کیږو۰ له بلې خوا به ریښې د قوانینو ترتیبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ایښول شوي بندیزونه nقوانینو لپاره ستونځمن وي۰ له دې امله د ناجوړه ریښو

ketabton.com - The Digital Library



---

اکسپوننت غوره کوو او د یوائځني یو اوبی لپاره 2- د 8- = $b^3$ او نه $-2 = \sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2=-\sqrt[3]{8}$ لیکو۰ په دې اړوند او د یادو شوو نیونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2} = a, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,10)$$

څلوری ریښه یا مربع ریښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقیقي اعدادو یا - ګڼونو a لپاره تعریف شوي۰ د نامثبت یا نازیاتیز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بیا د (4,10) اوبی منفي یا متیز وي، کوم، چې نیونه $b \geq 0$ نفې کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د ( 4 , 10 ) بڼول شویو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي یا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$

یانې د 2- = 2 سره۰

د (10 , 4 ) ټیک داسې لیکل کیدی شي:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \{a, a \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,11)$$

$$= \{ -a \quad , a \leq 0 \qquad (4,11)$$

د ریښې یا جذر له پیژند ( 9 , 4 ) , ( 8 , 4 ) سره سم کیدی شي، چې لاندې باوري د ریښې قوانین ولیکل شي د $n = 1,2,3\ldots$ او $a , b \geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,12)$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}, b > 0 \ldots\ldots (4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,15)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

پورته د (4,15),(414),(413,),(4.12). ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه تړې ناسمه پوهیدنه نه رامخ ته کوي . دلته پیژندل کیږي، چې د ريښې قوانین د پوتنځقوانینو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پوري ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي. په رښتیا چې دا د پوتنځقوانینو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ريشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعريف شي يا يې لاندې پیژند ورکړ شي.

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m .......(4,16)$$

د... $a \geq 0 , n = 1,2,3,\ldots, m = 1 , 2 , 3\ 4 \ldots$ لپاره

د بیلګې په توګه (١٦ ، ٤ ) په لاندې ډول لیکل کیږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړیکې (4,16) کیدی شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چیرته، چې (4,17) په ټینګه - يا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} , a > 0....................(4,17)$$

بې له بندیزونو د خوښې جګو n او m لپاره د پوتنځقوانین (4, 2 ) تر (4,6) باور لري، خو یواځې هلته، چې نه ورکیدونو بنسټونو یانې a>0, b>0 نیونه شوې وي.

د ريښې شمیرلو لپاره باید اساساً د(4,16) له مخې ريشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتیا لرو، چې د پوتنځ او ريښې سره شمیرلو د قوانینو استعمال نیونې تل و ازمایلې شو. په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفیتوب کمونوالی يا نامنفیوالی يا مثبتتوب(مثبتوالی يا زیاتونوالی) پریږدو، چې لاندې ناسم پاي کیدډول وښایو.

ketabton.com - The Digital Library



---

$$\sqrt{-a}=(-a)^{1/2}=(-a)^{2/4}=\sqrt[4]{(-a)^2}=\sqrt[4]{a^2}=a^{2/4}=a^{1/2}=\sqrt{a}$$

برابرون یوازې د دې ساده حالت $a=0$ لپاره شته دی یا باور لري، د $|a|=0$ یا $a\neq 0$ لپاره a-او یا a منفي دي دا په دې مانا، چې a یاa- پیژند نه لري یا تعریف نه دی۰

د توان قوانین د توان سره شمیرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بیلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بیلګو کې دا تراوسه د شمیر بنسټیز قوانین ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کیدی شي۰ شمیرنه یې لږ وخت نیسي، که غواړئ پخپله یې یو ځل وشمیرئ۰

بیلګه ٤ ۰ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}=\{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=(125)^{\frac{1}{6}}=(5^3)^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}=2,2361$$

بیلګه ٤ ۰ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}}:\frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}}=\{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\}:\{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\}=$$
$$=a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})}=a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}}=$$
$$=\frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}}=\frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بیلګه ٤ ۰ ٨

$$8.\sqrt[3]{343}-4.\sqrt[3]{125}+5\sqrt[3]{8}-5\sqrt[3]{729}$$
$$=8.\sqrt[3]{7^3}-4\sqrt[3]{5^3}+5.\sqrt[3]{2^3}-5.\sqrt[3]{3^6}=8.7-4.5+5.2-5.9=1$$

ketabton.com - The Digital Library



---

بیلګه ٤ ۰ ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شمیرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې ریښې له منځه یوسو ( د ماتلاندې ریشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې یوه ریښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور یا ځلووني په څیررامنځ ته شي، نو دا د وظیفي لپاره یوازې اړیین ده چې (m < n ( m , n >0 او $m,n \in Z$ په پام کې راوړو

کارونه یا عملیه په لاندې ډول اجرا کیږي(N*|= 0 , a > 0)

$$Z/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},..........(4,18)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

بيلګه ٤ ٠ ١١

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورۍ- يا مربع ريښې زياتون يا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بينوم فرمول استعمال سره له $a > 0$ او $b > 0$،چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},...(4,19)$$

بيلګه ٤ ٠ ١٢

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بيلګه ٤ ٠ ١٣

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

## ۴ . ۳ توان( پوتېنځ) د حقيقي – يا رييل جګ ( اکسپوننت ) سره

دلته دا په ګوته کوو يا دې دا ويل شوي وي، چې د توان ټول قوانين له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقيقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بنديزه ټيک د مثبت بنسټ لپاره. يعنې a,b>0 ، برسيره پردې دې بايد توان $a^{\alpha}; a > 0$ د ناريښتوني يا ايراسنل عدد α لپاره تعريف شي.

ketabton.com - The Digital Library



---

که α يو ايراشنل – يا ريښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انتروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\propto = \{a_{n;} a'_n\}$. دلته $a_{n;} a'_n$ هوښيار يا راشنل اعداد دي.
بيا نو

$$\beta = \{a^{a_n}; a^{a'_n}\} \quad (4{,}20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غږي يې ( ۴،۲ ) لاندې تعريف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپير، چې

$$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$$
$$2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$$
$$2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$$
$$2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415}$$
$$2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143}$$
$$\vdots$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $$\sqrt[10000]{2^{1412}<2^{\sqrt{2}}<\sqrt[10000]{2^{14143}}}$$

٤ ۰ ۳ تولګه : د $a>0, b>0$ رييل او $m,n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n \neq 0)$ ييلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

ketabton.com - The Digital Library



---

دا پورته موضوع تر دې ځایه بسیا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړیین وو، هغه به بیا په ګډه ورزیاتوو

۴ . ۵ . تمرینونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفریق یا زیاتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څیر یې ولیکئ

a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$ d) $-(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b)$

1.2. a) $-3^{-4}$ b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$

b) $(3a + 2b)x^4 - x^4(2b - 3a) + x^4(3a + 2b)$

c) $4(a - b)^2 + 2(b - a)^2 - 3(a - b)^2$

d) $18(a - 1)^3 - 3(1 - a)^3 - 15(a - 1)^3 + 4(1 - a)^3 + 3(1 - a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

ketabton.com - The Digital Library



---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زياتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^n b^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاريتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشميرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګې يا جګعدد سره، د کميزو يا منفي اکسپوننتونو سره شميرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\frac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\frac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\frac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\frac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\frac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\frac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\frac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

ketabton.com - The Digital Library



c) $\dfrac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\dfrac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \dfrac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\dfrac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرليطو لاندې کيدى شي لاندې عددونه د يوه مربع – يا څلورى رېښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) $ab$

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) $a^2-b^2$ d) $a^2+b^2$

۵ - د رېښو جمعه او تفريق)زياتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\dfrac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\dfrac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

b) $\dfrac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

d) $\dfrac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\dfrac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د رېښو يا جذرونو ضرب او وېش

ketabton.com - The Digital Library



---

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}:\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$ c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

## ۷ – د توان او ريښې ريښه وېستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$ d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$ c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}}:\frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

ketabton.com - The Digital Library



---

۸ – لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج ریښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

ketabton.com - The Digital Library

# ۵ ۰ لوګاریتم یا لوګاریتموس     Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترڅیرنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوې، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوې وې څیړو۰

## ۵ ۰ ۱ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم  تر څیړنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څیړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې  باید پوره  پاملرنه شوې وي ۰د لوګاریتم $c = \log_b a$ پیژند لپاره د یوه زیاتیز ـ یا  مثبت عدد  a  یوه  زیاتیز ـ  یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي  له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه لپاره   c

$$b^{c} = a\,;a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, .............(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵ ) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x = 16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: د $2 = \log_x 36$ سره یو ارزښت لري، نو لرو x²=36 x=6

ب : د $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

ketabton.com - The Digital Library



نو لرو $x = 2$

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : د $x = \log_5 125$ سره، یوارزښت لري، $5^x = 125 = 5^3$

نو $x = 3$

ب: د $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو $x= 4$

۳ ۰ ۱ ٤ الف د $5 = \log_3 x$ سره یو ارزښت لري، نو $3^5 = x$ $x=243$

ب : د $-5 = \log_2 x$ سره یو ارزښت لري، نو لرو $2^{-5} = x$ $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2 = \log_x(-6)$ تعریف نه دی یا پیژند نه لري۰

ب : $x = \log_{-5} 125$ پیژند نه لري یا تعریف نه دی

پ: $\log_1 x$ پیژند یا تعریف نه دی

له (5,1) او(5,2) څخه لاس ته راځي

$$a = b^{\log a}, ............................................(5,3)$$
$$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1, ............................(5,4)$$

.

ketabton.com - The Digital Library



---

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکيږي

$$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ................(5,5)$$

د lga لوګاريم ته لسيز لوګاريتم وايي او lna ته پيداينتي يا طبيعي لوګاريتم وايي( e وروسته څيړو) زيات وخت د لشميز لوګاريتم لپره داسې هم ليکو:

$$c = \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ بايد وکارول شي٠

۵ ۰ ۲ د لوګاريتم قوانين

د لوګاريتم د پيژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کيدی شي د پوتنځ د قوانينو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاريتم قوانين رابيل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاريتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زياتيز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ......................(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...........................(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, ......................(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1,2,..., ............(5,10$$

د پوتنځ قوانينو له مخې د دې فرمولونو راوستل يو د وړانديز وړ د لوګاريتم ژورې څيړنې لپاره تمرين ښايي

ketabton.com - The Digital Library



---

د بیلګې په توګه له ( ۷ ، ۵ ) همداسې

$$\log_b (x.y) = \log_b x + \log_b y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1 ) څخه لرو

$$c_1 = \log \ x, c_2 = \log_b y, c = \log_b (x+y), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1} = x, b^{c_2} = y, b^{c} = x.y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون( 4, 2 ) پر بنسټ لرو :

$$b^{c} = x.y = b^{c_1}.b^{c_2} = b, \Rightarrow c = c_1 + c_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې څخه د لوګاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه ښت۰

بیلګه ۵ ۰ ۲

$$\log \frac{2\sqrt{a+b}\,a^{3}b^{2}}{\sqrt[3]{c}\,(a+c)^{2}}$$
$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log(a+b) + 3\log a + 2\log b - \frac{1}{3}\log c - 2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ ۰ ۳

ketabton.com - The Digital Library



---

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کینې اړخ کې لوګاریتم ځای لري، چې د ټولو a,b,c تعریف دی او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دې a+b>0 ( د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې c > 0 ( د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ ( د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ ( د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)
د کینې اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د a = 2 . b = -1 , c = 1 لپاره تعریف دی۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا ځیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چې Log بې ځایه دی ۰ د دې لپاره، چې د ځیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b\neq 0$ پر ځای په ټینګه یا کره b>0, وغوښتل شي ۰

په بیلګه۵ ۰ ۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

a+b>0,    a-b>0

نو بیا a²-b² = (a+b)(a-b)> 0 او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، b لپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شي a > - b , a > b له امله هم و|b|< a ته راغونډ شي۰

ketabton.com - The Digital Library



ته دې هم ګوته نیولې وي، چې لوګاریتم په یوه بنسټ b یوه بل لوګاریتم یوه په خوښه بل بنسټd ته د شمیراوړون د شمیرنې اړول کیدی شي $(b>0, b\neq 1, d>0, d\neq 1, a>0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاریتم نیول و بنسټd ته لرو:

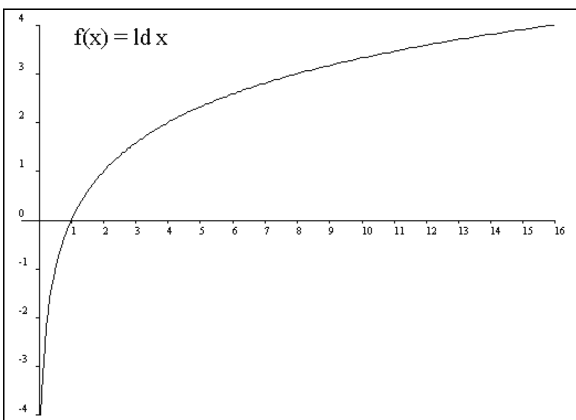
$$\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), ............(5,15)$$ د

لسیز لوګاریتم اړول په پیداینتي یا طبیعي لوګاریتم او په څټ لپاره لیکو b=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); …………………(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$$\lg a = (\lg e)(\ln a), ...............................(5,16)$$
$$\ln a(\ln 10)(\lg a) = 2,30429 \lg a, ............(5,17)$$

| | |
|---|---|
|  | د لوګاریتم فنکشن یا بلواک او دیاګرام یې |

ketabton.com - The Digital Library



$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د يوه ځل لوګاريتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاريتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ريښي لوګاريتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاريتم يو په بل بدليدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما يا لسميزمات نخښۀ وروسته بينارځايونه ó او لسميزسيستم

ketabton.com - The Digital Library



| | binär | dezimal |
|---|---|---|
| $2^{-1}$ | 0,1 | 0,5 |
| $2^{-2}$ | 0,01 | 0,25 |
| $2^{-3}$ | 0,001 | 0,125 |
| $2^{-4}$ | 0,0001 | 0,062.5 |
| $2^{-5}$ | 0,0000.1 | 0,031.25 |
| $2^{-6}$ | 0,0000.01 | 0,015.625 |
| $2^{-7}$ | 0,0000.001 | 0,007.812.5 |
| $2^{-8}$ | 0,0000.0001 | 0,003.906.25 |
| $2^{-9}$ | 0,0000.0000.1 | 0,001.953.125 |

## ۵ . ۳ ټولګه

لوگاریتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېړ بلواک دی

$$x = \log_b n \iff b^x = n$$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log\frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log\sqrt[n]{x}\frac{1}{n}\log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259 \lg a$$

## ۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

ketabton.com - The Digital Library



---

دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0,04$ d) $10^x = 0,0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم
قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

ketabton.com - The Digital Library



---

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a + n\lg(a+b) + n\lg(a-b)$

c) $\lg a - \frac{1}{2}\lg b + \frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

3.1. a) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

c) $x = 3\cdot 10^{-2\lg 3}$

b) $x = 2 \cdot 10^{2\lg 2}$

d) $x = \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$

c) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

b) $x = \sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

d) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x = \ln\frac{7{,}63}{\sqrt{e^3}}$

c) $x = \left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

b) $x = \ln\frac{0{,}23}{2e^2}$

d) $x = \left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

ketabton.com - The Digital Library

## ٦ ٠ ګونومتري ( کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چې د کونجکچ چېکتیاته ( ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په څیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چې د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ٠ زه به کوښښ وکړم چې ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په څیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

### ١ ٠ ٦ بنسټیزه هندسه

#### ٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی( خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا ټیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

ketabton.com - The Digital Library



---

سره له دې هم هڅه کیږي چې ټکی او کرښه لیدوړ وګرځول شي لکه څنګه چې په ۴ . ۱ - امه برخه کی پیښ شوي. دلته کرښي په g ښوول شوي او غشی یی ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پرېښول کیږي یعني نه انځوریږي، که دا مو و ناریښتیاو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کیدی شي د دوه کرښو غوڅځاي په څیر ونیوله شي ) څیرې په غور وګورئ

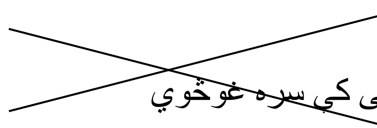
وړانګه ray A

کرښه g

(stright line

بند کرښه یا ټوټه کرښه Line segment

A B



دوه کرښې په ټکی کې سره غوځوي

د بیلګي په توګه لاندې ویناوې باور یا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې یوه کرښه ټاکل کیږي( پورته څیره وګورئ)، چې دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي یا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرګي او په یوه هواره کی پرتی کرښی یو بل ټیك په یوه ټکي کی سره غوځوي (پورته څیرو کې کتل کیږي)

یوه وړانګه $s_1$ له یوې لور په یوه ټکي A بنده کرښبرخه ده ) ( او یوه پایکرښه له دوه ټکو A او B بنده یا راګیر کرښه ده )

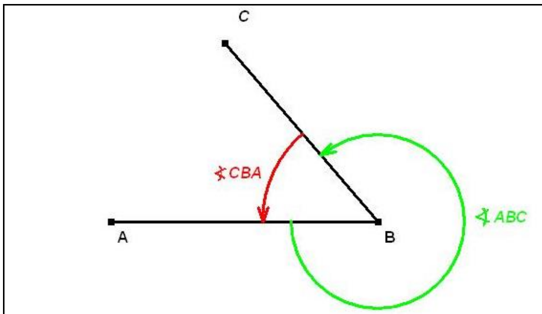
ketabton.com - The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

## ۶ . ۱ . ۲ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه $s_1$ د خپل پیلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي $s_2$ ( څیره ۴ . ۲الف ) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، $s_1$ او $s_2$ پېنې او په همدې ډول د S کونج $\alpha$ (الفا) ککره بلل کیږي.

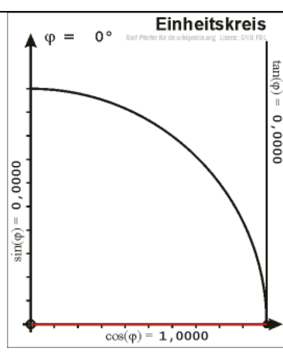



که څرخون د ساعت نخښي په څټ یا مخامخ وې نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسې کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یې منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کي سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

کیدی شي چی یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a° \qquad (6.1)$$




په داسې حال کی چی ولاړکونج، کوم چی یو په بل ولاړې کرښي $g_1 \wedge g_2$ (او ته دي پام وي) یی جوړوي، له 90° سره مساوي وښايو(لاندي څیره ، که نورېڅیرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چی کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چي کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b \qquad (6.2)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

په پورته یونګردئ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردئ لینده په وړانګه( شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بي نومه ګڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګڼلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردئ ) r = 1 ( کی انځوروړ دئ، چیرته چې دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي ( څیره په پورته کې کښل شوې )

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د 360° کونج د یوونګردئ چاپیری ) محیط( په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass ( درجنکچ ( او )ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, .....(4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦۰ درجو زیات هم وي کره کیدئ ، که ځیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شیږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي۰.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه ښه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقي او ثانیي نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاری، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي۰

بیلګه .٦. ۱ :

کونج “a = 47°12'36 دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دڅیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقي او ثانیي دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12’=720“

720 = '12 "

ketabton.com - The Digital Library



---

پس په تولیزه توګه 720’+36“ = 756“ له دې لاس ته راځی

1’=(1/3600)° (<= )

له دې وروسته په همدې توګه 756.(1/3600)°=0,21°

له دې لاس ته راځي : a=47°12’36“=47,21°

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د( ٦ . ٣ ) پسی باور لري b=0.017453.47,21=0,826

دلته ځیرې راځي، خو د دې ځیرو په ځاي به موږ په پورته ځیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو ( د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي )، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي۰

بیلګه ٦ . ٢ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه ) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګنیز سیستم( ځاي ارزښت سیستم ) ویشنو ( برخو) ورکړ شي. د (٣ . ۴ ) له

مخی لرو

a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701° د 0,701° اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

0,701° = 0,701.60' = 42,06', 0,06' = 0,06.60=3,6“

پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6"$

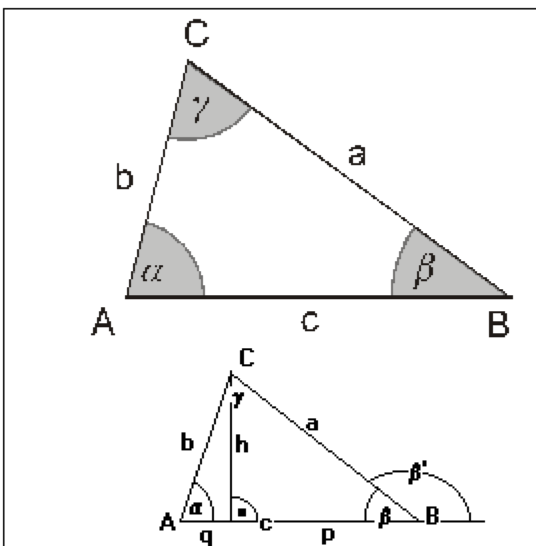
ketabton.com - The Digital Library



دا پورته داسی لوستل کیږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقیقي او ۶ ، ۳ ثانيي

## ٦ . ١ . ٣ دريګوډی

يادونه: موږ دلته بیا د نومونو( نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیږو. هغه هواره چی له کرښو راګیر وي دلته له درې کرښو یا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه یا ګوټونه ولري، موږ دا ٠٠٠ کونجي یا٠٠٠ ګوټي او یا ٠٠٠ګوډي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبي نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته یو کونج چي له دباندې ورته کتل کیږي او د یوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاریږي. موږ په ورځنی یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنيکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی ګوډ دی. که یو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وییلی. که څوك په یوه ګوټه کی ناست وي نو وايي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا ګوډ نه وايي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .




په ټولیزه توګه په یوه سطحه یا هواره کی له پرتو کرښو g1 , g2 , g2 څخه یو مثلث یا دریګوډی جوړیږي، چی ګوډونه یی C . B . A ، اړخونه یی c. b. a او کونجونه یی $\alpha, \beta, \gamma$ دي ( د مثلث دننه کونجونه یا زا ویې او دباندې ګوډونه دي، چې موږ یط په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ څیرې دې وکتل شي

ketabton.com - The Digital Library



---

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کیږي

- په دریګوډي کې د کونجونو زیاتون $180°$ درجې دی یا $\pi$ دی
- یو دباندنی کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زیاتون سره مساوي ده، له دې امله د یوه دریګوډي د دباندنیو کوجونو زیاتون $360°$ یا $2\pi$ دی۰
- د یوه دریګوډي د اړخونو نیمي په یوه ټکي کې یو بل سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دریګوډي » دروندټکی یا دثقل مرکز « دی. اړخنیمي یو بل په تناسب د۱ : ۲ پرې کوي یا په پښتو:

د اړخونو ځاننیونه یی۱ :۲ ده ) په ځیره کې وګورئ ) د یوه دریګوډي منځولاړې

یو بل په یوه داسې ټکي کې سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپیر ګردي ) هغه ګردۍ یا دایره چې دریګوډی په خپل دننه کی نیسي یا بهتره، د دریګوډي خوندیګردی( منځټکی دی )۰

د یوه دریګوډی کونجنیمي یو بل په یوه ټکي کی سره پرې کوي، چی دا په همدې وخت کی د دننه ګردی ) ګردۍ چی د دریګوډي

په دننه کی ده یا ګردۍ یا دایره کې خوندي دریګوډی ( منځټکی دۍ ) لاندې کې بې ځیره شته ) د یوه دریګوډي جګی یا د ارتفاع کرښی په یوه ټکی کی سره غوڅوي.) ځیرې ټولې لاندې کتل کیږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې ځیرې اړه لري، چې تکرار راځی، خو پروا نه لري۰

د جګیو غوڅټکی Orthocenter **<u>Höhenschnittpunkt</u>** ($H$),

ketabton.com - The Digital Library



---

(*U*) **Umkreismittelpunkt** circumcenter ·د دباندنی- یا په راتاو ګردی منځټکی

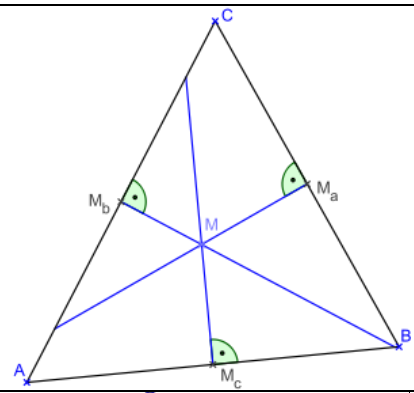
Seitensymmetralen), seid symetry ·د اړخسیومتریو غوښټکی

(*I*) **Inkreismittelpunkt** inscribed circle, incircle den ·د دننه ګردی منځټکی

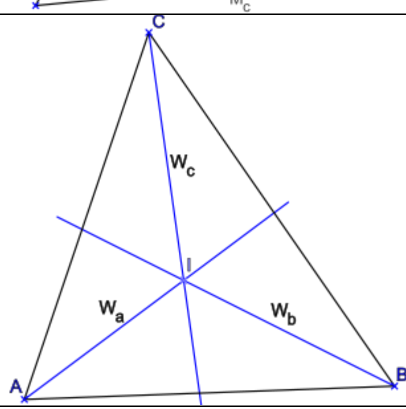
Winkelsymmetralen r · د کونجسیومتري

r (*S*) **Schwerpunkt** centroid · دروندټکی

Seitenhalbierenden) median اړخنیمی·




مخامخ خیره کې مثلث یاد دریګوډي په منځ عمود یا - ولاړې کربنې ښایي

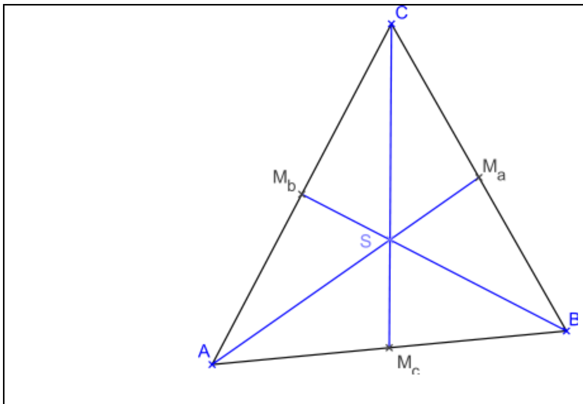



دامخامخ مثلث هغه کربنې ښايي، چې کونج نیموي او موږ یې کونجنیمی (ناصف الزاویه) بولو ( په پورته خیره په نیم اړخ ولاړې کربنې دي )

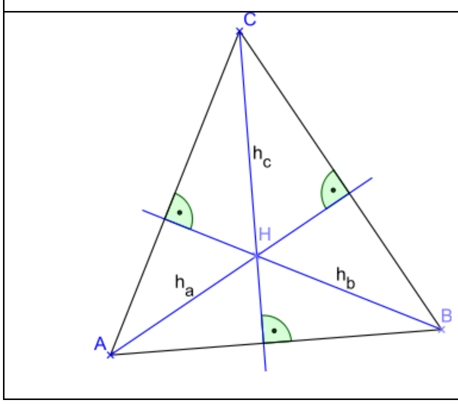
ketabton.com - The Digital Library



---

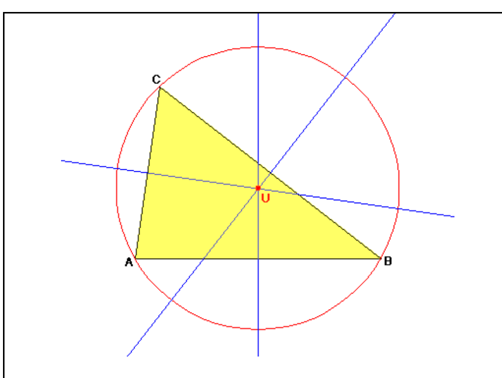


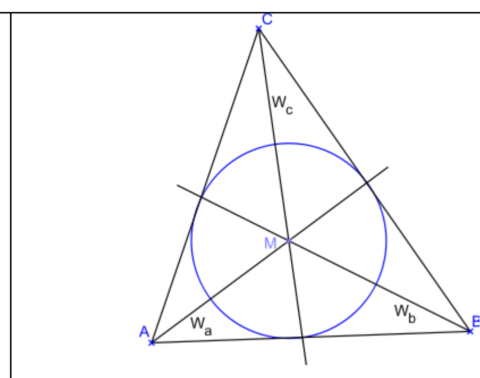

لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له کونج څخه اړخ نیموي٠ موږ یې اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو٠




لاندې څېره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له کونج په اړخ ولاړې دي٠ دا د اړخ جګوالی په ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللي دي٠

په پورته څېره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی یې د خونديې ګردی یا دننه ګردی منځټکی هم دی



ketabton.com - The Digital Library

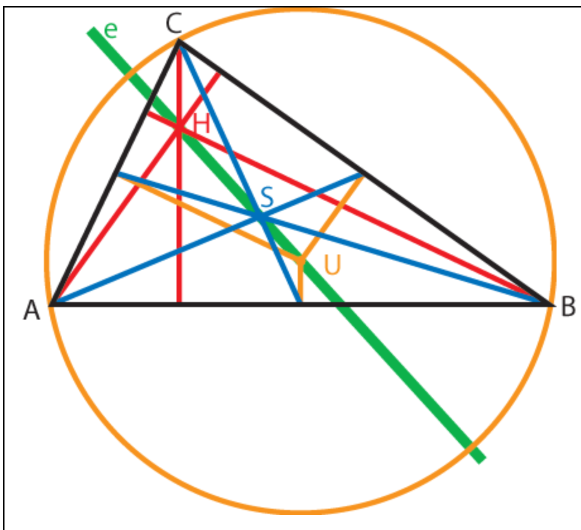


----------------------------------------------------------------------------------

په پورته کینه ځیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوڅټکی یې د په راتاو ګردی یا چاپېرګردی منځټکی دی٠

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه ټکی کې سره غوڅوي٠

که د یوې درېګوډی د منځولاړو په غوڅټکي یوه ګردی داسی ووهل شي، چې د ګردی کږه درېګوډئ له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا ګردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیریږي٠ که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځټکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردی په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی ( د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځټکی له درېګوډی دباندې پروت دی٠




که درېګوډی $ABC$ وي ، $S$ دروندټکی، $U$ د چاپیریالګردی منځپکی ، او $H$ د جګیو غوڅپکی وي، نو کرښه په لاندې ځاننیونه یا تناسب پراته دي :دا په لاندې ځیره کې کتل کیږي ٠

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

۶ . ۱ . ۴ برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهت Congruence and Similarity

دوه دریګوډي ABC او A'B'C' یو بل سره کونګروانیڅ یا برابر پټووني دي

یاني برابرارزښته دي

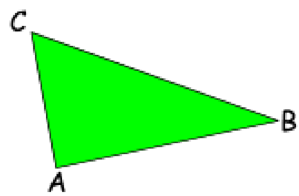
ketabton.com - The Digital Library

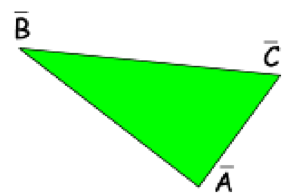


---

ABC ≡ A'B'C'

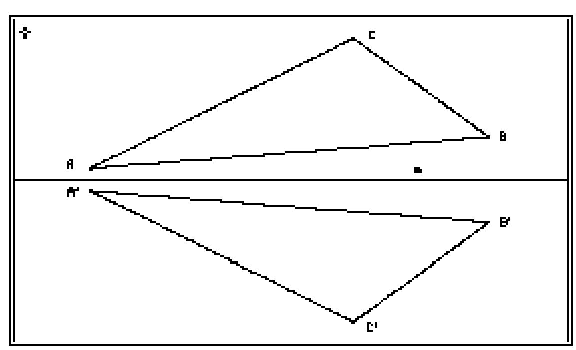
(4.4) که وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي( وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هندارونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې ځیر)




که دریګوډي سره کونګروانیځ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي ټوټو ( اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

.په ښټ یی هم باور لري S اړخ او W کونج په ګوته کوي



ketabton.com - The Digital Library



---

جملې: دريکوڼي ټيك هلته کونګروانيڅ دي چې يو بل سره مساوي شي په

۱ - درې اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - يوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي WSW,

د دې جملو په څېټ هم باور لري، دا په دې مانا چې که دريګوڼي په کونګروانيڅ جملو کی ورکړشوو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونګروانيڅ دي. د کونګروانيڅ جملو په بنسټ کيدی شي په ځانګړي توکه دريګوڼيجوړېښت سرته ورسول شي، کوم چې د کونګروانيڅ جملو کاروني په څير ليدل کيدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی ( Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چې په همغو يا اړوند درې کونجونو کی يو بل سره برابر وي او د همغو يا اړوند اړخونو تر منځ يی تناسب يا ځاننيونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګروانيڅ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دريګوڼي ټيك هلته يو بل ته ورته دي که يو دبل سره برابر وي، په :

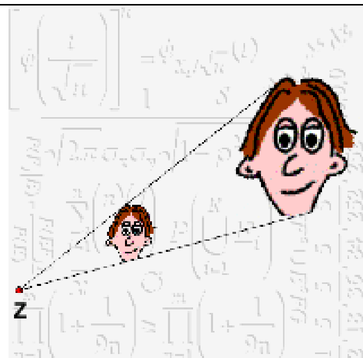
۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نيونی يا تناسب کی

۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی
۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب يا ځاننيونه کی
۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

ketabton.com - The Digital Library

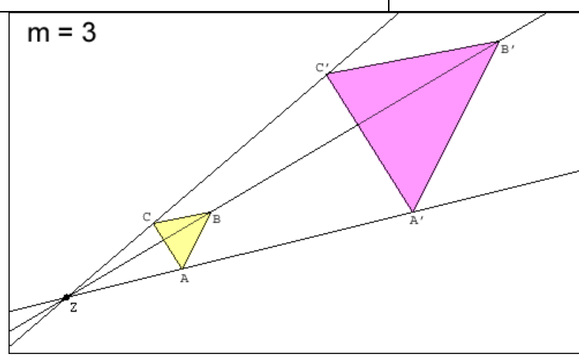


دا مخامخ ځيرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په يوه کرښه وتړی او د يوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غبرګه کرښه وباسی، نو دوه ورته درېګودې لاس ته راځي

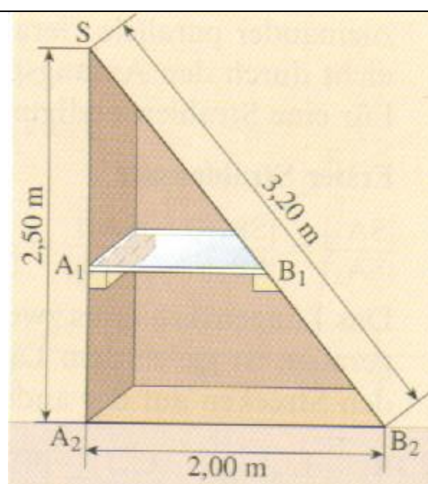



په لاندې ځيره کې کښل شوي دريګودي ورته دي، دا په دې مانا چي باور لري:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$




د ورته جملو سره خپلواني جملی د وړانګو جملی دي:

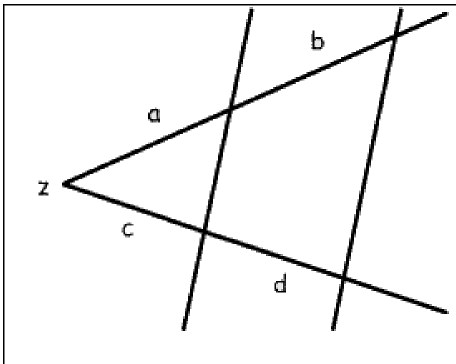
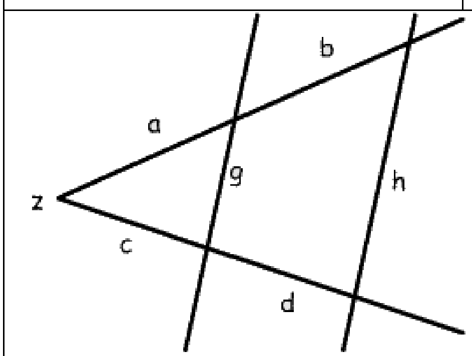



په دې پورته ځيره کې درېګودي يو بل ته ورته دي٠

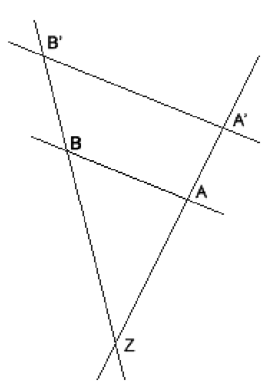
ketabton.com - The Digital Library

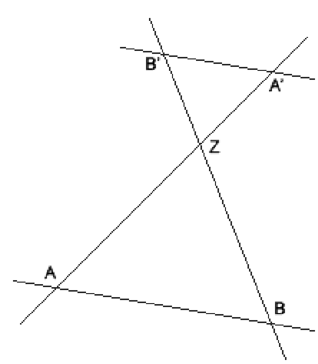


--------------------------------------------------------------------------------

| | |
|---|---|
|   | د وړانګې لومړۍ جمله:<br><br>دوه له یوه ټکی وتلې وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوځې شي نو ټوټې يې لاندې اړيکی سره لري٠<br>$\frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)}$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ |
|   | د وړانګې دويمه جمله:<br><br>که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوځې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړيکی لري، دا ته والي له جملو ده٠ ټکی چې ځنګهدي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو<br><br>$\frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)}$ $\frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)}$ |

يا دالاندې، چې هرڅه يې روښانه دي



ketabton.com - The Digital Library



$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

( دا  لاندې  د لیکنې له لارې روښانه شوې ځیره دې ګران لوستونکي وکاږي )

که درې په یوه ټکي کی پریکیدونکی کرښي  g1 , g2  او  g3  د دوه غبرګو) موازی( کرښو  g4 او   g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګي په توګه له  ۴ . ۱۰ کښل شوي ځیرې ځخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

. 1                OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2

دا په دې ماناچی په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیوںی سره پرتی دي:

. 2                A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2

دا په دې مانا چی:  په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب  یا ځاننیونی پرتی  دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چی په وړانګه پرتی دي.

۳ -       A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3

دا په دې مانا چی: په غبرګو پرتی کرښي په همغه برخوکی یو له بل سره  په مساوي تناسب  یا ځاننیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په ځیر رامنځ ته شي یا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي    )

ketabton.com - The Digital Library



---

بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c اوهمداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوړی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څېرنې لاندې نیسو

$a > c$ - 1

موړ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونجالف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردسلینده کاږو د a

په کچه چې د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوڅوي )

څیره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

$a < c$ - 2

دلته درې امکاناته شته دی( د دې درې امکاناتو څیره وکاږی )

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د $\alpha$ ازاده پښه په دوه هغوټکو کي پرې کوي، په کومو کی چی اوبی یواځنی نه دی٠

۲ . ۲ : ګردسلینده د $\alpha$ ازاده پښه لمسوي٠

۲ . ۳ : ګردسلینده د $\alpha$ اندازه پښه نه غوڅوي .

$a = c$ ( ۳

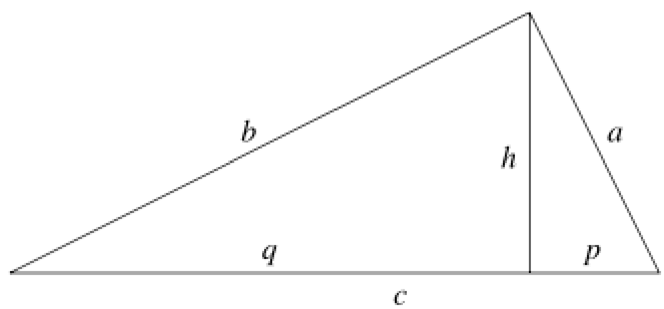
ګردسلینده په B د a په اندازه د $\alpha$ ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کي پرې کوي. دې لپاره چې حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$ نیونه په دریم کونګرواینځ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ ٠ ۵ .ولاړکونجیز دریګوړی مثلث قایم الزاویه

ketabton.com - The Digital Library



د مختلفو دریګوډیو څخه موږ په لاندې برخه کې ولاړ کونجیز دریګوډې ترڅیړنې لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریګوډي کې د ولاړ کونج مخامخ اړخ هوپوتینوزې ) Hypotinuse(بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت ( Katheten )بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریګوډي ته روڅنې یا ورسره بلدې یا مروجې په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له څیرې ۴ . ۱۳ څخه واخلئ




په ولاړکونجیز دریګوډي کې دا لاندې راوړل شوې اړیکې باور لري چې دلته یې بې له اوبې )ښووني( راوړو:

یادونه : په ولاړګوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ مخامخ اړخ ( پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نوموونو یانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پیتاګوراس ( Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کې د هیپوتینوزې مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

ketabton.com - The Digital Library



دکاتیتو( د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع) ) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوړي کی د کاتیت مربع هواریزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددې کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

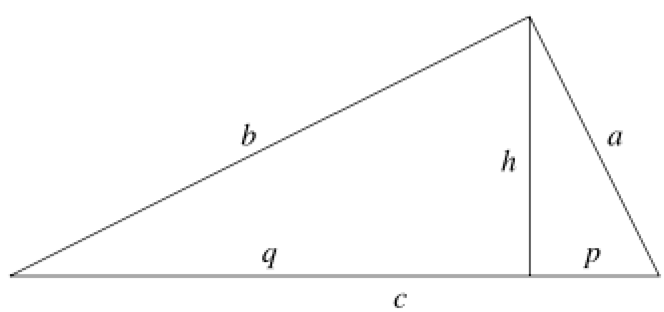
$$a^2 = p.c \ , \ b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجیز دریګوړي کی د هیپوتیزې په جګي مربع هواریزمساوي ده د هیپوتینوزې ( لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q \cdot p \qquad (6.7)$$

یا په لاندې کې لنډ بیا ورکړ شوي




لنډ: ( ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پیتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

ketabton.com - The Digital Library



---

د اویکلید د کاتیتونو( پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

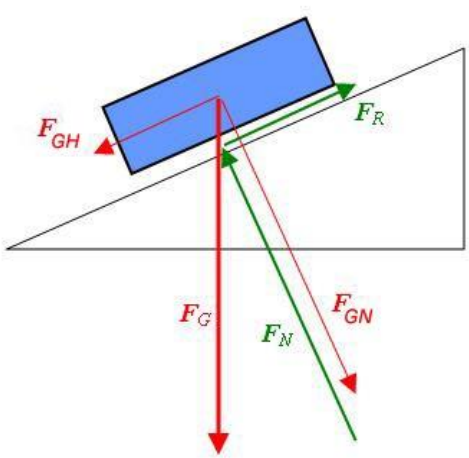
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اویکلید جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بیلګه ۴ . ۴ : (ځیره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکچ فکر وکړي۰ دا یوه فزیکي دنده هم ده( ځېره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د یوه بدن د وزن G تجزیه ځرګندوي ( د بدن دروند ټکی) دا د فزیك له مخی هغه ټکی دئ چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي ) KSP = )چی په یوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په یوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نیغ ولاړ ، ولاړ) عمودي( زور) قوه FN )تجزیه کیږي. د ښوولو ده چی، دریګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دریګوډي سره ورته دی




یادونه: په لیکنه کې زور یا توان د لاندې ځېرې سره داسې بدلو:شین تنیا د مستطیل شکل G دی

$$F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$$

ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کیڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج $\alpha$ ، په ګوډ B کونج $\beta$

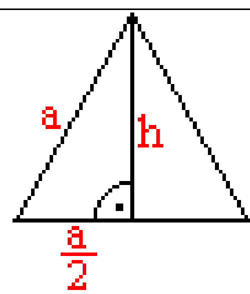
ketabton.com - The Digital Library



داچې G||AC ځغلي، نو FH او G یو کونج $\alpha$ جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج $\beta$ جوړوي، دواړه دریګوډي په دې برسیره په ولاړکونج کی یو بل ته ورته دي٠

یادونه : داسې بیلګې، چې ځیره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې ځیرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي٠ زما زړه نه شي، چې له لیکلو یې تیر شم٠

بیلګه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کی دې ( لاندې ځیره ) جګی و شمیرل شي .د ٦ . ۴ ( له مخی لرو( جګی په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نیمی هم دی، دا په دې درېګوډي کې وکاږی)




$$h^2 = a^2 - (a/2)^2$$

$$h^2 = a^2 - a^2/4$$

$$h^2 = (3/4)a^2$$

$$h = (\sqrt{3}/2)a$$

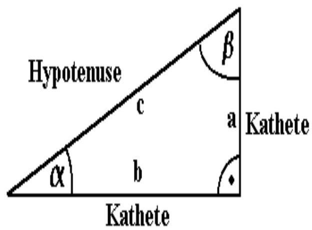
٦ . ۲ په ولاړکونجیز دریګوډي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چی یوه ولاړکونجیز دریګوډي کي جوړیږي( لاندې ځیره ). که د کونج $\alpha$ مخامخ اړخ یا -کاتیت a د gegkathete مخامخ اړخ په ځیر وښایو، د b اړخ په $\beta$ پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دریګوډي کی لاندې اړخځانیوني منځ ته راځي یا جوړیږي

ketabton.com - The Digital Library



---




$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$$

د وړانګو جملو له امله دا اړيکي يا تناسب يو اځي د کونج      په واك کې دی. که په پام کې ونيول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړيکې ليکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې ليدل کيږي، چې د دې څلورو ارزښتونو د پيداکولو لپاره دوه کنجدولونه پوره دي يا بسيا کوي. ورپسي يا ددې په تعقيب پيژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha};.....................(6,10)$$

برسيره پردې د پيتاګوراس د جملې په پام کې نيولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;.......................(6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha};...........(6,12)$$

ketabton.com - The Digital Library



۳.۰٦ په یوونګردۍ کی د کونج فنکشنونه ( -بلواك )

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یواځي د لیدیدونکو (Konkrete اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوړي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یواځي یا په ځانګړې توګه د $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (0 < \alpha < 90°)$ لپاره تعریف دي. که د $\alpha$ خپلواك واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چی په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی ) څیرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو د یوون ګردي باندې مخ نخښی په واك کی کرښو ته لاربنودوي .د لته ټولی کرښی ) د لته به له کرښو څموږ مطلب پای کرښی وي( ، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه( لري، ټولی کرښي او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون مخنخښه ( منفي مخنخښه) لري .د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ ( د په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha = \overline{QP}, \cos\alpha = \overline{OP}, \tan\alpha = \overline{AD}, \cot\alpha = \overline{BE}; ..............................(6,13)$$

د کونج $\alpha$ لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د کواوردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی( لاندې څیره له کیڼ و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکې کارول شي توري ساده ایښوول کیږي۰ په څیرو کې شنې کرښې د ساین دي او سرې کرښې کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه کیږي، چې د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو )، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریګوړي کی تر څیرنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج $\alpha$ په لینده اندازه کی د ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چی په زیات څرخون له 2 څخه لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو ) ۱۳ . ۴ ( څخه لاس ته راځي، چی ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود :360° ) 2 ( periode (تل تکراریدونکی ، بیرته

ketabton.com - The Digital Library



------------------------------------------------------------------------------------------

راګرځیدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پریود(180° ) لري .

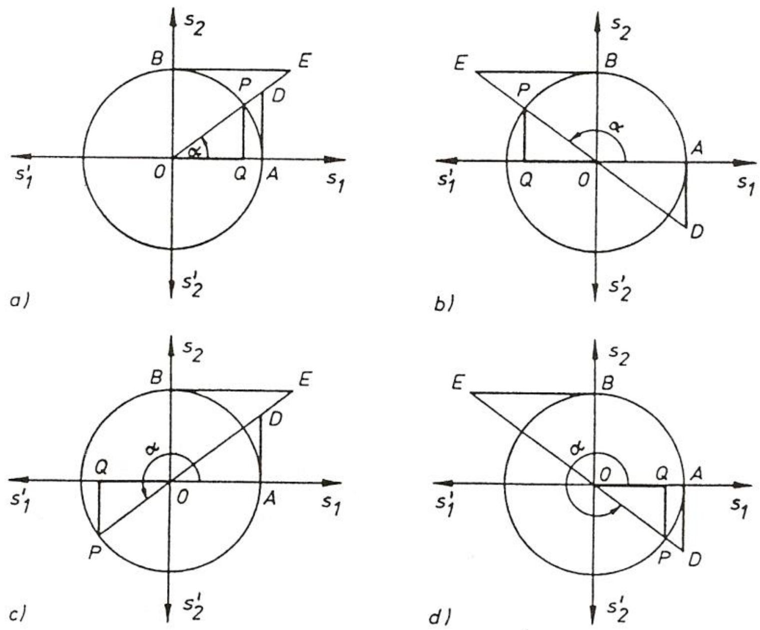



Bild 4.17 ځیره

پس لرو

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 360°) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha; \ldots\ldots\ldots\ldots(6.14)$$
پــه
$$\tan(\alpha + 2\pi = \tan(\alpha + 360°) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + 2\pi) = \cot(\alpha + 360°) = \cot\alpha$$

ټولیزه )عمومي( توګه لرو

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha + k.360°) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha + k.360°) = \cos\alpha; \ldots\ldots\ldots\ldots(6.15)$$
$$\tan(\alpha + 2k\pi = \tan(\alpha + k.360°) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + 2k\pi) = \cot(\alpha + k.360°) = \cot\alpha$$

ketabton.com - The Digital Library



---

د ټولو ټولګټونو ....3 , 2, 1,0,1-,2-,3-.. = k لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چې دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخښه

| | لومړئ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$ | دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$ | دریمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$ | څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$ |
|---|---|---|---|---|
| sinx | + | + | - | - |
| cosx | + | - | - | + |
| Tan x | + | - | + | - |
| cotx | + | - | + | - |

برسیره پر دې لاندې اړیکی باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\ ,\qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos.\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\ ,\qquad \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha \qquad (4.16)$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\ ,\qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\ ,$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\ ,\qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha\ ,\qquad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پیداکوو. دا چې $\alpha$ په درجی اندازه ورکړ شوې ده، نو اومشالتریا سویچ (بدون) دلته مطلب د

ketabton.com - The Digital Library



---

جبشمیري اړونه ده، پهٔ غوښتل شوي فنکشن کی ) په « DEG » سموو او بیا لاندې ورکوني کوو.
په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

1. $\sin \alpha = a$ , 2. $\cos \alpha = a$,
3. $\tan \alpha = a$ , 4. $\cot \alpha = a$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري$-1 \leq a \leq 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.
یو «بنستهیزوبی یا بنستیز حل»$\alpha_0$ د هر تمرین د جبشمیرني سره په لاندې ډول یا همداسې تکموترتیب لاس ته راځي ( دا په دې اړه لري چې $\alpha_0$ په درجه اندازه یا لینده اندازه اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو )

1. [a] [F] [sin] 2. [a] [F] [cos]
3 [a] [F] [tan] 4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په ځې فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بیاد $\alpha_0$ هر بنستهیزحل په درجه یا لینده کچ څرګندیږي.
د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنستیزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33,367013° = -0,58236,$
2. $\alpha_0 = 123,36701° = 2,1531606,$

ketabton.com - The Digital Library



---

$$3.\ \alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$$
$$4.\ \alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

$$1.\ \sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$$
$$2.\ \cos\alpha = \cos(-\alpha)$$

او په ورته توګه،، فرعي یا ځنګیز حل یا اوبی،،

$$1.\ \beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$$
$$2.\ \beta_0 = -\alpha_0$$

لاس ته راشي

د ليديدونكي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چې :

$$1.\ \beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$$
$$2.\ \beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$$

د $\alpha$ ټول حلونه د ( ۱۵ . ۴ ) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

1\. und 2. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$

$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$

3\. und 4. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$

**بیلګه ۴ . ۹ : لرو $\sin x = 1/2\,\sqrt{3}$ . ودې شمیرل شي $\cos x$ , $\tan x$ , $\cot x$ .**

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ketabton.com - The Digital Library



---

بیلګه ۴ . ۱۰ : په بیلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور $F_H$ او $F_N$ څومره لویې دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن $700\ N$ وي (دلته N د Newton لپاره دی چی وزن پرې اندازه کیږي ) او مائلی هوارې مایلکونج $\beta = 28°$ وی؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ N \cdot \sin 28°$$
$$= 700\ N \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ N.$$
$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ N \cdot \cos 28°$$
$$= 700\ N \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ N.$$

## ۴. ٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په ټولیز یا عمومي دریګوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جملهد څیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

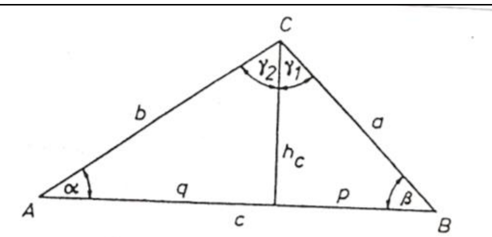


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (4.17)$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز دریګوډی کښل کیږي( پورته او لاندې څیرې )

ketabton.com - The Digital Library



---

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د ځیرې ۴ . ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} h_c^2 &= b^2 - q^2 \\ h_c^2 &= a^2 - p^2 \\ \hline a^2 &= b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q, \\ a^2 &= b^2 + (c-q)^2 - q^2, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b\cos\alpha, \end{aligned}$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$ لرو او همداسې:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}} \qquad (4.18)$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1 )او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دی .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره ځیره ۴ . ۱۹

ketabton.com - The Digital Library



---

ورکړ شوې، له کومې څخه چې د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسې په
ABCدریګوډي کی، $F1 = c, F2 = a$ او ss = 180° - ss' معلوم دي، $\alpha$

او $R = b$ لتوونکی یا غوښتونکی لویي دي؟

د کوساین جملی ( ۶ . ۱۸ ) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos ss$$

همداسی یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2 \cos( 180° - ss')$$

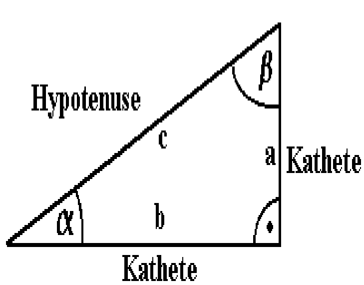
او د ساین له جملی (۶ .۱۷ ) لاس ته راځي

له کومو چی $\alpha$ تاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو٠

۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو٠

| | |
|---|---|
|  | مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا ځرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو |

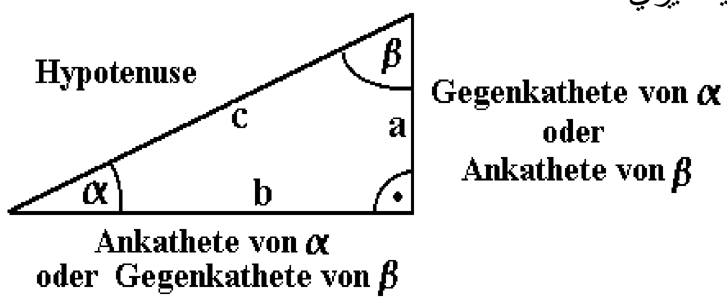
ketabton.com - The Digital Library



---

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډۍ ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څنګ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي٠




د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي٠ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي٠ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیرۍ ورکړ شوي ( لکه په فرمول کې ) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ٠

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینټروال [0°;180°] کې په تولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي٠

ketabton.com - The Digital Library



---

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : ( دا خیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

په $h_c$ پسې یې اوبی کوو

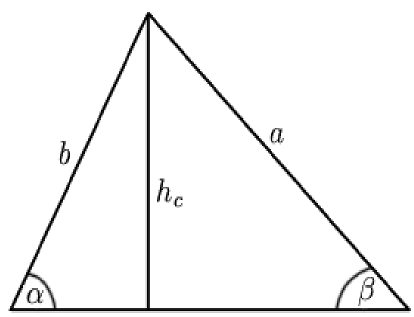
$$h_c = b\cdot\sin\alpha$$

د برابراینوني له لارې لاس ته راځي

$$a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha$$

که په $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ وویشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$




برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیداینتي توګه جګی $h_a$ او یا $h_b$ لاس ته راکوي

د کاروني بیلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$a = 5,4\,\mathrm{cm}$ ، $b = 3,8\,\mathrm{cm}$ ، $\alpha = 73°$

دا نورې لویې دې په دربګوډي کی پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

ketabton.com - The Digital Library



---

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\mathrm{cm}\cdot\sin 73^\circ}{5{,}4\,\mathrm{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونيوله يو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، ياني

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زياتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي.

او نو ګاما د کونج زياتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ $c$ هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\mathrm{cm}\cdot\sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\mathrm{cm}}$$

دکوساين جمله

په تريګونومتري کې کوساينجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړيکې ښايي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

يادونه : دا لاندې فرمولونه دې ( ۱۸ ۰ ۹ ) وي

ketabton.com - The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپیتاګوراس جملې له مخې لرو:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

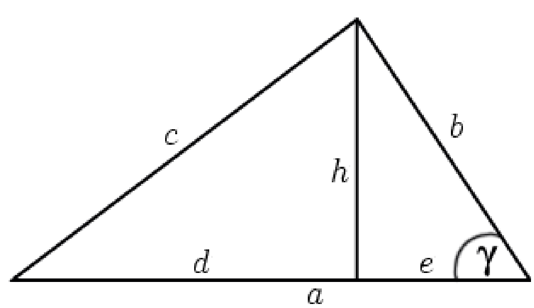
د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) یا

- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیداکولی شو

بنوونه :




د درېګوډي په کیڼ لور د پیتاګوراس قضیه استعمالوو، چې د $c^2$ لپاره یوه شمیرافاده یا – وبینه پیداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلوری یا مربع باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

ketabton.com - The Digital Library



د بني اړخ لپاره د پیتاګوراس قضیي استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a - e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

( د بینوم فرمول )

د پیتاګوراس جملې له مخې د کیڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیداشوي شمیرویینې یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b} \left(\frac{ankathet}{Hypotenuse}\right)$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د $c^2$ لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بیلګه:

یو درېګوټیABC ، چې اړخونه یې څرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9\ \text{cm}$ ،

$b = 2{,}8\ \text{cm}$

$c = 3{,}5\ \text{cm}$

ketabton.com - The Digital Library



---

د کونج $\beta$ لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\text{cm})^2 + (3{,}5\,\text{cm})^2 - (2{,}8\,\text{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\text{cm} \cdot 3{,}5\,\text{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

**Common formularکډ وډ فرمولونه**

**Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کښمتوالی**

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

ketabton.com - The Digital Library



**زياتون او کمون کتمتوالی Sum and difference identities**

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

**دوه برابره کونج کي ګتمتوالي Double-angle identities**

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

**د نيم کونج ګتمتوالی Half-angle identities**

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

ketabton.com - The Digital Library

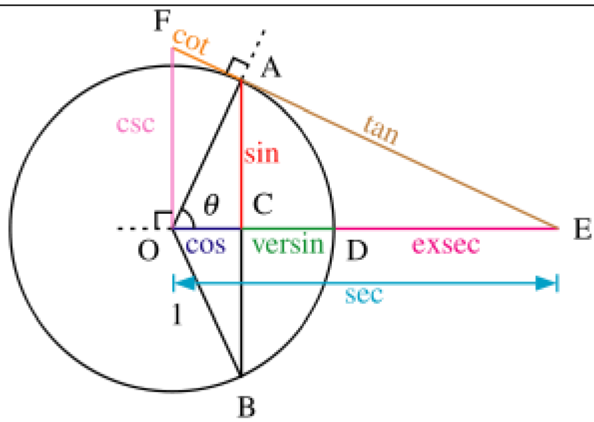


---

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د ترېګونومترېکي کتمتوالي لیست List of trigonometric identities

نوره ژوره ځیرنه دلته نه کړو، دي ته ګوته نیسو، چي په لاندې ځیره کې ترېګونومترېکي فنکشنونه روښانه دي

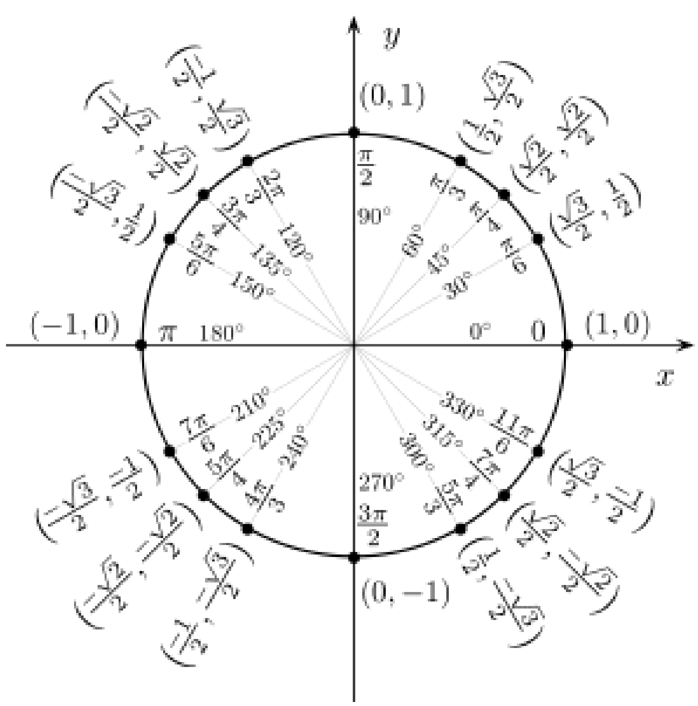



د یوه کونج θ تول ترېګونومترېکي فنکشنونه په O باندې د یوې یونکردی ترم له لارې ورکول کیدی شي ( یونکردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښه شوي )

مخامخ:

یوونکردی(یووالي یا واحد کردی)

The unit circle



ketabton.com - The Digital Library



**Notationلیکنبڼه**

دا لاندې لیکنبڼه یا - ډول د ټولو تریګونومتریکي – یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین ، تانجنت ، کوتانجنت ، سیکانت، کوسیکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي$\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

:پیژندDefinitions

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راګرځیدنه ، سیومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

:په یوون(یووالي-) ګردئ یا دایره کې ساده لیدل کیږي

**Periodicity تل بیرته راګرځیدنه**

ساین ، کوساین ، سیکانت، کوسیکانت تل بیرته راګرځیدنه $2\pi$ ده( پوره ګردئ ) ( تکرار دئ )

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبیرته راګرځیدنه $\pi$ لري( نیمګردئ یا نیمدایره ) :

ketabton.com - The Digital Library



$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

**سيومتري Symmetry**

د تريګونومتريکي فنکشنونو لپاره سيومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x, x \to \pi/2 - x$ ،يا $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{array}{lll}
\sin(-x) = -\sin(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), & \sin(\pi - x) = \sin(x) \\
\cos(-x) = \cos(x), & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), & \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\
\tan(-x) = -\tan(x), & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x), & \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\
\cot(-x) = -\cot(x), & \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x), & \cot(\pi - x) = -\cot(x) \\
\sec(-x) = \sec(x), & \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc(x), & \sec(\pi - x) = -\sec(x) \\
\csc(-x) = -\csc(x), & \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec(x), & \csc(\pi - x) = \csc(x)
\end{array}$$

بدلون : د $\pi/2$ او $\pi$ بدلون دی

$$\begin{array}{ll}
\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), & \sin(x + \pi) = -\sin(x) \\
\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x), & \cos(x + \pi) = -\cos(x) \\
\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(x), & \tan(x + \pi) = \tan(x) \\
\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(x), & \cot(x + \pi) = \cot(x) \\
\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\csc(x), & \sec(x + \pi) = -\sec(x) \\
\csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sec(x), & \csc(x + \pi) = -\csc(x)
\end{array}$$

د پيتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پيتاګوراس قضيه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$ .

ketabton.com - The Digital Library



---

د کونج د زياتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زياتوننخښي په ورته ترتيب راځي لکه په فرمولونو کي

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کينږ لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په ځټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

**د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae**

که $x = y$ کيږدو د پيتاګوراس يا موفريي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \;\; = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \;\; = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

**د نيمکونج فرمول Half-angle formular**

ketabton.com - The Digital Library



---

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د رېښي لاندې ماتباندې او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پيتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له ( ۱ ) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نيمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

ketabton.com - The Digital Library



---

که کیږدو $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$

**نو لرو:** $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

**د ځل و زیاتون ته کتمتوالی Product-to-sum identities**

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

**د زیاتون- و- ځل ته کتمتوالی ( برابرون) Sum-to-product identities**

که د $x$ لپاره $(x+y)/2$ او $y$ لپاره $(x-y)/2$ کیږدو نو لرو

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او $z$ د کوم درېګوډي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

ketabton.com - The Digital Library



---

نيمگردی يا نيمدايره $\text{if } x + y + z = \pi = \text{half circle},$ =كه

او *يا نو* $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x . \tan y . \tan z$

$\text{and } \sin(2x) + \sin(2y) + \sin(2z) = 4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$

**Trigonometric conversions تريگونومتريکي په ځتوالی**

هر تريگونومتريکي فنكشن د بل تريگونومتريکي فنكشن سره سيده يا سيخي اړيكى لري۰ داسې اړيکی د په ځېټ اړيكو له لارې افاده يا ويل كيدی شي، لكه : كه φ او ψ د تريگنومتريکي فنكشنونو د يوې جوړې نمايندكى وكړي ، او arcψ دې د ψ په ځېټ وي، داسې چې $\psi(\text{arc}\psi(x)) = x$ ۰ نو $\varphi(\text{arc}\psi(x))$ كيدی شي د يو الجبري فنكشن ترم *x* په څير ووېلی شي يا افاده شي۰

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول كيدی شي : موږ دا نوره نه روښانه كوو او په لاندې جدول پوهيدی شو

| cot | sec | csc | Tan | cos | sin | φ \ ψ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\sqrt{1-x^2}$ | $x$ | **sin** |
| $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $x$ | $\sqrt{1-x^2}$ | **Cos** |
| $\frac{1}{x}$ | $\sqrt{x^2-1}$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $x$ | $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ | $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | **Tan** |
| $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ | $x$ | $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\sqrt{1+x^2}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | **sec** |
| $x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\sqrt{x^2-1}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ | **cot** |

ketabton.com - The Digital Library



---

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)$$

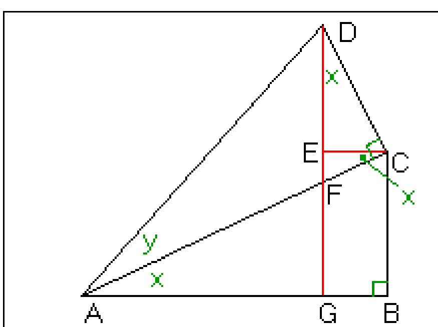
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلایي نسبت $\varphi$ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

**جیومتریکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs**




**sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)**

په مخامخ خیره کي کونج x د ولاړکونجیز دریکودي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوډیز دریکودي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندې ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

ketabton.com - The Digital Library



------------------------------------------------------------------------------

کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC.       کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$= \frac{DG}{AD}$$

$$= \frac{EG+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

**$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$**

د پورته څیرې ځخه کار اخلو:Using the above figure

$$\cos(x+y)$$

$$= \frac{AG}{AD}$$

$$= \frac{AB-GB}{AD}$$

ketabton.com - The Digital Library



---

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

**د $\sin(x-y)$ او $\cos(x-y)$ فرمولونو ښوونه**

د $\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کیږي، که د $\cos(x+y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه وپیژنو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

که په فمرول $\sin(x+y)$ کې د y په ځاي -y کیږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

**موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو**

$$\cos(x + (-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

ketabton.com - The Digital Library



---

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته ) د زیاتون)جمع( تیوریم(، له کومو یی چې دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولټولګه) کتاب چي فرمولونه په کي راټول وي( کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x \pm y) = \sin x.\cos y \pm \cos x.\sin a; \text{........................}(6,19)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x.\cos y \mp \sin x.\sin y; \text{........................}(6,20)$$

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \text{....................}(6,21)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x.\tan y}; \text{.....................}(6.22)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}; \text{..........................}(6,23)$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}; \text{.............................}(6,24)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

ketabton.com - The Digital Library



بیلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

مور له شیرې ۴ . ۱۸ شخه مخ ته څو، او ځای په ځای کوو $\gamma_1 = x$ ,$\gamma_2 = y$ ،
نو لرو $\gamma = x + y$ .

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2,\quad a^2 = p^2 + h_c^2,\quad b^2 = q^2 + h_c^2,\quad c^2 = (q+p)^2$$
$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$
$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$
$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 .\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$
$$\cos(x+y) = \cos x .\cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته ګوته ونیسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې او تفریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلګه ۴ . ۱۳ – لاندې ویینې یا افادې دې ساده شي

$$a)\ \ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

ketabton.com - The Digital Library



---

له کوم چې $y=\sqrt{2}\,\sin\alpha$ لاس ته راځي

$$b)\ y=\cos(\tfrac{3}{2}x+\pi)$$

د ( ۶ . ۲۰ ) پسې لرو

$$\cos(\tfrac{3}{2}x+\pi)=\cos\tfrac{3}{2}x\cdot\cos\pi-\sin\tfrac{3}{2}x\cdot\sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi=-1,\ \sin\pi=0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y=\cos(\tfrac{3}{2}x+\pi)=-\cos\tfrac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د ( ۶ . ۱۶ ) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \text{ ist.}$$

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad 0\le\alpha\le2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}}=|\sin\frac{\alpha}{2}|=\sin\frac{\alpha}{2}\ \ (\text{wegen } 0\le\alpha\le2\pi).$$

## ۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنسټیزه هندسه یا ځمککچونه

ketabton.com - The Digital Library



۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه( د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال ( د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړې شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.1.1.a) $15°$ | b) $225°$ | c) $105°$ | d) $277{,}5°$ |
| 1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$ | b) $\frac{\pi}{12}$ | c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$ | d) $\pi-\frac{\pi}{3}$ |
| 1.1.3.a) $4{,}24°$ | b) $70{,}9°$ | c) $31°\ 17'\ 20''$ | d) $228{,}1923°$ |
| 1.1.4.a) $5{,}19$ | b) $0{,}22$ | c) $2{,}31$ | d) $1$ |

۱ . ۲ – یو درېګوټی له $a = 4{,}5$ cm , $b = 12{,}2$ cm او $c = 11{,}7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا درېګوټی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسی یي ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی( یعنی دباندې او دننه ګردی ) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې درېګوټی جوړ کړی

a ) $a = 11{,}7$ cm , $b = 9{,}2$ cm , $\gamma = 43{,}5°$

b ) $c = 16{,}1$ cm , $\alpha = 84{,}6°$ $\beta = 51{,}9°$

وښایي چی ولی دواړه درېګوټي ورته دي!

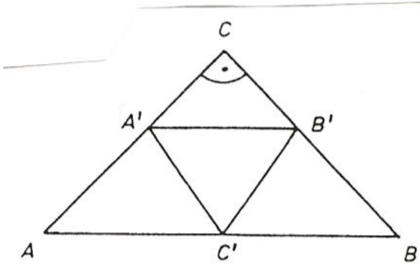



Bild 4.20 ځیره

۱ . ۴ – یو مساوي پښیز، ولاړکونجیز درېګوټي ABC ته یو مساوي اړخیز درېګوټی A'B'C' داسی په دننه کی ورکړ شوی چی $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده ( ځیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي ).

ورکړی $\overline{AC} = \overline{BC}$ د $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ سره!

ketabton.com - The Digital Library



۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د خیرې ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع اړخونه وشمیرئ

الف ) له کانتو څخه

ب ) له هیپوتینوزپېرخو څخه

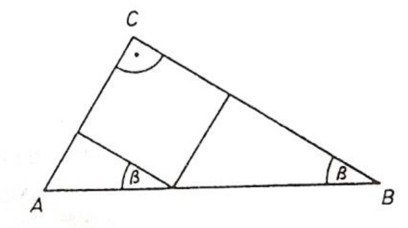



Bild 4.21

۲ . د جبشمیرنی سره د ارزښتونوټاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړئ:

a ) $\alpha = 47{,}15°$ , b ) $\alpha = -390°$ , c ) $\alpha = 7{,}784$ , d ) $\alpha = 13{,}195$

۲ . ۲ – کونج $\beta$ دې د $\sin\beta = a$ , $\cos\beta = a$ , $\tan\beta = a$ , $\cot\beta = a$ څخه د

a ) $a = 0{,}8290$ , b) $a = -0{,}2907$ , c) $a = -2{,}145$, d ) $a = 0{,}8660$

لپاره وشمیرل شي ( په اوبی کی دې د الفا په ځاي بیتا ولیکل شي !!! )

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز ( $\gamma = 90°$ ) دریګوډي کې معلوم دي

الف ) $a = 3$ cm , $b = 4$ cm ، ب ) $a = 5$ cm , $c = 12$ cm

کوم ازښتونه $\sin\alpha$ , $\cos\alpha$ , $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې ( $\gamma = 90°$ ) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیرئ ، لاندې لویې موړ ته معلومې دي:

a ) $a = 50$cm , b ) $a = 40$cm , c ) $b = 70$ cm , d) $c = 65$ cm

$b = 78{,}1$ cm $\alpha = 43°36'$ $\alpha = 18°55'$ $\beta = 59°\,29'$

۳ . ۳ – وشمیرئ ! $A$ , $h_c$ او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه ( $\alpha = \beta$, $a = b$ ):

a ) $a = 66$cm , b ) $c = 22{,}4$ cm , c ) $a = 38{,}9$ cm , d ) $c = 30{,}3$ cm

$c = 130$ cm $\alpha = 47{,}8°$, $\gamma = 33{,}3°$ $\gamma = 48{,}2°$

ketabton.com - The Digital Library



ب ) درې قوې دې د زوریا قوت $F_1 = 167,5N$ , $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه يو درېګوټی جوړوي. د دې درېګوټي . کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوی دی؟

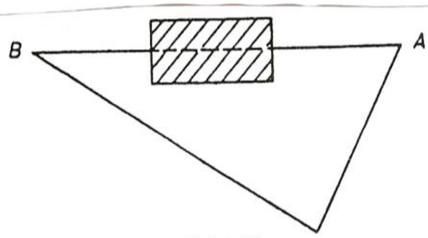


Bild 4.23 څېره

پ ) دوه ټکي A او B چې يوه کور يې مخه پټه کړې وي، يو له بل څومره لرې دي، که $\widehat{BC} = 75,25\ m$ , $\widehat{AC} = 51,75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'\ 45"$ وي ( څېره ۴ . ۲۳ )

ت ) د دوه يخ هاکي لوبغاړو $S_1$ او $S_2$ ترمنځ يو د مخالف ټيم لوبغاړی G ولاړ دی. $S_1$ په داسی ډول توپ و $S_2$ ته وهي چې توپ په يوه ديوال ولږيږي. ( څېره ۴ ، ۲۳ وګورئ ). د دواړو لوبغاړو $S_1$ او $S_2$ لريوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له ديوال $a_1 = 2,5m$ همداسی $a_2 = 6,5\ m$ وي او توپ د يوه دې ديوال سره په يوه کونج $\propto = 42°$ ولږيږي.؟

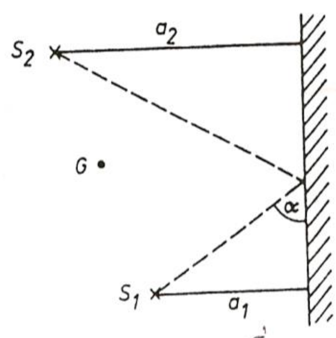


Bild 4.24 څېره

۵ . د ترېګونومتريکي يا درېګوډيزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشميري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشميرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot \alpha = -\sqrt{3}$

ketabton.com - The Digital Library



۵ . ۲ - لاندې مساوات وښایی:

5.2.1. a) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1$

d) $1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$

b) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

c) $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

d) $\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$

d) $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$

b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

d) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

5.2.5. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$

c) $\sin \alpha + \sin (\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin (\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6{,}5\pi + \alpha) = 1$

ketabton.com - The Digital Library

## ۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبې یا حل نه لري، نو له دې امله باید ( 7 , 1 )د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, .........(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼې، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ..................(7,3)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

ليکو : دا پورته د لانديې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7,4)$$

د (7,1) ځاي نيسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رييل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ايماجينارګڼ imaginär( لاتين: فقط خيالي)يوون(واحد)وايو.

برابرون

$$x^2 + a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کيدی شي په لاندې ډول وليکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, ..................(7,6)$$

$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, .............(5,7)$$

اوس د ايماجينار ګڼ يوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ................(5,8)$$

ايماجيناريوون(واحد)z= i يو ځانګړی ايماجينارګڼ b=1 دی

د توليزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...................(7,9)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

په لاندې ډول د څلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2/4$$

لاس ته راځی یالرو<=

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیوني یا حلونه منځ ته راوړي۰

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

ketabton.com - The Digital Library



$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبيونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتين: پوره كوونكي - يا پوره كيدونكي-) بلل كيږي

$$z = a+bi \text{ , } i^2 = -1; a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیری په C سره په نخښه كوو

$$\bar{z} = a - bi, .................................(7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته كنجوګيري کمپلکس ګڼ بلل كيږي٠ لنډ كنجوګيري کمپلکس ګڼ يا اوښتى ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ..............................(5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنګه ايماجينار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل كيږي، كه دوي په رييل او ايماجينار برخه كې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

ketabton.com - The Digital Library



---

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اېښنول شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کېدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم( د ګاوس د اعدادوسطحه). سړی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې:$i^2 = -1$

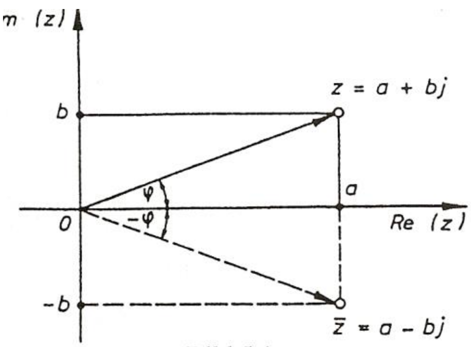


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته ځیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت ځرخون( محور ) د x - محور ته د هوارې یاسطحې ریبلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته يېایماجینار برخه وایي لکه ځنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه ځیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کارونی یا عملي يې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې ځیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون ځنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

ketabton.com - The Digital Library



---

لاندې ځیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2),.......(7,17)$$

بیلګه ۷ ۱۰ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه ( او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د( z2-) په زیاتون)کیدی شي د ځېرې ۵ ( په همدې توګه د ځېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

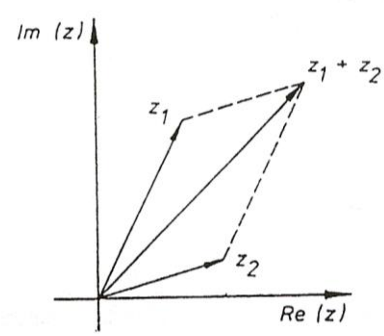



Bild 5.2 7.2 ځېره

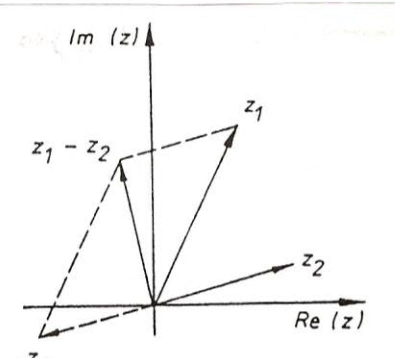


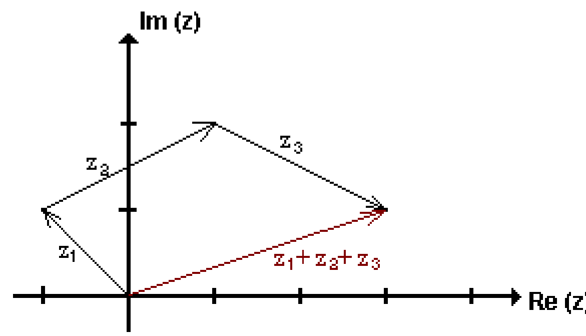

Bild 5.3 7 ځېره

ketabton.com - The Digital Library

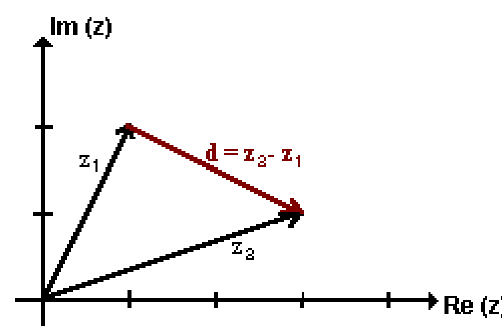


---

یا لاندې:




په پورته او لاندې څېرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي۰




**دکملپکس ګڼونو ارزښت**

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي۰

دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس( فئثاغورث) د جملې

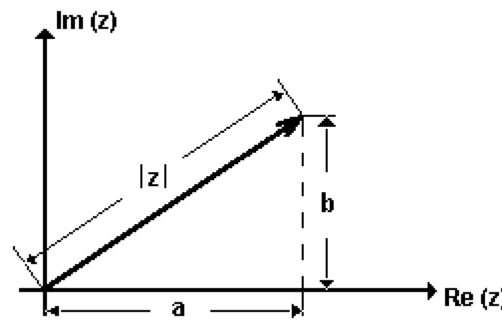
سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي۰ مخامخ څېره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښايي

ketabton.com - The Digital Library






$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په درې ګوډي کې د اړخونو ځاننیونه یا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$z_1+z_2=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک ایینوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 + a_2 b_1)i \qquad (7,20)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z_2} = \bar{z}_1.\bar{z}_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷ ) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7,22)$$

۷ ۰ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i \qquad (7,23)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

په دې پسې لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|},\left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right)=\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بېلګه ۷ . ۳ :

د ( ۷ . ۲۴ ) د دوېمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}=\frac{\overline{Z_1}.Z_2}{\overline{Z_2}.Z_2}=\frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i=\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بېلګه ۷ . ٤ : د Z1 او Z2 لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1:Z_2=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2-3i}{3+2i}=\frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)}=\frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2}=\frac{13}{13}i=-i$$

## ۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z=1-i$ b) $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

c) $z=2(1-\sqrt{3}i)$ d) $z=-1-i$

ketabton.com - The Digital Library



---

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای وركړئ، د كومو لپاره چې باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22+5i)+(2+i)$ b) $(3+2i)-(5+2i)$

c) $(1+2i)-(1+2i)$ d) $i-(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x+y\,i)\,(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

ketabton.com - The Digital Library



---

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ ( a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63\;+\;16i}{4\;+\;3i}$

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

کډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

ketabton.com - The Digital Library



4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\, x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\, x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\, x + 1 = 0$

d) $16\, x^2 + 8\,(i + 1)\, x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

ketabton.com - The Digital Library

## ۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم ( د ګڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته رااچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي. په جملو کېد دې ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه تړنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده( مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د ربښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی یا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځی. د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ . ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه ( ثبوت) کې سړی له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې ربښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي.

دا وینا B هم ربښتیا ده، ځکه چې له یوې ربښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه ربښتیا کونکلوزیون Konklusion ( لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)( د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د ربښتیاارزښت په جدول کې ) له یوې ربښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي ( ایمپلیکیشن ربښتیا ارزښت ۲ ــم جدول).

ketabton.com - The Digital Library



بیلګه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې ربښتیا ارزښت w يې جوت دی، نیونه يې $x \geq 1$ ده. له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی$3x \geq 3$ : د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د 3x زیاتون له امله لاس ته راځي:

$6x + 3 \geq 3x+6.$

بیلګه:

د یوه ناتیک اوبیوني یا حل کارونه ( متود)

د ښووني دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$(a+b)^2 \geq ab$

$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$

$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$

لاس $(a-b)^2 \geq 0$

ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه ربښتیا دي. مګر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو$a \geq 0$, $b \geq 0$ لاندې باور لري. له دې امله که له ربښتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی( سیده ښوونه) او په ناسداړه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څېړنې لاندې ونیول شي.

ketabton.com - The Digital Library



۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا ـ ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده۰ وینا یعنې نفیې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دئ، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي( د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده۰ (د ثبوت د

رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده۰

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفیې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورئ یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځي

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورئ وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

ketabton.com - The Digital Library



$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د $4ab$ کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کينه لور د څلورئ ۰ مربع په بڼه ليکل کيدی شي او هيڅکله له صفر څخه نه شي کوچنی کيدی۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتيا دی يا غلط دی، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتيا دی یانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتيا دی ۰

۲ – غوښتنه B: د ۲ رېښه يا جذر $\sqrt{2}$ ايرشنل دی

اوبيونه يا حل : د غوښتنې نفيې ده، چې : د ۲ رېښه $\sqrt{2}$ ريشنل ګڼ دی ( د ريشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو بايد بيا دوه ټولريشنل ګڼونه $q, p$, د $q \neq 0$ سره شته وي، چې دا باوري شي:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

له دې پورته برابرون سره $p^2$ يو جوړه( (جفت) ګڼ دی۰ نو له دې امله $p$ هم يو جوړه ګڼ دی، ځکه چې يواځې د جوړه ګڼ مربع يا څلورئ جوړه کيدی شي $p=2p'$ له مربع يا څلورئ کولو او پر ځای اينوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p'^2،$$

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

ketabton.com - The Digital Library



له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو څلوری یا مربع ګڼ دی٠ په دې پسې لرو p او q پر۲ ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی٠ که پرویشپردي ټول ګڼونه p اوq له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي٠

## ۸ ۰ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ n0 ( صفر باید لږ. د ن د پښی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي ګڼونو لپاره باوري کیدی شي٠ یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي٠

بیلګه ۱ :

د ټولو $n \geq 0$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بیلګه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري $1+3+5+\ldots 2n+1) = n^2$

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینځیپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که یوه وینا دn= n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په ښنه کېلیکل شوی ) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده ٠

ketabton.com - The Digital Library



په دې پسې په ترتیب د ایندکشن ښوونه په دوه پلونو یا قدمونو سرته رسیږي

۱ - د ایندکشن پیل

ښوول کیږي، چې دا وینا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د ایندکشن پل

اوس باید یو ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه وښوول شي٠ له دې امله د ایندکشن پل یا له برخه پلونو جوړ دی

۲ الف: د ایندکشن نیونه :

نیول کیږي، چې وینا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نیونه په V فرمولبند کیږي

یادونه V د نیونې لپاره ځای پرځای کیږي یا راوړل کیږي٠

۲ ب – د ایندکشن غوښتنه:

غوښتل کیږي، چې دا وینا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو٠ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځای لیکو

۲ ج – د ایندکشن ښوونه :

ښوول کیږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: $A \Rightarrow B$

بیلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^0 = 1 > 0$

۲ ٠ ۱ ٠ V ته :

$$2^k > k$$

و ۲ ٠ ۲ B ته

ketabton.com - The Digital Library



$2^{k+1} > k+1$

٢ ٠ ٣ له B <= V : له $2^k > k$ او $2 > 1$ څخه د زیاتون له امله لاس ته راځي :

$2+2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بیلګه ٢ :

١ ٠ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1° = 1$

و ٢ ٠ ١ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ٢ ٠ ٢ B ته:

و ٢ ٠ ٣ B <= V ته: له نیونې څخه د زیاتوون 2k+1 زیاتونې او له دې د ښي خوا د یوه بینومځلورۍ(-مربع) په څیر انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښی خوا انځورونې څخه د بینوم ځلورۍ(-مربع) لاس ته راځی :

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

یادونه : د V او B پر ځاي کړی شو، چې نیونه او غوښتنه ولیکو، یانې موږ درې څه لرو، چې نیونه غوښتنه او ښوونه ده٠ په هغه ورسره بلد ډول یې ښوونه د یوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی یا اوبیونه بللی( اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي یا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم یو، لکه ملګوبی، خړوبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شمیرپوهنې سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، کهٔ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بیا د ترڼې په ډول ورسره مل کړو٠ ستاسو وړاندیزونو ته هم سترګی په لار یم٠

ketabton.com - The Digital Library



---

## ۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښایې

الف ) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب ) د دوه تیرو کونجونو $\alpha$ ، $\beta$ لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښایې :

الف ) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب ) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل کڼ دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}.$

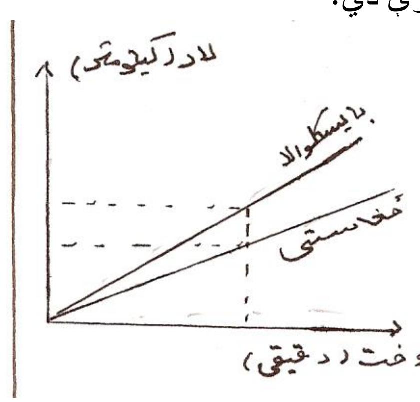
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

ketabton.com - The Digital Library

## ۹ ۰ کرښيز- يا خطي-يا لاينيز مساوات د يوې متحولې سره

پيل بيلګه

يو بايسکل ځغلوونکی او يو پلی له يوه ځايه په همغه وخت خوزي يا حرکت کوي، کوم چی په ګراف کی کښل شوی دی( که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به يې هم مرسته وي، خو پرې پوهيدل کومې ستونځې نه لري) بايسکل په ګړۍ کی ۱۵ کيلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کيلو متره په ګړۍ کي ځغلي. دوي پس له يونيم ساعت سره يوځاي کيږي. هر يو څومره لار وهي او يو له بل څومره لرې دي؟



ketabton.com - The Digital Library



---

دا موږ دلته، لکه په څنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې یادیږي، په همغه نامه نه یادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون یا مساوات په نامه وبولو .
وخت ) په دقیقه ( په t ښایو لار ) کیلومتر( په s ښایو د لارانځورونی څخه په ګراف کی څرګندیږي چی بایسکلځغلوونکی له ۶۰ دقیقو وروسته ۱۵ کیلو متره ځغلیدلي یعني 15km /hاو پلی ۱۰ کیلو متره یعني 10km/h
غواړود هرڅه لمړی وښایو چی هر یو له یونیم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بیا دویمي پوښتني ته ځواب ورکوو.
بایسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 km ځغلیدلی وي او پلی به 2.10km=20km ځغلیدلی وي بایسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km
15.tkm=لار وهلي وي. دلته وختt خپلواك اوړیدونی یا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړیدونی یا ناپیژندونکی یعني د t په واك کی دئ. دا کلیمي به بیا د فنکشن او څیرونو په برخو کی پوره تر څیړني لاندې ونیول شي. د بایسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r یې ښایو برابرون داسی لیکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بایسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بایکلځغلولو وخت دی طبعآ زیاتیز یا مثبت دئ ورته دپلي چی په lیې ښایو وهلي لار هم ټاکل کیږي،یعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پیل ټکي له 1,5 ساعته یو له بل څومره لرې دي. وهل شوې لار :

د بایسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$

د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقیب له 1,5 ساعته وروسته دواړه یو له بل 7,5 km لرې دي .

## ۹ . ۱ لاینیز- یا کرښیز مساوات :

د کرښیز مساوات فرمول د یوې اوښتونې یا مجهولې x سره داسی دئ

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقیقي اعداد دي. د ( ۱ . ۶ ) برابرون اوبیونه ( حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقیقي اعداد وښوول شي چی که په پورته ( ۱ . ۹) برابرون یا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرایط پوره کړي. د حقیقي اعداد و بنسټیز قانون ( ۳ – مجه

ketabton.com - The Digital Library



برخه دې وکتل شي) په بنسټ کیدی شي چی د حقیقي عددد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چی مساوات زخمي شي. داچی ویش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو لیکل کیږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9,2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

دا د ( ۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی۰که په څښ یا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیروو

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بیا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$
دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم ښه په څتوالی تشکیلوي ، نو په دې حالت کی حقیقي عدد x شته نه دی چی دا( ۱ . ۹ ) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بیا برابرون (۱ . ۹ ) لاندې شکل نیسي

0.x = 0

دا برابرون بیا د ټولو ریيلګڼونو xلپاره پوره (ډك ) دی. یا برابرون پوره کوي.

دا بیا داسی هم لیکل کیږي : ( په خوښه x = (belپس دا لاندې باور لري:

برابرون ( ۱. ۹ . ) د $A \neq 0$ لپاره یواځنی ټاکلی اوبیونه ( ۹ .۲ ) لريد A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبیونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر ریيلګڼ x اوبیونه یا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د یوې اووښتونې یا مجهولی سره د ریيل برابرونونو د ګڼلو ټوله تیورې خوندي ده .

یو لاینیز برابرون ( مساوات ) ( یو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرونونو ترمونو زیاتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱ ) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سری په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف په لور زیاتون ( همداسی کمون ) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته راوړوي، دا د II . 2 بنسټیز قانون له مخی یو ورته فورمبدلون یا بڼه بدلون دی )( د اوبي یا حل ډیری تغیر نه دی خوړلی ) د بیلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زیات کړو او $a_2x + c_1$

ketabton.com - The Digital Library



---

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x-b_1x-a_2x+b_2x=c_2-d_2-c_1+d_1;......................(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کيڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی ليکو

$$A=a_1-b_1-a_2+b_2;a=c_2-d_2-c_1+d_1$$

نو دا برابرون ( ۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم يا بڼه يو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x=\frac{b_1}{b_2}$$

( دا ټيك هلته موخه ور يا هدفمند دی چی $a\neq 0;b\neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کيدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د a1 |=0 په حالت کی په a1 وويشل شي:

$$x=\frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بيلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x-b^2}{a}-\frac{a(b-ax)}{b}+\frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a\neq 0;b\neq 0$ وي. ددې لپاره چی د ماتلاندې څخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x-b^2)-a^2(b-ax)+b^2=a^2b$$

$$a^2bx-b^3-a^2b+a^2x+b^3=a^2b$$

اوس برابرون ترتيبيږي او راټوليږی، xله نوکانو څخه راوځي

$$a^2bx+a^3x=a^2b+b^3+a^2b-b^3$$

$$a^2(ax+b)=2a^2b$$

د $a\neq 0$ له امله کيدی شي په $a^2$ وويشل شي (a+b)x=2b

دا د لاينيز برابرونونو بنسټيزه بڼه ( فورم) ( ۱ . ۹) ده

که ( $a+b\neq 0,(a\neq -b)$ وي ، نو( x = 2b /(a + b

ketabton.com - The Digital Library



---

یوګونی یا یواځنی اوبیونه یا حل دئ
که( a = -b ) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبیون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زیاتې اوبیونې یا حلونه منځ ته راځي( د x =په خوښه) ، د نیونی یا فرضیي له امله چی باید $b \neq 0$ وي، موجود نه دی.
پام:
په دې هکله زیاتې بیلګی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب یا ځله وونې په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی یا متحولې ولري، همغهسی شمیرل کیږي، لکه په رییلعددونو کې۰
دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چیرې اړیینې وې او یا ګرانو لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلګې به هم راوړم او که چیرې کوم د شمیرپوهنې مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅیږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوی ځښتن غوښتل۰ زه دومره یادونه کوم، چې په دې هکله زما د شمیرپوهنې بنسټیز کتاب کې زیاتې بیلګې راوړل شوي، خو نه پوهیږي، چې دا کتاب به چا ته ورسیږي او که نه

بیلګه 9 . ۲ :
برابرون $(x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c = 1$ یواځي
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دی.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې)
سره ځل کوو: $6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x) = 6abc$
ورپسی نور، په لاندې ډول، د ځرګندو شمیرلارو یا - قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$

$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$

$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بیرته د لایني مساوات ( ۹ . ۱ ) بنسټېنه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات یواځنی حل دی.
د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره د $0x=0$ له امله هر رییل کڼ x اوبیونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره x په خوښه
دلته د ځیرل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول یی لاینیزوالی یا لاینیزتوب پیژندل کیږي، په څنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرینځیپ) کی کرښیز یا لاینیز نه دي

ketabton.com - The Digital Library



---

مګر په لاينيز مساوات يا برابرونونو اړول کيدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چې د ناپيژندونکو ضريبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زيات وخت په x هم شرطونه ايښول کيږي.
ددې لپاره لاندې کی درې ساده بيلګي راوړو:

بيلګه ۹ . ۳ :
برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$
د لومړي ځل لپاره ځلوری برابرړن يا مربع مساوات دی، ځکه چې ځلوری( مربع) غړي لري. د يو له بل څلولو يا ضربولو وروسته ځلوری غړي له منځه ځي. يو لايني مساوات د يوې ځانګړي سره سره پاتي کيږي:

$$24x^2 -32x-27x+36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x +3x -x^2 -9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بيلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x -a ) / (x-b) = 1$ يواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بيا لرو: $2x-a=x-b \Rightarrow x=a-b$
د $x \neq b$ له امله بايد باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a-b$ لري او پرته له دې ( $a = 2b$) حل نه لري.
بيلګه ۹ . ۵ :
مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x ) = 1$
يواځي هلته هدفمند دی چې $x \neq 0$ وي. ددې نيونو لاندې باور لري . $x = a + b -c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله يواځي هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات يواځي د $a + b \neq c$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a + b -c$ لري، په غير له دې ( $a+b=c$) حل يا اوبيونه نه لري

بيلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څيړنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

ketabton.com - The Digital Library



---

چی ټیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تکرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$

$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$................ = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دئ

که برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوکانو یو له بل ځلولو راټول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونو یا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چی مات لاندې یي له ځلونو جوړ وو، غواړو چی اوس داسی ماتونه وڅیړو چي مات لاندې یي له زیاتونونو جوړ وي، چی د نوکانو له لارې په ځلوونو ټوټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي .

بیلګه ۹ . ۷ :

برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټیك د دې نیونو سره صدق کوي $ab \neq 0$ , $|x| \neq 1 / a^2$ . :

ketabton.com - The Digital Library



---

اصلي مات لاندې) ا م ل ( په لاندې ډول پيداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 -1)$$

$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$

$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$

$$a^2bx - b = b. (a^2x-1)$$

---

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندی)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چې يو يا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بنديږي( ، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$

$$2a^2bx-a^2+a^2b^2x-b^2 = a^4b^2x^2+a^2b^2x+2ab^2x-3b^2-a^4b^2x^2-b^2$$

$$.............2a^2bx-2ab^2x = a^2-b^2$$

$$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

$$..................................x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $ab \neq 0$ لپاره( دا د نيونو له لارې تل پوره دی )که $a = b$ وي، نو $x$ د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نيولی شي، بی له هغو چې په بنسټيزو نيونو کی له نيونو د باندې ساتل شوي وي) يعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د $x$مطلقه ارزښت د کنيونو $a = b$ د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کيدی .د $x$ لپاره نيول شوې نيونی د حل ورکولو کی بايد په پام کی نيول شوي وي دا په دې مانا چې بايد تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بيلګه ۹ . ۸ :

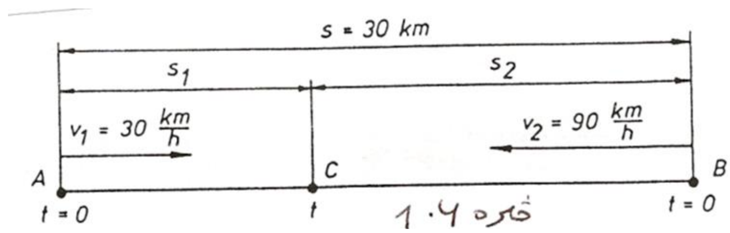
دوه ګاډې تمځايونه Aاو B يو له بل km30 لرې دي. د A څخه يو بارګاډی په ساعت کی د ديرش کيلومتره 30km/h په يوه ثابت سرعت يا چټکتيا باندې د B په لور

ketabton.com - The Digital Library



---

خوزیږي. د Bڅخه یو تیز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزیکي لویي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځانیوني لپاره ځیره ځېره وکاږئ




پوښتنه » چیرته « د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لارs1 ) یا د Bلریوالي وC څخه( د تیزګاډي D لار s2) سره وشمیرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دئ کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو. دلته درې اوړېدوني یا مجهولی مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو ماروني یا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\ t \ \ , s_2 = 90\ t \ \ , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه(واحدونه ) پریښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو )!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو یا مساواتو سره چی حل به یی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولی مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کیدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که ولیکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي s2 = 30 - x. دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30\text{-}x) / 90$

ketabton.com - The Digital Library



---

لاينيز ټاکنبرابرون يا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x\ ,\ 4x = 30 \quad x = 7{,}5$$

نو لرو

$$s_1 = 7{,}5\ km\ ,\ s_2 = 22\ ,\ 5\ km\ ,\ t = (7{,}5 / 30)h = 1h/4 = 15\ min$$

که ولیکوx = s2 ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي يا بهير نيسي:

$$s_1 = 30 - x\ ,\ t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$$

$$3(30 - x) = x$$

$$90 = 4x$$

$$x = 22{,}5$$

,

$$s_2 = 22{,}5km\ ,\ s_1 = 7{,}5\ km\ ,\ t = (22{,}4/90)h = 1h/4 = 15\ min$$

که بالاخره وخت t = x د اووښتونې يا ناپيژندونی په څير وټاکو، نو بار لري يا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90\ x = 30$

$$20x = 30$$

$$x = 30 / 120 = 1/ 4\ ,\ t = (1 /4)h = 15\ min$$

$$s1 = 30t = 30 /4\ km = 7{,}5km$$

$$s2 = 90\ t = 22{,}5\ km$$

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د 0,25 h= 15 min حرکت وروسته په 7 , 5 km لریوالی يو بل سره مخامخ کيږي

بیلګه ٩ . ٥ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

يواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نيونو لاندې باور لري $x = a + b - c$ . دا نو د $x \neq 0$ له امله يواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات يواځې د $a + b \neq c$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غير له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بیلګه٩ . ٦ – د لاندې مساواتو څیړنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

ketabton.com - The Digital Library



---

چی تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.گ.خ. تکرار شي.

$$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 . a . b^4 . c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 . 3^2 . 5 . a^3 . b . c$$

$$5400\, a^2b^2c^2 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . a^2b^2c^2$$

---

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 . 5^3 . a^3 b . c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل ځلولو راټول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ( $A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$ ) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چی مات لاندې یي له ځلونو جوړ وو، غواړو چی اوس داسی ماتونه وڅیړو چي مات لاندې یي له زیاتونونو جوړ وي، چی د نوکانو له لارې په ځلونو توټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي: $|x| \neq 1 / a^2 \quad , \quad ab \neq 0$.

اصلي مات لاندې( ا م ل ) په لاندې ډول پیداکوو:

ketabton.com - The Digital Library



$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو ( چې يو يا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بنديږي ) ، لنډونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}
a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) &= a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)\\
2a^2bx-a^2+a^2b^2x-b^2 &= a^4b^2x^2+a^2b^2x+2ab^2x-3b^2-a^4b^2x^2+b^2\\
2a^2bx-2ab^2x &= a^2-b^2\\
2ab(a-b)x &= (a+b)(a-b)\\
x &= \frac{a+b}{2ab}
\end{aligned}$$

د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره ( دا د نيونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو $x$ د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نيولی شي، بې له هغو چې په بنسټيزو نيونو کې له نيونو د باندې ساتل شوي وي( يعني په مساوات کی ځای ورته نه وي). په دې حالت کی د $x$ مطلقه ارزښت د کنونو $a = b$ د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کيدی.

د $x$ لپاره نيول شوې نيونې د حل ورکولو کې بايد په پام کې نيول شوي وي،دا په دې مانا چې بايد تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

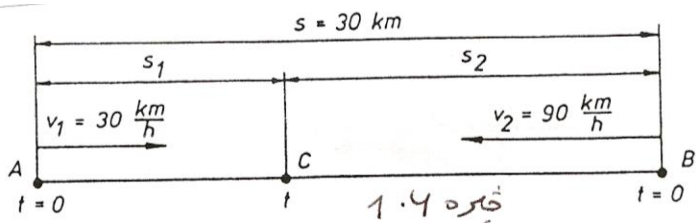
ketabton.com - The Digital Library



---

**بیلګه ۶ . ۸** : دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. دB څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویې یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t او v سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ۶ . ۱ ورکړ شوې.




څیره ۶ . ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي (د بار کاډي لار $s_1$ ) یا د B لریوالي و C څخه ( د تیزګاډي D لار $s_2$ ) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو $s_2$ , $s_1$ او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوري ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , s_2 = 90\,t \ , s_1 + s_2 = 30$$

( دلته د اندازی یونونه پریښول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

ketabton.com - The Digital Library



---

دا درې مجهولې $s_2$ , $s_1$ او $t$ دی د درې مساواتو سره چې حل به یې په ۶ الف او یا همداسې په برخه ۱۱ کې ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چې د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چې دا مساوات په یوې مجهولې مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولې $x$ په ځای کیدی شي $s_2$ , $s_1$ او $t$ وټاکل شي. که ولیکو $s_1 = x$ ، نو د اخرې مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنیو دوه مساواتو کې ځای په ځای کوو او دواړه د $t$ په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30 - x) / 90$$

لاینې ټاکنمساوات د $x$ لپاره دي، چې ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x\,,\ 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad s_2 = 22{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{7{,}5}{30}\text{h} = \frac{1}{4}\text{h} = 15\,\text{min}.$$

نو باور لري:

که $s2=x$ کیږدو،نو شمیرنه په لانې ډول ځغلي یا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x,\quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90}\,,$$

$$3\,(30 - x) = x,$$
$$90 = 4x,$$
$$x = 22{,}5,$$
$$s_2 = 22{,}5\ \text{km},\ s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{22{,}5}{90}\ \text{h} = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\,\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څیر وټاکل شي، یعنې $x=t$ ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$
$$20\ x = 30,$$
$$x = \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\quad t = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\ \text{min}.$$
$$s_1 = 30\ t = \frac{30}{4}\ \text{km} = 7{,}5\ \text{km},$$
$$s_2 = 90\ t = 22{,}5\ \text{km}.$$

ketabton.com - The Digital Library



---

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15min خوزښت(حرکت) وروسته په 17,5km کې یو بل سره مخامخ کیږي.

۹ . ۲ تمرینونه

۱ . ناکرښیز یا نالاینیز مساوات د یوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ a او b نتیجه یې د ازمایئ! د مجهولو ضریبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b یې نه شي غوره کولی یا نیولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره یواځنی حل لري، حل نه لري او یا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رویه د نورو مجهولو ضریبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ –بې له کسرونو یا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضریبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3(6\frac{1}{2}+x)-\frac{7}{3}(2x-\frac{19}{2})-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

ketabton.com - The Digital Library



---

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

ketabton.com - The Digital Library



1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

$$a)\ \frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$$

$$b)\ \frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$$

$$c)\ \frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$$

$$d)\ \frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$$

$$e)\ \frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$$

$$f)\ \frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$$

$$g)\ \frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$$

۱ . ۴. ۵ -

$$a)\ \frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10} \qquad b)\ \frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$$

$$c)\ \frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6} \qquad d)\ \frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج يا مات لاندې کې يې ناټکلي ضريبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

$$a)\ \frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b} \qquad b)\ \frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$$

$$c)\ \frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0 \qquad d)\ \frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$$

۱ . ۵ . ۲ –

ketabton.com - The Digital Library



a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶,۱ – کسرمساوات یا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ . شي تمرینونه

۱ . ۷ ۱ – که د یوه ګڼ خلور خله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د یوه ګڼ خلورخله او ۴ زیاتون ددې ګڼ او ۱۴ زیاتون سره برابر وي ، نو هغه ګڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د یوه ګڼ خلورمه برخه او پنځه خله ۴۲ ګڼ ورکوي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

ketabton.com - The Digital Library



---

۱ . ۷ . ۴ – که د یوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه ګڼ وویشل شي چې ۴
تريُ کم شوی او ۱۱ لاس ته تري راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟
۱ . ۷ . ۵ – د یوه ګڼ پنځه ځله او د ۳ زیاتو دوه ځله لوي دی، لکه د دې ګڼ درې
ځله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟
۱ . ۷ . ۶ – د یوه ګڼ څلورځله او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی لکه ددې ګڼ دوه ځل
او ۸ . دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د یوه ګڼ شپږ ځله او د ۵ کمون یا توپیر چې ددې ګڼ په څلور ځله او ۵
زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نومیږي؟
۱ . ۷ . ۸ – د یوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او
مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته
تري راځي. دا ګڼ څه نومیږي.
۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسې په دوه ګڼونو بېل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چې د مربع توپیر
یې ۱۲۵ شي.
۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یې ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نومیږي؟
۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسې تناسب کې دي، یا یو بل ته داسې ځانونه نیسی .
که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتې یې ۷ دي.
دواړه ګڼونه کوم دي؟
۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاینیونکي ګڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي،
نو یو دوه ځاینیونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځایګڼونو سره مګر په
څټ ترتیب سره.
۱ . ۷ . ۱۳ – یو زدکړی غواړي د یوه ګڼ څخه مربع رېښه د یو په بل کې بندولو
پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو ګڼ د ریښی په څیر

ketabton.com - The Digital Library



ټاکي، چې مربع یې په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه ریښه ټاکي ، کومه چې
دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ریښې مربع په ۳۳ لوي
دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ریښه یې غواړو پیدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – یو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو
غړي لري، په داسې حال کی چې نورو ډلی 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول 2 /
غړي په بر کی نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – یو نفر په درې ورځو کی مجلې په داسې شمیر خرڅوي: په لمړی
ورځ 1 / 9 ، دومه ورځ 1 / 6 او په دریمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمایي دوه کمې د څان سره لري. هغه څومره
مجلی د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – یوه میلمه د یوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي
په ټوکه ځواب ورکړ« څما پلار چې درې میاشتې پخوا یې خپله ۵۵ کلنی
ولمانځله، څما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زیات زوړ دی.» زدکوونکی
څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د یوه زدکوونکي پلار څلورنیم ځله زوړ دی لکه د هغه ځوي. دواړه ۲۷
کاله د هغه د یو اوپاکلن نیکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په یوه معما کی یو زدکوونکی د ې بل ته وایي: « که زه لما سره بټوه
کی پیسو سره ۵.۲ افغانی ور زیاتي کړم ، زیاتون یې له ۵ سره ځل یا
ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا
توپیر په 11 وویشم نو نتیجه یې ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په
خپله بټوه کی څومره پیسی لري؟

ketabton.com - The Digital Library



---

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسې تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوي دي، دریم دوه ځله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ ( اومیګا ) ، په دې پروت شپانونك ۱۱۰ ولټه دی. اوس الف ) یوګوني مقاومتونه څومره لوي دي، ب برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۷.۲۰ – د دوه غبرګ چالان عمومي مقاومت ( ماته متأسفانه په افغانسان کی د فزیك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چې په هدف به پوه شو ) دی

a) $1000\Omega$ , b) $2000\Omega$

یو مقاومت $4000\Omega$ دی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت a) $12k\Omega$, b) $300\Omega$ وي؟

. ۲۱ . د دري غبرګو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت الف ) $12k\Omega$ ب ) $300\Omega$ وي؟

. ۲۲ په اوبو کي یو د لرګي منډه باید څومره لوي وي، چې د لمبیدو استعداد یی ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرګي خاص وزن یا کلکوالی ( د فرمول څخه معلومیږي چی دا څه شی دی ) $4\frac{N}{dm^3}$ وي؟

ketabton.com - The Digital Library



---

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوډ د سونګ مواد لري.
څومره تیل او څومره بنزین په ټانك کی موجوددي که ګډونه یی وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي.
دا چی د مخه خرګړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په
سرك بیا ۲۰ ونی زیاتی کینښنول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته
څومره لویې دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵
کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی
متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کی ، دا وروسته وړونکی د پروسېرکلني وړونکی څخه یوه نیمه
دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړی
چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره
ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په
ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي.
برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو
وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ
سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

ketabton.com - The Digital Library

# ۱۰ کومبیناتوریك - د بینوم جمله

کومبیناتریک څخه په شمیرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې یو ګڼ ، پل ځاي بدلو
څومره والبشاي او که څو ګنونهخپل ځاي بدل کړې دا څنګه لیکل کیږي۰ د ځای بدلون
شمیرنه ده
او د هغې ډولونه۰
په ۱۰۱۰ او ۲۰۱۰ برخو کی به د شمیرپوهنی مرستندوي مواد د بینوم
جملی(۳.۱۰)
برخه( او کومبیناتوریك ( ۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتیت کلیمي او بینومیالکوایفیڅینت
(بینوم ځلوني) پیل شي .

## ۱۰ . ۱ فاکولتیت Die Fakultät, factorial

پیژند ۱۰ . ۱ :
د $n!$سومبول (ویل کیږی $n$ « فاکولتیت « ) لاندې سړی له1 تر $n$ پورې ګڼونو ضرب
پوهیږي، یعنی $n! = 1.2....(n-2).(n-1).n$ برسیره پر دې تعریفوو: $0! = 1$

د فاکولتیت له پیژند څخه څرګندیږي، چی ( $(n+1)! = n!.(n+1)$ لرو.

ketabton.com - The Digital Library



---

يادونه:
په افغاني ادبياتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتيت په ځاي فاکتوريال ليکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کليمه يا پښتو ، ځله ووني،، زيات کاره ولی، هيله ده چی تاسو به يی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی۰

بيلګی :

الف n! : د n = 5 لپاره په دې ډول دی: $5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$

ب : په دې ډول دی : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$

پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بينوم ځلووني يا ضريبونه

پيژند: ۱۰ . ۲

د سيمبول $\binom{n}{k}$ ( وييل کيږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ويش پوهيدل کيږي چی هر يو k ځله ووني يا ضريبونه يا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

برسيره پر دې دا هم په کلکه کره کيدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

ketabton.com - The Digital Library



---

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ یو پیداینتي یا طبعي ګڼ دی او د ماتلاندې او مات باندې ګڼونو ګڼون یا تعداد ښايي،په مات لاندې کي د لومړیو k پیداینت یا طبعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رییل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور1 - n ، دریم n-2 تر k –م فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اویلر( leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سویسي ګڼپوه، فزیکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړې ځل لپاره پیل شو، له دې امله ورته د اویلر سومبول وایي پرتله یا مقایسه برخه ۱۰ . ۳ (. که څوك دیوه بینوم پوتنځ یا توان شمیري ) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سیمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چې د یوا- ځنیو زیاتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بینوم ضریب یا بینوم ځله وونې ویل کیږي.

بیلګې :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ ،} \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعریف نه دی ، ځکه چې 3 / 1 پیدأیښتي یا طبعي ګڼ نه دی.

د بینوم ضریبونو یا ځلونوخویونه:

ketabton.com - The Digital Library



---

۱ - د $n<k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$

که n یو طبعي گڼ وي او له k کوچنی وي، نو صفر په ماتباندې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل ): سری د $(n-k)!$ سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k ولیکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کڼ اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په څیر ولیکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون گډ فاکتورونه چی په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

ketabton.com - The Digital Library



---

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ۱ افاده یا وبینه کي د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله ووني په ښير ولیکل شي، لاندې بینومیال یا بینوم ځلوونی ( ضریب) تعریفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بینوم جمله

د بینوم لاندې سرې د دوه توکو ( ګنونو) زیاتون پوهیږي. یعني: x+y
د بیونم جمله موږ ته ښايي چې ښنګه د یو بینوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چې پیدایښتي ګڼ n یی ایکسپوننت یا جکګڼ یا لنډ جګ وي، د زیاتون په ښیر پر مخ بیول کیږي. که د x + y بینوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اکسپوننت لپاره شمیرو، نو لاندې نتیجه لاس ته راوړو :
پاسکال دریګوډی

$$(x+y)^0 = ......................1$$
$$(x+y) = ....................x+y$$
$$(x+y)^2 = ...............x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3 = .............x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4 = ..........x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5 = ....x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6 = x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

ketabton.com - The Digital Library



---

په دې د زیاتونونو پرمخبیولوکی یو قانونیت لیدل کیږي. د زیاتونو ګڼون(شمیر، تعداد) د بینوم د اکسپوننت څخه په یو لوي دی . ټول زیاتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په داسی ډول چې د x اوy پوتنځ زیاتون په n برابریږي او په دې ډول د x پوتنځ په کمیدلو) د y پوتنځ په زیاتیدلو دx په اکسپوننت په ترتیب پرلپسی
n , n-1, ....1 , 0
د yاکسپوننت په ترتیب 0,1 n-1,n..,دي. د بینوم پوتنځ کوایفڅینتونه داسی په نامه پاسکال Blaise Pascal( ۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه( ګڼوندریګوډی جوړوي .

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کیڼ-ښي پرتوګڼونوزیاتون دی، چې بي له کړاو د نورو اکسپوننتویا په جګو n = 7,8, ... .. لپاره پرمخ بیول کیدی شي. د ډیرو لویو اکسپوننتو n لپاره بیا هم دالار له کړاو ډکه ده لیونارد اویلرLeonhard Euler د کومبیناتوریك فکرونو کی د کوایفیڅینتونو یووني یا یوونوالي یا بهتره یوونوالیز ستروکتورونه یا جوړښتونه وپیژندل. په n -م n ( د بینوم جګ یا اکسپوننت ( لیکه اوK- م ځای، n ,.... , 1 , 0 = k کی ولاړ ضریب دفورم څخه دئ) له کومه امله چې په ۱۰ . ۲ برخه کی د اویلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بینوم ضریب په
ځیر رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دریګوډئ د اویلر سومبول استعمال په ځیرولیکل شي نو لاس ته راځي۰

ketabton.com - The Digital Library



---

$$\ldots\ldots\binom{0}{0}$$

$$\ldots\ldots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\ldots\ldots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\ldots\ldots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\ldots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\ldots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داویلر سومبول کی د فاکتور پرځاي ، چې ګنونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ لیکل کیږي.

یادونه : ما کله a,b او کله بیا x,y لیکلي، دا په یو ډول لیکنه ښکلي ښکاریږي،
خو زه کله کله داسې ستونځې لرم .

په ۱۰ . ۲ برخه کی د بینومیالکوایفیځینت لپاره ښوول شوو خویونو۲ په بنسټ د پاسکال دریکوډي منځنی محور ته سیومتري پراته کوایفیځینته سره مساوي دي. داچی هر کو- ایفیځینت ورباندې پورته کوایفیځینتونو زیاتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو)
د تمرین وظیفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله ) مقایسه( شي ) د اویلر سیمبول په استعمال
د یوه بینوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زیاتون پرمختګ د یوه طبیعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول لیکلو ته اجازه راکوي

ketabton.com - The Digital Library



---

جمله ۱۰ . ۱ ( د بینوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه ( حل): د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندوکشن پیل : ( n = 0 )

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ایندکشن نیونه : ( n = k )

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: ( n = k + 1 )

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n$$

$$+ \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دایندکشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k$$

$$+ \binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

ketabton.com - The Digital Library



---

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کږې پرتی) برابر پوتنځ یا توان څلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونخویونو د استعمال له لارې سره راټول (یوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{0}=\binom{k+1}{1},\binom{k}{2}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{2},\ldots,\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}=\binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوې اړیکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0},\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بینوم له جملی د یوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-b)^i$$

بیلګي:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

## ۱۰ . ۴ کومبیناتوریك:

کومبیناتوریك د یوې ډیرۍ د پای غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخي یوځاییولو په څیر راوړل شي، په یوځاییولو کی کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنګه په رابوځاییولو کی

ketabton.com - The Digital Library



کیدی شي د غړو تکرار راشی او یا هم نه. له دې امله د یوځاییولو یا ټولګی درې ډولونه توپیروو( Komplexion هم ورته وایي )، په نامه پرموتیشن، وارییشن، کمبینیشن ( Permutation, Variation, Kmobination) کوم چې په لاندې برخو کی یو په بل پسی څیړل کیږي او په اخرنی جدول کی به لیدیدونکی څرګند شي یا لیدوړو ښوول شي

۱۰ . ۴ . ۱۱ پرموتیشنPermutare
( لاتین: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پیژند ۱۰ . ۳ :

د n غړو یو پرموتیشن ( ځاي بدلون )بې له تکرار داسی »یوځاي درول« دي، په کوم کی
چې n غړي په یوه د زړه پورې ترتیب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتیبونه
تل د مختلفو پرموتیشنونو یا ځايبدلونونو په مانا ده
بیلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتیشن

الف : 1 2 دی 12 21

ب : a , m دی a m m a

۲ - د درې غړو پرموتیشنونه
الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:
ams mas sam

asm msa sma

ketabton.com - The Digital Library



---

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4123 | 3124 | 2134 | 1234 |
| 4132 | 3142 | 2143 | 1243 |
| 4213 | 3214 | 2314 | 1324 |
| 4231 | 3241 | 2341 | 1342 |
| 4312 | 3412 | 2413 | 1423 |
| 4321 | 3421 | 2431 | 1432 |

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایي ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیداینټي ده، چې د پښتو لیکسیکایي ترتیب پچه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کښ کښته لور ته بیا بیرته پورته

| | | | |
|---|---|---|---|
| uams | samu | masu | amsu |
| uasm | saum | maus | amus |
| umas | smau | msau | asmu |
| umsa | smua | msua | asum |
| usam | suam | muas | aums |
| usma | suma | musa | ausm |

ketabton.com - The Digital Library

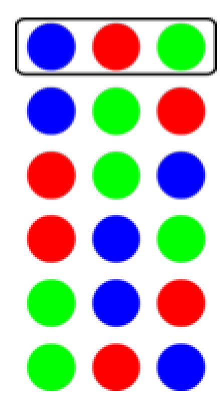


---

پ ( ا ت ج ګ دي:دلته طبعآ له ښي وکيڼ لورته ترتيبيږي(

| | | | |
|---|---|---|---|
| اتجګ | تاجګ | جاتګ | ګاتج |
| اتګج | تاګج | جاګت | ګاجت |
| اجتګ | تجاګ | جتاګ | ګتاج |
| اجګت | تجګا | جتګا | ګتجا |
| اګتج | تګاج | جګات | ګجات |
| اګجت | تګجا | جګتا | ګجتا |

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلګی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دي مانا چی د ليکسکا لغاتو ترتيب ته »کتښ مت« (ورته) دی، چی د غړو پيداينښتي لړی مخته پرته وي ( په تورو، په ګڼونوکښطبعی يو په بل پسي). دبيلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دې غړو) يا تورو( جوړ شوي پرموتيشنونه ) لغاتونه( maus همدا رنګه saum په دې ترتيب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ ( کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ګ پرموتيشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی يي تاګج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی يي جتاګ ولاړ دی.



ketabton.com - The Digital Library



------------------------------------------------------------------------------------

د پورته دربې غونډارو لپاره نظم یا ترتیب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که لیکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځای لیکو :$6! = 720$

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو Pn ګڼون ( شمیر یا تعداد) ، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $n = Pn!$

اوبڼونه : د پوره ایندکشن له لارې :

داایندکشن پیل : $(n = 1) : \quad P_1 = 1! = 1$

د ایدکشن نیونه : $(n = k) : \quad P_k = k!$

د ایندکشن غوښتنه : $(n = k+1) : \quad P_{k+1} = (k+1)!$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په !k پرموتیشنونو کی د ځل په څیر یو(k+1 ) -ام غړی راځي. دا ( k+1 ) - ام غړی کیدی شي له لومړې تر ( k+1 ) - ام ځاي پورې ودرېږي، داسی چی د ( k+1 ) -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن k+1 پرموتیشنونه د k+1 غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\ (k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلګه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسی ( دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شئ) کی لس زدکوونکی په یوه لیست کی خپل نومونه لیکلی شي ؟

اوبی یا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ •

ketabton.com - The Digital Library



-------------------------------------------------------------------------------------

پیژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتیبونه، د کومو څخه چی i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کیږي،

د i = 1 , 2 , ... ,k لپاره، نو پرموتیشن د تکرار) د تکرارسره پرموتیشن( سره نومیږي . د غړو شمیر په پرموتیشن کی بیا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

بیلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتیشن په کوم کی چی غړی a یو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کیږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دي ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتیشن، په کوم کی چی a دوه ځله، غړی b دري ځله رامنځ ته کیږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندي ډول دی

abbba abbab ababb aabbb
babba babab baabb
bbbaaa bbaba bbaab

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتیشن ګنون یا تعداد $P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)}$ ، له کومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کیږي ، په لاندي ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه یا اوبیونه: که په پرموتیشن کی n = n1 + n2 + ...+ nk (دلته دي ګنونه دn ایندکس کي ومنل شي) غړو یو له بل توپیر لرودی ( مختلف وي ) ، نو n! پرموتیشنونه

ketabton.com - The Digital Library



---

به موجود وی، که $i$ - ام غړی $ni$ -ځله رامنځ ته شي، داچی د $ni$ غړو لپاره $ni!$ پرموتیشنونه موجود دي، نو $ni$ پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څیر رایو ځاي کیږي،

دا په دې مانا چی د!n شمیر په $n_i!$ باید وویشل شي $(i = 1 \,. ..., k)$

بیلګی :

۱ - د $k = 2$ مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کی چی لومړی $(n_1\text{-}1)$ -ځله او دویم $(n_1\text{-}2)$ -ځله رامنځ ته کیږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د $k = 2$ مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کی چی لومړی $(n1=2)$ -ځله او دویم $(n2 = 3)$ -ځله رامنځ ته شي، دی

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ واریيشن اوښتنه یا بدلیدنه Variation :

تعریف ۱۰ . ۵:

د n غړو واریشن (بدلیدنه یا اووښتنه Variation ) لاتین( بدلونه اووښتنه تغیرونه یا بیا تغیرونه) و k -ام ټولګي ته( وهرې k ټوټی ته، $n \leq k$ ) هر له k غړو یوځانکول ( یوځاي درول، یوځاي لیکل) دی، کوم چی د n غړو د لړۍ پرلپسی په نظر کی نیولو سره جوړیږي..

بیلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c واریيشن و دویم ټولګي ته دي :

ketabton.com - The Digital Library



---

| | | |
|---|---|---|
| ab | ba | ca |
| ac | bc | cb |

۲ - د څلورو غړو d , a , b , c واریيشنونه و۲ - م ټولګي ته دي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ab | ba | ca | da |
| ac | bc | cb | db |
| ad | bd | cd | dc |

د څلورو غړو d , a , b , c واریيشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دې

| | | | |
|---|---|---|---|
| abc | bac | cab | dab |
| abd | bad | cad | dac |
| acb | bca | cba | dba |
| acd | bcd | cbd | dbc |
| adb | bda | cda | dca |
| adc | bdc | cdb | dcb |

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واریيشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 21 | 31 | 41 | 51 |
| 13 | 23 | 32 | 42 | 52 |
| 14 | 24 | 34 | 43 | 53 |
| 15 | 25 | 35 | 45 | 54 |

ketabton.com - The Digital Library



---

د n غړو واریشنونه و n -ام تولګي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا برابر کیږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو k -ام تولګي ته د واریشنونو ګڼون (تعداد) $V_k^{(k)}$ دی :

$$V_k^{(k)} = n(n-1).(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبونه : د مکلمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې ) ایندکشن په k اړه لري، n ځاي په ځاي دی یا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ایندکشن پیل :( k = 1 )

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټیك ( صحیح) دی ، ځکه چی له n غړوکیدی چی له یوه غړی جوړ واریشنونه جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : ( k = k0 ) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت: ):( k0 +1 = k )

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دایندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واریيشن لپاره، په دې واریيشن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی n - k0 غړو شمیر دی .که په ترتیب یو له دې n - k0 غړو د دې k -م تولګی واریشنونو $V_n^{(k)}$

ketabton.com - The Digital Library



په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې یو دk+1 ټولګي n - k0 واریشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واریشنونو $v_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واریشنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0) = \frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې یود n - k0 غړو ورزیات په یو بل ځای کیښوولی وی، نو یودk+1 ټولګي وارییشن به یی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دئ. دا سړی په بیلګه ۲ ( n = 4, k = 2 , k =3 ( باندې لیدوړ کولی شي)

بیلګي:

۱ - د درې غړو واریيشنونو شمیر و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۲ - د څلور غړو واریيشنونو شمیر و دوم ټولکی ته دئ: $v_4^{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$

د څلور غړو واریيشنونو شمیر ودریم ټولګي ته دئ: $v_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

۳ - د پنځه غړو واریيشنونو شمیر ودوم ټولګي ته دئ: $v_5^{(2)} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$

پیژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واریيشنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی یوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واریيشنونه د تکرار سره نومیږي یا بلل کیږي.

بیلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واریيشنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

ketabton.com - The Digital Library



---

| | | |
|---|---|---|
| aa | ba | ca |
| ab | bb | cb |
| ac | ba | cc |

۲ - څلور غړو a , d , c , b د دويم ټولګی واریيشنونه د تکرار سره دي:aa

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ba | ca | da |
| ab | bb | cb | db |
| ac | bc | cc | dc |
| ad | bd | cd | dd |

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دريم ټولګي واریيشنونه دي( دا لاندې ولاړ ترتيب له کينې وښي لور ته دی، خو په لاندې کې په څټ شوی)

| | | |
|---|---|---|
| 111 | 211 | 311 |
| 112 | 212 | 312 |
| 113 | 213 | 313 |
| 121 | 221 | 321 |
| 122 | 222 | 322 |
| 123 | 223 | 323 |
| 131 | 231 | 331 |
| 132 | 232 | 332 |
| 133 | 233 | 333 |

ketabton.com - The Digital Library



---

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام ټولګي د واریيشنونو شمیر $V_{W_n}^{(k)}$

$C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$ د تکرار سره دی: $V_{W_n}^{(k)} = n^k$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل ( k = 1 ) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحیح دی، ځکه چی له n غړو څخه n واریيشنونه،چی هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه ( k0 = k ) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه ( k0+ 1 = k ): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د ( k0 + 1 ) -ام درجی واریيشنونه د nk واریيشنونو چی k0 – امه درجه واریيشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چی له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات ( علاوه ) کړي ( یادونه دي، چی په واریشنونو بی له تکرار شوي ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمیر $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ واریيشنونه دی.

بیلګي :

۱ - د درې غړو و دوم ټولګي ته د واریيشنونوشمیر له تکرار سره دی

$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$

۲ - د څلور غړو و دوم ټولګی ته د واریيشنونو شمیر له تکرار سره دی

$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$

ketabton.com - The Digital Library



---

۳ - د درې غړو و دریم ټولګي ته ض واریېشنونو شمیر له تکرار سره دی

$$V_{W_3}^{(3)} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخښه ( Morsezeichen ) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښی یوځای کیږي.

د یوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښنو شمیر دئ

$$V_{W_2}^{(1)} + V_{W_2}^{(2)} + V_{W_2}^{(3)} + V_{W_2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

### ۱۰ . ۴ . ۳ کمبینیشن ( Kombination (لاتین: یو بل سره تړل)

تعریف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته ( n > k ) یو کمبنیشن هغه دئ چی هر یو له k غړو یوځاي دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نیولو سره، جوړوي.

کمبینیشن له واریېشن منځ ته راځي، که چیری نظم په پام کی ونه نیول شي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډول دي:

ac bc

...... ac

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډل دئ

ab bc cd

...... ac bd

............ ad

ketabton.com - The Digital Library



---

د دې څلو غړو ودریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي:

abc bcd

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي( لاندی هم باید له کیڼ لاندې لورته په ښی لور لیکل شوي وی)

123 234 345

124 235

125 245

134

135

145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اوریېشنونو شمیر دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبینیشنونه له واریېشنونو په دې توپیریږي، چی ترتیب په نظر کی نه نیول کیږي، دا بیا دا مانا لري چی ټول د k غړو k! پرموتیشنونه په یو کمبینیشن کی یوه ته یوځاي کیږي له دې امله لرو :.

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$$

ketabton.com - The Digital Library



بیلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینشنونو شمیریا ګڼون دئ

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دئ‌د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دئ

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دئ

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري ( ۶ له ۴۹ څخه ) د امکاناتو لپاره شمیر دئ

الف ( یو شپږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : یو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تیپ عددونه د یوه ۴ عددونوګروپ څخه بوځاي کیږي، چی له ایستل شوو شپږ عددونو ( ۴ تیک یا صحیح) او دوه عددونه( ۲ پاتی عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

ketabton.com - The Digital Library



---

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبینیشن، په کوم چی یواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبینیشنونه د تکرار سره نومیږي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینشنونه دي.

aa ················

bb ab ······

cc bc ac

۲ - د ځلور غړو d , a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي

aa ·······················

bb ab ················

cc bc ac ·········

dd cd bd ad

۳- د درې غړو 1 , 2 , 3 و دریم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي( لاندې لیکنه باید له کینې لور پیل وی، خو دلته له ښی لور پیل شوی وکینې لور ته )

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

ketabton.com - The Digital Library



---

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تکرار سره د کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی( چی په kد پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی ) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نخښه وي . (نخښه شپږ اړخیز) ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لویږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

ketabton.com - The Digital Library



### ۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،وارییشن،کمبینیشن ټولګه

| | | | |
|---|---|---|---|
| دا | د په پا یوې برخی راټولونه م کی نیولو شوو غړو | | د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه |
| | له نظم تیریدنه | نظم په پام کی نیونه | |
| | کمبینیشن | وارییشن | پرموتیشن |
| د ټول غړي یوله بل توپیر لري | د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $C_n^{(k)}=\binom{n}{k}$ | د n غړو وارییشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $V_n^{(k)}=\frac{n!}{(n-k)!}$ | دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګڼون $P_n=n!$ |
| له تکرار سره | د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)}=\binom{n+k-1}{k}$ | د n غړوواریيشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)}=n^k$ | د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,...n_k)}= =\frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$ |

ketabton.com - The Digital Library



# ۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ – لاندې فاکولتې وشمیرئ

الف ) $7!$ ، ب ) $3!.5!$ ، پ ) $6!/4!.10!$

۲ – لاندې ویشونه ساده کړئ

a) $(n+1)!/(n-2)!$ b) $(2n)!/n!$ c) $n!/2n!$

۳ – لاندې افادې وشمیرئ!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\frac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زیاتونونه وشمیرئ!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونې (استعمال) په بنسټ وګڼئ!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2-y/3)^4$ e) $(2\ \ a+3\ \ b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده کړئ!

a) $(-1+a)^2-(1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

c) $(\ \ ab-1)(-a-\ \ ab)+ab$

۷ – د بینوم په یو خل بی بیل ( تجزیه ) کړئ!

a) $25a^2+10\,ab+b^2$ b) $(49a^2-42a+9$

c) $169a^2-130\,ab+25b^2$ d) $2x+2.\ \ 6xy+3y$

ketabton.com - The Digital Library



---

۸ – الف ) د غړو ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ پرموتیشنونه په لکسیکوگرافي نظم ولیکی!

ب ) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو ځایونو کی« fahne » او« hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر » دی٠

۹ – الف ) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟

ب ) څومره پنځهٔ ځیفري ګڼونه د پنځه ځیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟

پ ) د غړوa,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ – الف ) د غړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکی، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.

ب ) د دې پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګنی!

۱۱ – څومره تنظیم شوي جوړې د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ – د څلورم ټولګي څومره مختلف وارییشنونه د

الف ) بې له تکرار

ب ) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟

۱۳ – یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرځونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دی. څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو ځل سوری شي؟

۱۴ – له شپږ غړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دي،

الف ) بې له تکرار

ب ) له تکرار سره؟

۱۵ – یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

ketabton.com - The Digital Library



---

۱۶ – څومره مختلفی ازمایني ممکن دي که په یوه تولید کی له هر ۲۰ یوه وازمایل شي؟

۱۷ – په موټرو ترافیك نخښی په لاندې توګه یوځای شوی : یوه د ځای نښونه ډله د نخښی الف بی پسی څلور ګروپ یا ډله راځي، چی له ځیفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د یوې کره ټاکلی الف بی پیژندنښی یا ترافیکی نخښی ممکن دي؟

۱۸ – د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه ، د رنګونی له لارې یو له بل توپیریدی شي ، که څلور رنګ نښونی ولرو؟

۱۹ – د منډې یوه میچ په اخرکی شپږ پاتی منډې وهونکی برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟

۲۰ – په څومره ډوله

الف ) اته مختلفی مرغلرې،

ب ) درې سرې، څلور شنی، یوه زرغونه مرغلره

ترتیبیدلی شي؟

۲۱ – څومره تلفونونه کیدی شي وتړل شي کی یواځي پنځه ځایزه نمره موجود وي؟

څومره تلفون تړل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځایزې وي او په 0 پیلکیدنه یی اجازه ونه لري؟

۲۲ – د درې شپږسترګیو ( یا –اړخیزو ) سره ( ځیره مکعب دی اومخونه له یوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته یې د پښتو نوم نه راځي او االماني یی Würfel دی ) څومره مختلفی اچونی ممکن دي، چی ټولې شپږسترګې مختلفې سترګې ګڼون وښايي؟

څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګیو سره ممکن دي؟

ketabton.com - The Digital Library

# ۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چې څه به تکرار وي، خو هغه لاتین متل دی، چې » تکرار د زدکړې مور ده .«
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چې n اووښتونې یا مجهولې یا ناپیژندونکې لري، وقف ده، چیرته چې m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنې کیدی شي
په ۱۱ . ۱ برخه کې د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر څیړنې لاندې نیول کیږي، چې د ښوونځي شمیرپوهنې تکرار دی، مګر دلته د برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي، چې د حالتونو توپیریدنه یې اړیینه ده۰
دا راوړنې به په ۱۱ . ۲ برخه کې درې ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کې په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کې پل په پل د دیترمینانت کلیمه او د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کې نیسي۰
یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطې؟

ketabton.com - The Digital Library



---

مورږ د برابرونونو له څیرې پوهیږو، چۀ دا یوه کرښه ورکوي، چې لاتین یا کۀ غواړئ انګریزي یې لاین نومولی۰ د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسي منځپانګې سره یې توپیر وي،نو مورږ هم ورته له دې امله لاینیز وایو۰

## ۱۱ . ۱ . لاینیز برابرون د دوه ناپیژندونکو سره

داسې یو مساوات د دوه ناپیژندونکو سرهکیدي چې په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11 . 1)$$

دلته کیدی شي چې ناپیژندونکی لویي x او y په خوښه ریېل ګڼونه وي چې یو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. یا په بل عبارت : x او y واریابلی(اووښتونکی یا لنډ: اووښتونې ) دي، برابرون ( ۱۱ . ۱) لاینیز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چې د هغې څیره په y,x کواوردینات کی ناپای کرښه ده( ۱۶ - امه برخه دی وکتل شي )

ځانګړی حالت : a = 0 یا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي یا په ګوته کوي چې د y - محوراو همداسې د x - محور سره غبرګه د ه .

که دا ( ۱ . ۱۱ ) برابرون د دواړو نایژندونکو یا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات یا ټاکنبرابرون ونیول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ددې مسئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهیدل غوښتونکی وي.

د ( ۱۱. ۱۰ ) برابرون اوبیونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو ( x ,y ) ډیری ده، چې( ۱۱.۱ ) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱ ) د y په لور داسې ځوابوو.

$$y = - (a/b) x + c/b \qquad (11 . 2)$$

کیدی شي چې x په خوښه وټاکل شي اوy له ( ۲ . ۱۱ ) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چې ناپاي ډیرې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځی یعني د اوبیونې ډیری یا اوبیډیری L په لاندې ډول ده

$$L = \{ ( x, y ) \mid y = - ( a/b ) x + c/b \} \qquad (11 . 3)$$

داسې لوستل کیږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډیری ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون)۰

ددې لپاره لنډ لیکل کیږي: د ( ۱۱ . ۱ ) برابرون اوبی یا حل $y = -(a/b)x+c/b$ ،د خوښی x ۰

ketabton.com - The Digital Library



---

طبعآ کیدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نیسو، نو د لته د برابرون ( ۱۱ . ۱ ) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښه y ۰

دا چي په لاندې کی موږ د دریو یا ډیرو ناپیژندونکو یا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپیژندونکي د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, .....$ سره .

ددې په نخښونو سره کیدی شي چی په څرګند ډول وښایو:

لاندې برابرون د دوه ناپیژندونکو $x_1, x_2$ سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, .............(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

$\infty^i$

ځوابونه لري

$\infty^i$

په دې مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپیژندونکو یا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کیښوول کیدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, ...........(11,5)$$

$x_2$ په خوښه

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

$\infty$

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; ................(11,6)$$

$x_1$

په خوښه

د a1 =a2 = b = 0 (0.x1+ 0.x2= b = 0 لپاره ناپای ډیر ځوابونه)

د په خوښه

$$x_1, x_2, ..........................(11,7)$$

ketabton.com - The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------------

د

$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$

لپاره

$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$

په ځتوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.
نوټ : دلته

$\infty^i$

دا مانا لري چې د ناپیژندوني یا مجهولی

$x_i$

لپاره i = 1,2.. په خوښه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاینیز برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سره
د دوه برابرونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1a_{12}x_2 = a_1$$
$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;..................(11,8)$$

دا تاکلي برابرونونه کیدی شي چې په اووښتونو یا واریابلو x 1 اوx2کی د بلواکبرابرون یا فنکشنمساوات په څیر ونیول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښې یو بل غوڅې کړي نو دا د مساواتو په سیستم ( ۸ . ۱۱ ) کی د کرښو یوګونی( بهتره : یوګونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی ) اوبیونه ده یا حل دی.
که دواړه کرښې یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چې د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخې تیك یا فقط مساوات I یا مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډیر

$\infty^1$

ځوابونه موجود دي.
داسې هم کیدی شي چې فورمال

$\infty^2$

رامنځ ته شي، که ټول

$a_{ik} \wedge a_i$

ketabton.com - The Digital Library



---

د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څیړو. دا څیړو چی، که دا برابرون اوبیونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کیږي، چي کربنه I اوکربنه II غبرګي ځغلي مګر یو په بل نه وي پرتی.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپیژندونکو یا اووښتونو سره، کیدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - یو یواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دئ (اصلي حالت )

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دئ پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لري )

۳ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دی II ( برابرون برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابره دی )

۴ - ناپاي ډیر ځوابونه موجود دي.

( ټول $a_{ik}=0$ او ټول $a_i=0$ دي )

د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپیژندونکی لري، کیدی شي په اسانتیا وپیژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دئ.

په سیستمونو کی چي درې یا زیاتي واریابلی یا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پیژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنګه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پیل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پیدا کړو. دلته باید دري بنسټیز د مساواتسیستم د ځواب کاردودونه)متودونه( تکرار شي:

۱ . د برابر یا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

دواړه برابرونونه د یوې نامعلومی په لور اوبی کیږي(د بیلګي په توګه د x دوه په لور(، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابرون د یوې نامعلومي سره منځ ته راځي۰

۲ - یو د بل پر ځاي کینولو متود:

برابرون یا مساوات د یوې ناپیژندونکې ( د بیلګي په توګهx دوه) په لور ځواب کیږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کیږي، په دې ډول د یوې ناپیژندونې برابرون منځ ته راځي ( د بیلګي په توګه دx یو)

ketabton.com - The Digital Library



---

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سرې یو ټاکلی څو برابره ( کیدی شي چی کمیز یا منفي هم وي) د II د برابرون د I برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسی چي یوه ناپیژندونی بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نیتجي سره بیا دا بله ناپیژندوني څیړي. دا د داوړو نامعلومو( ناپیژندونو) لپاره کیداي شي . دا متود دبرابرونونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چی د دیترمینانتو ( die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .
دا متود په درې ځانګړو برابرونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول څلورځلوني( ځله ووني یا ضریبونه) بایدله صفر توپیر ولري یعني $a_{ik} \neq 0$ که چیرې یو $a_{ik} = 0$ د بیلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لرودی:

$$I.............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;......a_{11} \neq 0$$

$$II.....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;..........(11,9)$$

دلته نو

$a_{21} = 0$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجي څخه يي چی په I کی کښیښودل شوې وی $x_1$ هم معلومیدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوریتم په استعمال بیا برابرون د درېګوډي شکل باندې اړول کیږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :

سیستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4

II x1 - 2x2 = -5

دا سیستم یواځنی یوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړیکی نه لري

سیستم ۲

2x1 + 3x2 = 4

II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانۍ ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دۍ . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښايي او په دې ډول د مساواتو اوبیونې ناپای دی.

ketabton.com - The Digital Library



سيستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بي ډيله څرګنده ده چې برابرونونه يو د بل تضاد يا يو د بل په خټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چې II هم باوري وي، نو له دې امله دا سيستم ۳ اوبيونه نه لري.

بيلګه ۱۱ . ۱ :

سيستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اينوولوکارونه يا عمليه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$

$$-(7/2)x_2 = -7$$

$$x_2 = 2;\Rightarrow$$

$$x_1 = 2-(3/2).2$$

$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځاي کينولوکاروونه ( عمليه) : II د x1 په لور ځواب کيږي او بيا په I کی ځاي په ځاي کيږي٠

$$II'::.........x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$

$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ ) د زياتونکاروونه: $x_1$له منځه ځي، که ( 2- ) ځله د II برابرون و I ته زيات شي.

ketabton.com - The Digital Library

$$I:................2x_1+3x_2=4$$
$$(-2)II:........-2x_1+4x_2=10$$
$$I-2II:....................7x_2=14$$
$$..................................x_2=2$$



کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II څخه x1 وشمیرل شي:
$$x_1=2x_2-5=4-5=-1$$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي

x2

له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$$2.I:............4x_1+6x_2=8$$
$$3.II:............3x_1-6x_2=-15$$
$$-------------------$$
$$2.I+3.II:........7x_1.........=-7$$
$$........................x_1.............=-1$$

یادونه : په پورته کې یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته اینسول کیږي، پوهیږو، چې چیرته ټکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :

سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف ( مساوي اینوولو:

I' : x1 = 2 -(3/2).x2

II': x1 = 2 -(3/2)x2

2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x

0.x2 = 0

ketabton.com - The Digital Library

دلته
$x_2$
په خوښه. دا په دي مانا چی
$x_2$
هر ارزښت نیوی شي ۰ له I' څخه ناپای ډیر ځوابونه لاس ته راځي
$x_1 = 2 - (3/2)x_2$ او $x_2$ په خوښه.



---

ب ) د بل په ځاي ایښوولومتود: $I' \quad x_1 = 2-(3/2)x_2$ ,
په II کی ایښول کیږي

$$II' \quad 4.(2-(3/2)x_2) + 6x_2 = 8$$
$$8-6x_2+6x_2 = 8$$
$$0.x_2 = 0 \quad x_2$$
په خوښه له II' لاس ته راځي
$I' : x_1 = 2 - 3/2\, x_2$ $x_2$ په خوښه

پ) د زیاتون متود یا لار یا طریقه:
$$2.I \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$
$$II \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$

$$II - 2.I : \; 0x_1 + 0x_2 = 0$$
که یواځی دا مساوات په نظر کي ونیول شي ، نو $x_1$ او $x_2$ په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چی د $x_1$ او $x_2$ ترمنځ په I یا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یواځي یوه ناپیژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:
$$x_1 = 2-(3/2)x_2$$
$x_2$ په خوښه
په همدې ډول:
$$x_2 = 4/3 -(2/3)x_1 ,$$
دلته $x_1$ په خوښه ټاکل کیږي

بیلګه ۱۱ . ۳ :

ketabton.com - The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف ( مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$I': \quad x1 = 2 -(3/2)x2$

$II': \quad x1 = 5/2 -(3/2)x2$

$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$

$0.x2 = 1/ 2$



---

دا يو په ځتوالی يا تضاد دی، ځکه چی هيڅ يو رييل ګڼ x2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته يا وجود نه لري.

ب ) د بل په ځاي ليکلو عمليه: $I': \quad x1 = 2 - (3/2)x2 \quad ,$

په II کی دی په ځای شي

$II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$

$8 - 6x2 + 6x2 = 10$

$0.x2 = 2$

دا مخامخوالی يا په ځتوالی يا تضاد دی ، پس ځواب نه شته.

پ ) د زياتون متود:

$2 . I \qquad 4x + 6x = 8$

$II \qquad 4x + 6x = 10$

---

$2.I - II \qquad 0.x + 0.x = -2$

په ځتوالی يا تضا د دی ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بيلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پېښتنو ځوابونو لپاره اړوند لاربښوونه ګوته لك کړو.

بيلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم يا بڼه برابرونسيستم ورکړ شوی:

$I \qquad x /(a+b) +y/(a-b)$

$II \qquad x /(a-b) +y/(a+b)$

دا ټيك هلته موخه ور يا هدفمند دی چی a =| b او a- =| b وي، يعنی |b| =| |a| وي .

ketabton.com - The Digital Library

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود تړلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کیدی شي.
لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:
د I ځل له $1/(a+b)$ او II ځل له $-1/(a-b)$ څخه وروسته دا لرو:

$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$

$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$

له دې سره د y دواړه ځله ووني یاضریبونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په څټ ) نخښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توګه مو یو برابرون د یوې ناپیژندونکی سره مخ ته پروت دی:



---

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له $1/(a+b)$ او IIله $-1/(a-b)$ سره ځل شي کیدی شي: چی y په ورته ډول وشمیرل شي:

ketabton.com - The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$



---

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومی چی ځمو ږ د څیړنی لپاره بي مفهومه دی.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو څیړو چی کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات ) * ( تر څیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

.1 a = 0 , b |= 0

مساوات )*( داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

. 2 a |= 0 , b = 0

برابرون( *)( په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په ښتوالی یا تضاد نه شته ( له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

ketabton.com - The Digital Library

په بل حالت کی لرو , $y = a - x$ دلته x په خوښه دئ

3 . $a=b=0$

دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دئ.

بیلگه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د (3x-2y)(2x-3y) سره څلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي x , y راپیدا کړو . موږ ځاي پر ځاي کو



---

$u=1/(2x-3y)$ ,$v=1/(3x-2y)$

او لاس ته راوړو:

$11u+18v=13$ <=> $11u+18v=13$

$27v-2u=1$ $-2u+27v=1$

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$33u+54v=39$

$4u-54v=-2$

---

$37u=37$

$u=1$ => $v=1/9$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$1=1/(2x-3y)$<=> $2x-3y=1$

$1/9=1/(3x-2y)$ <=> $3x-2y=9$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $x = 5 , y = 3$ لاس ته راځي.

ketabton.com - The Digital Library

## ۱۱ . ۱ . ۳ دويمه درجه ديترميناتې او د کرامر قاعده

که په ټوليزسيستم(11.8 ) باندې د زياتون متود استعمال شي، نودx2د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{12}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ ( وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - _{21}.I :$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې يواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, .........(11,12)$$

که د ارزښتونه په ( 11 . 8 ) کی ځای په ځای شي نو تصديقيږي، چی( 11 . 12 ) په ريښتينی د ( 11, 8 ) ځواب دی. له ( 11 . 10 ) تر ( 11 . 12 ) سړی په واقعيت يا ربنتونی کی د ديترمينانت کليمی په لور لاروی کوي( لارښودوي.)



---

پيژند ۱۱ . ۱: د يو منظم سيستم دوه ځله دوه رييلو ګڼونو $a_{ik}, (i, k = 1, 2)$د د ۲ -امه درجه ديترمينانت لاندې ، لاندينی ګڼ پوهيږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};............(11,13)$$

د اصلي دوه کونجتړي يا دياګونال (قطر) د توکوځل، ترې کم( منفی ) د څنګ يا فرعی دوه کوجنتړي(قطر) د توکو ځل( يا ) د اصلي دوه کونجتړې يا قطر د توکو ځل څخه د څنګ يا فرعي دوه کونجتړې د توکو ځل کميږي يا منفی کيږي)

يادونه : دا اوس او وروسته ديترمينانت بڼه د ماتريکس په څيره ليکل شوی، په ديترمينانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په ( 11 . 13 ) کی د xi ځله ووني يا ضريبونه داسی ليکل شوي لکه په ( 11 . 8 ) سيستم کی . د ( 11.13 ) ديترمينانت له دې امله د ( 11 8 ) (له ماڅخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدليږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شميرپوهنيزه ناسمي منځ ته نه راولي) سيستم د ځلونو ( ضريبونو) ديترمينانت بلل کيږي.

که په ( 11. 13 ) کی لومړی ( درز، ستن يا مټه يا ولاړه ليکه يا-کيله) د ديترمينانت ولاړه ليکه( په ځای ) چی د xi ځله ووني يا ضريبونه دی د ( 11 . 8 ) برابرونسيستم

ketabton.com - The Digital Library

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 وليکل شي نو( په x1 اړونده) لاندې ديترمينانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{22} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه يا نمره دې) ۱۱،۱٤ ( وي.په همدې ډول که د ) 11 . 13 ( ديترمينانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې ديترمينانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,15)$$

که له ( 11 . 10 ) تر( 11 . 12 ) پورې له ( 11 . 13 ) تر ( 11 . 15 ) پرتله يامقايسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۱ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو يا ضريبونو ديترمينانت لپاره په ( 11. 13 ) کی



$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سيستم ( 11 . 8 ) يواځنی ټاکلی ځواب لري

x1=D1/D ; x2 = D2/D /11,17)

په داسی حال چی D1 او D2 د ( 11 . 14 ) او ( 11 . 15 ) له مخی شميرل کيږي.
د ( 11 . 10 ) او ( 11 . 11 ) له امله لرو

جمله ۱۱ . ۲ :
که په ( ۱۱ . ۱۳ ) کی د ځلونو ديترمينانت D لپاره باوري وي

(11,18) 0 = D

او د کم له کمه يوې ډيترمينانتD1 يا D2 لپاره په ( 14, 11 ) يا ( 11 , 15 ) باوري وي

D1|=0 V D2 |=0 (11,19)

نو ( 11 . 8 ) سيستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون يی يو د بل سره مخامخ دي ( تضاد کی دي)

ketabton.com - The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :
باوري دي

$$D=D1=D2=0 \quad (11.20)$$

نو يو له برابرونونو I يا II زياتي دئ ) دواړه برابرونونه يو بل ته اړ دی يا د بل په واك کی دي( او د ۱۱ . ۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعماليدلی شي يا کار ترې اخستل کيدی شي.
د ښوونبيلګو په څير دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلګي ( ۱۱ . ۱ . ۲ برخه ) کارول شوي سيستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونکي په ديترنمنانتو ځواب کړي، که چيرې ما دا کار سرت ونه رساوه۰.

بيلګه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7\neq 0$$

پس يوائځنی ټاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\-5 & -2\end{vmatrix}=-8+15=7\neq 0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\1 & -5\end{vmatrix}=-10-4=-14$$



---

له دې امله باوري دی

x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,

بيلګه۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\8 & 6\end{vmatrix}=24-24=0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\4 & 8\end{vmatrix}=16-16=0$$

ketabton.com - The Digital Library

له دې امله ناپاي ډير ځوابونه موجود دي) بيلګه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بيلګه ۱۱ . ۸ :   د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D = 2 3 =12 -12 = 0

او ورپسی

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی ځواب نه شته(د D2 = 4 |=0له شميرلوکيدی شي، چی تيرشو)

بيلګه ۱۱ . ۹ :

موږ بالاخره غواړو چي په بيلګه ۱۱ . ۴ کی ورکړ شوی مساواتسيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی D , D1 او D2 شميرو:

ketabton.com - The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b}\\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b}\end{vmatrix}=\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$\text{........................}=\frac{a^2-2ab+{}^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}=-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{a-b}\\ 1 & \frac{1}{a+b}\end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & 1\\ \frac{1}{a-b} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت $ab \,|= 0$ :

دلته ديترمينانت $D \,|= 0$ او دا د برابرونسيستم يواځنی ټاکلی ځواب دئ

$$x=\frac{D_1}{D}=\left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right):\left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right)=\frac{2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{4ab}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د $D1 = D2$ له امله )

دوم ۱ حالت $a=0, b\,|=0$ : دلته $D = 0$ مګر

$D1 = D2 \,|= 0$

او د مساواتسيستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته $D = D1 = D2 = 0$

او ناپای ډير ځوابونه موجود دي چی په بيلګه ۱۱ . ۴ کي بنوول شوي .

دوم ۳ حالت $a = b = 0$ :



---

دلته مساواتسيستم هدفمند نه دئ ( په صفر ويش مخ ته پروت دئ) مشوره کيږي چی

ketabton.com - The Digital Library

لاندی د برابرونونو  سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو    وروسته دبیلا بیلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره  پرتله  یا مقایسه شي.

$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$

$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$

١١ ٠ ١ ٠ ٤ د ګاوس الګوریتم

په ١١ . ١ . ٢ . برخه کي څیړل شوو متودو ټیك په نظر نیولو سره ( برابرو  لیکلو- په ځاي - او د زیاتون عملیه ) ، کره  پوهیدلی شو چی ددې په مرسته  ټولیز  د برابرونسیستم ( 11 . 8 )

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه درېګوډیز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

١ . که 0 =| a22 وي، نو  لاس ته راځي:

الف)      x2=a2/a22

ب  )  برسیره پر دې که $a_{11} \neq 0$  وي، نو لاس ته راځي:

x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=
(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)

٢ . که 0 = a22 او 0 =| a2 وي نو ځواب موجود نه دی یا نه شته

٣ . که  a22 =0 او 0 = a2 وي، نو  ٢- م  برابرون  بی هوده دی  ( د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بیا  ا.  برابرون  د ١١ . ١ . ١ برخی متود په مرسته ځوابولی  شي.

د ( 11 . 8 )  سیستم د  ځواب پرابلم په دې ډول کمیږي، چی دا سیستم په دریګوډی بڼه یا – څیره  واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي،  د ګاوس الګوریتم دی. یا ( 11 . 8 ) سیستم دریګوډی څیره  لري او یا ټول  aik  د صفر سره برابر  نه دي.

ketabton.com - The Digital Library

په لاندې کی ( 11 . 8 ) سیستم په روځنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

| | | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | a11x1+a12x2= a1 | a11 | a12 | a1 |
| II | a21x1+a22x2= a2 | a21 | a22 | a2 |

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پرېښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - ځله له I برابرون څخه کم شي ، نولرو

| | | $x_1$ | $x_2$ | Rs |
|---|---|---|---|---|
| I | $a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_1$ |
| II' | $0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$ | 0 | $a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$ | $a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$ |

که 'II لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

| | | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | a11x1+a12x2= a1 | a11 | a12 | a1 |
| II' | b22x2 = b2 | | b22 | b2 |

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که 0 =| b22 وي ، نو x2 له 'II او x1 له I لاس ته راځي.
-که 0=| b22 = 0 , b2 وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که b22 = b2 = 0 وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی له I او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

ketabton.com - The Digital Library

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

| | | $x_1$ | $x_2$ | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | $2x_1 + 3x_2 = 4$ | 2 | 3 | 4 |
| II | $x_1 - 2x_2 = -5$ | 1 | -2 | -5 |

که غوښتونکی دریګوډیځیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پریږدو او له II څخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

| | | $x_1$ | $x_2$ | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | $2x_1 + 3x_2 = 4$ | 2 | 3 | 4 |
| II' | $0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$ | 0 | -7/2 | -5 |

له 'II لاس ته راځي $x2 = 2$
او له I څخه لاس ته راځي. $x1 = 2 -(3/2)\ x2 = -1$

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (ځیرو. دلته د لمړی لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳

| | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 4 | 6 | 10 |
| II'=II-2.I | 0 | 0 | 2 |

سیستم۲

| | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 4 | 6 | 8 |
| II'=II-2.I | 0 | 0 | 0 |

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري ( 0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I ) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په څیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.



---

بیلګه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅېړل شي

دوم واریانت

| | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 1 | -2 | -5 |
| II'=II+(2/3).I | 7/3 | 0 | -7/3 |
| 1. | 2 | 1 | -1 |

اول واریانت

| | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 1 | -2 | -5 |
| II'=II-(1/2).I | 0 | -7/2 | -7 |
| 2. | -1 | 2. | 2 |

څلورم وایانت

| | x1 | x2 | Rs |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 1 | -2 | -5 |
| I=I-2.II | 0 | 7 | 114 |

دریم واریانت

| | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 1 | -2 | -5 |
| I'= I+(3/2).II | 7/2 | 0 | -7/2 |

2. 2 2. -1 1. -1 1. 2

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا څلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چې د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوې، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا ) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب ) له II' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

$$x2= -7 / (-7/ 2) =2$$

ت ) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$$x = (1/ 2)(4 - 3.2 ) = -1$$

واریانت ۲ :

ا ) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

ketabton.com - The Digital Library



---

ب ) له 'II څخه دې $x1$ وشمیرل شي
پ ( له 'II لرو: $x1 = -1$
ت ) له I څخه لرو: $x2 = 2$
واریانت (امکان ) ۳
ا) له II څخه دې $x2$ وشمیرل شي
ب ) له 'I څخه دې $x1$ وشمیرل شي
پ ) له 'I لرو $x1 = -1$
ت ( له II لرو $x2 = 2$
واریانت ( امکان) ۴
ا ) له II دې $x1$ و شمیرل شي
ب ) له 'I څخه دې $x2$ وشمیرل شي
پ ( له 'I لر $x2 = 14 / 7 = 2$
ت ) له II لرو:
$x1 = -5+2.2 = -1$

ټولی څلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واریانت کی په ټولګښونو شمیرنه کیږي، »مخته ونه« یا مخوونه( برتري ) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

## ۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زیات برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سرهره

که څوك له دوه زیات برابرونونه د دوه اوښتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توګه باید په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه $x1, x2$ ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توګه حل نه لري. یواځې په ځانګړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څیړو او بیا د ګاوس الګوریتم له لارې.

بیلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

a ) I $x1 + 2x2 = 3$ b) I $x1 + 2x2 = 3$
II $2x1 - x2 = 1$ II $2x1 - x2 = 1$
III $3x1 + x2 = 2$ III $3x1 + x2= 4$

له I او II څخه د ځرګندو یا معلومومتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی څل یواځنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي۰

ketabton.com - The Digital Library



---

له a ) او b( څخه لرو1 = $x_1 + 2x_2$ که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په a ) کې: $4 = 1.1+3.1$ ,2 =| په b ) کی : $4 = 1.1 + 3.1$

نو سیستم a ) ځواب نه لري او سیستم $\hat{b}$ ) یواځني ټاکلی ځواب لري

یعني $x_1=x_2=1$

بیلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بیلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوت اوس د ګاوس د الګوریتم له لارې ځواب کوو.

a)

| | $x_1$ | $x_2$ | RS |
|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 3 |
| II | 2 | -1 | 1 |
| III | 3 | 1 | 3 |
| II'=II-2.I | 0 | -5 | -5 |
| III'=II-3.I | 0 | -5 | -7 |
| III''=III'-II' | 0 | 0 | -2 |

b)

| | $x_1$ | $x_2$ | RS |
|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 3 |
| II | 2 | -1 | 1 |
| III | 3 | 1 | 4 |
| II'=II-2.I | 0 | -5 | -5 |
| III=III-3.I | 0 | -5 | -5 |
| III=III'-II' | 0 | 0 | 0 |

په a ) کی تضاد پیژندلکیږي ( $III':0.x_1+0.x_2=-2$) ځواب نه شته یا وجود نه لري .

په b ) کی تضاد مخ ته نه دی پروت .($III':0.x_1+0.x_2=0$ ) لهII' څخه لرو:

$x_2 = 1$ او له I څخه لاس ته راځی : $x_1=3-2.1=1$

۱۱ . ۲ لاینیزبرابرونتسیستم د دريِ ناپیژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ یو برابرون د دري ناپیژندونکو سره

مو ږ یو مساوات د دري ناپیژندونکو سره تر څیرني لاندې نیسو:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2+ a_{13}x_3 = a_1 \quad ( 11 . 21 )$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

$$I .\quad a_{11}=a_{12}=a_{13}=0 \quad ( 11 . 22 )$$

دلته $x_1$ , $x_2$ او $x_3$ یو له بل پوره خپلواك ټاکل کیدی شي. ویل کیږي چی ناپاي ډیر ځوابونه مخ ته پراته دي ( $x_1$ په خوښه، $x_2$په خوښه او $x_3$په خوښه)

$$2.\quad a_{11}=a_{12}= a_{13}= 0 ,a_1|=0 \quad ( 11 . 23 )$$

ketabton.com - The Digital Library



---

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$0x1+0.x2+0.x3 = a1 |= 0$

اوبیونه نه شته.

۳- د کم له کمه یوه ځلجوړې i , k لپار دې 0 =| aik وي. ( بي د ټولیز وبندیزونو یا عمومیت د محدود والی دې a11|= 0 وي (. کیدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي ( ناپاي ډیر ځوابونه)، او لاس ته راځي

$x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3)$ په خوښه x1 او x3 (11,24)

## ۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپیژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسیستمونه د درې اوښتونو یا ناپیژندونکو سره

$$a11x1+a12x2+a13x3=a1 \qquad (11,25)$$

$$a21x1+a22x2+a23x3= a2 \qquad (11,25)$$

موږ دا را ویستلي حالتونه ، چیرته چی د ټولو i, kلپاره aik= 0 ، په پام کی نه نیسو. دا حالت هم په پام کي نه نیسو چی دوم برابرون د لومړي په څیر وي ( ناپاي ډیر ځوابونه. او یا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي یا ځتوالي یا تضاد کی وي ( ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پیژندونکي دي. موږ په یوه بیلګه کی دا اصلي حالت څیړو چی یو ناپیژندونکي یا نامعلوم ( د بیلګي په توګه x3) په خوښه ټاکل کیږي او دا نورې دوه ناپیژندونکی یا اووښتونې ( x1 او x2) یواځنی لاس ته راځي، او یا یواځنی ورکول کیدی شي ( ناپاي ډیر ځوابونه).

بیلګه ۱۱ . ۱۵:

| | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I $x1+x2+x3=3$ | 1 | 1 | 1 | 3 |
| II $x1+2x2+3x3=6$ | 1 | 2 | 3 | 6 |
| II'=II-I $0.x1+x2+2x3=3$ | 0 | 1 | 2 | 3 |

له II' لاس ته راځي

$$x2 = 3 -2x3$$

له I څخه لاس ته راځي

$$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, x1= x3$$

ketabton.com - The Digital Library



----------------------------------------------------------------

او له دې لاس ته راځي
$x_1=x_3, x_2 = 3 - 2x_3$ $x_3$ په خوښه.

## ۱۱ . ۲ . ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه یا معادلې یا مساوات د درې ناپیژندونکو سره څېړو

$$\text{I} \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3= a_1 \quad (11 . 26)$$
$$\text{II} \quad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= a_2 \quad (11,26)$$
$$\text{III} \quad a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3= a_3 \quad (11,26)$$

له دې سیستم څخه کیدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخې د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتونتیورم (-قضیه ) فکر غواړي او د دریمي درجي دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د ( ۱۱ . ۲۶ ) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پیژند ۱۱ . ۲:
ریبل ګڼونو aik ( i,k = 1,2,3 (یو درې درجه منظم د دیتمرمینانت سیستم

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی ریبلګڼ پوهیدلی شي):

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}-a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=$$
$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32)})-a_{12}(a_1a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{33});\ldots\ldots\ldots(11,28)$$

له دې سره د دریمی درجې دیترمینانت شمیرنه د دوهمی درجی دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. . ۱۱ . ۲ تعریف او په ځانګړې توګه ) 11 .28 ( فرمول په لاندې ډول توضیح کیدی شي:

پیژند ۱۱ . ۳ : په ( 11 . 27 ) کی د دیترمینانت D لاندېدیترمینانت Aik لاندې هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چی د D دیترمینانت i- می لیکی او k - م درځ یا مټې د لرې کولو یا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي( زه د ماتریکس په دننه

ketabton.com - The Digital Library



---

کې دا لیکې او متې یا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پیښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه یې پسې لیکل شوې )

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کیدی شي چې د ۱۱ . ۲ دیترمینانت په دې فورم ولیکل شي

پیژند ۱۱ . ۴ :

د دریمی درجي دیترمینانت D لاندې، چې په (11 . 27 ) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پوهیدل کیږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زیاتون عملیي څخه، چې دلته نسبت د دوه ناپیژندونکو مساواتو ته چې دوه ناپیوندونکی لري، روښانه ده، د ( 11 . 26 ) څخه لاس ته راوړل کیږي:

$$Dx1 = D1 \,,\; Dx2 = D2 \,,\; Dx3 = D3 \qquad (11 . 29)$$

په داسی حالت کی چې Di داسي لاس ته راځي چې د ځله وونودیترمینانت ( 11 . 28 ) کی سړی i - م درځ یا ستن یا متېه د (11. 26 ) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; \ldots\ldots (11,30)$$

موږ دا نتیجه بې له ښوونې ورکوو.

له ( ۱۱ . ۲۹ ) څخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ ( د کرامر قاعده) :

که د ( ۱۱ . ۲۶ ) د ځله وونودیترمینانتو( ۱۱ ). ۲۷ ،په همدې ډول ( ۱۱ . ۲۸ ) لپاره

ketabton.com - The Digital Library



---

$D \neq 0$ ( 11 . 31 )

با وري وي ، نو ( ۱۱ . ۲۶ ) برابرونسیستم یواځنی حٔواب لري

$x3=D3/D \quad ;x2=D2\ /D \quad ; x1=D1/D$ (11,32

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $Di\ |= 0$ کم له کمه د یوه i ($i = 1,2,3$) لپاره وي، نو د ( ۱۱ . ۲۶ ) برابرونسیستم حٔواب نه لري ( په ( ۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D1 = D2 = D3 = 0$ وي، نو په ( ۱۱ . ۲۶ ) کی کم له کمه یو برابرون له ضرورته زیات دی او دا ( ۱۱ . ۲۶ ) برابرونسیستم کیدي شي چي د ۱۱ . ۲ . ۲ متودونو باندې حٔواب شي ( وړاندیز دئ چی د ګاوس الګوریتم له متود ; چی په ۱ . ۲ . ۴ برخه کی ورکړ شوي حٔواب شي.)

بیلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندې سیستم

I x1 -x3 = -2

II x1 +x2 -x3 = 0

III 2x1 - x2 = 0

کی دی

$$D=\begin{pmatrix}10-1\\11-1\\2-10\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}1-1\\-10\end{pmatrix}-0.\begin{pmatrix}1-1\\20\end{pmatrix}+(-1).\begin{pmatrix}11\\2-1\end{pmatrix}=-1-0-1.(-1-2)=2$$

$$D_1=\begin{pmatrix}-20-1\\01-1\\0-10\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1-1\\-10\end{pmatrix}-0\begin{pmatrix}0-1\\00\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}01\\0-1\end{pmatrix}=2;$$

$$D_2=\begin{pmatrix}1-2-1\\10-1\\200\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}0-1\\00\end{pmatrix}-(-2)\begin{pmatrix}1-1\\20\end{pmatrix}-1.\begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix}=4:$$

$$D_3=\begin{vmatrix}10-2\\110\\2-10\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}10\\-19\end{vmatrix}-0.\begin{vmatrix}10\\-10\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}11\\2-1\end{vmatrix}=6$$

ketabton.com - The Digital Library



---

نو يوائځنی ټاکلی ځواب موجود دی.

$x1=D1/D=2/2=1,\ x2=D2/D=4/2=2,\ x3=D3/D=6/2=3$

بيلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سيستم

$$\begin{array}{ll} I & x1 + x2 + x3 = 0 \\ II & x1 \quad -x3 = 0 \\ III & 2x1 + x2 \quad = 1 \end{array}$$

کي دی.

دا بيلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښايي ، چې اوبيونه نه شته ۰ دې ته بايد ګوته ونيسم، $D = 0$ او $D1= -1 \neq 0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوريتم

د ګاوس الګورتيم لومړی د ( ۱۱ . ۲۶ ) برابرونسيستم لپاره استعماليږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپيژندونکي لري او همدارنګه د زياتو مساواتو سيستم لپاره چې درې ناپيژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوريتم موخه په دې کې پرته ده چې ( 11 . 16 ) سيستم د ورته بدلونفورم له لارې په دريګوډيفورم را اوړي.

$$\begin{array}{lll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 & (11 . 34) \\ II & b22x2+b23x3=b2 & \\ III & c33x3=c3 & \end{array}$$

بنسټيز حالت : که $c11 \neq 0$, $b11 \neq 0$, $a11 \neq 0$ وي نو يو په بل پسی سړی کړی شي چې له III $x3$, او له II $x2$, وشميري. مګر په ( 11 . 34 ) کی ځانګړي حالتونه هم پيژندل کيږي:

-که $c3 \neq 0, c33=0$ وې، نو يو په ښتوالی يا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که$c3=c33=0$ وی، نو III له ضرورتزيات دی سړی يوائځی I او II څيړي.

- که$c33=c3=0$او برسيره پر دې $a11 \neq 0$, $b11 \neq 0$ وي، نو $x3$ په خوښه ټاکل کيدی شي او $x2$له II او $x1$ له I چې $x3$ ته اړ وي، شميرلکيدی شي ( ناپای ډير ځوابونه )

-برسيره پر دې که $b22=b23=0$ , $b2 \neq 0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چې $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$وي ، نو II له ضرورت زيات دی او له $a11 \neq 0$ کيدی شي چې $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي، او $x1$له I لاس

ketabton.com - The Digital Library



---

ته راځي چی x2 او x3 ته اړ (په واك کی یا تابع) وي ( ناپاي ډیر ځوابونه ځوابونه) .
که ټول ځلونه او د مساواتو ښی خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د ګاوس الګوریتموس د دریِ ناپیژندونکو( 11 . 26 ) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دئ
لومړی پل ( قدم) : نیسو چی په ( 11 . 2 6 )کی 0 =| a11 دی. دا د نمرې بدلولو په
بنسټ همیشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چی ټول aik = 0 وي) .
دلته I ورکول کیږي، او له II د I دا a21/a11 - ځله او له III دا a11 / a31 - ځله د I
کموي. ددې څخه لاندې سیستم لاس ته راځي:

$$\begin{array}{lr} \text{I} & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \\ \text{II} & b22x2+b23x3=b2 \\ \text{III} & c33x3=c3 \end{array} \quad (11 . 35)$$

دویم پل ( قدم ) : د b22 |=0 نیوني سره په 'II او 'III باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره
سم د ګاوس الګوریتم استعمالیږي : سړی 'II بي تغیره پریږدي اوله'III دا b32/b22-ځله
د 'II کموي، له دې راپیداکیږي

$$\begin{array}{lr} \text{I} & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \\ \text{II} & b22x2+b23x3=b2 \\ \text{III} & c33x3=c3 \end{array} \quad (11 . 37)$$

د ګاوس د شیما فورمالیتي سره سم بیا دا شکل غوره کي

| | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | a11 | a12 | a13 | a1 |
| II | a21 | a22 | a23 | a2 |
| III | a31 | a32 | a33 | a3 |
| II' = II-(a21/a11)I | | b22 | b23 | b2 |
| III' = III-(a31/a11)I | | b32 | b33 | b3 |
| III'' = III' - (b32/b22)II' | | | c33 | c3 |

x3 = c3 / c33

x2=(1/b22)(b2-b23x3)

x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)

ketabton.com - The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------------

بیلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سیستم ۰(مقایسه بیلګه ۱۱ . ۱۶)

I x1 -x3= -2

II x1 + x2-x3 = 0

III 2x1 -x2 = 0

د ګاوس الګوریتم سره په لاندې ډول حل کیږي

| | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 0 | -1 | -2 |
| II | 1 | 1 | -1 | 0 |
| III | 2 | -1 | 0 | 0 |
| II'= II - I | 0 | 1 | 0 | 2 |
| III'= III - 2.I | 0 | -1 | 2 | 4 |
| III'' = III' + II' | 0 | | 2 | 6 |

x3=6/2=3

x2=2…………………….

x1=-2+x3=-2+3=1

بیلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷ ( دا سیستم

I x1 + x2- x3 = 0

II x1 -x3 = 0

III 2x1+ x2 = 1

د ګاوس د الګوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کیږي

| | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 0 |
| II | 1 | 0 | -1 | 0 |
| III | 2 | 1 | 0 | 1 |

ketabton.com - The Digital Library



-------------------------------------------------------------------------------------

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| II'=II-I | 0 | -1 | -2 | 0 |
| III'=III-2.I | 0 | -1 | -2 | 1 |
| III''=III'-II' | 0 | 0 | 0 | 1 |

دلته دی "0 = 1 " تضاد. سیستم نه اوبی کیږي یا حل نه لري.

بیلگه ۱۱ . ۲۰: ( مقایسه یا پرتله بیلگه ۱۱ . ۱۷ ) دا سیستم

I $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

II $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

III $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$

په لاندې ډول د گاوس په الگوریتم اوبیونه ده

| | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 3 |
| II | 1 | 2 | 3 | 6 |
| III | 2 | 3 | 4 | 9 |
| II'=II-I | 0 | 1 | 2 | 3 |
| III'=III-2I | 0 | 1 | 2 | 3 |
| III'' = III'-II' | 0 | 0 | 0 | 0 |

$x_3 =$ په خوښه

$x_2 = 3 - 2x_3$

$x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - (3 - 2x_3) - x_3 = x_3$

## ۱۱ ۰ ۳ په خوښه ډیر مساوات ، په خوښه ډیر ناپیژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاینیز سیستم برابرونونو په لار ښونی پیل کوو m ( برابرون د nناپیژندونکو سره)

ketabton.com - The Digital Library



---

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1..................(11,37)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$
$$.....................................................$$
$$..........................................................$$
$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوښه یا ازاد پرېږدو چی د برابرونونو ګڼون ( تعداد) m د ناپیژندونکو n د ګڼون ( تعداد ) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرګندو دندو یا وظایف موږ دلته له څلور ناپیژندونکو څخه نه پورته کیږو او یوائی لاندې دوه متودونه څیړو

۱۱ ۰ ۳ . ۱ دn - م درجی دیترمینانت او د کرامر قاعده

پیژند ۱۱ . ۵ :
د n رییل ګڼونو aik یوه منظم سیستم n- م درجي دیترمینانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};........................(11,38)$$

لاندې سرِی لاندنی رییل ګڼ پوهیږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې دیترمینانت Aik د (n-1) - م درجی دیترمینانت ده، چی پاتیږي، که په Dکی i - مه لیکه اوk - م درځ ، مټه یا ستن ( لیکه او درځ چی aikپه کی ولاړ وی ) په کرښه لرې کړي یا کرښه پرې تیره کړي، یعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجی دیترمینانت شمیرل و- (n-1)-ام درجی دیترمینانت شمیرلو ته راتیتیږي .
په ځانګړي توره د څلورمی درجی دیترمینانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}\,etc$$

ketabton.com - The Digital Library



---

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو ) په ) 11 . 37 ( کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

$$Dx1=D1, Dx2=D2, ...Dxn= Dn \qquad (11 . 42)$$

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت ) ۱۱ . ۳۸ ( کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .
د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره ( پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰ )

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,43)$$

له(11 . 42 ) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ ( د کرامر Cramer قاعده):
د ځله ووني یا ضریب دیترمینانت (۱۱,۳۸) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په ( ۱۱ . ۳۷ ) د m = n سره) باوري دی

$$D |= 0 \quad \text{(اصلي حالت)} \qquad (44 . 11)$$

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري( حل لري

$$x1=D1/D, x2=D2/D, ..., xn=Dn/D. \quad (11 . 45)$$

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري .
که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیوني لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو )

بیلګه ۱۱ . ۲۱:
لا ندې سیستم دې حل شي

$$\begin{array}{lllll} I & x_1 & & +x_3 & = 0 \\ II & 2x_1 + x_2 & & +x_4 & = 0 \\ III & & x_2 & -x_4 & = 4 \\ IV & x_1 & -x_2 & -x_3 \; +x_4 & = -2 \end{array}$$

ketabton.com - The Digital Library



---

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&2\\0&1&0&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&0&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&2\\0&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&2\\4&1&0&-1\\-2&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&2\\4&1&-1\\-2&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&-1\\-2&1\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}4&1\\-2&-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&0&0&2\\0&4&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&2\\4&0&-1\\-2&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0&2\\0&4&-1\\1&-2&1\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}4&0\\-2&-1\end{vmatrix}+\left|2\begin{vmatrix}4&-1\\-2&1\end{vmatrix}\right|+2\begin{vmatrix}0&4\\1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&2\\0&1&4&-1\\1&-1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&4&-1\\-1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-1\\-2&1\end{vmatrix}+\left|2.\begin{vmatrix}1&4\\-1&-2\end{vmatrix}=4-2+2(-2+4)=6\right|$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&0\\0&1&0&4\\1&-1&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&0&4\\-1&-1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&4\\1&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4\\-1&-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}1&4\\-1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;\ x_2=\frac{-12}{-6}=2;\ x_3=\frac{6}{-6}=-1;\ x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چی د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغي له مخی څرګندولی شو چی کوم حل )ځواب( مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بیلګه څرګندوو

بیلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بیلګه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

ketabton.com - The Digital Library



| | x1 | x2 | x3 | x4 | Rs |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| II | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| III | 0 | 1 | 0 | -1 | 4 |
| IV | 1 | -1 | -1 | 1 | -2 |
| II'=II -2.I | 0 | 1 | -2 | 2 | 0 |
| 4III' = III | 0 | 1 | 0 | -1 | 4 |
| IV' = IV-I | 0 | 1 | -2 | 1 | -2 |
| III'' = III' - II' | 0 | 0 | 2 | -3 | 4 |
| IV'' = IV' +II' | 0 | 0 | -4 | 3 | -2 |
| IV''' = IV'' + 2.II'' | 0 | 0 | 0 | -3 | 6 |

x4 = -2
x3=1/2(4+3.(-2))= -1
x2=0+(-1)(-2)= 2......
x1 = -(-1) = 1 ...........

بیلګه ۱۱ . ۲۳:
دا برابرونسیستم

I x1 +x2 +x3 +x4=4
II x1 -x2 -x3 +x4=0
III 3x1 -x2 -x3 +x4=2

حل یا اوبیونه ی نه لري، لکه د ګاوس له شیما څخه چی لیدل کیږي:

| | x1 | x2 | x3 | x4 | RS |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |

ketabton.com - The Digital Library



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| II | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 |
| III | 3 | -1 | -1 | 3 | 2 |
| II' = II-I | 0 | -2 | -2 | 0 | -4 |
| III' = III-3.I | 0 | -4 | -4 | 0 | -10 |
| III" = III' - 2.II' | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 |

دلته "III پـه ښتوالی یا تضاد خوندي لري " 0 = -2 "

بیلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4

II x1 -x2 -x3 +x4= 0

III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4

IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10

V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چی oe1 ( ناپای ډیر) اوبیوني لري

| | x1 | x2 | x3 | x4 | RS |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| II | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 |
| III | 3 | -1 | -1 | 3 | 4 |
| IV | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |
| V | 3 | 1 | 1 | 3 | 8 |
| II' = II-I | 0 | 2 | - 2 | 0 | -4 |
| III'= III-3.I | 0 | -4 | -4 | 0 | -8 |
| IV' = IV -I | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| V' = V-3.I | 0 | -2 | -2 | 0 | -4 |

ketabton.com - The Digital Library



---

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| II"= II'+2.IV' | 0 | 0 | 2 | 6 | 8 |
| III'=III'+4.IV' | 0 | 0 | 4 | 12 | 16 |
| V" = V' +2.IV' | 0 | 0 | 2 | 6 | 8 |
| III''' = III"-2.II' | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V'''=V"-II | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

ګورو چې III''' او V''' تضاد نه لري. سړی کړي شي چې x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

له , $x3=4-x4$ II" له $x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4$ IV' او لهI

$x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4$

نو $x1=2-x4$ په خوښه x4 ټاکو

او $x2=-2+3x4$ ، په خوښه x4 ټاکو

او $x3=4-3x4$ په خوښه x4 ټاکو

یادونه : هغه کښ یا نوره هم ښه هغه ځلهووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي۰

سړی د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چې په III' او V' پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چې په II' اړه لرونکي دي. کیدی شو چې په III' او V' لیکو مو کرښه تیره کړې وی ) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځې له کرښی II' جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چې د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سیستم بلل کیږي

$$
\begin{aligned}
\text{I} \quad & a11x1+a12x2+a13x3= 0 \\
\text{II} \quad & a21x1+a22x2+a23x3= 0 \quad (11.\ 46 \\
\text{III} \quad & a31x1+a32x2+a33x3= 0
\end{aligned}
$$

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$$x1=x2=x3=...=xn=0 \qquad (11.\ 47)$$

که د ځلوونو د یترمینانت ( ۱۱ . ۳۸ ) لپاره 0 =| D باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

ketabton.com - The Digital Library



---

جمله ۱۱ . ۸ : يو هوموګين مساواتسيستم يواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري وي

بيلګه ۱۱ . ۲۵ :

دا هوموژين برابرونسيستم

I $x_1 + x_3 = 0$

II $x_1 - x_2 = 0$

III $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

د

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (1+1) \neq 0$$

له امله يواځنی ساده اوبيونه $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ لري.

بيلګه ۱۱ . ۲۶:

دا هموګين مساواتسيستم

I $x_1 + x_3 = 0$

II $x_1 + x_2 = 0$

III $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

د

له امله ناساده اوبنونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوريتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- يا باقي سيستم په معنا دی.

x1 x2 x3 RS

---

0 0 1 I 1

0 II 1 -1 0

0 III 0 1 1

---

II'=II-I 0 -1 -1 0

III' = III 0 1 1 0

---

II'' = II + III' 0 0 0 0

ketabton.com - The Digital Library



---

ګورو چې II"تضاد نه لري x3په خوښنه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I
ځخه لاس ته راځي x3-=x1نوx3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نوx3 په خوښنه

## . تمرينونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چې ورسره بلد يو-پوهيږو او يا هم

۱ – کرښيز مساواتسيستم له دوه مجهولو سره.
مشوره مو داده، چې د دې تمرينونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو ځخه کار اخستلس شي، چې بيايې و ازمايو. د لته دي د زياتون يا جمعي قانون او همداسي د ګاوس الګوريتم ته لومړيتوب ورکړ شي ا و د ديترمينانت سره شميرنه دې يوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$ b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$ d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$ b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$ d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$ b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

ketabton.com - The Digital Library



c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$ d) $4 + y = x$

$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$ $\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$
$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$
$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y} = 3$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ $\frac{15}{x}-\frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2}+\frac{3x_2}{2} = 3$ b) $\frac{2x_2-5x_1}{6}+\frac{x_1}{6} = \frac{x_2-2x_1}{3}$

$3x_1 + x_2 = 2$ $\frac{5-3x_1}{3}-\frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12}-\frac{3x_1-4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1+3x_2} - \frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$ d) $3(x_1-2)+4(2x_2+\frac{3}{2}) = 0$

$\frac{5}{3x_1-2x_2}+\frac{6}{4x_1+3x_2} = 5{,}25$ $5(x_1+3)-3(x_2-\frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1 + 4x_2 = 8$ b) $6x_1 - x_2 = 1$
$5x_1 - 2x_2 = 9$ $9x_1 + 2x_2 = 5$
$7x_1 - 8x_2 = 10$ $3x_1 - x_2 = 1$

c) $5x_1 - 3x_2 = -3$ d) $2x_1 - 3x_2 = 10$

$3x_1 + 5x_2 = 5$ $-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$

$3x_1 - 1{,}8x_2 = -1{,}8$ $x_1 - 1{,}5x_2 = 5$
$0{,}9x_1 + 1{,}5x_2 = 1{,}5$ $0{,}5x_1 - 0{,}75x_2 = 2{,}5$

## ۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x_1 + x_2 = a$ b) $3x_1 - 2x_2 = 5a$
$ax_1 - x_2 = b$ $2x_1 - 3x_2 = 5b$

ketabton.com - The Digital Library



---

c) $10x + 6y = 4a + b$, $6x + 10y = 4a - b$ d) $14x - 15y = 24a$, $10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2 - 4a^2}$, $\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2 + 2b^2}{4a^2 - b^2}$ b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$, $(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$, $\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$ d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$, $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$, $x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$ b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$, $2x + 3y = \frac{2a^2 + ab + 3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$, $a^2x - b^2y = a^2 + b^2$ d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$, $bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$, $x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$ b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$, $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$, $\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$ d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$, $x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

### ۱ . ۳ – شي شمیرنه

۱. ۳. ۱ کوم دوه اعداد لاندې خویونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع یا څلورئ کمون(تفریق) یې په ۱۰۰ لوییږي، په داسې حا لې چې ضرب یې په۳۲۵ زیاتیږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه یا زیاتون دومره لوی دی، لکه د تفریق مربع یې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د یا تفریق یې ۹۹ دی، وښایئ چې عددونه څومره لوی دي؟

ketabton.com - The Digital Library



۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګڼونو څخه هر یویې په 2 لویږي، نو ګڼونه ځانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونوڅخه 3 کم شي ، نو داسې لاس ته راغلي ګڼې ځان نیسي لکه : 3 : 2 . دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګڼونو شومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره ځل یا ضرب شي، نو د ځلونو زیاتون یې 2222 دی. هر یو له دې ګڼونوشومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دریکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پړیکشن یا پریوستون یې د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه شومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمخ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چې له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لرې دی نسبت و X ته ، دواړه مخ کلي X او Y له مرکز Z څخه شومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلي دیوال، چې 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځي اوږده د هوارې دننه په 100 m² زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه شومره لوي دي؟

ketabton.com - The Digital Library



---

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خوندي کوي او دوه وتللاري
لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او
دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي.
په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1 / 4
عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو
څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له
لمړي دري بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت
دي ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړي ۷ بوتله او له دوم دري
بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 الماني مارکه(DM )
کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود $450\ m^3$ اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی ( بیلر ) له دوه نلونو ډکیږي.
که لمړی نل دري دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي
کی $40\ m^3$ اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷
دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته $60m^3$ اوبه جریان لري. هر نل په یوه
دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه
یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یوځاي کار
وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم دري ورځي
کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 1 / 5 برخه د کار کړه کیږي. څومره
ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ اړتیا ولري؟

ketabton.com - The Digital Library



---

۱ . ۳ . ۱۶ . د يوې ګردې په چاپيري چې ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقيقي حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقيقې، که هغوي يو د بل په ځت لور حرکت وکړي، هر بدن په يوه ثانيه کی څومره واټن تی کوي يا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په يوه ګردې چې چاپېری يې ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانيوکی. د واړو بدنونو سرعت څومره دی، که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم ؟ ی ؟

۲

۲ . . کرښيز مساوات سيستمونه د درې مجهولو سره

۱ – مساواتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

a) $x + y = 14$, $x + z = 15$, $y + z = 16$

b) $x_1 - x_2 = 4$, $x_1 + x_3 = 18$, $x_2 - x_3 = 6$

c) $x_1 + x_2 = 6{,}6$, $x_1 - x_3 = 2{,}6$, $x_2 - x_3 = 2$

d) $x + y + z = 25$, $3x - 2z = 1$, $20y - 16z = 0$

e) $2x + 3z = 13$, $3x - 4y = 3$, $5y - 6z = 9$

f) $12x + 24y - 42z = 30$, $4x + 8y - 14z = 10$, $6x + 12y - 21z = 15$

g) $5x + 3y + 2z = 207$, $5x - 3y = 37$, $3y - 2z = 19$

h) $x_1 + x_2 - x_3 = 17$, $x_1 - x_2 + x_3 = 13$, $-x_1 + x_2 + x_3 = 14$

i) $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11$, $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$, $6x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 39$

j)
$$4x + 4\frac{1}{2}y - 6\frac{3}{4}z = 20$$
$$2\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z = 5\frac{2}{3}$$
$$1\frac{2}{3}x + 1\frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}z = 3\frac{1}{3}$$

k)
$$\frac{2}{5}x - y = 0$$
$$\frac{2}{3}x - z = 1$$
$$-\frac{2}{3}y + z = 2$$

۲ . ۲ – مساوات سيستمونه د ناټاکلو ضريبونو سره

a) $x_1 + x_2 = 2c$, $x_1 + x_3 = 2b$, $x_2 + x_3 = 2a$

b) $x_1 + x_2 = 2(a + b)$, $x_1 + x_3 = 2(a + c)$, $x_2 + x_3 = 2(b + c)$

c) $ax + by - z = 1$, $ax - by + z = b$, $-ax + by + z = a$

ketabton.com - The Digital Library



---

d) $ax + y - cz = 2a$
$-ax + y + cz = 2c$
$ax - y + cz = 2ac$

e) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

f) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{a}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{b}$

g) $x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a$
$y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b$
$z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$

h) $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a + b$
$\frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b + c$
$\frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c + a$

۳ . په خوبنه زیات مساوات د په خوبني زیاتو مجهولو سره

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 &= 1 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 &= 10 \\ 6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 &= 9 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 21 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 &= 19 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 &= -24 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 3 \end{aligned}$$

هوموجین مساوات سیستمونه:

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 20x_1 - 10x_2 + 15x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 9x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ketabton.com - The Digital Library

# ۱۲ . الجبري مساوات یا - برابرونونه

## ۱۲ . ۱ نالاینیز- یا ناکرښیز- یا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چې د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره یوارزښته ( اکویوالنت ) نه وي ، نالاینیز – یا ناکرښیز مساوات بلل کیږي او عمومي فورم یې په لاندې ډول دی

$$F( x ) = 0 \qquad ( 12 . 2 )$$

دلته F ( x) په x کې یوه ناکرښیزه یا ناخطي وېینه یا افاده ده . د ( 12 . 2 ) حل دا مانا لري چې ټول د xارزښتونه پیدا شي د کومو لپاره چې ( 12 . 2 ) باوري وي. باید په پام کې ونیول شي چې ایا یواځې رییل ارزښتونه پیدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چې پیدا کړو. د بیلګې په توګه لاندې ناکرښیز یا لاینیز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رییل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چې د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره یې مساوات باوري کیږي .ددې په څېټ یا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رییل ځواب نه لري ( ۵ -مه برخه دي وکتل شي)، بلکه لاندې ایماګینار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې ( ۱۵ برخه دې وکتل شي ) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړیکو ته پاملرنه وشي: اړیکو $y=F(x )$ ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

ketabton.com - The Digital Library



---

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندوني بولم( ښه نومه ونه يې اوښتوني ده) په څټ يا برعکس ( 2 . 12 ) يو ټاکنمساوات دی او x هلته يوه ناپيژندونکی يا اوښتونی دی.

د ( 2 . 12 ) برابرون يا مساوات اوبيوني يا حل ته د برابرون د F ( x ) صفرځای يا د مساوات F(x)=0 جذر يا ريښه هم وايي.

هغه برابرون يا مساوات چی په ( ۱۲ . ۲ ) فورم نه دئ ورکړ شوی کيدی شي چی په دې لاندې فورم واړول شي. د بيلګي په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$ او f(x)=g(x)

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راواړل کيږي

F(x)=f(x)-a.g(x)=0 او F(x )= f( x)-g(x)= 0

د نالاينيزو برابرونونو لپاره د لاينيزو برابرونونو په څير راغونډه (اختماميه، رابنده، راتړلی ) تيوري نه شته. په پوليزه يا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخی چی د صفرځاي معلوميدی شي. بايد په نومريکو ( numerischen Methoden ) متودونو يا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې يا تقريبي ډول پيداشي

نالاينييز برابرونونه په دوه ټولګيو ويشل کيږی: الجبري او تراسځندنت چی په دې او راتلونکی څپرکي يا لکه چی ما استعمال کړې برخه کی يی څيړو، چي اوبيونې يی روښانه افاده شوې ( explizit لاتين: واضح يا روښانه ، افاده شوی، اکسپليځت) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څيړل کيږي چی په لاندې نورمال فورم يا – بڼه اړول کيدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,3)$$

دلته په ( 2 . 12 ) کی يو نالاينيز بلواک يا – فنکشن ( F ( x د يوه n - م درجی پولينوم په څير مخ ته پروت دی . موږ په ( ۱۲ . ۲ ) کی د ضريبونو( ځله وونو) لپاره يواځی رييل ګڼونه پريږدو ( په دې مانا چي ځلونه يواځي رييل وي، يواځی رييل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

ketabton.com - The Digital Library



---

دا په ( ۱۲ . ۳ ) کې کيږ اړخ ته n - م درجه پولينوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 ..................(12,4)$$

ته ټول ريشنل ( - ريښتونی ) بلواک يا فنکشن هم وايي، ځکه چې د ريشنل شميرله عمليو زياتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واريابلی او ai د رييل ضريبونو، ځلونو يا فاکتورونو باندې د ويش کاروني کارولو (عملي استعمال ) له لارې منځ ته راځي .ټوليز برانرون يا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0 ..................(12,5)$$

کيدي شي په bn|= 0 ويش باندې په ( ۱۲ . ۳ ) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاينيزفنکشن يا ۰ بلواک ( F ( x په ( ۱۲ . ۲ ) باندې په واريابلي يا اووښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمير کاروني يا عمليي او بالاخره دويش کارونه وکارول شي يا اجرا شي او رييل پارامتر (Parameterپه شميرپوهنه کې ثابت (همغۀ او يا مرستندويه لوي ده) تشکيل شي نو فنکشنونو ته بيا مات ريشنل فنکشنونه ويل کيږي. دا تل د دوه پولينومونو يا ريشنل فنکشنونو د ويش په څير انځوروړ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ..........................(12,7)$$

تل په ( ۱۲ . ۵ ) يا ( ۱۲ . ۳ ) برابرون اړول وړ دي . دا بايد په پام کې وي چې د (۱۲ . ۳ ) لپاره يواځنی هغه ځواب په پوښته کې راځي، د کوم لپاره چې باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چيرې د نالاينيزبلواک يا - فنکشن جوړولو کې د ريشنل شميرعمليو تر څنګ د توان ( متې، په جګ) يا پوتنځ کول او جذر نيولوته هم اجازه ورکړل شي نو بيا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږيږ. يعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ويل کيږي او ( ۱۲ . ۲ ) برابرون بيا الجبري برابرون بلل کيږي ، دا ډول مساوات هم کيدی شي چې په ( ۱۲ . ۳ ) فورم واړول شي.

هره n - مه ريښه يا جذر $\sqrt{G(x)}$

ketabton.com - The Digital Library



---

د ( G( x افادې یا ویینې له منځه وړل کیدی شي, که چیرې ځوك دا برابرون په یوه خوا راوړي او بیا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي یا د n پوتنځ یا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په څرګندو یا معلومو بیلګوڅیړل کیږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځیرنه د ( ۱۲ . ۳ ) فورم برابرونونو ته راکښته کیدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابرون هم بلل کیږي. ټول نالاینیز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسځیندنت برابرون بلل کیږي . د ترانسځیندنت رابرونونو درې تیوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاریتمي برابرونونه ، او ګونومتریکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر څیړني لاندې ونیول شي.

## ۱۲ . ۲ څلوری(مربع-) مساوات په توان( مټ، جګ) د ۲

### ۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاینیزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان یا مټ ( په جګ ۲ هم ویل کیږي ) برابرونونه دي چی څلوری یا مربع برابرونونه بلل کیږي .د دې تولیزه بڼه ( عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; ............................(12,8)$$

په b2 یي ویش په لاندې ډول یو ورته ارزښته ( اکویوالنت äquivalent ) نورمالبڼه یا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_b; a_0 \neq b_0 / b_2); ............................(12,9)$$

ددې حل د څلوری پوره کونې یا مربعتکمیل څخه په ګټه د بینوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a / 2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a^2{}_1}{4}; ......................(12,10)$$

په دې ډول کیدی شي چی ( ۱۲ . ۹ ) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$$x^2+a1x+a0=(x+a1/2)^2+a0-a1^2/4 = 0 <=>$$

ketabton.com - The Digital Library



---

$$[x+a_1/2]^2=(a_1^2/4)-a_0 \qquad (12,11)$$

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2>4a_0 \quad (12,12)$$

نو دوه امکانات شته دی، چی ( ۱۲ . ۱۱ ) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots\ldots\ldots(12,13)$$

یا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots\ldots\ldots(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د ( ۱۲ . ۱۳ ) او همداسی د ( ۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹ ) برابرون لاس ته راځي ( په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بینا تل نا کمیز یا نامنفي ګڼ پوهیدل کیږي، چی څلوری یا مربع یی a ده ) . له ( ۱۲ . ۱۳ ) په همدې ډول له ( ۱۲ . ۱۴ ) څخه رییل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots\ldots\ldots(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم لیکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots\ldots\ldots(12,16)$$

په ( ۱۲ . ۹ ) کی د ( ۱۲ . ۱۵ ) په همدې توګه ( ۱۲ . ۱۶ ) ځاي پر ځاي کولو څخه پوهیدل کیږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2
په رینتونی څلوری برابرون یا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2=4a_0;\ldots\ldots(12,17)$$

د ( ۱۲ . ۱۶ ) له لارې تیك یو رییل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a\ \ /2;\ldots\ldots\ldots\ldots(12,18)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

په ( ۱۲ . ۱۵ ) همداسی په ( ۱۲ . ۱۶ ) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیوني ( ۱۲ . ۱۸ )ځخه غږیږو.

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو ( ۱۲ . ۱۱ ) همداسی ( ۱۲ . ۹ ) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی ځخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};...................(12,20)$$

له دې ځخه هم چی په ( ۱۲ . ۹ ) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په ( ۱۲ . ۱۹ ) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};...................(12,21)$$

نو لاندې جمله ىی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: ( د ځلوری یا مربع ) په توان یا جګ د ۲ ) برابرونونو د اوبیوني فرمول ) د ځلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) x²+a1x+a0=0

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټیك دوه ځوابونه لري

د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره( ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساواتو لپاره ښوول کیدی شي

ketabton.com - The Digital Library



---

جمله ۱۲ . ۲ ( د وییتا( Vieta)جمله ) :

که x1 او x2 د څلورئ - یا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹ ) همداسی د ( ۱۲ . ۸ ) اوبیوني وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2; ............................(12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); .....................(12,23)$$

حل : ( ۱۲ . ۲۳ ) فرمول په دریواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې څخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د ( ۱۲ . ۲۲ ) فرمول د تصدیق لپاره د بینوم دریم فرمول او $i^2 = -1$ استعمال څخه په په ( ۱۲ . ۱۲ ) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په ( ۱۲ . ۱۹ ) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

ketabton.com - The Digital Library



---

د وييتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کيري يا تصديقيري

جمله ۱۲ . ۳ :

يو ۲ درجبيز پولينوم کيدی شي چی په دوه لايني فاکتورونو يا ضريبونو يا ځله وونو بيل يا ټوټه يا تجزيه شي:

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2);..................(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = b_2(x - x_1)(x - x_2);..................(12,25)$$

چيرته چي x1 او x2 د ځلورې برابرونونو يا مربع مساواتو ( ۱۲ . ۹ ) په همدې ډول د ( ۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبيونه : له ( ۱۲ . ۲۲ ) ، ( ۱۲ . ۲۳ ) څخه د ( ۱۲ . ۹ ) همداسی د (۱۲ . ۸ ) په پام کي نيولو سره لرو

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + a_1x + a_0 =$$

$$= \frac{1}{b_2}(b_2x^2 + b_1x + b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ څخه دې ته راځول کيږو چی د ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت کی د دوه برابره ريبل اوبيو څخه خبرې وکړو( وغږيږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0;..................(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲ ) .( ۱۲ . ۱۷ ) او ( ۱۲ . ۱۹ ) کيدی شي چی د فنکشن

$$y = p_2(x) = x^2 + a_1x + a_0$$

ځيرو يا شکلونو ( ګراف ) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټيزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که xهرڅومره کوچنی شي )که x د کميز ناپای په جګ يا توان شي ) اوهمدارنګه x هرڅومره لوي شي ( که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوييږي ( ستريږي يا غټيږي) ، ځکه چیx² نسبت و x ته په توان يا قوي جګيږي له ټولو پولو( yد ناپای لور ته ځي)٠ د دې ډول پولو کره پيژند يا تعريف په ۱۹ - برخه کي لوستل کيدی شي.

ketabton.com - The Digital Library



---

په ( ۱۲ . ۱۲ ) حالت کی د x - محور په داړو ریيلو ځایونو x1 او x2 کی غوڅيږي؛ په ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت کی په x1 = x2 ځای کی يي لمسوي او په ( ۱۲ . ۱۹) حالت کی ګډ ټکي ورسره نه لري یا نه وررسيږي ( پرتله خيره . ۱۲ . ۱)

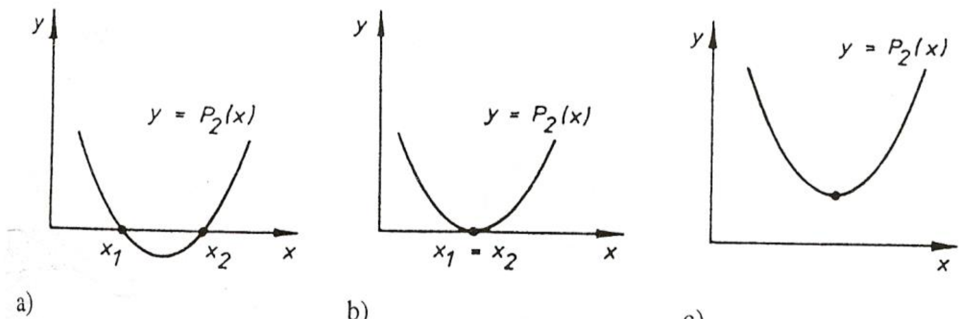



Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، ( ۱۲ . ۱۹ ) سره مناسبو بيلګو روښانه شي.

بيلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

$a1 = - 1 , a0 = -6$ او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله ( ۱۲ ، ۱۲ ) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی یاتعقيب څخه باوري کيږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3-2) = -1$$

ketabton.com - The Digital Library



---

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت مخ ته لرو ۰ دوه ئیز رییل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱
څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1 = x2 = 2$

جمله ۱۲ . ۳ :
په لاندې ډول باوري کیږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x\ +x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$ ,$a0=13$او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت ( ۱۲ ، ۱۹ ) مخ ته لرو.

د کونیوګیرت( کنجوګیري) کمپلکس جوړه اوبیونو یا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په
لاندې بڼه یا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\big)4-13=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$$
$$\Rightarrow x\ =2+3i;x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x\ =(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

ketabton.com - The Digital Library



او د جملی ۱۲ . ۳ له مخې داسی دئ

$$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸ ) همداسی ( ۱۲. ۹) اوبی په ښکاره ډول ساده کیږي، که یو ځلی a0 اویا a1 ورك شي:

د $a0 = 0$ لپاره لرو $x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$

د $a1=0$ لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

## ۱۲ . ۲ . ۲ څلوری(مربع-)برابرون چی په نورمالبڼه

مخ ته نه دي پراته

که یو مربع مساوات په نورمال فورم ( ۱۲ . ۹ ) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو باید په دې بڼه واړول شي.

بلیګه ۱۲ . ۴ :

$$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$$

$$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$$

$$-x^2-2x-4=x^2-8x$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$

$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول یا ناپیژندلی یا اوړیدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو باید په صفر ویش ناممکن یا ناشونوالی په پام کي ونیول شي.

بیلګه ۱۲ . ۵ :

ketabton.com - The Digital Library



---

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$
تيك هلته مانا لري، چې وي $2x^2+2x-4\ |=0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کيږي او بيا ازمائل کيږي، چي ايا د ماتلاندې شرايط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$
$$-x^2 = -4$$
$$x_{,2} = \pm 2; x = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پيل برابرون اوبی دی

## ۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانګړي برابرونونه ، چی په څلوری یا مربع برابرونونو بيرته بدليدلی شي

د n - مي درجی مساواتو( ۱۲ . ۳ ) يو څو ځانګړي حالتونه کيدی شي چی د څلوری برابرونونو يا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي يا اوبی شي۰ دا ځانګړی حالت موجود دی يا شته دی که باور ولري

$a_1 = a_1 = ... = a_{n-3} = 0$ ( 12 , 27 )

دn- می درجی برابرون بيا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0;.........................(12,28)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$
$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0;................(12,30)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

یادونه : په پورته کې له ( ۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹ ) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون یو څلورئ - یا مربع برابرون دی، چی د جملي ۱۲ . ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی یا حل لري $x = 0$ چی دا ( n-2 )- ځله رامنځ ته کیږي $x3 = x4 = ... = xn=0$

بیلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبیونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; ....................(12,32)$$

یو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون ( ۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ یا جفت - وي

$$n = 2k \qquad (12 . 33)$$

او فقط ( تیك) ځله وونې یا کوایفیڅینتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; ....................(12,34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; ............................................(12,35)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

او له دې سره د y لپاره څلورې برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12, 36)$$

د لاندې ځوابونو سره ( پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k/2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0};.....................(12,37)$$

د( ۱۲ ، ۳۵ ) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1;.........................(12,38)$$

ټولې اوبيونې وخيرلی شي، چی د $k = 1$ لپاره ساده دی، د $k = 2$ لپاره( بيکوادرات برابرون) ( د څلورې څلورې يا د مربع مربع ) يا د ريپلو y1 او y2 لپاره د تراوسه څرګندو ميتودو سره تل کيدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټوليزه توګه ستونځی لري.

بيلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بيکوادرات برابرون $x4 + 5x^2 - 6 = 0$ کيدی د سوبستيچيوشن يعني بدلون له لارې $y = x^2$ په څلورې برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چی د بيرته بدلون( -سوبستيچيوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 , x^2 = -9$$

لاندې اوبی يا حل لري

$$x1 = 2 , x2 = -2 , x3 = 3i , x4 = -3i$$

ketabton.com - The Digital Library



## ۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسیستمونه چی بیرته په ځلوری برابرونونو بد لید لی شي

یوه د نالاینیزو مساواتسیستمونو لړۍ کیدی شي چی په ځلورۍ برابرون یا مربع مساواتو بیرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بیلګي راوړو.

بیلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$
$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کیږي، $y = 1-x$، او دا حل په دوم برابرون کی اینوول کیږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$
$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$
$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4+6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$
$$x = 3, x_2 = -2$$

د ( ۱۲ ، ۴۰ ) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2, \ y2 = 3$$

نو دا نه لاینیز برابرون لاندې اوبیونې لري

$x1 = 3, y1 = -2$ او $x2 = -2, y2 = 3$

بیلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سیستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

ketabton.com - The Digital Library



---

چې یواځې د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وریا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو( ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کیږي:

$$y + x = xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کیږي

$$y = 1 - ax \qquad (12, 43)$$

او په ( ۱۲ . ۴۲ ) کی ایښول کیږی یا ځای په ځای کیږي

$$1 - ax + x = x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2 - ax + 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی ( ۱۲ . ۴۴ ) برابرون مخامخوالی لري یا په ښتوالی لري یا تضاد لاس ته راکوي » $1 = 0$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴ ) ښخه لاس ته راځی $x^2 - x + 1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \text{.........................}(12.45)$$

لپاره مو ( ۱۲ . ۱۲ ) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه باید په پام کی ونیول شي:

د $a > 0$ لپاره له ( ۱۲ ، ۴۵ ) ښخه لرو , $a > 4$ او د $a < 0$ لپاره له ( ۱۲ ، ۴۵ ) ښخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \qquad (12, 46)$$

لپاره د ( ۱۲ ، ۴۴ ) دوه مختلف ریل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{.....................}(12.47)$$

په دې پوروې د ( ۱۲ ، ۴۶ ) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{.................}(12.48)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

باید وازمایيل شي چی د ( ۱۲ ، ۴۶ ) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول ) نابرابر په صفر دي . تل 1 /2 < x1 دی. که x2 = 0 وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هیڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی

که y1= 0 یا y2 = 0 وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم لرو $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$

په ( ۱۲ ، ۴۶ ) حالت کی د ( ۱۲ ، ۴۱ ) د ( ۱۲ ، ۴۷ ) ، ( ۱۲ ، ۴۸ ) سر ه سم، دوه

مختلف ریيل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي

x1 , y1 او . x2, y2

د

1/4-1/a=0 <=> a=4 ( 12 , 49 )

لپاره( ۱۲ ، ۱۷ ) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون ( ۱۲، ۴۴ ) ډبل ریيل حل لري

x1 = x2 = 1 /2 (12,50)

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳ ) له مخې هغه y - ارزښت ډبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

y 1 = y2 = 1 - 4. (1 /2) = -1

د ( ۱۲ ، ۴۹ ) په حالت کی پس د ( ۱۲ . ۱۹ ) یو ریل، ډبل ګڼلی حل موجود دی

x1=x2=1/2 , y1=y2= -1 ( 12 , 51 )

د

1/4-1/a < 0 <=> 1/a > 1/4 ( 12 , 52 )

لپاره ( ۱۲ ، ۱۹ ) حالت مخ ته پروت دی. د a > 0 لپاره ( ۱۲ ، ۵۲ ) د a<4 کتمټ (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کتمټ دی ( له دې امله په ښتوالی یا تضاد ) .

نو د( ۱۲ ،۵۲ ) باور لري، د

0 < a < 4 ( 12 , 53 )

ketabton.com - The Digital Library



---

لپاره . په دې حالت کې ( ۱۲ ، ۴۴ ) کونجوګيري کمپلکس اوبيونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\ x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12.54$$

د ( ۱۲ ، ۴۳ ) له مخې په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\ y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \ldots\ldots\ldots\ldots (12,55)$$

له دې ارزښتونو هيڅ هم صفر کيدی نه شي .پس په يوځاي شوي يا راټوله توګه لرو:
برابرونسيستم ( ۱۲ ، ۴۱ ) د a = 0 لپاره اوبی نه لري، د a < 0 په همدې ډول a > 4 لپاره دواړه ريل اوبي ( ۱۲ ، ۴۷ ) ، ( ۱۲ ، ۴۸ ) ، د a = 4 لپاره رييل ډبل ګنلي اوبۍ ( ۱۲ ، ۵۱ ) او د 0< a <4 لپاره دوه کونجوګيري کمپلکس اوبي ( ۱۲ ، ۵۴ ) ، ( ۱۲ ، ۵۵ ) لري.

## ۱۲ . ۳ دريمه درجه مساوات يا - برابرونونه

ددې لپاره چې په زړه پورې n- ( ام ( درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سيستم جملو ته ورته جملې د دريمې درجې مساوات لپاره ځيړو.
د دريمې درجې مساواتو نورمال فورم په د ( ۱۲ . ۳ ) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولينوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad ( 12 , 57 )$$

لاندې بنستيز خويونه لري: که x ډير لوي شي يعني ناپای په لور لاړ شي $x \to \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چې د$x^3$ ارزښت نسبت د $x^2$ ارزښت ته په بيړه جګيږي او بيا همداسې و x ته هم . که a1 او a2 کميز يا منفي هم وي نو y به د لويو x- ارزښتونو لپاره زياتيز يا مثبت وي. داچې $x^3$ د کميز x - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول

$$x\to -o \text{ د } y \to -o$$

لپاره .د دې ډول »پولوارزښت يا ليمس« لپاره کره تعريفونه بيا په ۱۹ برخه کې په پراخه توګه څيړل کيږي .د يو-x ارزښت ) خورا کوچنی هم کيدی شي ( شته چې د هغه

ketabton.com - The Digital Library



---

لپاره $0 < y$ وي اود یو x - ازښت ) چی خورا لوي هم کیدی شي ) ، د کوم لپاره چی $y>0$ دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ باید د مساوات ( ۱۲ . ۵۶ ) یو ریښه اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلګو کی سړی کړی شي چی په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائیلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توګه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلګی:

بیلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 -4x + 12 \qquad ( 12 , 58 )$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$X = 0 , 1 , -1 , 2$

$Y = 12 , 6 , 12 , 0$

په دې توګه یو ریښه صفرځاي پیدا شو

$$x_1 = 2 \qquad ( 12 , 59 )$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شیما په بنسټ یو متود ورکړ شي ، دکومی له لارې چی بیا د مټ( توان= لوړولو ته اړتیا نه پیدا کیږي او پولینومونو د فنکشن ارزښت ساده پیدا کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 +(11 / 2) x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad ( 12 . 61 )$$

د صفرځاي پیداکولو لپاره دې د ( ۱۲ . ۶۰ )مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي )ترتیب شي وشمیرل شي (، ځکه چی هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$X = 0 , 1 ,1 / 2$

$Y = -9 , 16 , 0$

نو

$$x_1=1/2 \qquad ( 12 , 62 )$$

ketabton.com - The Digital Library



---

د مساوات ( ۱۲ . ۶۰ ) په همدې ډول ( ۱۲ . ۶۱ ) يو رېيل صفرځای دی

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12, 63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3

Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لارې لاندې رېيل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12, 64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \qquad (12, 65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1

Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12, 66)$$

په ټولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چې د دریم درجې برابرونسیستم ( ۱۲ . ۵۶ ) لپاره تل يو رېيل اوبې یاحل $x1$ شته دی. دا يو واقعيت دی چې بي له شووني يی لیکو، چې دا پولینوم ( ۱۲، ۵۷ ) بي له پاتې په لاینیز فاکتور ( $x - x1$ ) ویشل کیدی شي او يو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسې دی

ketabton.com - The Digital Library



---

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دريمه درجه برابرون ( ۱۲ . ۵۶ ) کم له کمه يو رييل اوبى x1لري او دا لاندې باورې دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0); .............(12,67)$$

دلته نو بيا نور د دريمي درجي مساواتو ( ۱۲ . ۵۶ ) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلورۍ برابرون يا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبى شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کيدی شي چی لاندې جمله فرمولبندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دريمه درجه برابرون درې اوبيوني يا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad ( 12 , 68 )$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - درې رييل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی ( موجود دي)

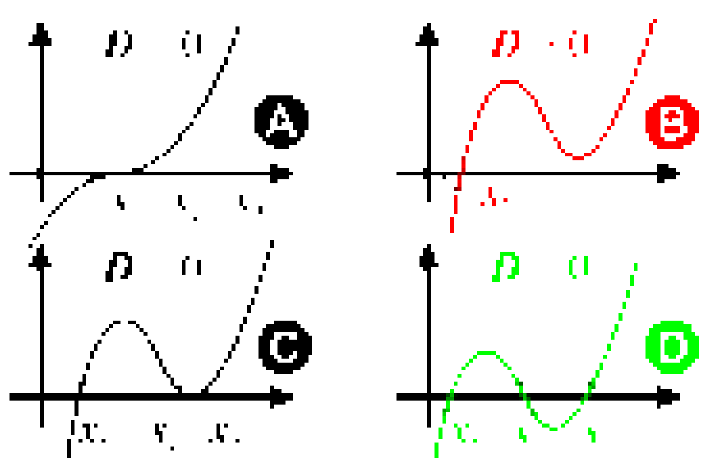
۲ - يو رييل حل x1 او ددې سره مختلف يو ډبل رييل حل x2=x3شته دی .

۳ - يو رييل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - يو رييل حل x1 او يوه جوړه کونجوګيرت کملکس اوبيوني يا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څيره د ټولو راشنل فنکشنونو( ۱۲ . ۵۷ ) تيپيکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښايي



ketabton.com - The Digital Library



---

د ( ۱۲ . ۶۸ ) فرمول په مرسته د بنې اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کېدی شي د دریمی درجي پولینومو لپاره د وییتا جمله تصدیق کړي چې د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که $x1 , x2$ او $x3$ د دریمي درجي برابرون ( ۱۲ . ۵۶ ) اوبیونې وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$

$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$

$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړو$x2$ او $x3$ اوبیونې ولټول شي.

بیلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

( ۱۲ . ۵۸ ) برابرون د ( ۱۲ . ۵۹ ) برابرون له مخی $x1 = 2$ حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . . ۴ ۲ . برخې له مخې د پارشل Partial- (ټوټه-( ویش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$..\underline{x^3+2x^2}$$

$$........-x^2-4x+12$$

$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$

$$..............-6x+12$$

$$..............-6x+12$$

له $x^2 - x - 6 = 0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm 5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

ketabton.com - The Digital Library



---

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو ریيلو ځوابونو سره

، $x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$

او داسی دئ:

$$x^3-3x^2-4x+12 = (x - 2)(x-3)(x + 2)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰ ) برابرون د ( ۱۲ . ۶۲ ) برابرونونو له مخی اوبی

$x1 = 1 / 2$

لري او داسی دئ:

$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا ( □ ) له $x^2 +6+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه ریيل حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل ریيل حل سره، یعنی لرو , $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دئ

$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

( ۱۲ . ۶۳ ) برابرون د( ۱۲ . ۶۴ ) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$

له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسی دئ

$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

ketabton.com - The Digital Library



---

بیلګه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵ ) برابرون د ( ۱۲ . ۶۶ ) برابرونونو له مخی ځواب x1 = 1 لري، او داسی دی

$$( x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملی ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه ریښل حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) \qquad =(x-1)(x^2-4x+13)$$

## ۱۲ . ۴ د ریښی (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کی د ریښی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرګند شو چی څنګه د ریښی برابرون په ریښنل برابرونو اوله دې سره n- می درجي برابرونو بدلیدلي شي٠ دا دې دلته د بیلګو په څیر پاتي وي. یواځي ریښل اوبیونې به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :

د ریښي برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4}=16;..........................(12,72)$$

ډیر ساده کیدی شي چی په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4}=9; \sqrt{2x+4}=3; 2x+4=9; 2x=5; x=5/2;........(12,73)$$

د ازمایلو لپاره که ( ۱۲ . ۷۳ ) برابرون په ( ۱۲ . ۷۲ ) برابرونونو کی خوندي شي، نو څرګندیږي چی دا دx-ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4}=7+3.3=16$$

ketabton.com - The Digital Library



---

بیلګه ۱۲ . ۱۵:

د ریښی برابرون یا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0;..........(12,74)$$

کیدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3;.........................(12,75)$$

د ازمایني لپاره، که ( ۱۲ . ۷۵ ) د پیل په برابرون ( ۱۲ . ۷۴ ) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون ( ۱۲ . ۷۴ ) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره یا په دې تعقیب د پیل برابرون ځواب نه لري.) داسي کیدی هم نه شي، ځکه چي تل $2x + 19 > 0$ دی)۰

دا ساده بیلګی موږ ته را ښایي چي باید د ریښی مساواتو حل تل وازمایل شي چی ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیږدي چی ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمایلو لپاره نه دئ چي ګوندې تیك یا صحیح شمیرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب یو اړیین سما ندیز پل یا ضروری منطقي پل دئ .

په ټولیزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f(x) = g(x) \qquad (12, 76)$$

په یو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x) = G(x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي ، یا تری کم شي، یاداوړه خواوې په یوه ګڼ ځل ( ضرب ) شي او یا وویشل شي ( په دې حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ریښی لاندې راشي او یاپه توان پورته شي نود پیل برابرون ( ۱۲ ، ۷۶ ) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په ښټ ( برعکس، مخامخ). کیدی شي چی اړول شوی برابرون ( ۱۲ . ۷۷ ) زیات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابرون ( ۱۲ ، ۷۶ ) ته . دا به په لاندې بیلګه کي روښانه شي.

ketabton.com - The Digital Library



---

بیلګه ۱۲ . ۱۶:

د ریښې یا جذر برابرون یا مساوات

$$x-x-1=2x-1 \qquad (12.78)$$

څلوری یا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

$$x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,$$

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بیا څلوری یا مربع کولو سره سړی یو مربعمسوات لاس ته راوړي

$$x(x-1) = 0 \quad (12 , 79)$$

چې لاندې اوبی یا ځواب لري :

$$x1 = 0, x2 = 1 \qquad (12 . 80)$$

دا د ( ۱۲ . ۷۹ ) اوبیونې دي، مګر باید و ازمایل شي چې ایا دا د ( ۱۲ . ۷۸ ) اوبیونې هم دي که نه.

د x = 0 لپاره په ( ۱۲ . ۷۸ ) کې دوه ریښې نه دې تعریف یا ددوه ریښو پیژند نه شته، نو x = 0 د (۱۲ . ۷۸ ) اوبیونه نه ده .

د x = 1 لپاره لاس ته راځي 1 - 0 = 1

له دې امله x = 1 د پیل بیلګې ( ۱۲ . ۷۸ ) یوګونی ځواب یا اوبی دی .

بیلګه ۱۲ . ۱۷:

د ریښی برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,............(12,81)$$

کیدی شي چې په ورته ډول لکه ( ۱۲ . ۷۸ ) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} \Rightarrow$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;.........(12.82)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

دا برابرون یا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, ................(12,83)$$

د ټولونورو x لپاره $x^2-4x+3|= 0$ دی ، او ( ۱۲ . ۸۲ ) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2 - 7x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x3 = 0, x4 = x1 = 3$$

او په ( ۱۲ . ۸۱ ) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پيل برابرون ډکوي.( باوري کوي، پوره کوي )

د $x = 3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله $x = 3$ د پیل برابرون یا مساوات ( ۱۲ ۸۱ ) اوبی یا حل دی . د

$x3 = 0$ او $x2 = 1,$

لپاره ریښي پيژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون ( ۱۲ . ۸۱ )

اوبی حل $x = 3$ ( 12 . 85 )

یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدټاکلو ضربیونو سره

1.1.1. a) $x^2 - 4 = 0$ b) $3x^2 + 27 = 0$

c) $x^2 - 9x = 0$ d) $5x^2 = 125\,x$

1.1.2. a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$ b) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

c) $(x - 6)(x + 5) = 0$ d) $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

ketabton.com - The Digital Library



1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سیتم، کوم مو مربع مساوتو ته لاربښودوي یا بیایي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

ketabton.com - The Digital Library



---

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$ b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مي درجې ځانګړي مساوات، چې‌په مربع مساوات بیرته اړول کیدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو یا معلومو ضریبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو یا نامعلومو ضریبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a - b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a + b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مي رجي مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$ b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$ d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندي مساوات هم د xاو هم د a پسي حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$ b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$ d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګڼونه ځان داسې نیسي لکه 3 : 1 . ددې ګڼونو د مربع زیاتون ۱۵۶۰ دی. دا ګڼونه څه نومیږي؟

ketabton.com - The Digital Library



ب ) د درې یو په بل پسې گڼونو د لوي گڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنیوگڼونو د مربعو زیاتونونږ. دا گڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟
پ ) د کوم مثبت گڼ لسرځله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟
ت ) مات 1 /4 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزیه کړی، چې لاندې زیاتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ یې لاس ته راشي.

۶ . ۲ . الف ) په یوه برابر برقجریان کی مقاومت په دیرش اوم $30\ \Omega$ لوییږي، په کوم کې چې د برققوه په همغه د 220 V ( وولټه ) شپانونگ په پنځه امپیر ( 1,65A ) کوچنی‌شي . مقاومت او برققوه څومره دي؟
ب ) دوه سیخونه چې مقاومت یې $60\ \Omega$ یو له بل توپیر لري، یوه د غبرگ چالانولوعمومي مقاومت $22,5\ \Omega$ کړي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

۶ . ۳ . الف ) یوه د بایسکلځغلونی لار چې ۲۲۵ کیلو متره اوږده ده، د یوه موادو موټر څخه په درینیم ساعته لنډ وخت کې وهل کیږي،چې د موټر په منځنی سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بایسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بایسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دی؟
ب ) د سپورت جشن کې یو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپیل څخه یونیم ساعت وروسته له یوه بایسکلسپورتي څخه وروسته کیږي، کوم چې له مخامخ کیدو, نیم ساعت وروسته B ته رسیږي، او سملاسي بیرته گرځي او په همغه وخت کې A ته رسیږي په کوم کې چې ځغاستی و B ته رسیږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لرې ده؟
پ ) دوه ډېډبي ځغاستي یوبل باندې نیغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور په ډېډبیو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانیه کی، دوم څلور متره په ثانیه کی دی دوي له ۳ ثانیو وروسته یو ۳۵ متره لریوالی یو له بل لري، دوي یو

ketabton.com - The Digital Library



---

له بل په سرچينه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لروده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت ) د ګاډي يو لاين د موټرځغاست سرك لمړی برخې سره غبرګ غزيدلی. د يوه موټر ځغاستې پيل کې د يو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشينونه په همغه ځګوالي دي، که موټرځغاستی منظم تعجيل او يو تعجيل د $10m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72\ km/h$ دی؟

ټ ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لايپخيږ ښخه د ديساو په لور بايسکل ځغليدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له ديساو ښخه د لايپخيږ په لور راتلونکی بايسکل ځغاستی سره مخامخ کيږي. ورستنی ۱۰۰ دقيق د مخه ديساو ته راځي لکه دوم ولايپخيږ ته. د ديساو او لايپخيږ ترمنځ لرېوالی يا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف ) په ولاړنجيز دريګوډي کې ، کاتيتې ځانونه داسې يوبل سره نيسي لکه 3:4 ، هيپوتينوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتيتې څومره اوږدې دي؟

ب ) د يوه ولاړکونجيز دريګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتيتو زياتون يي۱۷ سانتيمتره اود يوې کاتيتې او هيپوتينوزې زياتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ ) د يوه سمکونجيز ( ولاړکونجيز ) دريګوډي کاتيتې څومره لويې دي، که د هغوي زياتون ۴۲ سانتيمتره وي ، د دريګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت ) د يوه ولاړګوډي نيمی ( قطر ) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نيمي اوږدوالی ۱۰ سانتيمتره لويږي. د سمکونجيز اړخونه څومره لوي دي؟

ketabton.com - The Digital Library



---

ت ) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري.
د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاړ اړخ)

ټ ) د یوې کردې وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په کرډې کې دننه ځای مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا ځوندي مربع اړخ)

ج ) د یوې کردې نیمی باید څومره لوي، که ډه دننه منځشوې مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح ) که د یوې کردې نیمی ( قطر ) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د کردې هواره دوه برابره کیږي. د کردې سرچینې نیمی څومره لویه ده؟

خ ) د یوه نیمغونډې نیمی څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشه کې یې ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د دریمې او څلورمې درجې مساوات

2 . 1 a ) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$   b ) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c ) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$   d ) $x^3 + x - 2 = 0$



2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$   b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$   d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې د لاندې مساالتو حلونه یا اوبیونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازماېښت وکړئ!

۳ . ۱ – ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا ځلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$   b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

ketabton.com - The Digital Library



---

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\frac{4}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\frac{\sqrt{x}-3}{7}-\frac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\frac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\frac{16-\sqrt{x}}{2}-\frac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\frac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\frac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\frac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $|\sqrt{3x+7}|+|\sqrt{4-x}|=3$

3.1.10. a) $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $(\sqrt[3]{x}-1)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

ketabton.com - The Digital Library



---

۳ . ۲ – رېښنه مساوات د نامعلومو ضريبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x} = a$ b) $\sqrt[3]{x} = b$

c) $a - \sqrt[3]{x} = b$ d) $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$

3.2.2. a) $\sqrt{x-a} = b$ b) $\sqrt[3]{a-x} = b$

c) $\sqrt[4]{a^4 + x} = a$ d) $\sqrt[6]{a^6 - x} = b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - \sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$

b) $(a - \sqrt{x})\,(b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})\,(d + \sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax} - b}{\sqrt{ax} + b} = \dfrac{3\sqrt{ax} - 2b}{3\sqrt{ax} + 5b}$ d) $\dfrac{2a + 3\sqrt{bx}}{3a + 2\sqrt{bx}} = \dfrac{3b + 2\sqrt{ax}}{2b + 3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c + d}$ d) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a\sqrt{x} + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c\sqrt{x} + d}$

3.2.5. a) $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$ b) $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$

c) $\sqrt{x + a} = a - \sqrt{x}$ d) $\sqrt{x + a^2} - \sqrt{x} = b$

3.2.6. a) $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \dfrac{b}{\sqrt{b - x}}$ b) $\sqrt{x + a} - \sqrt{5x - 3a - 4b} = \dfrac{2b}{\sqrt{x + a}}$

c) $\sqrt{x + a} - \sqrt{x - a} = \dfrac{x + a - b}{\sqrt{x + a}}$

d) $\sqrt{3a - 2b + 2x} - 2\sqrt{3a - 2b - 2x} = \dfrac{a + 2b + 2x}{\sqrt{3a - 2b + 2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{3x^2 - 1} - \sqrt{3 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{c}$

ketabton.com - The Digital Library



---

۳ ، ۳ – مساوات سيستمونه، چې رېښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$
$\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$
$x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$
$x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$
$xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$
$x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$
$y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$
$y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

ketabton.com - The Digital Library

# ۱۳ ترانسڅندنت برابرونونه یا ـ مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دې ته ګوته نیول شوې وه، چی دلته یواځې هغه ترانسئندنت مساوات څېړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي.
دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو( فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتې اوبیونې یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی ریښل اوبیونې پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات
د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,1)$$

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره ( ln a) کیدی شي ( ۱۳ . ۱ )

ketabton.com - The Digital Library



---

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په ځتې یا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b ......................(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل ( تیپ ) دا دی

$$l\,og_b\, x = c .................................(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱ ) ، (7. ۲ ) له مخې لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c ..........................................(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $: \log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د ( ۱۳ . ۳ ) بڼي اوبیونه په لاندې تولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b\, f(x) = c .........................................(13,5)$$

دلته ( f(x یوه الجبري وینه یا افاده ده، د ( ۱۳ . ۵ ) سره الجبري برابرون کتمټ ( ورته) دی

$$f(x) = b^c ..........................................(13,6)$$

ټولې د ( ۱۳ . ۶ ) اوبیونې د ( ۱۳ . ۵ ) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کتمټ دي

$x^2+x+6=2^3=8$ (همداسی) $\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

او لاندې اوبیونې لري

ketabton.com - The Digital Library



---

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د ( ۱۳ . ۵ ) ډول ( تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کیڼې لور ( ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وییڼه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x) + r_2.\log_2(x) + r_3.\log_b g_3(x) + ... = c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷ ) ، (۷. ۹ ) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، ( ۱۳ ، ۵ ) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}...................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x - 1) + \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3(x-1) = 2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x - 1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه ریښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له څلورئ یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

ټیك دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

ketabton.com - The Digital Library



---

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني
که $1<(b+3)/b-2)$ وي.

د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دې لرو $-2<3$دا د ټولو b لپاره پوره دی

د. $b \leq 2$ لپاره د $b+3 \leq b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \leq 3$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \leq 2$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې ویینې یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x) \qquad (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه $y1,y2,..$ په ( ۱۳,۱۰ ) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ ( ۱۳,۵ ) لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,\ldots \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون ( ۱۳,۹ ) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

ketabton.com - The Digital Library



---

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په ځلورۍ برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .

د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره

له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي.

$$x_1 = 10^2=100 \text{ او } x_2=10^{-1}=\frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$

د$x>0,$ مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندې $(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$,\ 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$
$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې ځلورۍ بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0\ ,\ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1=lox_1=5; y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5; x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

ketabton.com - The Digital Library



که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د ( ۱۳ . ۲ ) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

ځخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_4 \sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

## ۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون( مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 ................................(13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي( ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په ( ۱۳ ، ۱۴ ) ډول (رقم ( تیوپ ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

ketabton.com - The Digital Library



که په ( ۱۳ . ۱۴ ) د الجبري وييني يا افادي( f (x اکسپوننتونه یاجګګڼونه وي، نو:

$af(x)=b, a>0, a|=1, b>0$ ( 13 . 16 )

په دې ډول د لوګاريتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$f(x)=\log_a b$..............................(13,17)

د کومو ځوابونه چې د ) ۱۳ . ۱۶ ( ځوابونه هم دئ.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4}=4$

مو لاندې څلوری برابرون یا مربع مساوات ته بیايي ( لاربنودوي)

$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$

د $x_1 = 2 , x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پیل برابرون اوبیونې یا ځوابونه هم دي۰

بیلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت دئ. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$x_1 + 1 = -3 , x_2 = -4$

**بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات** $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چې ناپيژندونکی د اکسپونتت یا په جګ څخه د دوه واره لوګاريتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

ketabton.com - The Digital Library



$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \quad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;..................................(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - ....... = \lg c \qquad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وېینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت( f(x) سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)}) = 0 \;;..................................(13,20)$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبيونو $y_1 , y_2 , y_3$;............... لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i ; i=1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1 , 2 , 3 ....... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x}+3^{x} = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg3 = \lg1 = 0, \; x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1}-1} = \sqrt{2e^{x^2-1}-1} .........................(13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} ......................................(13,26)$$

او لاس ته راوړو

ketabton.com - The Digital Library



---

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};..............................(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$
$$y_1=0; y_2=1$$

ټیك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1 \qquad ..........(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پیلبراړون پوره کوي۰

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخې ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کې انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کې اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

$$\ln^2 x-\ln x+1=\log_2 8 = 3$$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x=-1 , \ln x=2, x1=e^{-1}=1/e , x2=e^2$

## ۱۳ . ۳ ګونومتریکي- یا کونجکچ برابرون

ketabton.com - The Digital Library



---

د ګونومتري ساده برابرون لاندې ډېره لري

$$\sin x=a , \cos x=a \quad ( 13 . 29 )$$

$$\tan x=a , \cot x=a, \quad ( 13 . 30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه ( ۱۳ . ۲۹ ) ځوابونه لري ، که $-1 \le a \le 1$ باور ولري، نور ارزښتونه sin x او cos x نه شي غوره کولی( پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشميرني سره د تکمو يا ګوتکونو په پرلپسی د ( ۱۳ . ۲۹ ) همداسی ( ۱۳ . ۳۰) يو ځواب لاس ته راځي
د(۱۳، ۲۹ ) لپاره

a F sin a F cos

د (۱۳،۳۰ ) لپاره

a F tan a 1/x tan

دا چي tan x او cotx پريودې همداسی 180°لري او په يوه اينتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180°لري د( ۱۳ ۳۰ ) تيك يو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x0 د( ۱۳ . ۳۰ ) يو ځواب وي) چی د بيلګي په توګه د جبشميرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د ( ۱۳ . ۳۰ ) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ... -3, -2, -1, 0 1, 2, 3, ...; ..........(13,31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په ( ۱۳ ، ۳۱ ) کی د بيلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30° + k.180°$$

د کونجونو فنکشنونه sin x او cos x پريودې( تل بېرته راګرځېدنه يا دوران)

$$2\pi = 380°$$

ketabton.com - The Digital Library



---

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چيرته د جبشميرني سره يوه اوبيونه $x_0$ پيداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x=-x_0$ هم يو حل دی، او $x=-x_0$ د cos x = a په حالت کی يو بل اوبی

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د ( ۱۳ ، ۲۹ ) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه په جبشميروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ....-3,-2,-1,0,1,2,3,....;..................(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°;..............................................(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ....-3,-2,-1,0,1,2,3,....;..................(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°;......................................................(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشميرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: ( په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º

(په لینده کچ)3,833427 . 0,24143 = 0,017453

د ) ۱۳ . ۳۲ ( ، ) ۱۳ ، ۳۳ ( له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13,833427 + k.360º = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657º + k.360 = 2,9001 + k .6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشميروني سره مومو

$$x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.$$

د ( ۱۳ ، ۳۴ ) او ( ۱۳ . ۳۵ ) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k .360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

ketabton.com - The Digital Library



---

بیلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4,843000$ حل په جبشمیرني پیداکوو

$x_0 = -59,999988° = -60° = -1,04718$

له دې امله د ) ۱۳ . ۳۱ ( له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$x_k = -60° + k.180° = -1,04718° + k.3,14159$

بیلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4,843000$ ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرني سره داسی

$x_0 = 11,666677° = 11,67° = 0,203675$

لاس ته راځي. په دې توګه د ( ۱۳ . ۳ ) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11,67° + k.180° = 0,203675 + k.3,14159$

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرګندومتودو یا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a , \quad \cos f(x) = a \qquad (13 . 36)$$

$$\tan f(x) = a \quad , \cot f(x) = a \qquad (13 . 37)$$

دلته کیدی شي چې $f(x)$ الجبري او یا ترانسځیندنته افاده ويکه بدل (سوبستیتوتي) شي

$$y = f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y = a , \cos y = a \qquad (13 . 39)$$

$$\text{Tan } y = a , \cot y = a \qquad (13 . 40)$$

دا کیدی شي د جملی ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې $y3, y2, ,y1 , ...$ وي .

د ( ۱۳ ، ۳۷ ) سره سم د $f(x) = yi , \ i = 1,2,3,...$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

ketabton.com - The Digital Library



---

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360° , k = ...,-3,-2,-1, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$ , $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبیوني (حلونهو پـه توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k +120 = 90°+3k.360°+120° = 210° +3k.360°$$

$$\overline{x}_k = 3y_k +120° = 450° + 3k . 360° + 120° = 570°+3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x, \sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x, ....) \qquad (13 . 42)$$

دلته که د بیلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13 . 43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳ ) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1-2y^2 \quad (\text{usw.}$$

لهای نور

له دې سره برابرون ( ۴۲ . ۱۳ )، په y ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13 , 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې $y1 , y2 .y3....$ وي. نو بیاد(۱۳.۴۳ )سره مناسب لرو

ketabton.com - The Digital Library



---

$$\sin x = y_i, i=1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چی په ( ۱۳ . ۴۲ ) کي ښول شي ، وازمایل شي، چی ایا دا هم پوره کوي، که نه په ( ۱۳ . ۴۲ ) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x), ....) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سړی بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:
برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د ( ۱۳ . ۴۲ ) ، (۱۳ . ۴۴ ) سره ځان په رینه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \Leftrightarrow \pm\sqrt{1-y^2} = 1-y \Leftrightarrow 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0, y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي ، چی د y2=1 لپاره برابرون ( ۱۳ . ۵۰ ) او له دې سره سم برابرون ( ۱۳ . ۴۹ ) تل پوره دي. د دې په څنګ یا خلاف y1 فقط د ( ۱۳ .۵۰ ) حل دی ، که د
رینی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښه وي. دا حالت یوائې هلته مخ ته پروت دی، چی $\cos x>0$وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون ( ۱۳ . ۵۱ ) سره برابرون ( ۱۳ . ۴۶ )حل یا اوبی شي او
حل یا اوبونه یی په ( ۱۳ . ۴۹ ) کی کیښول شي:

$$\sin x = y_1 = 0, x_k = k\pi; \ k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1, x_k = \pi/2 + 2k; \ k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

که ( ۱۳ . ۵۲ ) په ( ۱۳ . ۴۹ ) کینوول شي، نو لاس ته راځي:

$\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$ د جوړه k لپاره

$\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$ د جوړه k لپاره

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځي جفت ګڼونه دي( $x\pi = 2k\pi$ ) که( ۱۳ . ۵۳ ) په ( ۱۳ . ۴۹ ) کینوول شي، نو لاس ته راځي

$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د ( ۱۳ . ۴۹ ) ټولې اوبیوني په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k,\ x_k = \pi/2 + 2k;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,... \quad (13.54)$$

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0 \quad (13.55)$

سره کیدی شي د ریښنی مساوات څخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳,۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \quad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$,

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = -1. \quad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶ ) کې اینوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_k = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1, \quad \bar{\bar{x}}_k = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60° \\ 180° \\ 300° \end{Bmatrix} + k \cdot 360° = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

## تمرینونه

ketabton.com - The Digital Library



---

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره یې ازمایل یا ازماېښت اړیندی.

۱ - لوګاریتمي مساوات یا برابرونونه

1.1. a) $\log_4(x+1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg\sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln(x-1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg(2x+5) - \lg(3x+1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg(x-1)^2 = 6\lg 2$

1.3. a) $\lg(x-1) + \lg 3 = \lg(x^2-1)$

b) $\lg(x+1)^2 = \lg 2 + \lg(x+1) + \lg(x-1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg(x+4)$

d) $\lg(x-2) - \frac{1}{2}\lg 4 = \frac{1}{3}\lg 125 - \lg(x+1)$

1.4. a) $\lg x + \lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2\lg x = \lg(4+x^3)$ c) $\lg(152+x^3) - 3\lg(x+2) = 0$

d) $2\lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg(a - \frac{1}{a}) = \lg(1 - \frac{1}{a}) + \lg(1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg(ax) - \lg a + \lg\frac{b}{a} = \lg b + \lg\frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg\frac{x}{abx-1} = \lg(a-1) + \lg(a+1)$

d) $\log_a(2x+1) = \log_a(x-1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg(x^2+1) = 2\lg^{-1}(x^2+1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2)\log_5 x = 25^{\log_5\sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1-x)} + 5\lg(1-x) = 6$

1.8. a) $2\lg\lg x = \lg(3 - 2\lg x)$ b) $\log_2(x-14) = 1 + \frac{1}{2}\log_2(3x-26)$

c) $4\log_3{}^3 5x - 7\log_3 15x + 7 = 0$ d) $3\lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

ketabton.com - The Digital Library



1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25 \lg x}$

c) $x^{\log_5 (5x) - 4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2 (4 \cdot 3^x - 6) - \log_2 (9^x - 6) = 1$

c) $\log_2 (9 - 2^x) = 10^{\lg (3-x)}$ d) $x (\lg 5 - 1) = \lg (2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2 [2 + \log_3 (x + 3)] = 0$ b) $\log_5 [\log_2 (\log_4 x)] = 0$

c) $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1$ d) $\dfrac{\lg x}{\lg (x+1)} = -1$

۲ - اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$

c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$

c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$

c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$

c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$

e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$

g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

ketabton.com - The Digital Library



2.6. a) $7^{2x+1}-3^{x-1}=7^{2x+3}-3^{x+1}$ b) $2^{x+1}-3^{x}=2^{x+3}-3^{x+2}$

c) $3^{2x-1}-5^{3x-2}=3^{2x+1}-5^{3x+2}$ d) $5^{2x}-3\cdot 5^{x}+2=0$

e) $5^{4\sqrt{x}}-6\cdot 5^{2\sqrt{x}}+5=0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}}-2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}+2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-2=0$

g) $3^{x+1}-2=9^{x}$

h) $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^{x}+5^{x-1}+5^{x-2}$

i) $2\cdot 3^{x+3}+7\cdot 3^{x-2}=493$ j) $3^{\sqrt{x}}-3^{1-\sqrt{x}}=\frac{26}{3}$

k) $33\cdot 2^{x-1}-4^{x+1}=2$ l) $3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}=5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3}+2\cdot 5^{x-2}=5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}}-5^{3-\sqrt{x}}=20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}}+0{,}5+9=28\cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x}-17\cdot 2^{-(x+2)}+1=0$

e) $2^{x^2}+2^{1-x^2}=\frac{9}{2}$ f) $12\sqrt[2x]{3}-\sqrt[x]{3}=27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}}-7\cdot\sqrt{3^{x-60}}=162$

i) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$

2.8. a) $\frac{3^{x}+3^{-x}}{3^{x+1}-1}=\frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x}+1}{2^{x}-4^{x}}=6$

c) $4+\frac{2}{3^{x}-1}=\frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x}+10}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x}=x$

## ۳ – گونومتريکي – يا کونجکچيز مساوات

3.1. a) $\tan x=\frac{1}{2}$ b) $\sin x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x=\frac{2}{5}$ d) $\tan x=-1$

3.2. a) $\sin(2x-\frac{\pi}{2})=0{,}309$ b) $\cos(2x-\frac{\pi}{3})=0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{10})=0{,}809$ d) $\cos(x+\frac{\pi}{3})=0{,}471$

ketabton.com - The Digital Library



3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$

ketabton.com - The Digital Library



---

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$ j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$ l) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x - 3\sin x\cos x = 0$ b) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

c) $\tan^3 x + \tan^2 x \;\; 3\tan x - 3 = 0$ d) $\tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 0$ b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 1$ d) $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$

e) $1 - \sin x = \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$ f) $2\sin^2\frac{x}{2} = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$

g) $1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0$ h) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$

i) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$ j) $1 - \sin x\cos x + \sin x - \cos x = 0$

k) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$ l) $\sin x\cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$

m) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$ n) $(\cos x)^{\sin x} = 1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

ketabton.com - The Digital Library

# ۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

## ۱۴ . ۱:نابرابرون( نامساوات)

### ۱۴ . ۱ . ۱ بنسټیزې کلیمی او شمیرقوانین

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنخښی$<, \geq, >$ او $\leq$ له لارې یو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کی به نابرابرونونه تر څیړنی لاندې ونیول شي، چی یوه یا دوه رییلی واریابلی یا اوښتونی ولري . یو نابرابرون د دوه واریابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښایي، د هغو سره چی واریابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګنددي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دئ ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واریابل یا اووښتونې یی غوره کولی شي او په ترم کی د هغې ځاي په ځاي کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونی وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډیري L کی سره راټولیږي.
په لاندې برخه کی به ډیر د وینامنطق( ویناسم اندیز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ ( او د ډیري عملیو سومبولونه ) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شمیرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونیول شي( مقایسه برخه ۳ )، دلته دې a , b , c او dرییل ګڼونه وي. لاندې باور لري

ketabton.com - The Digital Library



---

$$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c, \qquad (14,1)$$
$$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c \qquad (14,2)$$
$$a:b<b:c \qquad (14,2)$$
$$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c \qquad (14,3)$$
$$a:c> b:c \qquad (14,3)$$
$$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c \qquad (14,4)$$

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته ( ۱۴ . ۳ ) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په څټ کیږي یا که غواړئ برعکس کیږي. د بیلګي په توګه $3 < 4$ مګر که داوړه خواوې د 1 - سره ځل شي نو لاس ته راځي $-3 > -4$

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښو < سره باور لري دا په دې مانا چی$a \le b$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز ( مثبت )دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$$a.b>0 \Leftrightarrow \qquad (14,5)$$
$$\Leftrightarrow a:b>0\ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0), \qquad (14,5)$$
$$a.b<0 \Leftrightarrow \qquad (14,6)$$
$$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0). \qquad (14,6)$$

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \mid= 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې توپیریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$$a.b \ge 0 \Leftrightarrow (a \ge \wedge (a \ge 0) \vee (a<0 \wedge b<0) \qquad (14,7)$$
$$a:b \ge 0 \Leftrightarrow (a \ge 0 \wedge b>0) \vee (a \le 0 \wedge b<0) \qquad (14,8)$$

## ۱۴ . ۱ ۱الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :

یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلګڼونوR برخه ډیر) ده٠

ketabton.com - The Digital Library



---

يو اينتروال له دې امله، بې له تشوالي يا تشي ، د ګڼکرښې يوه ټاکلې برخه ده، چې له دوه ګڼونو a او b رابنديږي. که د غاړې ټکي په اينتروال کې دننه وي يا خونديږي وي نو د بند

اينتروال څخه غږيږو او که اينتروال پورې اړه ونه لري، واز اينتروال دی، او په همدې ډول نيمبند او نيم واز اينتروالونه.
د اوبيديرۍ په ورکولو سره په ګڼکرښې باندې، لاندې د انيتروال انځورونه په کار اچول کيږي.

لاندې ۱۱ د اينتروال مختلف تيپونه دي يا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده۰

1. $(a,b) = \{x \,|\, a < x < b\}$ واز اينتروا ، اخر تخري په اينترول اړه نه لير
2. $[a,b] = \{x \,|\, a \leq x \leq b\}$ بند اينتروال ، اخر توري په اينتروال ئوري اړه لري
3. $[a,b) = \{x \,|\, a \leq x < b\}$ ښي واز اينتروال
4. $(a,b] = \{x \,|\, a < x \leq b\}$ کيڼ واز اينتروال
5. $(a,\infty) = \{x \,|\, x > a\}$ ښي لورته ناپاي او کيڼ لور ته واز اينتروال
6. $[a,\infty) = \{x \,|\, x \geq a\}$ ښي لور ته ناپای او کيڼ لور ته بند اينترال
7. $(-\infty,b) = \{x \,|\, x < b\}$ ښي لور ته واز او کيڼ ورته ناپاي اينتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \,|\, x \leq b\}$ ښي لور ته بند او کيڼ لورت ناپاي اينتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اينتروال ، ټول رييلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې يوه توري ډيرۍ
11. $\varnothing$ تشډيرۍ

لاندې اينتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي يانې په دې مانا، چې د ناپای ډيرۍ هم په اينتروال پورې اړه لري، يانې ناپای ډيرۍ ټولنه ورسره جوړوي۰

1. $[-\infty,b] = \{x \,|\, x \leq b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \,|\, x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \,|\, x \geq a\} \bigcup \{\infty\}$

ketabton.com - The Digital Library



------------------------------------------------------------------------------------------------

$$(a,\infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty,\infty] = \mathbb{R}^+$

**پورته ته الترناتیو یا بدیلي لیکنښه Alternative notation**

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنښهٔ په لاندې ډول ورکو لکیږي

$]a,b[ = \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

$[a,b[ = \{ x \mid a \leq x < b \}$

$]a,b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$

یادونه : داپورته د اینتروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انیتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\}$

نیم و از اینتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\leq b\}$

نیم واز اینتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\leq x<b\}$

واز اینتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اینتروال : (-oe,b]={x|x≤b}

کښ بند ناپای اینتروال : [a,oe)={x|x≥a}

ښی واز ناپای اینتروال :۰ (-oe,b)={x|x<b}

کیڼ واز ناپای اینتروال :۰ (a,oe)={x|x<b}

ناپای اینتروال : {x د ګڼکرښی ټکی دی|x}=(-oe، oe )

بیلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستیزه ډیری Rکی د لاندې برابرون پیژنددیری غوښتنه منځ ته راچوو.

$x - 2 = 1 + 7 - x$

ketabton.com - The Digital Library



---

حل : د دې ترم $T1(x) = x - 2$ پیژندډیری ده:

$D1 = [ 2 , oe)$

په همدې توګه د ترم $T2(x)=1+7-x$ پیژندډیری ی ده: $D2 =(-oe,7 )$

د برابرون دپیژندډیرۍ لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \cap D_2 = [2,\infty) \cap (-\infty, 7] = [2,7]$$

لاندې ځیره وګورې(متاسفانه، چې ښه ځېره نه شم کښلی)

## ۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعد ې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چی یوه اوښتوني یا مجهوله ولري، او اوبیونې یی په ټولیزه توګه د اینتروالونو له لارې انځوریږي.

(۱۴ . ۱ ) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو $5x-6<4+9x$ دواړو لورو ته $-9x + 6$ ورزیاتوو، نو لرو $-4x < 10$ دواړه خواوې په 4 - ویشو.

د ( ۱۴ . ۳ ) له مخې لاس ته راځي $x > -5/2$

د اوبیونې ډیر یا اوبیډیری : $L=(-5/2,oe)$

که په یوه غوښتونکی ځل یا ویش کی ځله وونی، همداسي پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د ( ۱۴ . ۲ ) تر ( ۱۴ . ۴ ) سره سم ددې ترم د مخنخښي په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

ketabton.com - The Digital Library



---

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چی وي، باید په پام کی ولرل شي، چی یواځي هغه د نابرابرون شمیرل شوي دx - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول بی سملاسي ( په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېرۍ یا برخحلډیرۍ کیدی شي چی د غوڅډیرۍ په څیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیرۍ شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوڅډیرۍ جوړښت، کیدی شي چی د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په څیر په ګنوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیرۍ د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیرۍ ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

$(3x-5)(x-2)<4(x-2)$

که په $(x-2)$ باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د $x > 2$ لپاره $(x-2)>0$

د $x = 2$ لپاره $(x-2)=0$

د $x <2$ لپاره $(x-2)<0$

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته بڼه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x-5 \le 4 <=> 3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځي هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځي هغه x د

$$x \in (2,\infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$$L_1 = (2,\infty) \bigcap (-\infty,3] = (2,3]$$

ketabton.com - The Digital Library



---

دوم حالت:

$$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$$

د لته په ( x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.

د x = 2 ارزښت لیکلو ربښتیا وینا $0 \geq 0$ لاس ته راځي او له دې امله

L2 = {2 }

دریم حالت:

$$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$$

د 0 > 2 - x له امله د ( ۱۴ . ۳ ) له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کی راوړل شي:

$$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$$

د برخه اوبیډیریو ټولنی څخه ټول اوبیډیر) لاس ته راځي:

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2, 3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2, 3]$$

نو ټولې اوبیونې هغه x د ي د کومو لپاره چې لرو: 2< x < 3

په لاندې بیلګو کې نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

(3x-1)/(2x+4)<2

د شرایطو 0=|2x+4له مخی، دا په دې مانا چی 2=| x د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د x>-2 لپاره (2x+4)>0

د x<-2 لپاره 2<(2x+4)

سره سم یواځې دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

ketabton.com - The Digital Library



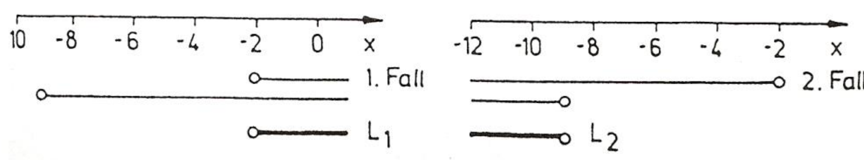
$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

ځیره ۱۴ ۱ الف: دا ځېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبېدیری روښانه شو۰

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی۰




a) b)

Bild 14 1

---

ځیره ۱۴ ا ب : دلته هم ګنونوکربنې شته، چۀ په هغې کې دا اوبېدیری روښانه کاږل شوي دي۰ ، که ځیره مې ونه کاږله، نو داکار بج ګران لوستونکی هم وکولای شي۰

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چی په (۵.۱۴) تر ( ۱۴ . ۸ ) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښایي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګې راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي۰

ketabton.com - The Digital Library



---

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښنته شوي، له دې امله یې لیکبڼه د مخکنۍ لیکبڼې سره توپیر لري. دا لاندې لرو .

$ax+b\ >0, \qquad a\neq 0$ ;

$x^2-5 < 0$ ;

$|2x-5| \leq x+10$ ;

دلته اوبیونې اینتروالونه دي. ښول کیږي، چې اوبیډیرۍ څنګه پیداکیږي او د دې لپاره

اړیین شرایط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه ګڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواې د کمیز ګڼ سره ځل شي یا په کمیز ګڼ وویشل شي، نو مخنخښه تغیر خوري. که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښج یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرون بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نخښه غوره کوي او یا دواړه
- موږ 1.9:1( اوبی کوو

د $a>0$ سره لورو

$$ax+b>0 \Longleftrightarrow ax>-b \Longleftrightarrow x>-\frac{b}{a}$$

د لاندې حلسټ یا اوبیډیرۍ

$$\mathcal{L}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>-\frac{b}{a}\}=(-\frac{b}{a},\infty).$$

ketabton.com - The Digital Library



---

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبیډیرئ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ 1.9:2( اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \Longleftrightarrow x^2 < 5 \Longleftrightarrow |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روابنه تشیرح لپاره یا شنني لپاره یو د حالت توپیر رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا یا $x > -\sqrt{5}.$ ورته نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \Longleftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبیډیرئ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

ketabton.com - The Digital Library



---

موږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x-5 \le x+10 \quad x \le 15, \iff$$

$$2x-5 \ge 0 \quad x \ge \frac{5}{2} \iff 2x \ge 5 \iff$$

(i) که وي $2x-5 \ge 0;$ نو دی $|2x-5| = 2x-5,$ او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \le x \le 15.$$

(ii) $2x-5<0.$ نو دی $|2x-5| = -(2x-5)$ او لرو

$$-2x+5 \le x+10, \ \ge -\frac{5}{3} \iff x \iff -3x \le 5 \iff$$

$$2x-5<0. \ x < \frac{5}{2} \iff 2x < 5 \iff$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \le x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیری له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

ketabton.com - The Digital Library



---

په لاندې کې یو څو تمرینونه ورکړ شوي، کۀ ګران مینه وال یې غواړي تمرین کړي۰

لاندې نابرارونونه اوبی کړئ

(i) $\dfrac{3}{x+5} < 2$ ,

(ii) $\sqrt{x^2+x+2} > x$ ,

(iii) $|x+5| > |x-2|$ .

بیلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$ , $x|=-6$ ; $x |= 3$

د اصلي ماتلاندې (3-x)(x+6) سره د ځل له امله باید بیا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونیول شي. شرایط، د کوموله مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کیدی شي د ( ۱۴ . ۵ ) له لارې ومیندل شي:

$$(3-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6> \vee (3-x)<0 \wedge x+6<0$$

$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x>-6) \vee (x>3 \wedge x<-6) \Leftrightarrow -6<x<3$$

نو ( ۱۴ . ۶ ) شوونې کوي یا ممکنه وي، چی هغه ورشو( ساحه یا ډیری یا نه هم شهچاپیریال ) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز یا نفي دئ:

$$(3-x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3-x) >0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$$

$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x>3$$

له دې امله د ( ۱۴ . ۲ ) او ( ۱۴ . ۳ ) په پام کي لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

د زیاتیز ځله وونې یا مثبت فاکتور (x+ 6 )(3-x) سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6 \ge 6-2x \Leftrightarrow x \ge 0 \Leftrightarrow x \in [0,\infty),$$

$$L_2 = (-6,3) \cap [0,\infty) = [0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x < -6 \vee x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-6) \cup (3,\infty)$

دا چې د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په ځټ (چپه یا برعکس( تاسیر لري:

$$x+6 \le 6-2x \Leftrightarrow x \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$$

$$L_2 = [(-\infty,-6) \cup (3,\infty)] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $: L = L_1 \cup L_2 = [0,3) \cup (-\infty,-6) = (-\infty,-6) \cup [0,3)$

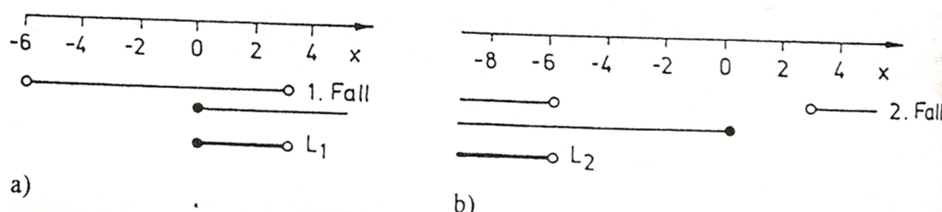



Bild 14.2 ځېره

د ځلوری برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د ځلوری ترم ځل انځورونی ځخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د ( ۱۴ . ۳ ) په پام کي نیولو سره د$x^2$ د مخ ( کینږ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چې دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چې د اړیکنخښي په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولووروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x_1=4 , x_2=1/2$$

$$x^2-\frac{9}{2}x+2>0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2})>0 \Leftrightarrow (x>4 \wedge x>\frac{1}{2}) \vee (x<4 \wedge x<\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x>4 \vee x<\frac{1}{2}$$

ketabton.com - The Digital Library



---

له دې سره د ( ۱۴ . ۵ ) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېرى : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسيره دې په ياد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کرې کښلو له مخې هم حل کيدی شي، په ځانګړي ډول هلته، چې اړوند مربع شکل رييل حل نه لري٠ بالاخره پهپای کې د وېش د مخنښې راوړلو يوه بيلګه ښايو.

بيلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\leq 0,\ x\neq\frac{2}{3}$.

حل ( ۱۴،۸ ) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2}\leq 0 \Leftrightarrow (x\geq -5 \wedge x<\frac{2}{3}) \vee (x\leq -5 \wedge x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\leq x<\frac{2}{3}.$$

د سيستم حل ډېرئ يا حل سټ: $L=[-5,\frac{2}{3})$.

## ۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسيستم د يوې ناپيژندونکی يا مجهولی يا اوښتونې سره

د يوه نابرابرون سيستم اوبيډيرى L د يوګونو نابرابرونونو اوبيډيريو غوځډيرى ده . ګتور يا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په يوه برابرونسيستم کی په نمره کړی شي ، ددې لپاره چې دا يوګوني ( دا په دې مانا چې يو يو ) اوبی کړی شو.

بيلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\geq 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\geq 3-x \Leftrightarrow x\leq 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سيستم اوبيډيرى: Lدئ

ketabton.com - The Digital Library



---

بیلگه ۱۴ . ۸

$$-2<\frac{4x-10}{x-1}<3, x\neq 1$$

د داسی نابرابرون څنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دی:

$$I. -2<\frac{4x-10}{x-1}$$

$$II. \frac{4x-10}{x-1}<3$$

د همغه فاکتور( x-1) سره د حل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرگ د لیدوړ بڼی سره وڅیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :

(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

.........................................$I$..........................................$II$

1. $Fall^{(1)}$ $x\in(1,\infty)$

$$-2x+2<4x-10 \Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow x\in(2,\infty).$$
$$L_{I_1}=(1,\infty)\cap(2,\infty)=(2,\infty)$$

$$4x-10<3x-3 \Leftrightarrow x<7 \Leftrightarrow x\in(-\infty,7).$$
$$L_{II_1}=(1,\infty)\cap(-\infty,7)=(1,7)$$

2. $Fall^{(2)}$ $x\in(-\infty,1)$

$$-2x+2>4x-10 \Leftrightarrow x<2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2).$$
$$L_{I_2}=(-\infty,1)\cap(-\infty,2)=(-\infty,1)$$

$$4x-10>3x-3 \Leftrightarrow x>7 \Leftrightarrow x\in(7,\infty).$$
$$L_{II_2}=(-\infty,1)\cap(7,\infty)=\varnothing$$

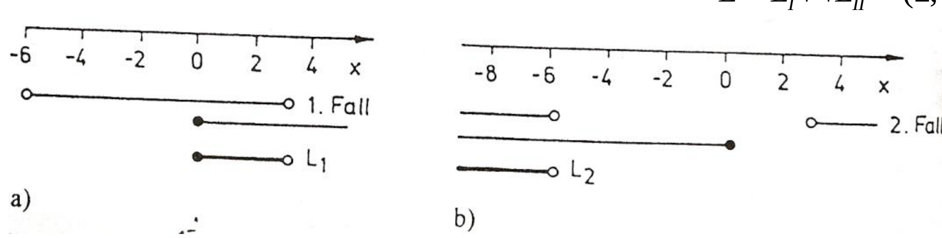
$$L_I=L_{I_1}\cup L_{I_2}=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$$

$$L_{II}=L_{II_1}\cup L_{II_2}=(1,7)$$

د LI او LII غوڅېدیری جوړول بیرته کیدی شي چي د یوگونو اوبیډیریوگنوړانگه باندې د لیدنی شي )(څیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیډیری:

$$L=L_I\cap L_{II}=(2,7)$$



ketabton.com - The Digital Library



---

## ۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو( ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیدیرئ د یوه اوبیدیرئ $R^2 = R \times R$ برخدیرئ ده، چی د هوارې په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دئ. په دې برخه کی به موږ یواځي د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \ ( \geq 0 \ , <0, \leq 0 \ ) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو $x , y$ او ثابتو ځله وونو( ضریبونو)

$a,b,c \in R$

سره د شرایطو $a|=0 \ v \ b \ |=0$ سره سم تر څیرنی لاندې ونیسو.

که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چی د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم ( ۱۴ . ۹ ) ، چی ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیدیرئ په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو( د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پریښوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځاي شوي، نو راټولونکی کرښه د اوبیدیرئ پورې اړه نه لري او کیدی شي یواځي ټوټه ټوټه کرښی ( پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چی د ډیرئ ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیدیرئ پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د $y$ په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چی په یوه کره نیولي $x$ په روښانه توګه د لویو $y$ - ارزښتونو لپاره پوره دئ نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چی د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنی نیمی هوارې ټول ټکی اوبیدیرئ $L$ جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴ )

دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون ( ۱۴ . ۹ ) کی د مخه نیسي چي $b|=0$ دئ. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دئ، چی د کواوردینات سیستم

ketabton.com - The Digital Library



---

یوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چی په کرښه ax+bx+c=0 نه وي پروت۰

ازمایو چي ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کی باور لري او یا نه.که ممکن وي نو د شمیرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0 ) ټاکو. دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا ریښتیا وینا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبیډیری پیداشوی ځاي ( ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسیا کوي) تصدیقوي.
دلته یوه ځیره کښل کیږي دلته د اوښتونو پرځاي ګښونه ږدو او بیا کرښه باسو۰ په کواوردینات کې د هوارې هغه برخه، چې اوبیډیری ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښې هغه دکرښونو لور ته ابیډیری ده۰

د یوه نابرابرونسیستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کیږی او بالاخر ه بي د یوګونو اوبیډیریو غوځډیری نیول کیږي یا جوړیږي.

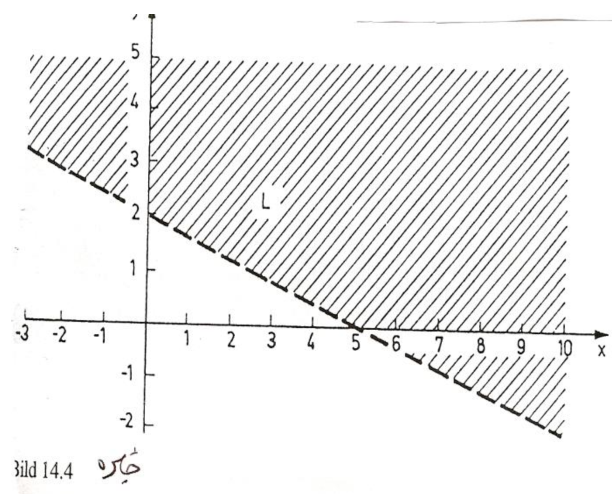



Bild 14.4 ځايره

بیلګه ۱۴ . ۱۰:

I . 2x+y<6

II. 4x-y>0

(0,0 ) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبیډیري LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د ( 0 , 0 ) سیده برابرون باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلګي په توګه ( 0 , 1 ) کیښول شي، کوم چی د په ځنوالي یا تضاد په لور ځي، او له

ketabton.com - The Digital Library



---

دې املـه اوبيډيرئ LII كې نه دئ پروت. ( ؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف( . ش ۱۴ . ۵ ب دسيستم حلډيرئ L ښايي چې له دوه نيمكرښو بنديږي يا له دوه نيم كرښومحدوديږي.
د وړانديزارزښت لري چې د تمرينونو په خپلواك كار كولو كې د غوښتونكو اوبيډيريو L د يوګونو نيمهوارو غوځډيرئ حتي تر غاړې پورې رنګينه يا كرښې كرښې راوكښل شي، چې په دې ډول يې يو كواورديناتسيستم د انځورولو لپاره بسيا وكړي .ش ۱۴ . ۵

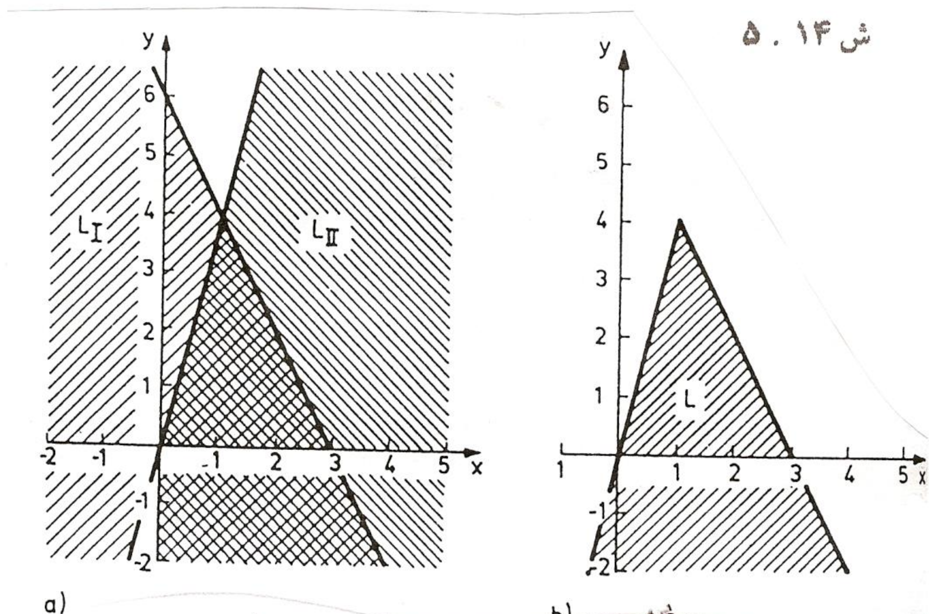


Bild 14.5

بيلګه ۱۴ . ۱۱:

I . $x-3y-6<0$

II. $-x+y+1<0$

III. $x-6<0$

دا اوبيډيرئ په ش ۱۴ . ۶ كې انځور ۱۲ كرښې
د پورته نابرابرونسيستم له مخۀ د هر نابرابرون لپاره كرښه كښل كيږي، په يوه كواوردينات سيستم كې او بيا د هوارې هغه برخه، چې دريواړه كرو كې رابنده منهواره وي، هغه يې اوبې دئ.

ketabton.com - The Digital Library



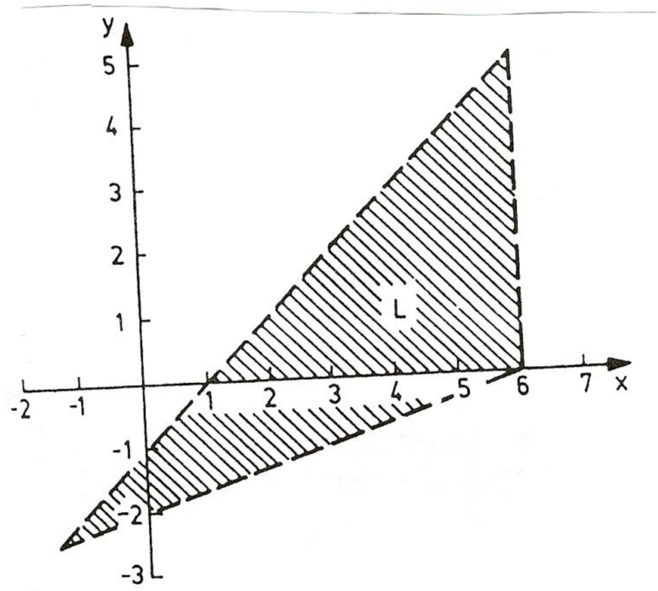



Bild 14.6 خاکره

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براروِن یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ ځخه ځرګنده ده چی د یوه رییل ګڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیریږي·
داسی دئ:

$T(x) = T(x)$ لپاره $T(x) \geq 0$ د (14,10)

$T(x) = -T(x)$ لپاره $T(x) <0$ د (14,10)

ketabton.com - The Digital Library



---

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چی د مطلقه ارزښت لرې پرېښول شي، یا د نورو ترمونو سره په ټرلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په ( ۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چي په ( ۱۴ ، ۱۰ ) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پرېښول کیږي چی ځانونه په قاعده کي په اینتروال وښایي، کوم چی دیسیونکت( پردي) برخه ډیرې د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چی ( T(x ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چی د کنترول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a او b رییل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي٠

$$|a \,.\, b| = |a| \,.\, |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b|$$ د $|b| = 0$ لپاره

## ۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چی ایا دا اوبیونې په نیول شوي یا فرض شوي اینتروال کي پراته دی او که یوائې د اوبې په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوبیونې اوبیدیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوبیونې شونی یا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم
کی انځوریږي .
د دواړو فنکشنونو غوځټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبیونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

ketabton.com - The Digital Library



---

باور لري:

$(x+1) \geq 0$   د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$   د $x < -1$ لپاره

$(14,11)$ د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

$(14,11)$ د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

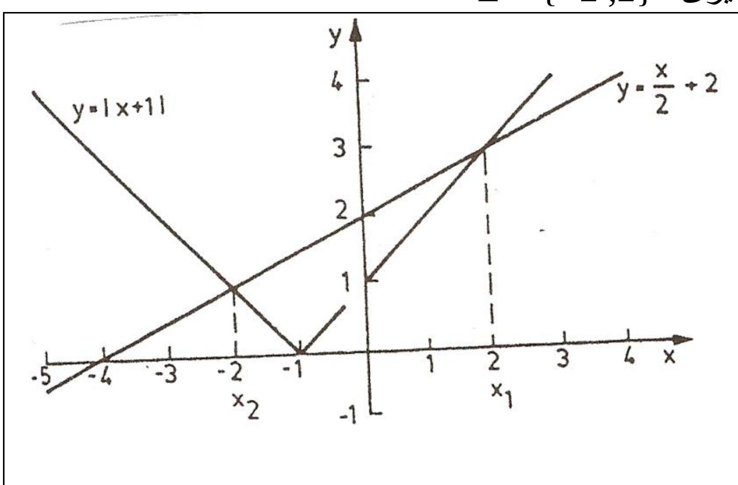
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیډیری $L = \{-2, 2\}$




په داسی حال کی چی د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$ , ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کیڼ اړخ، $y = |x+1|$ د ( ۱۴ . ۱۱ ) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.

اوبی : کیدی شي په ځ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شووني یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښنه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینترووالونو کی د لیډلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

ketabton.com - The Digital Library



---

|1- x|-|2x+3|=1

د ( ۱۴ . ۱۰ ) پسی لرو:

د x<1 لپاره |1-x|=1-x

د x>1 لپاره =-1+x

او( لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د x>-3/2 لپاره |2x+3|=2x+3

د x<-3/2 لپاره =-1x-3

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

| | x<-3/2 | -3/2<x <1 | x>1 |
|---|---|---|---|
| |-1+x| | 1-x | 1-x | −1+x |
| |2x+3| | 2x+3 | -2x-3 | |2x+3| |

له دې امله د برابرون اوبې کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1 - x - (-2x - 3) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1 - x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1 + x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = -5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په څټ یا تضادکی دی، چی x3 = -5

یواځي ښکارندډوله اوبی دی( دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په څیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبډیری : L = {-3,-1}

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې څرګند

ketabton.com - The Digital Library



---

شي. د کينۍ اړخ يا لور مطلقه ارزښت خپلواك يا ازاد ښودل کيدی شی چی ټوټه ټوټه د مخه تيرشوي شميرنو په بوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقيبيږي:

د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

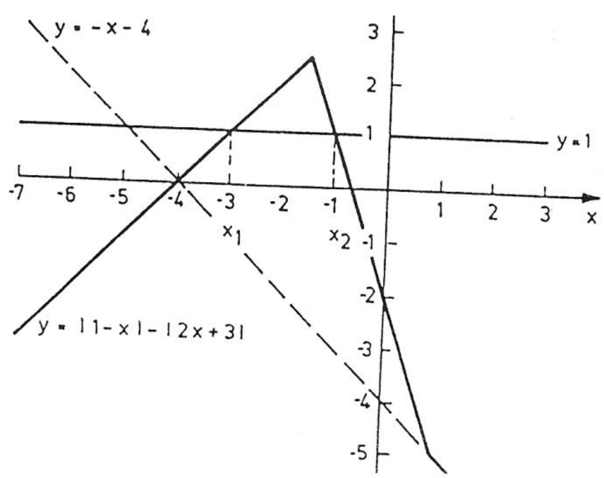
د $-2/3< x < 1$ لپاره $|1- x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - يا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شميرل شوو اوبيونو پرتلې له پرتلې مقايسي ځيره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښايي، چی دواړه کږې ريښتيا د $x < -3/2$

او $-3/2< x < 1$لپاره ربښتيا هره يوه بله يوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره يو بل نه پريکوي. په دريم حالت کی د اړوند کربښی ټوټی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرټکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په ځير حل د نيول شوي اينتراوال د باندې دی ځيره ( شايد داځيره هم ځيره نه شي، کۀ کرانو مينه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګټور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه ځيره بايد ريښی او يا راغلی وي، يا راغلې وی۰




که د مطلقه ازښت نخښنی په يوه ځلوري - يا مربع ترم کی له منځه وړل کيږي، نو کيدی شي چی د مخنخښني غوښتل شوي ځيرنی چي په برخه ۱۴. ۱ . ۲. کی تر ځيرني نيول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بيلګه ۱۴ . ۵ دې مقايسه شي )

بيلګه ۱۴ . ۱۴:

ketabton.com - The Digital Library



$|x^2 - 6x + 5| = 3$

د $x^2-6x+5>0 \iff (x-1)(x-5)>0 \iff x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \iff (x-1)(x-5)<0 \iff 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x<5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 \iff x^2-6x+2=0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5{,}65 \in [5, \infty)$ , $x_2=3-\sqrt{7}=0{,}35 \in (-oe, 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

$-x^2+6x-5=3 \iff x^2-6x+8=0,$

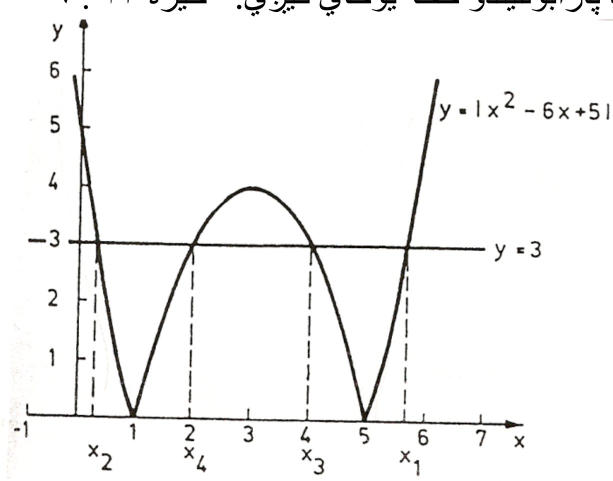
$L \Rightarrow x_3=4 \in (1,5)$ , $x_4=2 \in (1,5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیډیری: $L = \{3-\sqrt{7}); 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

خیره ۱۴ . ۹ د گراف له لاری اوبی ښایي. کیڼ لور $y=|x^2-6x+5|$

د ( ۱۴ . ۱۲ ) له امله د پارابوللیندو څخه یوځاي کیږي. خیره ۱۴ . ۹




خیره ۱۴. ۹

ketabton.com - The Digital Library



پـه ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبـي کی ، پـه کـوم کـی چـی n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$ , i = 1,2,...n منځ ته راځي، $2^n$ حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دی ، کوم چی موجود دی ، چی د ترم $T_i(x)$ د تیپ یا بڼی وي چی یا $T_i(x)$ >0 او یا $T_i(x)$ 0> راکوي، یعنی د دوه توکو د وارییشن امکاناتو ټولګي ته ( پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د ( ۱۴ ، ۱۰ ) قاعدې سره سم $2^n$ برابرونونه منځ ته راځي، چي په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیوني $x_1, x_2, x_3,......$ ولرودی شي. یوائی دا باید وازمایل شي ، چی ایا دا اوبي xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.

د دې ټولیزې تګلار پسی موږ پـه بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د

T1(x)=1-x, T2=(2x+1)

سره، پـه لاندې $2^2 = 4$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0: \quad (1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$$

$$2.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0: \quad (1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د3- = x1=1, x2لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

## ۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که پـه نابرابرونو کـی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه پـه برخه. ۱۴ .۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چي بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال پـه دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دی

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : |7-3x|>2

ketabton.com - The Digital Library



---

لومړی حالت:

$$7-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$
$$7-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$
$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$
$$-7+3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [, \infty)$$
$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$
$$\Rightarrow$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \,\square\, (5/3, 3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کیږي:

بیلګه ۱۴ . ۱۶: $|x-5|<|x+1|$

د یوګونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنخښی:

د $x > 5$ لپاره $|x-5| = x-5$

د $x < 5$ لپاره $|x-5| = -x+5$

او

د $x \geq 1$ لپاره $|x+1| = x+1$

د $x \leq -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

په یوه لید وږ توګه په لاندې توګه راټولیګي رایوځاي کیږي یا راغونډیږي :

| | $X > -1$ | $-1 \leq x < 5$ | $x \geq 5$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert x-5 \rvert =$ | $-x+5$ | $-x+5$ | $x-5$ |
| $\lvert x+1 \rvert =$ | $-x-1$ | $x+1$ | $x+1$ |

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1)$

$$|x-5|<|x+1| \Leftrightarrow -x+5<-x-1 \Leftrightarrow 0<-6$$

د هر $x<-1$ نابرابرون یوې ناریښتیا وینا ته لارښودوي، چې په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چې: $L1 = \emptyset$

دوم حلات $x \in [-1, 5)$ :

ketabton.com - The Digital Library



---

|x-5|<|x+1|<=> -x+5<-x-1 <=> x>2<=>

$x \in [2,\infty]$

$L_2 = [-1,5) \cap (2,5) = (2,5)$

دریم حالت: $x \in [5,\infty)$

|x-5| < |x + 1| <=> x - 5 < x + 1 <=> 0<6

هر x ≥ 5 نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: L3 = [5 , oe)

حلديرى: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,5) \cup ([5,\infty) = (2,\infty)$

بيلګه ۱۴ . ۱۷: |x²-4x-21|<24

د x²-4x-21≥0 <=> x<-3 v x≥7

او x²-4x-21<0 <=> -3<x<7

ځخه لاس ته راځي:

د x<-3 v x≥7 لپاره |x²-4x-21|=x²-4x-21

د -3<x<7 لپاره = -x²+4x+21

لومړى حالت: $x \in (-\infty,-3] \cup [7,\infty)$

|x²-4x-21|<24 <=> x²-4x-21<24 <=> x²-4x-45<0

<=> -5 < x < 9 <=>

x ∈ (-5,9)

$L_1 = [(-\infty,-3] \cup [7,\infty)] \cap (-5,9) = (-5,-3] \cup [7,9)$

دويم حالت: $x \in (-3,7)$

|x²-4x-21|<24 <=> -x²+4x+21<24 <=> x²-4x+3>0

<=> x < 1 v x > 3 <=>

$x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty),$

$L_2 = (-3,7) \cap [(-\infty,1)] \cup (3,\infty) = (-3,1) \cup (3,7)$

اوبيډيرى:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5,1) \cup (3,9)$

دا بيلګې د دې درس لپاره بسيا کوي، دا بيا دلته هم تکرار ليکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو ځه زيات غوښتل هغه هم په پام کې نيول کيږي او کړى شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو۰

ketabton.com - The Digital Library



---

په لاندې کی به په یوه بیلګه کی داسی نامساوات وڅیړو، په کومه کی چی مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کی منځ ته راشی.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د ( ۱۴ ، ۱۰) له مخی د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د ( ۱۴ . ۲ ) او ( ۱۴ . ۳ ) له مخی په هر وخت کی د همغه ترم مخنخښه باید په پام کی ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د $x<-1/2$ لپاره $|1+2x|=-1-2x$

او

د $x< 1$ لپاره $(1-x)>0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کی ګنوړانګه سره بیله یا توټه کیږي، داسی چي په راتلونکو ګڼلو کی یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $X<-1/2$ | $-1\leq x<1$ | $x>1$ |
| $\|1+2x\|$ | $-1-2x>$ | $1+2x$ | $1+2x$ |
| $=1-x$ | $>0$ | $>0$ | $<0$ |

لومړی حالت: $x \in ( -oe, -1/2)$

$-1-2x\leq 1-x \iff x\geq -2 \iff$

$x \in [-2 , oe)$

$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [ -2 , oe ) = [-2 , -1/2)$

دویم حالت: $x \in [ - 1/2,1)$ :

$1+2x < 1- x \iff x<o \iff x \in (-oe,0]$

$L_2 = [ -1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$

دریم حالت:

ketabton.com - The Digital Library



---

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1-x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو سټ(اوبیډیری):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات ( ۱۴ . ۱۰ ) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لاینی ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

( ۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه ښي لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بڼی(۱۴ . ۹ ) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي ( ۱۴ . ۹ ) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1| > x-2x-4$

د ( ۱۴ . ۱۳ ) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1 < 0$ لپاره $= x + y - 1$

لومړی حالت: $-x - y + 1 > 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff -x-y+1 > x-2y-4 \iff -2x+y+5 > 0$

$L1 = \{(x,y) | -x-y+1 \geq 0, -2x+y+5 > 0\}$

دوم حالت: $x-y+1 < 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff x+y-1 > x-2y-4 \iff 3y+3 > 0 \iff y < -1$

ketabton.com - The Digital Library



---

L2={(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1}

له دې سره L1 او L2 د اوبیډیرۍ دوه نابرابرونونو غوڅډیرۍ ده او کیدی شي، لکه څنګه یو نابرابرون د یوه ګراف سره انځور شي ( ځیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف ) اوبیډیرۍ بیرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبیډیریو تولندیرۍ ده۰ ( ځیره ۱۴ . ۱۰ ب ) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)۰

که په یوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې یا – وییني د ( ۱۴ . ۱۳ ) بنی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نیولو سره څلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.

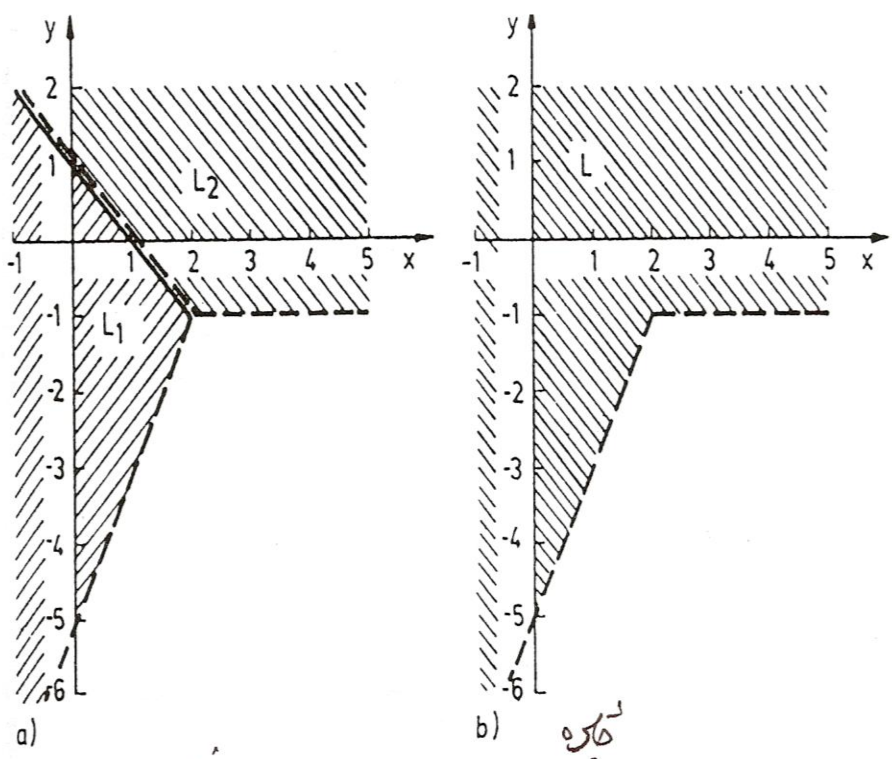



Bild 14.10 ځاره

تمرینونه

ketabton.com - The Digital Library



---

لاندې نامساواتو حلډېرې پیدا کړئ

1. a) $8x-3<2x+9$ b) $5-7x\leq 3x-10$

c) $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{1}{2}+\frac{x}{9}$ d) $3(3x-2)\geq 4(3-2x)$

e) $\frac{8x-5}{5}\leq\frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}x>\frac{5}{4}x+\frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9}+6x\geq 2(\frac{5}{6}+3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8}-6)<\frac{x}{6}-\frac{x}{8}+1$

2. a) $(3x+1)(2x-1)<(5x-3)(2x-1)$

b) $(8x-9)(3x+2)\geq(2+7x)(2+3x)$

c) $(7x-3)(5-7x)>(3-7x)(5x+3)$

d) $(5+2x)(7-5x)\leq(10+4x)(2-3x)$

e) $x^2-x-6\leq 2x+4$ f) $x^2+5x-6>3-3x$

g) $x^2+3x\geq -2x-6$ h) $x^2-4x+4<4x-8$

3. a) $\frac{3}{2x-4}\leq 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x}\geq 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2}<2$ d) $\frac{5x+3}{x}<-2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2}>5$ f) $\frac{9-3x}{x-3}>-3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3}<3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1}\geq 12-\frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4}\leq\frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x}>\frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3}<\frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1}\leq\frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{3x+1}{x-2}>4$ f) $\frac{x-3}{1-6x}-\frac{2x+1}{4x+3}\geq-\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{3x-3}\geq 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x}-\frac{2-6x}{1-3x}<\frac{3}{8}\cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x-3)(3x-2)<0$ b) $(x+3)(7-x)\leq 0$

c) $x^2+4x+3\geq 0$ d) $x^2-8x+7\leq 0$

e) $x^2+4x+5<0$ f) $x^2-6x+10>0$

ketabton.com - The Digital Library



---

g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$

6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \le 0$

c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \ge 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$

g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4} \le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \le 0$

8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$

c) $8(x-2) \ge \frac{20}{x+1} + 3(x-7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x-6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرئ وټاکئ

9. a) $2 + x \ge 2x - 7$
$5(x-3) \ge 2(x-3)$

b) $x + 6 < 14 - 3x$
$6 + 7x \ge 3x + 5$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$

d) $x + \frac{1}{3} \le 2x - \frac{7}{6}$
$5(x - \frac{3}{2}) \le 2x - 3$

10. a) $x^2 - 3x < 0$
$2(x+2) < 4x - 1$

b) $x^2 + 6x + 8 < 0$
$2(x+2) > x + 3$

c) $x^2 - 9 < 0$
$x + 2 > 2(x-1)$

d) $x^2 - 3x + 3 > 0$
$4(x-1) < 2(x+1)$

11. a) $x^2 - 4x - 5 \le 0$
$x^2 + 6x - 16 < 0$

b) $x^2 + 2x - 8 < 0$
$x^2 - 3x - 4 > 0$

c) $x^2 - 5x > 0$
$x^2 - 9 > 0$

d) $x^2 - 6x + 5 < 0$
$x^2 + 8x + 15 < 0$

ketabton.com - The Digital Library



---

12. a) $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$ b) $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$

c) $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$ d) $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$

13. a) $3 - x < 2 - 4x$ b) $x+5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$

$x+3 < \frac{1}{2}(x+1)$ $4(x-1) < 13 - \frac{1}{4}x$

$\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$ $2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حادېرئ په کارتیزې کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکې انځور کړئ.

14. a) $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$ b) $y < -\frac{2}{3}x + 2$

c) $x < 2y + 2$ d) $x > -y + 3$

e) $4x - 5y > 12$ f) $-3x - 8y \leq 24$

g) $2(y - 3) \leq 6(x - 1)$ h) $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$

15. a) $2x + 3y > -6$ b) $3x - y > 3$

$x - y < 2$ $x + y > 4$

c) $x > 1$ d) $x - 4y - 6 \leq 0$

$x + 2y < 4$ $2x + y - 3 \leq 0$

$y + 3 > x$ $y - 5 \leq 0$

16. a) $-2 < x + y < 2$ b) $x > 2$

$-2 < x - y < 2$ $-3 < y < 2 + x$

$x + y < 5$

c) $x^2 - y^2 \leq 0$ d) $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حادېرئ د شمیرلو او همداسې ګرافیکې لارې پیداکړئ.

17. a) $|x - 3| = 5$ b) $|x + 2| = 7$

c) $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$ d) $|x + 3| = |3x - 4|$

e) $|x - 4| = |2x + 3|$ f) $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$

g) $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$ h) $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$

18. a) $|x^2 - 2x - 8| = 7$ b) $|8 - 2x^2| = 6$

ketabton.com - The Digital Library



c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلېږی پیدا کړی

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلېږی په یوه په یوه کواوردیناتسیستم کې انځور کړی او ا نځور یې وکاږی

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

ketabton.com - The Digital Library

# ۱۵ فنکشنونه( بلواك يا تابع)

## ۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی ځیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د تابع(بلواك) او بیا زیاته د فنکشن په نامه څموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، څما په اند یا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی څموږ د ځیړلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریبلی واریابلی ریبل ارزښته فنکشن( لنډ: فنکشن ) د ریبلو ګنونو ډیری باندې ، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه یواځنی ځیرونه ده. D دپیژند ډیری نومیږي .
د ټولو ارزښتونو ډیرئ چي y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژنددیریٔ یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .
د ي وې قانونمندی f له مخی هر $x \in M$ یواځني یوه $y \in W$ باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي

ketabton.com - The Digital Library



---

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کې به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي ( شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي ( پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته : د $x<0$ لپاره $y=|x|$
دلته $D=R,W = [0,\infty)$ د $x>0$ لپاره $y=x^2$
پام دې وي چی په داسی حالت کي له کیڼ و ښي لور ته یا ګډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دئ ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي( شننیزه) انځورونه اکسپلیڅیت( واضح)روښانه و څرګند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ ۱او ۱۵ . ۲ چی په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y =f(x)$ که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیڅیت ( ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit ) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به $2y-x-1=0$ $D=R,W=R$,فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپیلیڅیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیڅیت شنینیزه بڼه ( ایمپلیڅیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیڅیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلګی په توګه :
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیڅیت حل کیدونکی نه دئ.

ketabton.com - The Digital Library



---

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتوني یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لارې لاربښودیږي. هر پارامتر ( له یوه پارامتر ساحی څخه)

$x = \varphi(t)$ , $y = \Psi(t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oe به یوه پارامتري انځورونه وی

او x = t , y = t/2 + 1 به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

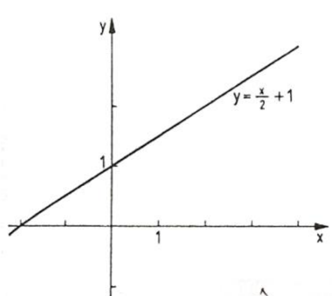
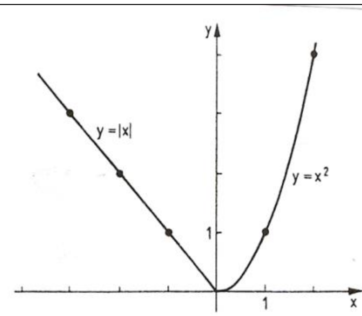
زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

| X .......-2 | -1 | 0 | 1 | 2 .... |
|---|---|---|---|---|
| Y . .....2 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 ..... |

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

| X....-3 | 2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y....3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 ... |

| | |
|---|---|
|   Bild 15.1 ځاره   Bild 15.2 ځاره | د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کږې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو |

یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي .
څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲ ) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

ketabton.com - The Digital Library



---

## ۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال $]a,b[$ کی هلته او هلته یا تیك هلته مونوتون جګیدونکی
( مونوتون لویدونکی ) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1) \leq f(x2) \quad (f(x1)>f(x2))$
که د برابرووننخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال ) $[oe,0]$ کي مونوتون ټيټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال $[oe,0)$ کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینتروال $]-a,a[$ کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت ) یا سیومتریك symetrisch,( ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي
$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$
د جوړه فنکشنونو ځیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي ) دلته هم ځیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ ( ، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي ) بیا هم ځیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴ )

بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

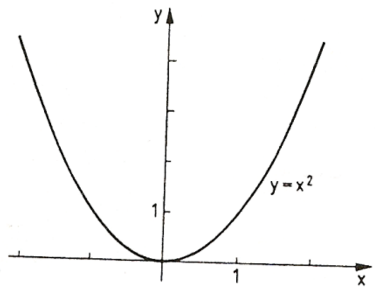
$(-x^3) = -x^3$

بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دئ:

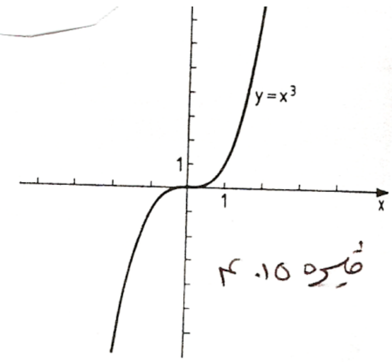
$(-x)^2 = x^2$

ketabton.com - The Digital Library






ځیره ۱۵.۳



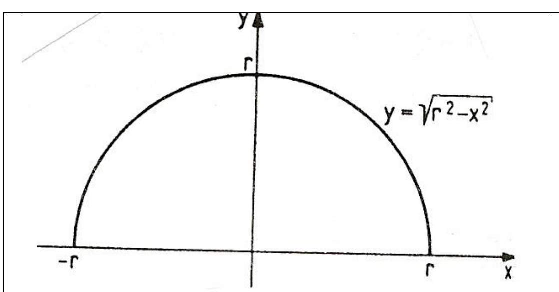

ځیره ۱۵.۴

د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D ( پیژندډیری ده) بند یا رابند( محدود)بلل کیږي که
یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري :
$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بیلګه ۱۵ . ۵:

| | |
|---|---|
| فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ , $D = [-r, r]$<br>بند یا راګیر( محدود)( زه به دا له<br>دې وروسته<br>بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم<br>یوونګردی ځیره ده<br>$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$ ۵ . ۱۵ . ش |  |

پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي( دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل
کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:
$f(x + p) = f(x)$
د دورانی یا تل راګځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي
فنکشنونه دي ( پرتله برخه ۱۵ . ۳)

ketabton.com - The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------------------

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $D \ni x$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي.

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅېټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\,x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (ځیره ۱۵ . ۱ )

بیلګه. ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 ,\quad x2 = -2$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري. ) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶ )

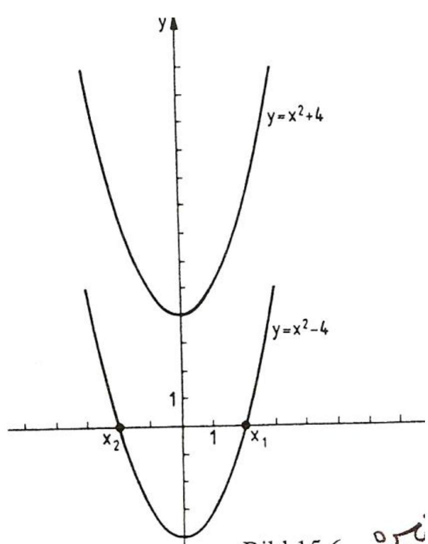


Bild 15.6 ځیره

ketabton.com - The Digital Library



---

پيژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \quad , \quad y \in W \quad y = f(x),$

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کيږي، که هريو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځيره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: ( y = f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ځټکيدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو فنکشن ( x = g(y تعریفوي، یعني په ځټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی( نخونی) سره بدلی شي، نو د په ځټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځيره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپيزندونکی دي د y=f(x) په ځټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم ليکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په ځټ فنکشن سره کټمټ(- ورته ) identic دی۰ د په ځټ یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$
کرافيکی ځيره y = x په کرښه د y =f(x) ( هندارونه) یعنی په هنداره کی ځيرونه او لنډ یی: هندارونه) ده۰

بيلګي ۱۵ ، ۱ ته :

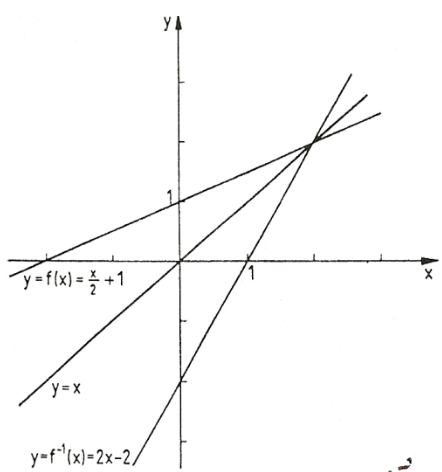


Bild 15.7a ځاېره

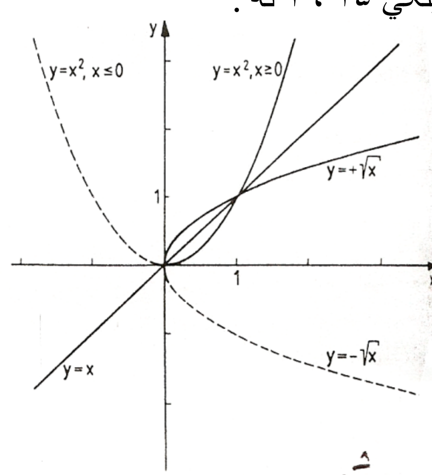


Bild 15.7b ځاېره

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په ځټ فنکشن داسی دی

ketabton.com - The Digital Library



---

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سړی $y = x/2 + 1$ د $x$ په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره $x$ او $y$ سره بدلوي .
(ځیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن

$x \in D$ $y = x^2$ ,

ځیرره ش ۱۵ . ۳ ) په ځټکیدونکی دي یا په ځټکیدونکی نه دی.

هر $y \in W$ $=[0,oe]$ پورې دوه$[-oe,oe]$ = $x \in D$ اړه لري، یعنی $x=+y$او $x=-y$

مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونکی دی ( او په دې ډول یواځنی او یوائنی ).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2,x\geq 0$

ته چپه- یا په ځېټ فنکشن $y=+x$ دی، او $y = x^2 , x < 0$ ته چپه- یا په ځټ فنکشن $y = -x$ -دی. ( ځیره ۱۵ . ۷ ب) .

په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f( x )$کلك مونوتون جګیدونکی ) لویدونکی ( وي ،نو په ځټ فنکشن $y = f^{-1}( x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی ) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ځیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړدوله خویونو له مخی وځیړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي فنکشنونه) وځیړل شي. د فنکشنونو ځیړل به د هغو ځانګړدوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام وومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي ( برخه ۲۰ . ۴ )

پیژند ۱۵ . ۸ :

ketabton.com - The Digital Library



---

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دئ او $n$ - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه( یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه ( $n = 1$ ) یالاینی فنکشن په لاندې ډول دئ:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته $m$ او $n$ په ( ۱۵ . ۱ ) کی پارامترونو $a1$ او $a0$ په مانا دي. د لاینی فنکشنونو ځیره(ګراف ) یوه کرښه ده چي په $y = n$ کی دy - محور غوڅوي $(x = 0)$ او جګوالی $m = \tan\alpha$

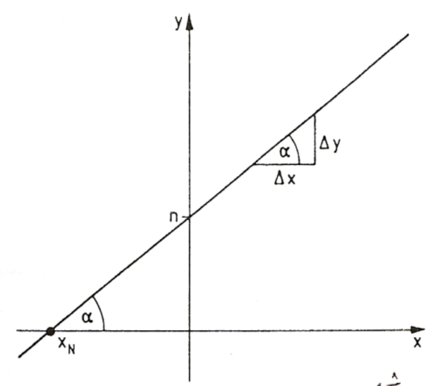



Bild 15.8

لري (ځیږه پورته . ۱۵ . ۸ ) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دئ: $m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،

دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیك یو صفرځای ( $y = 0$ ) لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښې برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي یو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرنټکی

ketabton.com - The Digital Library



---

یا نوره بنه غږځتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم( کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په ( ۱۵ . ۱ ) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c , a \ |= 0 \qquad (15 .3)$$

د مربع فنکشنونو ځیره ) ګراف ( پارابول دئ چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیځینت) ځله ووني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم( ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر ځیرني لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0 ) \qquad ( 15 . 4 )$

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(ځ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q \ (a=1 , b=p , c=q ) \qquad ( 15 . 5 )$

او $x^2 + px$ ته د څلورئ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px\ (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \quad (15,5)$$

یو و (نسبت) ( ۱۵ . ۴ ) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل ( راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ئ ، دا په دې مانا چی په ( ۱۵ . ۵ ) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:

$$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$$

(ځ،۱۵ . ۹ )

ketabton.com - The Digital Library



---

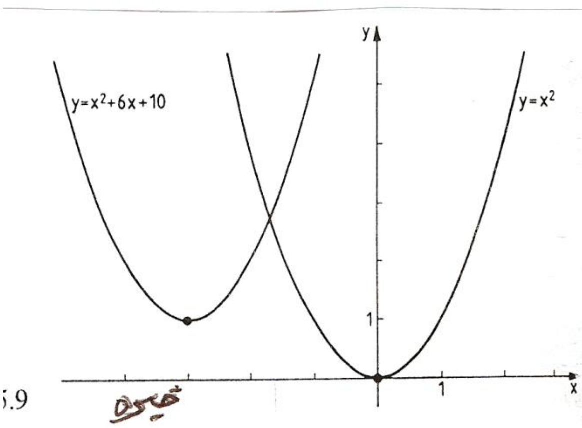
3. $y = ax^2$ ( a|=0,b=0, c = 0 )
د ککرۍ ( سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$ , $y_s = 0$

پارابول د $1 < |a|$لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$لپاره کښته لورته واز دی ( خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:
$y = 2x^2$ , $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$
(ځ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی ( لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)
$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$




.9

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$ ,(a=-1/2, b=1, c=4)
دککرۍ کواوردینات:
$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$
دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی ( ش ۱۵ . ۱۱ )

ketabton.com - The Digital Library



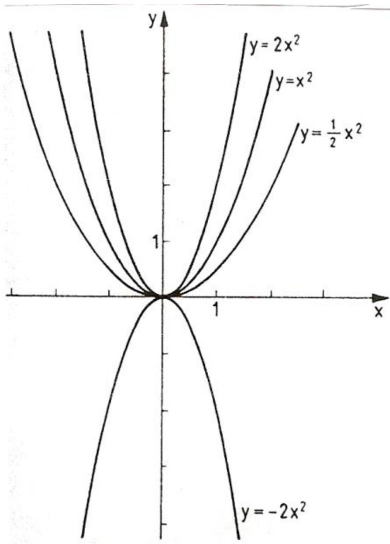



Bild 15.10 ځېره

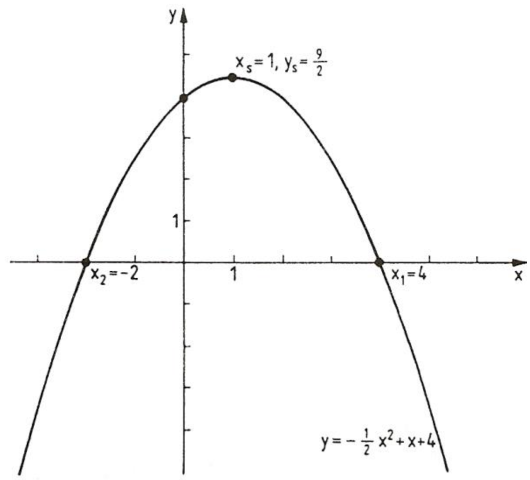



Bild 15.11 ځېره

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیوني دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1=4, x_2=-2$ دي.

و بیلګي ۱۵ . ۷ (څیره ۱۵ . ۹ ) ته :
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-10}=-3\pm\sqrt{-1}=-3\pm i$ څخه لاس ته راځي چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

فنکشن $y=x^2$ غبرګ یا جوړه( ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2}=0$ دي
د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Hornerschema، معرفي شي. ددې لپاره به د( ۱۵ . ۶ ) فورم بدل شي.

$$x_{4,5}=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm 2i$$

$$y=[a_3x^2+a_2x+a_1]x+a_0=[(a_3x+a_2)x+a_1)x+a_0$$

ketabton.com - The Digital Library



---

هغه ورکړ شوي خپلواك $x_1$ پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 له x1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یې له x1 سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (ځرکندوو)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ځلونه یا ضریبونه | | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
| منځني ځلونه | | $a_3x_1$ | $(a_3x_1+a_2)x_1$ | $[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$ |
| منځني زیاتون | $a_3$ | $a_3x_1+a_2$ | $(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$ | $[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$ |

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.
یادونه: دا د هورنر شیمت زما په دې اوسنۍ د برینکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی). اوبیونه ) :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -2 | -14 | -5 |
| $x_1 = -2$ | | -2 | 8 | 12 |
| | 1 | -4 | -6 | $7 = f(-2)$ |
| $x_2 = 5$ | | 5 | 15 | 5 |
| | 1 | 3 | 1 | $0=f(5)$ |

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځایونه)

ketabton.com - The Digital Library



---

که چرې ددریمی درجی ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو( پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴ )

بیلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د$(x^2)$ سره ، 3 د ( x ) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړئ کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او$f(x1)=0$ چی د$(x-x_1)$سره د ځلونې له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د څلورئ – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجي فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی شي ( پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

ketabton.com - The Digital Library



---

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیځینت یا ځله وونې لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$
لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | -6 | -20 | -8 | 80 |
| $x_1$ = 2 | | 4 | 8 | 4 | -32 | -80 |
| | 2 | 4 | 5 | -1 | -40 | 0 = f(0 |
| $x_2$ = 2 | | 4 | 16 | 36 | 40 | .... |
| | 2 | 8 | 18 | 20 | 0=f(2) | |
| $x_3$ = -2 | | -4 | -8 | -20 | | |
| | 2 | 4 | 10 | 0=f(-2) | | |

دا پاتی پولینوم $2x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$

لپاره لاندې د ځل فورم لري- $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

ketabton.com - The Digital Library



---

ددې لپاره چې د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنشیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو( برخه ۲۰ . ۴)

بې له دې چې د دفیرنشیالشمیر له مرستې کار واخلو ، کیدی شي چې د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چې په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري چې $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره ( f(x )تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

( ۱۵ . ۱ ) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty} [a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چې

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د±oe<- x لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او $a_n$ زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه دoe په لور ځي) .

که n جوړه او $a_n$کمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty -$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او $a_n$ کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او $a_n$کمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

ketabton.com - The Digital Library



---

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0};.........(15,7)$$

$$n, m \in N_0; a_k, b_i \in R; Q_m \neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x) \neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن ( ۱۵ . ۷ ) اصلي مات نوميږي، که n<m وي او نااصلي مات دی
که $n \geq m$ ۰ نااصل مات فنکشن کیدی شي چې د پولینوم ویش له لارې تجزیه ( توټه ) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریښتونی ماتی برخی د زیاتون په څیر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y = \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^3 - 4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې
فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6) : (x^3 - 4x) = 2x - 3$$

د 2x²+x-6پاتی ( باقي) سره. پس لرو:

y=2x-3+(2x²+x-6)/(x³-4x).

فنکشن ( ۱۵ . ۷ ) د x = x0 لپاره یو صفرځاي لري، که x = x0وي نو باور لري:
$P_n(x_0) = 0$ مګر $Q_m(x) \neq 0$

دا د $x = x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$
د $x = x_P$ لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بیلګه ۱۵ . ۱۳ :

ketabton.com - The Digital Library



---

فنکشن ( $y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتبانديِ- او ماتلانديِ فکشنونو ټوټي کولو وروسته په لانديِ فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتبانديِ صفر دی، مګر مات لانديِ صفر نه دی ( صفرځای)مات لانديِ- او مات بانديِ فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر ديِ ( تشځای )
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلانديِ صفر او مات بانديِ صفر نه دی ( قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزديِ شي، نو y د ناپاي په لور ځي چی د قطبځای ( ټيك ناپای ځای بللکيږي) xpکی کرِه داسيمپيټوتي کرښي $x = xP$ ته نزديِ کيږي .د يوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افاديِ $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دي امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن ( $n<m$ ) د x په جګ پوتنځ يعنی $x^m$ د ماتبانديِ او ماتلانديِ د ويش څخه لاس ته راځی:

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن څيره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزديِ کيږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نيسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه يی د صفر په لور ځي، لکه ټولريشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن څيره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولريشنلبرخی ته نزديِ کوي.

بيلګه ۱۵ . ۱۴:

ketabton.com - The Digital Library



---

الف: ( $y = x /(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول
یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او د$x -> \pm oe$لپاره د$x$- محور ( $y = 0$)
د اسیمپتوتی په څیر لري ( څیره. ۱۵ . ۱۲ )

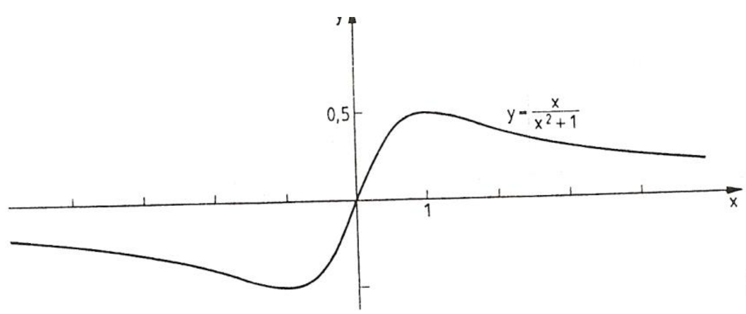
ب: ( $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځایونه( $x^2+2x-3 =0$ ) په $x1 =-3$
او $x1=1$ کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x =$
$-2$ اسیمپتوتی دی، او د $x \rightarrow \pm oe$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کيږي)دا سیمپتوتی
کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي )

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} .................................(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی( د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱ )

( 15.8 )د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګڼ n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګڼ
nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګڼ n لپاره ټولی کرېږ د تعریف دېری( - ) = D
oe,oe، د ارزښت دېری( W=(0,oe او ګډ ټکی (1,1 )، ( 0,0 ),(1,1 ) لري. (څیره
۱٤ الف ۱۵ ) د ناجوړه ګڼ د n لپاره( D = (-oe,oe
او( W = ( -oe,oe دي او ( 1-,1-) , (0,0 ). ( 1,1) ګډ ټکي دي ( څیره ۱۵ . ۱۴
ب)۰



څیره

Bild 15.12

ketabton.com - The Digital Library



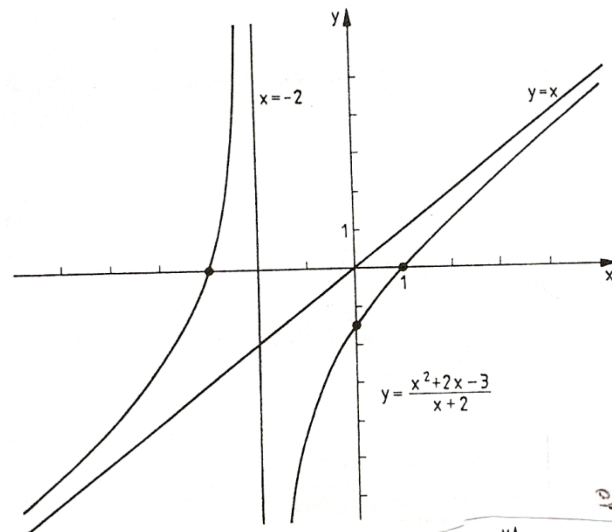



Bild 15.13

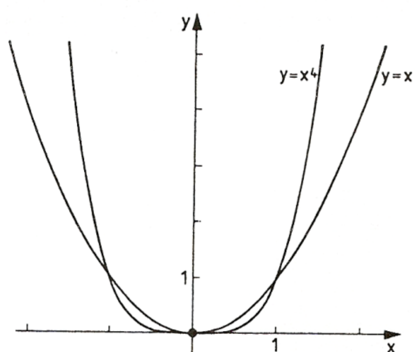



Bild 15.14a

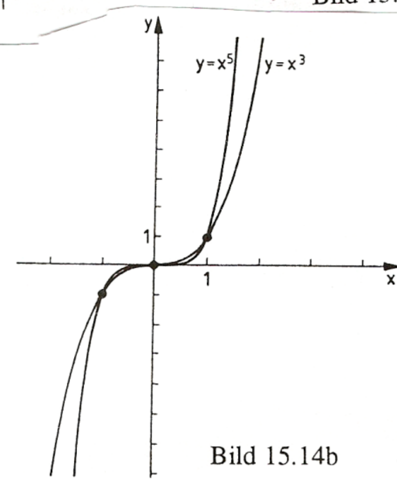



Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په x = 0 کی د یوه قطب او y = 0 کی یوې اسیمپتوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد ( کمیز n لپاره ټولی کرې د پیژند ډیري

{0}\(D = ( -oe,oe د ارزښت ډیري( W = (0,oe لري اوګډټکي (1,1), (1,1-)

؟؟؟ څیره ش. ۱۵,۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون ( کمیز n)لپاره{ 0}\(D = (-oe,oe او( W=(-oe,oe او(1-،1-) ( 1,1 ) ګډ ټکی دی ( څیره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه څیرې دي

ketabton.com - The Digital Library



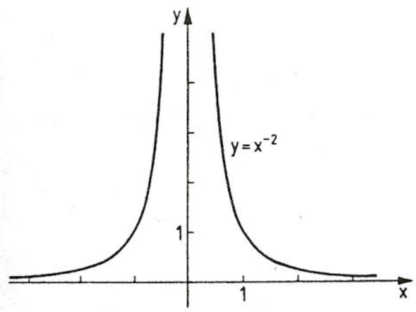



Bild 15.15a

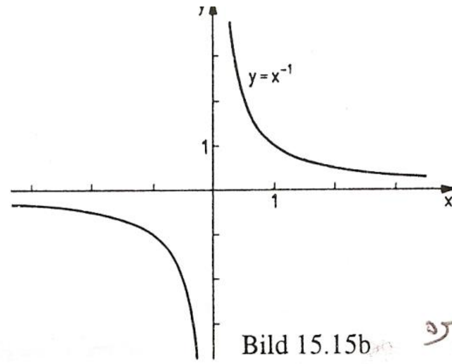



Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اینتروال په پام کی ونیول شي.( پرتله بیلګه( بیلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کینې وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- یا پر ښت فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ ,\ n \in N \setminus \{1\}\ ,\ D = [0,\infty), W = [0,\infty) ............... (15,8_b)$$

او رینبه فنکشن نومیږي (پیژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کیدی شي و ریشنل ایکسپوننت ته پراخه شي ) دلته لرو $x^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ریشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ ,\ a \in Q\ ,\ x > 0 \qquad (15\ .\ 8c)$$

نو د ریښي فنکشن ( ۱۵ . ۸ ب ) دې د پوتنځ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنځ فنکشن ( ۱۵ . ۸ ث) پرخښت بیرته پوتنځ فنکشن دی.
ټولیز پوتنځ فنکشن پیژند د رییل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی( د رییلګڼونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R\ ,\ x > 0 \qquad (15.\ 8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

ketabton.com - The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}, x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښې فنکشن لرو

$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, x \geq 0$

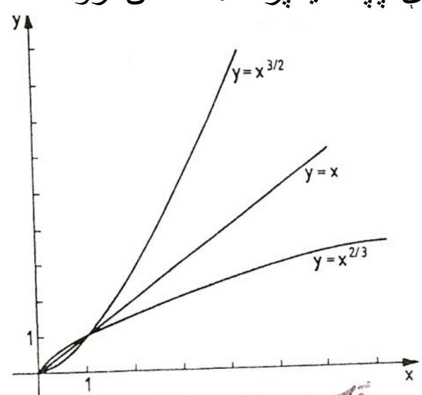



Bild 15.16a ځیره ب)

(ځیره ۱۵ . ۱۶ الف )

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

ځیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2, x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ٢ کی مو وویل چی یوائی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښې فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښې کیدونکی وی، $y=\sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری( $D = [0,oe$ کی پر ښې فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د$y= x^3$ پرښې فنکشن د[ $D= (-oe,0$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی( ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$y=a^x, a > 0, a \neq 1$.................................(15,9)

ketabton.com - The Digital Library



ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ( لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي٠
( د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

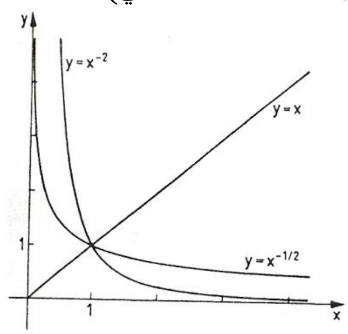



Bild 15.16b

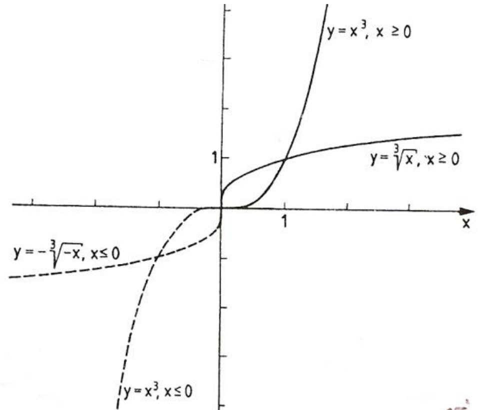



Bild 15.17

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن ( ۱۵ . ۹ ) لاندې پېژندېرې( D=(-oe,oe او ارزښتدیرې( W=(o,oe
لري. د $a^0 = 1$ له امله تېکې( (0,1 () د ټولو کږو ګډ ټکی دی

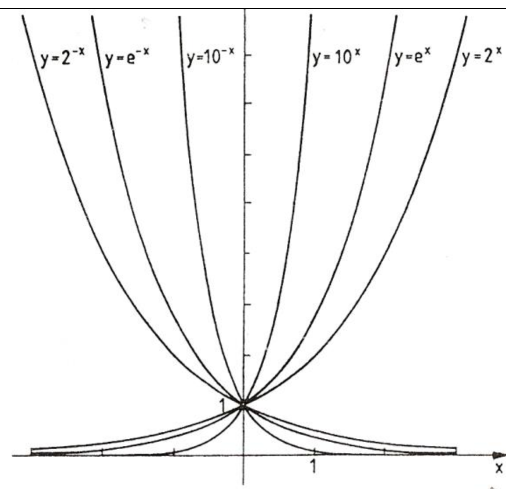



Bild 15.18

د a>0 لپاره ( ۱۵ . ۹ )
په کلکه یو غږېز- یا مونوتونجګیدونکی
دی اود x->oe سره د x - محور ته
اسیمپوتیك ورنږدې کیږي .د 0<a<1
لپاره ) ۱۵ . ۹ ( په کلکه مونوتون لویږي
او ځان د oe -> x سره د x -محور ته
اسیمپتوتیك نږدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګې
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10 )
په څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

پېژند ۱۵ . ۱۲ :

ketabton.com - The Digital Library



لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېټ فنکشن دی

$y = \log_a x , a > 0 , a |= 1$ (15.10 )

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګوری) فنکشن ( ۱۵ . ۱۰ ) پیژندديری $D = (0.oe )$ او د ارزښتديری( $W=(-oe,oe)$ لري.

د $y = \log_a x$ کرې د ګرو $y=a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکی(1,0 ) د ټولوکرو ګډ ټکی دی ( څیره شته دی)

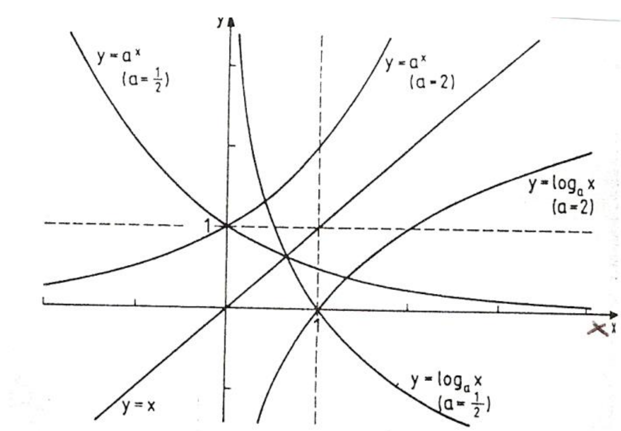



Bild 15.19 څېره

د a>1لپاره( ۱۵ . ۱۰ ) کلك مونوتونجګیدونکی اود x->0لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د 1>a> 0لپاره ( ۱۵ . ۱۰ ) کلك مونوتون لویدونکی دی او د x> 0لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېټ یی یعني $y = \log_a x$

د a= 2 او a=1/2 لپاره انځوریږي .

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10}x = \lg x , y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

ketabton.com - The Digital Library



---

د تریگونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې( پرتله برخه ۶ . ۳ ) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کيږي یا راوړل کيږي.

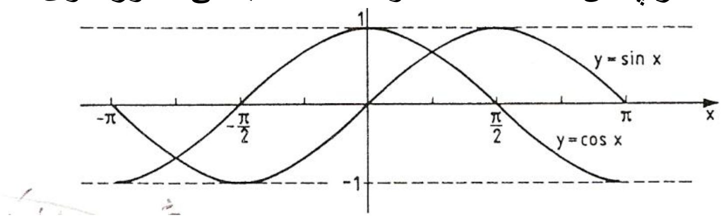
$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]$..................................................$(15,11_a)$

$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]$..........................................$(15,11_b)$

$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z$....$(15,11_c)$

$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z$..........$(15,11_d)$

د دې کړوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.




تریگونومتریکی فنکشنونه $y = \sin x$, $y = \tan x$ , $y = \cot x$ ناجوړه فنکشنونه، او $y = \cos x$ یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریگونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي( مقایسه ۱۵ . ۵)
فنکشنونه $y=\sin x$ , $y= \cos x$ پریودې $2\pi$ لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin (x+2k\pi) = \sin x$ ; $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ , $k\in Z$

لاندې فنکشنونه پریود $\pi$ لري
$y=\tan x$ , $y=\cot x$ .دا په دې مانا چي

$\tan ( x + k\pi) = \tan x$, $\cot ( x + k\pi) = \cot x$ , $k\in Z$

د تریگونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k\in Z$

د $y=\tan x$, $k\in Z$ $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $y=\sin x$ لپاره او د $y = \cot x$ , $y = \cos x$
لپاره تانجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه ) لري یعني $y = \tan x$
په $k \in Z$ , $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ او $y = \cot x$ په $k \in Z$ , $x_k = k\pi$ کی.

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلگي په توگه

ketabton.com - The Digital Library



---

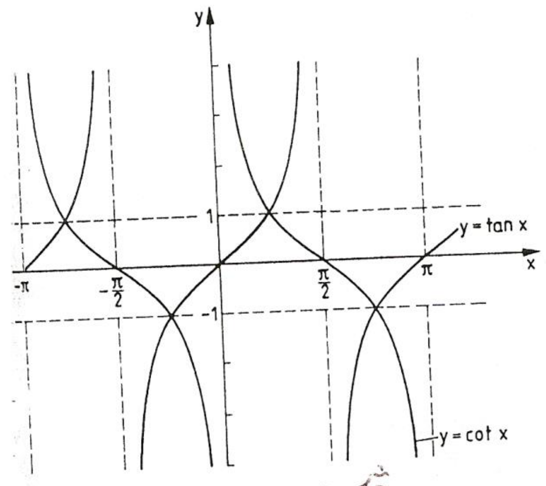



Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دی او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګیدونکی یا پورته کیدونکی دی

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی۰

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دی

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

ketabton.com - The Digital Library



---

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \qquad (15.11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن ( ۱۵ . ۱۱ت) د پيژند ( ۱۵ . ۱۵ ) له مخی تړلی يا ځنځيري فنکشن دی. موږ ترځيرني لاندې نيسو چي د ساين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل tاو زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك )Argoment( د کږيخيره باندې څه تاسير اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثير په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول يا راکشول دی که ( |a| > 1 )او يا پړسول دي که
|a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت y = sin t دی، چيرته چی برسيره پردې د 0 > a لپاره په t - محور يوه اينه ځيرونه هم منځ ته راولي ( ځره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2
په فنکشن کی a امپليتودې Amplitude(جګوالی( نوميږي او د شوينګنګ Schwingungرپيدنی پراخوالی يا ښه : سور باندې تاثير اچوي.
ځيره شته

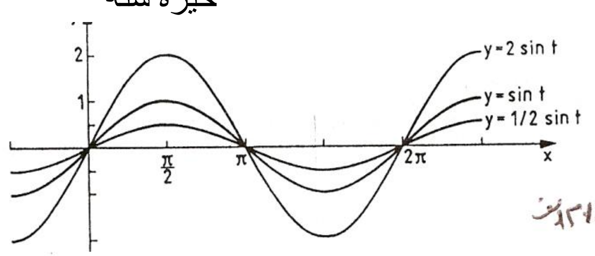



Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور $\omega$ په فنکشن y = sin t باندې يو وختني غزول که $|\omega|<1$ يا پړسول که$|\omega|>1$ وي تاثير اچوي.چيرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسيره پردې يو په y- محور اينونه هم ده.
د يوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ يوه فنکشن ارزښت، دy = sin t خپلواك $\omega$ -ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي ( ځيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب ).
ګردی فرکونځ ( Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودې تاثير اچوي او $y = \omega t$ پريودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

ketabton.com - The Digital Library



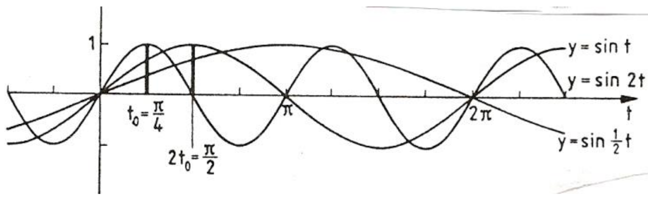



Bild 15.21b

۳ – زیاتیدونکی $\varphi$ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور $\varphi>0$ او یا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چی د $y=\sin t$ لپاره٠

د $\varphi$ په کچه راکښل شوی ( یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی ) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(څیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

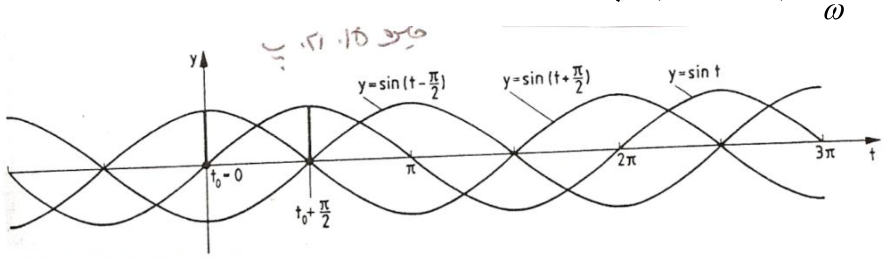
$$(\varphi=\frac{\pi}{2},\varphi=-\frac{\pi}{2})$$

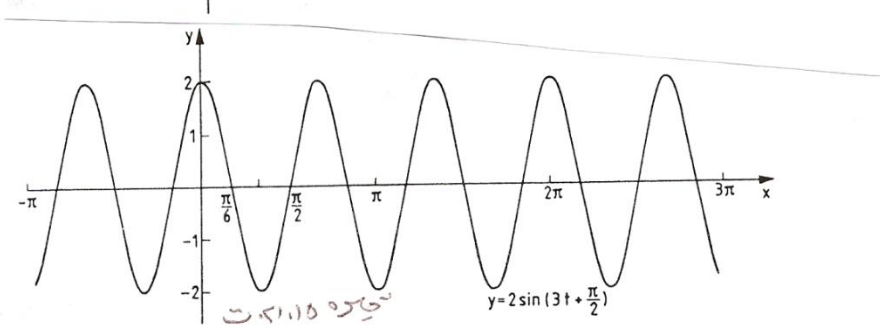
په فنکشن

$$y = a.\sin(\omega t+\varphi)= a.\sin\omega(t+\frac{\varphi}{\omega})$$

کی $\varphi$ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کره $y = a.\sin\omega t$

د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.



ketabton.com - The Digital Library



---

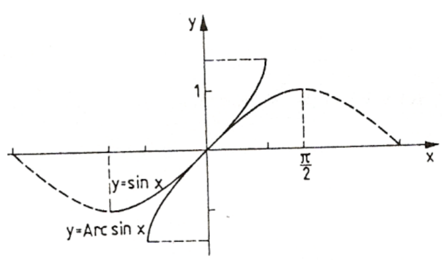
په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin ( 3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپليتود a = 2 لري، پريودې يی $P=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{6}$ کې د sint و کيڼ لورته راکښل شوی دی.

ځېره ۱۵ . ۲ پ $\varphi=\frac{\pi}{2},\varphi=-\frac{\pi}{2}$

د ټريګونومتري فنکشنونو( يواځني) په معکوسوالي يا په ځتوالي کی موږ په ځانګړو يوغږيزو يا مونوتوني اينتروالونو تکيه کوو، د لاندې تعريف سره مناسب

پيژند ۱۵. ۰ ۱۴ :

( پام: ځيرې له تشريح د مخه راغلې، بله لار نه وه)



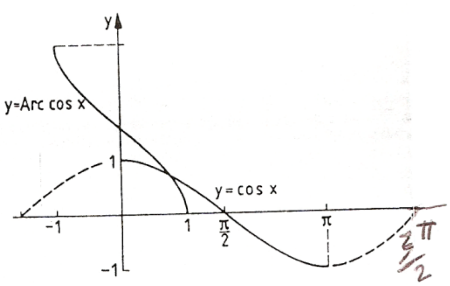
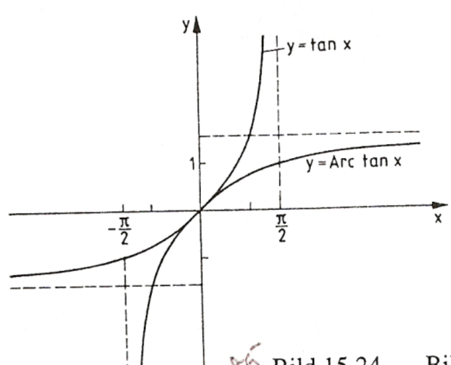




Bild 15.22 Bild 15.23



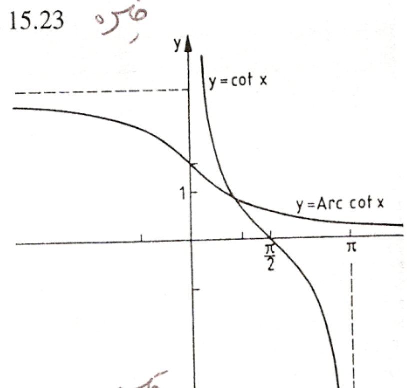




Bild 15.24 Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

ketabton.com - The Digital Library



$$1.\ y=\sin x,\quad D=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ W=[-1,1] \qquad (15.12a)$$

$$2.\ y=\cos x,\quad D=[0,\pi],\quad W=[-1,1] \qquad (15.12b)$$

$$3.\ y=\tan x,\quad D=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ W=\mathbf{R} \qquad (15.12c)$$

$$4.\ y=\cot x,\quad D=(0,\pi),\quad W=\mathbf{R} \qquad (15.12d)$$

پرځښ یا چپه فنکشنونه لاندې څیکلومتریکي فنکشنونه ( ارکوس فنکشنونه ) دي:

$$1.\ y=\operatorname{Arc}\sin x,\quad D=[-1,1],\quad W=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad (15.13a)$$

$$2.\ y=\operatorname{Arc}\cos x,\quad D=[-1,1],\quad W=[0,\pi] \qquad (15.13b)$$

$$3.\ y=\operatorname{Arc}\tan x,\quad D=\mathbf{R},\quad W=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \qquad (15.13c)$$

$$4.\ y=\operatorname{Arc}\cot x,\quad D=\mathbf{R},\quad W=(0,\pi) \qquad (15.13d)$$

د تریګونومتري فنکشنونو برخې په مونوتوني ایتروالونو ) ۱۵ .۱۲ الف( تر) ۱۵ . ۱۲ ت ( او د هغوي چپه ) ۱۵ . ۱۳ الف ( تر ) ۱۵ . ۱۳ ت ( په څیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

## ۱۵ . ۴ ځنځیري ( تړلي ) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $z \in W$لپاره یو فنکشن $y= f(z)$ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x تړلی ( ځنځیري) فنکشن بلل کیږي۰

یادونه : یو تړلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه $z = f(x$

د$x\in D, z\in W$لپاره او $w=h(z)$ د $z\in W, w\in W^*$لپاره

او$y=f(w)$ د $W^*\in W$ لپاره لرو،

نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو تړلی فنکشن دئ

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y=e^z$ سره تړلی فنکشن $y=e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

ketabton.com - The Digital Library



---

ب : په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د ننني - او $y = z^2$ دباندنی فنکشن دی
پ : د
$, y = \cos w \ \ w = \sqrt{z} \ , \ z = 2x + 4,$
سره ترلي فنکشن $y = \cos\sqrt{2x+4}$ لاس ته راځي
ت : په ترلي فنکشن $y = \text{Arctan}1/(x-1)$ کی$z = x-1$ دننني، $w = 1/z$منځنی او $y = \text{Arctan } w$دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :
ب) د $x = 0.5$ لپاره دی
$z = x^2 = 0,5^2 = 0,25; y = \sin x^2 = \sin z = \sin 0,25 = 0,24740$
او
$z = \sin x = \sin 0,5 = 0,47942; y = \sin^2 x = z^2 = 0,47942^2 = 0,22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z = x-1 = 2-1 = 1 \ ; \ w = 1/z = 1/1 = 1$
$y = \text{Arctan} w = \text{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشریح:

$y = f(x)$ تحلیلي( شننیزه) وینا بلل کیږي، که$f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو ترلی یا ناترلي( ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداېول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

ketabton.com - The Digital Library



---

مثبت وي او( Arc sin f(x همداډول( Arc cosf(x تیك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري یا تعریف دي

بیلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحلیلي ویناو لپاره دې تعریفېدیري پیداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

رادیکاند باید کمیز یا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 \iff x^2 \geq 3 \iff |x| \geq 3$ ( $x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D = (-oe , - 3] \cup [3 ,oe]$

ب )( $y=\lg(x+2)+1/(3+2x-x^2$ له لمړي زیاتونی کی باید Numerus > 0 نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 \iff x >-2$ ،

پس( $D1=(-2,oe$

په دوم زیاتوني کی باید مات لاندې په صفر برابر نه وي ( =| 0 ) وي . د مات لاندې صفرځایونه

له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

د فنکشن تعریفېدیری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفېدیري وي یعنی د D1 او D2

غوڅېدیری: $D=D_1 \cap D_2 = (2 ,oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = \text{Arc sin } (x-1)/5$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفېدیري په پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 \iff -5 \leq x-1 \leq 5 \iff -4 \leq x \leq 6 \Rightarrow D=[-4,6]$

ت $( y = 1 /\sqrt{( x^2 - 4)}$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 \iff x^2<4 \iff x>2$ یا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

ketabton.com - The Digital Library



## ۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y – 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x = 2t$ $y = -t^2 + 3t$ b) $x = \sqrt{t}$ $y = 2t+1$

c) $x = 1/t$ $y = 2(t-3)$ d) $x (/2)t - 1$ $y = t^2$

پارامتر له منځه یوسئ او په دې سره ورکړئ $y = f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړئ، او که ممکن وي نو مونوتونی اینټروالونه په تعریفډیریو بیل (تجزیه ) کړئ، یا لمو نه کړئ.

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړئ چې لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 /2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړئ

ketabton.com - The Digital Library



---

a ) $y = -2x + 3$ b ) $y = (x-1)(x+2)$ c ) $y = x^2-x-2$

d) $y = 2x^2 -12x +18$ e ) $y = x^2 + 1$ f ) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په ځت فنکشونونه پیدا کړی

a ) $y = -2x + 3$ b ) $y = x^2 + 1$ , $D = [0, \infty)$, $W = [0,\infty)$

c ) $y = (x+1)^2$ , $D = [-1,\infty)$, $W = [0,\infty)$, d) $y = x^3 /2$ , $D = [0,\infty)$, $W = [0,\infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a ) $y = 0,4x -1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1 /5)( 3x +1,5)$

d ) $y = 2$ e ) $3x -3y -7 = 0$ f ) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج $\propto$ دې پیدا شي، او صفرځایونه $x_N$ و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a ) (2,3) (5,5) b ) (1 ,1 ) او (3,7) c) (-1,0) او ( -2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 -4x +3$ b) $y = x^2-8x+16$ c ) $y = x^2 -6x +10$

d ) $y = (x-5x)(x-1)$ e ) $2x^2 -10x+12$ f ) $y = 3x^2 +6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2}+x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x +2$ i ) $y = 5x^2 +45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګنل شي. فنکشنونه دې د خلفورم باندې انځور شي

a ) $y = f(x) = x^3 -6x +5$; $x_1 = 1$ , $x_2 = -1$

b ) $y = f(x) = (1 /2)x^3 -x^2 -(13 /2)x -5$; $x_1 = 1 /5$ $x_2 = 5$

c ) $y = f(x) = x^3 +2x + 2x$ ; $x_1 = -2$ $x_2 = 0,2$

d ) $y = f(x) = x^4 -x^3 -28x^2 32x +40$ ; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e ) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 -6x^2 +5x +6$ ; $x_1 = 1,5$ $x_2 = 2$

ketabton.com - The Digital Library



۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه ورکړ شي :

a) $y = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y = \frac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y = \frac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y = \frac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y = \frac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځایونه دې وګڼل شي، پول. تشځایونه او د ± 8 <- x لپاره ځان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$ , D = R , W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R , W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) y = ln(x-1) , D =(1,œ), W = R

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څټ فنکشنونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ – ترلي فنکشنونه y = f[h(g(x))] په دننه او دباندې فنکشنونو

y = f(w) , w = h(z) , z = g(x )

بیل ( تجزیه ) کړی( د تعریف–او ارزښتډیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو )

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = (e^{x+1})^2$ c) $y = \lg\sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan\sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan\sqrt{x} - 3$ i) $y = \operatorname{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y = \sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y = \operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

ketabton.com - The Digital Library



---

۱۵ - ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$

بیل کړی (د تعریف– او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي )

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ - د لاندې شننیزویا سپړنیز (تحلیلي ) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$ f) $y = \ln(2x + 5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x - 4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

ketabton.com - The Digital Library

## د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې څنو ځایونو غزېدلې او څنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه( هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

ketabton.com - The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون ( دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

ketabton.com - The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

ketabton.com - The Digital Library

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

<u>Bonn (Germany):</u>

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره :

دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دویمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه ( هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند ( منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

ketabton.com - The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې( دا هغه لیکنې دي، چې څنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګې پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

ketabton.com - The Digital Library

# د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميږي شينواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه ) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې( ښوونځي له لومړي ټولګي پيل او د دويم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير( صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان ميږي په ۱۹۷۲ کې له لرې د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوژده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلې.

ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

ketabton.com - The Digital Library

## Thank you for reading

Find more e-books and articles on Ketabton - your multilingual digital library.

**www.ketabton.com**

*Ketabton - Pashto, Farsi, Arabic & English*