



## کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: اقتصادي رياضي  
خانکه: محاسبه  
مولف: عبدالعزيز جليلی  
ژباړن: عزت الله خُواب

### د څار کمېټه:

- محمد آصف ننگ د تخنیکي او مسلکي زده کړو معین
- دیپلوم انجنیر عبدالله کوزایي د تعلیمي نصاب رییس
- محمد اشرف وحدت په تعلیمي نصاب کې د معینیت د مقام سلاکار

### د تصحیح کمېټه:

- محب الرحمن محب
- عبدالجمیل ممتاز
- احمد فهیم سپین غر

د گرافیک او ډیزاین څانگې مسئول :

محمد جان علیرضایی

گرافیک او ډیزاین:

محمد سلیم خان

چاپ کال:

۱۳۹۲ لمریز کال

تیراژ:

۳۰۰۰

چاپ ځل:

لومړی

وېب پاڼه:

[www.dmtvet.gov.af](http://www.dmtvet.gov.af)

برېښنالیک:

[info@dmtvet.gov.af](mailto:info@dmtvet.gov.af)

کډ ISBN:

۹۷۸۹۹۳۶۳۰۰۵۳۸

# Ketabton.com

د چاپ حق د تخنیکي او مسلکي زده کړو له معینیت سره خوندي دی



## ملي سرود

دا وطن افغانستان دی	دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې	هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی	د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو	د ترکمنو د تاجکو
ور سره عرب، گوجر دي	پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي	هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل څلیږي	لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به	لکه زړه وي جاوېدان
نوم د حق مو دی رهبر	وایو الله اکبر وایو الله اکبر



## د پوهنې وزیر پېغام

### گرانو زده کوونکو، محصلانو او درنو ښوونکو!

د یوې ټولنې وده او پرمختګ کاملاً د همغږې ټولنې د پیاوړو کاري کادرونو، بشري قوې او ماهرو فکرونو په کار او زیار پورې تړلي دي. همدا بشري قوه او کاري مټې دي چې د هیواد انکشافی اهدافو ته د رسیدو لارې چارې طی کوي او د یوه نیکمرغه، مرفه او ودان افغانستان راتلونکی تضمینوي. انسان په خپل وار سره د الله تعالی له جانبه او هم د خپل انساني فطرت له اړخه مؤظف او مکلف دی چې د ځمکې په عمران او د یوه سوکاله ژوند د اسبابو او ایجاباتو د تکمیل لپاره خپل اغیزمن نقش، همدارنګه ملي او اسلامي رسالت ادا کړي.

له همدې ځایه ده چې د یوه ژوندي او فعال انسان نقش، د خپل ژوند د چاپیریال او خپلې اړوندې ټولنې په اړه، تل مطلوب او په هیڅ حالت کې نه نفی کېږي او نه هم منقطع کېږي. په ټول کې د پوهنې نظام او په خاصه توګه د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت مسوولیت او مکلفیت لري چې د اسلامي ارزښتونو، احکامو او همداراز معقولو او مشروعو قوانینو ته په ژمنتیا سره، د افغانستان په انکشاف کې فعاله، چاپکه او موثره ونډه واخلي، ځکه دغه ستر او سپیڅلي هدف ته د رسیدو په خاطر د انساني ظرفیت وده، د حرفوي، مسلکي او تخنیکي کادرونو روزنه او پراختیا یو اړین مقصد دی. همدا په تخنیکي او مسلکي زده کړو مزین تنګي ځوانان کولی شي چې په خپلې حرفې او هنر سره په سیستماتیک ډول د هیواد انکشاف محقق او میسر کړي.

جوته ده چې په افغانستان کې د ژوند تک لاره، دولتداري او ټولنیز نظام د اسلام له سپیڅلو احکامو څخه الهام اخیستی، نو لازمه ده چې زموږ د ټولنې لپاره هر ډول پرمختګ او ترقي باید په علمي معیارونو داسې اساس او بنا شي؛ چې زموږ د کارګر نسل مادي او معنوي ودې ته پکې لومړیتوب ورکړ شي. د حرفوي ظرفیت جوړونې تر څنګ د ځوانانو سالم تربیت او په سوچه اسلامي روحيې د هغوی پالنه نه یوازې پخپل ذات کې یوه اساسي وجیبه ده، بلکې دا پالنه کولی شي چې زموږ وطن پخپلو پښو ودروي، له ضعف څخه یې وژغوري او د نورو له سیاسي او اقتصادي احتیاج څخه یې آزاد کړي.

زموږ گران زده کوونکي، محصلان، درانه استادان او مربیون باید په بشپړه توګه پوه شي، چې د ودان او نیکمرغه افغانستان ارمان، یوازې او یوازې د دوی په پیاوړو مټو، وینښ احساس او نه ستړي کیدونکي جد او جهد کې نغښتی او د همدغو مسلکي او تخنیکي زده کړو له امله کیدای شي په ډیرو برخو کې د افغانستان انکشافی اهداف تر لاسه شي.

د دې نصاب له ټولو لیکوالانو، مولفینو، ژباړونکو، سمونکو او تدقیق کوونکو څخه د امتنان تر څنګ، په دې بهیر کې د ټولو کورنیو او بهرنیو همکارانو له مؤثرې ونډې او مرستو څخه د زړه له کومي مننه کوم. له درنو او پیاوړو استادانو څخه رجماندانه هیله کوم چې د دې نصاب په ګټور تدریس او فعاله تدریب سره دې د زړه په ټول خلوص، صمیمي هڅو او وجداني پیکار خپل ملي او اسلامي نقش ادا کړي. د نیکمرغه، مرفه، پرمختللي او ویاړمن افغانستان په هیله

### فاروق وردګ

### د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

## لړليک

پاڼې	سرليکونه	خپرکي
۱۰-۱	د رياضي ځينې مفاهيم او اصطلاحات	لومړی
۲۸-۱۱	معادلې او توابع	دویم
۵۴-۲۹	الجبري معادلې	درېیم
۶۲-۵۵	ردیفونه او سلسلې	څلورم
۸۰-۶۳	لوگارتم	پنځم
۸۸-۸۱	متکس او دیترمینانت	شپږم
۹۲-۸۹	د توابعو لمټ او مشتقات	اووم
۱۱۲-۹۳	د تابع تزاید او مشتقات	اتم
۱۱۳	سرچینې او اخیستنې	
۱۱۴	د ښوونیز نصاب د پراختیا د ریاست پیغام	

## سریزه

په پیل کې هڅه شوې ده، چې د ځینو اصطلاحاتو او مفاهیمو په توضیح کولو سره لوستونکي د ریاضي له ژبې سره اشنا کړو او دوی د هغو مفاهیمو یو ټولیز تصویر له ځان سره ولري، چې اړتیا ورته لري.

دا کتاب د انسټیټیوټ د لومړي کال د موضوعاتو په سویه ساده مثالونه لري، چې د توابعو په گرافونو، معادلاتو، د معادلو په سیستم، مترکسونو، دیرمانتونو، لوگارتم، سلسلو، لمټونو، مشتقاتو، د مشتق د کارولو او ورسره د تابع د تحولاتو او د صنعت او اقتصاد لپاره لارښوونې لري.

دا موضوعات په ساده عامو جملو کې له بېلگو سره یو ځای توضیح شوي.

له دې هرې موضوع نه یو ځانگړی کتاب جوړېږي؛ خو دلته هڅه شوې ده، چې په شنلي او لنډ ډول د ډېرو ساده او روښانه مثالونو پر مټ توضیح شي.

د دې مثالونو په زده کړې سره محصلین کولی شي، چې کم تر کمه د دې کتاب موضوعات زده او درک کړي.

سربره پر دې د دې موضوعاتو په زده کولو سره محصل نه یواځې دا چې کولای شي د خپلې مسلکي ریاضیکي ساحې ستونزې حل کړي، بلکې له دې ورو هخوا کولای شي، چې د پرمختللیو ریاضیاتو لپاره تیاری و نیسي.

دا کتاب د محاسبې په څانگو کې د تدریس وړ دی، د دې کتاب د لیکلو اصلي انگېزه د مفرداتو د راټولولو، د ادارې او د محصلینو د غوښتنو او د مسلکي معینیت د تعلیمي نصاب د پراختیا د محترم ریاست هڅه او لارښوونه وه.

د دې کتاب په تدوین کې د معاصرو لویو ریاضي پوهانو له تألیفاتو او د اقتصادي مدیریت او حسابدارۍ د څانگو له ریاضیکي درسونو نه گټه اخیستل شوې ده. دا کتابونه به له نیمگړتیاوو خالي نه وي؛ خو هیله ده محصلین، څېړونکي او د نظر خاوندان په خپلو ارزښتمنو نظرونو او منطقي وړاندیزونو د دې کتاب په سمون او بشپړتیا کې له لیکوال سره همکاري وکړي.

په درنښت

عبدالعزيز جليلي

### تولیزه موخه:

د محاسبې په چاروکې د لازمو او د اړتیا وړ مهارتونو لاسته راوړل، د اقتصادي رياضي د اصولو، اصطلاحاتو او قواعدو سره سم د رياضي د مسايلو حل او په توليد، صنعت، احصايې او نورو برخو کې د دې کارول او ورسره د انسانانو ورځنی تکامل او پرمختگ او د ژوند په چارو کې له اقتصادي رياضي نه گټه اخيستل.

## د ریاضي ځینې مفاهیم او اصطلاحات

## ټولیزه موخه

د ریاضي د اصطلاحاتو بیانول، تحلیل او کارونه

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلین د لاندېنیو موضوعاتو په اړه معلومات لاسته راوړي:

- له قواعدو، اصولو او اصطلاحاتو څخه په سمه توګه ګټه اخیستنه او د هغو توضیح.
- د مسایلو په بیان او حل کې د قواعدو، اصولو او اصطلاحاتو کارونه او ورسره د اقتصادي ریاضي د مسایلو هوارول.
- د مفاهیمو او اصطلاحاتو په اړه د اقتصادي ریاضي د موضوعاتو او قضیو تجزیه او تحلیل.

## Exponent توان یا (طاقت)

هر کله چې یو الجبري حد څو ځلې په خپل ځان کې ضرب شي، کولای شو هغه داسې ولیکو:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n$$

په دې صورت کې  $a$  ته قاعده (Base) او  $n$  ته توان یا طاقت ویل کېږي. طاقت په الجبر کې د قوانینو لرونکی دی.

## د طاقت لرونکو عددونو قوانین

۱- د ضرب قانون: که چېرې قاعدې مساوي وي، له قاعدو څخه د یوې قاعدې په نظر

کې نیولو سره توانونه جمع کېږي. مثلاً:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$1 - a^2 = a \cdot a \quad a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+3} = a^5$$

$$2 - x^4 \cdot x^3 = x^{4+3} = x^7 \quad 3 - (-x)^2 \cdot (-x)^5 = (-x)^{-2+5} = (-x)^3$$

$$3 - x^{2m+3} \cdot x^{-m-5} = x^{m-2}$$

که چېرې قاعدې مختلفې او توانونه مساوي وي، په دې صورت کې قاعدې ضربېږي او له توانونو څخه یو نیول کېږي. مثلاً:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$1 - (3xP)^5 \cdot (2aPx)^5 = (6aPx)^5$$

$$2 - (2xy)^{m+3} \cdot (-2x^2aP)^{m+3} = (-4x^3aPy)^{m+3}$$

که چېرې یو توان په سر بل توان ولري، په دې صورت کې له لاندې رابطې څخه کار اخیستل کېږي:

$$(a^n)^m = a^{nm} \rightarrow (x^2)^3 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x^6$$

$$(x^2)^3 = x^6$$

$$\left((x^{-2})^3\right)^2 = x^{-2 \cdot 3 \cdot 2} = x^{-12}$$

2- د تقسیم قانون: که چېرې قاعدې مساوي وې له قاعدو څخه یوه قاعده په نظر کې نیول کېږي او د صورت له توان څخه د مخرج توان منفي کوو:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

مثال:

$$1 - \frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2$$

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$$

که چېرې په پورته رابطه کې توانونه مساوي وي لاندې نتیجه په لاس راځي.

$$\frac{a^n}{b^n} = a^{n-n} = a^0 = 1 \rightarrow \left(\frac{a^n}{a^n}\right) = \left(\frac{a}{a}\right)^0 = 1$$

که د تقسیم په قانون کې قاعدې مختلفې او توانونه مساوي وي کولای شو ولیکو:

یعنی قاعدې تقسیمېږي او پر یوه توان لیکل کېږي.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

مثال:

$$\frac{(6x^3 p^2)^4}{(3x^2 p)^4} = \left(\frac{6x^3 p^2}{3x^2 p}\right)^4 = (2xp)^4$$

له پورته رابطې څخه لاندې رابطه پیدا کولای شو.

$$a^{-1} \cdot a^1 = 1 \rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}} = \frac{1}{\frac{a^{-n}}{b^{-n}}} = \frac{b^{-n}}{a^{-n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

مثالونه:

$$1 - (mx)^{-5} \div (mx)^{-3} = (mx)^{-5+3} = (mx)^{-2} = \frac{1}{(mx)^2}$$

$$\begin{aligned} 2 - \left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3}{2}} \div (n-1)^{-\frac{3}{2}} &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}}{(n-1)^{-\frac{3}{2}}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{n}\right)^0 = 1 \end{aligned}$$

فکتوریل، د فکتوریل مفهوم او د فکتوریل د استعمال ځای

د طبیعي عددونو سټ په نظر کې نیسو:  $\{1-2-3-4-5-6-7-8-9-\dots\}$

یو په بل کې د دې ټولو عددونو د ضرب حاصل فکتوریل نومېږي او په لاندې ډول

شودل کېږي.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = n!$$

د  $n!$  دا رنگه شونې ته د  $n$  فکتوریل ویل کېږي، کولای شو  $n!$  په لاندې ډول هم

وړاندې کړو.

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$n! = n(n-1)! \Rightarrow (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

$$(1-1)! = \frac{1!}{1}$$

که چېرې  $n = 1$  قیمت واخلې په نتیجه کې صفر فکتوریل دی.

$$0! = 1$$

### مثالونه:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$(n-3)! = (n-3)(n-4)(n-5)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

فکتوریل په ترکیبي انالیز کې د کارونې زیات ځایونه لري، همدارنگه د ضریب د لاسته راوړلو لپاره د بینوم حدونو انکشافی شکل  $(a+b)^n$  کېدای شي د گټې اخستنې وړ وي.

۱ - د پارټیشن په عملیه کې بدلون (permutation)، چې د شیانو، اعدادو، حروفو او کلماتو مخې ته ځای پرځای کول دي، د مثال په ډول:

a د توری یواځې یو بدلون لري

a, b د دوو بدلونونو لرونکي دي ab, ba

a, b, c د شپږو بدلونونو لرونکي دي abc bac cab acb bca cba

له پورتنیو رابطو څخه دا نتیجه په لاس راځي.

$$1! = 1 \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

گورو چې د اجزاء په زیاتېدو د ډلو شمېر هم زیاتېږي، که اجزاء هرڅومره زیاتېږي د ډلو پېژندل ستونزمن کېږي؛ خو کولای شو، چې له فکتوریل څخه په گټې اخستنې د هغو شمېر معلوم کړو، د مثال په ډول که m د اجزاء شمېر وي د ډلو شمېر به یې د  $P_m = m!$  فورمول د اجزاوو د ځای پر ځای کولو له مخې ټاکل کېږي.

مثال: د یو څلور رقمي عدد 1,3,5,4 د ځای پر ځای کولو د رقمونو شمېر په کار دی، په دې ځای کې لکه څنګه چې ارقام څلور رقمي دي د پورته فورمول له مخې لرو:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

۲ - په ترتیب (Arrangement) کې

$$\binom{n}{A_m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

۳ - په ترکیب کې

$$\binom{m-n}{m} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

په دوه حده انکشاف کې

$$(a+b)^n \in \mathbb{N}$$

$$(a+b)^n = \frac{a^n}{0!} + \frac{na^{n-1}}{1!}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2} \cdot b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \frac{n!}{n!}b^n$$

$$(a+b)^7 = \frac{a^7}{0!} + \frac{7ab}{1!} + \frac{6 \cdot 7}{2!}a^5b^2 + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!}a^4b^3 + \frac{4 \cdot 5 \cdot 7}{4!}a^3b^4 + \dots + b^7$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

**یادونه:** باید وویل شي چې د ریاضي په یو شمېر موضوعاتو کې، چې فکتوریل کارول کېږي د ترکیبي انالیز موضوعات یادول د دې کتاب په بحث کې نه دي؛ بلکې د فکتوریل د کارونې ځایونه پکې شامل دي. مثلاً:

$$e = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!}$$

جذري الجبري افادي

که  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, x \in \mathbb{R}^+$  او  $x^n = a$  وي؛ نو  $x = \sqrt[n]{a}$  دی. لیدل کېږي، چې د دې رابطو په منځ کې منطقي تعادل موجود دی.

مثالونه

$$x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

$$2^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{16} = 2$$

$$3^3 = 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{27} = 3$$

جذر

که الجبري افاده د کسري توان  $a^{m/n}$  لرونکې وي، کولای شو هغه د الجبري جذر په شکل ولیکو

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad a \text{ د جذر لاندې}$$

د جذر توان n

مثالونه

$$(3x)^{2/3} = \sqrt[3]{(2x)^2}, (x+y)^{7/6} = \sqrt[6]{(x+y)^7} = \sqrt[6]{(x+y)^6} \cdot \sqrt[6]{(x+y)} = (x+y)^6 \cdot \sqrt{x+y}$$

### د جذرونو همدگره کول

که جذري الجبري افادې د مختلفو جذري درجو لرونکې وي؛ د همدگره کولو لپاره يې ترټولو کوچنی مشترک مضرب د جذرونو درجې ټاکو، په جذري درجه يې تقسيموو او نتيجه د افادې په طاقت کې تر جذر لاندې نيسو.

مثال

$$\sqrt[5]{a^2}, \sqrt[3]{b} = \sqrt[15]{a^6}, \sqrt[15]{b^5}$$

$$\sqrt[5]{3^2}, \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{3^6}, \sqrt[15]{2^5}$$

### د جذرونو مقايسه

په هغه صورت کې چې جذر همدگره وي، هغه جذر لوی دی چې مجذور يې لوی وي.

مثال

$$\sqrt{64}, \sqrt{25}$$

$$\sqrt{64} > \sqrt{25}$$

که د جذرونو درجې يو شان نه وي، اول يې همدگره کوو او بيا يې مقايسه کوو.

مثال

$$\sqrt[5]{6}, \sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[15]{6^3}, \sqrt[15]{4^5} \rightarrow \sqrt[15]{216}, \sqrt[15]{1064} \rightarrow \sqrt[15]{6} < \sqrt[15]{4}$$

مثال

$$\sqrt{3}, \sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[6]{3^2}, \sqrt[6]{2^2}$$

$$\sqrt[6]{9}, \sqrt[6]{4} \Rightarrow \sqrt{3} > \sqrt[3]{2}$$

### د جذرونو فورمولونه

$$1) \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$2) \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}$$

$$3) \sqrt[n]{a^n} = (a)^{n/n} = a$$

$$4) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$5) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$6) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

پر جذري الجبري افادو باندې اساسي عمليې

د هغو جذرونو ضرب، چې د يو شان جذري درجو درلودونکې وي:

$$1) \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^t} = \sqrt[n]{(a)^{m+t}}$$

$$2) \sqrt[3]{(3x)^3} \cdot \sqrt[3]{(2x)^2} = \sqrt[3]{(3x)^3 \cdot (2x)^2} = \sqrt[3]{108x^5}$$

$$3) (-2 \cdot \sqrt[4]{2x^2y^3}) \left( \sqrt[3]{4\sqrt{3x^3y^2}} \right) = -6 \cdot \sqrt[4]{6x^5y^5} = -6xy\sqrt[4]{6xy}$$

که چېرې جذري توانونه متفاوت وي، همدارجه کوو یې او بیا یې ضربوو .

مثال

$$1) \sqrt[3]{x^2y^4} \cdot \sqrt{xy} = \sqrt[6]{(x^2y^4)^2} \cdot \sqrt[6]{(xy)^3}$$

$$= \sqrt[6]{(x^4y^8) \cdot (x^3y^3)} = \sqrt[6]{x^7y^{11}} = xy \cdot \sqrt[6]{xy^5}$$

$$2) \sqrt[5]{2x^3y^2} \cdot \sqrt{2xy} = \sqrt[10]{(2x^3y^2)^2} \cdot \sqrt[10]{(2xy)^5}$$

$$= \sqrt[10]{(4x^6y^4)(32x^5y^5)} = \sqrt[10]{(2^2x^6y^4)(2^5x^5y^5)}$$

$$= \sqrt[10]{(2^7x^{11}y^9)} = x \cdot \sqrt[10]{(2^7xy^9)}$$

د جذرونو د تقسیم عملیه

که چېرته جذري توانونه مساوي وي، تر همدغه جذري توان لاندې مجذورونه تقسیموو.

$$\frac{\sqrt[n]{x^p}}{\sqrt[n]{x^t}} = \sqrt[n]{x^{p-t}}$$

مثالونه

$$1) 6 \cdot \sqrt[4]{3} \div 3 \cdot \sqrt[4]{2} = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

$$2) \sqrt[3]{m+n} \div \sqrt[3]{(m+n)^2} = \frac{\sqrt[3]{m+n}}{\sqrt[3]{(m+n)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{m+n}}$$

که چېرې جذرونه مختلفې درجې ولري:

$$1) \sqrt[3]{(ax)^5} \cdot \sqrt{ax} = ?$$

$$= \sqrt[6]{((ax)^5)^2} \cdot \sqrt[6]{(ax)^3} = \sqrt[6]{(ax)^{10} \cdot (ax)^3} = \sqrt[6]{(ax)^{13}} = (ax)^2 \cdot \sqrt[6]{ax}$$

تر جذرونو لاندې د افادو د عامل رفع او د هغو عکس

د امکان په صورت کې د جذر د درجې په نظر کې نیولو سره مجذور تجزیه کوو او له

جذر نه یې خلاصوو.

$$1) \sqrt[3]{54x^5} = \sqrt[3]{27x^3 \cdot 2x^2} = \sqrt[3]{(3x)^3 \cdot 2x^2} = 3x\sqrt[3]{2x^2}$$

$$2) \sqrt{54x^5} = \sqrt{9 \cdot 6x^4 \cdot x} = \sqrt{3^2(x^2)^2 \cdot 6x} = 3x^2 \cdot \sqrt{6x}$$

$$3) \sqrt[3]{81x^9y^3} = \sqrt[3]{27 \cdot 3x^9 \cdot y^3} = 3x^3y\sqrt[3]{3}$$

### د مجذور په توګه د غیر جذري افادې راوړل

په دې صورت کې د افادې توان د جذر د توان په اندازه پورته وړو: یعنې  $a \cdot \sqrt[5]{b} = \sqrt{a^5 b}$   
مثالونه

$$1) 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$2) y \cdot \sqrt[3]{2x} = \sqrt[3]{(2y)^3 \cdot 2x} = \sqrt[3]{8xy^3}$$

### د جذرونو د جمعې او تفریق عملیې

په جذري افادو د جمعې او تفریق عملیه هغه وخت ترسره کولای شو، چې جذرونه یو شان وي. جذرونو ته هغه وخت یو شان جذرونه وایو، چې جذري درجه یې له یو بل سره مساوي او تر جذر لاندې افادې له یو شان درجې او تورو تشکیل شوې وي.

$$1) 3\sqrt[3]{3a^2x} - \sqrt[3]{3a^2x} = (3-1)\sqrt[3]{3a^2x} = 2\sqrt[3]{3a^2x} \quad \text{مثلاً:}$$

$$2) \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (1+2)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

### مرکب جذرونه

د یوه جذري عدد ترکیب له یوه غیر جذري عدد سره او یا هم د دوو یا څو غیر مشابه همدگره جذرونو ترکیب ته مرکب جذرونه وایي.

مثلاً:

$$2 - \sqrt{2}, \sqrt{5} + 3, \sqrt{x} + a, \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$a\sqrt{x} + 2y, -m + \sqrt{n}, 2\sqrt{c} - \sqrt{x}$$

۱- د مرکبو جذرونو د جمعې او تفریق عملیه: پر مشابه جذرونو د جمعې او منفي عملیه کېدای شي؛ نو بڼا په مرکبو جذرونو کې هم دا قاعده د تطبیق وړ ده.

$$1) A = 3 + 2\sqrt{5} \quad A + B = \{3 + 2\sqrt{2} + (-7 + 4\sqrt{5})\} = -4 + 6\sqrt{5}$$

$$B = 4\sqrt{5} - 7$$

$$3 + 2\sqrt{5}$$

$$2) A - B = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{10 - \sqrt{5}}$$

$$3) A = 3x + 4\sqrt{2y}$$

$$B = -3\sqrt{2y} + x$$

$$3x + 4\sqrt{2y}$$

$$A + B = \frac{x - 3\sqrt{2y}}{4x + \sqrt{2y}}$$

$$3x + 4\sqrt{2y}$$

$$A - B = \frac{\pm x \mp 3\sqrt{2y}}{2x + 7\sqrt{2y}}$$

۲- د مرکبو جذرونو د ضرب عمليه: په مرکبو جذرونو کې د ضرب عمليه د الجبري پولينومونو د ضرب په څېر ده:

مثال:

$$1) (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y$$

$$2) (x + \sqrt{y})(2x - \sqrt{y}) = 2x^2 - x\sqrt{y} + 2x\sqrt{y} - \sqrt{y^2} = 2x^2 - x\sqrt{y} + y$$

د جذرونو د ناطق کولو عمليه

په يوه جذر کې ناطق کول داسې يوه عمليه ده، چې که چېرې تر جذر لاندې افاده ضرب شي او له هغې څخه يوه غير جذري افاده لاسته راشي، په مرکبو جذرونو کې د ناطق کولو عامل د هغې مزدوج دی، هره جذري افاده په ځانگړي ډول د ناطق کولو عامل لري.

$$1) \sqrt[n]{x} \rightarrow \sqrt[n]{(x)^{n-1}}$$

$$2) \sqrt[3]{x} \rightarrow \sqrt[3]{x^2}$$

$$3) \sqrt[7]{m^3} \rightarrow \sqrt[7]{m^4}$$

$$4) \sqrt{P} \rightarrow \sqrt{P}$$

$$5) 2x + \sqrt{y} \rightarrow 2x - \sqrt{y}$$

$$6) 3x + \sqrt{2m} \rightarrow 3x - \sqrt{2m}$$

$$7) \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \rightarrow \left( \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} \right)$$

$$8) \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} \rightarrow \left( \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} \right)$$

۳- د مرکبو جذرونو د تقسيم عمليه: د مرکبو جذرونو د تقسيم په عمليه کې له ناطق سازۍ نه په گټه اخيستو مخرج په غير جذري افاده بدلوو او بيا د تقسيم عمليه تر سره کوو.

مثالونه

$$1) \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$2) \frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})} = \frac{(x-y)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})}{(x-y)} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$$

## لومړي څپرکي پوښتنې

۱- د اعدادو په کرښه د  $\sqrt{5}$  موقیعت وټاکئ؟

۲- له طاقت او جذر نه یې خلاص کړئ؟  $i^5, -i.i^3, i^8.i$

$$\sqrt{i^4}, \sqrt[6]{-1}, \sqrt[4]{-16}$$

۳- لاندې افادې جذري شکل ته راوړئ؟  $(x^2 - 1)^{1/2}, (2xy^3)^{1/2}$

۴- لاندې افادې د طاقت په شکل ولیکئ؟  $\sqrt[14]{(x+a^2)^7}, \sqrt[4]{(3xy)^6}$

۵- همدارجه یې کړئ؟  $\sqrt[6]{2n}, \sqrt[3]{9n}, \sqrt{y^2+1}, \sqrt[15]{y^2+1}$

۶- مقایسه یې کړئ؟  $\sqrt[7]{6}, \sqrt[6]{5}, \sqrt[5]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{x^2}, \sqrt[5]{x}$

۷- لاندې افادې ساده کړئ؟  $\sqrt[4]{\sqrt[2]{(x+y)^{32}}}, \sqrt[3]{\sqrt{(5x)^{24}}}$

۸- تقسیم یې کړئ؟  $\sqrt{15ab^2} \div \sqrt[3]{3a^2b}, \sqrt[7]{8x^3} \div 2\sqrt[3]{x^2}$

۹- ضرب یې کړئ؟  $\sqrt[3]{3x^2}, \sqrt{9x}, \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x} = ?$

۱۰- ممکنه عاملونه له جذر نه رفع کړئ؟  $\frac{2}{3}\sqrt{50ab^5}, \frac{1}{3}\sqrt{27x^3y^2}$

## معادلې او توابع

## ټولیزه موخه

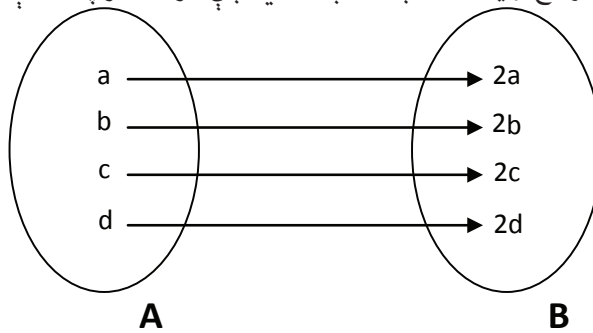
د معادلو، توابع او د هغو د ډولونو په مفهوم پوهېدنه او د توابعو گراف او په اقتصادي مسايلو کې د هغو کارونه

- د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلین په لاندې برخو کې معلومات ترلاسه کړي:
- د رابطې او تابع مفهوم او د هغو د تحولاتو د ساحې پېژندنه.
  - د یو شمېر کاري توابعو او د هغو پېژندل، چې د مربوطه ساحې په منځ کې په کارېږي.
  - د گرافونو رسمولو لپاره له توابعو څخه کار اخیستل او په اقتصادي ډگرونو کې د کمي او کيفي بدلونونو ښودنه.
  - د یوې اقتصادي پروژې د اقتصادي رشد په مسايلو کې له توابع نه گټه اخیستنه.

## رابطه او تابع

- د رابطې مفهوم: په ټولنیز ژوند کې د انسانانو تر منځ بېلابېلې اړیکې شتون لري لکه: محمود د احمد ورور دی، کریم د محمود پلار دی.
- وکیل د محمود ملگری دی، مجید د قیوم ملگری دی او داسې نور، په پورته مثالونو کې ورور کېدل، پلار کېدل او ملگری کېدل د انسانانو تر منځ اړیکې رابښي.
- د همدې په څېر د ریاضي د کمیتونو په منځ کې بېلابېلې اړیکې شتون لري لکه:  $a = b$ ,  $2 > 11,5$ ,  $3 > 9$  او نور، چې  $>$ ،  $<$  او  $=$  علامې د دوو عددونو یا دوو الجبري افادو په منځ کې رابطه ټاکي، همدارنگه د سیتونو تر منځ هم اړیکې شته.

**لومړی مثال:** که چېرې د  $A = \{a, b, c, d\}$ ،  $B = \{2a, 2b, 2c, 2d\}$  سیټونه په نظر کې ونیسو، گورو، چې د B سیټ عناصر د A سیټ د عناصرو له دوه چنده کېدو څخه لاسته راغلي؛ نو د A او B سیټونو ترمنځ اړیکه دوه چنده کېدل دي، چې کولای شو په لاندې شکل یې وښایو.

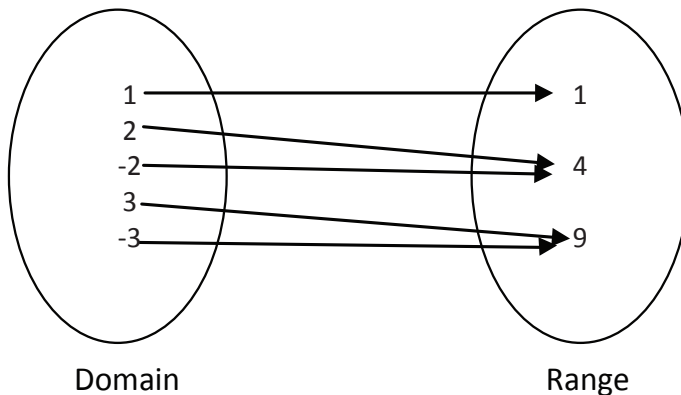


که د دوه چنده کولو رابطه په R وښایو، په دې حالت کې د A او B سیټونو عناصر د R رابطې ته په پام سره لاندې مرتب جوړه سېټونه راښيي.

$$R = \{(a, 2a) (b, 2b) (c, 2c) (d, 2d)\}$$

په دې حالت کې د R د مرتب شویو جوړو گډ سیټ دی، چې د هرې جوړې اوله مرکبه د A سیټ د عنصر مرتب او د هغې دویمه مرکبه د B سیټ عنصر ښيي. همدارنگه د A سیټ د Domain په نوم یا د هغې د تعریف ساحه او د B سیټ د Range په نوم د رابطې د قیمتونو ساحه یادولای شو:

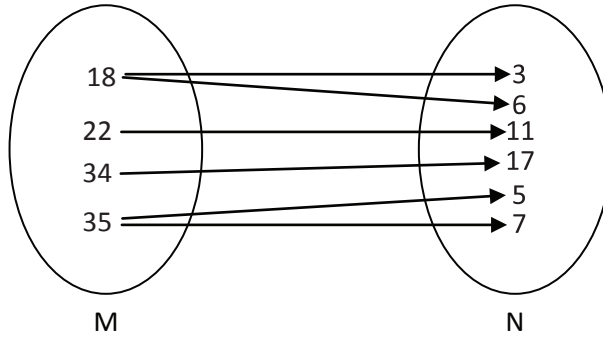
**دویم مثال**



ليدل کېږي چې د P او Q سيټ تر منځ رابطه د مربع کېدو رابطه ده، چې هغه د ترتيب شويو جوړو په شکل ليکو.

$$F = \{(1,1) (2,4) (-2,4) (3,9) (-3,9)\}$$

درېم مثال:

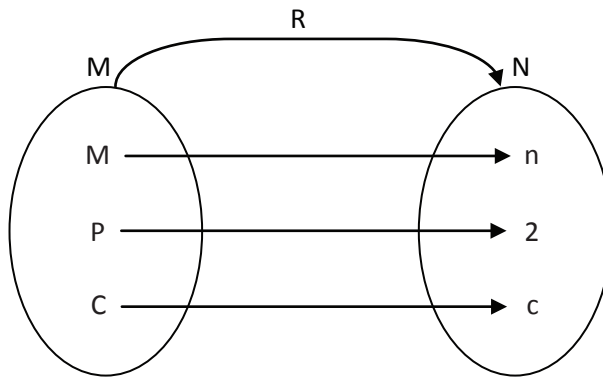


د M او N دوه سيټونه مطالعه کوو، د M او N تر منځ رابطه مضرب کېدل رابښي، چې کولای شو هغه په لاندې مرتب شويو جوړو کې وښايو.

$$K = \{(18,3), (18,6), (12,11), (34,17), (35,5), (35,7)\}$$

کله چې د A او B سيټونو عناصر د يو شرط او اصل لاندې ترتيب شوي جوړي جوړي کړي دا اصل او شرط د A او B سيټونو تر منځ رابطه ده.

که چېرې د A او B دوو سيټونو د عناصرو تر منځ يو پر يوه رابطه پيدا شي د A سيټ د B سيټ سره معادله رابطه لري.



که چېرې M يو اختياري سيټ وي د R يو فرعي سيټ له  $M \times M$  څخه د M په رابطه کې وايو:

$$R \subset M \times M$$

معمولاً د  $(x, y) \in R$  لپاره داسې لیکل کېږي.  $x \approx y$   
معادله رابطه

په  $M$  کې یوې رابطې ته هغه وخت معادله رابطه ویل کېږي، چې  
د انعکاس خاصیتونه  $x \approx x$   $x \in m$  د ټولو لپاره  
تناظري خاصیتونه  $x \approx y \Rightarrow y \approx x$   
انتقالي خاصیتونه  $x \approx y, y \approx z \Rightarrow x \approx z$  وي.

نوټ: هرکله چې یوکیفی سیټ وی، نو دټولو جفتو مرتب سیټ.

$$M \times M := \{(x, y) / x, y \in M\}$$

ته د  $M$  کارټیزین د ضرب حاصل وایي.  
لاندې هر یو مثال یوه رابطه را پېژني:

$$1) \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0)\}$$

هغه سیټ چې د هرې جوړې د اعضاوو مجموعه یې له 3 څخه کمه ده.

$$2) \{(0,1), (1,1), (3,1)\}$$

$$3) \{(1,4), (1,8), (1,9)\}$$

$$4) y^2 = x, y = x^2, y = \pm\sqrt{x}$$

$$5) f(x) = 2x^3 - 3$$

### توابع

د انا لیز یو له په زړه پورې مسایلو څخه د توابعو مطالعه ده. یعنې د دوو متحولونو  
تر منځ د تابعیت (پېروى) مطالعه، چې په یو وخت تغیر کوي. د علومو په زیاتره ساحو،  
لکه ریاضي فزیک، تخنیک، اقتصاد حتا ټولنیزو مسایلو لکه احصایو او نورو کې له همدې  
مسایلو سره مخ کېږو.

**تعریف:** تابع د دوه یا څو متغیرو تر منځ تبعي رابطې ته وایي. یا په بل عبارت، یو  
متغیر له بل متغیر سره د رابطې له مخې تړاو مومي. چې په دې حالت کې یو ته خپلواک  
متغیر او بل ته تابع متغیر وایي، کلي شکل یې  $y = f(x)$  دی. په دې ځای کې  $x$  خپلواک  
متغیر او  $y$  د هغې تابع دی. د خپلواک متغیر په هکله ویلای شو، چې  $x$  کولای شي په خپله  
خوښه او خپلواکه توګه د  $(a, b)$  په فاصله کې تحول وکړي، همدارنګه تابع کولای شو په  
لاندې ډول توضیح او تعریف کړو:

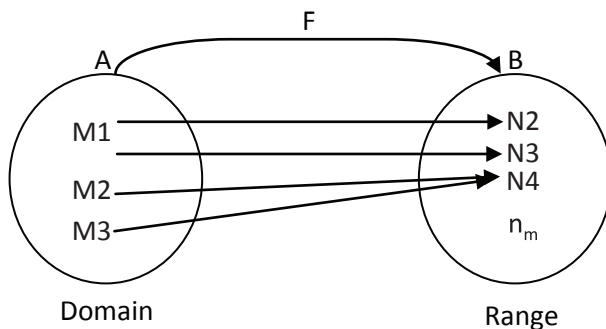
د دوو حقيقي اعدادو  $D$  او  $R$  دوه مجموعې په نظر کې نيسو د  $f$  يو تابع د هر حقيقي عدد تابع  $x$ ،  $D$  مجموعه يواځې يو حقيقي عدد  $f(x)$  د  $R$  مجموعه ته ربط ورکوي. د  $D$  مجموعه د تابع د تعريف ناحیه او د  $R$  مجموعه د  $F$  تابع د قيمتونو ناحیه نومېږي. د یاد ربط د ليکلو معمولي بڼه په لاندې ډول ده.

$f$  - function                       $f : D \rightarrow R$   
 D - Domain                          $X \rightarrow f(x)$   
 R - Range

معمولا د ليکلو لاندې ډول کارول کېږي. د ليکلو پورتنی ډول کولای شي لاندې شکل ته واوري. د  $f$  توری له  $D$  څخه  $R$  ته تابع را بښي، يعنې د  $F$  په وسيله د  $x$  هر قيمت د  $D$  مربوط د  $f(x)$  يو قيمت  $R$  سره ربط ورکړل شوی دی.

په لنډه توگه تابع داسې تعريفولای شو:

تابع عبارت له يوې رابطې يا د  $A$  او  $B$  دوه سيتونو ترمنځ ارتباط دی، داسې چې د  $A$  د سيټ له هر عنصر سره يواځې او يواځې د  $B$  سيټ يو عنصر ربط پيدا کړي.



$y = f(x)$  يا  $yx$  دا مفهوم لري، چې  $y$  د  $x$  تابع دی.

تابع يا Function چې د لومړي ځل لپاره G.W Leibniz ترې په

د هغې د تصويرساحه  $B(F)$  ده د  $IR$  فرعي سيتونو تابع نومېږي او دارنگه ليکل کېږي.

$$f: D(f) \rightarrow B(f)$$

$$f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

د فاصلې په اړه کېدای شي دا ډول توضیح ورکړو:

د  $a, b \in \mathbb{R}$  دوه عددونه په نظر کې نیسو، دا دوه عددونه کولای شي یوه فاصله (انتروال) شي سره د دې چې  $x$  متغیر د  $\{a, b\}$  تر منځ فاصله کې واقع شوی، یعنې  $a \leq x \leq b$  دلته کولای شو ووایو، چې  $x$  خپل حقیقي ټول مقادیر په یاده فاصله کې اختیاروي. په پورته نا مساوي کې  $a$  د فاصلې لاندې حد او  $b$  د فاصلې پورته حد نومېږي.

### د انتروال ډولونه

۱- پړانیستی: که په ذکر شوې فاصله کې  $a$  او  $b$  د فاصلې جز نه وي، په دې حالت کې پړانیستی فاصله نومېږي او په لاندې ډول ښودل کېږي.

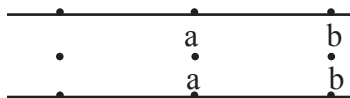
$$(a, b), \quad a < x < b$$

$$A = \{x / x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$



۲ - نیمه پړانیستی: په دې حالت کې یو له  $a$  او  $b$  څخه د فاصلې جز شمېرل کېږي

یعنې:



$$[a, b), (a, b]$$

$$a \leq x < b \quad a < x \leq b$$

$$A = \{x / x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

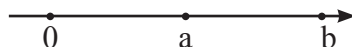
$$a < x \leq b$$

۳- تړلې فاصله: کله چې  $a$  او  $b$  دواړه هر یو د فاصلې جز وشمېرل شي، په دې حالت

کې یاده فاصله تړلې ده.

$$[a, b] \quad a \leq x \leq b$$

$$A = \{x / x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$



## د تابع د تعريف ناحیه

په یوه فاصله کې د متغیرو مقادیرو مجموعه د تعريف ناحیه نومېږي. د تعريف په ناحیه کې که د مستقل متحول په هر قیمت یواځې یو قیمت د مربوط متحول لپاره په لاس راشي. دا چې رابطه د تابع ده البته د یو مقدار برعکسو تابع. د دې په څېر که د تعريف په ساحه کې د مستقل متحول په هر قیمت مربوطه متحول له یو نه زیات قیمت واخلي، په دې حالت کې ذکر شوې رابطه تابع راپېژني.

مثلاً:

$$1) y = \pm\sqrt{x}$$

د تعريف ناحیه  $D \rightarrow [0, \infty), 0 \leq x < \infty$

د پورتنۍ رابطې د تعريف د ناحیې سیټ  $D = \{x/x \in R, 0 \leq x < \infty\}$

$$2) y = x^2$$

د تعريف ناحیه  $D \rightarrow (-\infty, \infty), -\infty < x < \infty$

$$3) \sqrt{x-4}$$

د تعريف ناحیه  $D \rightarrow 4 \leq x < \infty, [4, \infty)$

## د توابع گراف

څرنگه چې گرافونه پر ریاضي سربېره په فزیک، کیمیا، بیولوژي او نورو طبعي او ټولنيزو علومو، لکه احصایه اقتصاد او نورو کې پکارېږي، د هغو په واسطه ډېر موضوعات واضح بیانېږي. همدارنگه تابع ډیر کله د خپل مربوطه گراف په واسطه بیانېږي، نو د ډېر اهمیت وړ ده او پکار ده، چې د گرافونو د رسمولو په حالت کې دقت او پاملرنه وشي او د توابعو د گرافونو د ترسیم قوانین او اصول وپېژنو.

دا چې مختلف الجبري توابع د متفاوتو گرافونو لرونکي دي، بناً د گراف د لارښود لپاره ځینې له توابعو څخه رسموو.

## د توابعو د گراف هندسي ښودنه

په تحلیلي هندسه کې هر جفت مرتب د حقیقي اعدادو  $(x, y)$  په یوه نقطه یو بل ته مخامخ واقع کېږي، داسې چې د  $x$  او  $y$  عددونه نسبت د مختصاتو یو سیستم ته Cartesian

د ذکر شوي نقطې مختصات دي.  
اوس د هر تابع لپاره

$$f: D \rightarrow R$$

$$x \rightarrow f(x)$$

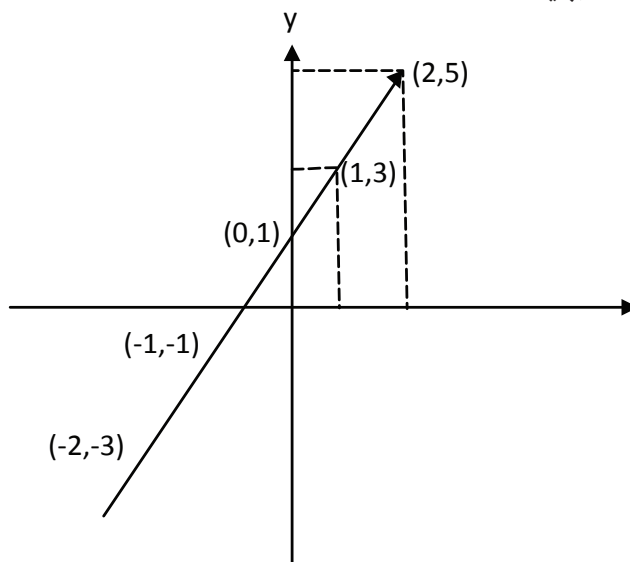
کولای شو مرتبې جوړې  $(x, f(x))$  په نظر کې ونیسو، دا مرتبې جوړې هغه نقطې په لاس راکوي، چې د  $x$  او  $F(x)$  مختصاتو لرونکې وي.

تعريف: د هر تابع لپاره

$$f: D \rightarrow R$$

$$x \rightarrow f(x)$$

د ټولو هغو نقطو مجموعه، چې د  $(x, f(x))$  مختصاتو لرونکې ده د  $f$  د تابع د گراف هندسي ښودنه نومېږي.



څرنگه چې پورتنۍ تابع اوله درجه ده، نو د هغې گراف پر مستقيم خط دی.

له دا ډول توابع  $x \rightarrow x^m$  يا  $y = f(x) = x^m$

په پورته تابع کې  $m$  یو ناطق عدد دی، چې په دوو حالتونو کې مطالعه کېږي.

لومړی حالت  $m$  په تامو اعدادو کې شامل دی  $m \in \mathbb{Z}$

دویم حالت  $m$  په نسبي اعدادو کې شامل دی  $m \in \mathbb{Q}$

په لومړي حالت کې  $y = x^m$  په څلورو فرعي حالتونو کې مطالعه کېږي.

مثبت تاق  $m \rightarrow$  (C) مثبت جفت  $m \rightarrow (a)$

منفي تاق  $m \rightarrow$  (d) منفي جفت  $m \rightarrow (b)$

## دویم حالت

کسري  $m$  په  $\frac{P}{q}$  شکل (په داسې حال کې، چې  $P$  او  $q$  تام اعداد دي).

په پورته توگه لاندې فرعي حالتونه په نظر کې نیول کېږي.

$$a - m = \frac{P}{q} > 1$$

$$b - m = \frac{P}{q} < 1$$

$$c - 1 < m = \frac{P}{q} < 0$$

$$d - m = \frac{P}{q} < -1$$

د خصوصیاتو لنډه پېژندنه او توابعیه د دې کتاب په درسونو کې کارول کېږي.

۱- **مشرح تابع او ضمني تابع:** هر کله چې د تابع او مستقل متغیر تر منځ رابطه شتون

ولري، چې وکولای شو تابع له هغې استخراج کړو؛ یعنې که په یاده رابطه کې تابع وتوانېږي

د دې  $y = f(x)$  په څېر و لیکل شي دا رابطه مشرح تابع بلل کېږي.

مثلاً  $y + 2 = 3x^2$  یا  $xy = x^2 - 1$  او نور ...

او که په یوه رابطه کې له متحولینو څخه د هیڅ یوه لپاره مستقل حل پیدا نه شي، دا

رنگه رابطه ضمني تابع نومېږي مثلاً:

$$x + x^2 y^2 + y = 0$$

$$y + x^2 + x^2 y^2 = 0$$

مشرح تابع کېدای شي ناطق یا آهم وي.

$$y^2 - x = 0$$

ناطق تابع هغه دی، چې د یوه یا دوه پولینومونو له نسبت څخه لاسته راغلی وي.

لکه:

$$y = \frac{3x^2 + 1}{2x + 3} \quad y = 3x^2 + 2x + 1$$

$$y = \pi^2$$

آهم تابع هغه دی، چې په هغې کې یو یا څو تر جذر لاندې واقع شوي وي.

لکه:

$$y = 2x^2 + \sqrt{3x} + 4 \quad y = \sqrt{\frac{2x^2 + 5}{5x^3 + x}} \text{ و غیره}$$

### متمادي او غیر متمادي تابع

که د  $y = f(x)$  تابع یو پولینوم وي او  $x$  وکولای شي له  $-\infty$  څخه تر  $+\infty$  قیمتونه واخلي، داسې چې د  $X$  په ټولو قیمتونو د تابع لپاره قیمت وټاکل شي متمادي تابع ده

$$y = x^3 - 3$$

$$y = 3x + 5$$

مثلاً:

د دې برعکس که تابع ونه شي کړای د تعریف په حوزه کې د  $x$  د متحول د ځینو قیمتونو لپاره قیمت واخلي دا رنگه تابع، چې پکې قیمتونه نا ټاکلي دي متمادي نه دی.

مثلاً:

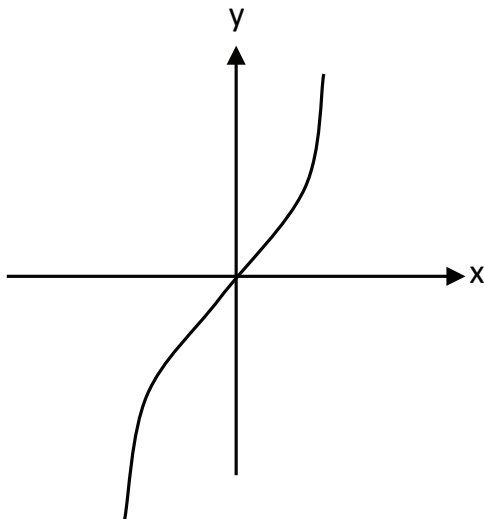
$$y = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$$

په نوموړي تابع کې لیدل کېږي، چې د  $x = 2$  په قیمت د تابع قیمت غیر معین دي بڼاً د  $x = 2$  په قیمت کې تابع غیر متمادي دی او یا په  $y = \sqrt{3-x}$  کې  $x > 3$  په قیمتونو د تابع قیمت د حقیقي اعدادو په سیټ کې غیر معین دی، بڼاً د  $x > 3$  په قیمتونو د تابع گراف غیر متمادي دی.

### متزایده تابع او متناقصه تابع

که مستقل متحول او تابع یو اړخ ته یونواخت تحول ولري متزایده تابع ورته ویل کېږي. یا په بل عبارت که تابع په یوه ټاکلې فاصله کې د سعودي یو نواخت تغیراتو لرونکې وي،

$$f(x_1) < f(x_2) \quad x_1 < x_2 \text{ ولرو}$$



تابع یو نواخته نزولي ده (متناقض) په هغه حالت کې، چې  $x_1 < x_2$  په قیمتونو دا  $f(x_1) > f(x_2)$  قیمتونه شي.

د زوج تابع (موازي) او د فرد تابع (متناوب)

که د  $y = f(x)$  تابع کې د  $x$  عدد قیمت  $-x$  ته واړوو او د  $y$  عدد په قیمت کې کوم تغیر رانه شي دارنگه تابع (جفت) موازي تابع نومېږي.

د دې برعکس که  $x$  په  $-x$  بدلوو او د  $y$  عدد قیمت  $-y$  ته واړوو، تابع ته (طاق) تابع ویل کېږي.

### کثیر الحده تابع

دا تابع داسې  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  ده. په دې تابع کې  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  ثابت مقادیر،  $n$  کثیر الحده درجه او  $x$  د تابع مستقل متحول دی، له دې تابع څخه نورې توابع هم مشتق کېږي، یعنې په  $n=0$  ثابت تابع  $n=1$  خطي تابع  $n=2$  دویمه درجه تابع  $n=3$  درېیمه درجه تابع

## ثابته تابع

هغه تابع چې د تغیراتو حدود یې په یو حد کې شامل شوي وي. په دې ډول توابعو کې د تابع مقدار له متغیر سره تړاو نه لري لکه:  $y = a$

## توان لرونکې تابع

په دارنگه توابعو کې مستقل متغیر د توان یا طاقت په توګه ځای نیسي، چې د  $f(x) = a^x$  په څېر ښودل کېږي، البته  $a \neq 0, 1$  دی، دا هغه وخت دقیقاً متزایده ده، چې کله  $a > 0$  وي او هغه وخت دقیقاً متناقصه ده، کله چې  $a < 0$  وي.

## لوګارتمي تابع

دا تابع په  $y = F(x) = \text{Log}_a x$  بڼه وي، چې په هغې کې  $a \neq 1, 0$  وي او  $x > 0$  دی. که دا رانګه  $a = e = 2.7.828$  وي په دې حالت کې به په طبیعي قاعده کې وي، چې هغه پایه پزیرن نومېږي او په لاندې ډول لیکل کېږي.

$$y = f(x) = \text{Lnx}, e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{K!}$$

که  $a = e = 2.7.828$  وي، په دې حالت کې به لوګارتم په طبیعي قاعده کې وي، چې هغه نیپیرین قاعده نومېږي او په لاندې ډول لیکل کېږي.

$$y = f(x) = \text{Log}_e x \quad e = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!}$$

$$y = f(x) = \text{Lnx}$$

## معکوسه تابع

د  $y = f(x)$  تابع په نظر کې نیسو، چې په هغې کې  $x$  مستقل متغیر او  $y$  د هغه تابع ده. څرنګه چې لیدل کېږي  $y$  د  $x$  په حساب بیان شوی دی، اوس که داسې رابطه ولیکو، چې په هغې کې  $x$  تابع او  $y$  مستقل متغیر وي، یا په بل عبارت پورته رابطه د  $y$  په حساب بیان کړو؛ په دې حالت کې هغې ته معکوسه تابع ویل کېږي، چې په هغې کې به  $x$  د  $y$  تابع وي او کولای شو هغه په لاندې ډول وښايو

$$x = f(x), x = f^{-1}(x)$$

تعریف: د  $f$  د تابع پر وړاندې، چې په  $f^{-1}$  شکل ښودل کېږي د  $(y, x)$  جفتو له مجموعي

څخه عبارت دی، داسې چې د  $(x, y)$  جفتونه په  $f$  کې قرار لري.  $f^{-1}$  یو په یو دی، کله چې  $F$  یو په یو وي.

ټولې توابع چې د یوې ټاکلې فاصلې پر مخ وي او د مستقل متحول او تابع ترمنځ یو په یو رابطه ټینګه وي یا دقیقاً نزولي یا صعودي وي او د معکوس لرونکې دي.

$$f: D \rightarrow R, f \text{ تابع}$$

$$x \rightarrow f(x)$$

یوه یو په یو تابع ده په داسې حال کې، چې د  $x$  په مختلفو قیمتونو پورې مربوط وي یعنې کله چې  $x_0, x_1, x_2$  د  $D$  مجموعې مربوط وي او  $x_0 \neq x_1 \neq x_2$  وي د  $f(x_0) \neq f(x_1) \neq f(x_2)$  تر منځ دی.

**تعریف:** هر کله چې د  $f$  تابع یو په یو وي، په دې حالت کې:

$$f: D \rightarrow R$$

$$x \rightarrow f(x)$$

$$f^{-1}: R \rightarrow D$$

$$x \rightarrow f^{-1}(x)$$

$$x = f(y)$$

په لنډه توګه ویلی شو، چې دوه تابع ګانې یو له بلې څخه راګرځېدلې وي، معکوسې توابع ورته وایي، لکه:

$$y = \text{Log}_a x \rightarrow x = a^y$$

$$y = \sin x \rightarrow x = \arcsin y$$

$$y = \cos x \rightarrow x = \arccos x$$

**مثال:** معکوسه تابع

$$f^{-1}: R \rightarrow D$$

$$x \rightarrow f^{-1}$$

$$x = -\frac{y-1}{2}$$

$$f(y) = -\frac{y-1}{2}$$

$$f: D \rightarrow$$

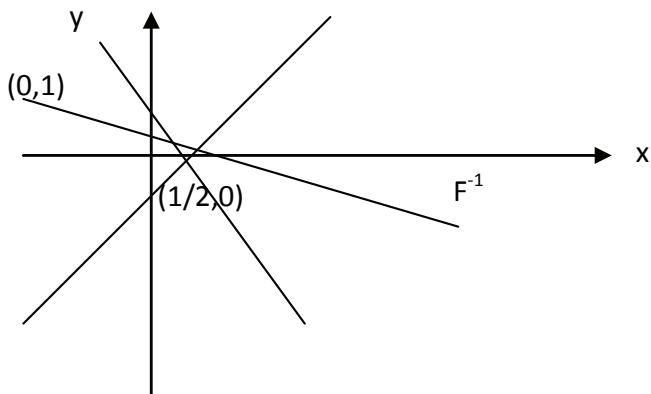
$$x \rightarrow -2x+1$$

$$y = -2x+1$$

$$x = -\frac{y-1}{2}$$

**د معکوسې تابع ګراف**

لومړی د  $f$  د تابع ګراف رسموو د  $f$  د هندسي ښودنې د انعکاس له امله  $y=x$  عینیت ته په کتو هندسي ښودنه تر  $f^{-1}$  پورې په لاس راځي.



$$y = -2x + 1$$

$x$	$0$	$\frac{1}{2}$
$y$	$1$	$0$

مثال : د  $g$  تابع په پام کې نیسو.

$$g_+ : D_+ \rightarrow R$$

دا تابع په داسې حال کې، چې د  $D_+$  مجموعه ټول غیر منفي عددونه دي یو په یو تابع

ده او  $g_+^{-1}$

$$g_+^{-1} : R_g \rightarrow D_+$$

$$x \rightarrow \sqrt{x}$$

### د طاقت لرونکې تابع ځانگړنې

که  $f_a$  یا  $x \rightarrow a^x$  په پام کې ونیسو، په دې صورت کې:

$$f_a : D \rightarrow R$$

$$x \rightarrow a^x$$

د لاندې خاصیتونو درلودنکې دي:

۱- د  $D$  مجموعه د ټولو حقیقي عددونو له مجموعې څخه عبارت ده؛ خو د  $R$  مجموعه

ټول مثبت حقیقي عددونه دي.

۲-  $x_1, x_2$  په ټولو حقیقي قیمتونو کې لاندې رابطه سمه ده.  $f_a(x_1 + x_2) = f_a(x_1) f_a(x_2)$

۳- د  $f_a$  تابع په  $a > 1$  ډول دقیقاً متزایده ده او په  $0 < a < 1$  ډول متناقصه ده.

د توابعو هندسي جوړښت  $y = 2^x$  او  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  په لاندې ډول ليدل کېږي. شکل ته په کتو د  $a = 2 > 1$  او  $a = \frac{1}{2} < 1$  پر وړاندې د  $f_2$  او  $f_{1/2}$  ورکړل شوو توابعو د 2 او 3 د رابطې خواص کولای شو په شکل کې ووينو. که پورته توابعو ته په دقت سره وگورو، وينو چې د مستقل متحول او تابع تر منځ يو په يو رابطه موجوده ده. بناً پورته توابع د معکوس درلودونکې دي، چې کولای شو په لاندې شکل کې يې رابطې وگورو. نو ويلای شو، چې طاقت لرونکې تابع او لوگارتمي تابع يو د بل معکوسې او سرچپه دي.

### د توابعو ترکيب

کله چې  $f$  او  $G$  دوه اختياري توابع وي؛ په دې حالت کې  $(Fog)_x$  نوي تابع د  $(fog)_x = f(2(x))$  په وسيله تعريفوو.  $fog$  د  $f$  او  $g$  ترکيب نومېږي، چې د  $fog$  د تعريف ناحيه له  $x$  څخه عبارت ده. په دې حالت کې، چې  $x$  د  $g(x)$  د تعريف په ناحيه کې د  $f$  د تعريف په ناحيه کې دی. عموماً  $fog \neq gof$  دی.

مثال:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x + 1$$

$$(fo2)_x = f(2(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$$

$$(2of)_x = 2(f(x)) = 2(x^2) = x^2 + 1$$

نو ليدل کېږي چې:

$$(x + 1)^2 \neq x^2 + 1$$

خو اتحادي ترکيب په توابعو کې موجود دی، چې په لاندې ډول ښودل کېږي.  
 $(fog)oh = fo(goh) =$

تاسې کولای شئ د هغو په لرلو سره تابع تطبيق او ارزيايي کړئ.

$$f(x) = x^2$$

$$2(x) = x + 1$$

$$h(x) = x - 1$$

$$(f \circ g \circ h) = f(2(h(x)))$$

$$f(2(h(x))) = f(2(x-1)) = f(x-1+1) = x^2$$

$$f \circ (2 \circ h) = f(2(h(x))) = x^2$$

$$(f \circ 2) \circ h = f(2(h(x))) = x^2$$

$$f(x) = 2x^2$$

$$2(x) = 3x + 2$$

$$h(x) = x + 1$$

$$f \circ g \circ h = f(2(h(x))) = f(2(3(x+1)+2)) = 2(3x+5)^2$$

مثال: د  $y = |x|$  تابع رسم کړئ!

$$y = x$$

$$y = -x$$

$$x > 0$$

$$x < 0$$

مثال: د  $y = |x^2 - 2x|$  تابع رسم کړئ!

د دې تابع د ترسیم لپاره لومړی د  $y = x^2 - 2x$  تابع رسموو او د تابع د گراف هغه برخه، چې د  $x$  تر محور لاندې ده یا په بل عبارت د  $y > 0$  هغه قیمتونه دي، چې د هغوی متناظر د  $x$  په محور رسموو.

$$-2 \leq x < -1 \quad \underline{[x] = -2} \quad y = -2 + x$$

$$-1 \leq x < 0 \quad \underline{[x] = -1} \quad y = -1 + x$$

$$0 \leq x < 1 \quad \underline{[x] = 0} \quad y = x$$

$$1 \leq x < 2 \quad \underline{[x] = 1} \quad y = 1 + x$$

د دوه یا څو متغیرو تابع

د دې تابع کلي شکل په لاندې ډول ښودل کېږي.  $z = f(x, y)$  او یا  $Z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  دا رابطې ښيي، چې د  $z$  د دوه یا څو متحولونو تابعیت کوي. مثلاً  $z = ax + by$  داسې تابع ده، چې د دوه متغیرو  $x$  او  $y$  پېروي کوي او  $z = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$  تابع داسې تابع ده، چې د څو مستقلو متغیرو تابعیت کوي.

د دوه يا څو توابعو د تعريف د ناحيې جمع، تفریق، ضرب او تقسیم

هرکله چې  $F$  او  $g$  دوه اختیاري توابع وي، په دې حالت کې نوې تابع گانې لکه  $f \pm g$  کولای شو د لاندې معادلې په وسیله تعريف کړو.  $(f \pm g)_x = f(x) \pm 2(x)$  د  $(f \pm g)_x$  تعريف ناحیه د  $x$  له ټولو عددونو څخه متشکله ده، چې د هغې پر وړاندې  $F(x) \pm 2(x)$  معنی ورکوي.

یعنې د ټولو  $x \in R$  عددونو مجموعه، چې  $F$  او  $g$  په هرو دوو ناحیو کې قرار لري. هر کله چې د  $A$  او  $B$  دوه مجموعې اختیاري وي په دې حالت کې  $A \cap B$  د  $x \in R$  مجموعې ته اشاره کوي، چې په  $A$  او  $B$  کې قرار لري؛ نو کولای شو ولیکو:

$$\begin{aligned}(f \pm g)_x &= f(x) \pm 2(x) \rightarrow \text{dom} \\ &= \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) \\ (f \cdot g)_x &= f(x) \cdot 2(x) \rightarrow \text{dom} = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) \\ \left(\frac{f}{g}\right)_x &= \frac{f(x)}{g(x)}, \text{domain } \frac{f(x)}{2(x)} = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) \\ 2(x) &\neq 0\end{aligned}$$

هرکله چې  $g$  تابع او  $C$  اعداد وي د  $C \cdot g$  نوې تابع د  $(C \cdot g)_x = C \cdot g(x)$  په وسیله ښيي. د  $C \cdot g$  د تعريف ناحیه فقط د  $g$  د تعريف ناحیه ده. مثال: د  $F$  او  $g$  توابع په لاندې ډول تعريف کېږي.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + 1 & \text{dom} f &= (-\infty, \infty) \\ g(x) &= \sqrt{x} & \text{dom} g &= (0, \infty) \\ (f \pm g)_x &=? & \text{dom}(f \pm g)_x &=? \\ (f \cdot g)_x &=? & \text{dom}(f \cdot g)_x &=? \\ \left(\frac{f}{g}\right)_x &=? & \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right)_x &=? \\ g(x) &\neq 0\end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned}(f \pm g)_x &= f(x) \pm g(x) = x^2 + \sqrt{x} + 1 \\ \text{dom}(f \pm g)_x &= [0, \infty) \\ (F \cdot g)_x &= \sqrt{x}(x^2 + 1), \text{dom}(f \cdot g)_x = [0, \infty) \\ \left(\frac{f}{g}\right)_x &= \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(x^2 + 1)}{x} \\ \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right)_x &= [0, \infty) \\ 2(x) &\neq 0\end{aligned}$$

## د څو مثالونو د حل نمونه:

۱- تعین کړئ، چې لاندې تابع په کومه فاصله کې ټاکلې ده؟

$$y = \sqrt{x-4}$$

حل: د دې لپاره چې تابع ټاکلې وي باید حدونه یې د یو مثبت عدد تر جذر لاندې وي.

$$x-4 \geq 0$$

$$x-4 = 0$$

$$x = 4$$

$$4 \leq x < \infty$$

۲- د  $y = \sqrt{x^2-1}$  تابع د تعریف ناحیه تعین کړئ؟

حل: د دې لپاره چې د پورته تابع د تعریف ناحیه ټاکلې وي؛ باید حدونه یې تر مثبت

جذر لاندې وي.

$$x^2 - \geq 0 \rightarrow x^2 = 1$$

$$x^2 > 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x \geq 1$$

$$x \leq -1$$

۳- هغه نقطې، چې پکې تابع متصله وي په لاس راوړئ؟

$$y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$$

حل: د مخرج جذر یې پیدا کوو.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 1$$

پورته تابع په ټولو نقطو کې متصله ده.

$$A = \{x / \in R, x \neq 2, x \neq 1\}$$

منفصلې دي.  $x=2$  او  $x=1$  خو دوه نقطې

## الجبري معادلې

## ټوليزه موخه

د معادلو او په اقتصادي او تخنيکي مسايلو کې له معادلو نه د گټې اخيستې په اړه معلومات

- د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلين په لاندې موضوعاتو وپوهېږي:
- د معادلو د مفهوم درک کول، د مجهولاتو له پلوه د معادلو پېژندنه.
  - د معادلاتو له خواص نه څرېدنه او د اړتيا په ټولو ساحوکې د هغې کارونه
  - د يوې مسألې د خصوصيت له نظره د يوې معادلې تشکيل او تړل.
  - د عبارتي مسايلو حل او د معادلې له خواصو نه په گټه اخيستو د مجهولاتو پيدا کول.
  - له معادلاتو نه په گټه اخيستنه د اقتصادي مسايلو حل.

## الجبري معادلې

هغه الجبري مساوات، چې په يو يا څو مشخصو قيمتونو، حروف مساوي وي، معادله نومېږي. مثلاً دا  $5x + 2 = 2x + 8$  مساوات يوه معادله ده، ځکه د  $x = 2$  په قيمت دواړه خواوې مساوي دي.

په معادله کې مجهول: هغه دی، چې د قيمت پيدا کول يې مطلوب وي.  
 د معادلې جذر: د مجهول هغه قيمت ته ويل کېږي، چې معادله صدق کړي.  
 د معادلې درجه: د معادلې د مجهول تر ټولو لوی توان د معادلې درجه ده.

مثلاً.

$$5x - 10 = 0 \text{ اوله درجه}$$

$$3x^2 - x + 2 = 0 \text{ دويمه درجه}$$

$$2x^3 - 3x^2 + 6 = 0 \text{ درېيمه درجه}$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_1 + a_0 = 0 \text{ درجه } (n)$$

دمجهولونو د شمېر له مخې د معادلو ډولونه: يوه معادله کېدای شي د يو، دوه، درې يا  $n$  مجهولونو لرونکې وي.

مثلاً:

$$2x + 4 = 3x - 6 \rightarrow \text{يو مجهوله معادله}$$

$$8x - 4y = 6 \rightarrow \text{دوه مجهوله معادله}$$

$$3x - 2y + 6z = 8 \rightarrow \text{درې مجهوله معادله}$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n \text{ } n \text{ مجهوله معادله}$$

### د معادلو خاصیتونه

- ۱- که د يوې معادلې (شرطيه مساوات) دواړو خواوو ته عدد جمع يا تفریق شي په شرطيه مساوات کې کوم تغیر نه راځي.
- ۲- که د مساوات دواړه خواوې په خلاف د صفر عدد کې ضرب يا تقسیم شي مساوات په خپل حال پاتې کېږي.
- ۳- هر کله چې د مساوات دواړه خواوې په کلي توګه له يو طرف څخه بل طرف ته انتقال شي د هغې د حدونو علامې تغیر نه کوي.
- ۴- که د معادلې يو جز د مساوات له يو طرف نه بل طرف ته انتقال شي، د هغې جز علامه تغیر کوي.

$$4x + 1 = 3x + 22$$

$$4x - 3x = 22 - 1 \rightarrow x = 20$$

### اوله درجه يو مجهوله معادله

د اوله درجه معادلې کلي شکل  $ax = b$  دی،  $b$  ثابت عدد او  $x$  مجهول دی او  $x = \frac{b}{a}$  د

ذکر شوې معادلې جذر دی.

که په اوله درجه يو مجهوله معادله کې د معادلې دواړو خواوو ته څو جزه مشابه او ثابت عددونه وجود ولري؛ کولای شو مجهول عددونه د مساوات يوې خوا ته او معلوم اعداد د مساوات بلې خوا ته انتقال کړو، د ارجاع نه وروسته په  $ax = b$  شکل راځي او وروسته

مجهول پیدا کبړي.

اوله درجه یو مجهوله معادلې په لاندې شکلونو راتلای شي، چې هر یو تر مطالعي لاندې نيسو.

۱- پولینومي معادلې (کسري، غیر کسري، حرفي)

۲ - اوله درجه یو مجهوله جذري معادلې

اوله درجه یو مجهوله پولینومي معادلې

$$6x + 3 = 11 + 2x$$

$$6x - 2x + 11 - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{4} \Rightarrow x = 2$$

امتحان: په معادله کې د  $x = 2$  په اېښودلو باید د مساوات دواړه طرفونه برابر شي.

$$6(2) + 3 = (11) + 2(2) \Rightarrow 12 + 3 = 11 + 4$$

$$15 = 15$$

یو مجهوله کسري معادلې

$$\frac{4x-3}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$2x \frac{(4x-3)}{2x} = \frac{1}{2} (2x) \Rightarrow 4x - 3 =$$

$$4x - x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{2}{x-1} + \frac{4}{x-1} = \frac{3}{x+1}$$

$$\frac{2+4}{x-1} = \frac{3}{x+1} \Rightarrow \frac{6}{x-1} = \frac{3}{x+1}$$

$$3(x-1) = 6(x+1) \Rightarrow 3x - 3 = 6x + 6$$

$$6x - 3x = -3 - 9$$

$$3x = -9 \Rightarrow x = -3$$

اوله درجه یو مجهوله حرفي معادلې

$$2(m-1)(x+1) = (m+2)(x-1)$$

$$(2m-2)(x+1) = (m+2)(x-1)$$

$$2mx + 2m - 2x - 2 = mx - m + 2x - 2$$

$$2mx - mx - 2x - 2x = -m - 2m$$

$$mx - 4x = -3m$$

$$x(m-4) = -3m \Rightarrow x = \frac{-3m}{m-4}$$

$$m \neq 4$$

د dx معادله  $cx - \frac{4}{c} = d$  د لپاره یې حل

$$\frac{c^2x - 4}{c} = d - dx$$

$$c^2x - 4 = cd - dx \Rightarrow c^2x + cdx = cd + 4$$

$$x = \frac{cd + 4}{c^2 + cd}$$

$$c^2 + cd \neq 0$$

$$c \neq 0$$

$$c \neq -d$$

مناقشه وکړئ؟

د  $c \neq 0, c = -d$  په استثنا د  $c$  او  $d$  ټولو قیمتونو ته پاسنی معادله قیمت لري، ځکه په دغو قیمتونو باندې ټاکلی حل نه لري. لاندې پولینومي معادلې حل کړئ!

$$1) 2x - 2 = 3x + 6$$

$$2) 2(5x - 4) = x + 13$$

$$3) 2x(2 + x) + 3 = x(2x + 1)$$

$$4) -10x + 3 = 6x + 7$$

$$5) (x = 20(x + 1) = (x - 2)(8x - 4)$$

$$6) 16x - 5(2x - 3) = 23 + 7(6x + 4)$$

$$7) 3,5 - 0,5(3x - 2), 20 = 2,5x - 0,2(5x - 8)$$

$$8) \frac{3x + 4}{2} - x = 5$$

$$9) \frac{x(x + 2)}{2(2 + x)} = \frac{x}{2}$$

$$10) 5 + \frac{3x}{x - 3} = \frac{9}{x - 3}$$

$$11) \frac{9}{x + 2} - \frac{8}{x} = \frac{7}{x}$$

$$12) \frac{x + 5}{x - 2} = \frac{x + 3}{x + 1}$$

$$13) \frac{2x}{5} - 3 = x + \frac{1}{3}$$

$$14) \frac{5x-3}{4} - \frac{2x+1}{3} = \frac{4x+5}{6} - 2$$

$$15) 3mx - 5b = 2x + 6, x = ?$$

$$16) 6abx + 4ab = 2ax + 3ab, x = ?$$

$$17) -\frac{5x-3}{5} - \frac{4x-1}{2} = \frac{1-3x}{3} + 2$$

$$18) \frac{m + w\sqrt{v}}{2g} = k, V = ?$$

$$19) P = 2I + 2W, W = ?$$

$$20) S = \frac{a}{I-r}, r = ?$$

$$21) F = q \cdot \frac{m_1 m_2}{d^2}, d = ?$$

$$22) V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, h = ?$$

اوله درجه یو مجهوله جذري معادلې

د هغې معادلو د حل لپاره، چې مجهول یې تر جذر لاندې وي.

اول هغه افاده، چې تر جذر لاندې قرار لري د مساوات یو طرف ته انتقالوو وروسته د معادلې دواړه خواوې د جذري درجې په توان پورته کوو په هغه صورت کې، چې بیا هم افاده جذري پاتې شوه همدا عملیه تکرارو، چې په ټولیزه توګه یې جذر له منځه لاړ شي.

$$1) 2 \cdot \sqrt[3]{3x-1} = 4$$

$$\sqrt[3]{3x-1} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow (\sqrt[3]{3x-1})^3 = (2)^3$$

$$3x-1 = 8 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

$$2) \sqrt{x+14} - \sqrt{3x-10} = 0$$

$$\sqrt{x+14} - \sqrt{3x-10} \Rightarrow \sqrt{(x+14)^2} = \sqrt{(3x-10)^2}$$

$$x+14 = 3x-10$$

$$2x = 24 \Rightarrow x = 12$$

$$2x = 24 \Rightarrow x = 12$$

$$3) \sqrt{5+x^2} - x = 1$$

$$(\sqrt{5+x^2})^2 = (x+1)^2$$

$$5+x^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$4) \sqrt{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{\sqrt{x^2-1}})^2 = (\sqrt{x-1})^2$$

$$\sqrt{x^2-1} = x-1$$

$$x^2 - 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

لاندي جذري معادلي حل كري؟

$$1) \sqrt[3]{2x+7} = 2$$

$$2) \sqrt{x^2+2x-2} = x$$

$$3) \sqrt{\frac{2x+1}{x}} - \sqrt{\frac{2x1}{x+3}} = 0$$

$$4) \sqrt{2+\sqrt{x^2-5}} = \sqrt{x+1}$$

$$5) \sqrt{x-1} - 6 = -3$$

$$6) \sqrt[3]{\sqrt{x-2}} = 4$$

$$7) \sqrt{4x^2-16} = 2x-2$$

$$8) (2x-1)^{\frac{4}{3}} = 4x-2$$

$$9) x + \sqrt{x^2-9} = 21$$

$$10) \sqrt{x^2+3} = 9+x$$

$$11) \sqrt{x^2+5} + 1 = x$$

$$12) \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = 1$$

$$13) \sqrt{x-4} + 2 = \sqrt{x+2}$$

### د اولې درجې یو مجهوله معادلو د مسایلو عبارتي حل

د معادلو د تشکیل طریقې: معادلې د ریاضیاتو یو مهم قسمت تشکیلوي او زیات مسائل د هغې په واسطه حل کېږي. کولای شو د دې لپاره، چې د مسائلو په حل کې له معادلو څخه سمه گټه واخلو؛ لازمه ده، چې د پوښتنو د شرایطو مطابق الجبري جملې تشکیل کړو او وروسته د معادلې شکل ته راوړل شي. د موضوع د توضیح لپاره لاندې مثالونه په نظر کې نیسو.

**مثال:** د دوو عددونو مجموعه 37 او تر منځ فرق یې 5 دی اعداد پیدا کړئ!

**حل:** د سوال د متن مطابق

کوچنی عدد  $x \rightarrow$

لوی عدد  $x+5 \rightarrow$

د دوو عددونو مجموعه  $x+x+5=37$

$$2x+5=37$$

$$2x=37-5 \rightarrow 2x=32$$

$$x=16$$

**مثال:** د دوو عددونو د جمع حاصل 19 دی که د لوی عدد له دوه چنده څخه کوچنی

عدد تفریق شي 17 باقي کېږي، تاسې اعداد معلوم کړئ!

**حل:** نظر د سوال متن ته

کوچنی عدد  $x \rightarrow$

لوی عدد  $19-x \rightarrow$

د معادلې تشکیل

$$2x-(19-x)=17$$

$$2x-19+x=17$$

$$3x=17+19$$

$$3x=36 \rightarrow x=12$$

$$19-12=7$$

**مثال:** کوم عددونه د  $\frac{3}{11}$  کسر له صورت او مخرج سره جمع کړو، چې  $\frac{2}{3}$  کسر لاس ته راشي.

د سوال مطابق

$$\frac{3+x}{11+x} = \frac{2}{3} \rightarrow 22+2x=9+3x$$

$$3x-2x=22-9 \rightarrow x=13$$

**مثال:** یو شخص 1000 افغانۍ په گټه کې واچولې، داسې چې د هغې یوه برخه په 3% نرخ او د هغې بله برخه په 5% نرخ تعین شوې؛ هر کله چې د هغې مجموعې ربح 46 افغانۍ شي، د سرمایې د هرې برخې د گټې مقدار، چې مراتبې ته اچول شوی، معلوم کړئ!  
حل: د سوال د متن مطابق

اوله سرمایه  $x$

د هغې ربح  $\frac{3}{100}x$

د دویمې سرمایې ربح + د اولي سرمایې ربح = 46

دویمه سرمایه  $1000 - x$

ربح  $\frac{5}{100}(1000 - x)$

$$\frac{3x}{100} + \frac{5000 - 5x}{100} = 46$$

$$3x - 5x = 4600 - 5000$$

$$-2x = -400 \rightarrow x = 200$$

$$1000 - 200 = 800$$

## تمرین

## لاندې سوالونه حل کړئ!:

- ۱- د 54 عدد داسې په دوه حصو تقسیم کړئ، چې د لوی عدد څلور چنده د کوچني عدد له پینځه چنده سره مساوي شي؟
- ۲- د یو کیلو ګرام چایو قیمت 36 افغانۍ د یو کیلوګرام بورې له قیمت څخه زیات دی که د 10Kg چای او 12Kg بورې مجموعي قیمت 1284 افغانۍ وي، د فی کیلو ګرام چای او بورې قیمت معلوم کړئ؟
- ۳- که د پلار عمر 43 کاله وي او د زوی عمر 23 کاله وي، معلوم کړئ، چې وروسته له څو کالو د پلار عمر د زوی دو چنده کېږي؟
- ۴- د فردوس درمل 400gr د سلفوریک اسید محلول او اوبه لري، چې 25% د اسیدو لرونکي دي، کوم مقدار اوبو ته براس ورکړي، چې 50% سلفوریک اسید محلول لاسته راوړي؟
- ۵- څومره اوبه له هغه 300gr ګرامه محلول څخه، چې په سلو کې 2 مالګه براس ولري، چې داسې یو محلول ورڅخه ترلاسه شي، چې په سلو کې 3 مالګه ولري؟
- ۶- د دوو عددونو تر منځ فرق 12 دی او حاصل جمع یې 49 ده اعداد معلوم کړئ؟
- ۷- 721 افغانۍ د درې تنو تر منځ داسې ووېشلئ، چې لومړي ته د دوهم په پرتله دوه برابره او دویم ته د درېیم تن دوه برابره ورسپړي؟

## اوله درجه دوه مجهوله معادلې

هغه معادلې، چې د دوو مجهولونو لرونکې وي او د مجهولونو درجه یې یو وي د اوله درجه دوه مجهوله معادلو په نوم یادېږي. یوه اوله درجه دوه مجهوله معادله بې نهایت حلونه لري

$$\text{مثلاً: } x + 2y = 8$$

$$\begin{array}{cccccc} x=0 & x=1 & x=-1 & x=2 & x=4 & \\ y=4 & y=\frac{7}{2} & y=4,5 & y=6 & y=2 & \end{array}$$

د اوله درجه دوه مجهوله معادلو عمومي شکل  $ax + by + c = 0$  دی، چې په هغې کې  $a, b, c$  د همزمانه یواځیني حل لپاره په اوله درجه دوه مجهوله معادلو کې د معادلو سیستم ته اړتیا ده، یانې دوه مجهوله په دوو معادلو کې، درې مجهوله په درېو معادلو کې او  $n$  مجهوله په  $n$  معادلو کې.

## د اولې درجې دوه مجهوله معادلو سیستم

د هغې کلي شکل

$$a_1x + b_1y = C_1$$

$$a_2x + a_2y = C_2$$

د اولې درجې دوه مجهوله معادلو حل: د دې سیستم حل په رنگارنگ شکلونو ممکن

دی، چې په څو مثالونو کې یې توضیح کوو.

مثال:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y = 8 \\ 5x - y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} 4x + 2 = 8 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

$$20x + 10 = 40 \dots\dots I$$

$$\underline{\pm 20x \mp 4y = \pm 12 \dots\dots II}$$

$$14y = 28$$

$$y = 2$$

د I معادله له II څخه منفي کوو

د Y قیمت له پورته معادلو څخه په یوې کې وضع کوو د x قیمت حاصلېږي.

$$4x + 2(2) = 8$$

$$4x + 4 = 8$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

د پورته سیستم د حل سیټ  $A = \{1, 2\}$ 

## د تعویض په طریقه د اولې درجې دوه مجهوله معادلو حل

په دې حالت کې یو مجهول له یوې معادلې څخه په لاس راوړو، په بله معادله کې یې

وضع کوو، د بل مجهول حل ته رسېږو.

مثال:

$$4x + 3y = 6 \dots\dots I$$

$$5x + 4y = 7 \dots\dots II$$

I

II

$$4x + 3y = 6$$

$$4\left(\frac{6-3y}{4}\right) + 4y = 7$$

$$4x = 6 - 3y$$

$$30 - 15y + 16y = 28$$

$$x = \frac{6-3y}{4} \dots\dots III$$

$$y = 28 - 30 = -2$$

$$y = -2$$

دا قیمت له I , II , III څخه په یوې معادله کې ردو د x قیمت راکوي.

$$x = \frac{6-3(-2)}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x = 3$$

$$B = \{3, -2\}$$

۳- د مساوات په طریقه حل: په دې حالت مجهول په دواړو معادلو کې په نظر کې نیسو.

مثال:

$$3x - 2y = 1 \dots\dots\dots I$$

$$2x - y = 4 \dots\dots\dots II$$

$$3x = 2y + 1 (I)$$

$$x = \frac{2y+1}{3}$$

$$2x = y + 4 (II)$$

$$x = \frac{y+4}{2}$$

$$x = x$$

$$\frac{2y+1}{3} = \frac{y+4}{2}$$

$$2(2y+1) = 3(y+4)$$

$$4y+2 = 3y+12$$

له پورته معادلو څخه په یوه کې د دې قیمت په اېښودو x پیدا کوو.

$$y = 10$$

$$x = \frac{2(10)+1}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

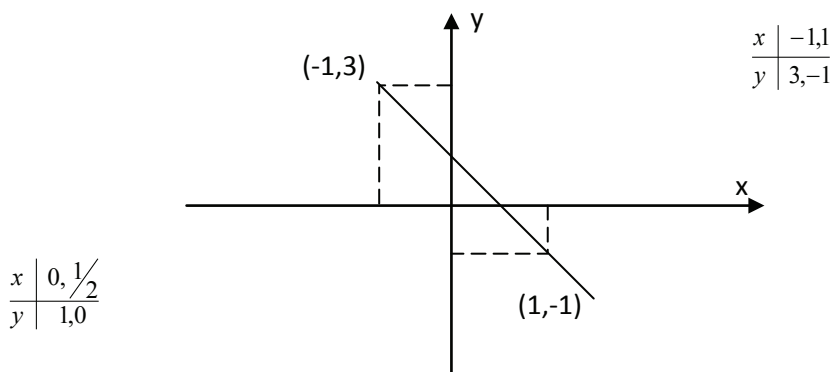
$$x = 7$$

$$C = \{7, 10\}$$

### د اولې درجې دوه مجهوله معادلو حل

که اوله درجه دوه مجهوله معادله د  $y$  لپاره حل کړو؛ یعنې  $y = f(x)$ ,  $y = ax + b$  فرض کړو واضح ده، چې د  $x$  د متحول په هر قیمت سره د  $y$  د متحول قیمت سره یوشی کېږي، په دې حالت کې د  $(y, x)$  مرتبې جوړې د حقیقي اعدادو څخه لاسته راځي، که دغه مرتبې جوړې د وضعیه کمیاتو قایم ته انتقال کړو؛ نو هره مرتبه جوړه یو ټکی په گوته کوي، د دغو ټکو د نښلولو څخه د تابع گراف جوړېږي. دا چې پورتنۍ تابع لومړۍ درجه اوله تابع ده؛ نو گراف یې یوه کرښه ده، نوموړې تابع ته خطي تابع ویل کېږي.

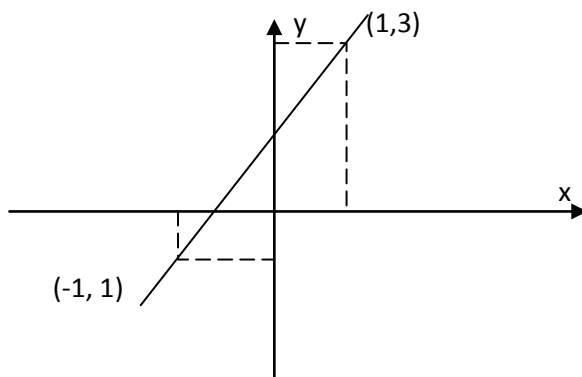
**مثال:** د  $2y+4x=2$  گراف داسې رسم کړئ، چې  $y=f(x)$  دی.  
**حل:** څرنګه چې پورته اوله درجه تابع ده؛ نو د هغې گراف مستقیم خط دی، چې کېدای شي له دوه یا ډېرو نقطو څخه تشکیل شي.



په محورونو باندې تقاطع

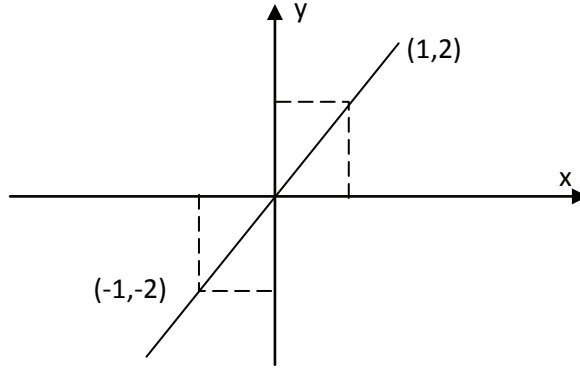
د  $y = 2x + 1$  معادلې خطي گراف رسم کړئ!  
**حل:** له پورته معادلې سره سم عمل کوو.

$x$	$-1,1$
$y$	$1,3$



په محورونو باندې تقاطع

$$\begin{array}{l|l} x & 0, -\frac{1}{2} \\ \hline y & 1, 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{l|l} x & -1, 0, 1 \\ \hline y & -2, 0, 2 \end{array}$$

د لاندې تابع گراف رسم کړئ!

تمرین

د لاندې توابعو گراف رسم کړئ!

1)  $2y + 4 = 8x$

2)  $y = 2x - 2$

3)  $3x + y = 12$

4)  $x - y = 4y - \frac{2}{3}x$

5)  $\frac{2}{3}y + 2x = \frac{1}{2}$

6)  $4x - \frac{1}{2} = -y + 1$

### د گراف په واسطه د دوه مجهوله معادلو د سیستم حل

پوهېږو چې د اوله درجه دوه مجهوله معادلو سیستم له دوه معادلو څخه تشکیلېږي، یعنې:

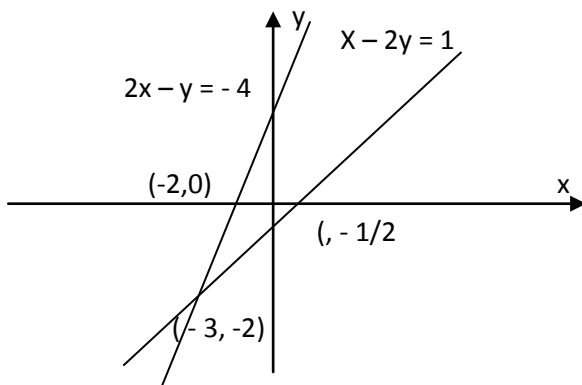
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \dots\dots\dots I \\ a_2x + b_2y = c_2 \dots\dots\dots II \end{cases}$$

نو هر یو مستقیم خط د وضعیه کمیاتو د مستوي د پاسه قایم تشکیلوي. په هغه حالت کې، چې دا دوه خطونه په خپلو کې یو بل قطع کړي د تقاطع نقطه یې یعنې  $(x,y)$  د هغې همزمان حل دی.

مثال: د لاندې معادلو سیستم د گراف په طریقته حل کړئ!

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

حل: د یادو معادلو څخه د هرې یوې گراف رسم کړئ!



گرافونو ته په کتو د خطونو مشترکه نقطه  $(-3, -2)$  ده؛ یعنې د یاد سیستم  $y = -2, x = -3$  همزمان حل دی.

خطونو سیستم ممکن منطبق یا موازي وي. د سیستم د موازي کېدو په حالت کې حل نه لري او د منطبق کېدو په حالت کې سیستم د لایتناهي لرونکی دی، ټاکلی حل نه لري.

د دې لپاره چې پوه شو خطونه متقاطع، موازي که منطبق دي د سیستم د ضریبونو په منځ کې رابطې په لاندې ډول دي:

$$\frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2} \neq \frac{c1}{c2}$$

سیستم حل نه لري، خطونه موازي دي:

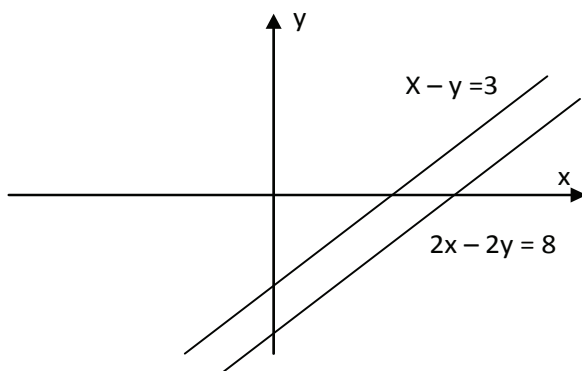
$$\frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2} = \frac{c1}{c2}$$

سیستم بی نهایت حل لري، خطونه منطبق دي:

$$\frac{a1}{a2} \neq \frac{b1}{b2}$$

د لومړۍ موضوع مثال:

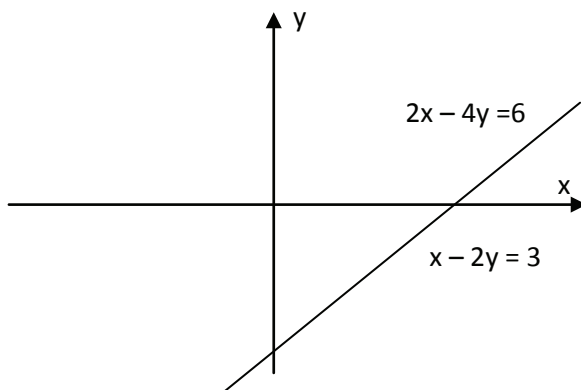
$$\begin{cases} x - y = 3 \dots\dots I \\ 2x - 2y = 8 \dots\dots II \end{cases}$$



$$\begin{array}{l} I \dots\dots \begin{array}{c|c} x & 0,3 \\ y & -3,0 \end{array} \\ II \dots\dots \begin{array}{c|c} x & 0,4 \\ y & -4,0 \end{array} \end{array}$$

د دویمې موضوع مثال:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 6 \dots\dots I \\ x - 2y = 3 \dots\dots II \end{cases}$$



$$\begin{array}{l} I \dots\dots \begin{array}{c|c} x & 0,3 \\ y & -3/2, 0 \end{array} \\ II \dots\dots \begin{array}{c|c} x & 0,4 \\ y & -3/2, 0 \end{array} \end{array}$$

## سوالونه

د ضرابو د جوړولو په طريقه د لاندې د وه مجهوله معادلو سيستم حل كړئ!

$$1) \begin{cases} x+2y=2 \\ x-4y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a+b=a \\ 4b=22-5a \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 5x-y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+3y=3 \\ 6x+15y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y=3a+b \\ 3x-y=2a+4b \end{cases}$$

په تعويضي طريقه يې حل كړئ :

$$\begin{cases} y=2x \\ x+y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x+6y=2 \\ \frac{2}{3}x-4y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2-2y \\ 2x-3y=25 \end{cases}$$

د مساوات په طريقه يې حل كړئ:

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ 5x=y-2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-5y=17 \\ 2x+3y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a-2b=-19 \\ 2a+5b=0 \end{cases}$$

لاندې عبارتي مسايل حل كړئ:

۱- د دوو عددونو د جمع حاصل 5 او د تفریق حاصل يې 3 دی، عددونه پيدا كړئ!  
 ۲- دوه عددونه پيدا كړئ، چې د لوی عدد دوه چنده د کوچني عدد له درې چنده  
 څخه د 10 په اندازه لوی او  $\frac{1}{5}$  حصه د لوی عدد له  $\frac{1}{3}$  حصه د کوچني عدد څخه  
 د 20 په اندازه کوچنی وي؟

۳- د دوو عددونو د مربعاتو د تفریق حاصل 56 او د تفریق حاصل يې 4 دی، عددونه  
 پيدا كړئ!

۴- احمد دوه رقمه پسته لري؛ يو ډول پسته يو كيلو گرام په 90 افغانۍ او دويم ډول  
 يو كيلوگرام 60 افغانۍ قيمت لري. هغه غواړي 56 كيلو گرامه مخلوط جوړكړي، د  
 هر كيلو گرام پستې څخه څو كيلو گرامه په كار ده؟

۵- كچر او خر هر يو څو كيلو گرامه وزن انتقالوي. كه چېرې د كچر بار 100 كيلو گرامه  
 د خره د بار له وزن نه زيات شي، د خره د بار دوه چنده د كچر بار كېږي او كه د  
 خره د بار وزن 100 كيلو گرامه د كچر د بار له وزن څخه زيات شي، د كچر د بار  
 وزن څوچنده د خره د بار د وزن كېږي؟

۶- يو دهقان څو كورني چرگان او څو سويان لري. كه چېرې چرگان او سويان 50 سرونه  
 او 140 پښې ولري؟

د اولې درجې درې مجهوله معادلو د حل سیستمونه

د اوله درجه درې مجهوله معادلو عمومي شکل:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

په پورته سیستم کې  $x, y, z$  مجهولات دي او  $a_1, a_2, a_3$ ،  $b_1, b_2, b_3$ ، او  $c_1, c_2, c_3$  ثابتې معادلې دي. اوله درجه درې مجهوله معادلې د افنا د طریقي پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو په څیر تعویضي حل کولای شو. په دې ځای کې غواړو څو مثالونه په افنا او تعویضي طریقه حل کړو.

مثال : دغه سیستم په تعویضي طریقه حلوو .

$$x + 6y + 3z = 4 \dots\dots\dots I$$

$$2x + y + 2z = 3 \dots\dots\dots II$$

$$3x - 2y + z = 0 \dots\dots\dots III$$

حل: د  $x$  قیمت له I معادلې نه د  $y$  او  $z$  له جنس څخه په لاس راوړو .

$$x = -6y - 3z + 4 \dots\dots\dots IV$$

د  $x$  قیمت په II او III معادله کې ځای پر ځای کوو.

$$2(-6y - 3z + 4) + y + 2z = 3$$

$$-12y - 6z + 8 + y + 2z = 3$$

$$-11y - 4z = -5 \dots\dots\dots V$$

د  $x$  قیمت په III معادله کې ځای پر ځای کوو.

$$3(-6y - 3z + 4) - 2y + z = 0$$

$$-20y - 8z = -12 \dots\dots\dots VI$$

VI او V معادلې د  $y$  او  $z$  له جنس څخه د دوه مجهوله معادلو یو سیستم جوړوي.

$$-11y - 4z = -5 \dots\dots\dots V$$

$$-20y - 8z = -12 \dots\dots\dots VI$$

د پورته سیستم د حل لپاره د یو مجهول قیمت فرضاً  $z$  له V معادلې څخه په لاس راوړو او هغه په VI کې وضع کوو.

$$-11y - 4z = -5 \rightarrow -4z = -5 + 11y$$

$$z = \frac{-5 + 11y}{-4} = \frac{-11 + 5}{4} \dots\dots\dots VII$$

اوس کولای شو ولیکو چي:

$$-20y - 8\left(\frac{-11y+5}{4}\right) = -12 \Rightarrow -20y + 22y - 10 = -12$$

$$2y = -2$$

$$y = -1$$

د  $y$  قیمت په VI معادله کې وضع کوو او د  $z$  قیمت پیدا کوو.

$$z = \frac{-11y+5}{4} = \frac{-11(-1)+5}{4} = \frac{11+5}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

که د  $y$  او  $z$  قیمتونه په IV معادله کې وضع کړو؛ د  $x$  قیمت پیدا کېږي.

$$x = -6y - 3z = 4 \dots \dots \dots IV$$

$$x = 6 - 12 + 4 = -2$$

$$x = -2$$

په نتیجه کې د پورته معادلو د حل سیستم عبارت دی له  $x = -2, y = -1, z = 4$ .

### د افنا په طریقه حل

د اوله درجه درې مجهوله معادلو د سیستم په حل کې له مجهولاتو څخه یو افنا کېږي. وروسته د اوله درجه دوه مجهوله معادلو د سیستم په څېر عمل کېږي او مجهولات پیدا کېږي.

سوالونه: لاندې سیستمونه په افنا او تعویضي طریقه حل کړئ.

$$1) \begin{cases} 2x - y + 2z = -6 \\ x + 2y - 3z = 9 \\ 3x - y - 4z = 3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x - 2y + 4z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - 2y - z = -3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 2x + 3y + 4z = -16 \\ 3x - 4y + 5z = 6 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ x + 2y + z = -2 \\ 3x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 3y + 4z = -16 \\ 3x - 4y + 5z = 16 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} y - 3z = -7 - 2x \\ 4y - x = -7 - z \\ 3x = 4 + 2y + 2z \end{cases}$$

## دویمه درجه یو مجهوله معادلې

دویمه درجه یو مجهوله معادلې  $ax^2 + bx + c = 0$ ،  $a \neq 0$  د دې معادلو عمومي شکل دی، داسې چې  $a, b, c$  ثابت اعداد،  $x$

دویمه درجه مجهول او متحول دی.

### خصوصي حالتونه

۱- که چېرې  $a=0$  وي معادله  $bx+c=0$  د اولې درجې شکل غوره کوي، البته د اولې

درجې یو مجهوله معادلو په حل پوهېږئ.

۲- که  $b=0$  وي معادله  $ax^2+c=0$  شکل اختیاري، چې په دې حالت کې معادله د

دوه حقيقي مخالف اشاره جذرونو لرونکې ده.

### ۱ مثال

$$4x^2 - 100 = 0 \rightarrow 4x^2 = 100 \rightarrow x^2 = \frac{100}{4} = 25$$

$$x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$$

۳- که چېرې  $c=0$  وي معادله  $ax^2+bx=0$  شکل لري، چې په دې حالت کې معادله د

دوه حقيقي جذرونو لرونکې ده، یو له هغو څخه صفر اوبل یې  $x_2 = -\frac{b}{a}$  دی.

### مثال

$$2x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(2x + 5) = 0$$

$$x = 0$$

$$2x + 5 = 0 \rightarrow 2x = -5$$

$$x = \frac{-5}{2}$$

## د دویمې درجې یو مجهوله معادلو حل

### ۱- د تجزیې په طریقې حل

د پولینومونو له تجزیې نه په استفادې، چې له هغې سره بلد یاست، هرکله چې یوه

دویمه درجه یو مجهوله معادله د تجزیې قابل وي؛ کولای شو د هغې جذرونه پیدا کړو.

## مثالونه

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$\sqrt{x^2 - 5x} = 6$$

$$x^2 - 5x = 36$$

$$x^2 - 5x - 36 = 0$$

$$(x-9)(x+4) = 0$$

$$x - 9 = 0$$

$$x = 9$$

$$x + 4 = 0$$

$$x = -4$$

لاندې معادلې د تجزيې په طريقه حل کړئ؟

$$1 - 3x^2 - 10x = 0$$

$$2 - x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$$

$$3 - x^2 - 16 = 0$$

$$4 - 2(x^2 + 20) = 21x$$

$$5 - x^2 - x - 56 = 0$$

$$6 - 26 = 31x + 5x^2$$

له تکميل مربع نه په گټه اخيستو تجزيه حل کړئ؟

$$1 - 3x^2 - 8x = 0$$

$$2 - x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0$$

$$3 - 2x(x+10) = 15 + x$$

$$4 - 18 + 5x^2 + 33x$$

$$5 - 4x + 1 + 3x = 0$$

$$6 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

د محمد بن موسي خوارزمي د فورمول په طريقه حل

پوهېږو، چې د درېيمه درجه يو مجهوله معادلو عمومي شکل  $ax^2 + bx + c = 0$  دی،

البته  $a \neq 0$  وي له تکميل مربع نه په گټه اخيستو:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - (b^2 - 4ac) = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

د عملیاتو د اسانتیا لپاره  $b^2 - 4a = \Delta$  وضع کوو ( $\Delta$ ) ممیزه یا قایمه نومبېري، چې لاندې امکانات په کې شاملېږي.

۱- که  $\Delta > 0$  وي معادله د دوو مختلفو حقيقي جذرونو لرونکې ده، یعنې:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۲- هر کله چې  $\Delta = 0$  وي معادله د یو مضاعف جذر لرونکې ده، یعنې:

$$x_1, x_2 = \frac{-b}{2a}$$

۳- که چېرې  $\Delta < 0$  وي، معادله حقيقي جذر نه لري. په دې حالت کې معادله د دوه مختلط جذرونو لرونکې ده.

که چېرې  $\Delta > 0$  او  $a > 0$  وي، د  $y = ax^2 + bx + c$  ترینوم گراف د  $x$  محور په دوه نقطو کې قطع کوي.

د لاندې معادلو جذرونه د محمد بن موسی د فورمول پواسطه پیدا کړئ:

$$1) x^2 + x - 6 = 0 \quad a = 1, b = 1, c = -6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-6) \cdot 1 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$A = \{x_1 = 2, x_2 = -3\} \text{ د حل سیټ}$$

$$2) x^2 + 6x + 9 = 0 \quad a = 1, b = 6, c = 9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$$

$$x_1 = x_2 = -3$$

### دویمه درجه یو مجهوله جذري معادلې

د هغې معادلو د حل لپاره چې مجهول تر جذر لاندې واقع وي، اول هغه افاده، چې د جذر لاندې ده یو طرف ته انتقالوو، وروسته د معادلې دواړه خواوې د جذر د درجې په توان پورته وړو، چې په دې حالت کې جذر له منځه ځي او د معادلې ځواب په لاس راوړو. که اړتیا وي، کولی شو څو ځله د معادلې اطراف د جذر د درجې په توان پورته یوسو.

مثال: د لاندې معادلو جذرونه په لاس راوړئ!

$$1 - \sqrt{3x+10} = x+4$$

$$(\sqrt{3x+10})^2 = (x+4)^2$$

$$3x+10 = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x+2)(x+3) = 0$$

$$x+2=0, x_1 = -2$$

$$x+3=0, x_2 = -3$$

$$2 - \sqrt{x}\sqrt{2x-3} = 3$$

$$(\sqrt{x}\sqrt{2x-3})^2 = (3)^2$$

$$x(2x-3) = 9$$

$$2x^2 - 3x = 9$$

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$2x^2 - 6x + 3x - 9 = 0$$

$$2x(x-3) + 3(x-3) = 0$$

$$(x-3)(2x+3) = 0$$

$$x-3=0, x=3$$

$$2x+3=0, x = -\frac{2}{3}$$

نوټ: باید ووايو، چې په جزي معادلو کې حاصل شوي جذرونه حتماً امتحان کړو؛ ځکه په دې ډول معادلو کې په لاس راغلي ځينې جذرونه د قبول وړ نه دي.

لاندې عبارتي مسايل حل کړئ؟

۱ - د دوو عددونو د جمع حاصل 16 او د ضرب حاصل يې 63 دی، عددونه لاس ته راوړئ؟

۲ - د دوو طاقتو مسلسلو عددونو د ضرب حاصل 323 دی، اعداد پيدا کړئ؟

۳ - د يو مثلث قاعده نظر ارتفاع ته 4cm زياته ده معلومه کړئ، چې ارتفاع بايد کومه اندازه وي؛ تر څو د مثلث مساحت 10.5Cm<sup>2</sup> شي؟

۴ - که د يوه عدد مربع پينځه چنده د هماغه عدد مساوي په 36 شي، اعداد پيدا کړئ؟

۵ - د يو قايم الزاويه مثلث يوه ضلع 7Cm اوبله نيمه قايمه ضلع د 13 په اندازه له وتر نه کمه ده، د مثلث مساحت پيدا کړئ؟

۶ - د يو مستطيل طول نظر د هغې عرض ته 3m لوی دی، د مستطيل عرض داسې تعين کړئ، چې د هغې مساحت 40m<sup>2</sup> شي؟

۷ - په  $2x^2 - 4x + 1 = 0$  معادله کې x داسې تعين کړئ، چې:

a- معادله دوه حقيقي جذرونه ولري.

b- معادله يواځې يو حقيقي جذر ولري.

c- معادله هېڅ حقيقي جذر نه لري.

۸ - احمد ۵ کاله له محمود نه لوی دی. د عمر حاصل ضرب یې 100 کېږي، د هر یوه

عمر پیدا کړئ؟

۹ - د دوو عددونو مجموعه 7 او د مربعاتو مجموعه یې 25 ده، عددونه کوم دي؟

### درېیمه درجه معادلې

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  د درېیمه درجه معادلو عمومي شکل دی، چې  $a_3, a_2, a_1, a_0$

ثابت حقيقي او  $x$  د معادلې مجهول دی. البته  $a_3 \neq 0$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 = 0 \quad a_1 = 0, a_0 = 0$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_0 = 0, a_1 = 0$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 = 0, a_1 = 0$$

$$a_3x^3 + a_1x + a_0 = 0, a_2 = 0$$

$$a_3x^3 + a_1x + a_0 = 0 \rightarrow a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

$$a_3x^3 + a_0 = 0$$

پورته معادلو ته مکعبي معادلې هم وایي.

څرنګه چې  $a_3 \neq 0$  دی؛ نو کولای شو مکعبه معادله په  $a_3$  تقسیم کړو، چې لاندې شکل

اختیاروي.

$$x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3} = 0$$

د درېیمې درجې معادلو حل: له دویمه درجه معادلو څخه پوهېږو، چې د معادلې د

جذرونو او ضریبونو ترمنځ رابطه شتون لري.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

په همدې ترتیب د درېیمه درجه معادلو د جذرونو او ضریبونو ترمنځ هم رابطه وجود لري.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{a_0}{a_3}$$

څرنګه چې د معادلو تیوري حکم کوي هغه معادلې، چې تاق درجه لري، حد اقل د یوه

حقيقي جذر لرونکې دي؛ نو درېیمه درجه معادلې حد اقل د یوه حقيقي جذر لرونکې دي.

چې کولای شو د معادلې د جذرونو او ضریبونو ترمنځ رابطې څخه یې پیدا کړو. څرنګه چې پورته یادونه وشوه، کولی شو له  $\frac{a_0}{a_3}$  حقیقي جذرونو له فکتورنو څخه درېیمه درجه معادلې پیدا کړو

**مثال:** د مکعبی معادلې  $6x^3 - 29x^2 + 14x + 24 = 0$  حقیقي جذر پیدا کړئ!

$$6x^3 - 29x^2 + 14x + 24 = 0$$

حل: د 24 عدد فکتورونه عبارت دي له:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$

د 6 فکتورونه عبارت دي له:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

ممکنه نسبي جذرونه عبارت دي له:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{1}, \frac{8}{2}, \frac{8}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{1}, \frac{12}{2}, \frac{12}{3}, \frac{12}{6}, \frac{24}{1}, \frac{24}{2}, \frac{24}{3}, \frac{24}{6}$$

دا شمېر عددونه زیات دي، سربېره پر دې اول تام عددونه امتحانوو، پس له امتحانه لیدل کېږي، چې 4 عدد یو د یادې معادلې له جذرونو څخه دی، چې لاندې لیدل کېږي.

$$\begin{array}{r|l} 6 & -29 & +14 & +24 & 4 \\ & 24 & -20 & -24 & \\ \hline 6 & -5 & -6 & 0 & \end{array}$$

له ترکیبي تقسیم څخه نتیجه اخلو، چې د پورته مکعبی معادلې دویم فکتور:

$$6x^2 - 5x - 6 = 0 \text{ دی.}$$

$$(2x-3)(3x+2) = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{2}{3}$$

د حالیه سیټ په منځ کې یاده مکعبه معادله:

$$A = \left\{ 4, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3} \right\} \text{ حالیه سیټ}$$

مثال: د  $x^3 - x - 6 = 0$  معادلې حقيقي جذرونه

د 6 عدد فکتورونه عبارت دي له:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

وروسته له امتحانه لیدل کېږي، چې د یادې مکعبې معادلې حقيقي جذر 2 دی.

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

د  $x^2 + 2x + 3$  پورته مکعبې معادلې دویم فکتور دی.

$$x_1, x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$$

نو یاده مکعبه معادله د یوه حقيقي او دوه مختلطو جذرونو لرونکې ده.

### درېمه درجه تابع

ښکاري، چې  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  درېیمه درجه تابع ده، چې  $a, b, c$  او  $d$  ثابت عددونه،  $x$  مستقل متحول او  $y$  تابع متحول دی. د هغو نیمګړې بڼې هم د  $y = f(x)$  ډول بیانوي.

### د درېیمې درجې تابع د گراف رسمول

د درېیمې درجې تابع د گراف د رسمولو لپاره له ټولو نه مخکې د تابع صفري نقطې پیدا کوو، ځکه صفري قیمتونه د گراف د رسمولو لپاره اسانتیا پیدا کوي. وروسته له دې د جذر لاندې او د جذرونو نه د باندي مناسب قیمتونه ټاکو، چې د تابع قیمتونه له هغې څخه پیدا شي.

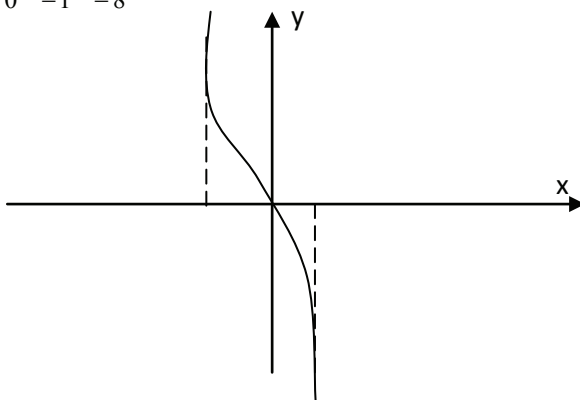
له  $(x, y)$  څخه جوړې شوې مرتبې جوړې د محورونو د پاسه انتقالوو، د تابع گراف رسمېږي.

نوټ: له دې څخه د درېیمه درجه توابعو گراف له ډېرو دقیقو مشتقاتو نه په ګټه اخیستنې رسمولای شو. د اوس لپاره له مستقیمې قیمت گذارې څخه په مناسبو قیمتونو د

درېیمه درجه تابع گراف رسموو، چې چندان دقیق نه دی.

مثال: د  $y = -x^3$  تابع گراف رسم کړئ!

$x$	-2	-1	0	1	-2
$y$	8	1	0	-1	-8



### د درېیم څپرکي پوښتنې

د لاندې درېیمه درجه معادلو جذرونه پیدا کړئ، هغه تجزیه کړئ او وروسته د معادلې گراف رسم کړئ؟

1)  $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8 = 0$

2)  $2x^3 + 3x^2 - 45x + 54 = 0$

3)  $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$

4)  $6x^3 + 2x^2 - x - 4 = 0$

5)  $30x^3 - x^2 - 76x + 15 = 0$

6)  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

## ردیفونه او سلسلې

## ټولیزه موخه

پر ترادف او سلسله او د هغو پر ډولونو باندې پوهیدل او په اقتصادي مسایلو کې له هغو څخه گټه اخیستل.

- د زده کړې موخې: محصلین به د دې څپرکي په پای کې په لاندې موضوعاتو وپوهېږي:
- د ردیف او سلسلې د مفهوم درک او د ردیفونو او سلسلو په ډولونو پوهېدنه.
  - د ردیفونو او سلسلو د قوانینو او اصولو په اړه پوهه او د عمومي ردیفونو او سلسلو د جمعې پیدا کول.
  - د سلسلو د حاصل جمع لپاره د فورمولونو زده کول او د مسایلو په حل کې د هغې کارول.
  - د سلسلو د ډول پیدا کولو په هکله پوهه او د سلسلو د جنس د ټاکلو په هکله د پوهانو د نظرونو کارول او د هغو تحلیل.

## ردیفونه او سلسلې

هغه عددونه، چې تر یوې ټاکلې قاعدې لاندې یو پر بل پسي ترتیب شوي وي؛ ردیف نومېږي، مثلاً:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots \quad I$$

$$2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots \quad II$$

$$1, 1, \frac{3}{4}, \frac{4}{8}, \dots, \frac{n}{2^{n-1}}, \dots \quad III$$

پورته ترتیبونه ردیفونه تشکیلوي او هر جز یې د ردیف یو حد دی.

که په یوه ردیف کې د هغې حدونه محدود وي؛ ټاکلی (معین) ردیف ورته ویل کېږي،  
مثلاً:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$$

هغه ردیف، چې حدونه یې محدود نه وي؛ نا ټاکلی (غیرمعین) ردیف ورته ویل کېږي،  
مثلاً:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 2^{n-1}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}$$

د هر  $n$  لپاره له طبیعي عددونو څخه یو ردیف ټاکل کېږي دا چې د عددونو شمېر لایتناهي دی؛ نو د ردیفونو د حدونو شمېر لایتناهي شو؛ بڼاً د هغې اخري حد نه شو ټاکلی. د یوه ردیف عمومي جمله، یعنې  $a_n$  د یوه فورمول پواسطه تعریفېږي او د  $n=1, 2, 3, \dots$  لپاره د هغې حدود لاسته راځي.

مثال: یو ردیف، چې د هغې عمومي جمله  $a_n = \frac{1}{n^2}$  ده او  $n \in N$  دی لیکو.

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \dots, \frac{1}{n^2}$$

په لاندې بڼه هم وړاندې کېږي.

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots, \frac{1}{n^2}$$

د یوه ردیف عمومي حد ټاکل  $a_n$

مثال: د  $n$  ام حد ردیف  $1, 2, 4, 8, 16, \dots$  د عمومي حد د پیدا کېدو لپاره، لومړی باید د دوو متعاقبو دوو حدونو ترمنځ روابط مطالعه کړو. په پورته ردیف کې ښکاري، چې د دوو متعاقبو حدونو خارج قسمت 2 دی.

$$a_1 = 1 = 2^0$$

$$a_2 = 2 = 2^1 \quad a_5 = 16 = 2^4$$

$$a_3 = 4 = 2^2$$

$$a_4 = 8 = 2^3 \quad a_n = 2^{n-1}$$

حسابي او هندسي ردیفونه

حسابي ردیفونه: د دې  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$  په څېر یو ردیف ته حسابي ردیف ویل کېږي.

داسې چې دهغې هر حد نظر خپل مخکیني حد ته د یوه مشخص او ثابت تفاضل لرونکی وي.

مثال:  $1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots$

$3=4-1$  د پورتنی ردیف تفاضل دی.

$د$   $2, -5, -12, -19, \dots$  ردیف تفاضل دی.

په عمومي شکل حسابي ردیف د لاندې ترتیب لرونکی وي.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \dots, a_1 + (n-1)d$$

په پورته ردیف کې  $n$  طبیعي عدد دی،  $d$  د ردیف د دوه متعاقبو حدونو تر منځ مشترک

تفاضل دی، په دې ځای کې  $d$  کولی شي مثبت، منفي او صفر وي.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

تمرین: د لاندې ردیفونو مشترک تفاضل پیدا کړئ او د هغې عمومي جمله ولیکئ!

1)  $-11, -7, -3, 1, 5, \dots$

2)  $22, 19, 16, 13, \dots$

3)  $25, (24, 5), 24, (23, 5), \dots$

$a_{20} = ?$   $a_{200} = ?$

4)  $2, -1, -4, -7, \dots$

$a_n = -94, n = ?$

۵- که چېرې د یوه ردیف درېیم حد 7 وي او اووم حد یې 15 وي، پنځم حد یې پیدا کړئ!

۶- د پنځم سوال ردیف ولیکئ!

۷- د شپږم سوال 99 ام حد ردیف ولیکئ!

### هندسي ردیفونه

یو ردیف ته هغه وخت هندسي ویل کېږي، چې د دوه متعاقبو حدونو ترمنځ نسبت

یې مشخص او ثابت وي.

مثلاً: دا  $a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \dots, a_1 r^{n-1}$  ردیف یو هندسي ردیف دی.

$3, 6, 12, 24, 48, \dots, 3r^{n-1}$

مثال:

$3, 3 \cdot 2^1, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, 3 \cdot 2^4, \dots, 3 \cdot 2^{n-1}$

د ردیف له عمومي شکل او پورته مثال څخه په لاس راځي، چې د یوه هندسي ردیف

$n$  ام حد عبارت دی له:

$$a_n = (a_1 r^{n-1}) \quad n \in IN$$

## تمرین

د ردیفونو عمومي جملي درکړل شوې دي؛ ردیفونه وليکئ!

$$-1 \quad a_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{او} \quad n \in N \quad \text{دی اته اول حدونه يې وليکئ!}$$

$$-2 \quad a_n(1+(-1)^n) \quad n \in N \quad \text{د يوه ردیف عمومي جمله ده، ذکر شوی ردیف وليکئ!}$$

-3 هغه ردیفونه، چې  $n$  ام حدونه يې درکړل شوی وليکئ!

$$a^n = (1+(-1)^n)^n \quad n \in N \quad \quad a^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad n \in N$$

$$a^n = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^n \quad n \in N \quad \quad a^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{n+1}\right)^n \quad n \in N$$

$$a^n = \left(\frac{1}{(3n-1)^2}\right)^n \quad n \in N \quad \quad a^n = \left(\frac{1}{n} \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)^n \quad n \in N$$

-4 که چېرته د يوه هندسي ردیف حد 4 او مشترک نسبت يې 4 وي، اتم حد په کار دی.

-5 که چېرته اول حد  $\frac{1}{2}$  او مشترک نسبت يې  $\frac{1}{2}$  وي په کار ده د هغې يوولسم حد او ردیف وليکئ.

-6 اول حد 2 او دويم حد 6 او  $a_n = 486$  ،  $n$  مطلوب دی.

-7 اول حد 3 او دويم حد 6 او  $a_n = 96$  ،  $n$  مطلوب دی.

## سلسلې

د تطبيقي رياضي په ساحه، اقتصاد، صنعت او نورو کې وروسته د ردیفونو د حدونو د جمعې حاصل ته اړتيا وي؛ نو لازمه ده، چې په اړه يې معلومات حاصل کړو.

د  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}$  ردیف په نظر کې نيسو، د ردیف قسمي حاصل جمع عبارت دی له:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

دا چې د يوه ردیف حدونه ډېر زيات دي؛ نو کولای شو د هغې د جمعې حاصل په پراخه او لنډ ډول وليکو، له يوناني توري؛ سگما څخه گټه اخلو.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

له  $\Sigma$  دې ښکته او پورته علامې ښيي، چې  $k$  ټول تام اعداد له يوه څخه تر  $n$  ،  $K$  د اندکس په نامه يادېږي، کولای شو دې ته ورته  $I, j, z, n$  او له نورو هم گټه واخلو.

$$\sum_{k=1}^n 2k = \sum_{i=1}^n 2I = \sum_{j=1}^n 2j = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2n$$

$$\sum_{k=1}^n 5^k = 5^1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n$$

$$J = I = K = 1, 2, 3, \dots, n$$

مثال: دلاندي سلسلې د جمع حاصل د  $\Sigma$  په شکل وليکئ!

$$1+3+5+7+\dots+2^{n-1}$$

حل: دا چې  $2n-1$  د پورته سلسلې عمومي جمله ده؛ نو ليکلی شو:

$$1+3+5+7+\dots+2n-1 = \sum_{k=1}^n 2k-1$$

حل: د  $1+4+9+16+\dots+n^2$  سلسلې د جمع حاصل د  $\Sigma$  په شکل وليکئ!

$$1+4+16+\dots+(n-1)^2+n^2 = \sum_{j=1}^n j^2$$

د  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  سلسلې د جمع حاصل بې نهايت دی،  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  اعداد د سلسلې حدونه دي او  $an$  د سلسلې عمومي جمله نومېږي.

هر کله چې  $\sum_{k=1}^n a_k$  او  $\sum_{k=1}^n b_k$  دوه سلسلې او  $c$  ثابت عدد وي، لاندي خاصيتونه يې د قسمي مجموعو لپاره سم دي.

$$\sum_{k=1}^n c = nc, \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$c \sum_{k=1}^n (ak + bk) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

نوټ: د سکما مفهوم او قواعد د دې کتاب په لومړي څپرکي کې تفصيلي وړاندې شول.

تمرین: لاندي مجموعې پيدا کړئ!

$$\sum_{k=1}^3 \frac{2}{k+1}, \quad \sum_{j=1}^4 j^2, \quad \sum_{k=1}^{10} 2, \quad \sum_{I=1}^6 3i$$

$$\sum_{j=1}^5 \frac{j-1}{j+1}, \quad \sum_{n=1}^6 \frac{n^2+1}{n}, \quad \sum_{k=1}^i \left(n + \frac{1}{n}\right)$$

### حسابي سلسله

که يو حسابي رديف په نظر کې ونيسو.

$$a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, \dots, a_1+(n-1)d$$

د پورتنی رديف مجموعه يوه حسابي سلسله ده.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 + (a-1)d = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \dots + a_1 + (n-1)d$$

### د يادې سلسلې قسيمي مجموعې:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_1 + d$$

$$s_3 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d$$

$$s_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + \dots + a_1 + (n-1)d$$

د حاصل جمع لپاره د فورمول د لاسته راوړلو په خاطر يوه حسابي سلسله  $S_n$  په دوه طريقو ليکلی شو:

$$S_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + \dots + a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-3)d + \dots + a_1$$

پورتني رابطې خوا په خوا جمع کوو.

$$2S_n = 2a_1 + (n-1)d + 2a_1 + (n-1)d + \dots + 2a_1 + (n-1)d$$

$$2S_n = n(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

### د مسلسلو طبيعي اعدادو د جمعې حاصل

که په يوه حسابي سلسله کې  $d > 0$  وي، سلسله متزايدة ده، که چېرې  $d < 0$  وي، متناقصه سلسله ورته ويل کېږي.

پوهېږو چې د يوې حسابي سلسلې اخري حد:

$$L = a + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

### په حسابي تصاعد کې د جملو جوړونه

که په يوه حسابي سلسله کې اول او اخر حد معلوم وي، د  $d$  د قيمت په اېښودو کولی شو سلسله پوره کړو.

a.....L

جمله m

د سلسلې د جملو شمېر  $n = m + 2$ 

$$L = a + (n-1)d \Rightarrow (n-1)d = L - a \Rightarrow$$

$$d = \frac{L-a}{n-1} \Rightarrow d = \frac{L-a}{m+1}$$

مثال: په يوه حسابي سلسله کې، چې اول حد يې 7 او اخري حد يې 9- دی، درې جملې جوړې او سلسله وليکئ!

$$d = \frac{L-a}{m+1}$$

$$d = \frac{-9-7}{3+1} = \frac{-16}{4} = -4$$

متناقصه سلسله  $7 + 3 - 1 - 5 - 9$ 

د حسابي سلسلې د مسلسلو جفتو اعدادو د جمعې حاصل پوهېږو چې مسلسل جفت عددونه په حسابي سلسله کې په لاندې ډول دي.

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n$$

$$S = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S = \frac{n}{2}(4 + 2n - 2) \Rightarrow S = \frac{n}{2}(2 + 2n)$$

$$S_n = n(1+n)$$

د حسابي سلسلې د مسلسلو طاقو اعدادو د جمعې حاصل پوهېږو چې مسلسل طاق اعداد په سلسله کې په لاندې ډول دي.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1$$

$$S = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S = \frac{n}{2}(2 + (n-2)2) \Rightarrow S = \frac{n}{2}(2 - 2 + 2n)$$

$$S = n^2$$

که په حسابي تصاعد کې د جملو تعداد طاق وي، مجموعه يې عبارت ده له:  $N$  د سلسلې د جملو شمېر دی:

$$S = n \text{ جملہ } n$$

مثال:

$$5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21$$

$$S = 9 \cdot 13 = 117$$

که د  $m$  جملې اوله مجموعه او د  $m$  جملې اخره مجموعه معلومه وي، د اولې او اخري مجموعه د ټاکلو لپاره په حسابي تصاعد کې د لاندې رابطې څخه گټه اخیستل کېږي.

$$a_1 + a_n = \frac{m \text{ مجموعه } + m \text{ اخره جملہ}}{M}$$

په یوه حسابي تصاعد کې، چې 9 جملې لري، د اولو دوو جملو مجموعه یې 12 او د اخرو دوو جملو مجموعه یې 40 ده، د دې تصاعد د جملو مجموعه پیدا کړئ!

$$n = 9$$

$$a_1 + a_n = \frac{12 + 40}{2} = 26$$

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S = \frac{9}{2}(26) = 9 \cdot 13 = 117$$

## د څلورم څپرکي پوښتنې:

۱- د ټولو تامو عددونو مجموعه د 10 څخه تر 500 پورې، چې د دوو مسلسلو عددونو ترمنځ فرق یې 14 دی، پیدا کړئ؟

۲- په یوه حسابي سلسله کې  $a_1 = 3$ ،  $d = 5$  ده، څو حدونه ورسره جمع شي، چې مجموعه یې 255 شي؟

۳- که په یوه حسابي سلسله کې  $a_1 = 6$ ،  $d = 3$  وي،  $a_{12} = ?$ ،  $S_{12} = ?$

۴- د لاندې جفتو او طاقو مسلسلو اعدادو د سلسلې د جمعې حاصل پیدا کړئ؟  
 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 83$

۵- 72 ام حد د تصاعد  $M+r$ ،  $M+2r$ ،  $M+3r$  پیدا کړئ؟

## لوگارتم

## ټوليزه موخه:

په پېچلو محاسبو او اقتصادي مسايلو کې د لوگارتم په اړه پوهيدل او د هغه کارول

- د زده کړې موخې: ددې خپرکي په پای کې به محصلين په لاندې مواردو وپوهيږي:
- د لوگارتم د مفهوم درک او د هغه معادل د لوگارتم په قوانينو پوهېدنه.
- په محاسبو کې د لوگارتم د قوانينو کارونه، په ځانگړې توگه په اقتصادي محاسباتو کې، لکه مرکبه رېج.
- د لوگارتم په قاعدې پوهېدنه، په يو او بل د لوگارتم د قاعدو بدلول، طبيعي او معمولي لوگارتم.
- د لوگارتم د جدول ترتيبول، اهميت او له جدول څخه گټه اخيستل.
- لوگارتم د رياضي يو لوی بحث دی، چې د ضرب، تقسيم عمليې او لوی توان لرونکي اعداد څو ځله لنډوي او اسانوي.

د مثال په ډول:  $(3.035)^{50}$ ,  $(13.052)^{2003}$ ,  $\sqrt[9]{3.54}$  او نور په مستقيم ډول ډېرې ستونزې لري؛ خو د لوگارتم د عمليې په واسطه په اسانه او دقيق ډول حل کېږي.

لوگارتم په کال 1614 د Jan napair انگليسي عالم په واسطه کشف شو.

که د اکسپونانسيلي  $a^x = N$  معادله په نظر کې ونيسو، داسې چې  $N$  يو مثبت عدد او  $a$  يو مثبت او  $a \neq 0.1$  وي. په دې حالت کې  $x$  د  $N$  لوگارتم په قاعده د  $a$  نومېږي او داسې ليکل کېږي.

$$x = \text{Logarithm}_a N = \text{Log}_a N$$

پورتني رابطي ښيي چې:

$$x = \text{Log}_a N, N = a^x \text{ سره معادل دي.}$$

$$\text{مثال: } 3^2 = 9 \text{ معادله او لوگارتمي شڪل يې } \text{Log}_3 9 = 2$$

$$\text{شڪل } 8 = 2^3 \text{ } \text{Log}_2 8 = 3$$

تمرين: لاندې افادې په لوگارتمي شڪل وليکئ!

$$5^a = 1$$

$$2^5 = 32$$

$$\frac{1}{x} = e^{-i}$$

$$10^3 = 1000$$

$$\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

$$a^{-b} = 1002$$

لاندې افادې د هغې په معادل شڪل وليکئ!

$$\text{Log}_5 5 = 1$$

$$\text{Log}_a \frac{1}{10^6} = y$$

$$\text{Log}_m 100 = n$$

$$\text{Log}_5 625 = 4$$

$$\text{Log}_n m = d$$

$$\text{Log}_a 2^{-b} = n$$

د معادل ڪڍو نه په گٽه اڃيسٽو د اڪسپوناسيل معادله او  $a, y, x$  لوگارتم په لاندې مساوات کي پيداڪوو.

مثال:

$$\text{Log}_3 y = 6$$

$$y = 3^6 \Rightarrow y = 729$$

$$\text{Log}_a \sqrt{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{4} = a^{1/2} \Rightarrow a = 2$$

تمرين: د  $n, m$  او  $b$  قيمتونه له لاندې دوه رابطو څخه ټاکو.

$$\text{Log}_{10} 100000 = n$$

$$\text{Log}_5 10^{-5} = m$$

$$\text{Log}_b \sqrt[3]{64} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Log}_y y = m$$

$$\text{Log}_m x = 1$$

$$\text{Log}_b 81 = 4$$

د لوگارتم خاصيتونه

څرنگه چې  $y = a^x, \text{Log}_a y = x$  يو له بل سره معادل دي، نو کولی شو، چې د لوگارتم خواص د  $y = a^x$  تابع له خواصو څخه په لاس راوړو.

اول خاصيت: (۱) لوگارتم د  $b$  په هرې مثبتې قاعده داسې، چې  $b \neq 1$  وي.

$$\text{Log}_b 1 = 0 \Rightarrow 1 = b^0$$

دویم خاصیت: د هر عدد لوگارتم په خپله قاعده له یوه سره مساوي دی.  
هر کله چې (b) یو مثبت عدد او  $b \neq 1$  وي.

$$b = b^1 \Rightarrow \text{Log}_b b = 1 \quad \text{Log}_{0.05} 0.05 = 1$$

درېیم خاصیت: هر کله چې  $b > 0, b \neq 1$  وي؛ نو د هر (r) لپاره لرو چې:

$$b^r = b^r \Rightarrow \text{Log}_b b^r = r \quad \text{Log}_b b^r = r$$

$$7^{-6} = 7^{-6} \Rightarrow \text{Log}_7 7^{-6} = -6$$

تمرین: لاندې لوگارتمونه محاسبه کړئ!

$$1) \text{Log}_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = ?$$

$$\text{Log}_{10} 0.0001 = ?$$

$$2) \text{Log}_8 8^{-3}$$

$$\text{Log}_4 16 = ?$$

$$3) \text{Log}_{100} (100)0 = ?$$

$$\text{Log}_5 25 = ?$$

$$4) \text{Log}_3 \sqrt{3} = ?$$

$$\text{Log}_4 \frac{1}{16} = ?$$

خلورم خاصیت:  $\text{Log}_b m \cdot n = \text{Log}_b m + \text{Log}_b n$

ثبوت: که  $\text{Log}_b m = x, \text{Log}_b n = y$  فرض شي، پورتنۍ رابطې خوا په خوا سره ضرب کوو.

$$m \cdot n = b^x \cdot b^y \Rightarrow m \cdot n = b^{(x+y)}$$

اطراف د لوگارتم په قاعده نیسو.

$$\text{Log}_b mn = \text{Log}_b b^{x+y}$$

نظر درېیم خاصیت ته لرو.

$$\text{Log}_b mn = \text{Log}_b m + \text{Log}_b n \quad \text{د } x \text{ او } y \text{ قیمتونو په اېښودلو لرو چې:}$$

مثال:

$$\text{Log}_8 8x = \text{Log}_8 8 + \text{Log}_8 x$$

$$= 1 + \text{Log}_8 x$$

مثال:

$$\text{Log}_5 \frac{4y}{5x} + \text{Log}_5 \frac{5x^2}{y} = \text{Log}_5 \frac{4y}{5x} \cdot \frac{5x^2}{y} = \text{Log}_5 4x$$

مثال:

$$\text{Log}_{10} 10x^2y = \text{Log}_{10} 10 + \text{Log}_{10} x^2 + \text{Log}_{10} y = 1 + \text{Log}_{10} x^2 + \text{Log}_{10} y$$

تمرین

$$\text{Log}_5 25 \cdot 125 = ? \quad \text{Log}_3 \frac{3x^2}{y} + \text{Log}_3 \frac{y^2}{3x} = ?$$

$$\text{Log}_4 16 \cdot x \cdot 64y^2 = ? \quad \text{Log}_5 25m^2n^{-4} + \text{Log}_5 5 \frac{n^3}{m^4}$$

$$\text{Log}_b \frac{m}{n} = \text{Log}_b m - \text{Log}_b n$$

پنجم خاصیت:

ثبوت: پوهېږو چې  $m = \frac{m}{n} \cdot n$  دی. د پورتنی مساوات له اطرافو څخه د  $b$  په قاعده

لوگارتیم نیسو.

$$\text{Log}_b m = \text{Log}_b \frac{m}{n} \cdot n \Rightarrow \text{Log}_b \frac{m}{n} + \text{Log}_b n$$

$$\text{Log}_b \frac{m}{n} = \text{Log}_b m - \text{Log}_b n$$

مثال:

$$\text{Log}_5 \frac{120}{210} = \text{Log}_5 120 - \text{Log}_5 210 \Rightarrow \text{Log}_5 \frac{4}{7} = \text{Log}_5 4 - \text{Log}_5 7$$

مثال:

$$\text{Log}_y 10y^2x - \text{Log}_y 2xy = \text{Log}_y \frac{10y^2x}{2xy}$$

$$= \text{Log}_y 5y = \text{Log}_y 5 + \text{Log}_y y = \text{Log}_y 5 + 1$$

څلورم او پنجم خاصیت: راښيي، چې کولای شو د هغې پو سیله د جمعې او تفریق

مسایل په ضرب او تقسیم او برعکس بدل کړو.

شپږم خاصیت: د هر  $r$  لپاره لاندې رابطه سمه ده.

$$\text{Log}_a m^r = r \text{Log}_a m$$

ثبوت: فرضاً  $x = \text{Log}_a m$  دی؛ نو د هغې  $m = a^x$  معادله کیدای شي.

د معادل رابطې دواړه خواوې د  $r$  په توان پورته وړو

$$m^r = (a^x)^r$$

د دې رابطې له دواړو خواو څخه د  $a$  په قاعده لوگارتیم نیسو.

$$m^r = a^{rx}$$

$$\text{Log}_a m^r = \text{Log}_a a^{rx} \rightarrow rx = r \text{Log}_a m$$

مثال: لاندې لوگار تمونه حساب کړئ!

$$\text{Log}_2 64 = ? \quad \text{Log}_2 64 = \text{Log}_2 2^6 = 6\text{Log}_2 2 = 6$$

$$\text{Log}_5 125 = ? \quad \text{Log}_5 125 = \text{Log}_5 5^3 = 3\text{Log}_5 5 = 3$$

$$\text{Log}_{10} 0.0001 = ? \quad \text{Log}_{10} 10^{-4} = -4\text{Log}_{10} 10 = -4$$

$$\text{Log}_{10} \frac{1}{1000} = ? \quad \text{Log}_{10} 10^{-3} = -3\text{Log}_{10} 10 = -3$$

تمرین: لاندې لوگار تمونه حساب کړئ!

$$\text{Log}_3 \frac{1}{9} = ? \quad \text{Log}_4 \frac{1}{16} = ? \quad \text{Log}_4 \sqrt{256} = ?$$

$$\text{Log}_{10} (100)^{\frac{3}{2}} = ? \quad \text{Log}_3 (27)^{\frac{1}{3}} = ? \quad \text{Log}_3 3^5 \cdot 21 = ?$$

$$\text{Log}_{a^b} m = \frac{1}{b} \text{Log}_a m$$

اووم خاصیت

ثبوت: فرضوو، چې  $\text{Log}_a bm$  دی نو د هغې معادله رابطه ده:

$$m = (a^b)^x$$

$$m = (a^x)^b$$

b ام جذر د پورته رابطې  $m^{1/b} = a^x$  د دې رابطې له اطراف څخه د a په قاعده لوگار تم نیسو.

$$\text{Log}_a m^{1/b} = \text{Log}_a a^x$$

د شپږم خاصیت نه په گټه اخیستو کولای شو ولیکو.

$$\frac{1}{b} \text{Log}_a m = x \text{Log}_a a$$

$$\frac{1}{b} \text{Log}_a m = x \Rightarrow \text{Log}_{a^b} m = \frac{1}{b} \text{Log}_a m$$

مثال:

$$\text{Log}_{16} 4 = \text{Log}_{4^2} 4 = \frac{1}{2} \text{Log}_4 4 = \frac{1}{2}$$

مثال:

$$\text{Log}_{25} 125 = \text{Log}_{5^2} 125 = \text{Log}_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2} \text{Log}_5 5 = \frac{3}{2}$$

تمرین: د لوگار تم د اووم خاصیت نه په گټه اخیستو ځوابونه ولیکئ!

$$\text{Log}_{\frac{1}{9}} 27 = ? \quad \text{Log}_8 4 = ? \quad \text{Log}_{\frac{1}{9}} 5^{-2} = ?$$

$$\text{Log}_{\frac{1}{16}} 8 = ? \quad \text{Log}_{64} 16 = ? \quad \text{Log}_{\frac{1}{5}} 5 = ?$$

### د لوگارتم د قاعدې د بدلولو فورمول

که چېرې  $b \neq 1, a \neq 1, x > 0, a > 0$  وي؛ نو لرو چې:

$$\text{Log}_b x = \frac{\text{Log}_a x}{\text{Log}_a b}$$

د پورته فورمول نه په گټه اخیستو، کولی شو لوگارتم له یوې قاعدې څخه بلې قاعدې ته واړوو.

**ثبوت:** فرض کوو، چې  $\text{Log}_b x = y$  او د هغې معادل  $x = (b)^y$  دی.

د معادلې رابطې له دواړو خواوو څخه د  $a$  په قاعده لوگارتم نیسو.

$$\text{Log}_a x = \text{Log}_a b^y = y \text{Log}_a b$$

$$\text{Log}_a x = \text{Log}_b x \cdot \text{Log}_a b$$

$$\text{Log}_b x = \frac{\text{Log}_a x}{\text{Log}_a b}$$

په رابطه کې د  $y$  قیمت ردو.

یاده دې وي، چې د  $a$  په قاعده د عددونو لوگارتم لرو.

که چېرې  $x$  په  $a$  عوض کړو، رابطه لاندې شکل نیسي.

$$\text{Log}_b a \cdot \text{Log}_a b = 1$$

**مثال:**  $\text{Log}_9 27$  محاسبه کړئ!

$$\text{Log}_9 27 = \frac{\text{Log}_3 27}{\text{Log}_3 9} = \frac{\text{Log}_3 (3^3)}{\text{Log}_3 3^2} = \frac{3 \text{Log}_3 3}{2 \text{Log}_3 3} = \frac{2}{3}$$

**مثال:**  $\text{Log}_5 100$  حساب کړئ، په هغه صورت کې، چې  $\text{Log}_5 5 = 0.7$  وي.

د فورمول نه په گټه اخیستو:

$$\text{Log}_5 100 = \frac{\text{Log}_{10} 100}{\text{Log}_{10} 5} = \frac{\text{Log}(10)^2}{\text{Log} 5} = \frac{2}{0.7} = \frac{20}{7}$$

**تمرین:** لاندې لوگارتمونه حساب کړئ!

$$\text{Log}_{64} 16 = ?$$

$$\text{Log}_{16} 32 = ?$$

$$\text{Log}_{0.01} 0.0001 = ?$$

$$\text{Log}_{121} 14641 = ?$$

$$\text{Log}_{100} 0.001$$

$$\text{Log}_{0.01} 1000 = ?$$

### معمولي لوگارتم او طبعي لوگارتم

لکه څنګه چې پوهېږو، هر مثبت عدد خلاف د یوه لوگارتم قاعده کېدای شي، ولې هغه

قاعدې، چې په عمل کې په کار وړل کېږي، د  $e$  عدد او 10 عدد دی،  $e$  یو غیر نسبي عدد

دی، چې تقریبي قیمت یې  $e = 2.718281828$  دی.

هغه لوگارتم، چې قاعده یې  $e$  ده د طبیعي لوگارتم په نوم یادېږي، په لاندې ډول ښودل کېږي.

$$\text{Lnx} = \text{Log}_e x$$

هغه لوگارتم، چې قاعده یې 10 ده، د معمولي لوگارتم په نوم یادېږي او په لاندې ډول دی.

$$\text{Log}x = \text{Log}_{10}x$$

$$\text{Log}0.0001 = \text{Log}10^{-4} = -4$$

$$\text{Log}1000 = \text{Log}10^3 = 3$$

$$\text{Log}_e e \cdot e \cdot e = \text{Log}_e e^3 = 3$$

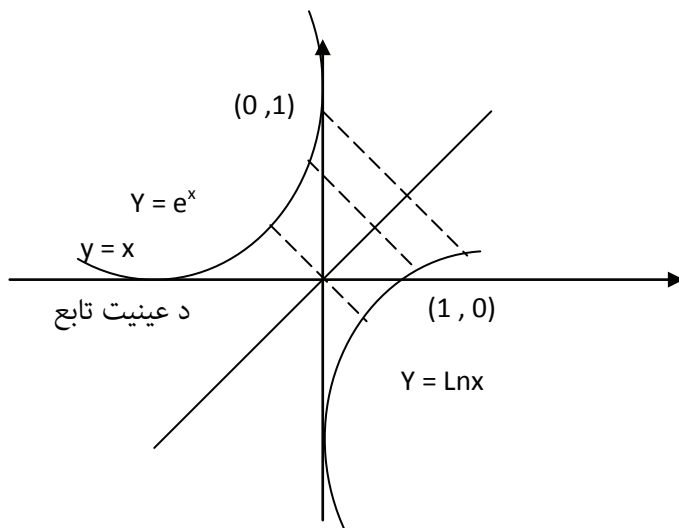
$$\text{Lne} \cdot e \cdot e = \text{Lne}^3 = 3$$

$$\text{Ln} \frac{1}{ee} = \text{Ln} \frac{1}{e^2} = \text{Lne}^{-2} = -2$$

$$\text{Ln} \frac{1}{e^{-3}} = \text{Lne}^3 = 3$$

$$\text{Log}100000 = \text{Log}10^5 = 5$$

نوټ: لوگارتمي تابع او د هغې معادل په اصل کې د یو بل معکوس دي، کولی شو موضوع په لاندې گراف کې ښه درک کړو.





مانتيسه + مشخصه =  $\text{Log}N$

دا چې مانتيسه هر وخت مثبت وي، بايد  $(-K)$  مشخصه په  $10 - K - 10$  شکل وليکل شي.

**د مثال په ډول:** که  $0.57325$  د يوه عدد د لوگارتم مانتيسه وي؛ نو که مشخصه يې په دې حالت کې  $2, 1, 0, -1, -2$  وي، په دې حالت کې يې لوگارتم په لاندې ډول ليکل کېږي.

$8.57325 - 10$  ,  $9.57325 - 10$  ,  $0.57325$  ,  $1.57325$

**مثال:** د لاندې عدد د لوگارتم کرکټرستیک پيدا کړئ!

$\text{Log}1000.0$

څرنگه چې د چپ طرف د اعشاري رقمونو شمېر 4 دی؛ نو د ذکر شوي عدد کرکټرستیک  $K - 1 = 4 - 1 = 3$  دی.

له يوه نه د کوچنيو عددونو د لوگارتم کرکټرستیک د منفي علامې لرونکی دی، که د صفرونو تعداد د اعشاري علامې نه وروسته  $n$  وي، د دې اعشاري کسر کرکټرستیک  $(n+1) -$  دی.

**مثال:** د  $0.00025$  عدد د لوگارتم کرکټرستیک وټاکئ!

څرنگه چې د اعشاري علامې څخه وروسته 3 صفرونه دي؛ نو  $(3+1) = -4$

ټرین: د لاندې لوگارتم کرکټرستیک وټاکئ!

$\text{Log} 0.1$  ,  $\text{Log}0.005$  ,  $\text{Log}23005$

$\text{Log}2.3 \cdot 10^{-5}$  ,  $\text{Log}232 \cdot 10^2$  ,  $\text{Log}0.02 \cdot 10^{-3}$

$\text{Log} 45.3$  ,  $\text{Log}3000.0$  ,  $\text{Log}200 \cdot 10^3$

**مانتيس او د يوه عدد د لوگارتم د مانتيس ټاکل**

لکه څنګه چې مخکې ورته اشاره وشوه، د يوه عدد د لوگارتم مانتيس د هغه عدد د لوگارتم اعشاري برخه تشکيلوي، چې هر وخت يو اعشاري عدد مثبت وي او د اعدادو د لوگارتم د جدول څخه اخيستل کېږي، لکه:

$$\text{Log}_{10} 20 = \text{Log}_{10} 2 \cdot 10 = \text{Log}_{10} 10 + \text{Log}_{10} 2$$

$$\text{Log}20 = 1 + 0.30103 = 1.30103$$

$0.30103$  اعشاري کسر د  $20$  عدد د لوگارتم د مانتيس په نامه يادېږي.

$$\text{Log}300 = \text{Log}100 \cdot 3 = \text{Log}100 + \text{Log}3 = 2 + 0.4771$$

$$\text{Log}300 = 2.4771$$

مثال: د 0.002 عدد لوگارتم پیدا کوو.

$$\text{Log}0.002 = \text{Log}10^{-3} \cdot 2 = \text{Log}10^{-3} + \text{Log}2 = -3 + 0.30103$$

دا چې د سوال په حل کې مانتیس منفي دی، کولی شو په لاندې ډول یې ثبت کړو.

مثال:

$$1) 1 - 0.30103 = 0.69897$$

مثال:

$$\text{Log}N = -3.23403 = -3 - 0.23406$$

$$= -3 - 0.23403 + 1 - 1 = 4 + 0.76597 = -44.766597$$

د یادولو وړ ده، چې د یوه عدد د لوگارتم مانتیس په قاعدې پورې تړلی وي، که ذکر شوی عدد لس یا لس چنده لوی یا کوچنی کړو، د یاد عدد د لوگارتم په مانتیس کې تغیر نه راځي.

مثال:

$$\text{Log}_{10} 583 = 2.76567$$

$$\text{Log}58300 = \text{Log}583 \cdot 100 = \text{Log}583 + \text{Log}100 = 4.76567$$

$$\text{Log}0.00583 = \text{Log}583 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{Log}583 + \text{Log}10^{-5} = 2.76567 + (-5) = -3.76567$$

$$\text{Log}0.0000583 = \text{Log}583 \cdot 10^{-7} = \text{Log}583 + \text{Log}10^{-7}$$

$$= 2.765667 - 7 = -576567$$

د لوگارتم له جدول نه د گټې اخیستنې طریقه

لکه څنګه چې د لوگارتم په حسابي معادلو کې د 10 قاعده د استعمال زیات موارد لري، غواړو، چې د 10 قاعدې د لوگارتم له جدول څخه د گټې اخیستنې طریقه زده کړو.

$$\text{Log}397 = ?$$

$$\text{Log}397 = \text{Log}3.97 \cdot 10^2 = \text{Log}3.97 + \text{Log}10^2$$

$$= 0.5988 + 2 = 2.5988$$

## په لسمه قاعده کې د لوگاریتمي اعدادو جدول

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	10000,	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2,4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3945	0,3962
2,5	0,3979	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2,6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4216	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
2,7	0,4314	0,4330	0,4346	0,4362	0,4378	0,4393	0,4409	0,4425	0,4440	0,4456
2,8	0,4472	0,4487	0,4502	0,4518	0,4533	0,4548	0,4564	0,4569	0,4594	0,4609
2,9	0,4624	0,4639	0,4654	0,4669	0,4683	0,4698	0,4713	0,4728	0,4742	0,4757
3,0	0,4771	0,4786	0,4800	0,4814	0,4829	0,4843	0,4857	0,4871	0,4886	0,4900
3,1	0,4914	0,4928	0,4942	0,4955	0,4969	0,4983	0,4997	0,5011	0,5024	0,5038
3,2	0,5051	0,5056	0,5079	0,5092	0,5105	0,5119	0,5132	0,5145	0,5159	0,5172
3,3	0,5185	0,5198	0,5211	0,5224	0,5237	0,5250	0,5263	0,5276	0,5289	0,5302
3,4	0,5315	0,5328	0,5340	0,5353	0,5366	0,5378	0,5391	0,5403	0,5416	0,5428
3,5	0,5441	0,5453	0,5465	0,5478	0,5490	0,5502	0,5514	0,5527	0,5539	0,5551
3,6	0,5563	0,5575	0,5587	0,5599	0,5611	0,5623	0,5635	0,5647	0,5658	0,5670
3,7	0,5682	0,5694	0,5705	0,5717	0,5729	0,5740	0,5752	0,5763	0,5775	0,5786
3,8	0,5898	0,5809	0,5821	0,5832	0,5843	0,5855	0,5866	0,5877	0,5888	0,5899
3,9	0,5911	0,5922	0,5933	0,5944	0,5955	0,5966	0,5977	0,5988	0,5999	0,6010
4,0	0,6021	0,6031	0,6042	0,6053	0,6064	0,6075	0,6085	0,6096	0,6107	0,6117
4,1	0,6128	0,6138	0,6149	0,6160	0,6170	0,6180	0,6191	0,6201	0,6212	0,6222
4,2	0,6232	0,6243	0,6253	0,6263	0,6274	0,6284	0,6291	0,6304	0,6314	0,6325
4,3	0,6335	0,6345	0,6355	0,6365	0,6375	0,6385	0,6395	0,6405	0,6415	0,6425
4,4	0,6435	0,6444	0,6454	0,6464	0,6474	0,6484	0,6493	0,6503	0,6513	0,6522
4,5	0,6532	0,6542	0,6551	0,6561	0,6571	0,6580	0,6590	0,6599	0,6609	0,6618
4,6	0,6628	0,6637	0,6646	0,6656	0,6665	0,6675	0,6684	0,6693	0,6702	0,6712
4,7	0,6721	0,6730	0,6739	0,6749	0,6758	0,6767	0,6776	0,6785	0,6794	0,6703
4,8	0,6812	0,6821	0,6830	0,6839	0,6848	0,6857	0,6866	0,6875	0,6884	0,6893
4,9	0,6902	0,6911	0,6920	0,6928	0,6937	0,6946	0,6955	0,6964	0,6972	0,6981
5,0	0,6990	0,6998	0,7007	0,7016	0,7024	0,7033	0,7042	0,7050	0,7059	0,7067
5,1	0,7076	0,7084	0,7093	0,7101	0,7110	0,7118	0,7126	0,7135	0,7143	0,7152
5,2	0,7160	0,7168	0,7177	0,7185	0,7193	0,7202	0,7210	0,7218	0,7226	0,7235
5,3	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284	0,7292	0,7300	0,7308	0,7316
5,4	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364	0,7372	0,7380	0,7388	0,7396
5,5	0,7412	0,7421	0,7427	0,7435	0,7443	0,7451	0,7459	0,7466	0,7474	0,7482
5,6	0,7482	0,7490	0,7497	0,7505	0,7513	0,7520	0,7528	0,7536	0,7543	0,7551

## په لسمه قاعده کې د لوگاریتمي اعدادو جدول

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,7	0,7559	0,7566	0,7574	0,7582	0,7589	0,7597	0,7604	0,7612	0,7619	0,7627
5,8	0,7634	0,7642	0,7649	0,7657	0,7664	0,7672	0,7679	0,7689	0,7694	0,7701
5,9	0,7709	0,7716	0,7723	0,7731	0,7738	0,7745	0,7752	0,7760	0,7767	0,7774
6,0	0,7782	0,7789	0,7799	0,7803	0,7810	0,7718	0,7825	0,7732	0,7839	0,7846
6,1	0,7853	0,7860	0,7868	0,7875	0,7882	0,7889	0,7896	0,7903	0,7910	0,7917
6,2	0,7924	0,7931	0,7938	0,7945	0,7952	0,7959	0,7966	0,7973	0,7980	0,7987
6,3	0,9793	0,8000	0,8007	0,8014	0,8021	0,8028	0,8035	0,8041	0,8048	0,8055
6,4	0,8062	0,8069	0,8075	0,8082	0,8089	0,8096	0,8102	0,8109	0,8116	0,8122
6,5	0,8129	0,8136	0,8142	0,8149	0,8156	0,8162	0,8169	0,8176	0,8182	0,8189
6,6	0,8195	0,8202	0,8209	0,8215	0,8229	0,8228	0,8235	0,8241	0,8248	0,8254
6,7	0,8261	0,8267	0,8274	0,8280	0,8287	0,8293	0,8299	0,8306	0,8312	0,8319
6,8	0,8325	0,8331	0,8338	0,8344	0,8351	0,8357	0,8363	0,8370	0,8376	0,8328
6,9	0,8388	0,8395	0,8401	0,8407	0,8414	0,8420	0,8426	0,8432	0,8439	0,8445
7,0	0,8451	0,8457	0,8463	0,8470	0,8476	0,8482	0,8488	0,8494	0,8500	0,8506
7,1	0,8513	0,8519	0,8525	0,8531	0,8537	0,8543	0,8549	0,8555	0,8561	0,8567
7,2	0,8573	0,8589	0,8585	0,8591	0,8597	0,8603	0,8609	0,8615	0,8621	0,8627
7,3	0,8633	0,8639	0,8645	0,8651	0,8657	0,8663	0,8669	0,8675	0,8681	0,8686
7,4	0,8692	0,8698	0,8704	0,8710	0,8716	0,8722	0,8727	0,8733	0,8739	0,8745
7,5	0,8751	0,8756	0,8762	0,8768	0,8774	0,8779	0,8785	0,8791	0,8797	0,8802
7,6	0,8808	0,8814	0,8820	0,8825	0,8831	0,8837	0,8842	0,8848	0,8854	0,8859
7,7	0,8865	0,8871	0,8876	0,8882	0,8887	0,8893	0,8899	0,8904	0,8910	0,8915
7,8	0,8921	0,8927	0,8932	0,8938	0,8943	0,8949	0,8954	0,8960	0,8965	0,8971
7,9	0,8976	0,8983	0,8987	0,8993	0,8998	0,9004	0,9009	0,9015	0,9020	0,9025
8,0	0,9031	0,9036	0,9042	0,9047	0,9053	0,9058	30,906	0,9069	0,9074	0,9079
8,1	0,9085	0,9090	0,9096	0,9101	0,9106	0,9112	0,9117	0,9122	0,9128	0,9133
8,2	0,9138	0,9143	0,9149	0,9154	0,9159	0,9165	0,9170	0,9175	0,9180	0,9186
8,3	0,9196	0,9199	0,9201	0,9206	0,9212	0,9217	0,9222	0,9227	0,9232	0,9238
8,4	0,9243	0,9248	0,9253	0,9258	0,9263	0,9269	0,9274	0,9279	0,9284	0,9289
8,5	0,9294	0,9299	0,9304	0,9309	0,9315	0,9320	0,9325	0,9330	0,9335	0,9340
8,6	0,9345	0,9350	0,9355	0,9360	0,9365	0,9370	0,9375	0,9380	0,9385	0,9390
8,7	0,9395	0,9400	0,9405	0,9410	0,9415	0,9420	0,9425	0,9430	0,9435	0,9440
8,8	0,9445	0,9450	0,9455	0,9460	0,9465	0,9469	0,9474	0,9479	0,9484	0,9489
8,9	0,9494	0,9499	0,9504	0,9509	0,9513	0,9518	0,9523	0,9528	0,9533	0,9538
9,0	0,9542	0,9547	0,9552	0,9557	0,9562	0,9566	0,9571	0,9576	0,9581	0,9586
9,1	0,9590	0,9595	0,9600	0,9605	0,9609	0,9614	0,9619	0,9624	0,9628	0,9633
9,2	0,9638	0,9643	0,9647	0,9652	0,9657	0,9661	0,9666	0,9671	0,9675	0,9680
9,3	0,9685	0,9689	0,9694	0,9699	0,9703	0,9707	0,9713	0,9717	0,9722	0,9727
9,4	0,9731	0,9736	0,9741	0,9745	0,9750	0,9754	0,9759	0,9763	0,9768	0,9773
9,5	0,9777	0,9782	0,9786	0,9791	0,9795	0,9800	0,9805	0,9809	0,9814	0,9818
9,6	0,9823	0,9827	0,9732	0,9836	0,9841	0,9845	0,9850	0,9854	0,9859	0,9863
9,7	0,9868	0,9872	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	0,9908
9,8	0,9912	0,9917	0,9921	0,9926	0,9930	0,9934	0,9939	0,9943	0,9948	0,9952

له پورتنې جدول څخه دوه لومړي رقمونه 39 د N له ستون څخه او 7 عدد په N سطر کې پیدا کوو، هغه عدد چې د سطر او ستون په تقاطع کې واقع دی، د 397 عدد د لوگارتم مانتیس دی.

### انتي لوگارتم

د 117 عدد لوگارتم عبارت دی له 2.0682 څخه؛ نو 117 عدد د 2.0682 د انتي لوگارتم په نوم یادېږي؛ نو ویلی شو، چې هر عدد د هماغه عدد انتي لوگارتم دی.  
**مثال:**  $\text{Log}x = 2.5988$  دی؛ نو  $x$  به څو وي؟  
**حل:** لکه څنګه چې  $x$  د 2.5988 انتي لوگارتم دی، د کرکټرستیک په نظر کې نیولو او له جدول څخه په ګټې اخیستنې  $x = 397$  دي.

### کو لوگارتم

د تعریف له مخې کو لوگارتم د هماغه عدد له معکوس لوگارتم څخه عبارت دی.

$$\text{CoLog}N = \text{Log} \frac{1}{N} = \text{Log}1 - \text{Log}N = -\text{Log}N$$

$$\text{CoLog}N = -\text{Log}N$$

**مثال:** که  $\text{Log}35.7 = 1.55230$  وي، د ذکر شوي عدد کو لوگارتم وټاکئ!

$$\text{Log}35.7 = 1.55267$$

$$\text{CoLog}35.7 = ?$$

**حل:** پوهېږو چې  $\text{CoLog}N = \text{Log} \frac{1}{N}$  دی.

$$\text{CoLog}35.7 = \text{Log} \frac{1}{35.7} = \text{Log}1 - \text{Log}35.7 = 1010 - 1.55267 = 8.44733 - 10$$

0.30103 اعشاري کسر ته د 20 د عدد د لوگارتم مانتیس وایي.

$$\text{Log}300 = \text{Log}100 \cdot 3 = \text{Log}100 + \text{Log}3 = 2 + 0.4771$$

$$\text{Log}300 = 2.4771$$

د ذکر شوي عدد اعشاري کسر، د 300 د لوگارتم مانتیس دی.

**مثال:** د 0.002 عدد لوگارتم پیدا کوو.

$$\text{Log}0.002 = \text{Log}10^{-3} \cdot 2 = \text{Log}10^{-3} + \text{Log}2 = -3 + 0.30103 = -2.69897$$

که د سوال په حل کې مانتیس منفي راغی، کولی شو په لاندې طریقه یې مثبت کړو.

مثال:

$$\text{Log}_{10} \frac{1}{2} = \text{Log}_{10} 1 - \text{Log}_{10} 2 = 0 - 0.30103$$

د دې لپاره چې مثبت مانتیس په لاس راشي، د 1 عدد له هغه سره جمع او منفي کوو.  
 $1 - 1 - 0.30103 = \bar{1}.69897$

مثال:

$$\begin{aligned} \text{Log} N &= -3.23403 = -3 - 0.23403 = -3 - 0.23403 + 1 - 1 = -4 + 0.76597 \\ &= -3,23463 \end{aligned}$$

### انټرپولېشن Inter polation

د څلور رقمي عدد د لوگارتم مانتیس په څلور رقمي جدول کې او د پینځه رقمي عدد د لوگارتم مانتیس له پینځه رقمي جدول څخه په لاس راځي. مگر ځینې وخت د داسې عددونو سره مخامخ کېږو، چې د نوموړو عددونو د لوگارتم مانتیس په جدول کې نه وي، د داسې عددونو د مانتیس د پیدا کولو لپاره دې عدد ته د ډېر نږدې عددونو له مقایسې (یو لوی او بل کوچني) څخه د تناسب د عملیې په مرسته لاسته راوړو، دا عملیه، چې یوه دقیقه برخه ده انټر پولېشن نومېږي.

موضوع په مثال سره توضیح کوو.

مثال: 24357 لوگارتم په لاس راوړو.

حل: د پورتنی عدد مشخصه 4 ده، د دې عدد مانتیس په جدول کې نشته؛ خو د 24360 او 24350 مانتیس په جدول کې شته.

$$\begin{array}{r} 24350 \\ 10 \quad 24357 \quad 7 \\ 24360 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.38650 \\ ? \end{array} \Bigg|_x \begin{array}{r} 0.00018 \\ 0.3866 \end{array}$$

د ورکړل شوي عدد ترمنځ توپیر او 7 له دې څخه کوچنی.

د ورکړل شوي عدد ترمنځ توپیر او 10 لوی له دې څخه.

د ورکړل شوي عدد د مانتیس په منځ کې توپیر او X د هغه څخه د کوچني مانتیس

د کوچني عدد د مانتيس په منځ کې فرق او 0.00018 لوی له ورکړل شوي عدد څخه. لکه څنګه چې پورتنۍ رابطې مستقیم تناسب جوړوي؛ نو کولی شو د پورتنیو اعدادو تناسب ترتیب کړو.

$$\frac{10}{7} = \frac{0.00018}{x}$$

د  $x$  قیمت د کوچني عدد له مانتيس سره جمع کوو او یا دا د لوی عدد له مانتيس څخه منفي کوو.

$$10x = 0.00126$$

لاسته راغلي نتیجه د ورکړل شويو اعدادو مانتيس دی.

$$x = 0.00013$$

$$0.38650$$

$$\underline{0.00013}$$

$$0.38663$$

په کوم مخ کې چې د اعدادو د لوگارتم مانتيسونه لټوو، ښي لور ته یې واړه جدولونه شته، چې د Proportional په نامه یادېږي.

په دې جدول کې د چپ طرف په ستون کې له 1 څخه تر 9 پورې صحیح عددونه او د چپ طرف په ستون کې د اعدادو مانتيس د  $\frac{1}{10}$  په تناسب لیکل شوي، لکه: که د 1.472.85 لوگارتم د لوگارتم د جدول نه په ګټه اخیستو لاسته راوړو؛ نو داسې عمل کوو.

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

حل: د یاد شوي عدد کرکټرستیک 2 دی، د مانتيس د پیدا کولو لپاره داسې عمل کوو.

$$4728.5 = x \text{ د ورکړل شوي عدد مانتيس}$$

$$\text{مانتیس } 4728 = 0.67468$$

$$\text{مانتیس } 47229 = 0.67477$$

0.00009 د مانتیس فرق د ۱ عدد فرق

د دې مخ په کوچني جدول کې د 5 عدد مقابل ته، چې له 4728.5 عدد څخه په لاس راځي. د 4.5 مانتیس لیکل شوی دی، هر کله چې د 4.5 مانتیس د کوچني عدد د مانتیس له اخیرو ارقامو سره جمع کړو د مطلوب عدد مانتیس په لاس راځي.

$$\begin{array}{r} 0.67468 \\ \quad \quad \quad 45 \\ \hline 0.674725 \\ \text{Log}472.85 = 2.67472 \end{array}$$

د ۴۷۲،۸۵ لوگارتم د انټرپولیشن له طریقي نه په گټه اخیستو په لاس راوړو.

$$10 \left[ \begin{array}{l} 47280 = 0.6746 \\ 47285 = 7 \\ 47290 = 0.67477 \end{array} \right] x \quad 0.0009$$

د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کېږي.

$$\begin{array}{r} 0.67468 \\ \quad \quad \quad 45 \\ \hline 0.674725 \\ \frac{5}{10} = \frac{x}{0.00009} \Rightarrow 10x = 0.00045 \Rightarrow x = 0.000045 \end{array}$$

تمرین: د لاندې عددونو د لوگارتم مشخصه او مانتیس د جدول نه په گټه اخیستو پیدا کړئ!

$\text{Log}24546$	$\text{Log}0.012353$
$\text{Log}10012$	$\text{Log}0.000021314$
$\text{Log}10135$	$\text{Log}43256$
$\text{Log}0.0034521 \cdot 10^{-3}$	$\text{Log}42341 \cdot 10^{-6}$

د لوگارتم د جدول ترتیب

د هغو سلسلو د عددونو د لوگارتم د مانتیس د لاسته راوړلو په خاطر، چې د تایلور له فورمول نه په گټه اخیستو ترتیب شوی، کار اخلو.

$$\text{Ln}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

که  $x$  په  $-x$  عوض کړو.

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots II$$

دويمه رابطه له لومړۍ څخه منفي کړو.

$$\ln(1-x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \dots$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right)$$

دارنگه  $x = \frac{1}{2n+1}$  وضع کړو.

$$\ln \frac{n+1}{n} = 2 \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right)$$

که اوس  $n = 1$  شي  $\ln 2$  په لاس راځي.

$$\ln 2 = 2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3)^3} + \frac{1}{5(3)^5} + \frac{1}{7(3)^7} + \dots \right\}$$

$$\ln 2 = 0.693147180$$

د هغې دقت تر 9 رقم دی.

کولای شو  $\ln 2$  په قاعده د 10 بدل کړو.

$$\log N = m \cdot \ln N$$

$$m = 0.43429$$

$$\ln 2 = 0.434294 \cdot 0.693147 = 0.30103$$

په همدې ترتیب که  $n = 2$  وي،  $\ln 3$  حاصلېږي.

$$\ln 3 = 1.0986022$$

$$\ln 4 = \ln 2 \cdot 2 = \ln 2 + \ln 2$$

په همدې ترتیب د مرکبو اعدادو لوگارتم د لوگارتم له خاصیتونو نه په ګټه اخیستو په لاس راوړلای شو او د اولیه اعدادو لوگارتم مستقیماً د فورمول په واسطه په لاس راوړلای شو. تمرین: د لاندې عددونو طبیعي لوگارتم له فورمول نه په ګټه اخیستو پیدا کړئ! وروسته یې د 10 په قاعده بدل کړئ!

$$\ln 5 = ?$$

$$\ln 6 = ?$$

$$\ln 7 = ?$$

$$\ln 8 = ?$$

$$\ln 9 = ?$$

$$\ln 10 = ?$$

$$\ln 11 = ?$$

$$\ln 12 = ?$$

$$\ln_{10} 5 = ?$$

$$\ln_{10} 6 = ?$$

$$\ln_{10} 7 = ?$$

$$\ln_{10} 8 = ?$$

د پورته اعدادو د لوگارتم جدول ترتیب کړئ!

د x عددونه	Ln x	Log <sub>10</sub> x

### لوگارتمي افادې

عددي افادې يا برخې، چې په هغې کې لوگارتم موجود وي، لوگارتمي افادي ورته ويل کېږي، چې کولی شو د لوگارتم له خواصو نه په گټه اخيستو هغه ساده او په نظر کې نيولی قيمت پيدا کړو.

د مثال په توگه :

$$1 - \text{Log}_2 4 \sqrt{32} = \text{Log}_2 \sqrt[4]{32} = \text{Log}_2 2^{\frac{4}{5}} = \frac{4}{5} \text{Log}_2 2 = \frac{4}{5}$$

$$2 - \text{og} 50 + \text{Log} 2 - \text{Log} \sqrt[3]{100} = \text{Log} 50 \cdot 2 - \text{Log} 10^{\frac{2}{3}} = \text{Log} 100 - \frac{2}{3} \text{Log} 10$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

### لوگارتمي معادلې

د لوگارتمي معادلو د حل لپاره د لوگارتم له قوانينو نه په گټه اخيستو هغه ساده کېږي، چې د اړوند مجهول قيمت پيدا شي.

مثالونه: له لاندې لوگارتمي معادلو څخه د مجهول قيمت پيدا کړئ!

$$1 - \text{Log} 2 + \text{Log} 3 = \text{Log} x = \text{Log} (2 \cdot 3) = \text{Log} x = \text{Log} 6 = \text{Log} x$$

$$x = 6$$

$$2 - \text{Log}_{\sqrt{2}} x = \text{Log}_{\sqrt{2}} 3 + \text{Log}_{\sqrt{2}} 6 = \text{Log}_{\sqrt{2}} x = \text{Log}_{\sqrt{2}} (3 \cdot 6) = \text{Log}_{\sqrt{2}} x = \text{Log}_{\sqrt{2}} 18$$

$$x = 18$$

$$3 - \frac{\text{Log}_{\sqrt{2}} r}{\text{Log}_{\sqrt{5}} S} = \text{Log}_x r \Rightarrow \text{Log}_x r = \text{Log}_S r$$

$$x = S$$

$$4 - \text{Log}(x^2 - 1) = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 2^3$$

$$x^2 = 8 + 1$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

## مترکس او دیترینانت

### ټولیزه موخه

په مترکس او دیترینانت پوهېدنه او د خطي معادلو د مسایلو په حل او د خطي معادلو د مجهولاتو په موندلو کې د هغو کارونه

- د زده کړې موخې:** ددې خپرکې په پای کې به محصلین لاندې موضوعات زده کړي:
- د مترکس او دیترینانت په مفهوم او د هغه په ډولونو پوهېدل.
  - د خطي معادلو د سیستم له ضرایبو څخه د مترکس ترتیب او په ستونونو او سطرونو کې لومړني بدلونونه.
  - پر مترکسونو باندې اساسي عملیې او د معکوس مترکس پیدا کول.
  - د خطي معادلو د سیستم د مجهولاتو پیدا کول.
  - د مترکسونو په واسطه د ضرایبو ترتیب او د خطي معادلو د سیستم ثابتونه.

### د خطي معادلو سیستمونه، مترکسونه او دیترینانتونه

په ریاضي، میخانیکي، تخنیکي او اقتصادي علومو کې ډېرې ستونزې د خطي معادلو د سیستم په حل پورې اړه لري. همدارنګه د ښوونځي په دوران کې د لاندې مسایلو سره اشنا شوي یاست:

**مثال:** د ثریا، ظاهر او نفیسي د عمر مجموعه 60 ده، د نفیسي د عمر له درې چنده څخه د ظاهر د عمر دوچنده منفي کوو، د ثریا عمر حاصلېږي. د هغو هر یو څو کلن دی، د مسألې د حل لپاره د ثریا عمر په  $C$ ، د ظاهر عمر په  $Z$  او د نفیسي عمر په  $N$  ښیو؛ نو کولی شو ولیکو:

$$\left. \begin{array}{l} Z + N + C = 60 \\ 2Z + N + 3C = 120 \\ -2Z + 3N = C \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Z + n + C = 60 \\ 2Z + N + 3C = 120 \\ -2Z + 3N - C + 0 \end{array} \right\}$$

په پورته مثال کې لیدل کېږي، چې له ضرایبو سره درې معادلې او درې مجهوله شته، په همدې ترتیب که  $n$  مجهول او  $m$  معادله په لاندې ترتیب ولرو.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

په دې توګه ویلی شو، چې د  $n$  مجهوله ورکړل شویو خطي معادلو  $m$  سیستم، چې  $x_1, x_2, \dots, x_n$  مجهولونه او  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$  د سیستم ضریبونه  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$  ثابت اعداد په سیستم کې ورکړل شوي دي.

که د ذکر شوو معادلو سیستم د حل لرونکی وي، د سازگار سیستم په نوم او که سیستم د حل لرونکی نه وي، د ناسازگار سیستم په نوم یادېږي.

د خطي معادلو د سیستم د حل نه موخه په اول قدم کې د سیستم سازگارېدل او یا نا سازگارېدل دي. که چېرې سیستم سازگار وي، باید هغه حل کړو. د خطي معادلو د سیستم په تیوري کې وړاندې شول، چې د هغې په واسطه د خطي معادلو هر سیستم حل کولای شو.

د خطي معادلو د سیستمونو معادل کېدل او په سیستم کې لومړنی بدلون که د خطي معادلو یو یا څو سیستمونه ورکړل شوي وي، چې په عین مجهولونو د مساوي حل لرونکي وي، له یو بل سره معادل دي او یا په بل عبارت که یو یا دوه سیستمونه د خطي معادلو له یو بل سره معادل وي، د هغوی حل یوله بل سره مساوي دی.

**مثال:** د خطي معادلو سیستمونه یو له بل سره معادل دي، ځکه چې:

**حل:**

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + y = 3 \end{cases} \wedge \begin{cases} x + y = 3 \\ -2x - y = -3 \end{cases}$$

یواځینی  $(x, y) = (0, 3)$  دی

**مثال:** د خطي معادلو سیستمونه یو له بل سره معادل دي.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = -3 \end{cases} \wedge \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x - y = -3 \end{cases}$$

دا ځکه چې دواړه سیستمونه ناسازگار دي، یعنې د هغې د حل سیت خالي دی.

### په خطي معادلو کې لومړني بدلونونه

- ۱- په ورکړل شوي سيستم کې د دوو معادلو د محل تعويض کول
- ۲- يوه له معادلو څخه په يوه حقيقي د صفر خلاف عدد کې ضربول
- ۴- د معادلو له سيستم يو څخه د سيستم له بلې معادلې سره جمع کول، چې په حقيقي عدد کې ضرب شوی وي.

۵- له سيستم څخه د معادلې گرځېدنه، چې مطابقت جوړوي.  
د اجرا کولو په نتيجه کې هر يو له لومړنيو بدلونونو څخه د ورکړ شوو خطي معادلو په سيستم کې د نوو خطي معادلو سيستم حاصلېږي، چې له لومړني سيستم سره معادل دی.

د مجهولونو د تدريجي حذف کولو په طريقه د خطي معادلو د سيستم حل د Gauss میتود يو له تر ټولو اسانه میتودونو څخه د حقيقي عددونو له ضريبونو سره د خطي معادلو د سيستم حل د Gauss له میتود څخه عبارت دی، يعني د مجهولونو د تدريجي حذف کولو طريقه ده.

که د لومړنيو بدلونونو په جريان کې د خطي معادلو په سيستم کې معادله لاندې شکل ونيسي، هغه له سيستمه ليري کوو.

$$ox_1 + ox_2 + ox_3 + \dots + ox_n = 0 \dots I$$

که د خطي معادلو په سيستم کې د بدلون په جريان کې معادله لاندې شکل ولري، ورکړ شوی سيستم ناساز کار دی، يعني حقيقت نه لري.

$$ox_1 + ox_2 + ox_3 + \dots + ox_n = b = b \neq 0$$

اوس دلته د گاوس میتود تر مطالعې لاندې نيسو. فرض کوو، چې د ورکړل شويو خطي معادلو په سيستم کې پورته 1 او 2 شکل وجود نه لري.

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_2 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_m x_n = b_m$$

د پورته سيستم اوله معادله د اول حد په ضريب تقسيموو.

$$x_1 + \frac{a_{12} x_2}{a_{11}} + \dots + \frac{a_{1n} x_n}{a_{11}} = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

اوس لومړۍ معادله په  $a_{31} -$  کې ضربوو او له دويمې معادلې سره يې جمع کوو، وروسته د درېيمې معادلې د اول حد ضريب، يعنې  $a_{31} -$  په اوله معادله کې ضربوو او له درېيمې معادلې سره يې جمع کوو، په همدې طريقه تر اخره د اولې معادلې ضريب په  $a_{m1} -$  کې ضربوو او له اخرې معادلې سره يې جمع کوو او دې ته ورته طريقې ته تر هغې دوام ورکوو، چې سيستم لاندې شکل خپل کړي.

$$\begin{aligned}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n &= d_1 \\0 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= d_2 \\0 + 0 + \dots + c_{3n}x_n &= d_3 \\0 + 0 + 0 + \dots + c_{mn}x_n &= d_m\end{aligned}$$

پورته عمليات ليدل کېږي، چې تر اصلي قطر لاندې ټول حدونه صفر شوي، بڼا له اخرې معادلې څخه  $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$  حاصلېږي، دا قيمت په  $(n-1)$  ام معادله کې وضع کوو، د  $x_{n-1}$  مجهول قيمت حاصلېږي، په همدې ترتيب د  $x_1, x_2, \dots, x_n$  مجهولونو قيمتونه لاسته راځي.

**مثال:** لاندې سيستم د گاوس له ميتود نه په گټه اخيستو حل کړئ!

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\x_2 - x_3 &= 2 \\2x_1 - x_2 + x_3 &= -3\end{aligned}$$

حل

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 5 \end{array} \right)$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$

$$0 + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow -12x_3 = 5 \rightarrow x_3 = -\frac{5}{12}$$

$$0 + 0 - 12x_3 = 5$$

$$x_2 + \frac{5}{12} = +2 \rightarrow x_2 = 2 - \frac{5}{12} = \frac{19}{12}$$

$$x_1 + 2\left(\frac{19}{12}\right) + 4\left(-\frac{5}{12}\right) = 1 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$$

نو د حل سیټ یې عبارت دی له:

$$A = \{x_1, x_2, x_3\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{19}{12}, \frac{-5}{12} \right\}$$

### د مترکسونو ډولونه Tupes of Matrix

۱- سطرې مترکس: هغه مترکس، چې یواځې یو سطر لري.

$$[2], [2 \quad 1], [1 \quad 0 \quad -3]$$

۲- ستوني مترکس: هغه مترکس، چې د یوه ستون لرونکی وي.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۳- مربعي مترکس: هغه مترکس چې د سطرونو شمېر یې د ستون له شمېر سره مساوي وي.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

۴- مستطیلي مترکس: هغه مترکس چې د سطرونو شمېر یې د ستونونو له شمېر سره مساوي نه وي.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

۵- صفري مترکس: هغه مترکس چې ټول عناصر یې صفر وي.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۶- مساوي مترکسونه: هغه مترکسونه چې د هغې د سطر اوستونو ټاکلي عناصر تر الجبري عملیاتو وروسته مساوي شي.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2+2 \\ 3-1 & 2+3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = B$$

### د دویم او درېیم ترتیب دیتریمینانتونه

په تېرو بحثونو کې مو د خطي معادلو د سیستم د حل تیوري مطالعه کړه. البته ذکر شوی میتود پیچلی نه دی، ولې د اجراکولو تقاضا یې یو رنگه عملیې ورکوي، چې د هغې د الګورتیم تهیه د کمپیوټري ماشین د پروګرام لپاره امکان لري. ولې یو عمومي فورمول د خطي معادلو د ټولو سیستمونو د حل لپاره نه شو طرحه کولای. معلومه ده چې د عمومي فورمولونو طرح کول د خطي معادلو د ضریبونو او ثابتو پواسطه په بله طریقه امکان لري. د بحث دا طریقه د دیتریمینانت د تیوري پر بنسټ ولاړه ده.

مخکې له دې چې د دیتریمینانتونو عمومي تیوري مطالعه کړو، لومړی د دوه مجهوله او درې مجهوله خطي معادلو په ځانګړو سیستمونو خبرې کوو.

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots I$$

پورته سیستم د ګاوس په میتود حلوو، که  $a_{11} \neq 0$  وي؛ نو د 1 سیستم له لاندې سیستم سره معادل دی.

$$\begin{bmatrix} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ \left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right)x_2 = b_2 - \frac{b_1a_{21}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

البته که چېرې  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  وي، د اصلي مترکس پواسطه 1 سیستم وړاندې کولی شو. واقعاً لیدل کېږي، چې  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  افاده د مترکس د فرعي او اصلي قطر د حاصل ضرب له حاصل تفریق څخه عبارت دی.

تعریف:  $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  د مترکس د دیتریمینانت په نامه یا د دویم ترتیب د

دیتریمینانت په نامه یادوو . ذکر شوی دیتریمینانت په لاندې ډول بنودلی شو.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

هغه عددونه، چې د فورمول د کسرونو په صورت کې قرار لري، هم د دوو د ترتیب دیتریمینانتونه دي، یعنې د  $x_1$  فورمول لپاره لرو.

$$D = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{21}$$

لیدل کېږي، چې د هغه عدد پیدا کول، چې د کسر په صورت کې د  $x_1$  د ټاکلو لپاره قرار لري، د مترکس له دیتریمینانت څخه عبارت دی، چې د اول ستون د تعویض په نتیجه کې د ثابتونو سیستم په وکتور ورکړل شوی، یعنې  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  حاصل شوی همدارنگه د  $x_2$  لپاره لرو چې:

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} = a_{11}b_2 - a_{12}b_1$$

$D_2$  د مترکس له دیتریمینانت څخه عبارت دی، چې د دویم ستون د تعویض په نتیجه کې په  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  وکتور دی، په حاصل شوي مترکس کې لاندې قضیه په دې ترتیب ثبوتوو. **قضیه:** که د دوه مجهوله خطي معادلو د سیستم د اصلي مترکس د دیتریمینانت د صفر خلاف وي؛ نو د ورکړل شوي سیستم حل د لاندې فورمول په واسطه وړاندې کولی شو.

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \wedge x_2 = \frac{D_2}{D}$$

مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ!

$$3x_1 + 4x_2 = -9$$

$$5x_1 + 7x_2 = -17$$

حل:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 20 = 1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -9 & 4 \\ -17 & 7 \end{vmatrix} = 63 + 68 = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 5 & -17 \end{vmatrix} = -51 + 45 = -6$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{5}{1} = 5 \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-6}{1} = -6$$

## د توابعو لمټ او مشتقات

## ټوليزه موخه

په عالي رياضياتو او اقتصادي موضوعاتو کې د لمټ له کارونې سره بلدتيا

- د زده کړې موخې: ددې خپرکي په پای کې محصلين لاندې موضوعات زده کولای شي:
- د مجاورت مفهوم، د تابع لمټ او د مستقل متحول لمټ.
  - له مبهمو اشکالو نه خبرېدنه، په لمټ کې د هغې مفهوم پيژندل او د مبهمو شکلونو رفع.
  - له عالي رياضياتو سره د توابعو د لمټ د ارتباط په اړه معلومات.

## د يوې تابع لمټ

څرنګه چې د مستقل متحول او تابع له مفهوم سره پوره بلدتيا لرو، اوس که په يوه رابطه کې  $x$  مستقل متحول او  $y$  د هغې تابع قبول کړو، که چېرې  $x$  تحول وکړي،  $Y$  هم تحول کوي، په دې تحولاتو کې کله داسې راځي، چې د تابع څرنګوالی د مستقل متحول قيمت ته په نږدې مجاورت کې مطالعه کېږي، کله چې دا قيمت  $a$  وي او  $x$  تحول تر کومه چې ممکن وي  $a$  ته نږدې کوو.

$$x \rightarrow a$$

په دې ځای کې لازم دي لومړی د يوې تابع د لمټ د مفهوم په اړه بحث د لمټ تعريف ته پرېږدو. که  $y = f(x)$  په نظر کې ونيسو، هغه وخت چې  $x$  ټاکلی عدد  $a$  ته تقرب کوي،  $y$  د  $b$  خواته تقرب کوي، چې دې قيمت ته د تابع لمټ ويل کېږي. البته کله داسې هم پېښېږي، چې تابع لمټ نه لري. ځکه د تابع او د متحول په تحولاتو او ماهيت پورې اړه لري.

مثال:  $y = 3x + 5$  تابع په نظر کې نیسو، کله چې د  $x$  متحول 2 ته ډېر نږدې قیمتونه اختیار کړي، یعنی د 2 طرف نږدې شي، یعنی  $x \approx 2$  او  $y \approx 11$  دا حقیقت لاندې جدول ته په کتو درک کولای شو.

X	1.5	1.9	1.95	1.99	2	2.09	2.1
$Y=3x+5$	10.4	10.7	10.9	10.97	11	11.27	11.3

په  $y = 3x + 5$  کې که چېرې  $x$  2 قیمت واخلي، تابع مساوي په 11 کېږي، مگر په یو شمېر توابعو کې کله چې مستقل متحول د یوه ثابت عدد خواته تقرب کوي، د تابع قیمت ناپاکلی (نامعین) کېږي.

څرنگه چې په  $y = 3x + 5$  تابع کې  $(x \rightarrow 2)$  د تابع قیمت  $(x \rightarrow 11)$  کېږي. کولای شو ووايو، چې د یادې تابع لمټ هغه وخت، چې  $x$  د 2 طرف ته تقرب کوي په طرف د 11 تقرب کوي. د افادې دا طرز په سمبولیکه بڼه لیکلی شو.

$$\text{Limit}(3x+5)=11$$

$$x \rightarrow 2$$

$$\lim(3x+5)=11$$

$$x \rightarrow n$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x+1} = \frac{2(-2)}{-2+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

مبهم شکلونه (ناپاکلي)

ډېر کله له داسې توابعو سره مخامخ کېږو، چې د متحول په ځینو قیمتونو غیر متمادي دي یا کاملاً ځان ته ناپاکلی شکل اختیاروي، لکه:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty, -\infty, 1^\infty, \infty^0, 0^\infty, 0 \cdot \infty$$

له لمټ نه په گټه اخیستو کولای شو د پورته شکلونو لپاره د حد قیمت پیدا کړو. له پورته شکلونو څخه هر یو د ابهامو په خاصه شیوه رفع کېږي.

۱- د  $\frac{0}{0}$  مبهم شکل رفع: که د  $\frac{f(x)}{g(x)}$  تابع نسبت د  $a$  په قیمت  $\frac{0}{0}$  ناپاکلی شکل اختیاروي، یعنی.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

د ابهامو د رفعې لپاره تابع تر ټولو اسانه شکل ته راوړو. له دې ځايه چې د  $x=a$  په قيمت صورت او مخرج صفر کېږي؛ نو صورت او مخرج د مشترک فکتور لرونکی دی، چې اختصار کېدای شي او د تابع د حد قيمت پيدا کېږي.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = ?$$

حل: څرنګه چې د  $x=1$  په قيمت  $\frac{0}{0}$  شکل اختياروي؛ نو د هغې د حد قيمت پيدا کوو.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

د ابهامو رفعې

که چېرې توابع د نسبت  $\frac{f(x)}{g(x)}$  شکل ولري، داسې چې.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \infty$$

په دې حالت کې د ابهامو د رفعې لپاره صورت او مخرج په هغه متحول تقسيموو، چې تر ټولو لوړ توان لرونکی وي. البته په درو حالتونو کې مطالعه کېږي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + c}{ax^2 + bx + c} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^3}{x^3} + \frac{bx^2}{x^3} + \frac{c}{x^3}}{\frac{ax^2}{x^3} + \frac{bx}{x^3} + \frac{c}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}}{\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}} = \frac{a}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx}{ax^3 + bx} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2}{x^3} + \frac{bx}{x^3}}{\frac{ax^3}{x^3} + \frac{bx}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}}{a + \frac{b}{x^2}} = \frac{0}{a} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx}{ax^2 + bx} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx}{ax^2 + bx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2}{x^2} + \frac{bx}{x^2}}{\frac{ax^2}{x^2} + \frac{bx}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{a + \frac{b}{x}} = \frac{a}{a} = 1$$

( $\infty - \infty$ ) د ابهامو رفع

کله چې  $f(x), g(x)$  دوه تابع وي، داسې چې:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$$

په دې حالت کې هغه په  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  دې شکلونو راوړو، وروسته د ابهامو په رفع اقدام کوو:

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{9}{x-1} - \frac{8x+10}{x^2-1} \right)$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{9}{x-1} - \frac{8x+10}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9(x+1) - 8x - 10}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(9x+9-8x-10)}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

## د تابع تزايد او مشتقات

## ټوليزه موخه

په اقتصادي او تخنيکي مسايلو کې د مشتق د کارونې په موخه د هغو توضېح.

- د زده کړې موخې: ددې خپرکي په پای کې محصلين لاندې موضوعات زده کولای شي:
- د مستقل متحول په تزايد، د تابع په تزايد پوهېدل او د هغوی تر منځ رابطه.
  - د الجبري او هندسي مشتق تعريف او د هغه د مفهوم درک.
  - د مشتق د قضيو نه په گټه اخيستو د الجبري او مثلثاتي توابعو د مشتق تطبيق.
  - په اقتصاد، صنعت او نورو کې له مشتق نه گټه اخيستل.
  - د مشتق په مرسته د توابعو د پېچلو لمتونو پيدا کول.
  - تعريف او د قسمي مشتقاتو پيدا کول.

## د تابع تزايد او مشتقات

کله چې  $y = F(x)$  تابع په نظر کې ونيسو، که  $x$  متحول د  $\Delta x$  په اندازه زيات شي د  $y$  تابع هم د  $\Delta y$  په اندازه زياتوالی کوي، چې کولای شو دا زياتوالی داسې پيدا کړو.

$$y = F(x)$$

$$y + \Delta y = F(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = F(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = F(x + \Delta x) - F(x)$$

مثال: د  $y = 3x^2$  تابع زیاتوالی پیدا کړئ!

$$\begin{aligned}y + \Delta y &= 3(x + \Delta x)^2 \\ \Delta y &= 3(x + \Delta x)^2 - y \\ \Delta y &= 3(x + \Delta x)^2 - 3x^2 \\ \Delta y &= 3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 3x^2 \\ \Delta y &= 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 3x^2 \\ \Delta y &= 6x\Delta x + 3\Delta x^2\end{aligned}$$

مثال: د لاندې تابع تزايد پیدا کړئ!

$$\begin{aligned}y &= 6 + x \\ y + \Delta y &= 6 + x + \Delta x \\ \Delta y &= 6 + x + \Delta x - y \\ \Delta y &= 6 + x + \Delta x - 6 - x \\ \Delta y &= \Delta x \\ y &= 7 \\ y + \Delta y &= 7 \\ \Delta y &= 7 - y \\ \Delta y &= 7 - 7 \\ \Delta y &= 0\end{aligned}$$

تمرین:

- ۱- په  $y = 2x + 5$  تابع کې به د  $x$  قیمت څو وي، که چېرې  $x_0 = 4, \Delta x = 0.007$  وي.
- ۲- د  $y = 3x^2 - 5x + 4$  تابع تزايد پیدا کړئ!
- ۳- په  $y = \frac{1}{x}$  تابع کې د  $\Delta y$  قیمت پیدا کړئ، که چېرې  $x_0 = 9, \Delta x = 0$  وي؟
- ۴- په  $y = x^2$  تابع کې د  $\Delta y$  او  $\Delta x$  تزايد پیدا کړئ!

## مشتقات

د مشتق الجبري تحليل او د هغه تعريف

فرض کوو چې  $y = f(x)$  تابع د  $(a, b)$  په څېر فاصله کې يوه متمادي تابع ده، که  $x_0$  د متحول لومړنی قیمت  $x$  او  $x_1$  بل قیمت، چې  $x_0$  ته ډېر نږدې دی، يعنې  $x_1 = x_0 + \Delta x$  وي، په دې حالت کې به د پورته تابع قیمت  $y_1, y_0$  وي.

څنگه چې  $y_1 = y_0 + \Delta y$  دی، په دې ځای کې به  $\Delta x = x_1 - x_0$ ،  $\Delta y = y_1 - y_0$  وي. کولی شو  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  نسبت يې تشکیل کړو. هغه وخت چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وي، په دې حالت کې  $\Delta y \rightarrow 0$  کوي، بناً  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  نسبت د  $\frac{0}{0}$  په طرف ځي، چې دا يو مبهم حالت دی او کولی شو د تابع د حد قیمت محاسبه کړو او د ابهامو رفع وکړو، په نتيجه کې کولی شو مشتق دارنگه تعريف کړو:

لمټ د تابع تزايد د متحول پر تزايد هغه وخت، چې د متحول تزايد د صفر طرف ته تقرب کوي، عبارت د تابع له مشتق څخه دی، چې هغه درانگه ليکل کېږي.

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

د تابع مشتق نظر  $x$  ته عموماً په  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  يا  $y' = f'(x)$  يا  $y'_x$  ښودل کېږي.

مثال: د  $y = 2x - 3$  تابع په نظر کې نيول شوی، په الجبري تحليل د هغې مشتق پيدا کړئ!

$$y = 2x - 3$$

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x) - 3$$

$$\Delta y = 2x + 2\Delta x - 3 - 2x + 3$$

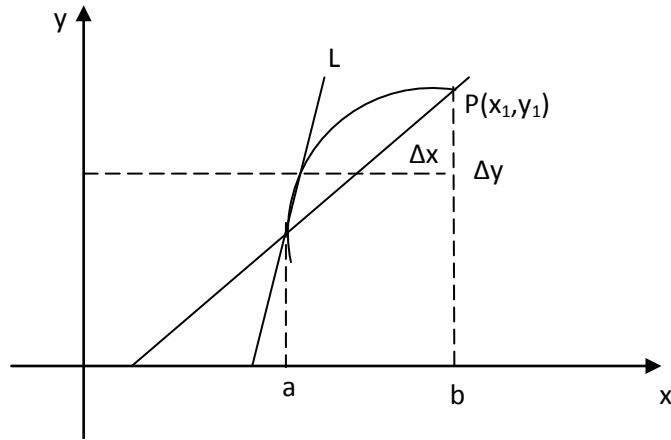
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

$$y' = 2$$

### د مشتق هندسي تحليل

فرضاً د  $y = f(x)$  تابع د  $(a, b)$  په انټروال کې متمادي ده. د دې تابع د منحنی د پاسه دوه نقطې  $P_0(x_0, y_0)$  او  $P_1(x_1, y_1)$  په نظر کې نیسو، د  $L$  قاطع چې له  $P_0$  او  $P_1$  نقطې تېرېږي د  $x$  محور له مثبت جهت سره  $\infty$  زاویه جوړوي.

که د  $P_1$  نقطه  $P_0$  ته بې نهایت نږدې شي، د  $L$  قاطع په یوه حدی حالت کې د  $P_0$  په نقطه کې د ذکر شوې تابع په منحنی باندې مماس وي. د پورته شکل له قراره د  $L$  قاطع د  $L$  په حالت کې راځي، چې د  $x$  محور له مثبت جهت سره زاویه تشکیلوي.



$$\tan \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = m = L$$

$$\tan \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m = L$$

په حدی حالت کې یعنې په هغه وخت کې، چې  $P_1$  د  $P_0$  طرف ته تقریب کوي د  $\alpha$  زاویه عوض کېږي.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Tag} \theta = L = m$$

نو نتیجه اخلو، چې د تابع د منحنی په یوه نقطه کې د مماس میل د منحنی په هغه نقطه کې د تابع د مشتق له قیمت څخه عبارت دی.

## د الجبري توابعو مشتقات

قضيه: د ثابتې تابع مشتق  $y = C$  صفر دی.

ثبوت: پوهېږو چې:

$$y + \Delta y = C$$

$$\Delta y = C - y \rightarrow \Delta y = C - C$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x} \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

مثال:

$$1 - y = 7 \Rightarrow y = 0$$

$$2 - y = \text{Log}25 \Rightarrow y = 0$$

$$3 - y = \text{Sin}30^\circ \Rightarrow y = 0$$

۲ قضيه: په طاقت لرونکې افاده کې مشتق مساوي دی په:

$$y = ax^n \Rightarrow y = anx^{n-1}$$

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^n$$

$$\Delta y = a(x + \Delta x)^n - ax^n = a[(x + \Delta x)^n - x^n]$$

$$\Delta y = a[(x + \Delta x - x)(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = a[\Delta x(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + x^{n-1}]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a[(x + \Delta x)^{n-1}x + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + x^{n-1}]$$

$$y = a(xn - 1 + xn - 1 + \dots + xn - 1)$$

$$y = anx^{n-1}$$

N ځلې  $x^{n-1}$  جمع کېږي، پورته قضيه د منفي، کسري طاقتونو لپاره هم سمه ده.

## د مرکبو توابعو مشتق يا د تابع د تابع مشتق

الجبري قاعده Chain Rule

که  $y$  د  $u$  تابع او  $u$  د  $x$  تابع وي، په دې صورت کې  $y$  د  $x$  د تابع تابع ده.

يعنې که  $y = f(u)$  او  $u = g(x)$  وي؛ نو د  $(f \circ g)_x = f(g(x))$  هغې مشتق:

$$(f \circ g)_x = f(g(x)) \cdot g(x)$$

$$\Delta y = \Delta y$$

$$\Delta y \cdot \Delta u = \Delta y \cdot \Delta u \Rightarrow \Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} y = y_a \cdot u_x \\ y = f(u) \cdot u(x) \end{array} \right]$$

که خو متغیره یو د بل تابع وي، مثلاً  $y = F(u)$  او  $u$  د  $V$  تابع او  $V$  د  $W$  تابع او  $W$  د  $X$  تابع وي، په دې صورت کې کېدای شي ولرو:

$$y_x = y_u \cdot u_v \cdot V_w \cdot W_x$$

مثال: د  $F(x) = (x^3 + 3x)^5$  تابع مشتق پیدا کړئ!

حل: کله چې  $x^3 + 3x = g(x)$  وټاکل شي، نو بیا  $F(x) = F(g(x))$

$$(f \circ g)_x = F(g(x))$$

$$f(x) = F(g(x)) \cdot g(x)$$

$$f(x) = 5(x^3 + 3x)(3x^2 + 3)$$

$$y = \left( \frac{2x^2 - 6x + 3}{x-1} \right)^7$$

### د مثلثاتي توابع مشتقات

قضیه: د  $y = \sin x$  مشتق عبارت دی له  $y = \cos x$  څخه.

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

### د مثلثاتي فورمولونو په اساس

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\Delta y = 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$\Delta y = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

$$\Delta y = L(x + \Delta x) - Lx$$

$$\Delta y = L \left( \frac{x + \Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} L \left( \frac{x + \Delta x}{x} \right)$$

### د لوړو مرتبو مشتقونه

که  $f$  متمادي تابع او مشتق منونکې وي، کولای شو لومړی، دویم، درېیم او  $n$  ام مشتق یې پیدا کړو. په داسې حال کې، چې د تابع درجه  $n$  وي،  $(n+1)$  یې صفر دی. لاندې رابطې د مشتقاتو د مراتبو ښودونکې دي.

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \frac{d^2y}{dx^2} = f'(x), \frac{d^3y}{dx^3} = f''(x) \dots \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

مثال: د  $y = 5x^3 - 2x^2 + \text{Log} 5$  تابع درېیم او څلورم مشتق پیدا کړئ!

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = 45x^2 - 4x + 0$$

$$f(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 90x - 4$$

$$f(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = 90, f(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

### د لوگاريتمي تابع مشتقات

د  $y = Lx$  لوگاريتمي تابع په نظر کې نیسو، نظر تزايد ته لرو.

$$y + \Delta y = L(x + \Delta x)$$

د لوگارتیم د قاعدو څخه په گټه اخیستو لیکلای شو.

$$\Delta y = L(x + \Delta x) - Lx$$

$$\Delta y = L \left( \frac{x + \Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} L \left( \frac{x + \Delta x}{x} \right)$$

که  $\Delta x$  صفر شي، پورته رابطه د  $\frac{0}{0}$  مبهم شکل اختیاروي، د ابهام د رفع کولو لپاره فرض

$$\text{کوو، چې } \frac{\Delta x}{x} = a \text{ نو } \Delta x = ax$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{ax} \cdot L(1+a)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot L(1+a)^{1/a}$$

د لوگارتیم د قاعدو په اساس لیکلای شو.

کله چې  $\Delta x$  صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim (1+a)^{\frac{1}{a}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} Le = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x}$$

که د لوگارتم قاعده پرته له  $e$  کوم بل عدد وي، لکه  $a$ ، په دې صورت کې لرو چې:

$$y = \log_a x \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a e}{\log_e a}$$

$$y = \frac{1}{x \cdot La}$$

هرکله  $y = \log u$  وي او  $u$  د  $x$  تابع وي؛ نو لرو چې:

$$y = \log u = Lu$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{u}}{u}$$

**مثال:** د لاندې تابع څخه نظر  $x$  ته مشتق ونیسئ!

$$y = \log_a x + \log_x a$$

**حل:** کولای شو د قاعدو د تبدیلی پر اساس ولیکو.

$$y = \log_a x + \frac{1}{\log_x a}$$

$$y' = \frac{1}{xLa} + \frac{1}{x \cdot La (\log_a x)^2}$$

**مثال:**  $f'(x) = ?$ ,  $f(x) = L(x^2 + 1)$

**حل:**

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow f(x) = Lu$$

$$u' = 2x$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{u}}{u} Le$$

$$f'_{(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

## د الجبري نوابعو د مشتقاتو جدول

تابع (y)	مشتق (y')
$y = a$	$y' = 0$
$y = u$	$y' = u'$
$y = au$	$y' = u'$
$y = u + v + w$	$y' = u' + v' + w'$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + v'u$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$
$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}$
$y = a^u$	$y' = e^u$
$y = e^u$	$y' = \frac{u'}{e^u}$
$y = Lu$	
$y = \text{Log}_a u$	$y' = \frac{\bar{u}'}{uLa}$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{\bar{u}'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = f(x)$	
	$x = \frac{1}{y}$

## د مثلثاتی توابعو د مشتقاتو جدول

تابع (y)	مشتق (y')
$y = \text{Sinu}$	$y' = u' \text{Cosu}$
$y = \text{Cosu}$	$y' = -u' \text{Sinu}$
$y = \text{Logu}$	$y' = \frac{1}{u} (1 + \text{Tag}^2 u)$
$y = \text{Cotagu}$	$y' = -\frac{1}{u} (1 + \text{Cotg}^2 u)$
$y = \text{Secou}$	$y' = \text{Secou} \cdot \text{utagu}$
$y = \text{ArcSinu}$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \text{ArcCosu}$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \text{Arctagu}$	$y' = \frac{1}{1+u^2}$
$y = \text{ArcCotgu}$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$
$y = \text{ArcSecou}$	$y' = \frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$
$y = \text{Arc cosecu}$	$y' = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$

### په اقتصادي مسایلو کې د مشتقاتو کارونه

په عام ډول مشتق او د مشتق اخیستل په ځینو اقتصادي بحثونو کې، چې په مقداري ډول تر ارزونې لاندې نیول کېږي، فوق العاده اهمیت لري. په دې ترتیب چې د گټې د مینیمم او مکزیم کولو او همدارنګه د مکزیم او مینیمم د شرایطو ټاکل د گټې او موخې په مقصد او همدارنګه د ناچاری له مخې د ټولو مقادیرو د محاسبې لپاره د مشتق څخه ګټه اخلو.

دلته په لنډ ډول د مشتق محدوده کارونه په اقتصادي مسایلو کې په کار وړو. پوهېږو چې د یوې تولیدي موسسې ګټه عبارت ده د ټولو لاسته راغلو او ټول مصرف ترمنځ له توپیر څخه؛ نو په دې اساس که د ټولو لاسته راغلو او ټول مصرف توابعو په ترتیب سره په لاندې ډول وښیو.

$$TR = R(Q) \text{ د ټول عاید تابع}$$

$$TC = C(Q) \text{ د ټول لګښت تابع}$$

که تابع شي، عبارت ده له:

$$TT = TR - TC$$

$$TT = R(Q) - C(Q)$$

اوس که د مکزیم کولو مقصد ګټه وي؛ نو مقادیر باید له محصول څخه تولید کړي؛ څو ګټه حد اکثر ته ورسېږي. د گټې لوړ حد ته د رسولو لپاره لازمي شرط دا دی، چې د گټې تابع نسبت د مقدار محصول (Q) ته مشتق ونيول شي، وروسته دا مساوي له صفر سره شي؛ څو د Q مقدار چې د گټې کچه حد اکثر یا حد اقل ته رسوي، لاس ته راشي.

کله چې د Q مقدار مشخص شي، باید تحقیق وکړو، چې آیا د Q لاسته راغلي مقدار ګټه مکزیم ته رسوي که مینیمم ته. د دې کار د سرته رسولو په خاطر باید د Q مقدار مشتق د دویمې مرتبې تابع ګټه فرض شي. که د دویمې مرتبې مشتق د Q قیمت ته منفي شو، په دې وخت کې به د Q مقدار ګټه مکزیم ته ورسوي او که برعکس د دویمې مرتبې مشتق علامه منحنی شي، په دې وخت کې به د Q مقدار ګټه کم حد ته ورسوي. د مطلب د وضاحت په خاطر لاندې مثال په نظر کې نیسو.

مثال: د یوې تولیدي موسسې د ټول عاید او لګښت توابع په لاندې ډول راغلې دي:

$$R(Q) = 1000Q - 2Q^2$$

$$C(Q) = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$$

د محصول هغه مقادیر، چې گټه لوی ته رسوي مشخصه کړئ!

حل: پورته توابعو ته په کتو د گټې تابع تشکیلوو:

$$\pi = RQ - C(Q)$$

$$\pi = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000$$

او د گټې د ماکزیم او منیم معلومولو لپاره لازمي شرط عبارت دی له:

$$\frac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 114Q - 315 = 0$$

$$Q_1 = 3$$

$$Q_2 = 35$$

اوس باید تحقیق وکړو، چې کوم یو د محصول  $Q_1$  او  $Q_2$  څخه گټه مکزیم ته رسوي، چې د دې کار لپاره باید د گټې د دویمې مرتبې مشتق تشکیل کړو.

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 114$$

$$Q_1 = 3 \Rightarrow \frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 114 > 0$$

$$Q_2 = 35 \Rightarrow \frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6(35) + 114 < 0$$

لکه چې لیدل کېږي، موسسه د  $Q = 3$  په تولید سره خپله گټه حد اقل او د  $Q = 35$  په تولید سره خپله گټه اعظمي حد ته رسولی شي.

### وروستی عاید او وروستی لگښت

که د ټول عاید او ټول لگښت تابع مشخصه وي، کولای شو د هغوی څخه په مشتق نیولو سره د نهایي توابعو د محصول د پارامتر نسبت او نهایي لگښت مشخص کړو. که د ټول عاید تابع او د ټول لگښت تابع په لاندې ډول په نظر کې ونیسو.

$$TR = R(Q)$$

$$TC = C(Q)$$

په دې وخت کې د نهایي عاید او نهایي لگښت توابع به په ترتیب سره مساوي شي په:

$$\frac{dTR}{dQ} = R(Q) = MR \rightarrow \text{د نهایي عاید تابع}$$

$$\frac{dTC}{dQ} = C(Q) = MC \rightarrow \text{د نهایي لگښت تابع}$$

مثال: د ټولو عوایدو او ټولو لگښتونو توابعو ته په پام سره په لومړي مثال کې په نهایتي سره او نهایتي لگښت به عبارت وي له:

$$MR = 1000 - 4Q$$

$$MC = 3Q^2 - 48Q + 1315$$

### د گټې د ماکزیم او مینیم کولو شرطونه

لکه څنګه چې مخکې ولیدل شول، د یوه تولید کوونکي له نظره مهمه مسأله دا ده، چې د خپل محصول څومره برخه تولید کړي؛ خو ځان ماکزیم ته ورسوي، د ریاضي له نظره کولای شو د رابطې یا روابطو تر عنوان لاندې د گټې د ماکزیم یا مینیم کولو شرطونه بیان کړو. فرضوو چې د یوه تولیدونکي د ټول عاید او ټول لگښت توابع په لاندې ډول وي.

$$TR = R(Q)$$

$$TC = C(Q)$$

په دې حالت کې د گټې تابع عبارت ده له:

$$\pi = R(Q) - C(Q)$$

لازم شرط د گټې د ماکزیم یا مینیم کولو لپاره:

$$\frac{d\pi}{dQ} = 0 \Rightarrow R(Q) - C(Q) = 0$$

$$R(Q) = C(Q)$$

$$MR = MC \dots I$$

نو تولیدوونکی باید د خپلې گټې د ماکزیم لپاره تر هغه وخته تولید ته ادامه ورکړي، چې د هغه وروستي لگښتونه له وروستي گټې سره مساوي شي.

$$P = MR = MC \text{ قیمت}$$

لوړ حد ته د رسولو لپاره کافي شرط:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} < 0 \Rightarrow R''(Q) - C''(Q) < 0$$

$$R''(Q) < C''(Q)$$

په پورتنی نامساوي  $R''(Q)$  کې د ننوتلي منحنی میل او  $C''(Q)$  د نهایتي قیمت د منحنی میل دی.

$$MR < MC \text{ میل}$$

په بل عبارت که کافي شرط د حد اکثر لپاره وي، دا چې د  $MC$  منحنی میل د  $MR$  منحنی له میل څخه زیات وي.

تمرین: د لاندې توابعو د هر یوه جزوي مشتقات لاسته راوړئ!

$$5x_1^3 - 2x_1^2x_2 + 7x_2^2 = y$$

$$y = 7x_1 + 16x_1x_2^2 + 4x_2^3$$

$$y = (2x_1 + 3)(x_2 - 2)$$

$$z = F\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$z = F\left(\frac{y}{z}\right)$$

$$y = f(x^2 + y^2 + z^2)$$

### انتيگرالونه

**تعريف:** د توابعو د عکس عمل مشتق اخیستلو ته د توابعو انتيگرال وايي، په بل عبارت

که تابع  $y = F(x)$  په نظر کې ونیسو، پوهېږو چې د دې تابع مشتق عبارت دی له:

$$y' = f'(x) = f(x)$$

په دې صورت کې د  $F(x)$  تابع ته اولي تابع د  $f(x)$  وايي، لکه څنګه چې ملاحظه کېږي،

که  $F(x)$  معلوم وي، د انتيگرال په نیولو سره کولای شو  $F(x)$  ته ورسېږو، د  $f(x)$  انتيگرال

د ښودلو لپاره د  $\int$  نښې څخه ګټه اخلو.

$$\int f(x)dx = F(x)$$

په پورتنۍ رابطه کې  $dx$  د دې مطلب ښودونکی دی، چې د  $f(x)$  تابع څخه د  $x$  په

نسبت انتيگرال نیول شوی، اوس لاندې دوه رابطې په نظر کې نیسو.

$$[F(x)] = f(x)$$

$$[F(x) + C] = f(x)$$

لکه څنګه چې لیدل کېږي د  $F(x)$  مشتق له  $F(x) + C$  مشتق سره برابر دی، په دې

اساس تر  $C$  د پورته دواړو توابعو ترمنځ فرق مشخص کوي؛ نو ویلی شو چې د  $f(x)$  هره

تابع کولای شي بېنهایت اولیه توابع ولري او یوازې هغه عامل د دې باعث کېږي، چې اولي

توابع په خپلو کې سره فرق ولري، هماغه د  $C$  ثابت مقدار دی؛ نو د انتيگرال اخیستو په

وخت کې باید  $C$  ثابت ته په هغه کې ځای ورکړل شي.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

د  $f(x)dx$  عبارت ته تحت انتیگرال وایي.

د  $\int f(x)dx$  انتیگرال ته غیر معین انتیگرال وایي، ځکه چې د عددي معین مقدار لرونکی نه دی.

### د انتیگرالونو حل

د  $y = f(x)$  تابع په نظر کې نیسو، فرضوو چې دا تابع د  $a \leq x \leq b$  په فاصله کې معینه او پیوسته تابع وي.

لکه څنګه چې د انتیگرال په تعریف کې ورته اشاره وشوه، انتیگرال اخیستل د مشتق نیولو عکس عمل دی او په دې هم پوهېږو، چې مشتق اخیستل له توابعو لاندې رابطو او د خاصو فورمولونو څخه پیدا کېږي. نو په دې اساس دا نتیجه لاسته راځي د توابع د انتیگرال محاسبه هغه وخت ترسره کېږي، چې هغه توابع مشخصې توابع وي، یعنې معلومې وي، چې هغوی د کومو توابعو مشتقات دي، په دې صورت کې له دې پرته د اولي تابع محاسبه امکان نه لري.

مثلاً: د مشتق د لاندې فورمول څخه یو توان لرونکې تابع:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x^n$$

$x \neq -1$

کولای شو دا نتیجه واخلو، چې  $\left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$  اصلي تابع (اولیه تابع) ده، د  $x^n$  تابع مشتق لپاره؛ نو د مشتق د تابع د پېژندلو لپاره، چې څه ډول تابع ده، کولای شو اولیه تابع یا په پام کې نیول شوی تابع انتیگرال محاسبه کړو، د پورته مثال په اړه به یې ولرو.

$$\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$n \neq -1$

### د انتیگرال اخیستلو مهمه طریقه

د  $\int F(x)dx$  متغیر انتیگرال د تغیر طریقه په نظر کې نیسو، فرض کوو چې دا انتیگرال د پېژندل شویو صورتونو جز نه وي، که په دې پېژندل شویو صورتونو کې تبدیلی وکړو، انتیگرال د حل وړ دی او نوموړې طریقه ته د متغیر د تغیر طریقه وایي. په دې طریقه کې لاندې ټکي په پام کې نیول کېږي او مراعات کېږي:

۱- لومړی د  $x$  متغیر (یا هر بل متغیر) یا یوه برخه د دې نه د  $F(t)$  سره مساوي کوو؛ خو باید دقت وشي، چې  $F(t)$  حتماً باید دوه لاندې خاصیتونه ولري.

الف-  $F(x)$  تغیر باید د انتیگرال لپاره یو مناسب متغیر وي، په دې معنی، چې د تغیر د عمل څخه وروسته باید په مشخص شوي انتیگرال بدل شي؛ خو د انتیگرال اخیستو جوگه شي. ب- د  $F(t)$  متغیر تغیرات باید مجاز وي، یعنې د متغیر  $x$  د تغیراتو حوزه باید د  $F(t)$  تغیر له میدان سره اړیکه ولري.

۲- باید د تابع دیفرانسیل داسې وي:

$$x = F(t)$$

$$dx = \bar{f}(t) \cdot dt$$

نو د  $x$  او  $dx$  دوه انتیگرالو پر ځای د هغوی مقادیر ځای پر ځای کوو، یعنې:

$$\int f(x) \cdot dx = \int F(f(t)) \bar{f}(t) \cdot dt$$

انتیگرال چې په دې ترتیب لاسته راځي، د  $t$  متغیر په اساس وي. اوس که د مناسب متغیر تغیر ټاکل شوی وي، لاسته راغلی انتیگرال به د محاسبې وړ وي. پس د لاسته راغلي انتیگرال د محاسبې څخه باید د  $t$  متغیر پر ځای د هغې مقدار د  $x$  په اساس حساب کړو او د انتیگرال په ځواب کې ځای ورکړو.

$$f(t) + C = f(x) + C$$

له هغه ځایه چې په دې طریقه کې د متغیر د تغیر لپاره مناسب دي، په انتیگرالونو کې د خاص اهمیت لرونکي دي، په نتیجه کې په دې ځای کې ځینې د متغیرونو د تغیر څخه د انتیگرالونو د حل د اسانۍ او کومک په خاطر راوړو.

۱- که انتیگرال  $\int u = F(u) du$  شکل ولري، باید د متغیر تغیر په لاندې شکل وي.  $u = F(t)$

$$u = t \text{ یا}$$

۲- د  $\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$  انتیگرال لپاره، باید متغیر ته  $x = a \sin(t)$  یا  $x = a \cos(t)$  تغیر ورکړو.

۳- که لاندې انتیگرال ولرو،  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  متغیر ته یې باید  $x = a \tan(t)$  تغیر ورکړو.

۴- د لاندې انتیگرال د حل لپاره

$$\int \frac{1}{(a^2 + x^2)^n} \cdot dx$$

باید متغیر ته  $x = a \tan(t)$  تغیر ورکړو.

مثال: د لاندې انتیگرال محاسبه مطلوب ده.

$$\int (x^2 - x + 1)^2 (2x - 1) \cdot dx$$

$$u = x^2 - x + 1$$

$$du = (2x - 1) dx$$

$$\int u^2 \cdot du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} (x^2 - x + 1)^3 + C$$

### د جزء په جزء طریقه

دا طریقه د دوه توابعو د ډیفرانسیل د حاصل د فورمول په بنا ده، په دې معنی چې د دوه غیر همجنسو توابعو حاصل  $g(x) \cdot f(x)$  په نظر کې نیسو.

اوس دا انتیگرال په مستقیم ډول امکان پذیر نه دی، د داسې انتیگرالونو د حل لپاره د

$$\int F(x) \cdot g(x) dx$$

په دې طریقه کې که  $u = g(x), u = f(x)$  په پام کې ونیول شي، د ډیفرانسیل د فورمولونو

په اساس به ولرو:

$$d(u \cdot v) = u dv + v du$$

اوس د پورته رابطې د دواړو خواوو څخه انتیگرال نیسو.

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

$$uv = \int u dv + \int v du$$

$$\int u dv + uv - \int v du$$

$$\int F(x)g(x)dx = F(x) \cdot g(x) - \int f(x)g(x)dx$$

پورتنۍ رابطې ته جزء په جزء رابطه وايي، د رابطې څخه دا مهمه نتیجه په لاس راځي،

چې د دا ډول انتیگرالونو د حل لپاره د تحت انتیگرال عبارت په دوه برخو په پام کې ونیول

شي، یوه برخه مساوي له  $u$  سره او بله برخه مساوي له  $dv$  سره او وروسته له دې څخه

فورمول څخه گټه واخیستل شي.

وروستۍ رابطې ته په کتو، لرو چې:

$$u = f(x)$$

$$dv = g(x) \cdot dx$$

د لومړۍ تابع څخه  $du$  او د دویمې رابطې څخه  $V$  په لاس راځي.

$$du = f(x)dx$$

$$\int dv = \int g(x) \cdot dx \Rightarrow v = \int g(x) \cdot dx$$

د دې لپاره چې څه وخت له دې طریقي څخه گټه اخیستل کېږي، باید وویل شي دا طریقه عموماً د هغو انټیگرالونو لپاره په کار وړل کېږي، چې د انټیگرال تحت د ضرب د حاصل په شکل وي او یو له هغو عواملو نه یې مشتق دی، چې اولیه تابع یې معلومه وي.

د دې طریقي د کارولو لپاره لاندې ټکي مراعت کړئ!

۱- هر وخت باید کوشش وشي، چې  $dx$  د  $dv$  په قسمت کې ځای ونیسي.

۲- ورکړل شوی ديفرانيسل باید په دوه عواملو  $u$  او  $dv$  تقسیم شي.

۳- باید وکولای شو  $dv$  انټیگرال کړو.

**مثال:** د لاندې انټیگرال محاسبه مطلوب ده.

$$\int x \cdot \cos x \cdot dx$$

$$u = x$$

$$dv = \cos x \cdot dx$$

$$du = dx$$

$$v = \int \cos x \cdot dx = \int u dv$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$= x \sin x - \cos x + C$$

**ستندرد انټیگرالونه او د هغو کارونه**

په مخکې مثالونو کې مو نوی تغیر، لکه  $u$  د تابع د عنوان  $x$  پېژندلی او وروسته د انټیگرال اخیستنې فورمولونو نه مو کار واخیست، دا چې دا طریقه ډېر وخت په کار وړل کېږي. ښه به وي چې ځینې د دې فورمولونو څخه په یاد کې وساتو، په دې فورمولونو کې  $u$  د مستقل تغیر په توګه تر مستقل متغیر تابع پېشنهاد شوی او  $du$  د  $u$  ديفرانيسل دی.

## د اساسي فورمولونو جدول

$$I. \int u^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{n+1} = C, n \neq -1$$

$$II. \int \frac{du}{u} = Lnu + C$$

$$III. \int e^u \cdot du = e^u + C$$

$$IV. \int a^u \cdot du = \frac{a^u}{Lna} + C$$

$$V. \int \text{Cos}u \, du = \text{Sin}u + C$$

$$VI. \int \text{Sin}u \, du = -\text{Cos}u + C$$

$$VII. \int \frac{du}{\text{Cos}^2 u} = \text{Tan}u + C$$

$$VIII. \int \frac{du}{\text{Sin}^2 u} = -\text{Cot}u + C$$

$$IX. \int \frac{du}{1+u^2} = \text{arcTan}u + C$$

$$X. \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arcSin}u + C$$

$$1 - \int \text{Cos}5x \cdot dx$$

حل:  $\text{Cos}5x$  مرکب تابعیت ساده تابع ته د بدلولو لپاره، له 5 فورمول نه له کار اخیستو

څخه داسې فرض کوو چې:

$$5x = u$$

$$5dx = du \rightarrow dx = \frac{du}{5}$$

$$\text{Cos}5x = \text{Cos}u$$

$$\int \text{Cos}5x \cdot dx = \int \text{Cos}u \cdot du = \frac{1}{5} \int \text{Cos}u \cdot du = \frac{1}{5} \text{Sin}u + C$$

$$2 - \int \frac{dx}{\text{Sin}^2 3x}$$

حل: د 8 فورمول د کارونې لپاره داسې فرض کوو.

$$3x = u$$

$$3dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \frac{dx}{\text{Sin}^2 3x} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\text{Sin}^2 u} = -\frac{1}{3} \text{Cot}u + C = -\frac{1}{3} \text{Cot}3x + C$$

## د مشتق د برخی پوښتنې

1)  $5x_1^3 - 2x_1^2 + 7x_2^2 = y$

2)  $y = 7x_1 + 16x_1x_2^2 + 4x_2^3$

3)  $y = (2x_1 + 3)(x_2 - 2)$

4)  $y = \frac{2x_1 + 3}{x_2 - 2}$

5)  $f(x, y) = (x^2 - 7x)(x - y)$

6)  $z = 25xy + y^2 - 3x^2$

7)  $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$

8)  $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$

9)  $y = f(x^2 + y^2 + z^2)$

10)  $y = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$

11)  $z = 2x^2y^2 + xy + x^3$

## د انتیگرالونو د برخی پوښتنې

1)  $\int x^3 \cdot dx$

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3)  $\int (x^4 - 3x^2 + x) dx$

4)  $\int \sqrt[3]{x} \cdot dx$

5)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

6)  $\int \frac{(x+2)^2}{x} \cdot dx$

7)  $\int (1-2x)(1+3x) \cdot dx$

8)  $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} \cdot dx$

9)  $\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx$

10)  $\int \frac{x}{x^2 - 1} \cdot dx$

11)  $\int e^x \cdot dx$

12)  $\int e^{-2x} \cdot dx$

13)  $\int \sin 2ax \cdot dx$

14)  $\int \frac{1}{x} dx$

14)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

15)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

16)  $\int \frac{dx}{9x^2 - 4}$

17)  $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$

18)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

19)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$

20)  $\int 13e^x dx$

21)  $\int \frac{5}{x^2 + 6} dx$

22)  $\int \frac{7x^2 \cdot dx}{1+x^3}$

23)  $\int 10x^{-3} \cdot dx$

24)  $\int x^2 \cdot e^{ax} \cdot dx$

## سرچینې او اخیستنې:

- ۱- تحلیل ریاضیات پوهاند دکتور عبدالغفار کاکر
- ۲- ریاضیات مهدی صفر
- ۳- انالیز (یک) پوهندوی داکتر موهین لعل مهرا پوهنمل گل محمد
- ۴- انالیز (دو) داکتر موهن لعل مهرا پوهنمل گل محمد
- ۵- ریاضیات پیش دانشگاهی مولف اس - تی - هو

## د ښوونیز نصاب د پراختیا د ریاست پیغام

د پوهنې وزارت د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت دښوونیز نصاب د انکشاف ریاست د ټولنې دعیني او ښکاره ضرورت په درک کولو سره چې د محصلینو او شاگردانو د درسي کتابونو په برخه کې یې تخنیکي او مسلکي رشتې درلودې او لري یې، په لومړي سر کې یې تصمیم ونيو، چې په ښوونیزو پلانونو او درسي مفرداتو باندې بیاکننه وکړي او ورپسې بیا د شاگردانو او محصلینو د درسي کتابونو د تالیف لپاره مبادرت او کوشښ وکړي. د خدای (ج) په فضل او مرحمت سره او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د ښوونکو په میرانې او همت سره د ادارې او حسابدارۍ درسي کتابونه تالیف شول تر څو په وړیا ډول د شاگردانو او محصلینو په واک او اختیار کې ورکړل شي.

د علم او معرفت له ټولو لوستونکو، علاقمندانو، د ادارې او حسابدارۍ د مکاتبو له ښوونکو، گرانو شاگردانو او د تخنیکي او مسلکي زده کړو د چارو له متخصصینو او همدا شان له ټولو څېړونکو او شونکو څخه صمیمانه هیله کېږي، چې د دې کتابونو په مطالعې سره چې په لومړي ځل د ښوونکو او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د مسلکي غړو له لوري تالیف او تدوین شوي دي. د مسلکي، تخنیکي او علمي مطالبو او مفاهیمو د څرنگوالي په هکله خصوصاً د هغوی املايي او انشايي اشتباهاتو په اړه مونږ ته لارښوونه وکړي، ترڅو په راتلونکي کې وکړای شو، په همدې او نورو برخو کې گرانو شاگردانو ته له دې څخه ښه، غوره، گټور او ارزښتناکه موضوعات وړاندې کړو.

همدا شان له گرانو شاگردانو او محصلینو څخه هیله کوو ترڅو د دې کتابونو د مطالعې او استفادې پر مهال د هیواد اقتصادي ستونزې، فقر او وروسته پاتې والی په نظر کې ونیسي او د کتابونو په ساتنه کې کوشښ او زیار وباسي، ترڅو د ډېرو شاگردانو او محصلینو د گټې وړ وگرځي.

پته: دپوهنې وزارت - د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت د تعلیمي نصاب د انکشاف ریاست - د کتابونو د تالیف او د درسي ممدو موادو د برابرولو عمومي مدیریت.

**Thank you for reading**

Find more e-books and articles on Ketabton - your multilingual digital library.

**[www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)**

*Ketabton - Pashto, Farsi, Arabic & English*