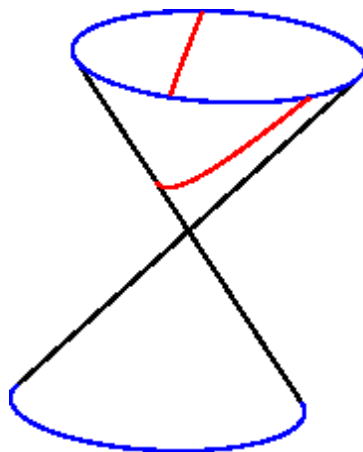


لاينيز (كربنيز) الجبر
Lineare Algebra

Ketabton.com



ڊاڪٽر ماخان (میری) شینواری

۱	لاینینز (کرنیز) الجبر
۱	بنسټیز جوړښتونه / گروپونه او تنونه
۱	گروپ
۳	لاندې گروپونه
۳	ګڼونډېری یا د اعدادو سټ
۴	پرموتیشنونه (د توکو یا اعدادو) ځای بدلون
۵	د ځای بدلون (پرموتیشن) څپوکلیکي یا تل
۸	مودولوس
۱۱	لومړني تنونه یا پټي یا ورشو
۱۳	ګالویز – بدن
۱۴	په گروپونو یا ډلو کې تورنۍ
۱۶	وکتور فضا یا وکتوري فضا
۱۹	د n - ګوني وکتور فضا
۲۰	لاندې فضا یا برخه فضا
۲۲	ګرنیز کمپینیشن
۲۳	کرنیزه هیولي یا سپاین یا سمخ

۲۵ ننوتی – یا محدب کمبینیشن

۲۶ حقیقی- یاریشتونی سکالار ضرب

۲۷ سکالار ضرب

۲۸ مایل سیومتریکی

۳۰ د کوشی-شوارخ – نامساوات

۳۱ نورم

۳۱ هوموگینیوالی

۳۲ د سکالار ضرب نورم

۳۳ ماکسیموم – نورم

۳۴ د حقیقی- یا ریل وکتورونو سکالار ضرب

۳۵ د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب

۳۶ د دوه وکتورونو ترمنځ کونج

۳۷ د پیتاگوراس (فیثاغورث) جمله

۳۹ کرنبیز نابلواکوالی یا

۴۲ بنسټ Basis

۴۴ بعد یا پراخیدونی Dimension

۴۶ اورتوگونال یا ولاړ بنسټ

۴۹ اورتوگونال پروجکشن

۵۱ د گرام-شمیت تگلار یا قانون

۵۴ کرنبیزه څیرونه (فنکشن یا تابع)

- ۵۷ د کرینیزو توابعو کمپوزیشن
- ۵۸ ماتریکس
- ۶۱ یو کرینیز فنکشن یا تابع
- ۶۳ یو کرینیز فنکشن یا تابع
- ۶۵ Kern او Bild معنا څیره یا شکل او زری
- ۶۷ معکوس یا په څټ تابع (څیرونه یا فنکشن
- ۶۹ د ماتریکسونو وکتور فضا
- ۷۱ د ستراسن (وینه: شتراس) الگوریتم
- ۷۲ کوموتاتور
- ۷۴ په څټ یا معکوس ماتریکسونه
- ۷۶ تراسپونی او ادجونگری ماتریکسونه
- ۷۸ شپور Spur
- ۷۸ د یوه ماتریکس رانگ
- ۸۰ د یوه ماتریکس نورم
- ۸۱ هوموحنیتی:
- ۸۳ هوموحنیتی:
- ۸۴ د ماتریکس د ډکونی جوړښت
- ۸۴ اورتوگونال او یونیتار ماتریکسونه
- ۸۵ د هادامارد — ماتریکسونه

- ۸۶ د فوریر (وینه: فوری) ماتریکسونه
- ۸۷ نورم رینتونی یا - وفاداره اورتوگونال ۱ و یونیتار
- ۸۹ څیوکلکي (تلپیرته راگرځېدوني) ماتریکسونه
- ۹۰ ستونباسټیکي ماتریکسونه
- ۹۱ دیترمینانت د انتیسیومتری کرنیز فورم په حیث
- ۹۴ 2 - لیکیزه دیترمینانت
- ۹۵ د ساروس شیمیا شکل
- ۹۶ لوریز حجمونه (ډکي)
- ۹۸ د دیترمینانتونو لپاره قاعدې
- ۱۰۱ د ځانګړو ماتریکسونو دیترمینانتونه
- ۱۰۴ د دیترمینانتو بڼه بدلون
- ۱۰۵ د دیترمینانتو ودیزینه
- ۱۰۸ د 3 ټکو له لارې د یوې سطحې
- ۱۱۱ د واندروند - دیترمینانتونه
- ۱۱۲ کرنیز مساوات سیستم
- ۱۱۴ برېښنایي جریاندايره
- ۱۱۵ د یوه کرنیز مساوات سیستم حل‌والی
- ۱۱۸ دیترمینانت او د یوه مساوات سیستم حل‌والی
- ۱۲۰ د کرامر قاعده

- ۱۲۳ په خټ لور ځای په ځای کول
- ۱۲۵ د گاوس ترانفورمیشن
- ۱۲۶ د گاوس د له منځه وړنه
- ۱۲۹ د اینیپلون بڼه
- ۱۳۱ د اینیپلون- بڼه د یوه ل م س (کرنییز مساواتسیستم) حل
- ۱۳۴ رانگ او د ک م س (کرنییز مساواتسیستم) حل وړوالی
- ۱۳۵ د انډول کرښه (انډولکرښه)
- ۱۳۷ د برابر وني حل یو بل سره یو غږیز.....
- ۱۳۸ الجبر - کرنییز مساوات سیستم-برابر وني پر اېلم
- ۱۳۸ نور مال مساواتونه
- ۱۴۱ توموگرافي
- ۱۴۳ آیگن-ارزښت او آیگو-وکتور
- ۱۴۵ ورته والي - ترانفورمېشن
- ۱۴۷ کرکترېستکي پولینوم
- ۱۵۰ الجبري او هندسي ډېرځلوالی
- ۱۵۲ د آیگن - ارزښتونو مجموعه او ضرب
- ۱۵۴ د ماتریکسونو ریښتونۍ توابع
- ۱۵۵ د آیگن - وکتورونو بنسټ
- ۱۵۷ د ځیوکلېکي ماتریکسونو دیاگونالونه

۱۶۰	د ماتريڪسونو توان
۱۶۲	د فيبوناچي پرلپسي يا — ترادف
۱۶۴	نورمال ماتريڪسونه
۱۶۵	نورمال ماتريڪسونه...
۱۷۰	مثبت ديفينيت ماتريڪسونه
۱۷۰	ريلاي — ویش
۱۷۱	مثالث بنيہ
۱۷۳	اصلي وكتورونه
۱۷۵	د اصفضا ڌيوڪليڪي بنسٽ
۱۷۹	د جوردان بنيہ
۱۸۶	د (4x4) -ماتيڪسونو جوردان-بني
۱۸۹	په زيگولار ارزڻت ٽوٽه ڪونه
۱۹۱	فاسد معڪوس
۱۹۶	د توپوگرافيڪي ڪچونداٽننو ٽيڪاوي يا اصلاح
۱۹۷	د مور-پينروز-شرطونه
۱۹۸	اور توگونال او ڄانگري اور توگونال گروپونه
۱۹۹	هندارونه
۲۰۰	څرخون
۲۰۱	څرخونمحور او څرخونڪونج

- ۲۰۵ د یو خر خون په ضریبونو توتیه کونه
- ۲۰۸ خر خون ماتریکس
- ۲۱۰ مربعیزه فورم (بڼه)
- ۲۱۱ کوادریکونه
- ۲۱۲ د کوادریکونو شپله توتیه ونه
- ۲۱۴ اصلي- محور - ترانفورمیشن
- ۲۱۸ مخروط غوڅی
- ۲۲۰ د دوه بعدی کوادریکونو د اوکلیدي نورمال بڼه
- ۲۳۲ د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې

سریزه

زه د سريزي په هکله ډېر څه نه ليکم، خو دې ته گوته نيسم، چې ما د دې سرليک لاندې دوه ليکنې کړي. دا مخ ته پرته د هغو لوستونکو لپاره ده، چې د شمير پوهنې سره داسې لږ څه بلدتيا ولري، دا به ښه وي، خو اړينه هم نه ده.

دا ليکنه خورا مفصله ده نسبت هغې بلې ته

تر مخ راوړنه: فنکشن که په نورو ژبو کې وکورو، نو په پښتو ژباړه به يې څيره کونه (لنډ : څيره ونه) وي. په فنکشن کې يو څه په يو بل څه يا خپل ځان څيره کيږي. چې لومړی يې څيره کوونکی او دويم يې څيره ده يعنې دوه مجهولې يا واريابلې دي، چې يوه په بله څيره کيږي. لومړی خپلواک دی او دويم يې د لومړي په واک کې دی، نو له دې امله م عربي تابع بللې، يعنې دا د فنکشن تابع ده، چې موږ به يې هم دا ناسم نوم وکاروو، چې گران شمير پوهان راته په قهر نه شي.

که زما په دې ليکنه کې څيرونه راځي، نو هغه يې زموږ په ناسمه توگه همغه تابع ده. دا مو مو پوهيږم، چې له پامه نه لويږي.

ما په يو ځل ډېر ټاټوبونه وژباړل او وليکل، چې ليکنيز ټاټيکاوې به ولري. د هغې به راته بڅښنه وکړی. دا څه چې تاسو ته وړاندې کيږي، پوره ټور دي او دې ته دې رياته پامر نه وشي.

دا زما ټولې ليکنې به تر يوې اندازې ستونځې ولري، خو باور وکړی، چې غوټې پسې وهی په لاس درځي.

مننه: د ټولنې او په ځانګړي ډول د هغې د مشر ښاغلي ډاکټر یحی وردګ څخه زیاته
مننه، نه داچې زما کتابونه یې [اپ ته ورسول بلکه په دې کار کې یې بڼه سارې هڅې
کړي او بې له شکه یې خپلو یوادوالو ته ستر خدمت کړي، کور دې ودان وي، لوي
څښتن دې ورته اجر و نه ورکړي او د لا ډېرې بریاوو په هیله دې زموږ دعا ورسره مل
وي.

لاینیز (کرنیز یا خطي) الجبر

بنسټیز جوړښتونه / ګروپونه او تنونه

Groups and fields

ګروپ

د یوه ګروپ $(G, \diamond)$ لاندې یوه ډېری G پوهیږو، په هغې چې یو دوه بیزه کارونه یا عملیه $\diamond$ داسې پیژندل ولري یا تعریف شوي.

$$\diamond : G \times G \mapsto G,$$

دا په دې مانا، چې هره جوړه (a, b) د $a, b \in G$ سره د $a \diamond b \in G$ یو توکی باندې تنظیم دی. برسيره پردي لاندې خویونه باید باور ولري:

Assoziativität: اسوخیاتیو والی یا اسوخیاتیو قانون

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c) \quad \forall a, b, c \in G$$

neutrale Element **ناپیلی توکی**: یو یواځنی ټاکلی ناپیلی توکی $e \in G$ شته دا په دې مانا، چې

$$e \diamond a = a \diamond e = a \quad \forall a \in G$$

Inverses Element مخامخ یا په ضد توکی یا بر عکس توکی: هر توکی $a \in G$ ته یو یواځنی ټاکلی مخامخ یا په څټ یا بر عکس توکی $a^{-1} \in G$ شته د

$$a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$$

سره

گروپ کموتاتیو یا د ابل (ابل Abel د شمیرپوه نوم دی) گروپ بلل کیږي، که کارونه $\diamond$ کموتاتیو وي:

$$a \diamond b = b \diamond a \quad \forall a, b \in G.$$

له اړوندتوب څخه لیدل کیږي، چې کومه کارونه کارول کیږي، نو زیات وخت د $(G, \diamond)$ په ځای فقط G لیکل کیږي.

په باندې (بیجکټیو) رییل فنکشنونه یا توابع (بلواک) bijective real Functions

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ د یو په بل پسې کارونې له مخې یو گروپ جوړوي.

ساده ازمايل کیدی شي، چې یو په بل پسې ایښونه اسوخیاتیو ده :

$$((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) = (f \circ (g \circ h))(x).$$

ناپیلی توګه په روښانه توګه لاندې فنکشن دی

$$e: x \rightarrow x$$

بالاخره هر په باندې بلواک لپاره یو په څټ بلواک شته دی

$$f^{-1}: f(x) \rightarrow x.$$

یو په بل پسې ترنه کموتاتیو نه ده : د بیلګې په توګه لاندې لرو :

$$f: x \rightarrow 2x, \quad g: x \rightarrow x + 1$$

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

$$f(g(x)) = 2(x+1) \neq 2x+1 = g(f(x)).$$

لاندې ګروپونه

د یوه ګروپ $(G, \diamond)$ لپاره $(U, \diamond)$ لاندې ګروپ بلل کیږي، که U د G برخې وي او $(U, \diamond)$ پخپله یو ګروپ جوړ کړي

ددې لپاره، چې و ازمایو، چې ایا U و ترڅي $\diamond$ ته یو ګروپ جوړوي، که نه، نو ازمایو، چې U و نښلوني $\diamond$ ته او د په څنګ جوړښت ته بنده ده. یانې باور لري:

$$a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U \quad \text{او} \quad a, b \in U \Rightarrow a \diamond b \in U$$

ګڼونډېری یا د اعدادو ست the set of numbers

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathbb{Z}$ و جمعې (زیاتون) ته یو کموتاتیو ګروپ دی، خوندي لرنې یا اینکلوزیون ته ټول ګڼونه و $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته یو لاندې ګروپ جوړوي او راشنل ګڼونه و $\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته او رییل ګڼونه و کمپلکس ګڼونو ته یو لاندې ګروپ جوړوي.

که چیرې صفر لري شي، نو ضرب یا ځله ونه هم یو ګروپ جوړښت تعریفوي:

$$\mathbb{Q} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

تراو جدول یا تراوتخته

کارونه $\diamond$ په پای ګروپ $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ باندې کیدی شي د تراوماتریکس

$$A : \quad a_{i,j} = g_i \diamond g_j$$

له لارې روښانه شي.

لاندې څیرونه (بې له پرموتېشن یا بدلون څخه) اول تراوجورېنتونه ښایي د یوه ګروپ لپاره د $n \leq 4$ سره:

$n = 2$			$n = 3$				$n = 4$					$n = 4$				
◇	e	a	◇	e	a	b	◇	e	a	b	c	◇	e	a	b	c
e	e	a	e	e	a	b	e	e	a	b	c	e	e	a	b	c
a	a	e	a	a	b	e	a	a	e	c	b	a	a	e	c	b
			b	b	e	a	b	b	c	e	a	b	b	c	a	e
							c	c	b	a	e	c	c	b	e	a

دا ګروپونه ټول ابل ګروپونه دي، لکه د ماتریکس A د سیومتري ($a_{i,j} = a_{j,i}$) چې لیدل کیږي.

لومړی ناابل ګروپ شپږ توکي لري او د $\{1, 2, 3\}$ توکو د پروتېشن له مخې پېژندل کېدی شي

Permutations پرموتېشنونه (د توکو یا اعدادو) ځای بدلون

د په خوښه ډېری M لپاره د بیجکشن (په کې څیرونه یا په کې فنکشن) لاندې له M په M کې، چې کمپوزیشن کارونه یا څیرونه یی د کارونې په څیر وي، یو ګروپ پوهیږو داسې په نامه د M سیومتري ګروپ.

لنډ: د M په M کې څیرونې ته پرموتېشن یا بدلون وایو.

که $M = \{1, 2, \dots, n\}$ وي، نو د سیومتري ګروپ S_n څخه غږیږو، چې ګراد یا درجه یی n وي.

د S_n ډېری د π توکي $n!$ پرموتېشن یا بدلون بلل کیږي او داسې یی لیکو

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

کرنبیز الجبر

پرموتیشنګروپ په ټولیزه توګه کموتاتیو نه دی، لکه د لاندې بیلګې څخه لیدل کېږي

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

د ځای بدلون (پرموتیشن) ځیوکلیکي یا تل بیرته راګرځیدونی لیکندود:

پرموتیشنونه داسې په نامه ځیوکلیکي لیکندود له لارې هم ورکول کېږي. یو ځیکلوس یا تل بیرته راګرځیدنه د یوه توکي او د هغه له خبرو، چې ډیرځله د بدلون یا پرموتیشن له لارې منځ ته راځي، جوړه ده، تر څو چې بیرته هغه پیل توکي یا وتونوکی ته ورسېږي. د هغو توکو څخه، چې په لومړي تلېرته راګرځیدني کې منځ ته نه راځي، نور ځیوکلونه جوړېږي، تر څو ټول توکي رامنځ ته شي. ځیکلونه د توکو د ګڼون (تعداد) ټیټیدونکي یا لوېدونکي ډول تنظیم کېږي او په کړو نوکانوکی یو پر بل پسې لیکل کېږي. هغه ځیوکلونه یا تلېرته راګرځیدوني، چې اوږدوالی یې ۱ وي نه لیکلکېږي.

د بیلګې په توګه دی

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \equiv (146) (23) (5)$$

همداسې

$$\pi = (146) (23).$$

د پرموتیشن ترانسپوني کوونه یا په بل ډول لیکنه او سیګنوم

یو ترانسپوزیشن (ځای بدلون)

$$\tau = (j \ k)$$

د j او k بدلون دی. ددې ساده یا بنسټیز پرموتیشن ترنې سره دا پرموتیشن π داسې انځورېدی شي:

$$\pi = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m.$$

دلته برابر ازبنتوالی (جوړه یا ناجوړه m) یواځنی ټاکلی دی، او

$$\sigma(\pi) = (-1)^m$$

د پرموتیشن مخ نڅېنې یا د پرموتیشن زیګنوم π په څیر π ټاکو یا تعریفوو.

د

$$\tau_1 \circ \dots \circ \tau_m = \pi \in S_n$$

لپاره او د $k = \pi(n)$ سره دی

$$\tilde{\pi} = (k, n) \circ \pi \in S_{n-1},$$

ځکه چې د ترانسپوزیشن کمپوزیشن سره n کره په ځای نیول کېږي یا ځای په ځای پاتېږي. ایندوکتیو Induktiv (د ځانګړي په تولید پایونه) کیدی شي و نیول شي یا فرض شي، چې برابر ازبنتوالی یا پاريتي د $\tilde{\pi}$ په ایندوڅیږي ټوټه ونه کې یواځنی ټاکلی ، پسي د $(-1)^m$ مخنځېنه.

ددې لپاره، چې د پرموتیشن

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

سیګنوم و ټاکو، نو

$$(\pi(1), \dots, \pi(6)) = (6, 5, 3, 1, 2, 4)$$

کرنییز الجبر

د ترانسپوزیشن سوکزیسیو (sukzessiv) پل په پل یو بل پسې) د کانوني لړۍ پرلپسې په څیر لیکنې ته بیایو:

$$(1\ 6) : (1\ 5\ 3\ 6\ 2\ 4)$$

$$(2\ 5) : (1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4)$$

$$(4\ 6) : (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6).$$

په دې پسې یا له دې امله

$$(4\ 6) \circ (2\ 5) \circ (1\ 6) \circ \pi$$

کټمټوالی یا ایدنتیک ده، همداسې

$$\pi = (1\ 6) \circ (2\ 5) \circ (4\ 6)$$

او

$$\sigma(\pi) = (-1)^3$$

الترناتیو یا بدیلی سړی کړی شي څوکیلیکی لیکدوله وکارول شي:

$$\pi = (1\ 6\ 4)\ (2\ 5)\ (3).$$

ځکه چې د k اوږدوالي یوه څیوکلوس τ لپاره دی

$$\sigma(\tau) = (-1)^{k-1},$$

$$\sigma(\pi) = (-1)^2 \cdot (-1)^1 \cdot (-1)^0 = -1.$$

مودولوس Modulus

(که دوه گڼونه ۱۳ او ۵ ولرو او ۱۳ په ۵ ووېشو، نو لاس ته ۲ راځي د ۳ ياتي سره. دا داسې لیکو:

$$13 : 5 = 2$$

پاتي 3

لیکلی شو $5 = 0 \pmod{13-3}$ دا په دې مانا چې ۵ گڼ ۱۳-3 وېشي

پېژند (ټاکونکی یا تعریف) که ټولگڼونه x او y او یو طبیعي عدد یا پیدابښتي گڼ a ولرو، نو وایو،، x کونگرواینځ مودولو $a \pmod{a}$ ده،، په نڅېبه $x \equiv y \pmod{a}$ ، که $x \equiv y \pmod{a}$ نه وي، نو وای چې: x د y سره کونگرواینځ مودولو $a \pmod{a}$ نه ده،، یعنې $x \not\equiv y \pmod{a}$

مودولوس Modulus

لرو $a > 0$ او $x \in \mathbb{R}$. د $x \bmod a$ (لوستل: x مودولو a) لاندې په a باندې د x وېشنې پاتي پوهیږو، دا په دې مانا، چې

$$x \bmod a = x - na \in [0, a)$$

د یوه ټولگڼ n لپاره. که باور ولري

$$x \bmod a = y \bmod a,$$

نو x او y کونگرواینځ مودولو a بلل کیږي.

پاتیتولگی (باقي-) (مودولو) modulo n

دېری $\{0, 1, \dots, n-1\}$ د ابل ګروپ جوړوي د زیاتون یا جمعې

او د $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} \bmod n$ سره په نڅېنه کېږي.

پام دې وي، چې ضرب modulo n په $\mathbb{Z}_n$ د ګروپ جوړښت نه تعریفوي، ځکه چې 0 په څټ توګی نه لري.

د دې روښانه بیلګې $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ په بنسټ اسان اړماښت کیدی شي، چې زیاتون یا جمعې، همداسې کمون یا تفرق د مودول – کاروني یا عمليې سره زغمور دي. د بیلګې په توګه دی

$$1 + 3 \bmod 4 = 0, \quad 0 - 2 \bmod 4 = 2$$

او داسې نور

سره له دې ځل مودولو 4 (modulo 4) مو د ګروپ تیوري ته نه لارښودوي، ځکه چې

$$1 \cdot 2 \bmod 4 = 3 \cdot 2 \bmod 4 = 2.$$

دا د ناپېلې توګې د یواځیوالي سره په مخامخوالي یا تضادګې پروت دی

بدن (جسم یا تن یا پټی Field)

یوه دېری (سټ) چې په هغه کې یوه جمعه $+$ او یو ضرب $\cdot$ ، تعریف وي، بدن یا پټی یا ورشو بلل کېږي، که لاندې خویونه په کې باور ولري:

اول – د ګروپ د جمعې یا زیاتیز جوړښت: $(K, +)$ یو ابل ګروپ دی د توګی (سفر توګی) سره.

دا په دې معنا چې د ټولو $a, b \in K$ لپاره باور لري.

$a + b$	$=$	$b + a$
$(a + b) + c$	$=$	$a + (b + c)$
$a + 0$	$=$	a
$a + (-a)$	$=$	$0,$

دویم - دلته $(-a)$ د a په څنډ یا معکوس توکی دی.

دریم - د ضرب گروپي جوړښت: $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ یو د ابل گروپ دی د ناپیلي توکي 1 سره (یو توکی یا که غواړی واحد توکی) دا په دې معنا چې د ټولو $a, b, c \in K \setminus \{0\}$ لپاره باور لري:

چیرته چې $(-a)$ و a ته په څنډ یا پرمعکس توکی دی.

د ضرب گروپي جزرښت: $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ یو ابلگروپ دی د ناپیلي توکي (یو توکی)، دا په دې معنا چې د ټولو $a, b, c \in K \setminus \{0\}$ لپاره صدق کوي

$$a.b=ba$$

$$(a,b).c=a.(b.c)$$

$$a.1=a$$

$$1=a \cdot a^{-1}$$

د کوم سره چې a^{-1} د a په څنټ یا برعکس توکی دی.

دیسټرېبوتیو قانون: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ د ټول $a, b, c \in K$ لپاره.

د ریښتونو اعدادو $\mathbb{Q}$ ډېری، د حقیقي اعدادو $\mathbb{R}$ ډېری او د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ ډېری

د شمیرني قاعده یې سملاسي د اړونده ترني له لارې لاس ته راځي. صفر توکی یې 0 او یو توکی یې 1.

همداسې یې د کمپلکس عدد $z = x + iy \neq 0$ یو توکی نسبت و ضرب ته

$$w = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \text{دی، ځکه چې لرو:}$$

$$z \cdot w = (x + iy) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - i^2 y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{-xy + yx}{x^2 + y^2} = 1 + i0.$$

لومړني تنونه یا پټي یا ورشو

د هر لومړني عدد p لپاره $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ د ډېریو یو تن دی د جمعې او ضرب **مودولو** p سره.

د په څنټ – یا برعکس توکي شتون پورې، نسبت و ضرب ته د تنونو لپاره همدا اوس په ټول اعدادو کې او د باقیټولګیو لپاره به میراث پاتې شي.

د $a \in \{2, \dots, p-1\}$ لپاره کیدی شي a^{-1} په لاندې توګه جوړ شي. لومړی سړی په پام کې نیسي چې، $a^i \neq 0 \pmod{p} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$

که $a^i = np$ وی، نو د لومړي تن تجزيې څخه به ولرو، چې په p ویشل کېږي، څه

$$a < p$$

چې د له امله ناشونی دی. که اوس

پرلپسې، $a^i \bmod p$, $i = 0, \dots, p-1$ په پام کې ونیسو

، نو باید کم له کمه یو پاتې دوه واره رامنځ ته شي، یعنې

$$a^{i_1} = a^{i_2} \bmod p, \quad i_1 < i_2$$

به صدق وکړي. له دې سره به وي:

$$a^{i_2-i_1} = a^{i_2-i_1-1} a = 1 \bmod p,$$

له کوم سره به چې a ته په برعکس توکي پیدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې برعکس توکي دي

2^{-1}	=	$3 \bmod 5$
3^{-1}	=	$2 \bmod 5$
4^{-1}	=	$4 \bmod 5$.

که $a^i = np$ وی، نو د لومړني ضریب تجزيې څخه به مو لرو، چې p وېشي، څه

$$a < p$$

چې د له امله ناشوني دي. که اوس پرلپسې یا

$a^i \bmod p$, $i = 0, \dots, p-1$ ، په پام کې ونیسو، نو باید کم له کمه یو باقي دوه

واره رامنځ ته شي، پس $a^{i_2-i_1} = a^{i_2-i_1-1} a = 1 \bmod p$ ، به صدق وکړي د کوم

سره به چې a برعکس توکي پیدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې په څټ – یا برعکس توکي دي:

کرنیز الجبر

$$2^{-1} = 3 \bmod 5$$

$$3^{-1} = 2 \bmod 5$$

$$4^{-1} = 4 \bmod 5.$$

د دې سره د بیلګې په توګه $\frac{(2+4)}{3} \bmod 5 = \frac{1}{3} \bmod 5 = 2$ همغږیز دی له دې لاندې سره.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \bmod 5 &= 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \bmod 5 \\ &= 4 + 3 \bmod 5 \\ &= 2. \end{aligned}$$

ګالویز-بدن Galois-Körper

تن $GF[2^2]$ د 4 توکو سره د جمعې او ضرب د ترنولو لارې کیدی شي ورکړل شي:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a

·	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b

a	a	b	0	1	a	0	a	b	1
b	b	a	1	0	b	0	b	1	a

دا مخ ته پروت جوړښت اصول داسې ساده نه دی، لکه په لومړنیو تنونو $\mathbb{Z}_p$ کې او د گالویز له خوا پیدا شوي دي. دا په تېرلیزه توګه کېدی شي د تننږنځ څخه د p^ℓ توکو سره $\ell \in \mathbb{N}$ ، د په خوښه p لپاره لومړنی عدد لپاره اجرا کړي یا سرته ورسوي، او کېدی شي و ښوول شي چې په دې توګه ټول تنونه لاس ته راوړي.

په گروپونو کې تورنی (لکه د مسابقي لپاره جمتو کیدو گروپ)

به کابل، غزني او ننګرهار کې په څلورو مهالوېش (وختونو) د نهو ډلو په منځ کې مسابقه بیل کيږي. د لټه دې، هر یو د هر یو په مقابل کې، لوبه وکړي. دا په دې معنا چې په هر مهالوېش کې درې گروپونه د هر درې ډلو څخه لوبه وکړي، چې په هرو دې درې ځایونو کې دې لوبه وشي. ستونځې په دې کې پرتې دي، چې یو بل باید سره غوڅ یا قطعه نه کړي، هره جوړه د $3 \cdot 4$ گروپونو کې باید یو ځل رامنځ ته شي

د شمیرپوهنې له مخې دا مسأله په لاندې ډول فرمولولی شو: دا 3 توکيزې ډېرې

$$S_{0,k} \cup S_{1,k} \cup S_{2,k} = \{1, \dots, 9\}, \quad k = 0, \dots, 3$$

دې وټاکل شي، چې د دوه ډېریو غوڅی ماکسیمال یو توکی خوندي ولري.

د دې شرایطو سره د دې مخه نیول کيږي، چې د گروپونو ډېرې چې د لوبو ورځې یې مختلفې دي، ګډه د لوبدلو جوړه خوندي ولري..

کرنییز الجبر

د $S_{j,k}$ ډېری د لومړنی تن $\mathbb{Z}_3$ په مرسته جوړېدلای شي. د لته د لوبېلي نمري
 $(\alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$
 1, ..., 9 د نهه توکیزه ، پای سطحې، د ټکو سره په
 نڅېنه کېدی شي او دا په نڅېنه شوې ، پای سطحه، ډېری د دې سطحې د کرښو سره په
 نڅېنه کېدی شي:

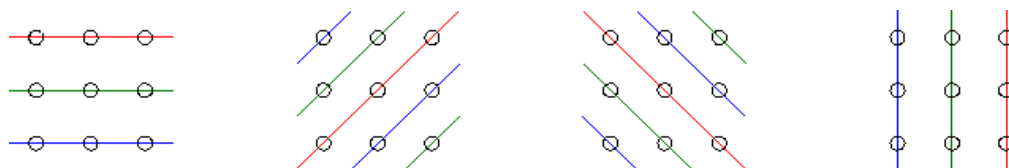
$$S_{j,k} = \{(\alpha, k \cdot \alpha + j \bmod 3) : \alpha = 0, 1, 2\}, \quad ($$

کرښه د $(k = 0, 1, 2)$ جگېدنې سره

$$S_{j,3} = \{(j, \alpha) : \alpha = 0, 1, 2\} \quad ($$

ولاړه یا عمود کرښه

ډاګروپ وېشنه په لاندې شکل کې لیدوړ ده:



همدا مسأله د 16 ټیمونو سره ده ، 4 ښارونو او پنځه مهالوېش سره په ورته ډول حل
 کېدی شي. سری 4-توکیزه ګالویز تن $GF[2^2]$ او لاندې ګروپ وېش لاس ته راوړو:

	لوبځای 1	لوبځای 2	لوبځای 3	لوبځای 4
لومړۍ لوبورځ	1,2,3,4	5,6,7,8	9,10,11,12	13,14,15,16
2-مه لوبورځ	1,6,11,16	5,2,15,12	9,14,3,8	13,10,7,4
3-مه لوبورځ	1,10,15,8	5,14,11,4	9,2,7,16	13,6,3,12
4-مه لوبورځ	1,14,7,12	5,10,3,16	9,6,15,4	13,2,11,8

5-مه لوبورخ	1,5,9,13	2,6,10,14	3,7,11,15	4,8,12,16
-------------	----------	-----------	-----------	-----------

په ټولیزه توګه دلیل د q^2 لوبېلو او q بنارونو لپاره دلیل شوونی دی، هلته چې q د یوه لومړني عدد توان دی، ځکه چې د داسې یوه q لپاره تن $GF(q)$ شتون لری.

وکتور فضا یا وکتوري فضا

یو ابل ګروپ $(V, +)$ وکتور فضا په یوه تن K یا K - وکتور فضا بلل کیږی، که یو $(\lambda, v) \in K \times V$ سکالار ضرب $\cdot$ ، تعریف وي، چې په ضرب $\lambda \cdot v \in V$ تنظیم او لاندې خویونه ولری..

د ټولو سکالار $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ او ټولو وکتورونو $v, v_1, v_2 \in V$ لپاره صدق کوی:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v.$$

که $K = \mathbb{R}$ یا $K = \mathbb{C}$ وی، نو سری د یوه حقیقي همداسې کمپلکس وکتور فضا غږیږو او په ټولیزه توګه د سکالار ضرب لپاره ټکي څخه تېرېږو.

کرنییز الجبر

پام دي وي، چي د جمعي علامه د V په همداسي په K کي کارول کيږي. همداسي ضرب هم په K کي د ضرب لپاره کارول کيږي. پای

د تعريف سره سم په ځانگړي ډول په وکتور فضا کي د گروپ اکسيومونه ضدق کوي:
اسوځياتيو قانون:

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

صفر توکي (صفر وکتور): ټيک يو توکي $0 \in V$ د $v + 0 = v$ سره شتون لري، د $v \in V$ ټول لپاره.

نسبت و جمعي ته په څټ - يا معکوس توکي: د ټولو $v \in V$ لپاره ټيک يو $-v \in V$ شتون لري د لاندې سره:

$$v + (-v) = 0$$

د جمعي بدلون قانون:

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

غوښتونکي شرايط تنظيموي، چي جمعه، کمون يا تفريق او ضرب دا ورسره بلد شميرقوانين پوره کوي.. سړي داسي کړي شي چي ضرب سر ته ورسوي:

$$\left(\sum_i \lambda_i \right) \cdot \left(\sum_j v_j \right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \cdot v_j.$$

سربيره پردې د مخ نځېني قانون صدق کوي.

$$-(-v) = (-1) \cdot (-v) = v, \quad -\left(\sum_i v_i\right) = \sum_i -v_i.$$

د $\text{Gard} \leq n$ (درجې) پولینوم

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (a_i \in \mathbb{C}),$$

یو حقیقي (کمپلکس) وکتور فضا جوړوي، د کوم سره چې جمعه او سکالار ضرب په ورته نږدې ډول تعریف دي:

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\lambda p)(x) = \lambda p(x).$$

د وکتور فضا خویونه ساده تصدیق کیدلی شي.

په پام کې لرو چې پولینوم د n درجې سره، دا په دې معنا چې د $a_n \neq 0$ سره وکتور فضا نه جوړوي. د جمعي جوړول کیدی شي د درجې کموالی ته لارښود کړي. د بیلگې په توګه دی:

$$(2x - x^2) + (3 + x^2) = 3 + 2x.$$

پای

حقیقي پرلپسې (a_n) د $n \in \mathbb{N}$ سره یوه حقیقي وکتور فضا د عمليې سره جوړوي

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \quad \lambda(a_n) = (\lambda a_n).$$

که سربیره پردې و غوښتل شي، چې ایا د وکتور سترګچر یا جوړښت خرابیدلی شي.

کرنییز الجبر

د بېلگې په توګه یو غبریزې پرلپسې وکتور فضا نه جوړوی. د مونوتون پرلپسېو جمعه اړین نه ده یو غبریز وی، لکه دا لاندې بېلګه ښایي:

$$(4n) + (-n^2)$$

برعکس به بندوالی یا محدودیت یو منل شوی خوی وی..

پای

د n - ګوني وکتور فضا

د K تن لپاره n - ګوني یا n - وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in K$$

فضا دا K وکتور فضا K^n د کمپوننت ډوله تعریف شوي جمعې او سکالار ضرب سره، دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

او

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

د ټولو $a_i, b_i, \lambda \in K$ لپاره .

په زیاتو حالاتو کې ساده دی چې n گونی یا n ټول د لیکې وکتور په څېر

$$a = (a_1, \dots, a_n)^t$$

همداسې

$$a^t = (a_1, \dots, a_n)$$

ولیکل شي. د ترانسپوزیشن سیومبول $t^{\sim}$, سره د ستاندارد قرارداد څخه د متو وکتور په حیث توپیریري.

پای

لاندي فضا یا برخه فضا sub space

د یوه K -وکتور فضا V پبرخه ډېری U ، چې د په V کې تعریف شوې جمعې او سکالار ضرب سره پخپله وکتور فضا جوړوی، د V لاندي فضا یا برخه فضا بلل کیږي.

برخه فضا U زیات وخت د V توکو شرایطو سره تعریفیږي:

$$U = \{v \in V : A(v)\},$$

د کوم سره چې A یوه په نڅېنه کوی، چې د ټولو $v \in V$ لپاره باید پوره وی.

د دې لپاره چې و ازمایو چې ایا U د V لاندي فضا ده، کفایت کوي چې وینایو چې U نسبت د جمعې او سکالار ضرب سره تړلي ده:

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

کرنییز الجبر

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U.$$

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U.$$

لیکونکی ایپ، کیمرلی

برخفصاوي زیات وخت د ورزیاتو(برعلاوه؟) ځانګړ شوو خویونو له لارې منځ ته راځي. که د حقيقي توابعو $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, وکتورفضا په پام کې ونیسو، نو د بېلګې په توګه جوړه توابع $f(x) = f(-x)$ د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره یوه برخفصا جوړوی. نورې بېلګې همداسې معکوسي بېلګې په لاندې جدول کې ورکړې شوي دي.

لاندې فضا	خویونه
هو	ناجوړه
ja هو	بند یا مخدود
نه	یو غبریز
هو	نابرېکیدونکي
نه	مثبت
هو	ګرښیز

لیکونکی: ایپ، هیولیګ

د یوه K -وکتور فضا د هر وکتور $d \neq 0$ لپاره د صفر څخه تیرېدونکي کرښه $v = \lambda d$, $\lambda \in K$ یوه لاندې - یا برخه جلاوي.

په هر حالت یوه کرښه چې له صفر 0 نه تیريږي، لاندې یا برخه نه ده. د بېلگې په توګه

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

$(1, 0)^t$ په کرښه

پرته ده، مګر $(2, 0)^t$ نه.

لیکونکي: اېپ، هیولیک

گرښیز کمبینیشن Linear combination

په یوه K -وکتور فضا V وکتورونو $v_1, v_2, \dots, v_m$ لپاره سری

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i$$

د سکالارو $\lambda_i \in K$ سره د وکتورونو v_i گرښیز کمبینیشن بولي یا نوموي.

په ټولیزه توګه د $W \subset V$ لپاره د W څخه گرښیز کمبینیشن لاندې، د W څخه د ناپای ډېرو وکتورونو یو گرښیز کمبینیشن پوهیږو.

لیکونکي: اېپ، کیمرلي

کرنییز الجبر

وکتور $v = (1, 2, 3)^t$ د وکتورونو $v_1 = (3, 4, 5)^t$, $v_2 = (1, 1, 1)^t$ یو
کرنییز کمبینیشن دی، ځکه چې
 $v = v_1 - 2v_2$.

$v = (1, 0)^t$ د دې برعکس

د وکتورونو $v_1 = (0, 1)^t$, $v_2 = (0, 2)^t$ کرنییز کمبینیشن نه دی، ځکه چې د
 v_1 او v_2 کرنییز پولینوم بڼه $(0, *)^t$ لری..

بلاخره کېدی شي $v = (0, 0, 0, 0)^t$ په مختلفو ډولونو د وکتورونو

$$v_1 = (1, 1, 0, 0)^t, v_2 = (0, 2, 2, 0)^t, v_3 = (0, 0, 3, 3)^t, v_4 = (4, 0, 0, 4)^t$$

کرنییز کمبینیشن په څیر انځور شي:

$$v = \lambda(12v_1 - 6v_2 + 4v_3 - 3v_4)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ د سره.

لیکونکي: اېپ، هیولیگ

کرنییزه هیولی یا سپاین یا سمخ $\text{Lineare Hülle}(\text{span})$

یادونه: د په یوه فضا کې د خوندي شیانو او د باندې په منځ کې یو دیوال جوړوي.

د K - وکتور فضا V د وکتورونو $v_1, \dots, v_n$ ټولو گرښیزو کمینېشنونو ډېری د

وکتورونو v_i گرښیزه سپاین یا هیولې (یو څه یا کوتی یا ... و چې په فضا کې یو څا رابندوي (ژباړی)) بلل کیږي او داسې یې په نڅښه کوو:

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i : \lambda_i \in K \right\}.$$

په ورته توګه سړی د $\text{span}(U)$ وکتورونو د یوې ډېرې U لپاره د U د ټولو گرښیزو کمینېشنونو ډېری تعریفوی..

$\text{span}(U)$ د هرې برخې $U \in V$ لپاره د V یو برخه ده.

لیکونکي: اپ، کیمرلي

که په $\mathbb{R}^3$ کې دوه مختلفې د سرچینې کرښې g_1 او g_2 په پام کې ونیسو، د بېلګې په توګه

$$g_1 : x = \lambda_1(1, 0, 0)^t, \quad g_2 : x = \lambda_2(0, 1, 0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

دا هریو د لوریزو وکتورونو گرښیزه سپاین یا گرښیزه هیولې دي، دلته

$$v_1 = (1, 0, 0)^t, \quad v_2 = (0, 1, 0)^t.$$

نو د وکتورونو v_1 او v_2 گرښیزه هیولې یا سپاین یوه سطحه ده، چې کرښې g_1 او g_2 خوندي لري، پس دلته

$$E : x = \lambda_1(1, 0, 0)^t + \lambda_2(0, 1, 0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

همداسي

$$E = \{x : x_3 = 0\}$$

ليکونکي اپ، هيوليگ

ننوتی — يا محدب کمبينيشن Konvexkombination

په يوه حقيقي وکتور فضا V کې يو کرنبیز کمبينيشن

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

د $\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1$ سره د وکتورونو $v_i \in V$ کونکس کمبينيشن بلل کيږي.

ليکونکي اپ، هيوليگ

ننوتی يا محدبه هيولي يا سپاين (الماني ويينه: شپاين) Konvexe Hülle

د يوه حقيقي وکتور فضا V د يوې برخې M محدبه هيولي د ټولو محدب کمبينيټونو

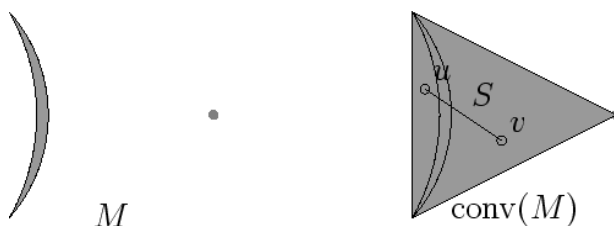
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \quad (\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1)$$

دېرې ده د $v_i \in M$ سره او د $\text{conv}(M)$ سره ليکل کيږي.

خُمکچیز یا هندسي $\text{conv}(M)$ خورا کوچنی دېری ده، چې M خوندی لري، کومه
چې د هرو دوه توکو u, v لپاره د هغو ترنکرښه

$$S = \{\lambda u + (1 - \lambda)v : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

هم خوندی لري



لیکونکي اپ، هیولیک

حقیقي- یاریښتونی سکالار ضرب Reelles Skalarprodukt

په یوه حقیقي وکتور فضا V باندې یو سکالار ضرب یو تابع

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

ده، دلاندې خویونو سره:

مثبتوالی :

$$\langle v, v \rangle > 0 \quad v \neq 0$$

د لپاره.

سیومتري:

کرنییز الجبر

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

کرنییزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

دلته $\lambda, \varrho \in \mathbb{R}$ او $u, v, w \in V$ په خوښه وکتورونه هر داسي سکالار.

د سیومتری په بنسټ یو حقیقي سکالار ضرب د دویم دلیل په بنسټ هم کرنییز دی، یعنې په V یو بی کرنییزه Bilinearform بڼه.

لیکونکي اپ، هیولیک، کرایڅ

سکالار ضرب Skalarprodukt

په یو کمپلکس وکتور فضا V یو سکالار ضرب یو فنکشن

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

دی، د لاندې خویونو سره:

مثبتوالی:

$$v \neq 0 \quad \langle v, v \rangle > 0$$

د لپاره.

مائل سیومتری:

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

رکرنیز الج

کرنیزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ همداسې $u, v, w \in V$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.

مایل سیومتريک Schiefsymmetrie :

کرنیزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ او په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي

د مائل سیومتري په اساس یو کمپلکس سکالار ضرب نسبت و دویمې متحولې ته کرنیز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle + \bar{\varrho} \langle u, w \rangle .$$

فقط د حقيقي سکالار لپاره کمپلکس کونجوگېشن بې مفهومه دی.

لیکونکي اپ، هیولیک، کرایخ

دا ترې لاس ته راغلي اسیومتري اړین ده، چې د کمپلکس سکالار ضرب مثبتوالی تضمینوي. د بېلگې په توګه دی:

$$\langle iv, iv \rangle \neq i^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle < 0$$

د $v \neq 0$ لپاره.

له دی زیات صدق کوي:

$$\langle iv, iv \rangle = (\bar{i}i) \langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle > 0.$$

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

مثبتوالی اړین دډو چی له لاری ئو نورم تعریف کړای شو.

لیکونکي هیولیک، هیورنر

$$x, y \in \mathbb{R}^2$$

د وکتورونو لپاره یوه دحقیقي سکالار ضربونو د ممکنه تعریفونو لړۍ تر څېړنې نیسو. په لاندې جدول ورکړ شوي، چې کوم خویونه پوره دي.

خویونه	سکالار ځل
ټول	$10x_1y_1 + x_2y_2$
کرنییزوالی	x_1y_2
مثبتوالی، سیومتري	$ x_1y_1 + x_2y_2 $
سیومتري	$x_1x_2 + y_1y_2$

فقط لومړی تعریف ټول غوښتونې شرایط پوره کوي. په کملکس وکتورفضا $\mathbb{C}^2$ کې په هر ډول دا حالت نه دی، هم مثبتوالی او هم مائل سیومتري پوره نه دي:

$$\langle (i, 0), (i, 0) \rangle = 10i^2 = -10 < 0$$

$$\langle (i, 0), (1, 0) \rangle = 10i \neq \overline{\langle (1, 0), (i, 0) \rangle} = -10i$$

په داسې حالت کې چې د دویم Arguments اجزا وي يا کمپوننتونه کمپلېس کنجوگيرت کړي، پرابلک له منځه تلای شي. تعريف

$$\langle x, y \rangle = 10x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

په کمپلېس حالت غزونه راکوي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د کوشي-شوارخ – نامساوات (نابرابرون)

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

سکالار ضرب کېدی شي د اسوخيانيو قانون له مخې تخمین شي:

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|, \quad |w| = \sqrt{\langle w, w \rangle}.$$

$u \parallel v$
مساوات ټيک هلته صدق کوي، که صدق ولري .

که $v = \lambda u$ وي، لکه څنگه چې غوښتل کيږي مساوات صدق کوي.

د u همداسې د v ضرب د يوه سکالار سره نامساوات تغیر نه خوري. کېدی شي ونيسو(فرض کړو) چې صدق کوي:

$$|u|^2 = |v|^2 = 1.$$

که د سکالار ضرب سره (دلیل حقیقی حالت په بر کې نیسي) دي

$$\langle u, v \rangle = r \exp(i\varphi), \quad r > 0,$$

د $\lambda = \exp(i\varphi)$ سره د ناغبرگو (ناموازي) وکتورونو لپاره لاس ته راځي

$$0 < \langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle$$

$$= 1 + \lambda \bar{\lambda} - \lambda r \overline{\exp(i\varphi)} - \bar{\lambda} r \exp(i\varphi)$$

$$= 1 + 1 - r - r.$$

له دې سره $r = |\langle u, v \rangle| < 1$ باور لري، ده په دې معنا چې غوښتنه مو.

نورم Norm ر ډولیزوال

په یوه حقیقي یا کمپلکس وکتور فضا V نورم یا تابع $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ده

د لاندې خویونو سره:

مثبتوالی:

$$v \neq 0 \quad \|v\| > 0$$

د لپاره.

هوموگینیوالی یا برابر ډولیزوالی Homogenität :

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

درېگودي (مثلث-) نامساوات:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

د لته u, v په خوښه وکتورونه دي او λ یو په خوښه سکالار.

دد نورم $d(u, v) = \|u - v\|$ په مرسته کېدی شي د دوه وکتورونو ترمنځ واټن تعریف شي.

د سکالار ضرب نورم - Skalarprodukt - Norm

په یوه حقيقي یا کمپلکس وکتور فضا V د یوه سکالار ضرب سره ، نورم له

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in V$$

سره په یوه معنا دی.

مثبتوالی او هوموگینیتي (ورته والی) تړلي د سکالار ضرب د ورته خوینو څخه لاس ته راځي. د مثلث مساوات له

$$|u + v|^2 = \langle u + v, u + v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle + \underbrace{\langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle}}_{\in \mathbb{R}} + \langle v, v \rangle$$

کرنییز الجبر

$$\begin{aligned}
 &\leq |u|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + |v|^2 \\
 &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 \\
 &= (|u| + |v|)^2
 \end{aligned}$$

څخه د ریښې نیونې له لارې لاس ته راځي.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

ماکسیموم - نورم Maximum-Norm

د وکتورونو فضاو $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ لپاره

$$\|z\|_{\infty} = \max_i |z_i|$$

ماسکیموم – نورم په نڅښه کوي.

د ریښو د نامساوات پوره دي، ځکه چې د $z = x + y$ لپاره باور لري

$$\max_i |z_i| = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i (|x_i| + |y_i|) \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i|.$$

د پیل کولو یا رامنځ ته کولو سره تولید شوي: $w_i \in \mathbb{R}_+$ ماکسیموم-نورم کېدی شي د وزنونو

$$\|z\|_{\infty, w} = \max_i (w_i |z_i|).$$

د حقیقي- یا ریل وکتورونو سکالار ضرب Skalarprodukt reeller Vektoren

د وکتورونو ضرب د
لیاره کانونیکي $v = (v_1, \dots, v_n)^t, w = (w_1, \dots, w_n)^t \in \mathbb{R}^n$

$$v^t w = \sum_{i=1}^n v_i w_i = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$$

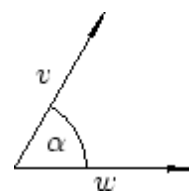
سره تعریف دی د ورکښوي assoziierten نورم

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

سره.

هندسي کېدی شي دا نورم د
ترمنځ کوچنی زاویه یا کونج α په نڅښه کوي، چې د u او v څخه غزیدلي سطحي کې اندازه کېږي.

$$v^t w = |v| |w| \cos \alpha$$



د سکالار ضرب خویونه ساده ازمايل کېږي.

د هندسي تعریف ورته والی د کوساین جلي سره تصدیقېږي (لومړی د $n = 2$ لپاره).

دې پسې د $v = (v_1, v_2)^t$ او $w = (w_1, w_2)^t$ سره باور لري، چې

کرنییز الجبر

$$|v - w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\alpha.$$

که خای په خای کرو، نو ترې لاس ته راځي

$$(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2|v||w|\cos\alpha$$

او د بڼه بدلو سره بڼونه یا ثبوت.

د $n \geq 2$ لپاره v او w په $\mathbb{R}^n$ کې یوه سطحه اواره (هواروي) وي یا غزوي. ورته شمېرنه په دې سطحه کې بڼايي، چې د په خوښه دیمنزیونون (ابعادو یا پراخېدونو) $n \geq 2$ لپاره ټیک دی.

د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب Skalarprodukt komplexer Vektoren

د وکتورونو لپاره کانونیکی $x = (x_1, \dots, x_n)^t, y = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n$

$$y^*x = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$$

سکالار ضرب د له خوا تعریف دی د شسوخیري نورمونو

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}.$$

سره.

دا سوپر سکریپت له دې سره د یوه وکتور ترانسپوزیشن او کمپلکس کنجوگیشن په ګوته کوي.

دا تعریف حقیقي حالت خوندي لري، چې په هغو کې کمپلکس کنجوگیري حالت پوره وي.

$$x = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ -2 - i \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \end{pmatrix}$$

که له $\mathbb{C}^2$ څخه د وکتورونو
سکالار ضرب جوړوو، نو لاس ته راځي:

$$\langle x, y \rangle = (1 + 2i) \cdot 2 + (-2 - i) \cdot \overline{2i} = 2 + 4i + 4i + 2i^2 = 2 + 8i - 2 = 8i.$$

پس د دوه کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب اړيک نه دی چې حقيقي وي.

د اسوڅيږي نورم سره د دويم وکتور کنجوگيري کونه غوره رول لري. بي له کنجوگيري
کوني څخه به په ضرب کې لومړي وکتور لاندې نورم لرو دی

$$\sqrt{(1 + 2i)^2 + (-2 - i)^2} = \sqrt{1 + 4i - 4 + 4 + 4i - 1} = \sqrt{8i} \notin \mathbb{R},$$

او د دويم وکتور لپاره به په همدې ډول نورم نامثبت وي:

$$\sqrt{2^2 + (2i)^2} = \sqrt{4 - 4} = 0 \neq 0.$$

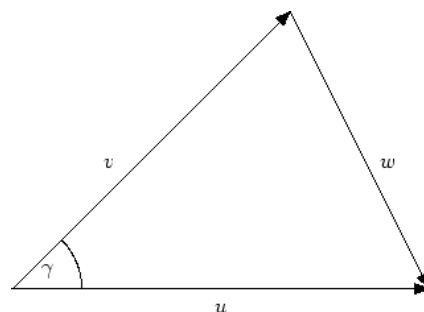
د دوه وکتورونو ترمنځ کونج Winkel zwischen Vektoren

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}$$

د يوه حقيقي سکالار ضرب لپاره د لخوا

په $[0, \pi]$ کې د u او v ترمنځ يوکونج تعريفوي. په ځانگړې توگه u او v
اورتوگونال، $u \perp v$ ، بولو که $\langle u, v \rangle = 0$ ولرو.

د کونج تعريف په $\mathbb{R}^2$ کې د وکتورونو لپاره د کوساين له مخې رابولي:



په یوه درې‌کودې یا مثلث کې د اړخونو $|u|, |v|, |w|$ اوږدوالي لپاره اړیکې باور لري:

$$|w|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \angle(u, v).$$

له بلې خوا د سکالار ضرب له تعریف څخه

$$|w|^2 = |v - u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2\langle u, v \rangle,$$

د کونج تعریف د پرتلي له لارې لاس ته راځي.

د په خوښه حقیقي سکالار ضرب لپاره د کوشي-شورخ-مساوات په بنسټ لرو:

$$\frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} \in [-1, 1].$$

وېش کېدلی شي په $[0, \pi]$ کې د یوه کونج د کوساین سره برابر کېښوول شي یا ځای په ځای شي.

د پیتاگوراس (فیثاغورث) جمله Satz des Pythagoras

د یوه سکالار ضرب-نورم د اور توگونال یا عکود وکتورونو u او v لپاره

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2.$$

باور لري.

$$\begin{aligned}
 |u + v|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0, \text{ da } u \perp v} + \underbrace{\langle v, u \rangle}_{=0, \text{ da } v \perp u} + \langle v, v \rangle = \\
 &= |u|^2 + |v|^2.
 \end{aligned}$$

دا حمله د پیتاگوراس جملې تر نامه شهرت لري (569-475 v. Chr)، سره له دې چې دا له دې 1000 کاله د مخه بابلیانو پیژندله.

امکان لري، چې پیتاگوراس به لومړنی وو، چې دا جمله یې ثبوت کړې.

د پیتاگوراس درېگونې Pythagoräisches Tripel

$l^2 + m^2 = n^2$,
د پیتاگوراس درېگونو سره درې طبیعي اعداد l, m, n بلل کیږي، د
سره، د بېلګې په توګه (3, 4, 5).

یو مثلث چې د اړخونو اوږدوالي نسبت یې د پیتاگوراس درېگونې پوره کوي، د
پیتاگوراس جمله پوره کوي او له دې امله دا ولاړګوډیز یا ولاړکونجیز او که غواړی قایم
الزاویه دي.

مصريانو ممکن دا د ولاړګوډ د لاس ته راوړلو لپاره کارولی وي: دوي د یوې رسی یا
پری څخه کار رځسته، چې رابند او ۱۲ ګنډې د برابر یون (واحد) اوږدوالي سره
درلودې. که دې رسی یو درېګوډی داسې جوړ شي، چې اخونه یې درې، څلور، پنځه
یوونه یا واحد اوږده وي، نو د لنډو اړخونو ترمنځ پروت کوچ ولاړ یا عمود دی.

$$\begin{aligned}
 m &= (l^2 - 1)/2 & l &\geq 3 \\
 \text{او} & & \text{کېدی شي د عددونو} & \\
 n &= (l^2 + 1)/2 & \text{هر ناجوره یا طاق عدد} &
 \end{aligned}$$

سره د یو پیتاگوراس درېگونې ته پوره یا مکمل شي، ځکه چې

کرنییز الجبر

$$l^2 + \frac{l^4 - 2l^2 + 1}{4} = \frac{l^4 + 2l^2 + 1}{4} = \left(\frac{l^2 + 1}{2}\right)^2.$$

د دې درېگونې له 2 سره ضرب له لارې یو درېگونى لاس ته راځي، د هر ټول
عد $l \geq 6$ لپاره.

دا ورکړ شوى جوړځت اصول د يوې طريقې ځانگړى حالت دى، کومه چې د؛ بينوم د
درېم فرمول څخه لاس ته راځي، [که چې له

$$c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) = a^2$$

لاس ته راځي، که a^2 په دوه مختلفو ضریبونو تجزیه کېدى شي، چې یو یې جوړه
($= 2b$)

کمېنت يا تفريق ولري. د ناجوره يا طاق $a = l$ لپاره دا ټوټه کونه
 $a^2 = a^2 \cdot 1$ پوره ده. لاس ته راوړو:

$$b = \frac{a^2 - 1}{2}, \quad c = \frac{a^2 + 1}{2}$$

او له دې سره دا پورته ځانگړى حالت.

کرنییز نابلواکوالی یا خپلواکوالی یا نا تابعیت Lineare Unabhängigkeit

وکتورونه $v_1, \dots, v_m$ کرنییز بلواک بللکیري، که سکالار $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ شتون ولري د
 $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$

او لږ تر لږه یوه $\alpha_i \neq 0$ سره. په بل حالت کې کرنییز خپلواک بلل کیري.

په ټولیزه توګه د وکتورونو یوه ډېری M کرښیز نا بلوک یا خپلواکه بلل کېږي، که د M هره پای برخه ډېری د کرښیز نا بلوک یا خپلواکه وکتورونو څخه جوړه وي. په بل حالت کې M کرښیزه بلواکه بلل کېږي.

په پام کې دې وي، چې د کرښیز الجبر په موخه په حقیقت کې ناپاي ډېریو ته اجازه ورکړ شوې، مګر فقط ناپاي کرښیوېو کمپینیشنونو ته. د بېلګې په توګه د پرلپسېو وکتور فضا ډېریو کې

$$e = (1, 1, \dots)^t, e_1 = (1, 0, 0, \dots)^t, e_2 = (0, 1, 0, \dots)^t, \dots$$

کرښیز خپلواک دی، سره له دې چې

$$e = \sum_{n \in \mathbb{N}} e_n.$$

دې.

د ثابتو پرلپسېو یا ترادفونو د کانونیکي یوون- یا واحد وکتورونو سره پای انځورونه نه شته.

په $\mathbb{R}^2$ کې دوه وکتورونه ټیک هلته کرښیز خپلواک دي، که یو هم د بل ډېر واره نه وي، د بیلګې په توګه وکتورونه $(1, 0)^t$ او $(1, 1)^t$ کرښیز خپلواک دي، ځکه چې ایښوونه

$$\alpha(1, 0)^t + \beta(1, 1)^t = (0, 0)^t$$

راکوي

$$\beta = \alpha = 0.$$

برعکس وکتورونه $(0,0)^t$ او $(2,3)^t$ کرنییز بلواک دي، که

$$(0,0)^t = 0(2,3)^t$$

همداسي:

$$0(2,3)^t = (0,0)^t; \quad 1(0,0)^t +$$

پس د صفر وکتور یو، نه تریویال، یا ساده انځورونه شتون لري.

په $\mathbb{R}^2$ کې درې وکتورونه u, v, w تل کرنییز بلواک یا تابع دي، ځکه چې لاندې ځای په ځای کونه

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

کښته ټاکلي لاینیز هوموجین سیستم ته مو لارښودوي

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0$$

$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0$$

د α, β, γ لپاره، چې تل یو ناساده حل لري

لکه په دوه بعدي همداسي په $\mathbb{R}^3$ کې دوه بعدي وکتورونه کرنییز بلواک دي، که دا غبرگ (موازي) وي، دا په دې معنا چې که یو وکتور د بل وکتور څو ځله وي.

درې وکتورونه کرنییز بلواک دي، که دوه وکتورونه غبرگ یا موازي وي یا که یو وکتور له دې نورو دوه وکتورونو غزېدلي سطحه کې پروت وي. د بېلګې په توګه د لاندې لپاره باور لري

رکرنیز الج

$$u = (1, 2, -3)^t, v = (4, -6, 2)^t, w = (-9, 3, 6)^t$$

لپاره باور لري

$$6u + 3v + 2w = (0, 0, 0)^t$$

، پس وکتورونه کرښیز بلواک دي.

د تعريف سره سم د کرښیز بلواکوالي لپاره ازمايښت ورته دی یوه هوموچین کرښیز مساواتسیستم سره

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالار λ_i لپاره. دا په ځانگړي توگه بنایي، چې څلور وکتورونه په $\mathbb{R}^3$ کې تل کرښیز بلواک یا تابع دي.

بنسټ Basis

د یوه وکتور فضا V برخدېری B د وکتور V یو بنسټ بلل کیږی، که B کرښیز خپلواکه وي او د V یو تولیدېدونکی یا جړوېدونکی سیستم وي، دا په دې معنا چې که

$$v = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$$

هر وکتور $v \in V$ یو یواځنی انځورونه د یوه پای کمبینېشن د $b_i \in B$ سره لري.

که B پای $(|B| = n)$ وي ، نو هر وکتور کېدی شي د یوه وضعیه قیمت له لارې سره نسبت و بنسټ ته ولیکي:

$$v \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t.$$

د وضعیه قیمت انحوروني

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t,$$

سره ، دا په نامه کانونیکي ایزومورفیزم، سری کړی شي یو پای بعدی K -وکتور فضا V د n -گونی وکتور فضا K^n سره په نڅه کړی شي یا وپېژندلی شي. په ځاګړې توګه کېدی شي چې د پای حقیقي او کمپلکس وکتوري فضا د د لوستلو سره په پروتو تیوپ $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ ځان محدود یا رابند کړي.

لکه د بېلګې په توګه د پولینومونو وکتور فضا یدلکیري، اریین نه ده چې وکتور فضا دې پای بنسټ ولري. مګر د د کرنیز الجب په ساحه کې پای کرنیز کمپېشنونه تر څېړنې لاندې نیول کیري. د دې لاس ته رځي، چې پرلپسې

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots)^t, e_2 = (0, 1, 0, \dots)^t, \dots$$

د پرلپسېو د وکتور فضا لپاره بنسټ نه جوړوي. دا د ناپای کرنیز کمپېشن مطالعه یا راورنه ، لکه دا چې څنګه په فوريې لړیو کې رامنځ ته کیري، په لاس لرو، خو یوه کونورکنځ یا پولې ته یوه تګ کلیمه غواړي، یعنې د فقط وکتور فضا جوړښت څخه زیات.

بعد یا پراخیدونی Dimension

که یو وکتور فضا V یو پای بنسټ $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ولری، نو د بنسټ وکتورونو گڼون یا تعداد یواځنی ټاکلی او د V بعد یاپراخېدونۍ بلل کیږي:

$$n = \dim V .$$

د $V = \{0\}$ لپاره لیکو $\dim V = 0$ او $\dim V = \infty$ د یو ناپای بنسټ وکتور فضا لپاره.

د تولید بنسټ جملې له مخې هر وکتور فضا یو بسټ لری.

د دې لپاره چې وښایو، چې بعدونه یا پراخېدونې یواځني ټاکلی دي، بسیا کوی، چې لاندې وینه وښایو:

که یوه وکتور فضا n -توکیزه بنسټ

$$b_1, \dots, b_n ,$$

ولري، نو $n + 1$ وکتورونه

$$v_1, \dots, v_{n+1}$$

(او له دې سره د $n + 1$ څخه زیات وکتورونه هم) کرښیز بلواک دي.

که دوه بنسټونه د مختلفو ډېرو وکتورونو سره شته وي، نو د بنسټ وکتورونه به کرښیز خپلواکوالی ته یو تضاد لاس ته راشي.

پورتني غوښتنه یا ثبوت کیدی شي د n پسې د ایندکشن له لارې وښوول شي.

د ایندکشن پل لپاره (اندکشن پیل $n = 1$ ساده دی) که د وکتورونو v_i بنسټ انځورونه راواخلو:

$$v_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j} b_j, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

باور لري:

$$\gamma_{i,1} = \dots = \gamma_{i,n} = 0,$$

نو دی ، او کرنبیز بلواکوالی همدا اوس و ښوول شو. نو کیدی شي د مناسب نمره کولو له لارې ونیسي، چې $\gamma_{n+1,n} \neq 0$. له پورته مساوات څخه په راوتني یا پیل سری اوس وکتورونه تعریفوي، کوم چې د $b_1, \dots, b_{n-1}$ وکتورونو $n-1$ څخه د کرنبیز کمینیشن په څیر انځوریدلای شي:

$$v'_i = v_i - \frac{\gamma_{i,n}}{\gamma_{n+1,n}} v_{n+1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

دا چې د b_n صریب یا څلوونی ورکیري، ساده کتل کیري. دا چې

$$\{b_1, \dots, b_{n-1}\}, \quad v'_1, \dots, v'_n \in V' = \text{Span}$$

کی شي سری د ایندکشن نیوني (فرضی) وکاروي او نه ساده کرنبیز کمینیشن لاس ته راوړي

$$\lambda_1 v'_1 + \dots + \lambda_n v'_n = 0.$$

د ښه بدلون پسې د کرنبیز کمینیشن لاس ته راځي، نو له دې سره غوښتونې بلواکوالی یا تابعیت.

لیکونکي: اپې، هیولیگ

اورتوگونال یا ولاړ بنسټ Orthogonal Basis

يو بنسټ $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ اورتوگونال بلل کيږي، که وي:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j.$$

که بنسټ وکتورونه نورمي وي، دا په دې معنا چې $|u_i| = 1$ دي، نو د اورتوگونال سیستم یا اورتوگونال بنسټ څخه غږیږو.

يو وکتور v نسبت و یوه اورتوگونال بنسټ $u_1, \dots, u_n$ ته انځورونه

$$v = \sum_{j=1}^n c_j u_j, \quad c_j = \frac{\langle v, u_j \rangle}{|u_j|^2}.$$

لري.

د ضریبونو c_j لپاره پاور لري

$$|c_1|^2 |u_1|^2 + \dots + |c_n|^2 |u_n|^2 = |v|^2.$$

د یوه نورمي بنسټ لپاره ترمونه $|u_j|^2$ له منځه ځي. او له دې سره لاس ته راځي:

$$c_j = \langle v, u_j \rangle, \quad |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2 = |v|^2.$$

لیکونکي: ایپ، هیولیک، کیمرلی

دا چې $u_1, \dots, u_n$ یو بنسټ جوړوي، نو سکالا $c_1, \dots, c_n$ د

$$v = \sum_{j=1}^n c_j u_j .$$

سره شتون لري.

که د پورتنی مساوات لپاره په خوښه سکالار ضرب د u_k سره جوړ کړو او د بنسټ د اورتوګونالیتي څخه کار واخستل شي، نو لاس ته راځي

$$\langle v, u_k \rangle = c_k \langle u_k, u_k \rangle$$

همداسې

$$c_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} .$$

د ضریبونو لپاره کټمټوالی د پیتاګوراس د جملې ($n = 2$) ټولیزونه ده. دا ترلې د

$$|v|^2 = \langle c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n, c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \rangle ,$$

ضربولو څخه لاس ته راځي، که دې ته پام وشي، چې مخلوط ترمونه

$$\langle c_j u_j, c_k u_k \rangle, \quad j \neq k$$

د بنسټ وکتورونو د اورتوګونالیتي له امله ورکیري

لیکونکی: ایپ، هیولیگ

نسبت و اورتوگونال بنسټ

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ته $v = (8, 4)^t$ دا لاندي انځورونه لري

$$v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = \frac{8 + 12}{1 + 9} u_1 + \frac{-48 + 8}{36 + 4} u_2 = 2u_1 - u_2 .$$

د ضربونو لپاره باور لري:

$$|2|^2 \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2 + |-1|^2 \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right|^2 = 4 \cdot 10 + 1 \cdot 40 = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right|^2 .$$

نسبت و اورتوگونال بنسټ

$$u_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته $v = (-1, 1, 3)^t$ لاندي انځورونه لري:

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \langle v, u_3 \rangle u_3 = 3u_1 - u_2 - u_3 .$$

کرنییز الجبر

د ضریبونو لپاره باور لري

$$|3|^2 + |-1|^2 + |-1|^2 = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیگ

اورتوگونال پروجکشن یا - پربوستون Orthogonale Projektion

په یوه برخضا U اورتوگونال پربوستون

$$v \mapsto P_U(v) \in U$$

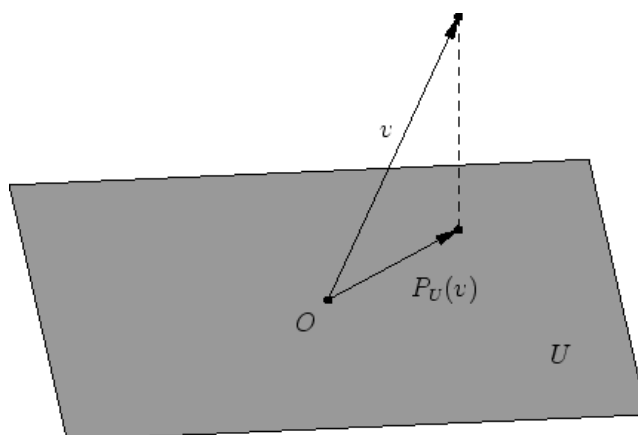
داورتوگونالیتی شرایط

$$\langle v - P_U(v), u \rangle = 0, \quad \forall u \in U$$

سره پیژندل شوی دی.

.

رکرنیز الج



که $u_1, \dots, u_j$ د U یو اوتوگونال بنسټ وي، نو دی

$$P_U(v) = \sum_{k=1}^j \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k.$$

لیکونکي: اپ، هیولیگ

له $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ سره یوه هایپر سطحه $H \subset \mathbb{R}^4$ تعریف کیږي. د اورتوگونال بنسټ لپاره کېدی شي لاندې وکتورونه وکارول شي:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د وکتور $x = (1, 2, 3, 4)^t$ د اورتوگونال پروجکشن لپاره لاندې باور لري:

کرنییز الجبر

$$P_H x = \frac{x^t u}{|u|^2} u + \frac{x^t v}{|v|^2} v + \frac{x^t w}{|w|^2} w = \frac{-4}{4} u + \frac{-2}{4} v + \frac{0}{4} w$$

لیکونکی: هیولیگ، کرایخ

د گرام-شمیت تگلار یا قانون **Verfahren von Gram-Schmidt**

د یوه بنسټ $b_1, \dots, b_n$ څخه کېدی شي، لکه په لاندې توګه، یو اورتوګونال بنسټ $u_1, \dots, u_n$ جوړ شي. داسې د $j = 1, \dots, n$ لپاره سوکټیسو تعریفوي:

$$u_j = b_j - \sum_{k < j} \frac{\langle b_j, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k,$$

د $j = 1, \dots, n$ لپاره.

دا رګورزیو ساده کیږي، که بنسټوکتور له هر پل (قدم) ورسته نورمي شي:

$$u_j \leftarrow \frac{u_j}{|u_j|}.$$

په دې حالت دي: $\langle u_k, u_k \rangle = 1$

لیکونکی: ایپ، هیولیگ

سری ایندوکتیو (له یوه څخه ټولیز ته) بنایي، چې $u_1, \dots, u_l$ د $\text{span}(b_1, \dots, b_l)$ لپاره یو اورتوګونال بنسټ جوړوي.

د $l = 1$ لپاره دا روښانه دی: $u_1 = b_1$

د ایندکشن پل $(l \rightarrow l+1)$ لپاره په پام کې نیسو، چې د $j \leq l$ لپاره لرو

$$\langle u_{l+1}, u_j \rangle = \langle b_{l+1}, u_j \rangle - \sum_{k \leq l} \frac{\langle b_{l+1}, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{\delta_{k,j} |u_k|^2} = 0.$$

له دې امله $u_1, \dots, u_{l+1}$ اورتوگونال دي. بالاخره

$$b_{l+1} - u_{l+1} \in \text{span}(u_1, \dots, u_l) = \text{span}(b_1, \dots, b_l),$$

دي، له کوم سره چې و ښوول شو، دواړه فضا همغه لاندې فضا غږوي يا خوروي.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د دې لپاره چې نسبت سکالار ضرب يا ځل

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$$

ته د پولینومونو $p_0, p_1, \dots$ اورتوگونال پرلپسې (ترادف) جوړه کړو، کیدی شنلار

سرهې سړی د مونوم $q_j(x) = x^j$ څخه مخ ته لاړشي. د گرامشمیت د تلنلار سره لاس ته راوړي.

$$p_0 = q_0$$

$$p_1 = q_1 - \frac{\int_{-1}^1 x \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 = x - 0$$

کرنبیز الجبر

$$p_2 = q_2 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot x \, dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x \, dx} \cdot x - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dx} \cdot 1 = x^2 - 0 \cdot x - \frac{1}{3}.$$

تولیزه بڼه

$$p_{n+1} = q_{n+1} - \sum_{j=0}^n \frac{\langle q_{n+1}, p_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle} \cdot p_j$$

کیدی شي کره نازکه یا نرمه شي، که سړی د $q_{n+1}(x) = x^{n+1}$ په ځای پولینوم

$$\tilde{q}_{n+1}(x) = x \cdot p_n(x)$$

وکاروي. د

$$\text{span}\{p_1, \dots, p_n, q_{n+1}\} = \text{span}\{p_1, \dots, p_n, \tilde{q}_{n+1}\}$$

له امله دا قانوني دی. په دې حالت کې دې فقط زیاتوونی یا د جمعي غړی د

$$j = n - 1$$

سره د صفر سره نا برابره وي.

$$\langle \tilde{q}_{n+1}, q_n \rangle = \int_{-1}^1 x q_n(x) q_n(x) dx \quad j = n$$

د سیمتری په بنسټ د لپاره

$$p_k(x), k < n \quad [x p_j(x)] \quad j < n - 1$$

ورکړي. د لپاره د یوکرنبیز کمبینیشن دی.

$$\langle p_n, p_n \rangle = 0$$

له امله له دې سره د

$$\langle \tilde{q}_{n+1}, p_j \rangle = \int_{-1}^1 p_n(x) [x p_j(x)] dx$$

هم صفر دی.

په دې توګه لاس ته راوړل شوي پولینومونه د لجنډر Legendre پولینومونه بلل کيږي. د یوه بل نومالي کوني سره

رکرنیز الج

$$p_n(x) = \alpha_n x^n + \dots$$

د لاندې بنې د دوه ترمونو ریکورزیون لری

$$p_{n+1}(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}(x - \beta_n)p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x)$$

$$\text{د } \gamma_n = \frac{\alpha_{n+1}\alpha_{n-1}\varrho_n}{\alpha_n^2\varrho_{n-1}} \text{ او } \beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\varrho_n} \text{ سره } \varrho_n = \langle p_n, p_n \rangle$$

کرنیزه څیرونه (فکشن یا تابع) Lineare Abbildung

د K وکتور فضا V او W ترمنځ فکشن $L: V \rightarrow W$ کرنیز بلل کیری، که دا لاندې خوبونه ولري:

- مثبتوالی

$$L(u + v) = L(u) + L(v)$$

- هوموگېنوالی:

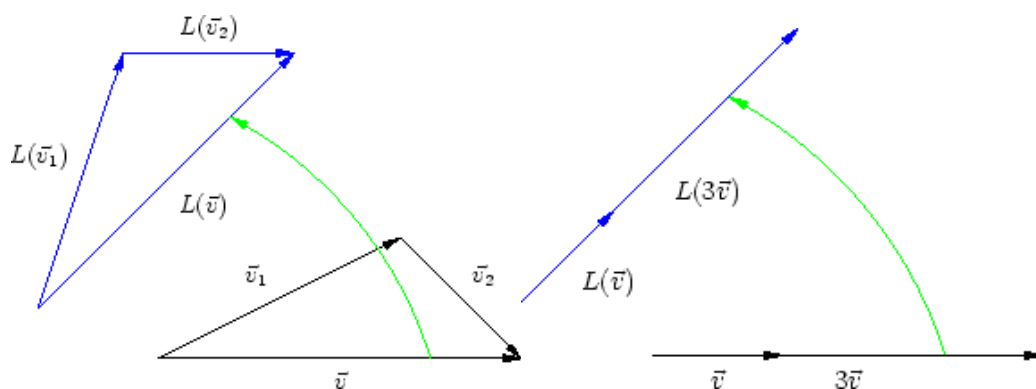
$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

له دې سره $u, v \in V$ او $\lambda \in K$ په خوبه وکتورونه همداسې سکالار دي.

په ځانگړې توگه $L(0_V) = 0_W$ او $L(-v) = -L(v)$ باور لري.

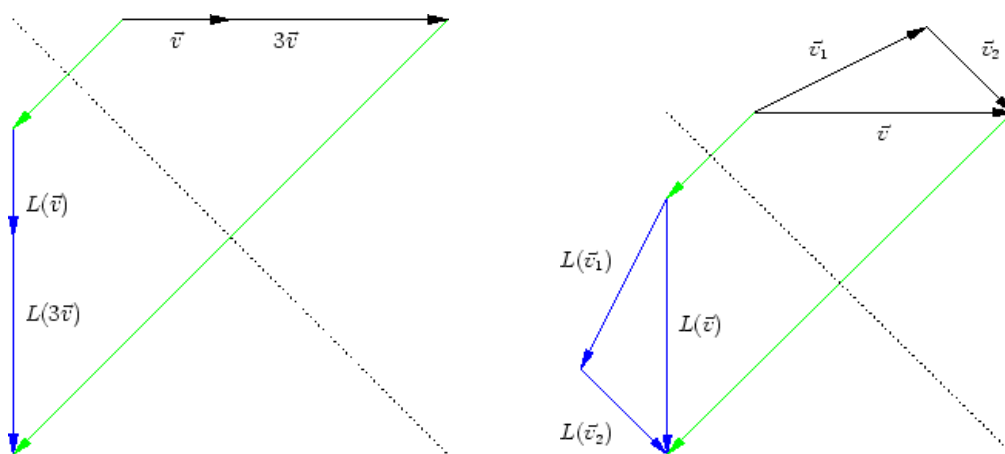
لکه په لاندې بېلگه کې به چې ښوول شي، یو څرخون کرنیز دی.

کرنییز الجبر



لکه جمعه یا زیاتون $v = v_1 + v_2$ د دواړو وکتورونو v_i سره یو مثلث یا درېگودی جوړوي، چې د ده بڼه د څرخون سره بې تغیره باټیري، دا په دې معنا چې جمعه د مخه یا د څرخون سره جوړه شي. دا چې د ضرب λ سره غزونه د څرخون سره بدلیري، بسی تړلی لیدل کیږي.

په ورته توګه ښوول کیږي چې هندارونه هم کرنیزه ده.



په سطحه کې د ټکو یوه راکښنه کرنیزه نه ده.

نه زاتونوالی یا جمعه کیدنه او هم نه هوموجینیټي پوره دي. د

$$T : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$$

$$v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), \lambda = 2$$

لپاره د بیلگې به توگه باور لري

$$T(v_1 + v_2) = (2, 1) \neq (3, 1) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$T(\lambda v) = (3, 0) \neq (4, 0) = \lambda T(v).$$

لیکونکي: هیورلیگ، هیورنر

یو څو بیلگې لاندې د حقیقي توابعو یا فنکشنونو جدول ښایی. دلته هرچېرته ورکړ شوي، چې د کرښیزوالي لپاره کوم شرطونه پوره دي.

خپرونه یا فنکشن mapping	جمعی Additive	هوموجین homogen
$f \mapsto f'$	X	X
$f \mapsto f $	-	-
$f \mapsto \int_0^1 f$	X	X
$f \mapsto \max f$	-	-

کرنییز الجبر

$f \mapsto f(0)$	X	X
$f \mapsto (\max f + \min f)/2$	-	X

د یوه فنکشن لپاره یوه بیلگه، زیاتیز (مثبت) مگر هوموجین نه دی، دادی، چې یو فنکشن T ، چې یو کمپلکس ارزښتیزه تابع د هغې حقیقي برخه په گوته کړي یا وښایی یا په هغې خبره شي. دلته باور لري: $T(if) \neq iT(f)$

لیکونکي: هیورلیگ، هیورنر

د کرنییزو توابعو کمپوزیشن Komposition linearer Abbildungen

د دوه کرنییزو توابعو

$$S : U \rightarrow V, \quad T : V \rightarrow W.$$

لپاره سری کمپوزیشن تعریفوي (چې یوبل پسې تراو یا ځنزیرونه هم بلل کيږي)

$$T \circ S : U \rightarrow W$$

داد لاندې لارې

$$(T \circ S)(u) = T(S(u)),$$

دا په دې معنا چې په $u \in U$ باندې فنکشن S او په نتیجه باندې فنکشن T کارول کيږي، فنکشن T د فنکشن S پسې کارول کيږي.

د دوه کرښیزو فنکشنونو کمپوزیشن بېرته کرښیز دی.

ماتریکس Matrix

په یوه تن یا جسم باندې د یوه $(m \times n)$ -ماتریکس تر نامه لاندې $(m, n \in \mathbb{N})$ دا لاندې یوه ولاړکدیزه - یا قام الزاویه شکل پوهیږو:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

دلته دا د A وکتورونه $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ د i -مې لیکي - او $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^t$ د j -مې متې (ستن یا پرته لیکه یا درځ...) وکتورونه بلل کیږي. په ځانگړې توگه $(n \times 1)$ - ماتریکس یو د لیکي - او $(1 \times n)$ - ماتریکس یو د متې یا ستنې وکتور دي..

د ټولو $(n \times m)$ - ماتریکسونو ټولگه په $K^{n \times m}$ سره په نڅېنه کیږي، حقیقي (کمپلکس) ماتریکسونه د $\mathbb{R}^{n \times m}$ ($\mathbb{C}^{n \times m}$) سره په نڅېنه کیږي.

لاندې بیلگې د مختلف د ماتریکس بعدونه یا پراخېدونې ښايي.

$$\begin{pmatrix} 31 \\ 57 \\ 97 \end{pmatrix}, \quad (i, 1+i, -1, 3i), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ i & 1+i & -i \\ \sqrt{3}+3i & 7543 & 17 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$$

لومړي دوه ماتریکسونه د لیکو – همداسې د متو وکتورونه دي، دا په دې معنا چې د کومو څخه چې د یوې دیمنزیون 1 دی. ښي لور ته یو څلوریځ یا مربع ماتریکس او یو یو ولاړگودیز - یا مستطیلی ماتریکس دی.

لیکونکي: هیورلیگ، هیورنر

د یوه کرنییز فنکشن ماتریکس Matrix einer linearen Abbildung

د دوه K - وکتوروفضاو ترمنځ د بنسټونو $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ او

$$F = \{f_1, \dots, f_m\}$$

سره یو کرنییز فنکشن $L : V \rightarrow W$ د بنسټو وکتورونو

$$L(e_j) = a_{1,j}f_1 + \dots + a_{m,j}f_m$$

د عکسونو یا ارزښت قیمتونو سره یواځنې ټاکلي دي. دا لاندې د ماتریکس انځورونه لری:

$$w_F = Av_E \longleftrightarrow w_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}v_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

د کومو سره چې w_i او v_j د v او $w = L(v)$ وضعییه قیمتونه (کواردیناتونه)

به نځینه کیري نسبت و بنسټ E او F ته. د ماتریکس A په j -مه مټه کې د $L(e_j)$

کواردیناتونه یا وضعییه قیمتونه نسبت د F بنسټ ته ځای په ځای دي.

دا چې L د یوه بنسټ د عکسونو یا ارزښتونو سره یواځنې ټاکلي، ترلي د کرنییزوالي لپاره شرایطو څخه ورکول کیري:

$$w = L(v) = L\left(\sum_j v_j e_j\right) = \sum_j v_j L(e_j) = \sum_j \sum_i v_j a_{i,j} f_i.$$

$$w = \sum_i w_i f_i$$

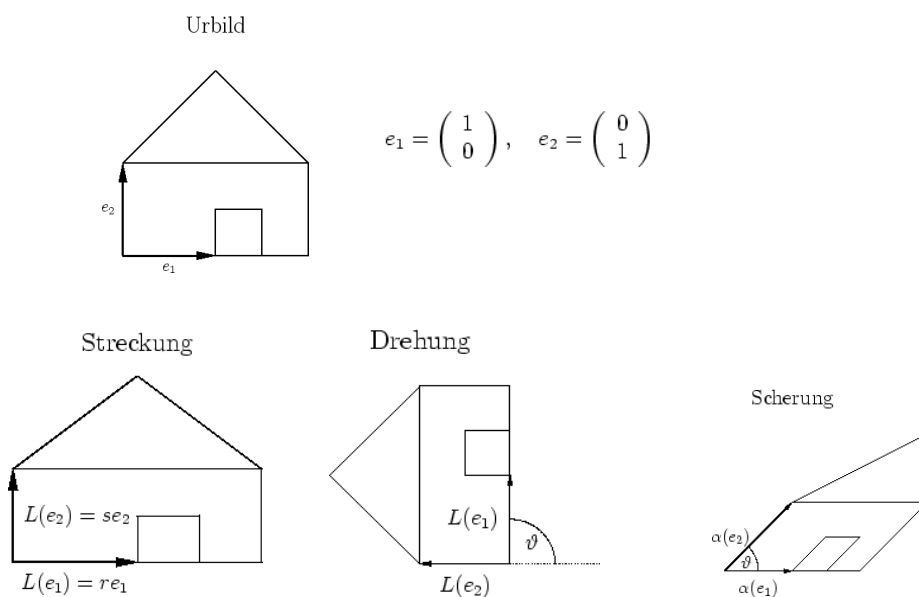
او د بنسټ وکتورونو w_i کواوردینات پرتله کيږي، داسې هم سړی غوښتل شوي د ماتریکسونو انځورونه لاس ته روړي.

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

په لاندې کې یو څو د سطحې کرښیزې تابع

$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

انځور شوي دي، چې د یوون – یا واحد وکتورونو شکلونو یا بهتره ارزښتونو e_i (غور) له لارې کره شوي دي.



کرنییز الجبر

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \cot \vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سری کړی شي چې د ماتریکس A انځورونه نسبت کانونیکي بنسټونو e_1, e_2 ته تړلی معلومیږي یا لوستل کیږي. د ماتریکس متي هره یوه ځانله د وکتورونو $i = 1, 2$ $L(e_i)$ ، کواوردیناتونه خوندي لري.

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

یو کرنییز فنکشن یا تابع

$$x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x$$

په ټکو $x = 0, 1$ باندې د هغو ارزښتونو سره ټاکلي. فنکشن

$$L : p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

کرنییز دی او کېدی شي نسبت د ضریب وکتورونو

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

له لارې تعریف شوي مونومبنسټ سره

رکرنییز الج

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

له لاری انځور شي

که بنسټ

$$p_1(x) = 1 - x, p_2(x) = x$$

استعمال شي، نو ماتریکس

$$\begin{pmatrix} p_1(0) & p_2(1) \\ p_1(1) & p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ترې لاس ته راځي.

تولیز د $n \leq$ درجې په m تکیه ځایون $x = x_1, \dots, x_m$ کې د یوه پولینوم

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

ارزښتونه یا قیمت ټاکنه د واندروموند ماتریکس Vandermonde-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 & x_m^1 & \dots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_m) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

سره تشریح شوي یا ورکړل شوي.

کو اوړ دیناتونو ترانسفورمیشن د بنسټ بدلون سره

Koordinatentransformation bei Basiswechsel

د یوه بنسټ بدلون $E \rightarrow E'$ سره د یوه وکتور v کو اوړ دیناتونه د

$$v_E = A v_{E'} \Leftrightarrow v_{E'} = A^{-1} v_E,$$

سره سم ترانسفورمې کوي، د کوم سره چې د مربع ماتریکس A متې د بنسټ

وکتورونو e'_i ضریبونه نسبت و بنسټ ته خوندي لري:

$$e'_i = \sum_j a_{j,i} e_j.$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

وکتور v نسبت و بنسټ وکتور E او E' ته لاندې انځورونه لري:

$$\sum_k \lambda_k e_k = v = \sum_k \lambda'_k e'_k.$$

د e'_k د انځورونې په مرسته نسبت و بنسټ E ته لرو:

$$\begin{aligned} v &= \sum_k \lambda'_k e'_k = \sum_k \lambda'_k \left(\sum_j a_{j,k} e_j \right) \\ &= \sum_j \left(\sum_k a_{j,k} \lambda'_k \right) e_j = \sum_j \lambda_j e_j. \end{aligned}$$

د کواوردینات پرتلی سره لاس ته راځي: $v_E = Av_{E'}$

لیکونکی: وپیر

Bild او Kern معنا څیره یا شکل او زړي

د یوه کرښیز تابع $L : V \rightarrow W$ لپاره د

$$\ker L = \{v \in V : L(v) = 0\} \subseteq V$$

سره سړی کرن یا زړی په نڅښه کوي او د

$$\text{Bild } L = \{w \in W : \exists v \in V$$

$$L(v) = w\} \subseteq W$$

د سره د L ارزښت یا شکل ښوول کيږي یا په نڅښه کيږي. دواړه ډېری (ستونه) لاندې – یا برخه فضاوي دي.

لیکونکی: کیمرلي

ثبوتو چې د K وکتور فضا V همداسې W نسبت و کرښیزو عملیاتو ته تړلي یا رابند دي یعنې دا عملیات په کې بې بندیزه اجرا کېدی شي.

$$u, v \in \ker(L), \lambda \in K$$

اول - $\ker L$ د V لاندې فضا ده: د لپاره، د کرښیزوالي په بنسټ باور لري:

$$L(\lambda u) = \lambda L(u) = \lambda 0 = 0$$

او

$$L(u + v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0 .$$

د دې په تعقیب λu او $u + v$ هم د $\ker(L)$ توکي دي.

دویم - $\text{Bild } L$ د W لاندېضا ده: د $u, v \in \text{Bild } L$ لپاره د
 $\lambda \in K$ او $u = L(x), v = L(y)$ سره د L کرنییزوالي په بنسټ لاندې صدق کوي:

$$\lambda u = \lambda L(x) = L(\lambda x)$$

او

$$u + v = L(x) + L(y) = L(x + y).$$

دا چې V یوه وکتور فضا ده، نو اړونده له مخ څېروني یا عکسونه یا تابع وي هم شته او په تعقیب λu او $u + v$ هم د $\text{Bild } L$ توکي دي. لیکونکی: ویپر

د Bild او Kern ابعاد یا براخیدوني Dimension von Bild und Kern

د یوه کرنییز فنکشن $L : V \rightarrow W$ لپاره باور لري

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \text{Bild}(L),$$

که وي: $\dim V < \infty$

د دې لپاره چې د بعد کټمټوالی وښایو، نو د $\ker L$ لپاره یو بنسټ $E' = \{e_1, \dots, e_m\}$ ټاکو او دا د $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$ سره د V و بنسټ E ته پوره کوو. دا چې

$$L\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) = \sum_{i=m+1}^n v_i L(e_i),$$

نو لرو:

$$\text{Bild } L = \text{span } F, \quad F = \{L(e_{m+1}), \dots, L(e_n)\}.$$

دا چي پسي F کړنيز خپلواک دی، يعنې د $\text{Bild } L$ بنسټ، نو له

$$\sum_{i=m+1}^n v_i L(e_i) = 0$$

لاس ته راځي $\sum_{i=m+1}^n v_i e_i \in \ker L$ او له دې سره $v_i =$.

دا غوښتونې د بعدفرمول اوس د بنسټوکتورونو تعداد څخه لاس ته راځي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورن

د بعدفرمول د ښوونې لپاره د پولينومونو - چې له $n \leq$ درجه لري - په فضا باندې k -م مشتق څېړل کيږي.

لومړۍ دې $k = 1$ او $n = 2$ وي. د پولينومونو د فضا لپاره چې درجه يې ≤ 2 ده $\{1, x, x^2\}$

بنسټ جوړوي، دا فضا پس بعد 3 لري. د

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

لپاره

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x$ يو پولينوم دی چې درجه يې ≤ 1 ده. بيلد فضا نو بعد 2 لري.

د مشتقنيولو سره ثابته له منځه ځي يا ورکيږي. دا يوه يو بعدي لاندي - برخضا جوړوي.

کرنییز الجبر

د تابع گرن یا زری بعد 1 لري او له دې سره د $3 = 1 + 2$ سره د بعدفرمول پوره دی یا بنول شوی.

په ټولیزه توگه پولینوم لاندې فرمول لري:

$$p(x) = \sum_{l=0}^n a_l x^l$$

او k -م مشتق

$$p^{(k)}(x) = \sum_{l=k}^n \frac{l!}{(l-k)!} a_l x^{l-k}.$$

بیلد یا څېره یا ارزښت د $\leq n - k$ درجي پولینوم دی او پولینومونه چې $< k$ درجه لري له منځه وړل کیږي. پس د بعدفرمول لاندې بڼه لري:

$$n + 1 = \underbrace{((n - k) + 1)}_{\dim \text{Bild}} + \underbrace{k}_{\dim \text{ker}}.$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

معکوس یا په خټ تابع (څیرونه یا فنکشن) Inverse Abbildung

$$\ker L = 0_V$$

یوه کرنییزه تابع $L : V \rightarrow W$ ټیک هلته انجکتیو یا په کې ده، که وي. په دې حالت کې د

$$w \mapsto v, \quad w = L(v),$$

له مخې یو معکوس تابع $L^{-1} : \text{Bild } L \rightarrow V$ تعریف شوی، چې دا هم کرنییزه ده

په ځانگړي توگه باور لري

$$L^{-1} \circ L(v) = v, \quad L \circ L^{-1}(w) = w$$

د ټولو $w \in \text{Bild } L$ او $v \in V$ لپاره

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

د L د ګرښزوالي په دلیل صدق کوي

$$L(v_1) - L(v_2) = L(v_1) + L(-v_2) = L(v_1 - v_2),$$

او له دې اړیکو لاس ته راځي:

$$L(v_1) = L(v_2) \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \ker L.$$

د یوه انجکتیو (په کې) کرښیزې تابع لپاره کېدی شي چې کرن یازری فقط صفروکتور خوندي ولري.

دا معکوس تابع کرښیزه ده له لاندې لاس ته راځي

$$L^{-1}(L(v_1) + L(v_2)) = L^{-1}(L(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = L^{-1}(L(v_1)) + L^{-1}(L(v_2)),$$

$$L^{-1}(\lambda L(v_1)) = L^{-1}(L(\lambda v_1)) = \lambda v_1 = \lambda L^{-1}(L(v_1)).$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

د ماتریکسونو وکتورفضا Vektorraum der Matrizen

د $(m \times n)$ ماتریکسونه یو وکتور فضا جوړوي، دا په دې معنا چې دا کېدی شي سره
 جمعه شي او د سکالار سره ضرب شي. دا کارونې یا عملیې په لاندې توګه کمپوننتېوله
 تعریف دي:

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

$$B = \lambda A \Leftrightarrow b_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورن

د ماتریکسونو ضرب Matrix-Multiplikation

د یوه $(n \times m)$ ماتریکس A او یوه $(m \times s)$ ماتریکس B ضرب لاندې
 د $(n \times s)$ ماتریکس دی:

$$C = AB, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj},$$

دا په دې معنا چې د c_{ij} د تعریف لپاره د A د i لیکې توکي او د B د j متي توکي
 سره جمعه کیږي:

$$\begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}.$$

پام دې وي، چې له دې سره باید د A د متو تعداد (گنون) د B د لیکو تعداد (گنون) سره برابر وي.

د ماتریکس ضرب همغه د کرښیزو توابعو کمپوزیشن دی

$$T : u \mapsto v = Bu, \quad S : v \mapsto w = Av,$$

دا په دې معنا چې C د $T \circ S$ ماتریکس انځورونه ده.

د کمپوزیشن لپاره د

$$w_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} v_k, \quad v_k = \sum_{j=1}^s b_{kj} u_j$$

له مخې تعریف شوي تابع په لاندې ډول لاس ته راوړي.

$$w_i = \sum_k \sum_j a_{ik} b_{kj} u_j = \sum_j \left[\sum_k a_{ik} b_{kj} \right] u_j.$$

په گوډیزه یا کونجیزه نوکانو یا که غواړی قوسونو کې افاده د ماتریکسونو ضرب دی او کمپوزیشن توابعو د ماتریکس C سره سرخوري (یا برابر دی).

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

په لاندې یو څو معلوم د ماتریکسونو ضربونه ورکړ شوي دي:

کرنییز الجبر

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 100 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 321 & 213 & 132 \\ 123 & 312 & 231 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 26 \\ 21 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \end{pmatrix}$$

د ستراسن (ویینه: شتراس) الگوریتم Strassen's Algorithmus

که په ورسره بلد ډول د دوه (2×2) -ماتریکسونو A او B ضرب $C = AB$ تر څیرني لاني ونیسو، نو سړی اته ضربونو ته اړتیا لري. په ډېر هکېوالي (چې د څه انتظار نه کېږي او پېښ شي) شتراسن وښوول چې اوه ضربونه بسیا کوي

[V. Strassen: Gaussian elimination is not optimal, Numer. Math. 13 (1969). 357-361]. Man berechnet die Produkte

سړی ضربوني شمیري

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) \\
 p_2 &= (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}) \\
 p_3 &= (a_{1,1} - a_{2,1})(b_{1,1} + b_{1,2}) \\
 p_4 &= (a_{1,1} + a_{1,2})b_{2,2} \\
 p_5 &= a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2}) \\
 p_6 &= a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}) \\
 p_7 &= (a_{2,1} + a_{2,2})b_{1,1}
 \end{aligned}$$

او د C ضرب د زیاتون یا جمعی جوړولو له لارې لاس ته راځي.

$$\begin{aligned}
 c_{1,1} &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} = p_1 + p_2 - p_4 + p_6 \\
 c_{1,2} &= a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} = p_4 + p_5 \\
 c_{2,1} &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} = p_6 + p_7 \\
 c_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} = p_2 - p_3 + p_5 - p_7.
 \end{aligned}$$

کومتاتور Kommutator

د دوه $(n \times n)$ - ماتریکسونو کموتاتور د $[A, B] = AB - BA$ په حیث تعریف

شوی او په ټولیزه توګه ناصفر. د $[A, B] = 0$ په حالت کې ماتریکسونه A او B کموتي کیدونکي ماتریکسونه بلل کېږي.

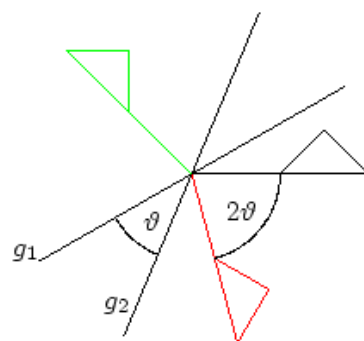
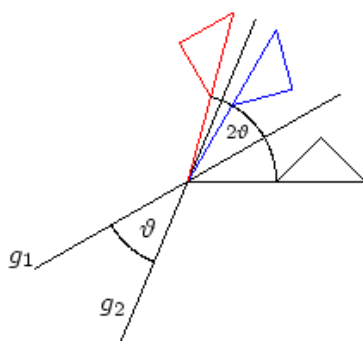
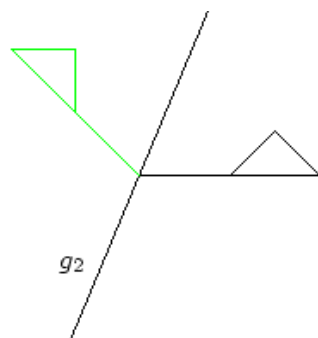
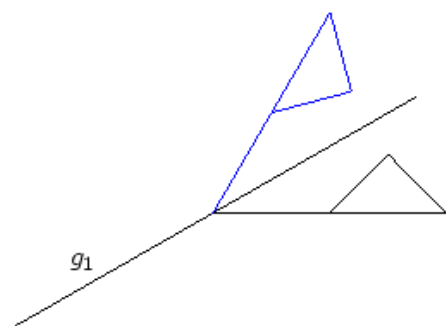
لیکونکي: هیولیک، هیورن

په مختلفو محورونو g_1 او g_2 د دوه وکتورونو S_1 او S_2 د هنداروني (که غواړئ انګاس) یو په بل پسې راوړنه کې د لړۍ پرلپسې رول نه لري.

دا پورته څیره یا عکس د یوګونو هندارونو شکلونه ښایي. په لاندې لړۍ کې کین ډبله هندارونه $S_2 \circ S_1$ انځور ده اوښي لور ته ډبله یا دوه واره هندارونه $S_1 \circ S_2$. د هر

کرنییز الجبر

خُله نتیجی یی د کرنیو ترمنځ په دوه برابره کونج څرخون دی، په هر حالت په مختلفو لورو.



که g_1 د لومړۍ کونجیمې په څېر ونیسو او د g_2 د y -محور نو توابع د ماتریکس انځورونه لري.

$$v = S_1 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u,$$

$$v = S_2 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u.$$

ڊپل هندارونه يا انعكاسونه لاندې انځورونه لري

$$\begin{aligned} w = S_2 S_1 u &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = S_1 S_2 u &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u. \end{aligned}$$

په دې حالت کې کوموتاتور په لاندې ډول دی

$$[S_1, S_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

په خټ يا معکوس ماتریکسونه Inverse Matrix

د یوه معکوس کېدونکي کرښیز تابع $Av \mapsto v$ لپاره A^{-1} د A معکوس ماتریکس په نڅېنه کوي، دا په دې معنا چې

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

د

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

یون – واحد ماتریکس سره؟

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

معکوس کېدونکي په همدې ډول ریډولار ماتریکسونه
 $A \in K^{n \times n}$ نسبت و ضرب ته
 $GL(n, K)$ یو ګروپ جوړوي، کرنییز ګروپ چې د
 سره په نڅېنه کېږي.

باور لري

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$A, B \in GL(n, K)$ د
 لپاره .

باور لري

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E ,$$

اوله دې سره $B^{-1}A^{-1}$ و AB ته معکوس دی

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د دیاگونال ماتریکس معکوس داسې لاس ته راځي، چې د دیاگونال توکو معکوس یا په خټ ارزښت جوړیږي، د بېلګې په توګه:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

د درېګودۍ – یا مثلث ماتریکس لپاره په معکوسونې کې د مثلث بڼه ساتلې پاتې کېږي، د بېلګې په توګه:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

په ټولیزه توګه د ماتریکس په خټ یا معکوس پوره ځای نیولی یا ډک دی، د بېلګې په توګه:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

لیکنې باید د یوه کرښیز مساواتسېتم له لارې و ټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

تراسپونې او اډجونګیري ماتریکسونه

Transponierte und adjungierte Matrix

که د یوه ماتریکس A لیکې اوو مټې سره بدلې شي، نو د ترانپونې ماتریکس $B = A^t$ څخه غږیږو، دا په دې معنا چې

$$b_{i,j} = a_{j,i}.$$

که د یوه کمپلکس ماتریکس A سربېره پر دې لیکنې کنجوګیر شي، نو اډیونګیري ماتریکس ترې لاس ته راځي، دا په دې معنا چې

$$c_{i,j} = \bar{a}_{j,i}.$$

یو ماتریکس د $A = A^t$ سره سیومتريک بلل کيږي، یوه ماتریکس د $A = A^*$ سره د پخپله اډیونگيري په څېر ده یا هرمیتيکي Hermitesch ده. د حقيقي ماتریکسونو لپاره کلیمي سیومتريک او هرمیتيکي همغه (یوه) معنا لري.

لاندې قانون باور لري:

$$(AB)^* = B^* A^* \quad (AB)^t = B^t A^t$$

او -

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \quad (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

او -

د یوې لیکنې لپاره په $C^t = (AB)^t$ کې باور لري

$$c_{ji}^t = c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k a_{ki}^t b_{jk}^t = \sum_k b_{jk}^t a_{ki}^t$$

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$$

او له دې سره $C^t = B^t A^t$ دا چې $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$ باور لري، نو دا د اډیونگيري لپاره هم ټیک دی.

له

$$E = E^t = (AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t$$

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

لاس ته راځي. په ورته توګه د اډیونگيري لپاره هم صدق کوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

شپور Spur

(د الماني څخه د شپور پښتو معنا: نڅښه يا علامه)

شپور د يوه $n \times n$ -ماتريکس A اصلي دوه کونټريټو کوکو (وتر) جمع د A شپور بلل کيږي،

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

که A, B په خوښه $(n \times n)$ -ماتريکسونه وي، نو باور لري:

$$\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA).$$

له دې لاس ته راځي، د يوه رېډولار ماتريکس T او يوه په خوښه ماتريکس A لپاره صدق کوي:

$$\text{Spur}(T^{-1}AT) = \text{Spur}(A).$$

دا دا معنا لري، چې شپور يا سپور د کواورديناټ ترانفورميشن لاندې invariant (نسبت يوي کچونې يا اندازه کونې ته بې تغيره پټې کيدل) يا بې تغيره پاتېږي.

د يوه ماتريکس رانگ Rang einer Matrix

د يوه $(m \times n)$ -ماتريکس لپاره د کرښيز خپلواکو متو ماکسيمال گڼون يا تعداد د ماکسيمالو کرښيزو خپلواکو کيلو سره يو په بل پريوحي يا يو بل سره مساوي دي او د

رانگ A په لکنيز ډول $\text{Rang } A$ بلل کيږي،

په ځانگړي ډول باور لري

$$\text{Rang } A \leq \max\{m, n\}.$$

د ماکسیمال کرنبیز خپلواکو متو $v_1, \dots, v_n$ تعداد د وکتور فضا پد به گوته کوي

$$V = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\},$$

ځکه چې سری سری شي د متو څخه بنسټ وټاکي. په ورته توگه وينا د لیکو

څخه غزیډلي وکتور فضا W لپاره هم صدق کوي.

$$\dim V = \dim W$$

غوښتنه د n پسې اندکشن له لارې وښوول شي.

ساده ښوول کیږي، چې $\dim V$ او $\dim W$ د لاندې عملیو یا کارونو سره بی تغیره پاتیري:

- د متو یا لیکو بدلېدنه یا پرموتیشن

- د یوه سکالار جمعه دېرځله یا د یوه دېرځله سکالار سره د یوې متې (لیکې) جمعه د یوه بلې متې (لیکې) سره.

که $A \neq 0$ وي، سری سری شي دا عملیه په لاندې بڼه

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

راوړي.

د پرموتیشن سره لومړی لاس ته راځي او بیا د لومړی لیکې یا کیلي او متې پاتې توکي د مناسب جمعی له لارې له منځه وړي. په ټیک ډول لومړي د لومړی متې $b_{1,1} \neq 0$

خله و j -مې مټې ($j = 2, \dots, n$) ته جمعه کوي او په ورته توګه د لیکو وکتورونو سره هم دا عمل وځ ته بیولای شو. که د V' او W' سره وېشتونې وکتور فضاوې د $(m-1) \times (n-1)$ - ماتریکس A' لپاره، نو لاس ته راځي

$$\dim V = \dim V' + 1, \quad \dim W = \dim W' + 1$$

او د ایندکشن له لارې غوښتنه.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

یو څو تیپیکي حالتونه د درې (3×2) -متریکسونو سره د لیدلو شوي یا ورکړ شوي دي

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = 1.$$

د دریم ماتریکس لپاره صدق کوي $4S_1 = 3S_2$ د مټو S_1 او S_2 لپاره او
د لیکو Z_1, Z_2 او Z_3 لپاره. په دواړو حالتونو کې نو د
غوښتونې وکتور فضا دیمنژن یا بعد برابر په 1 دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د یوه ماتریکس نورم Norm einer Matrix

د یوه وکتور نورم د ماتریکس نورم

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

ته بنسټ ووي د نورم خويونو سرېره (مثبتوالي، هوموچي نيتي، مثلث مساوات)

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

باور لري، دا په دې معنا چې د ورسره تنظيم شوي ماتريکس نورم سبمپليکاتيوي (submultiplikativ) دی.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

په لاندې کې به يوگوني خويونه د ازمایني له لارې زېږول شي:

مثبتوالي: د وکتور فضا تعريف له لارې تضمین دی، چې $\|A\| \geq 0$ دی. که A صفر ماتريکس وي، نو فقط صفر وکتور 0 د څېرې په څېر مخ ته لرو. که له بلې خوا نورم صفر وي، نو فقط صفر وکتور د څېرې په څېر رامنځ ته کيږي، او تابع يا فنکشن د صفر ماتريکس سره تشریح کيږي.

Homogenität هوموچنيتي:

$$\max_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1} |\lambda| \|Ax\| = \|\lambda A\|$$

$$|\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\| . =$$

$$\|\lambda A\| = \max_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1} |\lambda| \|Ax\|$$

$$= |\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\|.$$

Dreiecksungleichung مثلثات برابرون :

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \max_{\|x\|=1} \|(A + B)x\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\| \\ &\leq \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \\ &\leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

Submultiplikativität سب ضربیوالی:

د $B = 0$ لپاره $AB = 0$ دي او له دې سره نامساوات پوره دی. د $B \neq 0$ لپاره دی:

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x: Bx \neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\|. \end{aligned}$$

د لومړي بني بدلون سره ، جي په حقيقت کی دېری یا ست په یوه سوپرېموم Supremum څېره کيږي محدودیږي، مگر فقط وکتورونه ترې لري کيږي، چې صفروکتور دڅېرې په ډول لري او له دې سره سوپرېموم نه اغیزمن کوي.

لیکونکي: هیولیگ ، کرایخ

د لیکو د جمعی نورم Zeilensummen-Norm

د وکتورونو لپاره ماکسیموم نورم $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$ د ماتریکسونو لپاره د لیکو جمعی نورم

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

تنظیم دی.

لیکونکي: هیولیگ ، کرایخ

$$\|x\|_\infty = \max_j |x_j| = 1 \quad \text{د لپاره}$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|, \quad \text{دی}$$

او سری لاس ته راوړي

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

که سری ونیسي یا فرض کړي، چې ماکسیموم د $i = k$ لپاره فرض شوی یا نیول شوي، نو مساوات د

$$x_j = \text{sign } a_{kj}$$

انتخاب له لاري لاس ته راځي، ځکه چې دی:

$$\left| \sum_j a_{kj} x_j \right| = \sum_j \|a_{kj}\|.$$

لیکونکي: هیولیگ ، کرایخ

د ماتریکس د ډکونې جوړښت Belegungsstruktur von Matrizen

د صفر سره مختلف ماتریکس توکو $a_{i,j}$ د تنظیم سره سم د لاندې ترمخ توپیر کوي

اول – دیاگونالماتریکس: $a_{i,j} = 0$ د $i \neq j$ لپاره،

باند ماتریکسونه Bandmatrizen: د لپاره د سره د صفر نه مختلفو ماتریکسونو د دیاگونالو شمېر، چې د باند سور په څېر په نڅښه کيږي یا نومول کيږي،

پورته (کښته) مثلث ماتریکسونه: $a_{i,j} = 0$ د $i > j$ (لپاره) $i < j$

په ټولیزه توګه یو $(m \times n)$ - ماتریکس ضعیف ډک شوی، که فقط

توګي $c \max(m, n)$ د صفی سره نامساوي وي، د یوې نه ډېرې لوی ثابتې c سره.

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

اورتوګونال او یونیتار ماتریکسونه Orthogonale und unitäre Matrizen

یو کمپلکس $(n \times n)$ - ماتریکس A یونیتار بلل کیږي، که ولرو

$$A^{-1} = \overline{A}^t = A^*,$$

دا په دې معنا چې که د A متي د $\mathbb{C}^n$ یو اورتوگونال بنسټ جوړ کړي. د حقيقي ماتریکسونو لپاره (لکه په سکالار ضرب کې) کمپلکس کنجیګیشن،

$$A^{-1} = A^t,$$

او سری د یوه اورتوگونال ماتریکس څخه غږیږي.

اورتوگونال (یونیتار) ماتریکسونه د $(\text{GL}(n, \mathbb{C}))$ یو لاندې - برخگروپ جوړوي لیکونکي: ایپ، هیولیک

د هادامارد — ماتریکسونه Hadamard-Matrisen

د $n = 2^k$ لپاره تر سکالار کېدنو پورې اورتوگونال ماتریکسونه شتون لري د H_k د $n \times n$ بعد په $\{-1, 1\}$ کې د لیکنو سره داسې په نامه هادامارد ماتریکسونه. د هاداماد لومړی ماتریکسونه دي:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

رکرنیز الج

په ټولیزه توګه ماتریسونه د ریکورزیون

$$H_{2k} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$$

سره جوړکړي.

لیکونکي: اپ، هیولیګ

د فوریر (ویننه: فوری) ماتریکسونه Fourier-Matrizen

د توان جوړولو له لارې د یوون - یا واحد ریښې

$$w_n = \exp(2\pi i/n)$$

سری داسې په نامه فوری ماتری:س لاس ته راوړي

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0 \cdot 0} & \dots & w_n^{0 \cdot (n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1) \cdot 0} & \dots & w_n^{(n-1) \cdot (n-1)} \end{pmatrix}.$$

دا د نورمي کولو ($W_n \rightarrow W_n/\sqrt{n}$) پسې یونیتار دي، دا په دې معنا چې

$$W_n^* W_n / n$$

یوون - یا واحد ماتریکس دی.

لیکونکي: اپ، هیولیګ

کرنییز الجبر

د متو اورتوگونالیتی ساده ازمايل کيږي. د $(j+1)$ - مو او $(k+1)$ - مو متو سکالار ضرب

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{\ell j} \overline{w_n^{\ell k}} = \sum_{\ell} w_n^{(j-k)\ell} = \frac{w_n^{(j-k)n} - 1}{w_n^{j-k} - 1},$$

دی، او داچې $w_n^n = 1$ دی، نو صورت یا ماتېاندي صفر دی.

لیکونکي: اپ، هیولیک

د $n = 4$ لپاره $w_4 = \exp(2\pi i/4) = i$ دی، او سړی لاس ته راوړي

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

په 2 د وېشنې وروسته W_4 یونیتار دی، دا په دې معنا چې

$$\left(\frac{1}{2}W_4^*\right)\left(\frac{1}{2}W_4\right) = E.$$

له دې امله د فوريي ماتریکسونو د سیومتري والی له امله $W_4^* = \overline{W_4}^t = \overline{W_4}$ دی.

لیکونکي: اپ، هیولیک

نورم ریښتوني یا - وفاداره اورتوگونال او یونیتار ماتریکونه

Normtreue orthogonaler und unitärer Matrizen

یو حقیقي (کمپلکس) ماتریکس A ټیک هلته اوتوگونال (یونیتار) دی، که دا د هر وکتور اوکلید (اقلیدس *euklidische*) نورم انواریانت پریږدی:

$$|Av| = |v|.$$

لیکونکي: اپ، هیولیک

بسیا کوي، چې کمپلکس حالت وڅیړو، چې حقیقي حالت په بر کې نیسي.

اول - A یونیتار ده، نو باور لري

$$(Ay)^*(Ax) = y^* A^* Ax = y^* x$$

پس په ټولیزه توګه د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب لاس ته راځي، چې د نورمرینتووالی په بر کې لري.

دویم - د نورمرینتووالي څخه لومړی لاس ته راځي، چې د A د متي وکتور v_j د

یوون وکتورونو e_j د عکسونو نورم یوی خوندي لري. د دې لپاره چې وښایو چې مختلفي

$$\lambda = \exp(i\vartheta)$$

متي اوتوگونال دي، نو، ټاکو، داسې چې لرو:

$$(\lambda v_k)^* v_j \in \mathbb{R}.$$

پسې د نورمرینتووالی او اقلیدس نورم تعریف په بنسټ لرو

$$2 = |e_j + \lambda e_k|^2 = |v_j + \lambda v_k|^2 = |v_j|^2 + |\lambda|^2 |v_k|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda v_k)^* v_j = 2 + 2 \bar{\lambda} v_k^* v_j,$$

په تعقیب باید په بنی لور سکالار ضرب ورک شي.

لیکونکي: اپ، هیولیک

ځیوکلکيکي (تلپیرته راگر ځېدونې) ماتریکسونه Zyklische Matrizen

د ځیوکلکيکي ماتریکسونو مټې د لومړۍ مټې د ځیوکلکيکي راکښنې له لارې جوړیږي:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

د ماتریکسونو ضرب سره ځیوکلکيکي جوړښت ساتلی یا خوندي پاتې کیږي.

لیکونکي: اېپ، هیولیگ

د یوه ځیوکلکيکي ماتریکس-ضرب $C = AB$ توکی دي:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{i-j \bmod n} b_{j-k \bmod n}.$$

د اچې

$$\{0, \dots, n-1\} = k + \{0, \dots, n-1\} \bmod n,$$

کېدی شي سړی په زیاتوونو (د جمعې اجزاوو) د j په ځای $j+k$ ځای په ځای $i-k \bmod n$ فقط د $c_{i,k}$ په واک کې دي.

لیکونکي: اېپ، هیولیگ

د ځیوکلکيکي ماتریکسونو

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ضرب دا لاندې څپوکلیکي ماتریک دی:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 18 & 11 & -23 \\ -23 & 18 & 11 \\ 11 & -23 & 18 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

ستونبناستیکی ماتریکسونه

یو $(n \times n)$ -ماتریکس ستونبناستیکی بلل کیږي، که $p_{i,j} \geq 0$ وي او

$$\sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

ستونبناستیکی ماتریکس د احتمالوالو x_i تغیر بنایي د لاندې له مخې:

$$x'_j = \sum_i x_i p_{i,j}.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

د P د بنویونو په بنسټ x' هم یو د احتمالوالي وکتور دی، دا په دې معنا چې

$$x'_j \geq 0, \quad \sum_j x'_j = 1.$$

دا نه کمښتوالی یا نه منفيوالی څرګند دی او د جمعې انوارینت له لاندې څخه تعقیبېږي:

$$\sum_j \sum_i x_i p_{i,j} = \sum_i x_i \underbrace{\sum_j p_{i,j}}_{=1}.$$

لیکونکي: اپ، هیولیک

دیترمینانت د انتیسیومتری کرنییز فورم په حیث

Determinante als antisymmetrische Multilinearform

د یوه مربع ماتریکس A دیترمینانت

$$\det A = \det(a_1, \dots, a_n)$$

د متی a_j سره کېدی شي د لاندې خویونو له لارې تعریف شي.

اول – ډېر کرنییزوالی

$$\det(\dots, \alpha a_j + \beta b_j, \dots) = \alpha \det(\dots, a_j, \dots) + \beta \det(\dots, b_j, \dots).$$

دویم - انتیسیومتری:

$$\det(\dots, a_j, \dots, a_k, \dots) = -\det(\dots, a_k, \dots, a_j, \dots).$$

دریم - نورمي کونه

$$\det(e_1, \dots, e_n) = 1, (e_k)_\ell = \delta_{k\ell}.$$

د دې قانون سره دېترمینانت د n —ځله ضرب سره وده کولی شي:

$$\det A = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n},$$

د کوم سره چې د $(1, \dots, n)$ په ټولو ځای بدلونو $(i_1, \dots, i_n)$ سره جمعه کړي او σ د ځای بدلونونو سره مخښه ښایو.

سری دا لاندې لیکدود هم استعمالوي

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

لیکونکي: هیولیگ، هیونر

د زیاتیدونو (د جمعی اجزاو) د تعداد د جگیدو له امله ($n!$ ځای بدلونونه شتون لري) د دېترمینانت د عملي انځورونو لپاره ښه مساعدنه دی. مگر دا تړلی د تعریف شوو خویونو تړلی (د عملیو له لارې) دا د ښوونې او د نوروو خویونو د لاس ته راوړلو لپاره اړین دي. له دې امله دا د ورته (برابر ازبسته) تعریف لپاره ورکړشوی دی.

لومړی ښایو، چې غوښتل شوي خویونه مو اړین د دېترمینانت وديزونې ته بیایي، په اړینه توګه د برموتیشن په مرستې.

د دې سره د A متي د یوون — یا واحد وکتورونو e_i د کرښیز کمبینیشنونو په حیث انځوروي:

$$a_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i .$$

د ډېر کرنییزوالي په بنسټ باور لري:

$$\det A = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \underbrace{\det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})}_{=: d_i} .$$

دا جمعه لکه چې لاس ته راځي کیدی شي ساده شي. که له دې دوه یوون - یا

واحدوکتورونه برابر وي، نو د انتیسیومتری په بنسټ d_i صفر دی:

$$\det(\dots, e_k, \dots, e_k, \dots) = -\det(\dots, e_k, \dots, e_k, \dots) .$$

که ټول i_ν مختلف وي، دا په دې معنا چې

$$(i_1, \dots, i_n)$$

یو پرموتیشن دی د $(1, \dots, n)$ ، نو صدق کوي

$$d_i = (-1)^{\tau(i)} ,$$

د کوم سره چې $\tau(i)$ مودولو 2 د بدلونونو یواځنی ټاکلی تعداد (ګڼون) په نڅېنه کوي ،
د کوم لپاره چې واحدوکتور په کانونیکي لړۍ پرلپسې راوړی شو. ځای بدلون د مخنځنې
تعریف پسې دی:

$$\det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sigma(i) \det(e_1, \dots, e_n) = \sigma(i) ,$$

دا په دې معنا چې سړی ورکړ شوی وډیزینه لاس ته راوړي.

برعکس کېدی شي و ازمایو، چې وديزینه د غوښتونې قانون سره تړلې ده. ډېرکرنیز والی باور لري، ځکه چې په ضرب

$$a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}$$

کې د هرې متې ټیک یو توکی منځ ته راځي. انتی سیومتری لاس ته راځي، ځکه چې د متو له بدلون دبدلولو تعداد کانونیکي لړۍ پرلپسې په یو تغیر خوري، بالاخره په واحد ماتریکس کې جمعه په یوه زیاتوونې (د جمعی غړي) کمیري

$$a_{1,1} \cdots a_{n,n} = 1 \cdots 1 = 1$$

لیکونکي: هیولیگ، هیونر

2 - لیکیزه دیترمینانت 2-reihige Determinante

د یوه -ماتریکس دیترمینانت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

دی.

دا د برموتیشن وديزینې پسې په ساده ډول لیدل کیږي، ځکه چې 2 زیاتیدونی شتون لري.

دبدیل په توګه کېدی شي دیترمیناتونه د تعریف شوو خویونو له مخې هم و شمېرل شي.

که متې د کانونیکي واحد وکتور (یوون-) e_k کرنیز کمبینیشن په څېر انځور شي، نو د مولتی (ډېر-) کرنیزوالي له امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \det(ae_1 + ce_2, be_1 + de_2) &= a \det(e_1, be_1 + de_2) + c \det(e_2, be_1 + de_2) \\ &= ab \det(e_1, e_1) + ad \det(e_1, e_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ cb \det(e_2, e_1) + cd \det(e_2, e_2) \\
 &= ab \cdot 0 + ad \cdot 1 + cb \cdot (-1) + cd \cdot 0 = ad - bc.
 \end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، هیونر

د ساروس شیما یا شکل Sarrus-Schema

د یوه (3×3) - ماتریکس دیترمینانت لکه څنګه چې په تابع یا فنکشن کې ښوول شوی د ضربونو جمعه ده، چې مختلف دیاګونالونه (دوه کونجترې) په ګوته کوي:

$$\begin{aligned}
 &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\
 &\quad - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}
 \end{aligned}$$

دې د ساروس په نامه یادې شوې شیما ته ورته د n جګ بعدي لپاره شتون نه لري. سملاسي د $n = 4$ دیترمینانت د 24 ضربونه یوه جمعه لري.

د ساروس-شېما په ساده توګه د ځای بدلون وديزیبڼه پسي په ساده توګه و آزمایي. لاندې جدول ټول زیاتوونې یا جمعی اجزای ښایي همداسې دا د ځایبدلون i سره اسوځیږي بدلونې، له کومو چې دا مخنځېنه σ لاس ته راځي.

i	بدلونونه	$\sigma(i)$	Summand

	Vertauschungen		زیاتیدونی یا د جمعی اجزا
(1, 2, 3)		+	$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$
(2, 3, 1)	$\rightarrow (3, 2, 1) \rightarrow (1, 2, 3)$	+	$+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$
(3, 1, 2)	$\rightarrow (2, 1, 3) \rightarrow (1, 2, 3)$	+	$+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$
(3, 2, 1)	$\rightarrow (1, 2, 3)$	-	$-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$
(1, 3, 2)	$\rightarrow (1, 2, 3)$	-	$-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$
(2, 1, 3)	$\rightarrow (1, 2, 3)$	-	$-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$

لیکونکی: هیولیگ، هیونر

لوریز حجمونه (ډکي) Orientiertes Volumen

د یوه حقیقي ماتریکس A دیترمینانت مطلق ارزښت د -بعدي سره چې له متو څخه غزیدلی شپات (Spats) سره پراپر دی یا یو په بل پریوځي:

$$|\det A| = \text{vol} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i : 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\} = \text{vol} (A[0, 1]^n) .$$

لیکونکی: هیولیگ، هیونر

کرنییز الجبر

ساده از مایل کیدی شي، چې لوریز حجمونه یا ډکي

$$\text{vol}_* A := \text{sign}(\det A) \text{vol}(A[0, 1]^n)$$

ټول درې د دیترمینانتونو تعریف شوي خوږونه (مولتی کرنییزوالی، انتي سیومتری، نورمي ونه) لري، له دې امله باید باور ولري:

$$\text{vol}_* A = \det A$$

لیکونکي: هیولیگ، هیونر

په $\mathbb{R}^3$ کې د وکتورونو u, v, w لپاره دیترمینانتونه د شپات ضرب سره سر خوري یا برابر دی:

$$\det(u, v, w) = [u, v, w].$$

د بدیل په قسم دا کېدی شي د ε -تتخوړ ε -Tensors - سره افاده شي:

$$\det(u, v, w) = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j w_k.$$

که وکتورونه د بېلگې په توگه و ټاکل شي

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

نو شپات ضرب لاس ته راځي.

$$(2, 1, 1) \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right) = (2, 1, 1) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 1 - 1 = 4.$$

د ε - تنځور سره لاندي انځورونه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \det(u, v, w) &= \varepsilon_{1,2,3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + \varepsilon_{1,3,2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \varepsilon_{2,1,3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \\ &\quad + \varepsilon_{2,3,1} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \varepsilon_{3,1,2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \varepsilon_{3,2,1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 8 - 2 - 2 + 1 + 1 - 2 = 4. \end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليگ، هيونر

د ديترمينانتونو لپاره قاعدې Regeln für Determinanten

د $(n \times n)$ - ماتريکسونو A او B لپاره صدق کوي:

$$\det A = \det A^t, \quad \det A^* = \overline{\det A}$$

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

-
-
-
- A ټيک هلته **انورټير ور** يا معکوس کېدونکي ده، که $\det A \neq 0$ وي،
او

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

لیکونکي: هیولیک، هیونر

اول – د سیومتری خویونه د ځای بدلون پسې وډیزوني څخه لاس ته راځي:

$$\det A^t = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n}.$$

که د جمعې اجزا سره اندکسونه یا پیژند نڅنې $\{1, \dots, n\}$ هر یو په لړۍ پرلپسې و i ته معکوس ځای بدلون j سره و وځلوو، نو د تابع یو تغیر شوی نظم لاس ته راوړو:

$$a_{j_1, i_{j_1}} \cdots a_{j_n, i_{j_n}} = a_{j_1, 1} \cdots a_{j_n, n}.$$

داچې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو مساوي وډیزینه لاس ته راځي، لکه د $\det A$ لپاره.

د بیلگې په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

یو بل ته معکوس ځای پلونونه دي په ځیکلیکي لیکډول او

$$a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} = a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} = a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} = a_{j_1,1} a_{j_2,2} a_{j_3,3}.$$

که د زیاتیدونو یا د جمعې د اجزاو ا ینکسونو یا پیژندنڅنې $\{1, \dots, n\}$ کې وځلي هر یو په لړۍ پرلپسې و i ته په څټ یا برعکس بدلونونه یا پرموتیشنونه j ته، نو فنکشن یو تغیر شوي نظم راکوي.

$$a_{j_1, i_{j_1}} \cdots a_{j_n, i_{j_n}} = a_{j_1, 1} \cdots a_{j_n, n}.$$

دا چې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو سرب مساوي يا باربه وده لاس ته راوړي لکه $\det A$.

د بیلگې په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

یو بل ته په ځیکلیکي لګندود په څټ يا معکوس پرموتیشنونه يا ځای بدلیدني دي، او

$$a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} = a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} = a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} = a_{j_1,1} a_{j_2,2} a_{j_3,3}.$$

مخنځنه σ مثبت ده او هر ځل، ځکه چې

$$i = (1\ 3) \circ (1\ 2), \quad j = i^{-1} = (1\ 2) \circ (1\ 3),$$

دا په دې معنا چې د بدلونون شمیره (ګنون) هر ځل 2 دی.

دویم – که معکوسوړ نه وي، نو ضرپوالی د دریم خوي څخه لاس ته راځي.

$\det A \neq 0$
د لپاره ښوول کيږي، چې تابع

$$B \mapsto f(B) := \det(AB) / \det(A)$$

تو د دیترمینانت ک ټاکونکي خویونه لري، په تعقیب د $\det B$ سره باید برابر وي.

نورمي کونه $f(E_n) = 1$ څرګنده ده. د ډېرکرنیزوالي او انټیسیومیټري لپاره په پام کې نیسو، چې فنکشن (تابع) $B \mapsto AB$ کرنیزه ده د B په مټو کې او دا چې د دوه مټو بدلون د AB د اړونده مټو بدلون په ګوته کوي.

دریم – یو مربع ماتریکس A ټیک هلته نامعکوسوړ ده، که د یوه نه ساده وکتور x لپاره

$$Ax = 0 \quad \text{وي، دا په دې معنا چې که د } A \text{ د د مټو یو نه ساده کرنیو کمپینیشن } a_j \text{ شتون ولري:}$$

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0.$$

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0.$$

په ورکړ شوي حالت کې د متو وکتور ځای بدلون څه کېدی شي چې ونيسو، دا په دې معنا $x_1 \neq 0$

$$a_1 = y_2 a_2 + \cdots + y_n a_n, \quad y_j = -x_j / x_1.$$

د ضربوالي څخه لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{j=2}^n y_j \det(a_j, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

ځکه چې ټولې په بني لور دېترمينانټونه دوه برابري متې خوندي لري، بايد د انتی سيومتري له امله ورکې شي يا له منځه ولاړې شي.

دا چې د انورټير وړ invertierbaren (په څټور) ماتريکس دېترمينانټ د صفر سره برابر نه دی، د يوه له متو خواړه شوي غبرگ اړخيز لوريز حجم په حيث دېترمينانټ د $\det(A^{-1})$.

هندسي تشریح څخه لاس ته راځي. بالاخره دا همداوس د لپاره ښوول شوي ضربوالي څخه لاس ته راځي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د ځانگړو ماتريکسونو دېترمينانټونه

Determinanten spezieller Matrizen

د يوه $(n \times n)$ - ماتريکس A لپاره دېترمينانټونه ترلي ورکول کيږي

• مثلث ماتریکس: که $a_{i,j} = 0$ د $i < j$ لپاره یا $i > j$ لپاره وي، نو باور لري

$$\det A = a_{1,1} \cdots a_{n,n}.$$

• بلوک دیاگونال ماتریکس: که ماتریکس B بلوک جوړښت د $A_{i,j} = 0 \quad i \neq j$ سره ولري او مربع دیاگونال بلوکونه $A_{i,i}$ ، نو باور لري

$$\det B = \prod_{i=1}^k \det A_{i,i}.$$

• اورتوگونا او یونیتار ماتریکسونه: د یوه یونیتار میاتریکس U لپاره باور لري

$$|\det U| = 1.$$

د یوه اورتوگوناال ماتریکس $(u_{i,j} \in \mathbb{R})$ لپاره ځانگړی دی

$$\det U \in \{-1, 1\}.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

مثلث ماتریکس: دا چې $\det A = \det A^t$ دی، بسیا کوي چې پورته مثلث ماتریکس $(1, \dots, n)$ وڅېړو. د دځای بدلون i لپاره، کوم چې کټمټوال (ایدنټیټي) نه دی.

، لاس ته اړخي، چې لږ تر لږه يو توکي $i_k > k$ د سره بايد ورکړ شوی وي، دا په $a_{i_k, k} = 0$ دې معنا چې داسې جمعه راکميري، د کټمټوالي ورکړه، او ديترمينانت د دياگونال توکو د ضرب څخه ورکول کيږي.

بلوکدياگونال ماتريکسونه: لومړی فقط يو وېش په 2 دياگونالبلوکونو راپرو چې n_2 او n_1 لري، نو دا بسيا کوي، چې په ځاي بدلون چې ور جمعه کړو يا ورېيات کړو، کوم چې لومړي توکي د خپل ځانونو ترمنځ او له دې سره هم اکر توکي د خپل ځانونو ترمنځ بدل کړي، ځکه چې نور مو پاتېدونو يا د جمعي اجزاو 0 ته بيايي. دا د جمعي پاتي اجزاوې د لومړيو n_1 توکو يوه ځايبدلون k او د اخرو n_2 توکو يو ځاي بدلون l د ضرب په څير ليکل کيږي:

$\sum_{i \in S_n} \sigma(i) (a_{i_1, 1} \cdots a_{i_{n_1}, n_1}) (a_{i_{n_1+1}, n_1+1} \cdots a_{i_n, n})$	=	$\det B$
$\left(\sum_{k \in S_{n_1}} \sigma(k) (a_{k_1, 1} \cdots a_{k_{n_1}, n_1}) \right) \left(\sum_{l \in S_{n_2}} \sigma(l) (a_{n_1+l_1, n_1+1} \cdots a_{n_1+l_{n_2}, n_2}) \right)$	=	
$\det A_{1,1} \det A_{2,2} .$	=	

ايندوکټيو له دې څخه يوه وينا لاس ته رورل کيږي له دوه بلوکونو څخه په ډېرو يوې ويشنې لپاره.

اورتوگونال او يونيتار ماتريکسونه: دا چې کمپلکس کنجوگيشن په جمعي ضرب سره منځ ته کوي او $\det U = \det U^t$ صدق کوي، نو د ديترمينانت د ضربوالي څخه لاس ته راځي

$$1 = \det E = \det (U^* U) = \det U^* \det U$$

$$= \overline{\det U^t} \det U = \overline{\det U} \det U = |\det U|.$$

په حقیقي حالت کې دیترمینانت حقیقي ده او له دې امله فقط 1 او -1 ممکن دي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

د دیترمینانتو بڼه بدلون Umformung von Determinanten

د یو ماتریکس دیترمینانتونه د دوه برابرو متو او یا دوه برابر و لیکو سره صفر دي. له دې په ځانګړې توګه لاس ته راځیو چې دیترمینانتونه تغیر نه خوري، که که سړی د یوې متې (لیکې) یوې بلې متې (لیکې) ته ورزیات کړي یا ورجمعه کړي لیکونکي : هیولیک، هیورنر

دا چې د ترانپوني حالت کې د یوه ماتریکس مټه په لیکې بدلیري او $\det A = \det A^t$ صدق کوي، دنو بسیا کوي، چد متو حالت وڅیرو.

د دوه متو د بدلولو سره باید دیترمینانت د تعریف له مخې مخخښه بدله کړي. که دواړه کټمټ متې یو د بل سره بدلې کړی شي ماتریکسونه ځان نه بدلوي او دیترمینانتونه باید صفر وي.

که λ - ځله د متې a_j و متې a_i ، $i \neq j$ ته ور زیاته یا جمعه شي، نو لاندې ماتریکس لاس ته راځي

$$A' = (a_1, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_j, \dots, a_n).$$

د کرښیز کمبینیشن په بنسټ کېدی شي دیترمینانت و وېشل شي یا توتیه شي په

$$\det A' = \det (a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) + \lambda \det (a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n).$$

دویم ماتریکس دوه کټمټې متې لري او له دې امله دا دیترمینانت صفر لري.

لیکونکي : هیولیگ، هیورنر

د یوه ماتریکس د یوې لیکې ډیرواره د ماتریکس د بلې لیکې سره زیاتولو یا جمعه کولو له لارې کېدی شي ماتریکس په مثلث بڼه باندې واپړول شي او دیترمینانت بیا د دیاگونال توکو د ضرب له لارې وگټل شي یا لاس ته راول شي.

که د متو یا لیکو بدلون صورت ونیسي، مخنځینه تغیر خوري.

د بیلگې په توگه کېدی شي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

لکه چې تعقیبوي وشمېرل شي.

دریمه لیکه ترې کم یا منفی د لومړۍ لیکې درې ځله راکوي :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

د دویمې متې او څلورمې متې بدلون:

$$\det A = - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 3 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

دریمه لیکه ورزیات دویمه لیکه، څلورمه لیکه ترې کم دویمه لیکه راکوي:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (-2)) = 24.$$

لیکونکي : هیولیگ، هیورنر

د دیترمینانتو ودیزینه Entwicklung von Determinanten

د یوه $(n \times n)$ - ماتریکس A دیترمینانت کېدی شي د یوې په خوښه مټې یا لیکې پسې ودیزینه کړي.:

د لیکې k پسې ودیزینه	$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$
د درز یا مټې l پسې ودیزینه	$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$

چیرته چې $\tilde{A}_{i,j}$ هغه ماتریکس په گوته کوي، کومه چې د A د i -مې لیکې، j -مې مټې د کرښې کولو (په کرښه کولو له منځه وړنې) له لارې منځ ته راځي.

لیکونکي : هیولیگ، هیورنر

د $\det A = \det A^t$ له امله بسیا کوي، چې ودیزینه د یوې مټې پسې تر څپرې لاندې ونیسو.

- مه مټه په مټو

$$a_l = \sum_{i=1}^n a_{i,l} e_i$$

توټه کوو، د دیترمینانتونو د ډېرکرنییزوالي په اساس لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,l} \det \underbrace{(a_1, \dots, a_{l-1}, e_i, a_{l+1}, \dots, a_n)}_{=B_i}.$$

یو ماتریکس B_i ترڅېړنې لاندې نیسو، نو کېدی شي د دې لپاره د $n-l$ مټه بدلونونو له لارې l -مه مټه اخر ته راوړل شي، بې له دې چې د نورو مټو لږېرلېسې په خپلو منځونو کې تغیر شي.

په ورته توګه کېدی شي i -مه لیکه د $n-l$ لیکه بدلونونو سره اخري لیکې ته راوړل شي:

$$\det B_i = (-1)^{n-l} (-1)^{n-i} \det \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & \tilde{A}_{i,l} & & 0 \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \end{pmatrix}$$

د بني اړخ دیترمینانت کې فقط د S_n ځای بدلونونه ونډه اخلي، چې د n -مې لیکنې په خپل n لري. دا د S_{n-1} ځای بدلون بڼایي او له دې سره دی

$$\det \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & \tilde{A}_{i,l} & & 0 \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \end{pmatrix} = \det \tilde{A}_{i,l}.$$

د زیاتونو د جمعي اجزاوو ضرب د $1 = (-1)^{2l+2i-2n}$ سره د ورکړ شوي وډیزېښي فرمول ورکوي.

که د ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لپاره دیترمینانت د لومړۍ لیکې پسې وډیزینه شي، نو لاس ته ترې راځي

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2(4 - 1) - 1(2 - 1) + 1(1 - 2) = 6 - 1 - 1 = 4. \end{aligned}$$

لیکونکي : هیولیگ، هیورنر

د 3 ټکو له لارې د یوې سطحې ایمپلیثیت (ساده) انځورونه

Implizite Darstellung einer Ebene durch 3 Punkte

په $\mathbb{R}^3$ کې یوه سطحه چې د درې ټکو

$$P_3 = (x_3, y_3, z_3) \quad P_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad P_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

له لاري ورکړ شوي وي، کېدی شي په ایمپلیسیت فرمول له

$$E : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

له انځور شي. د لومړۍ لیکې پسي وديزیښي سره لاس ته راځي

$$E : ax + by + cz = d$$

د لاندې سره

$$a = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad b = - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

لیکونکي: هیولیگ، شترایت

بنسټ از مایینت Basistest

وکتورونه $a_1, \dots, a_n \in K^n$ ټیک هلته یو بنسټ جوړوي، که د ماتریکس

$$A = (a_1, \dots, a_n)$$

دیترمینانتونه ورک نه شي.

لیکونکي: هیورنر

که د A لومړۍ لیکه صفر وي، نو غوښتنه (ثبوت) روښانه ده.

په بل حالت کې کېدی شي د متي یوه ځاي بدلون پسي ونیسو یا فرض کړو، چې

$$a_{1,1} \neq 0 \quad \text{اومتی } a_j \quad \text{لکه څنګه لرو بڼه بدل کړو:}$$

$$a_j \rightarrow d'_j = a_j - \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} a_1, \quad j = 2, \dots, n.$$

دا د متو عملیو کارولو له لارې کېدی شي د متو دیترمینانت او هم د بنسټ خویونه بې تغیره پاتې شي. دا بڼه بدل شوی ماتریکس لاندې بڼه لري

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ c & & B & \end{pmatrix}.$$

د ودیزېښې جملې پسې لرو

$$\det A' = a_{1,1} \det B,$$

او دا چې $a_{1,1} \neq 0$ د A' متې ټیک هلته یو د K^n بنسټ دي، که د B متې یوه د K^{n-1} بنسټ دي. دا غوښتنه کېدی شي اندوکتیو و ښوول شي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

د بیلگې په توګه له

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کېدی شي د بنسټ ازماښت روښانه شي.

که د متو یا لیکو څخه یو یې فقط له صفر جوړ وي، نو د دیترمینانت لپاره 0 ترې لاس ته راځي. په دې حالت کې د ماتریکس رانګ ماګسیمال 1 دی او له دې امله متې بنسټ نه جوړوي.

په بل حالت کې له $ad = bc$ لاس ته راځي

کرنییز الجبر

$$a \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - ba \\ ad - bc \end{pmatrix} = 0$$

او له دې سره مټې کرنییز بلواک دي.

که د مټې کرنییز بلواک وي، نو صدق کوي:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},$$

دیترمینانت شمېرل کي. ي و ته:

$$\det A = ad - bc = a\lambda c - \lambda ac = 0.$$

لیکونکي : هیولیگ، هیورنر

د واندروموند – دیترمینانتونه Vandermonde-Determinante

په n ټکو x_i کي ارزښت شوي مونومونو $1, x, \dots, x^{n-1}$ دیترمینانت دی

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

لیکونکي : هیولیگ، هیورنر

د $n = 2$ لپاره د واندروموند – ماتریکس دیترمینانت دی

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1.$$

د یوه ټولیز n لپاره د ټولو نورو لیکو څخه لومړۍ لیکه کمیري:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

د لومړۍ متې پسې وديزېښې سره راكوي

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix},$$

د کوم سره چې له k -مې لیکې څخه ضریب $x_k - x_1$ رادباندي کیدی شي:

$$\left(\prod_{k=2}^n (x_k - x_1) \right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i} x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i} x_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 + x_n x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i} x_1^i \end{vmatrix}.$$

که د هرې متې څخه دا د مخه تېرې شوې متې دا x_1 - ځله کم کړو، نو بېرته پیل ښي دېترمینانت لاس ته راځي

$$\left(\prod_{k=2}^n (x_k - x_1) \right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

، او فرمول د اندکشن له لارې ښوول کېدی شي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

کرنبیز مساوات سیستم $\text{Lineares Gleichungssystem}$

په یوه تن یا جسم K کرنبیز مساوات سیستم دا لاندې بڼه لري

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \Leftrightarrow Ax = b$$

د یوه ضریبونو د ماتریکس $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$ سره، د نامعلومو $x_j \in K$ او $b \in K^m$ یو ښی اړخ سره.

دا کرنبیز مساوانسیستم هوموجېن بلل کېږي، که $b = 0$ وي، پرته له دې ناهوموجېن inhomogen بلل کېږي.

د یوه حقیقي ($K = \mathbb{R}$) یا کمپلکس ($K = \mathbb{C}$) کرنبیز سیستم لپاره K اکسپلیسیټ explizit نه شي ورکول کېدی. دا چې کوم حالت مخ ته لرو د اړوندوالي له مخې لیدل کېږي یا روښانه دی.

که کرنبیز مساوات سیستم کوم حل نه لري (په ټولیزه د لپاره)، نو دا باندې- ټاکلی بلل کېږي. په دې حالت کې له اندولپراېلم څخه غږیږو. یو کرنبیز مساوات سیستم د $m > n$

نا یواحني حل سره (په ټوليزه توگه د $m < n$ لپاره) کښته - - يا لاندې- ټکلی بلل کيږي.

يوه تابع $f(x)$ کيدی شي له داتن

$$(x_i, f_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

څخه د انترپولیشن له لارې په نږدې توگه بيا جوړه rekonstruiert شي. که يوه کرښيزه ځاي په ځاي کونه يا ايښوونه

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{j=1}^n c_j p_j(x)$$

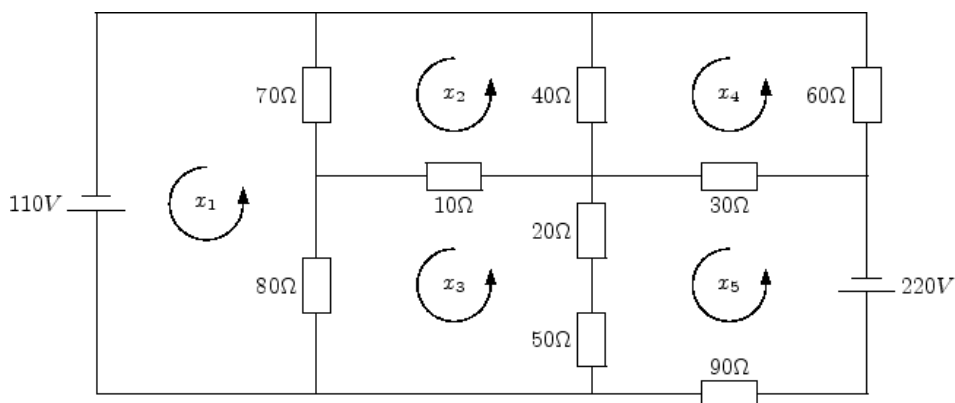
د مناسب بنسټوابعو p_j سره، نو د انترپولیشن شرایطو څخه

برېښنايي جرياندايره Elektrischer Schaltkreis

که په يوه بريناجريان دايره (گردی) کې د x_i سره د دايرې برېښناجران وښايو د جريانلور د ساعتخښه ووني (عقربک) مخامخ يعنې معکوس، د سره د i - مې او j - مې پټی گسره دې يا مشترک مقاومت، د $R_{i,j}$ سره او د U_i سره ايښوولی Kirchhoff او کيرښهوف Spannungen ، نود او Ohm قانون څخه دا کرښيز مساوات سيستم لرو

$$\sum_{i \sim 0} x_i R_{i,0} + \sum_{i \sim j} (x_i - x_j) R_{i,j} = U_i.$$

دلته $i \sim j$ معنا ورکوي، چې i -م او j -م د برېښنا پټۍ یو گډ مقاومت لري. د دې مقاومت له لارې برېښنا جریان دی. د $i \sim 0$, $R_{i,0}$ سره مقاومت ښوول کیږي چې هغه فقط په i -مې پټۍ کې پروت دی.



د بیلګې په توګه د څېره شوي جریان داېرې (ګردۍ) لپاره کرنبیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 150 & -70 & -80 & 0 & 0 \\ -70 & 120 & -10 & -40 & 0 \\ -80 & -10 & 160 & 0 & -70 \\ 0 & -40 & 0 & 130 & -30 \\ 0 & 0 & -70 & -30 & 190 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -220 \end{pmatrix}.$$

د ضریبونو ماتریکس په دیاګونال کې د یوې پټۍ پورې اړونده مقاومت او ځای یا (i, j) Position د i او j ګمیز یا منفي گډ مقاومت. د دې راوړل شوي بېلګې حل دی:

$$x \approx \begin{pmatrix} 1.0157 \\ 0.5641 \\ 0.0358 \\ -0.0940 \\ -1.1595 \end{pmatrix}.$$

لیکونکی: اپ، هیولیگ

د یوه کرښیز مساوات سیستم حلوروالی

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

په یوه تن یا جسم K د یوه هموجین کرښیز مساوات سیستم حلېږی

$$Ax = 0,$$

د یوه $m \times n$ ضریبونو ماتریکس A یوه د K^n لاندې – یا برخېږی U ده.

که دا هموجین کرښیز سیستم

$$Ax = b$$

یو حل v ولري، نو د تولید حل لپاره باور لري

$$x \in v + U,$$

دا په دې معنا چې حلېږی د K^n یو affinen لاندې – یا برخېږی ده. په ځانګړې

کرنییز الجبر

$$U = \emptyset$$

توگه کېدی شي هوموچېن کرنییز مساوات سیستم هیڅ ، یو
 $\dim U > 0$
 حلونه ولې.

لیکونکي: اپې، هیولیگ، کیمرلي

که x, y د هوموچېن کرنییز مساوات سیستم حلونه وي او $\lambda \in K$ ، نو لاس ته راوړو:

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

همداسي

$$A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda 0 = 0 ,$$

دا په دې معنا چې د هوموچېن کرنییز مساوات سیستم د حلونو ډېری یوه لاندې-یا
 برخضا U جوړوي.

که v د هوموچېن کرنییز مساوات سیستم یو حل وي او $u \in U$ ، نو $x = v + u$ د

$$Ax = A(v + u) = Av + Au = b + 0 = b$$

له امله هم د دې هوموچېن کرنییز مساوات سیستم یو حل دی.

برعکس د ناهوموچېن کرنییز مساوات سیستم د دوه حلونو v او w سره کمښت یا
 تفریق $v - w$ د

$$A(v - w) = Av - Aw = b - b = 0$$

له امله هوموچېن کرنییز مساوات سیستم یو حل دی.

له دې سره د یوه ناهوموچېن کرېنیز مساوات سیستم ټول حلونه لاس ته راځي، داسې چې د ناهوموچېن کرېنیز مساوات سیستم د خوښې حلونو لپاره د ټولو هوموچېن کرېنیز مساوات سیستم حلونو جمعه جوړه کړو، یعنې سره جمعه کړو.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

دا لاندې ساده حالتونه د کرېنیزو مساواتو مختلف ډولونه د لیدنې کوي:

لومړۍ – کرېنیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 60 \end{pmatrix}$$

یواځنې حلونه لري: $x_1 = 8$, $x_2 = 1$

دویم – کرېنیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

یواځنې حل نه لري. که $x_3 = t$ په خوښه وټاکو، نو $x_2 = 2t$, $x_1 = 2$ د حلونو په څېر لاس ته راځي.

دریم - کرېنیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

کرنبیز الجبر

کوم حل نه لري. اخرنی لیکه $x_2 = 4$ راکوي، که دا په یوه لیکه کې کېښوول شي، د لومړۍ لیکې څخه $x_1 = 2$ لاس ته راځي، له دویمې څخه برعکس $x_1 = 1$ لیکونکي: اپې، هیولیگ

دیترمینانت او د یوه مساوات سیستم حل‌والی

Determinante und Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

یو کرنبیز مساوات سیستم

$$Ax = b$$

د مربع ضریبونو ماتریکس A سره ټیک هلته یو یواځنی حل لري، هر ښي لوری b سره، که همداسې دا هوموچېن سیستم $Ax = 0$ فقط یو ساده حل $x = 0$ ولري.

که $\det A = 0$ وي، نو یو حل فقط د ښي لوري b لپاره شتون لري په هغه د A د متو څخه غزېدلي لاندې – یا برخضا ده. په دې حالت کې حل یواځنی نه دی.

لیکونکي: کرایخ، هیولیگ

غوښتنه د دیترمینانت د خویونو څخه په لاس راځي.

و $\det A \neq 0$ ته ورته لرو، چې د A متې $a_1, \dots, a_n$ کرنبیز خپلواکي دي. د تعریف سره سم دا په دې معنا دی چې

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0,$$

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

د دې لپاره چې د ناهوموچېن سیستم یواځنې حل وړوالي ته ورته لاس ته راوړای شو، له دې کار اخلو چې متي یو بنسټ جوړ کړي، دا په دې معنا چې هر بنی اړخ b د

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b \Leftrightarrow Ax = b$$

کرنیز کمېنېشن په حیث

یواځنې انځور وړ دی.

لیکونکي: اپې، هیولیگ

دا کرنیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$ad - bc \neq 0$$

وي. په دې حالت کې

ټیک هلته یو یواځنې حل لري، که دېترمینانت حل په لاندې ډول دی

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc}, \quad y = \frac{av - cu}{ad - bc}.$$

که دېترمینانت $ad - bc$ برابر 0 وي، په توپیزه توګه کرنیز مساوات سیستم حل نه لري. په دې حالاتو کې یواځنې حل شتون لري، که

$$av = cu$$

او

کرنییز الجبر

$$bv = du$$

صدق ولري. که د بېلگې به توگه $a \neq 0$ وي، نو کېدی شي y په خوښه وټاکو اود x لپاره لاس ته راوړو

$$x = \frac{u - by}{a}.$$

لیکونکي: پپ، اهیولیگ

د کرامر قاعده Cramersche Regel

د یوه مربع کرنییز مساوات سیستم $Ax = b$ لپاره

$$x_i \det A = \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

دی، د کوم a_j سره چې د متوضریونو ماتریکس A په نڅېنه کېږي.

په ځانگړې توگه کېدی شي د $\det A \neq 0$ لپاره په څټ یا معکوس $C = A^{-1}$ د

$$c_{i,j} = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det A}$$

له لارې ټاکل کېدی شي.

لیکونکي: هیولیگ، شترایت

د دیترمینانت د ډېرکرنیزوالي او سیومتری له امله لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n) &= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \sum_{j=1}^n a_j x_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= x_i \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)\end{aligned}$$

په ځانګړي توګه د $b = e_j$ سره د معکوسي j -مه مټه $x = (c_{i,j}, \dots, c_{n,j})^t$ راګوي

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د یوه (2×2) - ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

د معکوس C لپاره د کرام قاعدې سره لرو

$$\begin{aligned}c_{1,1} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{d}{\det A}, & c_{1,2} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-b}{\det A}, \\ c_{2,1} &= \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-c}{\det A}, & c_{2,2} &= \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A},\end{aligned}$$

کرنییز الجبر

همداسي د $\det A = ad - cb$ سره دا لاندې لرو

$$\det A = ad - cb$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ليکونکي: هيوليگ، شتر ايت

د (3×3) - ماتريکس

$$(3 \times 3)$$

د معکوس G لپاره د کرامر د قانون له مخې لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{25}, \quad c_{1,3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{25},$$

$$c_{3,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{25}, \quad \dots$$

رکرنیز الج
تول داسي دي

$$A^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 12 & 1 & 8 \\ -14 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليگ، شترایت

په خټ لور خای په خای کول Rückwärts-Einsetzen

په یوه کرښیز مساوات سیستم کې د پورته مثلث -بڼې سره

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix}}_R \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

د $\det R = r_{1,1} \cdots r_{n,n} \neq 0$ سره کړی شو ناټاکلي $x_n, \dots, x_1$ یو پر بل پسې وټاکو:

$$r_{n,n}x_n = b_n \rightarrow x_n = b_n/r_{n,n}$$

او د $\ell = n - 1, \dots, 1$ لپاره ،

$$r_{\ell,\ell}x_\ell + \cdots + r_{\ell,n}x_n = b_\ell, \rightarrow x_\ell = (b_\ell - r_{\ell,\ell+1}x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n}x_n)/r_{\ell,\ell}.$$

کرنیز الجبر

له دې سره به هر یو دا اوس معلوم شمېل شوي ارزښتونه $x_{\ell+1}, \dots, x_n$ و کارول شي.

په یوه مساوات سیستم کې د یوه لاندې مثلث ماتریکس کې کېدې شي په ورته توګه یو په بل پسې $x_1, \dots, x_n$ و ټاکل شي.

د کرنیز مساوات سیستم

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 7x_3 &= 7 \end{aligned}$$

لپاره په ملټ بنې کې د په څټ ایښوونې له لارې حلونه لاس ته اخی

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = (0 - 2)/2 = -1$$

$$x_1 = (6 - 3(-1) - 1) = 2.$$

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د ګاوس ترانفورمیشن Gauß-Transformationen

لاندې عمليې د کرنیز مساوات سیستم د حلونو ډېری بې تغیره پریږدي:

• د دوه مساواتو بدلونه

- یوه مساوات ضربونه د یوه ضریب $\neq 0$ سره.
- د یوه مساوات کمول له یوه بل مساوات څخه

د اورو دوه عملیو د کمینېشن له لارې د یوې لیکې ډېرواره زیاتول یا جمعه کول و بلې لیکې ته عملیې دي چې اجازه لري یا پرینوول شوې عملیې دي.

د داسې په نامه گاوس ترانسفورمېشن په مسته کزدي شي *sukzessive* یا یو په بل پسې ناکلې له منځه یووړل شي او یو کرېنیز مساوات سیستم په مثلثفورم ترانسفورمه کړو یا په بله بڼه واوو او بیا یې په څټ اېښوونې له لارې حل کړو.

لیکونکي: هیولیگ، شترایت

د کرېنیز مساوات سیستم

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 11 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 6x_1 - x_2 - 5x_3 &= -8 \end{aligned}$$

حل ځان ته تغیر نه ورکوي له

• د لومړي او دویم مساوات بدلونه

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 11 \\ 6x_1 - x_2 - 5x_3 &= -8 \end{aligned}$$

• د دویم مساوات ضربونه د 2 ضریب سره

کرنیز الجبر

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

• د دریم مساوات کمول یا تفریقول له دویم مساوات څخه

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ & & -3x_2 & + & 9x_3 & = & 30 \end{array}$$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د گاوس د له منځه وړنه Gauss-Elimination

د گاوس – بڼه بدلون له لارې کېدی شي یو کرنیز مساوات سیستم د انعکاس وړ

($n \times n$)
 -ضریبماتریکس به ماکسیمال
 پلونو (قذمونو) په پورته مثلث بڼه
 باندې واړول شي یا راوړو. د دې لپاره یو په بل پسې د دیاگونال لاندې کښته ضریبونه
 له منځه یوسو دا په دې معنا چې له
 پلونو (قذمونو) وروسته دا ک م س (کرنیز
 مساوات سیستم) لاندې بڼه غوره کوي:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} x_1 & + & a_{1,2} x_2 & + & \dots & + & a_{1,\ell} x_\ell & + & \dots & + & a_{1,n} x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2} x_2 & + & \dots & + & a_{2,\ell} x_\ell & + & \dots & + & a_{2,n} x_n & = & b_2 \\ & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \\ & & & & & & a_{\ell,\ell} x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell,n} x_n & = & b_\ell \\ & & & & & & a_{\ell+1,\ell} x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell+1,n} x_n & = & b_{\ell+1} \\ & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \\ & & & & & & a_{n,\ell} x_\ell & + & \dots & + & a_{n,n} x_n & = & b_n \end{array}$$

په یوگوني ډول ℓ -م له منځه وړنې پل داسې ځغلي لکه لاندې .

- که دا -م دیاگونال توکی، داسې په نامه د پيوت-تونی Pivot-Element، صفر دی، نو ℓ -م به د یوه دې لاندې مساواتو سره بدل شي، داسې چې $a_{\ell,\ell} \neq 0$ به باور ولري...
- د لپاره به i -م مساوات څخه د ℓ -م مساوات ډېر واره کم شي، داسې چې $a_{i,\ell}$ صفر شي:

$$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - q_i a_{\ell,j}, \quad b_i \leftarrow b_i - q_i b_\ell \quad (q_i = a_{i,\ell} / a_{\ell,\ell})$$

د ټولو $j \geq \ell$ لپاره.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د کرښیز مساوات لپاره

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د گاوس الگوریتم په لاندې توګه ځغلي:

- د لومړۍ او دویمې لیکې پدلول:

کرنییز الجبر

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

• (3 لیکه) - (1 لیکه) او (4 لیکه) - (1 لیکه) 2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• (لیکه 2) + (لیکه 3):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• (لیکه 3) - (لیکه 4) 3 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

لیکونکی: هیولیگ، شترایت

د ایسیلون بڼه Echelon-Form

یو کرښیز مساوات سیستم د یوه $(m \times n)$ - ضریب ماتریکس سره کېدی شي د گاوس ترانفورمیشن سره د ایښلون-فورم باندې یې بڼ بدلې یا وارول شي:

$$Ax = b \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \dots 0 & p_1 & * \dots * \\ & 0 & 0 \dots 0 & p_2 & * \dots * \\ & & & 0 & 0 \dots 0 & p_3 & * \dots * \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

له دې سره داسې په نامه پيووت

$$p_1 = a'_{1,j_1}, \dots, p_k = a'_{k,j_k}, \quad k \leq m, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n,$$

د صفر سره نابرابرې دي او k د A رانگ ی.

د k - ترانفورمیشن پل په لاندې ډول ځغلي:

- یو له صفر مختلف ماتریکس توکی p_k د خورا کوچنی متي ایندکس (پېژندنځېني $\geq k$) سره او لیکي اندکس (د لیکي پېژند نځېنه) د پيووت توکی په حیث ټاکل کيږي او د لیکو بدلون له لارې پوزیشن (k, j_k) ته راوړل کيږي. که پيووت توکی شتون نه لري، نو د ایښلون پڼه مو لاس ته راوړې ده.

- د k لیکي ډېرواره کمون یا تفریق له لارې د پيووت لاندې لور ته د ماتریکس توکی له منځه ځي.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د ماتریکس

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

لپاره ترنفورمیشن د اینسلون-فورم باندې په لاندې ډول ځغلي

1. د لومړۍ او دویمې لیکې بدلون:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2. (3. لیکه) - 2 · (1. لیکه) und (4. لیکه) + (3. Zeile)
1. لیکه: (Zeile)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

3. (3. Zeile) - (2. Zeile), (4. Zeile) - (2. Zeile)

او (5. Zeile) - (2. Zeile)

په پورته کې Zeile د لیکې یا میلی په معنا دي.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. (3. Zeile): $-\frac{1}{2}$ (4. Zeile) -

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

د ایښلون - فورم لري ناساده لیکي د پیووت ټوکو $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ او $p_3 = -10$ سره.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د ایښلون- بڼه د یوه ل م س (کرنیز مساواتسستم) حل

Lösung eines LGS in Echelon-Form

یو کرنیز مساوات سیستم $Dx = c$ د ایښلون په بڼه،

$$\begin{pmatrix} 0 \dots 0 & p_1 & * \dots * \\ & 0 & 0 \dots 0 & p_2 & * \dots * \\ & & 0 & 0 \dots 0 & p_3 & * \dots * \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

کرنبیز الجبر

د پيووت $p_1, \dots, p_k$ سره ټيک هلته حلور دی، که $c_{k+1} = \dots = c_m = 0$ وي.

حل يواځنی دی، که $k = n$ وي. د $k < n$ لپاره د هوموجين کرنبیز مساوات سيستم $(c_i = 0)$ ټيک $n - k$ کرنبیز خپلواک حلونه شته .

نا معلومي، چې بې له پيووت يې مټې په گوته کوي. کېدی شي ازادي يا په خوښه و ټاکل شي.

ليکونکي: هيوليگ، شترایت

په لاندې کې به زيات تيويکي حالتونه تر بحث لاندې راوړل شي.

$$k = n = 4 \quad .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د په خټ ايښوونې له لارې ریکورزيو يواځنی حل لاس ته راوړی شو.

$$x = (1, -1, -1, 1)^t.$$

$$c_4 \neq 0 \quad 3 = k < n = 5 \quad .$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

په اخرنی لیکه کې $0 \cdot x = 1$ ترې لرو، له دې سره کرښیز مساوات سیستم کوم حل نه لري.

$$c_4 = 0 \quad 3 = k < n = 5$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

دا چې $c_{k+1} = 0$ ، نو کرښیز مساوات سیستم $Dx = c$ حلور دی

د $\text{Rang } D = 3 = n - 2$ له امله حل x یواځنی نه دی. دلته د دوه

کرښیز خپلواک حلونه v_i شتون لري د هوموجین سیستم او د تولید حل لاندې بڼه

$$x = x_s + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \alpha_j \in \mathbb{R}$$

لري د هوموجین سیستم یو ځانګړی حل x_s سره.

وکتورونه v_i د پيووت پورې نه اړه لرونکو نامعلومو د کانونیکي (بڼه یز: کنوني) ټاکنې له لارې معلوموي یا ټاکي او پاتې ضریبونه په هوموجین سیستم باندې:

$$r_{e,e}x_e + \cdots + r_{e,n}x_n = b_e, \rightarrow x_e = (b_e - r_{e,e+1}x_{e+1} - \cdots - r_{e,n}x_n) / r_{e,e}.$$

یو خانکری حل

$$x_s = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د $x_3 = x_5 = 0$ ایښوونې له لارې لاس ته راځي.

لیکونکي: هیولیگ، شترایت

رانگ او د ک م س (کرنییز مساواتسیستم) حل وړوالی

Rang und Lösbarkeit von LGS

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m.$$

وي دې .

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m.$$

Sei

• کرنییز مساوات سیستم $Ax = b$ یو حل لري

$$\iff \text{Rang } A = \text{Rang}(A, b).$$

• کرنییز مساوات سیستم $Ax = b$ یواځنی حل وړ دی

$$\iff \text{Rang } A = \text{Rang}(A, b) = n.$$

• کرنییز مساوات سیستم $Ax = b$ ډېر حلونه لري

$$\Leftrightarrow \text{Rang } A = \text{Rang}(A, b) = k < n.$$

دلته په پام کې ولری، چې د A رانگ او د غزېدلي ماتریکس A اینواریانت دي د ساده بڼې بدلون سره. له دې امله کېدی شي و نیول شي یا فرض شي کرښیز مساوات سیستم به ایښلون-بڼه دی. به دې بڼه کېدی شي نتیجې ترلې ولوستل شي.

د انډول کرښه (انډولکرښه) Ausgleichsgerade

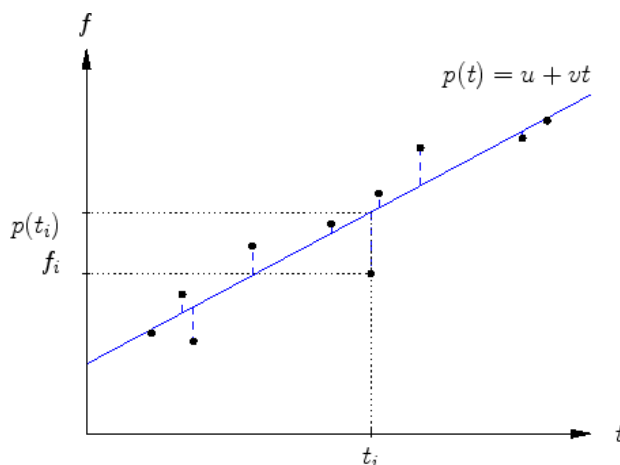
پوه کرښه

$$p(t) = u + vt,$$

، چې دانتونه $i = 1, \dots, n$ ، به خورا ښه توکړه approximiert کوي، کېدی شي د ناتیګاوي مربع جمعې کمښت

$$\sum_{i=1}^n (f_i - p(t_i))^2$$

له لارې پیدا کړی شي.



کرنییز الجبر

د محوربرخي u او جگېدنې v لپاره لاندې فرمولونه راكوي

$$u = \frac{(\sum t_i^2)(\sum f_i) - (\sum t_i)(\sum t_i f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}$$

$$v = \frac{n(\sum t_i f_i) - (\sum t_i)(\sum f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2},$$

كه لږ تر لږه دوه پراته ارزښتونه يا قيمتونه t_i ورك شي يعنې صفر وي.

ليكونكي: اپ، هيوليگ

د مينيموم سره بايدد غلطی مربع جمعي مشتق هم د u او v هم د پسي صفر وي:

$$0 = 2 \sum_i (u + vt_i - f_i)$$

$$0 = 2 \sum_i t_i (u + vt_i - f_i).$$

دواړه مساوات د ماتريكس په بڼه په لاندې ډول دي

$$\begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_i \\ \sum t_i f_i \end{pmatrix}.$$

كه لږ تر لږه دوه t_i مختلفي وي، نو ديترمينانت ده:

$$\underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \text{ mal}} |(t_1, \dots, t_n)^t|_2^2 - \left(\sum_i 1 \cdot t_i \right)^2 > 0,$$

او سړی د کرامر د قاعدې سره ورکړ شوی حل لاس ته راوړي
لیکونکي: اپپ، هیولیگ

د برابرۍ حل یو بل سره یوځای کیدل یا یو بل پر یو تلو، کرښو مساوات سیستم

Ausgleichslösung überbestimmter, linearer Gleichungssysteme

که د یوه کرښو مساوات سیستم $Ax = b$ ښی خوا b وي د $(m \times n)$ - اتریکس A متو کرښو هیولی یاسپاین کې خوندي نه وي (په تیپیکي ډول د $m > n$ لپاره)، دا په دې معنا چې وي

$$\text{Rang } A < \text{Rang } (A, b),$$

نو مساوات سیستم حل نه لري. سړی د یوه د پاسه ټاکلي سیستم څخه خبرې کوي. په دې حالت کې کېدی شي یو اپروکسیمیشن د برابرۍ پر اېلم

$$|Ax - b| \rightarrow \min$$

له لارې و ټاکل شي.

د برابرۍ حل شمېرل د نور مالو مساوات یا سینګولار ارزښتونه کونې په مرسته ممکن یا شونې دی

لیکونکي: اپپ، هیولیگ

الجبر - کرنییز مساوات سیستم-برابرونی پر اہلم

Algebra - Lineare Gleichungssysteme – Ausgleichsprobleme

نورمال مساواتونه Normalgleichungen

د یوه په خوښه $m \times n$ – ماتریکس A لپاره هر د برابرونی پر اہلم

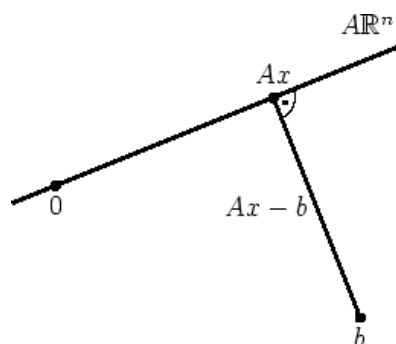
$$|Ax - b| \rightarrow \min$$

هر حل x نورمالیز – مساواتونه

$$A^t Ax = A^t b,$$

پوره کوي، دا په دې معنا چي

ریزیدووم $r = Ax - b$ Residuum اور توگونال دی د A د متو څخه غزېدلي
لاندېضا $\text{Bild } A$ سره



ځمکچیز یا هندسي مساوات معنا لري، چي ریزیدووم $r = Ax - b$ د ماتریکس A
په متو نیغ ولاړ دی یعنې عمود دی.

ماتریکس $A^t A$ مربعیه ده او پراخېدونۍ یا بعد n لري. دا ټیک هلته معکوسوړ ده کله

$$\text{Rang } A = n$$

چې وي، دا په دی معنا چې کله د A متي کرښيز خپلواکي وي. نورماليز-مساوات د سينگولار حالت کې هم حلور دی، خو حل يې يواځنی نه دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

له

$$|A(x + ty) - b|^2 \geq |Ax - b|^2$$

د

$$(Ax - b)^t y = y^t (Ax - b), \quad r = Ax - b$$

سره برابر ارزښته نامساوات

$$2ty^t A^t r + t^2 y^t A^t A y \geq 0$$

لاس ته راځي د ټولو $t \in \mathbb{R}$ او وکتورونو y لپاره. که د نابرابرون کين اړخ په t کې د پارابول په څېر ونيول شي، نو نه منفيوال (نه کميزوالي) د

$$y^t (A^t r) = 0.$$

سره به يوه معنا دي.

دا ټیک هلته د ټولو وکتورونو y لپاره صدق کوي، که په نوکانو کې افاده (وینه) صفروکتور وي.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

د

کرنییز الجبر

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لیاره نورمال مساوات لاس ته راځي

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته راځي

دا کرنییز مساوات سیستم ثواځني حل $x = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right)^t$ لري. ریزیووم $r = (1 \quad -2 \quad 1)^t$ دي.

که A کرنییز بلواکي متي ولري، لکه په بېلگه کي

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

نو نورمالو-مساوات سیستم سینگولار دي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

حل

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

په دې حالت کې یواځني نه دي، مگر ریزیدووم

$$r = \left(\frac{6}{5} \quad -\frac{12}{5} \quad 0 \right)^t .$$

لیکونکي: اپې، هیولیگ

توموگرافي Tomographie

لکه څنګه په فنکشن یا څیرونه (mappingتابع) کې ښوول شوي دي، په کمپیوتر-توموگرافي Computer-Tomographie کې د حجرو غړو ټینګوالي (غلظت)

$$x(u, v)$$

بیا جوړیږي، په کومه کې چې د ګڼوالي یا ټینګوالي بایلیدنه (کمښت) Intensitätsverlust د رونتګن وړانګو د k کودې له ℓ غبرګو کرښو

$$\mathcal{R}_i : (u_i, v_i) + \mathbb{R}(\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i), \quad i = 1, \dots, m = k\ell,$$

کچ کیږي. سري د ټینګوالي وېش د یوه ټوټه ډوله ثابتې تابع approximiert کوي

سری د ټینګوالیخوړونه د یوه ټوټه ډوله یا ټوټه په ټوټه ثابتو له لارې اپروکسيمي کوي د

مربعو $\mathcal{Q}_j$ په پاتې شونو او ګڼوالي کچه ونو د نږدې ونې له لارې کټلي کرښیز ا نتيګرال څخه.

$$b_i = \int_{\mathbb{R}} x(u_i + t \cos \vartheta_i, v_i + t \sin \vartheta_i) dt \approx \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j,$$

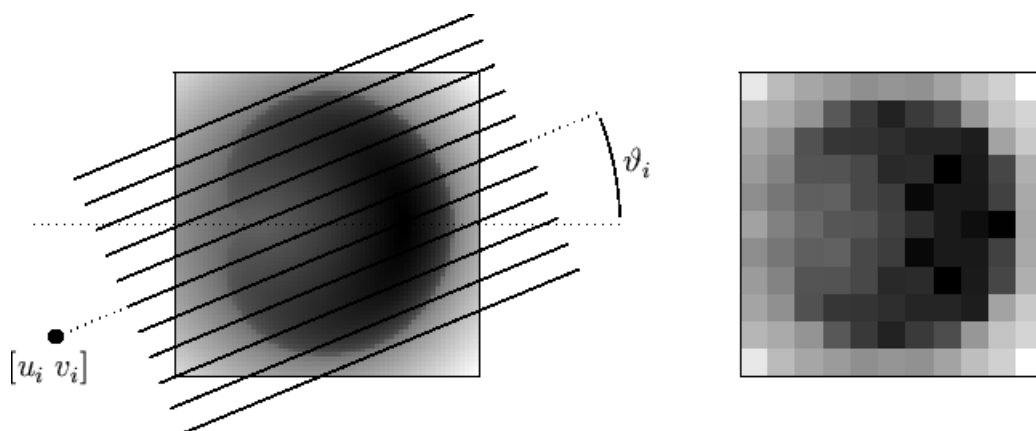
چیرته چې x_j د $x(u, v)$ یو اپروکسیمیشن دی په $\mathcal{Q}_j$ او

$$a_{i,j} = |\mathcal{R}_i \cap \mathcal{Q}_j|$$

د کرنیز Q_j R_i سره غوڅي يا تقاطع اوږدوالی په گوته کوي. دا چې د کچوونو تعداد يا گڼون په ټوليزه توگه ډېر لوي دي نسبت د راستر (هغه تخته چې څيره پرې کښل کيږي) څلوريو او شنتيگرالونه چې ټيک نه شي شميرل کيدی، د داتا b څخه د x ټاکلوته سړی يو برابر واليز يا د انډول پرابلم سره مخامخ کيږي.

دالاندې ژباړي دلته راکاپي کړي (دا لاندې دې همداسې په انگرېزي پاتې وي):

» The word "raster" has its origins in the Latin *rastrum* (a rake), which is derived from *radere* (to scrape). It originally referred to the raster scan of cathode ray tube (CRT) video monitors, which paints the image line by line by magnetically steering a focused electron beam. By association, it came also to refer to a rectangular grid of pixels. See also *rastrum*, a device for drawing musical staff lines پای»



پورته بني لور ته څيره په يوه 11×11 راستر شميرلی نږدېوالی بني کيږ څيره شوی ټينگوالي خورونه (غلظت-) بني. له دې سره د کونج

$$\vartheta = 0, \pi/16, \pi/8, \dots$$

لپاره 11 غبرگ سکن-لوري د راستر مربع سور باندې کارول شوي.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

آیگن-ارزبنت او آیگو-وکتور Eigenwert und Eigenvektor

یو سکالار λ د یوه مربع ماتریکس A آیگو-ارزبنت بلل کیږي، که وي:

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

وکتورونه $v \neq 0$ د $Av = \lambda v$ سره و آیگن-ارزبنته λ ته آیگن-وکتورونه بلل کیږي. آیگن-وکتورونه و آیگن-ارزبنت ته د صفر وکتور سره یوځای یوه کرښیزه فضا جوړوي، داسې په نامه د λ آیگن-فضا

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda E)$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر، کیمرلی

ماتریکسونه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

آیگن-ارزبنتونه $\lambda_1 = 0$ او $\lambda_2 = 2$ لري، ځکه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

کرنییز الجبر

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

لیکونکی: هیولیگ، هیورنر

لاندې بېلگې د (2×2) ماتریکسونو لپاره ممکنه حالتونه ښايي

• دوه حقیقي آیگن-ارزښتونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -1, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 3, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• یو حقیقي آیگن-ارزښت، دوه کرنییز خپلواک آیگن-زکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• یو حقیقي آیگن-ارزښت، یو آیگن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• دوه کنجوگیري کمپلکس آیگن-ارزښتونه او آیگن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = 1 \mp i, v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}.$$

لیکونکی: هیولیگ، هیورنر

لاندې بېلگې د کمپلکس (2×2) – متريکسونو لپاره ممکنه حالتونه څېړي.

• دوه آیگن-ارزښتونه اودوه آیگن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2 + i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -2 + i, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

• یو آیگن-ارزښت، دوه کرښیز خپلواک آیگن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• یو آیگن-ارزښت، یو آیگن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda = i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

ورته والي - ترانسفورمیشن Ähnlichkeitstransformation

د یوه مربعیز ماتریکس A په ورته والي ترانسفورمیشن

$$A \rightarrow B = Q^{-1} A Q,$$

کې آیگن-ارزښتونه ساتلي پاتېږي. آیگن-وکتورونه د اینورتیرو ماتریکس Q له لارې تشریح شوي بنسټ بدلون سره سم ترانسفورمي کیږي، دا په دې معنا، چې د A آیگن-

کرنییز الجبر

وکتور v و آيگن-ارزبنت λ ته و هممغسي د B آيگن-وکتور په گوته کوي و همغه بنسټ ته.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

که v د A يو آيگن-وکتور وي و آيگن-ارزبنت λ ته، يعني $Av = \lambda v$ ، نو د $w = Q^{-1}v$ لپاره لاس ته

$$Bw = Q^{-1}AQw = Q^{-1}AQQ^{-1}v = Q^{-1}Av = Q^{-1}\lambda v = \lambda Q^{-1}v = \lambda w.$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

لاندې مربع ماتريکس دي ورکړ شوی وي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

د آيگن-ارزبنت $\lambda_1 = 2$ او $\lambda_2 = 3$ او د لاندې اړونده آيگن-وکتور سره:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

يو ورته والي ترانسفورميشن د

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

سرہ راکوي.

د B آيگن-وکتورونه w_1 او w_2 د

$$w_1 = Q^{-1}v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

سرہ، همداسي

$$w_2 = Q^{-1}v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

سرہ شميرل کيري.

ليکونکي: هيوليگ، کرايخ

کرکترېستکي پولينوم Charakteristisches Polynom

د $(n \times n)$ – ماتريکس A آيگن-ازبستونه د کرکترېستکي پولينوم صفرونه دي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

په ځانگړې توگه د ماتبريکس آيگن – ارزښتونه د ترانسپوزيشن سره اينواريانت پاتي کيري.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر، کیمرلی

یو سکالار λ ټیک هلته د $(n \times n)$ -ماتریکس A آیگن-ارزبنت دی، که ولرو

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0,$$

دا په دې معنا چې که دا هوموژن کرنبیز مساوات سیستم $(A - \lambda E)v = 0$ یو له صفر مختلف حل ولري. دا حالت ټیک هلته لرو، که $(A - \lambda E)$ زینګولار وي یعنې که وي:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د آیگن – ارزبنتونو او - وکتونو شمیرنه

د دې لپاره چې د مربع ماتریکس A لپاره د آیگن-ارزبنت پرابلم حل کړو، لومړی د کرکترېستیکي پولینومونو آیگن-ارزبنتونه λ د صفر ځایونو په حیث ټاکي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

د هر آیگن – ارزبنت λ لپاره له دې سره اړوند آیگن – وکتور v لاس ته راوړو د هوموژن کرنبیز مساوات سیستم د یوه ناټریویال په څېر

$$(A - \lambda E)v = 0.$$

د دې لپاره چې د آیگن-فضا V_λ لپاره یو بنسټ لاس ته راوړو، سړی کړی شي دا سیستم په ایښلون-فرمول ترنسفورمی کړو.

$$\dim V_{\lambda} = 1$$

په ټولیزه توګه دى. دا تر یوه سکالار ضییب یواځنى ټاکلى آيګن-وکتور v کېدى شي هلته وټاکل شي ، په کوم کې چې د وکتورونو v مناسب کمپوننتونه له مخه ورکړي

ليکونکي: هیوليګ، کرايخ

د ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

د آيګن - ارزښت د ټالکو لپاره کرکټیستیکى پولینوم جوړوو

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 - 4 + 8 - 2\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4.$$

او د ده صفرخايونه ټاکي. د ګومان له مخې (د مطلق ارزښت غړي پروېشونى يا مقسوم علیه) د لومړي صفرخاى په څېر $\lambda_1 = 2$ لاس ته راځي. د دې صفرخاى وېشنه

$$(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4)/(\lambda - 2) = -\lambda^2 + 2\lambda - 2,$$

او په لانې فرمول (دنييمې شپې فرمول په نامه بلل شوى) کې يې خاى په خاى کوو ترې لرو

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{-2} = 1 \pm i.$$

کرنښیز الجبر

یو آیگن – وکتور و آیگن – ارزښت 2 ته کیدی شي د هوموجین مساوات سیستم

$$(A - 2E)v = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

حلونو له لارې وټاکل شی. حل $v = (1, 0, -2)^t$ ساده لیدل کیږي

یوه آیگن-ارزښته $1 + i$ ته یو آیگن – وکتور w_1 له دې لاندې لاس ته راوړو:

$$(A - (1 + i)E)w_1 = \begin{pmatrix} -1 - i & -2 & -1 \\ 2 & 1 - i & 1 \\ 0 & 2 & 1 - i \end{pmatrix} w_1 = 0.$$

او داسې د پزلگڼه به تګه $w_1 = (-1 - i, -1 + i, 2)^t$ دا A چې حقیقي ده، کېدی

شي و $\lambda = 1 - i$ ته آیگن-وکتور د کمبلکس کنجوګیشن له لارې جوړ شي:

$$w_2 = \overline{w_1} = (-1 + i, -1 - i, 2)^t$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

الجبری او هندسي ډېرځلوالی

Algebraische und geometrische Vielfachheit

که λ د $(n \times n)$ – ماتریکس A آيگن – ارزښت وي، نو دکرکترېستيکي پولینوم

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

د صفرخای په حیث د λ ډېرځلوالی د آيگن-ارزښت λ

الجبري m_λ ډېرځلوالی بللکيږي

د یوه آيگن – ارزښت λ د آيگن-فضا V_λ بعد یا پراخېدونی d_λ د λ هندسي ډېرځلوالی بلل کيږي. . ابور لري

$$d_\lambda \leq m_\lambda, \quad \sum_\lambda m_\lambda = n,$$

همداسې

$$d_\lambda = n - \text{Rang}(A - \lambda E).$$

ليکونکي: هیولیک، هیورنر، کیمرلي

ماتریکسونه

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ټول لاندې کرکترېستيکي پولینوم لري:

$$(4 - \lambda)^3 = (4 - \lambda)(5 - \lambda)(3 - \lambda) + 4 - \lambda = (4 - \lambda)^3 + 12(4 - \lambda) - 12(4 - \lambda)$$

او له دې سره هوار $m_4 = 3$ دی. د ماتریکس

کرنییز الجبر

$$(A_1 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_2 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(A_3 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

د رانگ په لړدو سره $d_4 = 3$ د A_1 لپاره، $d_4 = 2$ د A_2 لپاره او $d_4 = 1$ د A_3 لپاره پیژني لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د آیگن – ارزښتونو جمعه او ضرب

Summe und Produkt von Eigenwerten

د یوه $(n \times n)$ ماتریکس A د آیگن – ارزښت λ_i لپاره صدق کوي

Für die Eigenwerte λ_i einer $(n \times n)$ -Matrix A gilt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Spur } A, \quad \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A,$$

د کوم سره چې ډېرځله آیگن – ارزښتونه د الجبري ډېرځلوالی سره سم شمېرل کیږي.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د دیترمینانت د مولتی کرنیزوالی په اساس د کرکتریسټیکي پولینوم لپاره لاس ته راځي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + \text{Spur } A(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det A.$$

بلي لور ته پولینوم په لاندې بڼه

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)$$

انځوریدلای شي. د دویم فرمول په ضریبونه او د ضریبونو پرتله کونه دا ورکړ شوی کټمټوالی یا ایدنتیټي راکوي.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کرکتریسټیکي پولینوم

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

لي د لاندې صفرځایونو سره:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}.$$

که د آیگن - ارزښتونو جمعه تشکیل شي، دا ریښې افاده له څخه ځي، او لاس ته راځي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(a + d) + (a + d)}{2} = a + d = \text{Spur } A.$$

کرنییز الجبر

که آيگن – ارزبنتونه سره ضرب شي، نو د دريم بېنوم فرمول سره لرو:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{(a+d)^2 - (a+d)^2 + 4(ad-bc)}{4} = ad - bc = \det A.$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د ماتريکسونو ريښتونې فنکشنونه يا توابع

Rationale Funktionen von Matrizen

که د يوه ماتريکس A يو آيگن-ارزبنت λ د ريښتوني فنکشن

$$r(t) = \frac{p(t)}{q(t)} = \frac{a_0 + a_1 t + \dots}{b_0 + b_1 t + \dots},$$

قطبځای نه وي، نو $r(\lambda)$ د

$$r(A) = q(A)^{-1} p(A) = p(A) q(A)^{-1}.$$

آيگن – ارزبنت دی.

په ځانگړي توگه λ^k د توان-ماتريکس A^k آيگن – ارزبنت دی او $1/\lambda$ د معکوس کېدونکي ماتريکس A^{-1} يو آيگن-ارزبنت دی.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

له $Av = \lambda v$ د $k \geq 0$ لپاره لاس ته راځي چې $A^k v = \lambda^k v$ او په ټولیزه توګه

$$\left(\sum_k c_k A^k \right) v = \left(\sum_k c_k \lambda^k \right) v .$$

پسې صدق کوي

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda A^{-1} v ,$$

که A معکوس وړ وي

که λ د صورت پولینوم q صفر ځای نه وي. نو صدق کوي

$$q(A)v = q(\lambda)v, \quad q(A)^{-1}v = q(\lambda)^{-1}v ,$$

پس

$$q(A)^{-1}p(A)v = q(\lambda)^{-1}p(\lambda)v = p(A)q(A)^{-1}v$$

لکه څه مو چي غوښتل .

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د آیګن – وکتورونو بنسټ Basis aus Eigenvektoren

که یوه ماتریکس A ته د آیګن – وکتورونو v_j څخه یو بنسټ شتون ولري د آیګن –

ارزښت λ_j سره ، نو دی

کرنییز الجبر

$$V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad V = (v_1, \dots, v_n),$$

دا په دې معنا چې A نسبت و بنسټ $\{v_1, \dots, v_n\}$ ته دیاگونال بڼه لري.

لیکونکي: هیولی، اپپ

د بنوولو دی، چې

$$V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

باور لری، د لاندې سره ورته (برابر ارزښته) دی

$$AV = V \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n).$$

دا چې v_j د V مټه و λ_j ته د آیگن-وکتورونه دي، دا سملاسي لیدل کیږي

لیکونکي: هیولی، اپپ

ماتریکسونه

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

آیگن- ارزښتونه -2 ، -2 او 3 لري. اړونده آیگن-وکتورونه دې لگۍ به توگه دی:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

د $V = (v_1, v_2, v_3)$ سره لاس ته راځي

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: هیولی، اپپ

د ځیوکلېکي ماتریکسونو دیاگونالونه

Diagonalisierung zyklischer Matrizen

یو ځیوکلېکي $(n \times n)$ – ماتریکس A کېدی شي د پورېر-ماتریکس

$$W = (w^{jk})_{j,k=0,\dots,n-1}, \quad w = \exp(2\pi i/n),$$

په مرسته دیاگونالي شي.

$$\frac{1}{n} \overline{W} \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

د

$$\lambda_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-k\ell}, \quad \ell = 0, \dots, n-1,$$

سره د A آیگن – ارزښت دی.

لیکونکي: هیولی، اپپ

کرنییز الجبر

Aw_ℓ

سری ساده بسی شمېرلی شي، چې د W ℓ -مه مټه د A یو آیگن – وکتور دی. د j – م کمپوننت لپاره سری لاس ته راوړي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k \bmod n} w^{(k-j)\ell} w^{j\ell} = w^{j\ell} \sum_{k'=j-n+1}^j a_{k' \bmod n} w^{-k'\ell}.$$

دا اندکس یا پیژند نخښه مودولو سره ښوول کيږي، کېدی شي د جمعي کېدنې ورشو د $k' = 0, \dots, n-1$

سره ځای په ځای شي یا بدله شي. په تعقیب سره یې زیاتون یا

جمعه برابر په λ_ℓ ده، لکه چې غوښتل مو. له دې مو و ښوول چې لرو:

$$AW = W \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

دا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W$ یوتیتار دی، دا په دې معنا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W^* = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} W \right)^{-1}$ ، سری غوښتونکی ترانسفورمېشن په دیاگونال بڼه لاس ته راوړي

لیکونکي: هیولی، اپپ

د عمومي تیوري سره سم کیدی شي څیوکلیمي ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

د فوریر - ماتریکس

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

سره په دیاگونال بڼه واپړول شي (ترانسفورمي شي)

$$\frac{1}{4}\overline{W}AW = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

د $0, 2, 2, 4$ سره د A آيگن - ارزښت. دا چي A حقيقي دی باید کمپلکس آيگن-وکتورونه

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

(د W دويمه او څلورمه مټه) يو کډ آيگن-ارزښت ولري. داسي کېدی شي د کرښيز کمپينېشن له لاري د آيگن-وکتورونو لپاره يو حقيقي بنسټ تشکیل شي:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپې، هيوليگ

د ماتریکسونو توان $\text{Potenzen von Matrizen}$

که A د مطلق ارزښت سره سم یا - - ډوله خورا لوي آيگن- ارزښت λ د آيگن - وکتور v سره ولري، نو صدق کوي:

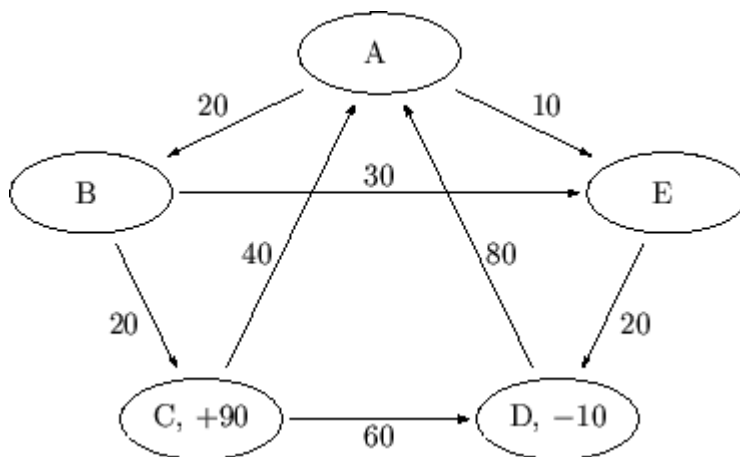
$$A^n x = \lambda^n (cv + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

که x يو ناتريويال کمپوننت د λ په آيگن-فضا کې ولري، دا په دې معنا چې

$$x = cv + w \quad c \neq 0 \quad v \nparallel w \quad \text{او} \quad \text{سر ه.}$$

ليکونکي : اېپ، هیولیک

دا تابع د مارکیتپرځي x_i د رقابت د فیرو ماگانو کلنی تغیر ښایي. په دې ترتیب فیرو ما A د 80% بېلگې په توگه د فیرو ما D د مارکیت برخه گټي او د فیرو ما C خپله د مارکیت برخه 90% د په شاوخوا کې لویه وي د نوي خرڅلاو امکانات پیدا کولو سره ، په همدې وخت کې د مارکیت برخې A او D ته له لاسه ورکوي.



د لیدځیري څخه د مارکیت نوي برخې (ونډه) رانیسو:

$$\begin{matrix} A \\ \text{نوی neu} \end{matrix} = 0.7A + 0.4C + 0.8D$$

$$\begin{matrix} B \\ \text{نوی neu} \end{matrix} = 0.5B + 0.2A$$

$$\begin{matrix} C \\ \text{نوی neu} \end{matrix} = 0.9C + 0.2B$$

$$\begin{matrix} D \\ \text{نوی neu} \end{matrix} = 0.1D + 0.6C + 0.2E$$

$$\begin{matrix} E \\ \text{نوی neu} \end{matrix} = 0.8E + 0.3B + 0.1A.$$

$$x = (A, B, C, D, E)^t \quad \text{له سره لاس ته راځي:}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} x.$$

x نوی neu

د ايتراشن ماتریکس د n -توان سره ضربولو د n کلونو وروسته د مرکټ ونډه راکوي.

نورمیري شوي وکتورونه x^0 د یوه آیگن- وکتور $\max^v$ (ماکس) پولې ته ځي) کونورگیريگي) د ماتریکس د ارزښت له مخې لوی آیگن ارزښت $\max^\lambda$ ته. سړی لاس ته راوړي $\max^\lambda = 1.1$ او دې ته اړوند ایگنوکتور

$$v_{\max} = (0.75, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5)^t.$$

کرنییز الجبر

د اوږده وخت لپاره بازار یا مارکیټ د A ه خوا ټاکل کيږي یا تعینيږي. په سلو کې برخې د $\max v$ د نورمي کولو له لارې لاس ته راځي یعنې، $\max \frac{\|v\|_1}{\|v\|_1}$ په دې توګه

$$A : 37.5\%, B, C, D : 12.5\%, E : 25\% .$$

لیکونکي: اپې، هیولیک

د فیبوناچي پرلپسې یا - ترادف Fibonacci-Folge

د فیبوناچي پرلپسې یا ترادفونه داسې پیژندلري یا تعریف دي:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

دا په دې معنا چې هره فیبوناچي پرلپسې د دواړو ترمنځ غړو زیاتونن یا جمعه ده.

د فیبوناچي لومړي عددونه دي:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \dots$$

سری د پیل ارزښت $a_1 = 1$ او $a_2 = 3$ ټاکي نو داسې په نامه لوکاس - Lucas عدد:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \dots$$

که دوه یو په بل پسې د فیبوناچي عددونه یوه وکتور

$$x_n = (a_n, a_{n-1})^t$$

ته سره یوځای شي، نو ریکورزیون د

$$x_{n+1} = Ax_n$$

په څیر د لاندې سره ولیکو:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

د ماتریکسلیکني په مرسته کېدی شي د فیبوناچي عدد دا اسیمپتوتیکي حالت وټاکل شي. د دې لپاره سری د A آيگن-ارزښتونه او آيگن-وکتورونه شمېري:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad v_{\pm} = \begin{pmatrix} \lambda_{\pm} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

که سری د ریکورزیون وکتورونه د v_+ کرښیز کمینېشن په حیث انځور کړي،

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}v_+ - \frac{1}{\sqrt{5}}v_-,$$

، نو لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_+ \lambda_+^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_- \lambda_-^{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n + o(\lambda_-^n). \end{aligned}$$

لیکونکي: اپې، هیولیګ

نورمال ماتریکسونه Normale Matrizen

یو کمپلکس ماتریکس A نورمال بلل کیږي، که

$$AA^* = A^*A,$$

وي، د $A^* = \bar{A}^t$ سره. په ځانګړې توګه یونیتار او هر میتیکي ماتریکسونه نورمال دي.

د حقیقي نورمال ماتریکسونو لپاره دی:

$$AA^t = A^tA,$$

کوم چې په ځانګړې توګه د اور توګونال او سیومتری ماتریکسونو لپاره پوره دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ، کیمرلی

د یونیتارو او هر میتیکي ماتریکسونو نورمالوالی ترلی له تعریف څخه لاس ته راځي.

د نوه یونیتار ماتریکس لپاره دی:

$$AA^* = AA^{-1} = E = A^{-1}A = A^*A.$$

د یوه هر میتیکي ماتریکس لپاره دی:

$$AA^* = AA = A^*A.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د نور مالو ماتریکسونو یونیتار دیاگونالي – یا دوه کونجټري کول

Unitäre Diagonalisierung normaler Matrizen

یو ماتریکس A ټیک هلته نورمال دی، که A یونیتار دیاگونال وړ وي، دا په دې معنا چې ، که وي:

$$U^{-1}AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

د کوم سره چې د U متي یو اورتونورمال بنسټ و آيگن – ارزښت λ_j ته له آيگن- وکتورونو تشکیل کړي.

لیکونکي: اپې، هیولیگ، کیمرلي

که

$$A = UDU^*, \quad U^* = U^{-1},$$

وي، نو نورمال دی، ځکه چې لرو:

$$\begin{aligned} AA^* &= (UDU^*)(UDU^*)^* = UD(U^*U)D^*U^* \\ &= U(D^*D)U^* = (UD^*U^*)(UDU^*) \\ &= A^*A. \end{aligned}$$

د دې معکوس کېدی شي د یوه اورتوکونال بنسټ شتون نسبت بعد ته د ایندکشن له لارې وښايي. د ایندکشن پل لپاره یو یونیتار ماتریکس V جوړوو د لاندې سره:

$$V^*AV = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right).$$

کرنییز الجبر

د اینکشن نیونی یا فرضیې له مخې کېدی شي B د یونټارماتریکس W له لارې په دیاگونال بڼه ترنسفورمې شي، داسې چې سړی χ په χ کولی شي:

$$U = V \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & W \end{array} \right)$$

د V دجوړښت یا کنسټرکشن ته د یوه نورمي آیگن – وکتور v څخه و آیگن- ارزښت λ ته χ او بردي

$$V = (v | \tilde{V}),$$

د کوم سره چې د $\tilde{V}$ متي وکتور v و اور توگونال بنسټ ته پوره کوي. لاس ته راځي:

$$V^* A V = \left(\frac{v^*}{V^*} \right) (\lambda v | A \tilde{V}) = \left(\frac{\lambda}{0} \middle| \frac{c^*}{B} \right).$$

بنوولو تهدومره پاتیري، چې B نورمال او $c = 0$ دی. دواړه د A د نوپمالیټي څخه لاس ته راځي. دا د ورته والي ترنسفورمیشن سره ساتلي پاتي کیریو ، پس د پورته مساوات د بني اړخ $\tilde{D}$ لپاره هم صدق کوي.

که

$$\tilde{D} \tilde{D}^* = \left(\frac{|\lambda|^2 + |c|^2}{Bc} \middle| \frac{c^* B^*}{B B^*} \right)$$

$$\tilde{D}^* \tilde{D} = \left(\frac{|\lambda|^2}{\lambda c} \middle| \frac{\bar{\lambda} c^*}{B^* B} \right),$$

تشکیل کړو، نو غوښتونۍ خویونه د پورته ماتریکسونو د دیاگونال بلوکونو د پرتلي له لارې لاس ته راځي. لیکونکي: اېپ، هیولیگ

$$A = \begin{pmatrix} 3 + 2i & 3 - 2i \\ 3 - 2i & 3 + 2i \end{pmatrix}$$

نورمال دي، چې د سیده شمېرني له لارې تصدیق کېدی شي.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix} = A^*A$$

د دې په تعقیب باید A یونیتار دیاگونالور وي. سری آيگن - ارزښتونه 6 او $4i$ لاس ته راوړي او اړونده نورمي آيگن-وکتورونه د بېلگې په توګه دي:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

د انتظار سره سم $v_1 \perp v_2$ دی، او د یونیتار ماتریکس $U = (v_1, v_2)$ سره دیاگونال ماتریکس لاس ته راځي:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 + 2i & 3 - 2i \\ 3 - 2i & 3 + 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: اپې، هیولیک

د هر میتیکي ماتریکسونو دیاگونال بڼه **Diagonalform hermitescher Matrizen**

دیوه هوموجېن ماتریکس A ($A = A^*$) آيگن-ارزښتونه λ_i حقیقي دي او د آيگن-وکتورونو v_i څخه یو اورتوګونال بنسټ شتون لري. په تعقیب

ده د یونیتار ماتریکس سره

$$U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

ده د یونیتار ماتریکس $U = (v_1, \dots, v_n)$ سره.

په ځنګړې حالت کې حقیقي سیومتریکی ماتریکسونو ($A = A^t$) آیګن-وکتورونه هم حقیقي دي.

لیکونکي: هیولیګ، رېل

یونیتار دیاګوناوړوالی په نورمالو ماتریکسونو د اړونده ټولیزې نتیجې څخه لاس ته راځي، هغه چې هر میتیکی حالت خوندي لري. د بڼولو دا پاتې دی چې آیګن – ارزښت λ حقیقي دی. که په ورته توګه v آیګن- وکتور وي، نو دا له لاندې لاس ته راځي:

$$\lambda v^*v = v^*(\lambda v) = v^*(Av) = (A^*v)^*v$$

$$= (Av)^*v = (\lambda v)^*v = \bar{\lambda}v^*v,$$

ځکه چې $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ لرو.

لیکونکي: هیولیګ، رېل

هر میتیکی ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ -1+i & 1 \end{pmatrix}$$

دیترمینانت 0 لري. پسي $\lambda = 0$ یو آیګن – ارزښت دی او سړی ټرلی ګوري، چې

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

یو اړونده آیگن-وکتور دی. له $\text{Spur } A = 3 = \lambda + \varrho$ څخه د ویم آیگن – ارزښت په $\varrho = 3$ حیث لاسته راځي. یو اړونده آیگن-وکتور نسبت و کمپلکس سکالار ضرب ته هغه و v ته لاندې اورتوگونال وکتور دی:

$$w = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

د نورمې کولو له لارې یونیتار ماتریکس لاس ته راځي

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}.$$

په تعقیب باور لري:

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^*,$$

د

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}$$

سره، هغه و U ته معکوس.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

مثبت ديفينيت ماتريکسونه Positiv definite Matrizen

يو مربع ماتريکس A مثبت ديفينيت بلل کيږي، که وي:

$$v^* A v > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

که $v^* A v$ يواځې نامنفي وي، نو A مثبت سيمي (نيم – يا برخه-) ديفينيت بولو.

يو مثبت ديفينيت ماتريکس A فقط مثبت دياگونالتوکي لري او آيگن-ارزبنتونه. په ځنګړي توګه A معکوسور ده او معکوس يې هم مثبت ديفينيت دی.

ليکونکي: هيوليګ، ربل

ريلاي – ويش (هعني هغه د ويش تيجه) Rayleigh-Quotient

د يوه هرميتيکي مثبت ديفينيت ماتريکس S لپاره د داسې په نامه ريلاي-ويش اکسترم – ارزبنتونه

$$r_S(x) = \frac{x^* S x}{x^* x}, \quad x \neq 0,$$

خورا کوچنی او خورا لوي د S آيگن – ارزبنت دی.

ليکونکي: اپې، هيوليګ

ماتريکس S کېدی شي ايونيتار ماتريکس U له لارې دياگونال فروم ته واړول شي:

$$U^* S U = D, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

د کوم سره چې

رکرنیز الج

$$Sv_i = \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_i = \frac{v_i^* S v_i}{v_i^* v_i} > 0$$

او $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ نیول یا فرض کېدی شي.

که سری $S = UDU^*$ او $x = Uy$ بدل کړي، نو دی

.

$$r_S(y) = \frac{y^* D y}{y^* (U^* U) y} = \frac{\sum_i \lambda_i |y_i|^2}{\sum_i |y_i|^2}.$$

دا بنایي چې

$$\lambda_{\min} \leq r_S(y) \leq \lambda_{\max},$$

چېرته چې د مطلوب ایگن-وکتورونو لپاره $y = e_1$ او $y = e_n$ لپاره صدق کوي.

لیکونکي: اپپ، هیولیک

مثلت بنه Dreiecksform

یو کمپلکس مربع ماتریکس A کیدی شي د یوه ورته ترانسفورمیشن له لارې په پورته
مثلت بنه

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q$$

کرنییز الجبر

ترانفورمي شي، چېرته چې دیاگونالي د A آیگن-ارزبستونه λ_i خوندي لري. لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

بنوونه د ماتریکس په بعد n باندې د ایندکشن له لارې کیدی شي صورت ونیسي، د (1×1) یوه ماتریکس د تریویال حالت څخه په پیل.

یو $(n \times n)$ ماتریکس A تر څیرنې لاندې نیسو، نو دا لږترلږه یو ایگنوکتور v لري. دا د نورمي کیدلو وروسته یوه اورتوگونال بنسټ $\{v, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ ته ورپوره کیدی شي. په دې بنسټ کې څیرونه (فکشن-که غواړی تابع) لاندې بڼه لري:

$$\tilde{A} = T^* A T = \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

د $((n-1) \times (n-1))$ ماتریکس لپاره د ایندکشن نیوني یا فرضیې له مخې یو $\tilde{Q}^* B \tilde{Q} = R_{n-1}$ یونیټار ترانفورمیشن $\tilde{Q}$ شتون لری د سره. له دې امله د

$$Q = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

سره لاس ته راځي، چې

$$Q^* A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} T^* A T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^* \tilde{Q} \\ 0 & B \tilde{Q} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda & x^* \tilde{Q} \\ 0 & \tilde{Q}^* B \tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & x^* \tilde{Q} \\ 0 & R_{n-1} \end{pmatrix} = R.
\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

اصلي وکتورونه Hauptvektoren

که λ د کمپلکس $(n \times n)$ - ماتریکس A یو آيگن-ارزبست وي، د الجبری دېرخلوالی m سره، نو یو وکتور v د

$$(A - \lambda E)^m v = 0, \quad v \neq 0$$

سره اصلي وکتور بلل کيږي و آيگن-ارزبست λ ته.

ټول اصلي وکتورونه و آيگن - ارزبست ته د صفر وکتور سره یوځای د بعد m یو لاندې- یا برخو وکتور جوړوي، دا اصلي فضا H_λ و آيگن - ارزبست λ ته. دا کرښيزې څېړونې یا فنکشن A ته انوار پانته دی.

ټوله فضا د اصلي فضاو سیده جمعه یا زيتون دی:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda} H_{\lambda}$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

کرنییز الجبر

بنوونه یی له دېرو برخیلونو یا-قدمونو رایوځای کیري.

اول - داچې یوونماتریکس یا واحد ماتریکس د هر ماتریکس سره بدلېدونکی دی یوه وکتور $v \in H_\lambda$ د څېرې (عکس؟؟) Av لپاره صدق کوي:

$$(A - \lambda E)^m Av = (A^{m+1} + \dots + \lambda^m E^m A) v = A (A^m + \dots + \lambda^m E^m) v \\ = A(A - \lambda E)^m v = A \cdot 0 = 0.$$

په تعقیب $Av \in H_\lambda$ دی.

دویم- د دې لپاره چې بعد وټاکو، ماتریکس A په پورتنی مثلثینه ترانفورمي کوو:

$$A \rightarrow B = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda & & * & * & * \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & * & * \\ & 0 & & R & \end{pmatrix}.$$

دا چې $v \in H_\lambda$ لپاره

$$0 = Q^{-1}(A - \lambda E)^m Q(Q^{-1}v) = (B - \lambda E)^m(Q^{-1}v),$$

$$v \rightarrow w = Q^{-1}v$$

دی، اصلي وکتورونه د سره سم اصلي وکتور ته ترانفورمي کیري.

مکر د B له بني روښانه دی، چې یوون - یا واحد وکتورونه د e_i لپاره د B $i \leq m$ په اصلیفضا $Q^{-1}H_\lambda$ کې پراته دي. پسي یو وکتور v د $v_i \neq 0$ سره د یوه $i > m$

لپاره د $(B - \lambda E)^m$ له لارې په 0 نه خبره کيږي یا فنکشن 0 نه دی. په تعقیب

$$\dim H_\lambda = m$$

لرو.

دریم – دا چې $\sum_\lambda \dim H_\lambda$ د الجبري د ډېرواره جمعې سره برابر دی، یعنې برابر په n دی، بسیا کوي، چې د بنسټ خویونو لپاره د اصلي فضا کرښیز خپلواکوالی وښودل شي یا وښایو. دې ته استعمالیږي، چې د $\varrho \neq \lambda$ لپاره لرو:

$$(A - \varrho E)v = 0 \wedge v \in H_\lambda \Rightarrow v = 0.$$

که د مختلو اصلي فضاو څخه یوه د وکتورونو جمعه ورکه شي،

$$v_\lambda + v_\varrho + v_\sigma + \dots = 0,$$

، نو لاس ته راځي:

$$((A - \varrho E)^{m_\varrho} (A - \sigma E)^{m_\sigma} \dots) v_\lambda = 0.$$

دا چې یوگونی ضربیونه H_λ انواریانت دي، په پورته یادونه استعمالوړ دی، او لاس ته ترې $v_\lambda = 0$ راځي. په ورته توګه $v_\varrho = v_\sigma = \dots = 0$ ترې لاس ته راځي او له دې سره صفروکتور فقط په ساده ډول انځور وړ دی.

لیکونکي: هیلېګ، هیورنر

د اصلفضا څپوکلېکي بنسټ Zyklische Basen von Haupträumen

د یوه کمپلکس مربع ماتریکس A یو اصلفضا (اصلي فضا) کېدی شي د څپکلېکي برخفضاو په یوه سیده جمعې تجزیه شي:

$$H_\lambda = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell,$$

دا په دې معنا چې هر برخفضا V_i د لاندې بڼې یو بنسټ لري

$$B^{k_i} v_i, \dots, B v_i, v_i, \quad B = A - \lambda E,$$

د $w_i = B^{k_i} v_i$ سره یوه آیگن-وکتور و آیگن-ارزښت λ ته.

ماتریکس A برخفضا V_i اینواریانت پرېږدیاو هلته لاندې ماتریکس-انخوړونه لري:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د تعریف سره سم H_λ له وکتورونو v څخه د $B^{k+1} v = 0$ سره جوړه ده، د کوم سره چې k کوچنی ده د λ د الجبري دېرځلوالی m څخه. د بنسټ ټاکلي بڼه له دې امله نږدېوالی لري. د دې لپاره چې وکتورونه

$$w_i \in \ker B,$$

چې بنسټ کره کوي، وټاکو، نو د ایگنو وکتورونو $\ker B$ و λ ته برخفضاوي

$$U_j = \ker B \cap \text{Bild } B^j$$

تر څیړنې لاندې نیسو. په روښانه نوکه دی

$$\emptyset = U_m \subset U_{m-1} \subset \cdots \subset U_0 = \ker B.$$

وکتورونه w_i به اوس ، له تشدېری سره په پیل، ایندوکتی، جوړیږي. که
 $w_1, \dots, w_{i-1}$ همدا اوس کره شوي وي ، نو سری لویوالی دا لوي k_i داسې، د هغه
 لپاره داسې چې U_{k_i} د دغه w_j په کرښزه هیولي W_{i-1} کې نه وی پروت، دا په دې
 معنا چې $v_i \neq 0$ باور لری د $B^{k_i}v_i = w_i \notin W_{i-1}$ ، $Bw_i = 0$.
 سره .

په دې ډول بالاخره د ټول آیگن-فضا $\ker B$ لپاره یو بنسټ
 $\{w_1, \dots, w_\ell\}$ جوړیږي او اړونده ځیوکلېکي بنسټونه د V_i لپاره.

د فضاو V_i د B سره (همداسې A) د ضرب له لارې روښانه دی. د غوښتل
 شوي ماتریکس انځورنه له اندې څخه لاس ته اړخي

$$A(B^j v_i) = (\lambda E + B)B^j v_i = \lambda B^j v_i + B^{j+1} v_i,$$

، که د بنسټ وکتورونه ، لکه څنگه چې ورکړ شوي دي، د کښته کېدونکي توان سره
 تنظیم کړي.

د جوړښت د ټیکوالي لپاره باید برسېره پر دې د وکتورنو $B^j v_i$ بنسټ خویونه هم
 وښوول شي. دا د دوه پلونو (قدمونو) سره صورت نیسي.

اول - لومړی کرښي. خپلواکوالی ښوول کیږي. دا تخنیکي دلایل کزدی شي د دوه
 ځیکلیکي ځنډیرونو د بېلگې

$$B^2 v_1, Bv_1, v_1, Bv_2, v_2,$$

له لاري ليدور شي. نيسو چې

$$\alpha_{2,1}B^2v_1 + \alpha_{1,1}Bv_1 + \alpha_{0,1}v_1 + \alpha_{1,2}Bv_2 + \alpha_{0,2}v_2 = 0,$$

دی، نو د B^2 سره د ضرب له لاري لرو

$$\alpha_{0,1}w_1 = 0 \implies \alpha_{0,1} = 0,$$

د $B^3v_1 = Bw_1 = 0$ او $B^2v_2 = Bw_2 = 0$ له امله. د B سره د ضرب له لاري اوس لرو

$$\alpha_{1,1}w_1 + \alpha_{0,2}w_2 = 0 \implies \alpha_{1,1} = \alpha_{0,2} = 0$$

د جوړښت سره سم د آیگن-وکتورونو w_i کرنبیز خپلواکوالی له امله. بالاخره لرو

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} = 0$$

بيا هم د آیگن-وکتور w_i د کرنبیز خپلواکوالی له امله.

په توليز حالت په ورته توگه مخ ته ځو. د يوه کرنبیز کمپينيشن د تحليل په هکله بستوکتور د B د مناسب توان سره ضربوي، تر څو د آیگن-وکتورونو ټول ترمونه له منځه ولاړ شي.

دویم - همدومره ښايو، چې هر وکتور $u \in H_\lambda$ د بنستوکتورونو سره انځوروي دی.

پس وي دې، د $k \leq m$ $B^k u = 0$ ، سره. د $k = 1$ لپاره يې نه ښايو، ځکه چې

وکتورونه w_i د جوړښت له امله د آیگن - فضا $\ker B$ لپاره يو بنسټ جوړوي. اندوکتیو سړی نیوی شي يا فرض کولی شي، چې په کې وکتورونه انځوروي دي.

همداسې آیگن-وکتور $B^{k-1}u$ انځوروي دی:

$$B^{k-1}u = \sum_i \alpha_i w_i.$$

له دې لاس ته راځي، چې

$$B^{k-1} \underbrace{\left(u - \sum_i \alpha_i B^{k_i-k+1} v_i \right)}_{u'} = 0.$$

د دې په تعقيب u' انځور ور دی او له دې سره u هم .

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د جوردان بڼه Jordan-Form

يو کمپلکس مربع ماتریکس کېدی شي د یوه ورته والي ترانسفورمېشن له لارې د بلوک دیاګونال بڼه باندې ترانسفورم شي

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q$$

باندې ترانسفورم شي. له دې سره د جوردان بلکونه دا لاندې بڼه لري

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

د A یوه آیگن – ارزښت λ_i سره

تر ځای بدلون پورې د جوړدان بڼه یواځنې ده.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

دا چې اصلي فضاوې H_λ د فنکشن A لاندې انواریانت دي، کیدی شي د اصلي وکتورونو بلوکبني پورې یوه بنسټ په نسبت لاس ته راوړل شي. د ځانگړو څپوکلیکي بستونو

$$B^{k_i} v_i, \dots, B v_i, v_i, \quad B = A - \lambda_i E,$$

استعمال له لارې بلوکونه غوښتونې بڼه غوره کوي

لیکونکي: څپولیک، هیورنر

ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

کرکترېستیکی بولینوم

$$p_A(\lambda) = (-1 - \lambda)^3 + 4(4 - 3(-1 - \lambda)) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27$$

لري د ډبل صفر ځایونو $\lambda = -3$ او ساده صفحاوونو $\varrho = 3$ سره.

دا چې د ماتریکس

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

رانگ 2 دی، و ته فقط یو آیگن-وکتور شتون لري. د دې په تعقیب A د جوردان بڼه لري.

$$Q^{-1}AQ = J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, Q = (w, v, \tilde{w}).$$

د کرښیز و مساواتش یستمونو د حل له لارې

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سړی لاندې آیگن-وکتورونه لاس ته راوړي:

$$w = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

اصلي ډیاګونال پوره کوي

کرنییز الجبر

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

دا په دي معنا چي د بېلگي $v = (-3, 4, 1)^t$ په توگه . له دي سره دي

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

څه چي د ازمایښت له لاري $A = QJQ^{-1}$ تصدیق کيږي.

لیکونکي: خپولیک، هیورنر

د یوه کمپلکس (2×2) -ماتریکس A لپاره 3 څرنګوالیز (د کوالیټي له مخې) مختلف جوردان-نورمالیني شتون لري:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, (\lambda \neq \varrho).$$

په لومړي حالت کي λ یو ډبل آیګن – ارزښت دی د فقط یوه (تر سکالار صرب پورې) آیګن-وکتور w سره، دا په ی معا چي

$$\text{Rang}(A - \lambda E) = 1.$$

یو په دي پورې اړونده اصلی وکتور v او له دي سره دي سره ترانسفورمیشن ماتریکس

$$Q = (w, v)$$

د

رکرنیز الج

$$w = (A - \lambda E)v$$

د حل له لارې لاس ته راوړي ، همداسې د $\ker(A - \lambda E)^2$ ټاکلو له لارې.

د دې لپاره یو څرگنده بېلگه

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

کرکترېستیکي پولینوم

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

دی، د ډبل صفرځای $\lambda = 2$ سره. د

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حل له رای سری $w = (2, 3)^t$ لاس ته راوړي او له دې سره

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

یو اړونده اصلي وکتور $v = (1, 2)^t$. دا د آزمایشنت سره تصدیق کیږي:

$$A = QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

سره تصدیق کیږي. لیکونکي: خپولیک، کرایخ

کرنییز الجبر

د یوه کملکس (3×3) - ماتریکس A لپاره لاندې کولتاتیو مختلف جوړدان - نورمالیزي
 $J = Q^{-1}AQ$
 شتون لری:

اول - جوړه دوه مختلف آیگن-ارزبنتونه λ, ϱ, σ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

دویم - یو ډبل آیگن - ارزبنت λ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}.$$

په دویم حالت کې

$$\text{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

او $Q = (w, v, \tilde{w})$ دې له آیگن وکتورونو w او $\tilde{w}$ یوه اصلي وکتور v سره، هغه
 چې د مساوات سیستم د حل له لارې

$$(A - \lambda E)w = 0, \quad w = (A - \lambda E)v, \quad (A - \varrho E)\tilde{w} = 0$$

د حل له لارې ټاکل کېدی شي.

دریم - یو دریواړه آیگن - ارزبنت:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

په دویم حالت کې

$$\text{Rang}(A - \lambda E) = 1$$

دی او سری یو اصلي وکتور v د

$$(A - \lambda E)^2 v = 0, \quad (A - \lambda E)v \neq 0.$$

حل له لاری لاس ته راوړي.

دی، او یو غزېدلی کرېنیز خپلواک آیگن –
 $w = (A - \lambda E)v$ اړونده آیگن – وکتور
 وکتور $\tilde{w}$ دا لاندې پوره کوي:

$$(A - \lambda E)\tilde{w} = 0, \quad w \perp \tilde{w}.$$

بالاخره $Q = (w, v, \tilde{w})$ دی.

په دریم حالت کې

$$\text{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

دی او دی له $Q = (w, v, u)$

$$(A - \lambda E)w = 0, \quad w = (A - \lambda E)v, \quad v = (A - \lambda E)u.$$

سره. لیکونکی: وېیر

د (4x4) -ماتریکسونو جوردان-بني

Jordan-Formen von (4x4)-Matrizen

لاندي توابع ټول 14 ممکن (4×4) - ماتریکسونو د جوردان – بني ځای نیوني جوړښتونه بنایي .

• څلور مختلف آیگن – ارزښتونه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

• یو دوه ځله آیگن – ارزښت λ_1 او دوه دوه ځله آیگن – ارزښتونه λ_2, λ_3

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

• یو درې واره آیگن – ارزښت λ_1 او یو یو واره آیگن – ارزښت λ_2 .

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

• دوه دوه واړه آیگن – ارزښت λ_1, λ_2

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

• یو څلورواړه آیگن – ارزښت λ_1

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

لیکونکي: خپولیک، هیورنر

د ماتریکسونو توانونه **Potenzen von Matrixen**

د یو کمپلکس ماتریکس توانونه A^n ، $n = 0, 1, \dots$ ټیک هلته صفر ماتریکس پولي ته تلونکي دي، که د ټولو آیگن-ارزښتونو λ مطلق ارزښت له 1 کوچنی دی.

پرلپسې (A^n) محدوده پاتې کیږي، که $|\lambda| \leq 1$ او د آیگن – ارزښت لپاره د ارزښت 1 سره

لیکونکي: خپولیک، هیورنر

$$J = Q^{-1}AQ$$

د A د جوردان - بنې سره کېدی شي د ماتریکس - توانونه په لاندې بڼه و لیکل شي:

$$A^n = (QJQ^{-1})(QJQ^{-1}) \cdots (QJQ^{-1}) = QJ^nQ^{-1}$$

دلته یواځې دې ته اړتیا ده چې د J پولې ته تلنه (لیمیت) تر څېړنې لاندې و نیل شي. د J د بلوکفورم (- بنې) کېدی شي هر بلوک J_i ځانله تر څېړنې ونیل شي. د دې لپاره لیکو

$$J_i = (\lambda_i E) + D,$$

، د کوم سره چې D ګاونډی دیاګونال د یو سره خوندي لري. لکه چې په ساده توګه بنسټول کيږي، د بعد m د یوه بلوک لپاره $D^m = 0$ دی. پسي صدق کوي

$$(J_i)^n = \lambda_i^n E + \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} D + \cdots + \binom{n}{m-1} \lambda_i^{n-m+1} D^{m-1}.$$

له دې کټمټوالي څخه کېدی شي د پرلپسې پولې ته تلنه (لیمیت کونورګنت) و لوستل شي.

$$|\lambda_i| < 1 \quad \text{د لپاره دی}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{j} \lambda_i^{n-j} = 0,$$

دی، ځکه چې $\binom{n}{j}$ فقط پولینومیال یعنې پولینومي لویږي، د دې معکوس λ_i^{n-j} اکیوننشک ټیټیږي.

که $|\lambda_i| = 1$ وي پرلپسی محدوده یا رابنده پاتیري، که $m = 1$ وي، دا په دې معنا، چې گاوندی دیاگونال د یوه سره شتون نه لري.

لیکونکي: خیولیگ، هیورنر

په زیځولار ارزښت ټوټه کونه Singularwert-Zerlegung

هر یوه کمپلکس $(m \times n)$ –ماتریکس A ته یونیتار ماتریکسونه U او V شتون لري د

$$U^*AV = S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

سره.

زینځولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k > s_{k+1} = \dots = 0$$

د A^*A د آنگن – ارزښتونو ریښې دي او k د A رانگ دی.

د U مټې u_j او د V مټې v_j د AA^* همداسې A^*A د آیگن-وکتورونو اورتوگونال بنسټونه جوړوي او لاندې صدق کوي:

$$Av_j = s_j u_j,$$

د $1 \leq j \leq k$ لپاره.

کرنییز الجبر

د سینګولار ارزښت توتې کونې له لارې کېدې شي کرنییزه څېړونه یا فنکشن

$$x \mapsto y = Ax$$

په لاندې بڼه انځور شي:

$$y = \sum_{i=1}^k s_i (v_i^* x) u_i$$

له دې لاس ته راځي ، چې

$$\text{Kern } A = \text{span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}, \quad \text{Bild } A = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}.$$

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j,k} |a_{j,k}|^2 = s_1^2 + \dots + s_k^2 \quad \|A\|_2 = s_1 \quad \text{او} \quad \text{دالاخره}$$

دي.

لیکونکي: اپې. هیولیک

د هر مېټریکي ماتریکس A^*A د دیاګونالي کونې له لارې لاس ته

$$V^*A^*AV = \text{diag}(s_1^2, \dots, s_k^2, 0, \dots, 0) = S^t S,$$

راځي، له هغې سره چې سړی نیولی شي، چې آيګن – ارزښتونه د خپلې لویې پسې منظم دي. دا چې A^*A مثبت دیفیټ دي، کېدې شي چې فقط نامنفي آيګن-ارزښتونه د مربع

په څېر ولیکي او په دې توګه د $m \times n$ دیاګونالماتریکس S تعریف کړي.

د پورته مساوات څخه لرو ، چې د AV متي اور توګونال دي او نورم s_i لري:

$$AV = (s_1 u_1 \quad \dots \quad s_k u_k \quad 0 \quad \dots \quad 0) = US$$

د یوه یونیتار ماتریکس U سره.

وروسته له دې چې غوښتونې انځورونه

$$A = USV^*$$

منځ ته اړغله، کېدې شئ پسي راتلونکي وينا ساده پسي واز مائل شي.

دا چې يونيتار ترانسفورميشن د يوه ماتريکس رانگ نه تغيروي، صدق کوي

$$\text{Rang } A = \text{Rang } S = k.$$

پسي لرو

$$AA^*u_j = U(SS^t)U^*u_j = u_j(s_j)^2$$

او

$$A^*Av_j = V(S^tS)V^*v_j = v_j(s_j)^2.$$

بالاخره Av_j د US د j مې متي سره برابر دی، يعنې د $u_j s_j$ سره برابر.

ليکونکي: اېپ. هيوليگ

فاسد معکوس Pseudo-Inverse

يو کمپلکس $(m \times n)$ ماتريکس A د سينگولار-ارزښت-توټه کونې USV^* سره

کيدی شي د انډولوني پرابلم (مسئله) $|Ax - b| \rightarrow \min$ د مينيمال نورم سره په ښه

$$x = A^+b, \quad A^+ = VS^+U^*,$$

کرنییز الجبر

ولیکل شي، د کوم سره چې A^+ د A فاسد-معکوس بلل کيږي، او

$$S^+ = \text{diag}(1/s_1, \dots, 1/s_k, 0, \dots, 0), \quad k = \text{Rang } A,$$

د $(n \times m)$ - دیاگونال ماتریکس د مثبت سینګولار ارزښت دی

د په څنډ ارزښتونو سره.

که $\{u_1, \dots, u_m\}$ او $\{v_1, \dots, v_n\}$ د U همداسې V ، د متو اورتوګونال بنسټونه وي، نو کېدی شي کرنییز فنکشن $x = A^+b \mapsto b$ په ضریبونو بڼه

$$x = \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{s_\ell} (u_\ell^* b) v_\ell$$

انځور شي. له دې څخه په ځانګړي ډول لاس ته راځي، چې

$$\text{Kern } A^+ = \text{span}\{u_{k+1}, \dots, u_m\}, \quad \text{Bild } A^+ = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$$

$$\|A^+\|_2 = 1/s_k \quad \text{او}$$

لیکونکي: ایپ. هیولیګ

د د 2-نورم انواریانت له امله د یونیتار ترانفورمیشن له لارې کېدی شي

$$Ax - b$$

له کین د U^* سره ضرب کړي. د

$$c = U^*b, \quad y = V^*x$$

سره ترې ورته د مینیمال کولو پرابلم لاس ته راځي

$$|Sy - c| = \left| \begin{pmatrix} s_1 y_1 - c_1 \\ \vdots \\ s_k y_k - c_k \\ -c_{k+1} \\ \vdots \\ -c_m \end{pmatrix} \right| \rightarrow \min .$$

مینیموم سری د لومړیو k مساواتو د حل له لاری لاس ته راوړي:

$$y_i = c_i/s_i, \quad i = 1 : k .$$

د یونیتار میاتریکس $(|x| = |y|)$ نورم ته ریښتینوالي له امله د مینیمال نورم د حل لپاره دی:

$$y_{k+1} = \dots = y_n = 0 .$$

په ټولیزه توګه ترې لاس ته راځي

$$y = S^+ c, \quad s_{i,j}^+ = \begin{cases} 1/s_i & \text{für } i = j \leq k \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

لیکونکي: ایپ. هیولیک

د

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

لپاره دې د اندولوالي پرابلم حل شي

د زیګولار- ارزښت ټوټه کونې (تجزیه کونې) شمېرنې لپاره لومړی د

$$A^t A = \begin{pmatrix} 80 & -16 & 56 \\ -16 & 32 & -40 \\ 56 & -40 & 68 \end{pmatrix}$$

آیګن-ارزښتونه او آیګن-وکتورونه ټاکل کيږي او ترې لاس ته راځي

$$s_1^2 = 144, s_2^2 = 36, s_3^2 = 0, \quad V = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

له دې لرو

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AV = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = US.$$

د U دوه لومړنۍ مټې د AV د اړنده مټو سره د ویش له لارې لاس ته راځي او د سیګولار ارزښتونو (له دې سره باید ټوټه-یا واحد وکتورونه منح ته شي) له لارې، پاتې مټې (نه یواځنۍ ټاکلې) و اورتونورمال بنسټ ته د پوره کونې له لارې لاس ته راځي:

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

له دې سره فاسد- معکوسیت

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^t = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 & 6 \\ -5 & 3 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

دی او

$$x = A^+b = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د مینیمال نورم حل.

لیکونکي: اپ. هیولیک

د توپوگرافیکي چونداتنونو ټیکالوی یا اصلاح

Korrektur topografischer Meßdaten

د توپوگرافي جگوال h_i داتنونه یا اعداد چې کچونې له لارې لاس ته راړنې ته د جگوالو

کمښتونه $d_{i,j}$ کچ کيږي. د کچونې ناتيکالوي په بنسټ د قانون له مخې صدق کوي

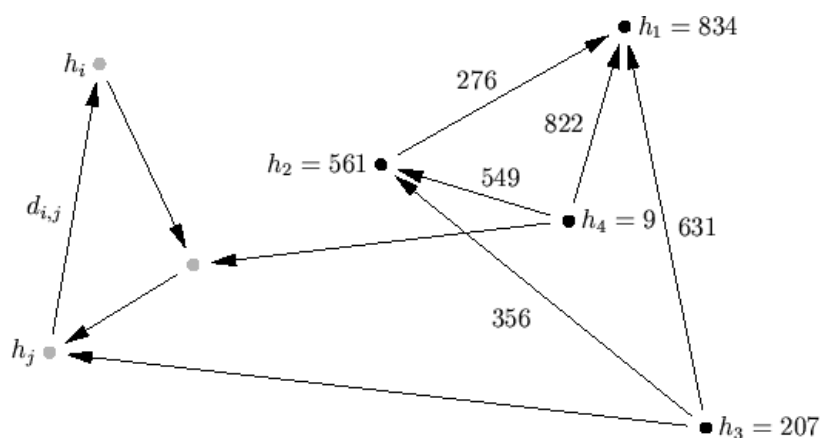
$$d_{i,j} \neq h_i - h_j$$

مناسب د جگوالي ټیکالوي x_i کېدی شي د انډولوني پرابلم

$$\sum_{(i,j)} \left(d_{i,j} - ((h_i + x_i) - (h_j + x_j)) \right)^2 \longrightarrow \min .$$

له لاري حل شي.

د تفلاري د بنوولو لپاره د کمو داتن سره یو موډل-پرابلم حل کيږي.



د جگوالي او کمښت ارزښتونو

$$h = (834, 561, 207, 9)^t, \quad d = (276, 631, 822, 356, 549)^t$$

لپاره، د $d = (d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}, d_{2,3}, d_{2,4})^t$ سره، دا لاندې له ټاکلو خوا (پورته، زیات) سیستم لاس ته راځي

F

$$A(h + x) = d, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

د مینیمال نورم غ،ښتونی حل دی:

$$x = A^+(d - Ah) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د مینیمال – نورم – حل د څېړل شوي استعمال لپاره مخه وړ دی، ځکه چې باید د ډېر امکان سره کوچنی تیکاو وټاکل شي.

لیکونکی: ویپر

د مور-پینروز-شرطونه Moore-Penrose-Bedingungen

فاسد-معکوس به د لاندې کټمټوالی له لارې یواځنی کرکتریسټیک شي:

$$\begin{aligned} AA^+A &= A & \bullet \\ A^+AA^+ &= A^+ & \bullet \\ (AA^+)^* &= AA^+ & \bullet \\ (A^+A)^* &= A^+A & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{aligned}$$

لیکونکي: اپې. هیولیک

ساده بنوول کیدی شي، چې د

$$A^+ = VS^+U^*, \quad A = USV^*$$

له لارې تعریف شوی فاسد-معکوس ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

د بېلګې په توګه لومړی کټمټوالی د لاندې څخه لاس ته اړځي

$$(USV^*)(VS^+U^*)(USV^*) = U[SS^+S]V^*,$$

ځکه چې په کونجیزو نوکانو یا قوسونو کې د ټولیز شوو دیاګونال ماتریکسونو (دوه کونجټرو – یا قطبي ماتریکسونو) ضرب به د دیاګونال توکو د ضربونې له لارې جوړ شي او لرو:

$$s_{i,i}^+ = 1/s_{i,i}, \quad i \leq \text{Rang } A.$$

نور ټول کټمټوالي هم دسېده پسې- شمېرني له لاري لاس ته راځي.

د دې بنسونه چې وښايو A^+ يواځنې کرکټريستيک شوی دی د ورکړ شوو شرايطو له لاري، نور هم خوراستونځمن دی، له دې امله يې دلته له څېړني تېرېزو.

ليکونکي: اېپ.هيوليگ

اورتوگونال او ځانگړي اورتوگونال گروپونه

Orthogonale und spezielle orthogonale Gruppe

د ټولو اورتوگونالو $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېری (سټ) د اورتوگونال گروپ $O(n)$ سره ښايو يا په نڅېنه کوو يا بول.

د $Q \in O(n)$ لپاره صدق کوي

$$Q^{-1} = Q^t, \quad |\det Q| = 1$$

او د يوه کواوردينات ترانسفورميشن

$$x \rightarrow x' = Qx$$

سره اوږدوالي اوسکلار ضرب ساتلی پاتې کيږي.

د ټول اورتوگونال $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېری د $\det Q = 1$ سره د څرخونگروپ يا ځانگړي اورتوگونال گروپ

$$SO(n) \subset O(n)$$

هندارونه Spiegelung

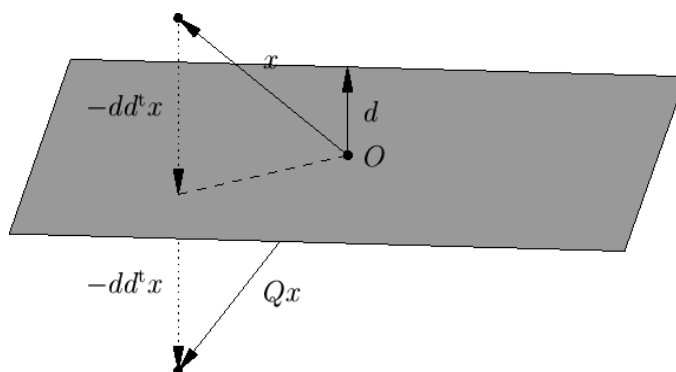
په $\mathbb{R}^n$ کې هندارونه (په هنداره انعکاسونه) و یوه یوونوکتور (واحد-) ته $d \neq 0$ اور توگونال هایپر سطحه (Hyperebene)

$$H : d^t x = 0$$

باندې هندارونه د سیوم تري اور توگونال ماتریکس

$$Q = E - 2dd^t$$

له لاری د یوونماتریکس (واحد-) E سره په نښه کیری



پکي یا میلی په معنا ده

د Q سیوم تري روښانه ده. له دې سره لرو :

$$QQ^t = Q^2 = (E - 2dd^t)^2 = E^2 - 4dd^t + 4dd^t dd^t = E,$$

دا په دې معنا چې Q اور توگونال ده.

کرنییز الجبر

د هنداروني خويونو بنوولز لپاره لومړی په پامکې نیسو، چې وکتور

$$x - Qx = x - x + 2dd^t x = 2(d^t x)d$$

و d ته غبرگ دی، او منځتکی د x او Qx ترمنځ په هایپر هواره کې پروت دی:

$$d^t(x + Qx) = d^t x + d^t x - 2d^t d d^t x = 0.$$

له دې سره Q په هایپر هواره د x هندارونه ده په سرچینه کې، هغه چې د d سره اورتوگونال ده.

لیکونکي: ایپ. هیولیک

څرخون Drehung

اورتوگونال $(n \times n)$ - ماتریکس

$$\begin{array}{lcl} \text{Zeile } i & \rightarrow & \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & -s & & \\ & & & \ddots & & & \\ \text{Zeile } j & \rightarrow & & s & & c & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

په پورته کې Zeile د لیکي یا کیلي په معناه

د $c = \cos \varphi$ او $s = \sin \varphi$ سره یوه څرخون په φ په $\mathbb{R}^n$ کې پرته د $x_i x_j$ -
سطحه کې په گوته کوي (تحلیلي). لیکونکي: ایپ. هیولیک

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

په پام کې نیولو سره تصدیقیري، چې څرخونماتریکس R اورتوگونال دی:

$$RR^t = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & c^2 + s^2 & -sc + sc & \\ & & -sc + sc & c^2 + s^2 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

• لیکونکي: ایپ. هیولیک

څرخونمحور او څرخونکونج Drehachse und Drehwinkel

هر په $\mathbb{R}^3$ کې څرخون Q یو څرخون محور لري، دا پهدې معنا چې یو یوونوکتور u اینواریانت پریږدي، او په یوه کونج φ یو څرخون بنایي په هغه هواره کې چې u ته (باندې) اورتوگونال ده.

نسبت و یوه اورتوگونال ولاړسیستم u, v, w ته Q لاندې د ماتریکس آنځورونه لري:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

او د څرخونکونج لپاره په ځانګړې توګه صدق کوي

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (\text{Spur } Q - 1) .$$

• لیکونکی: هیولیگ، ریل

د یوه څرخونماتریکس Q لپاره لرو:

$$Q^{-1} = Q^t, \quad |\det Q| = 1 .$$

دا چې د یوه اورتوگونالماتریکس آیگن-ارزښت λ مطلق ارزښت 1 لري او $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det Q = 1$ دی، لرو، چې لږ تر لږه یو آیگن - ارزښت 1 دی. د مناسب په ګڼه کزلز یا نمر هکولو سره یا

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1$$

دی او یا

$$\lambda_i \in \{-1, 1\} .$$

دا نورمي شوی آیگن-وکتور u د آیگن - ارزښت 1 څرخونمحور ټټکي.

د یوه اورتوگونالولارسیستم u, v, w لپاره باور لري:

$$Qu = u$$

$$Qv = \alpha v + \beta w$$

$$Qw = \gamma v + \delta w .$$

دا چې Qv, Qw کوم د u - کومپوننت نه لري، له لاندې له کونجساتونکو اورتوگونال مارتیکسونو څخه لاس ته راځي:

$$x \perp u \Rightarrow Qx \perp Qu = u.$$

که پورته مساوات د ماتریکس بڼه باندې

$$Q(\underbrace{u, v, w}_P) = (\underbrace{u, v, w}_{\tilde{Q}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix},$$

$$\tilde{Q} = P^{-1}QP$$

باندې ولیکل شي، له لاس ته اړخې، چې

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

یو څرخون ماتریکس دی. په همدې ډول د شپور د انواریانت له امله لاس ته راځي:

$$\text{Spur } Q = \text{Spur } \tilde{Q} = 1 + 2\cos \varphi$$

• لیکونکي: هیولیگ، ریل

ماتریکس

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

یو دیاگونال ماتریکس دی، ځکه چې لرو:

کرنییز الجبر

$$Q^t Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = E \Rightarrow Q^t = Q^*$$

او

$$\det Q = \det \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = +1.$$

څرخونمخوړ د آنگن- وکتور u په حیث ټاکل کيږي و آيگن - ارزښت $\lambda = 1$ ته:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}_{Q-E} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

څرخونکونج φ له

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(\text{Spur } Q - 1) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$$

څخه لاس ته اړخي، د $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ په حیث .

د φ مخنځېنه د څرخونلور u د لوريوالي په واک کې ده او کېدی شي د یوه

ولاریسیستم (کواریډینات سیستم) وټاکې شي: $\{u, v, w\}$

$$w^t Q v = w^t (\cos \varphi v + \sin \varphi w) = \sin \varphi .$$

د

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

سره د راوړل شوي بېلگې لپاره لرو:

$$\sin \varphi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$$

نو لرو: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ لیکونی: وپیر

د یو څرخون په ضریبونو توپه کونه Faktorisierung einer Drehung

یو څرخون Q په $\mathbb{R}^3$ کې په کواوردیناتمخوړ د د کواوردیناتونو د ضرب په څېر کېدی انځور شي:

$$Q = D_z D_y D_x .$$

• لیکونکي: هیولیگ، رېل

Q څرخون D کېدی شي و ټاکل شي، دا سي چې یو په بل پسې *sukzessive* د توکي q_{21}, q_{31}, q_{32} له منځه یووړل شي:

کرنییز الجبر

$$D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$D_x^{-1}D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} = R.$$

له دې سره داسې کار اخستل شوی یا مخ ته تللي یو، چې یو په خوښه آيگن-وکتور $(v_1, v_2)^t$

په $(1, 0)^t$ باندې د یوې سطحې د څرخون D له لارې ځان خبره کړی شي (يعني د تابع په څېر ولیکل شي). دا چې $\det R = 1$ دی $r_{33} = 1$ لرو او د متو د نورمې کولو له امله باید R یوونماتریکس (واحد ماتریکس) وي. له دې سره غوښتونې انځورونه لاس ته راځي.

• لیکونکي: هیولیک، رېل

د دې لپاره چې د ماتریکس

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{4}}{8} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}$$

په ضریبونو ټوټه کول لاس ته راوړو، نو لومړۍ توکي $q_{2,1}$ له منځه وړو د $\frac{\pi}{2}$ په کچه څرخون د z - محور باندې:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}.$$

داسې پای کوو چې د y -محور باندې د $\frac{\pi}{4}$ په کچه څرخوو:

:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} D_z^* Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

لاس ته راغلی ماتریکس یوو څرخون D_x دی د x -محور باندې. په ټولیزه توګه لاندې په ضریبونو ټوټه کونه لاس ته راوړو:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D_z$$

$$D_y$$

$$D_x$$

• لیکونکی: هیولیگ، کرایخ

خرخونماتریکس Drehmatrix

په $\mathbb{R}^3$ کې یو څرخون د نورمې شوي څرخون محور لور u او څرخونکونج φ سره ، داسې لوریزه لکه بنی پیچي میخ ، د یو وکتور x فنکشن جوړوي

$$Qx = \cos \varphi x + (1 - \cos \varphi) uu^t x + \sin \varphi u \times x$$

، چیرته چې $v \times x$ د u او x صلیب ضرب (وکتوري ضرب، چې x سره په نڅېنه کیري) په نڅېنه کوي. اړونده څرخونماتریکس دی:

$$Q : \quad q_{ik} = \cos \varphi \delta_{ik} + (1 - \cos \varphi) u_i u_k + \sin \varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j .$$

د کرونیکر سومبول δ_{ik} او ε -تنزور ε_{ijk} سره.

• لیکونکی: هیولیگ، ربل

دا بسیا کوي پسي وښایو، چې $Qu = u$ او یو و u ته اورتوگونال وکتور v په یوه

کونج φ د u په محور باندې وڅرخي. لومړۍ غوښتنه ترلر کتل کیري. د v څېرې یا تابع ارزښت په څېر لاس ته راځي

$$Qv = \cos \varphi v + \sin \varphi u \times v ,$$

څه چې په φ د څرخون سره د v او $u \times v$ څخه غزېدلي سطحه په گوته کوي.

• لیکونکي: هیولیگ، ربل

د ټولیز فرمول سره سم د $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \ 1 \ 1)^t$ په محرر په $\varphi = \frac{\pi}{3}$ یو د څرخون

ماتریکس Q له 3 ترمونو څخه په لاندې ډول یوځای کيږي:

په ټولیزه توګه لاس ته راوړ

$$\cos \varphi \delta_{ik} : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

• لیکونکي: هیولیگ، کرایڅ

$$(1 - \cos \varphi) u_i u_k : \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

مربعیزه فورم (څلورۍ یې بڼه) Quadratische Form

$$\sin \varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

د یوه حقیقي سیموټریک ماتریکس A لپاره دا لاندې

$$\alpha(x) = x^t A x$$

مربعیزه فورم نوموو.

د A د آیګن – ارزښت د مخنځې بدلون له مخې لاندې درې تیوپه (ډولونه) توپیروو:

کرنیز الجبر

- الیپتیکی (بیضوي ډوله) بڼه: ټول آیگن – ارزښتونه همغه مخنځینه لري.
- پارابولیک: لږ تر لږه یو آیگن – ارزښت صفر دی او نور آیگن ارزښتونه همه یابرابرې وخنځې لري.
- های پارابولیکي: د مختلفو مخنځینو سره آیگن – ارزښتونه شتون لري.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د A سیومتری اړین نه ده چې مخ له مخه ونیول شي (فرض شي)، د ټولیز ماتریکس لپاره کېدی شي مربع بڼه په لاندې ډول ولیکل شي:

$$x^t A x = \sum_{j,k} x_j a_{j,k} x_k = \sum_j a_{j,j} x_j^2 + \sum_{j < k} (a_{j,k} + a_{k,j}) x_j x_k$$

پس کېدی شي هر ځل دوه ترمونه سره یوځای کړو او مربع بڼه سیومتری کړو یا په سیمتری واړوو:

$$x^t A x = \frac{1}{2} x^t (A + A^t) x .$$

مربع بڼې د بېلګې په توګه د یوه سکالارتابع f د ټیلور-وډې د لومړي ترم په څېر رامنځ ته کېږي:

$$f(x) = f(0) + \text{grad } f(0)^t x + \frac{1}{2} x^t (H f(0)) x .$$

په دې حالت کې $H f$ د دویم ټوټه (- partiellen) مشتق د هسې-ماتریکس دی، د بدلونوالي په بنسټ سیومتری دی. لیکونکي: ایپ، هیولیک

سیومتریک ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 1 + \lambda \end{pmatrix}$$

آیگن – ارزښتونه 2 او 2λ لري.

مربعي بڼه

$$\alpha(x) = x^t Ax$$

د $\lambda > 0$ لپاره بیضوي (هګی ډوله) ده، د $\lambda = 0$ لپاره پارابولیک او د $\lambda < 0$ لپاره هایپارابولیک دی.

• لیکونکي: اپې، هیولیک

کوادریک Quadrik

تکي

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) + 2\beta(x) + \gamma = 0\}$$

کوادریک بلل کیږي، چېرته چې α یو مربعیزه بڼه، β یوه کرښوزه بڼه او γ یوه ثابت ده.

Q د ماتریکس لیکدود په ډول لیکل په لارندې ډول لیکل کیږي

$$Q : x^t Ax + 2b^t x + c = 0$$

د $\alpha(x) = x^t Ax$ او $\beta(x) = b^t x$ سره.

د Q انځورونه یواځنی نه ده. د بېلګې په توګه کېدی شي د تعریف مساوات د یوه په خوښه ثابتې سره ضرب شي.

• لیکونکي: اپې، هیولیک

د کواریکونو شډله ټوټه ونه Grobeinteilung der Quadriken

د یوه کواریک د مساوات څخه په پیل

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

لیکو

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array} \right).$$

د $\tilde{x}^t = (1, x_1, \dots, x_n)$ سره کېدی شي Q هم په لاندې هوموجین بڼه ولیکل شي:

$$Q: \quad \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0$$

لاندې ډولونه یا تیوپونه توپیروو:

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A$$

• مخروطي کواریک

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 1$$

• منځتکي کواریک

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 2$$

• پارابولیکي کواریک

• لیکونکي: اپ، هیولیک

کواریک

یا دونه(ژباړی): په سطحه کې یوه کره(کرښه)، په درې بعدیزه (درېپراخیدونې) فضا کې یوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو یا متحولو له لارې تشریح یا ښوول کېدای شي. پای

$$Q: x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2x_2 + \lambda = 0$$

دې د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره ورکړ شوي وي، همداسې د ماتریکس لکیندود

$$Q: x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \lambda, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

،

سره ورکړ شوي وي.

د $\lambda = 0$ لپاره $\text{Rang } A = 1$ دی، پرته له دې $\text{Rang } A = 2$ دی. د $\lambda = \pm 1$

لپاره $\text{Rang } \tilde{A} = 2$ دی، پرته له دې $\text{Rang } \tilde{A} = 3$ دی. له دې سره $\lambda = 0$ د Q

لپاره یو پارابول، د $\lambda = \pm 1$ لپاره مخروطي ډوله کوادریک او د نورو ټول ارزښتونو لپاره یو منځنۍ کوادریک دی.

لیکونکي: اپې، هیولیګ

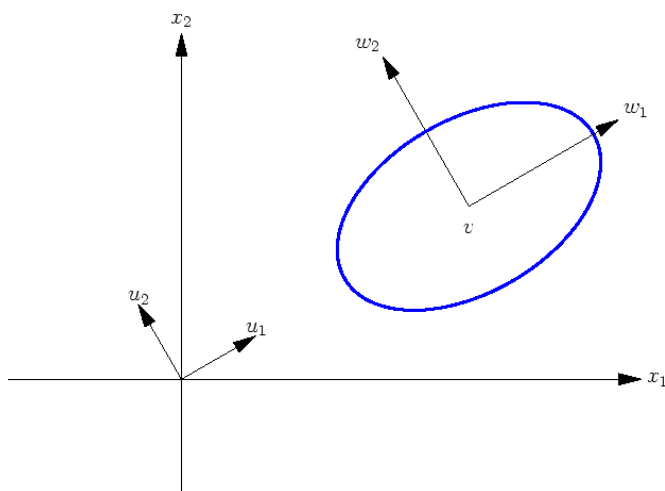
اصلي- محور — ترانسفورمیشن Hauptachsentransformation

د څرخون او راکښنې له لارې په $\mathbb{R}^n$ کې کېدای شي یو کوادریک په نورمال بڼه ترانسفورمي شي:

کرنییز الجبر

$$x^t A x + 2b^t x + c = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1} + \gamma, \quad x = U w + v,$$

چیرته چې $m = \text{Rang } A$ او $\beta\gamma = 0$ صدق کوي.



له دې سره د څرخون ماتریکس U مټې د A آیگن-ارزبنتونو λ_i ته آیگن-وکتورونه u_i خوندي لري، چې د هغې لور اصلي محور بلل کیږي. د راکبني وکتور (راکبنونو وکتور) v د کوادریک منځنۍ دی. لیکونکي: اپ، هیولیک

سیومتري ماتریکس A ته له آیگن-وکتورونو u_i څخه د $\det(u_1, \dots, u_n) = 1$ سره یو اړوتوگونال بنسټ شتون لري، د کومو سره چې لومړی و آیگن-ارزبنتونو $\lambda_i \neq 0$ ته آیگن-وکتورونه ننول کیږي. د لومړي ځای بدلون $x = U y = (u_1, \dots, u_n) y$ پسې له دې سره لاندې دیاگونال بڼه لاس ته راځي

$$y^t \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0) y + 2(\underbrace{U^t b}_{\bar{b}})^t y + c.$$

له صفر څخه مختلف آیگن-ارزبنتونو $\lambda_i \neq 0$ لپاره د نورو ورپسې ځای بدلون له لارې

$$y_i = z_i - \tilde{b}_i / \lambda_i$$

کیدی شیکرنیز ترمونه له خایه یوړل شي (مربعي پوره کونه). ثابتې د

$$c \rightarrow \gamma = c - \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i^2 / \lambda_i.$$

سره سم تغیر خوري، نو اوس له دې سره اوس دا بڼه لرو

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=m+1}^n 2\tilde{b}_i z_i + \gamma.$$

که اوس یو $\tilde{b}_i \neq 0$ د $i \geq m+1$ سره شتون ولري، نو د یوه بل څرخون پسې د

$$z'_i = z_i, \quad i \leq m$$

$$z'_{m+1} = (1/\beta) \sum_{i=m+1}^n \tilde{b}_i z_i, \quad \beta = \pm |\tilde{b}|$$

او په اړونده اورتوگونال د $z'_{m+2}, \dots, z'_n$ سره تکمي شوی

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i (z'_i)^2 + 2\beta z'_{m+1} + \gamma.$$

لاس ته راځي.

له دې سره د β سره مخ نڅېنه پاسي ټاکل کيږي، چې د β سره ویش وروسته لږ تر لږه دومره مثبت لکه منفي ترمونه رامنځ ته شي.

اخرنۍ راکښنه

کرنییز الجبر

$$w_{m+1} = z'_{m+1} + \gamma/(2\beta)$$

$$w_i = z'_i, \quad i \neq m+1$$

ثابت له منځه وړي او بالاخره راځي:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1}.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیگ

کوادریکونه

یا دونه (ژباړی): په سطحه کې یوه کره (کرېنه)، په درې بعدیزه (درېپراخیدونې) فضا کې یوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو یا متحولو له لارې تشریح یا ښوول کېدای شي. پای

$$Q: 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

$$Q: 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

دې په نورمال فورم یا - پښې ترانسفورمې شي.

د ماتریکس لکندود سره لاس ته راځي

$$Q: x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ 10 & 17 & 14 \\ 4 & 14 & 20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -24 \\ -57 \\ -39 \end{pmatrix}, \quad c = 207.$$

سره.

ماتریکس A آیگن – ارزښتونه 36 ، 9 او 0 لري، په دې اړونده نورمي شوي آیگن-

وکتورونه u_i د $\det(u_1, u_2, u_3) = 1$ سره د بېلگې په توګه دي:

$$u_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^t, \quad u_2 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^t, \quad u_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)^t.$$

د ترانسفورمیشن $x = Uy$ پسې د $U = (u_1, u_2, u_3)$ سره لاس ته راځي

$$Q : \quad 36y_1^2 + 9y_2^2 - 144y_1 - 18y_2 + 18y_3 + 207 = 0.$$

د مربعیزې تکمیلونې له لارې

$$z_1 = y_1 - 2, \quad z_2 = y_2 - 1, \quad z_3 = y_3,$$

لاس ته راځي

$$Q : \quad 36z_1^2 + 9z_2^2 + 18z_3 + 54 = 0.$$

راکښنه

$$w_1 = z_1, \quad w_2 = z_2, \quad w_3 = z_3 + 3$$

بالاخره نورمالفورم (- بڼه) راګوي

$$Q : \quad 36w_1^2 + 9w_2^2 + 18w_3 = 0.$$

په ټولیزه توګه ترانسفورمیشن لاندې فورم یابڼه راګوي

کرنییز الجبر

$$x = Uy = Uz + U \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Uw + U \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

پس راکبنه ده

$$v = U \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

او د د کوادریک منح ټکی په گوته کوي.

لیکونکي: اپپ، هیولیک

مخروط غوڅی Kegelschnitt

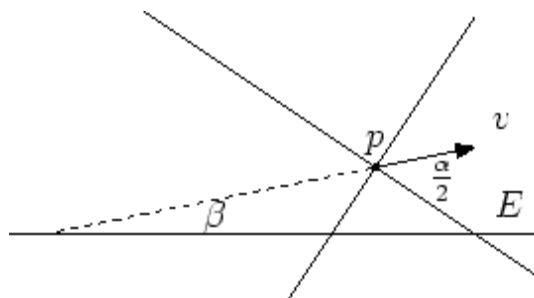
د یوه ډېلمخروط غوڅی

$$K : (x - p)^t v = \pm \cos \frac{\alpha}{2} |x - p| |v|$$

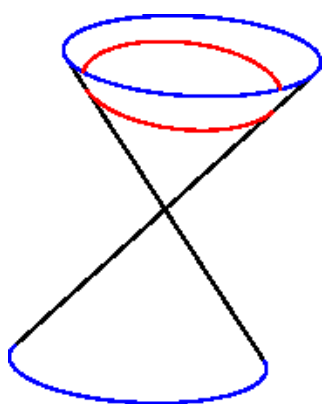
$E : x_3 = 0$ د څوکې $(p_3 \neq 0)$ ، لور v سره او وازولو کونج α د سطحې سره یوه مربعیزه کره ده

$$K \cap E : a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0.$$

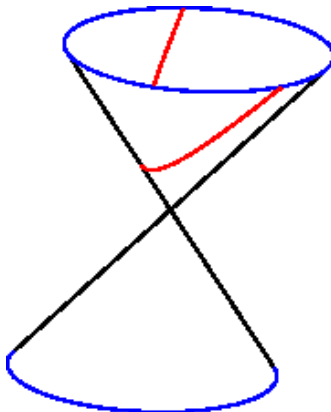
رکرنیز الج



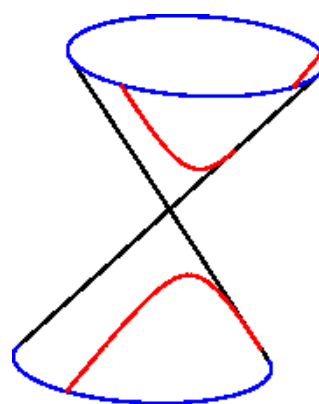
د مخروط غوڅي تیوپ یا ډول د E او کرښې ، $p + tv \quad t \in \mathbb{R}$ ، ترمنځ کونج β د لویوالي په واک کې دی



Ellipsoid: بیضوي یا هگښ
 $\beta > \alpha/2$



Parabel: پارابول
 $\beta = \alpha/2$



Hyperbel: های پارابول
 $\beta < \alpha/2$

لیکونکي: اپې، هیولیگ

د دوه بعدی کوادریکونو د اوکلیدی نورمال بڼه

Euklidische Normalform der zweidimensionalen Quadriken

د سطحیزو کوادریکونو مختلف ډولونه شتون لري، د لاندې نورمال فورمونو سره:

• مخروطی کو ادریکونه

Normalform	Bezeichnung
نورمال بنه	نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Punkt نکی
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidendes Geradenpaar د غوڅوونکو کرښو جوړه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelgerade دبلې کرښې

• منځنۍ کو ادریکونه

Normalform	Bezeichnung
نورمال بنه	نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	(leere Menge) تش ډېری
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Hyperbel های پارابول

$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Ellipse (هگی)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	(leere Menge) تش ډېری
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	paralleles Geradenpaar د کرښو غبرګه جوړه

• پارابولیکي کواډریکونه

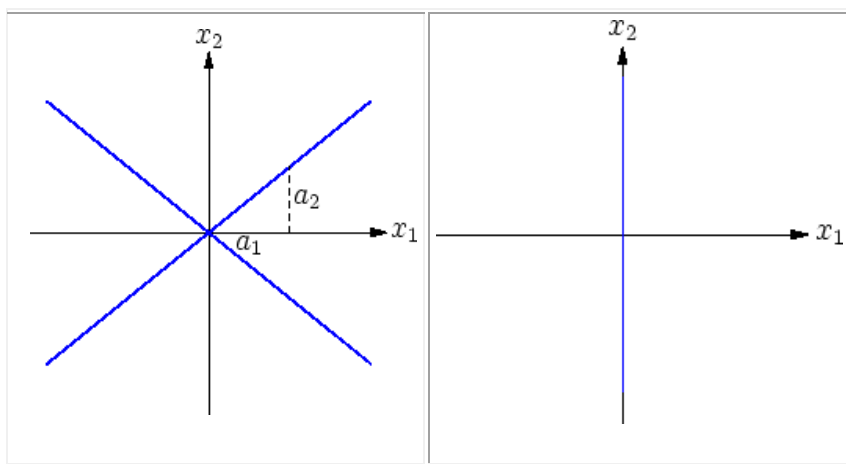
Normalform	Bezeichnung
نورمال بڼه	نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$	Parabel پارابول

نورمالفورمونه یواځني دي، د ایندکسونو یا پېژند نڅښو تر ځای بدلون پورې او د مخروطي کواډریکونو د یوې ثابتې سره د ضرب پورې.

لویې a_i مثبت ایښول کیږي او د کواډریکونو د اصلي محور اوږدوالی بلل کیږي

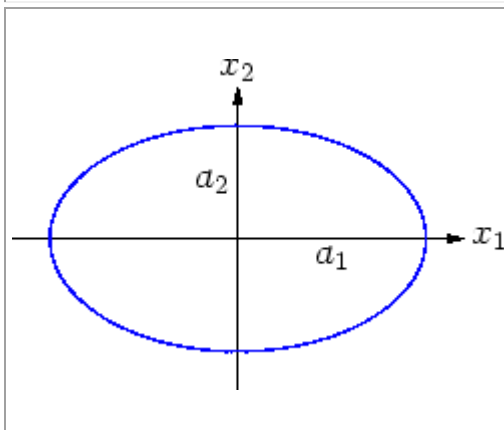
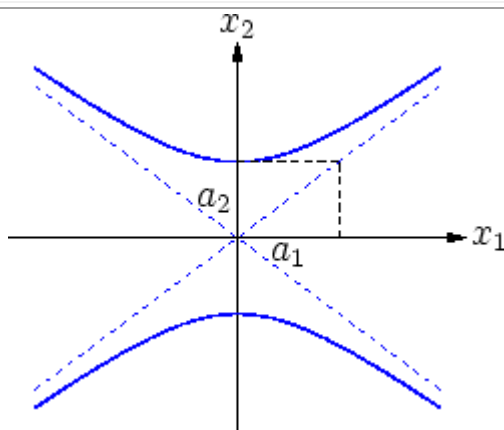
schneidendes Geradenpaar	Doppelgerade
د غوڅیدونکو کرښو جوړه	ډبل کرښې

کرنبیز الجبر



Hyperbel های پارابول

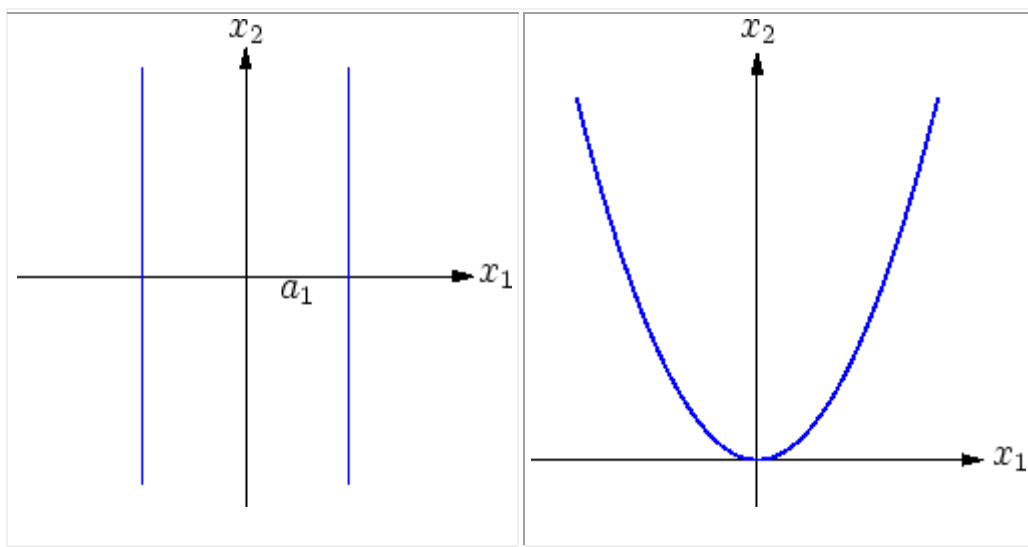
Ellipse بیضوی یا هکی



paralleles Geradenpaar

غبرگه (موازي) کرنجوره

Parabel پارابول



لیکونکي: ایپ، هیولیگ

اوس دې د لاندې کوادریکونو نورمالفورم (- بڼه) او تیوپ وټاکل شي

$$Q: 3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 - 12\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{2}x_2 - 8 = 0$$

ماتریکس فورم د مربعیز فورم څخه په پیل،

$$x^t Ax + 2b^t x + c = x^t \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x + 2\sqrt{2}(-6, -2)x - 8$$

لومړۍ سړۍ د ماتریکس A آیگن - ارزښتونه او آیگن - وکتورونه ټاکي.

کرکترېټیکي پولینوم دی:

$$(3 - \lambda)^2 - 25 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 25 = \lambda^2 - 6\lambda - 16$$

او لاندې صفرځایونه لري

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = 3 \pm 5$$

کرنییز الجبر

و $\lambda_1 = -2$ ته یو نورمي شوی آیگن-وکتور د لاندې کرنییز مساوات د حل څخه لاس ته راوړل کیږي

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} v_1 = 0$$

نو $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^t$ دی. دا چې دویم آیگن-وکتور په په لومړي باید عمود (ولاړ)

وي، نو لاس ته راځي $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^t$ ، د کوم سره چې مخنښه داسې باید ټاکل شوي وي، چې د لاندې ورکړ شوي ترانسفورمیشن ماتریکس دیترمینانت مثبت وي:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

د $x = Uy$ سره ترانسفورمي شوي مساوات لاندې بڼه لري:

$$0 = y^t \tilde{A} y + 2b^t y + c$$

$$= y^t U^t A U y + 2(b^t U) y + c$$

$$= -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8.$$

د مربعیزې پوره ونه یا تکمیلونه راکوي

$$0 = -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8$$

$$= -2(y_1 - 2)^2 + 8(y_2 - 1)^2 - 8$$

$$= -2z_1^2 + 8z_2^2 - 8$$

په همدې ډول

$$\frac{z_1^2}{2^2} - \frac{z_2^2}{1^2} + 1 = 0.$$

نو مساوات یو های پارابول انځوروي.

(Autoren: Höllig/Hörner)

د درې بعدي کواډریکونو د اقلیدس (اویکلید) نورمالفورم

Euklidische Normalform der dreidimensionalen Quadriken

د فضايي کواډریکونو 17 مختلف ډولونه شتون لري د لاندې نورمالفورمونو سره:

• مخروطي کواډریکونه

Normalform	Bezeichnung
نورمال بڼه	نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$	Punkt

کرنییز الجبر

$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$	(Doppel-)Kegel (دبل) مخروط
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Gerade کر بنه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Schneidende Ebenen غوڅونکي سطحي
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelebene دبل سطحي

• منځتکي کوادریکونه

په نڅبنه ونه Bezeichnung	نورمال بڼه Normalform
(leere Menge) (تشپړی)	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$
دوه پوښیز های پرابولونید zweischaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$
یو پوښیز های پرابولونید einschaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$

$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	Ellipsoid ایلیپسویډ
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	(leere Menge) تشډېری
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	hyperbolischer Zylinder هایپر بولیکی توتہ
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	elliptischer Zylinder ایلیپتیکی توتہ
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	(leere Menge) تشډېری
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	parallele Ebenen غبرگی سطحی یا ۰ هواری

• پارابولیکی کوادریکونه

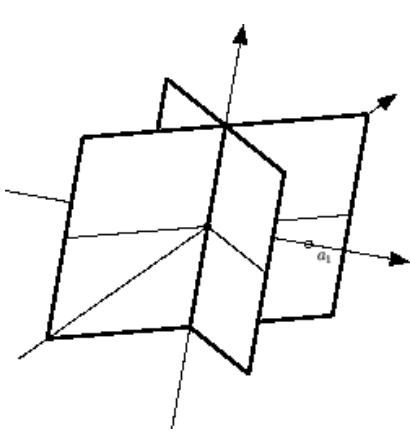
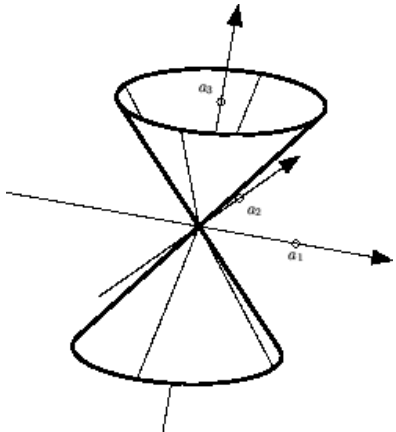
نورمال بڼه	نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$	هگی ډوله ایلیپمیکی پارابولوئید
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$	های پارابولیکی پارابولوئید

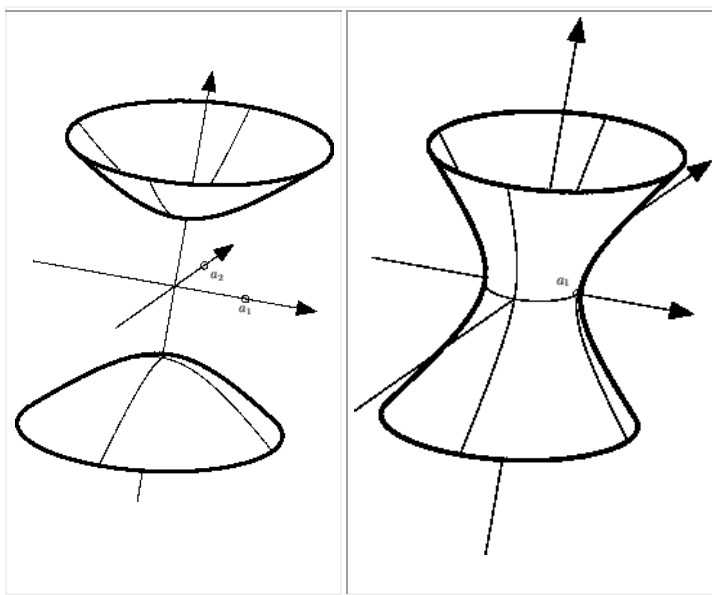
کرنبیز الجبر

$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$	پارابوليکي توتہ
----------------------------------	-----------------

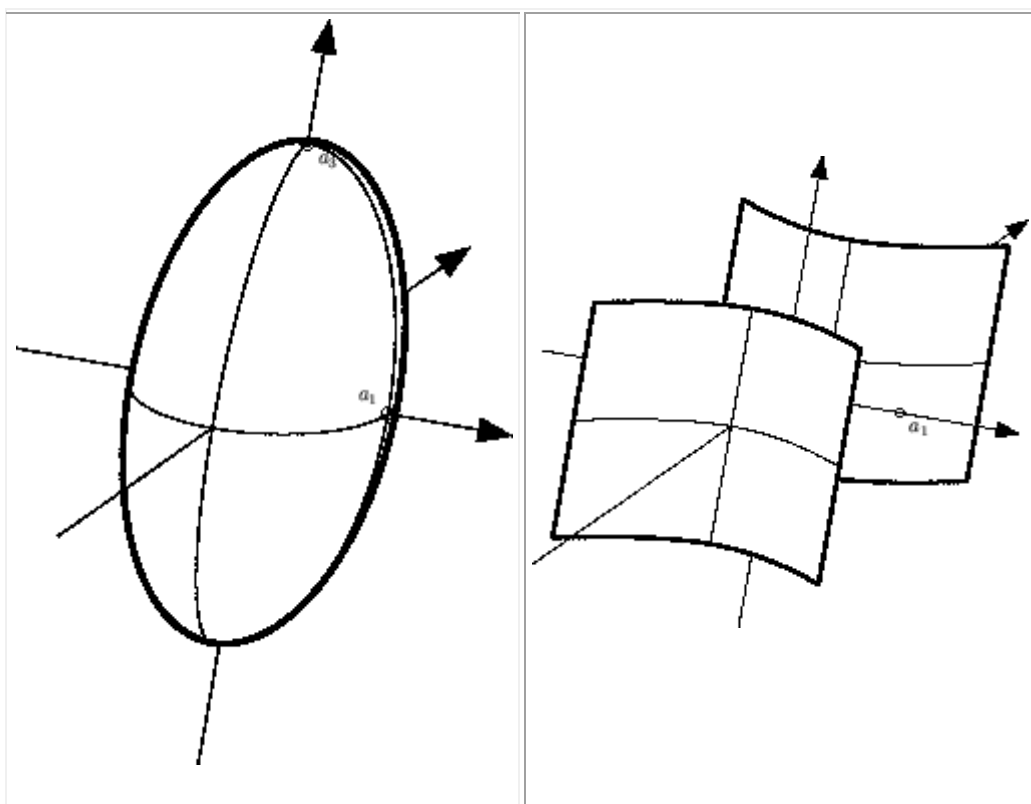
نورمال بنی د ایندکسونو یا پیژند نخبو پورې یواځني ټاکلي او مخروطی کوادریکونه د
 $c \neq 0$
 ثابتې سره د ضرب پورې یواځني ټاکلي.

لویي a_i مثبت اینول کیري او د کوادریکونو د اصلي محور اوږدوالی بلل کیري.

غوڅوونکي سطحې	(ډبل) مخروط
	
یو یوښیز های پارابول	دوه پوښیز های پارابول



های پارابولیکی توتہ hyperbolischer Zylinder	Ellipsoid هکی ډوله یا بیضوي ډوله

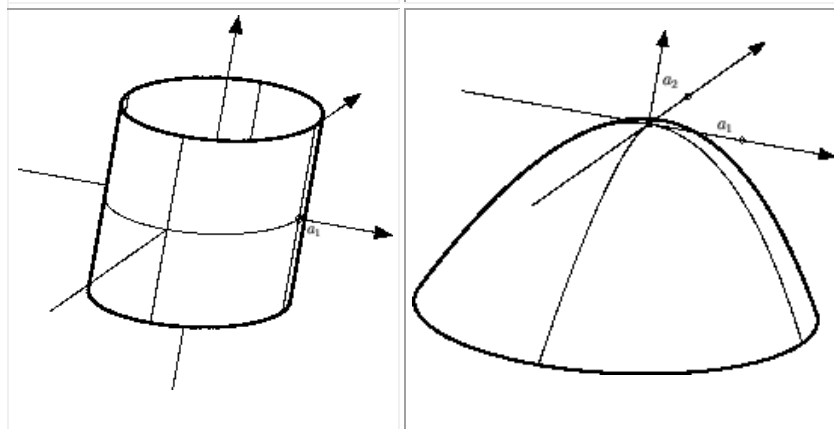


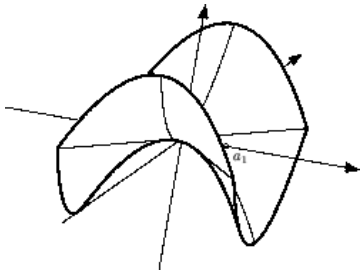
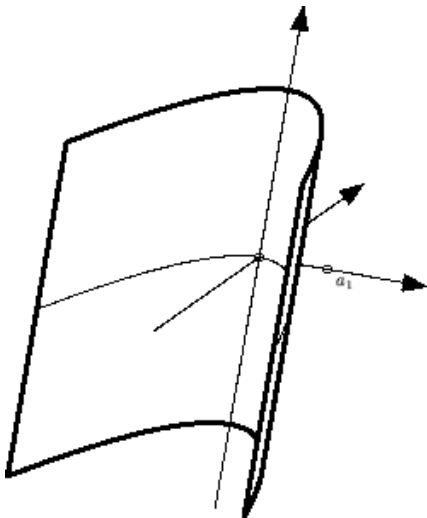
elliptischer Zylinder

بیضوی توتہ

elliptisches Paraboloid

بیضوی پارابولوئید



hyperbolisches Paraboloid	parabolischer Zylinder
های پارابولیکي پارابولوئید	پارابولیکي توتہ یا - استوانہ
	

لیکونکی: هیولیگ، هیرنر

اوس دې د لاندې کوادریکونو نورمال بڼه او تیوپ (ډول) و ټاکل شي:

$$Q: \quad x^t \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + 2(-2, 1, 2)x + 2 = 0$$

د ماتریکس کرکتریسټیکي یا ټاټونکی پولینوم

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81,$$

لاندې صفرځاي لري:

$$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -3.$$

و آیگن – ارزښتونو λ_i ته اړونده نورمي آیگن-وکتورونه دي:

$$v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

جبرته چې مخنځبه داسې ټاکل کيږي، چې ولاړسیستم منځ ته راځي.

د اورتوگونال ترانسفورمیشن ماتریکس په ځای منځ ته راځي:

$$U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

دا د $x = Uy$ سره ترانسفورمي مساوات لاندې بڼه لري:

$$y^t \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y + 2(0, 3, 0)y + 2 = 0.$$

مربعیزه پوره کونه راکوي

$$0 = 9y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2$$

$$= 9y_1^2 + 3(y_2 + 1)^2 - 6y_2 - 3 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2$$

245

رکرنیز الج

$$= 9z_1^2 + 3z_2^2 - 3z_3^2 - 1$$

په همدې توگه

$$\frac{z_3^2}{\frac{1}{3}} - \frac{z_1^2}{\frac{1}{9}} - \frac{z_2^2}{\frac{1}{3}} + 1 = 0 .$$

نور مساوات یو پوښیز های پارابول انځوروي

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

چې غوټي پسي وهي په لاس به درشي

چا وي دا چې په درياب کي گور نه شته

بری د خدای (ج) سره دی.

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب: د شمیرپوهنې برسیره د انجری، فزیک او اقتصاد
لپاره، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه)، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې
شمیرنه، د احتمالي شمیرنه کتاب د بنوونکي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخیال برابر و ن (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کېږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینکمن لیکنې چې له برینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړۍ ټوک

۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک

۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصایه یا ستاتیسټیک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - انالیزی ۱

۷ - انالیزی ۲

۸ - کرنییز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرنییز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده‌کونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

- ۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره
- ۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره
- ۱۸ - ډېری پوهنه يا ست تيوري
- ۱۹ - د شمير پوهنې سم اند (منطق رياضي)
- ۲۰ - د يو څو شمير پوهانو ژوندليک
- ۲۱ - د شمير پوهنې گډې وډې ليکنې
- ۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکي يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگراډ شميرنو ته تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې
- ۲۳ - د شمير پوهنې انگريزي پښتو او عربي + درې ډکشنري
- ۲۴ - د شمير پوهنې پښتو انگريزي ډکشنري
- ۲۵ - د شمير پوهنې پښتو ډکشنري د شمير پوهنيزو ويونو په پښتو روښانه ونه
- ۲۶ - د زړه له کومې
- ۲۷ - د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيرې.
- نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي
- د شتونکارت پوهنتون لکچرونو څخه ، چې د شتونکارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:
- د گروپونو تيوري
- د بنوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه
- له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره بڼه ليکنه ده، چې -د شمير پوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات گټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library