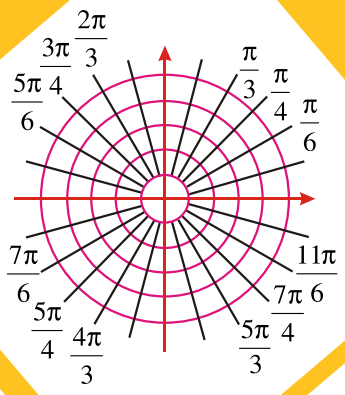
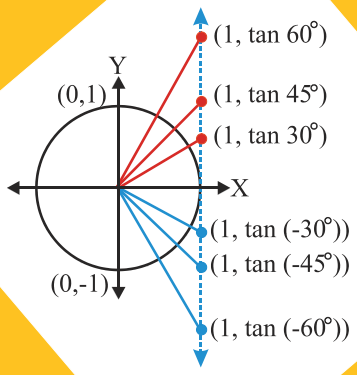
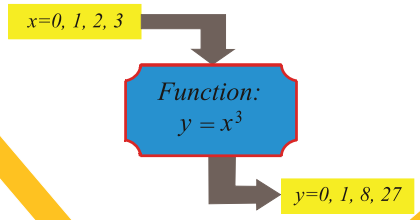
د پوهنې وزارت

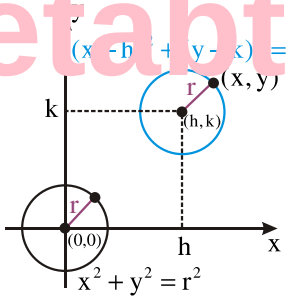
ریاضی

لسم تولگی









Ketabton.com

ریاضی لسم تولگی

۱۳۹۸

ketabton.com - The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر وایو الله اکبر وایو الله اکبر

ketabton.com - The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضي لسم تولگی

۱۳۹۸
هـ . ش.

ketabton.com - The Digital Library

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضياتو ديپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفين

اډيټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډيټ ديپارتمنت غړي

ټولګی: لسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي ریاست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې يې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکيږي.

ketabton.com - The Digital Library

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته يې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه يې برخمن کړي يو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شېرګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، منه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپیڅلي او انسان جوړوونکي هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي ېې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

ketabton.com - The Digital Library

عنوان فهرست مخ

لومړی څپرکی (پولینوم) **۳**

الجبري افادې، د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه، د پولینوم د قیمت او پولینوم دضریبونو د مجموعی پیدا کول، د پولینوم څلور گوني عملیې

د باقي مانده قضیه، فکټور قضیه او ترکیبي وېش

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دویم څپرکی: رابطه **۵۳**

مرتبې جوړې او کارتیز ینې مستوي، د کارتیزینې ضرب حاصل ا و گراف یې

رابطه او معکوسه رابطه.

معادله رابطه.

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دریم څپرکی : تابع **۶۹**

د تابع دلیکلو طریقه او دیوې تابع د قیمت پیدا کول، د تابع د تعریف د ساحې پیدا کول، د یوې تابع گراف او د گراف له مخې

د یوې تابع پېژندنه، د گراف له مخې د یوې تابع د تعریف او د قیمتونو د ناحیو او د تابع قیمتونو پیدا کول، ځینې خاصې تابع گانې او گرافونه یې.متزایدې او متناقصې تابع گانې، جفتې او طاقې تابع گانې د گرافونو انتقال (عمودي انتقال، افقي انتقال او دعمودي او افقي انتقالونو ترکیب، د تابع گانو عملیې د تابع گانو ترکیب، معکوسه تابع، یو په یو تابع، د تابع او د هغې د معکوسي تابع گراف، پولینومي تابع گانې (لومړی او دویمه درجه تابعگاني) او گرافونه یې

ناطقی تابع گانې او گراف یې (عمودي، افقي او مایل مجانبونه)

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

څلورم څپرکی: مثلثاتي تابع گانې **۱۴۹**

زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه، دیوې زاویې معیاري حالت او کوټر مینل زاویې

مثلثاتي تابع گانې او د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو مثلثاتي نسبتونه

د یوې حاده زاویې او نورو زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې

د مثلثاتي تابع گانو گراف

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

پنځم څپرکی: د مثلثاتو تطبیقات **۲۲۳**

د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونه، د دوو زاویو د مجموعې او تفاضل مثلثاتي فورمولونه

د α زاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 2α او 3α زاویو د مثلثاتي نسبتونو پیداکول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل په شکل،

ketabton.com - The Digital Library

عنوان فهرست مخ

د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع يا يې په تفاضل باندې، د قوس اوږد دوالی، د يوې دايرې قطاع او مساحت يې، د دايرې قطعه او مساحت، د مثلث مساحت د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو ترمنځ د زاويې له جنسه، د مثلث مساحت د مثلث د دريو ضلعوله جنسه (د هيرون فورمول) د يوه مثلث د محيطي او محاطي دايرو شعاع ګانې

د څېرکي لنډيز او پو ښتنې

شپږم څېرکی: مختلط عددونه **۲۷۷**

موهومي عددونه او د موهومي عددونو څلورګونې عمليې

د مختلطو عددونو د جمعې او تفريق عمليې

د مختلطو عددونو ضرب، د يو مختلط عدد مزدوج، د مختلط عدد ضربي معکوس

د مختلطو عددونو وېش

د مختلطو عددونو په ساحه کې ددويمې درجې يو مجهوله معادلو حل

د څېرکی لنډيز او پوښتنې

اووم څېرکی تحليلي هندسه **۳۰۵**

د وضعيه کمياتو سيستم او د دوو نقطو ترمنځ فاصله

د هغې نقطې د وضعيه کمياتو پيداکول چې يو قطعه خط په يوه نسبت باندې وېشي

د يوه مستقيم خط ميل

د يوه مستقيم خط معادله (د يو مستقيم خط معياري معادله، دهغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي، دوې نقطې يې معلومې وي. له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي، د مستقيم خط نورمال معادله او د مستقيم خط عمومي معادله)

د يوه مستقيم خط د عمومي معادلې بدلول، د مستقيم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې.

د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه، د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله

دايره او د دايرې معادله، د يوه مستقيم خط حالتونه له يوې دايرې سره، د مماس معادله او د مماس اوږدوالی

د مثلث د مساحت پيداکول چې د راسونو و ضعيه کميات يې معلوم وي.

د څېرکي لنډيز او پوښتنې

اتم څېرکی احصائيه **۳۵۹**

د فريکونسي څو ضلعي ګراف، د ساقې او پاڼې ګراف، ربعي (څلورمې)، صندوقچه يي ګراف، د نارمل منحني د مرکزي ټاکوونکو پرتله کول، ربعي انحراف، واريانس، معياري انحراف،

د څېرکي لنډيز او پوښتنې

نهم څېرکی د رياضي منطق **۳۹۱**

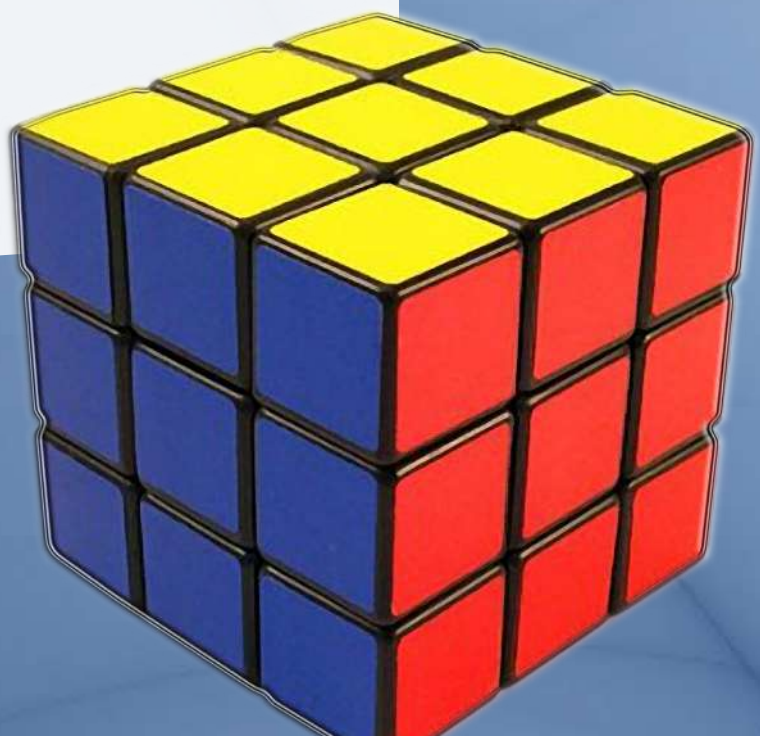
د شهودي درک استدلال، تمثيلي استدلال، استقرايي استدلال، د رياضي د استقرا استدلال، استنتاجي استدلال، د مثال د نفي کولو استدلال، غير مستقيم ثبوت، د رياضي منطق او د بيان استنتاج، د څېرکي لنډيز او پوښتنې

ketabton.com - The Digital Library

لومړی څپرکی
پولینوم
پولینوم(Polynome)
یا (Polynomial)

ketabton.com - The Digital Library

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$



ketabton.com - The Digital Library

الجبري افادې
(Algebraic Expressions)

ایـــا ویـــلای شـئ چـې پـه $\frac{x^4-1}{x^2}$ ، $\sqrt{y^2+1}$ او $x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}+y^3$ الجبري افادو کې کومـه یوه ناطقه اوکومه یوه غیر ناطقه الجبري افاده ده؟

متحول او ثابت (variable and constant): متحول یو سمبول (Symbol) دی چې د یوه غیر خالي ستٔ د هر عنصر په ځای وضع کېږي.یا یو تورې چې قیمتونه یې تغیر کوي د مثال په ډول که $A=\{x/x\in IN \text{ او } x\le 10\}$ وي.

نو د A په ستٔ کې x له یوه څخه تر 10 پورې د طبیعي عددونو قیمتونه اخیستلای شي. x ، ته متحول(Variable) وایي. عموماً متحولونه د انګلیسي ژبې د کوچنیو تورو، لکه: x,y,z او نورو په واسطه ښودل کېږي.

د یوه عدد قیمت تغیر نه کوي، لکه: د 4 عدد هیڅکله له 5 یا 3 او یا کوم بل عدد سره مساوي کېدای نه شي، نو ټول حقیقي عددونه ثابت (Constants) دي.

د حقیقي عددونو سربیره د انګلیسي ژبې تورې، لکه: $a,b,c...$ او نور هم د ثابتو پر ځای کارول کېږي.

الجبري افاده (Algebraic Expression): کېدای شي الجبري افاده له یوه ثابت، یو متحول او یا د ثابتو او متحولونو له ترکیب څخه جوړه شوې وي. د الجبري افادو لاندې مثالونه وګورئ.

$5\sqrt{x}$، $\frac{15}{t^2}+4x+5$، $\sqrt{3}x$، x^2-x+1، x، -12، 12 او داسې نور.

ketabton.com - The Digital Library

په $3x^2$ الجبري افاده کې 3 ته ضريب (Coefficient) وايي. په $-\frac{1}{2}y$ کې د $-\frac{1}{2}$ عدد او په x کې (1) ضريب دی. $-3x^5y^5$ او $15x^5y^5$ مشابه حدونه (Liketerms) دي چې مشابه متحولونه او مساوي توانونه لري، خو عددي ضريبونه يې سره توپير لري.

د الجبري افادو ډولونه: الجبري افادې په درو ډولونو دي.

1- **پولينومي الجبري افادې** (Polynomial algebraic expressions)

پولينوم: هغه يوه يا څو حده الجبري افاده چې د تورو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي، پولينوم نومېږي او x^3-x+1 ، $2x^2+x-1$، $x-1$، 12 پولينومونه دي، خو $x^{-2}+x-1$، $\frac{1}{x}+x$ او $x^3+\sqrt{x}+\frac{y}{x^2}$ پولينومونه نه دي يا د پولينوم مشخصې دا دي:

- د ټولو متحولونو توانونه يې مکمل عددونه وي.
- په مخرج کې متحول ونه لري.
- متحول تر جذر لاندې نه وي.

لومړی مثال: په لاندې راکړل شوو الجبري افادو کې کوم يو پولينوم او کوم يو يې پولينوم نه دي؟

$$a)\sqrt{2}x \quad , \quad b)2\sqrt{x} \quad , \quad c)\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x^3} \quad , \quad d)x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad e)x^{-3}+x^2$$

$$f)8p^2+p^{2.2} \quad , \quad g)9x^2-\frac{7}{x^2} \quad , \quad h)88 \quad , \quad i)6a^2-4a$$

حل: h,a او i پولينومونه دي، خو b,c,d,e,f او g پولينومونه، نه دي. په ياد ولرئ چې هر پولينوم، يوه ناطقه الجبري افاده ده، خو هره ناطقه الجبري افاده پولينوم نه دی. د مثال په ډول:

$x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x}+y^3$ يوه ناطقه الجبري افاده ده، خو پولينوم نه دی.

12 هم يو پولنيوم دی، ځکه چې: $12=12x^0$ دی او صفر هم د مکملو عددونو په سټ کې شامل دی، خو $5\sqrt{x}$ او $\frac{5}{x^3}$ پولينومونه نه دي، ځکه $5\sqrt{x}=5x^{\frac{1}{2}}$، $\frac{5}{x^3}=5x^{-3}$ چې -3 او $\frac{1}{2}$

ketabton.com - The Digital Library

د مکملو عددونو په ست کې شامل نه دي.

پولینوم د یو توري په واسطه، لکه: P سمبول کېږي، یو پولینوم چې له یو متحول څخه جوړ شوی وي عمومي شکل یې په لاندې ډول دی چې د معیاري شکل په نامه یادېږي.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

n یو مکمل عدد او $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n$ ضریبونه دي چې حقیقي عددونه دي. که $a_n \neq 0$ وي، نو n د پولینوم درجه ده.

فعالیت

له $-8x^2$ ، $\sqrt{8}x^3$ ، $\frac{1}{x}$ ، x ، $\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x}+6$ ، $2x^3 - x^2$ او $8\sqrt{x}$ الجبري افادو څخه کومه یوه یې پولینوم دی او کومه یوه پولینوم نه دی؟

دویم مثال: د $P(x) = -5x^3 + x^2 - x + 12$ په پولینوم کې، $n = 3$، $a_n = -5$، $a_2 = 1$، $a_1 = -1$ و $a_0 = 12$ دی. او د $11x^2 - 1$ په پولینوم کې، $n = 2$، $a_n = 11$، $a_1 = 0$، او $a_0 = -1$ دی.

2- ناطقه الجبري افاده (Rational algebraic expression):

که یوه الجبري افاده د $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ په شکل ولیکلای شو چې p او q پولینومونه وي. داسې الجبري افادې ته ناطقه الجبري افاده وایي. د مثال په ډول $x^2 - \frac{1}{x^2}$ چې د $\frac{x^4-1}{x^2}$ په شکل یې هم لیکلای شو چې یو متحول لري یوه ناطقه الجبري افاده ده. څرنګه چې هرې الجبري افادې ته یو مخرج ورکولای شو، نو $(x^2 - 1)$ هم یوه ناطقه الجبري افاده ده، ځکه چې $\frac{x^2-1}{1} = x^2 - 1$ دی.

ketabton.com - The Digital Library

3- غير ناطقه الجبري افاده (Irrational algebraic expression):

داسې يوې الجبري افادې ته چې د دوو پولينومونو د خارج قسمت په بڼه يې نه شو ليکلای، غير ناطقه الجبري افاده ده، لکه: $\sqrt{xy}$، $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ او $\sqrt{y^2+1}$ د غير ناطقو الجبري افادو مثالونه دي.

يوه الجبري افاده کېدای شي چې ناطقه، غير ناطقه او يا پولينومي الجبري افاده وي. پولينوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د تورو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

پوښتنې

1- په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه ناطقه، غير ناطقه او پولينومي الجبري افاده ده؟

$$\frac{1}{x} \quad , \quad \sqrt{x}-\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{3x^2}{2} \quad , \quad \frac{m+3}{6} \quad , \quad x+\frac{1}{x} \quad , \quad 3x^2+\frac{xy}{2} \quad \text{او} \quad 13$$

2- په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه يې يو پولينوم او کومه يوه يې پولينوم نه دی؟

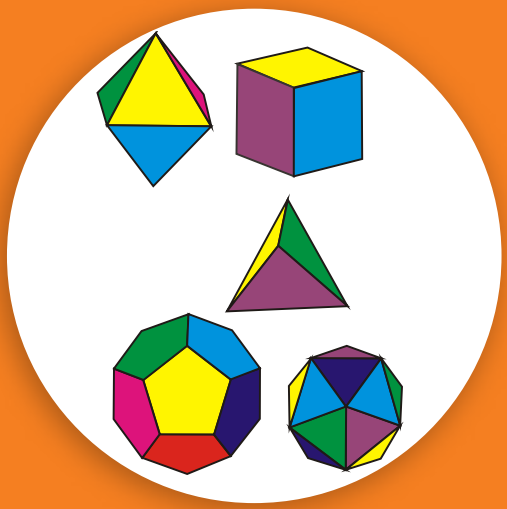
$$3x^2+\frac{xy}{2} \quad , \quad -20a^3b+28ab^4 \quad , \quad \frac{1}{7}x^3-x$$

$$\frac{1}{x}-\frac{x^2}{5} \quad , \quad 8\sqrt{x} \quad , \quad 8x^{-8} \quad , \quad 3x \quad , \quad -0.03$$

3. د $Px^4-ax^3+bx^2+cx+d$ په پولينوم کې، a_1,a_2,a_3,a_n او a_0 وښياست.

4. د $P(x)=\frac{x^3}{2}-2x^2-1$ په پولينوم کې، a_1,a_2,a_3 او a_0 وښياست.

ketabton.com - The Digital Library



د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

آیا ویلای شئ چې د:

$12y^5x^3 + x^4y^3 - 12x^3 - x^2 - x$ او

12 د پولینومونو درجې څو دي؟

مونوم عدد، یو متحول یا د یو عدد او یو یا څو متحولینو د ضرب حاصل دی.

$3x$ یا $16x$ ته مونوم یا (Monomial) (یو حده)الجبري افاده وایي. $x-4$ یا $ab-y$ ته باینوم (Binome) یا (Binomial) (دوه حده) الجبري افاده وایي او د $2x^3-x-1$ الجبري افاده ترینوم (Trinomial) (درې حده) الجبري افاده ده او $\sqrt{2x}-\frac{1}{y}+1$ الجبري افادې ته مولټینوم (Multinomial) وایي. په یوه پولینوم کې مونومونه د پولینوم د حدونو په نامه یادېږي او هر مونوم یو پولینوم دی.

ځینې وختونه پولینوم له یو، دوه، درې او څو متحولونو څخه جوړ شوی وي.

د $2x^3-8x^2+7x+11$ پولینوم د یو متحول، $2x^3-3y$ پولینوم د دوه متحولونو او $x+y+z$ د دریو متحولونو لرونکی پولینوم دی چې په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

متحول	مونوم (یو حده)	باینوم (دوه حده)	ترینوم (درې حده)
یو متحول	$5x^3$	$5y^2+3y$	$3x^2+2x-4$
دوه متحولونه	$7x^2y$	$7x^2-4y^3$	$6x^2+5x-3y^2$
درې متحولونه	$4xyz^2$	$8a^2b+4c$	$3a^2b^2+6c^2-z^5a$

یادونه: باید پام مو وي چې $2\sqrt{xy}, \frac{5}{x}$ او y^{-3} هریو یې مونوم نه دی.

ketabton.com - The Digital Library

فعالیت

د ax^2+bx+c، $2x-y$، 15، $-3x$ او $4x^2-4y$ الجبري افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست.

د یوه پولینوم درجه (Degree of a Polynome): که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د هغه توري لوړ توان د پولینوم درجه ده، لکه: د $-x^3+2x+1+x^5$ د پولینوم درجه 5 ده. که پولینوم له دېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د زیات توان لرونکي مونوم درجه د پولینوم درجه ده، لکه: د $2x^2y^3-5xy^5+x^3y$ د پولینوم درجه 6 ده، ($1+5=6$) او دا پولینوم نظر x ته دریمه درجه او نظر y ته پنځمه درجه پولینوم دی. که د یوه پولینوم درجه یوه وي، خطي پولینوم (Liner Polynome) او که د پولینوم درجه دوه وي، دویمه درجه پولینوم (Quadratic Polynome) او که درجه یې درې وي، دریمه درجه پولینوم (Cubic Polynomial) ورته وایي. او هم د $3x^2$ مونوم دویمه درجه، د $3x^2y^3$ مونوم درجه 5 او د 12 مونوم درجه صفرده. داسې پولینوم ته ثابت پولینوم وایي، ځکه چې $12=12x^0$

ثابت پولینوم: هغه پولینوم دی چې درجه یې صفر وي.یا هغه پولینوم دی چې د ټولو متحولونو ضریبونه یې صفر وي.

لومړی مثال: د m او n قیمتونه پیدا کړئ، که $(2m-4)x^2+(5-n)x+13$ یو ثابت پولینوم وي.

حل: څرنګه چې دا یو ثابت پولینوم دی، نو د هر حد د متحول ضریب یې صفر دی.

نو:

$$5-n=0 \qquad 2m-4=0$$
$$n=5 \qquad 2m=4$$
$$m=2$$

صفري پولینوم (Zero Polynome): که د ثابت پولینوم ثابت حد صفر وي، داسې پولینوم ته صفري پولینوم وایي، لکه: $P(x)=0$ ، د صفري پولینوم درجه تعریف شوې نه ده.

ketabton.com - The Digital Library

دويم مثال: د a قيمت پيدا کړئ که چېرې $(b-4)x^3-(2c+6)x+(a-b+c)$ يوصفري پولينوم وي.

حل: په صفري پولينوم کې هر حد صفر وي، نو:

$b-4=0$	$2c+6=0$	$a-b+c=0$
$b=4$	$2c=-6$	$a-4-3=0$
	$c=-3$	$a=7$

دريم مثال: د $P(x)=x^2-1+3x^5$ ، $g(x)=2xy^2-x^2y^3$ او $h(x)=\sqrt{3}$ د پولينومونو درجې پيدا کړئ.

حل: د $P(x)$ د پولينوم درجه 5 د $g(x)$ د پولينوم درجه هم 5 ده، $(n=5)$ خو د $h(x)$ د پولينوم درجه صفر ده.

فعاليت

د هر پولينوم درجه څو ده؟ او هم د دې پولينومونو درجې نظر هر توري ته پيدا کړئ.

$x^2-x^3+2x+5x^5$, $x-1$, 15 , $2m^3n^2-3mn^3-mn$

مکمل او ناقص پولينومونه: مکمل پولينوم هغه پولينوم دی چې له لوړ توان څخه تر ثابت عدد پورې ټول حدونه ولري $x^3+1+2x-x^2$, $x-1$ او 51 مکمل پولينومونه دي، خو x^2-1 او x^3+x+1 ناقص پولينومونه دي. موږ کولای شو دا ناقص پولينومونه د مکملو پولينومو په شکل وليکو، لکه: $x^2-1=x^2+0\cdot x-1$ او $x^3+x-1=x^3+0\cdot x^2+x-1$

منظم او غير منظم پولينومونه: د $2x^3-3x^2+4x-1$ يا $-11+12x+13x^2-x^3$ پولينومونه منظم، خو د $3x^4-x+1+x^3+x^2$ پولينوم يو غير منظم پولينوم دی. کولای شو چې يو غير منظم پولينوم د منظم پولينوم په شکل وليکو، لکه: همدا پولينوم په دوه ډوله د منظم پولينوم په شکل ليکلای شو. $3x^4+x^3+x^2-x+1$ يا $1-x+x^2+x^3+3x^4$

ketabton.com - The Digital Library

نزولي او صعودي پولينومونه

:(Descending and ascending Polynomes)

که يو پولينوم د متحول له لوړ توان څخه ټيټ توان ته ترتيب شوی وي، نزولي او که له ټيټ توان څخه لوړ توان ته ترتيب شوی وي، صعودي ترتيب ورته وايي.

د مثال په ډول $x^4+3x^3+x^2+x+1$ پولينوم په نزولي ترتيب او د $1+x+x^2+3x^3+x^4$ پولينوم په صعودي ترتيب ليکل شوی دی.

که يو پولينوم له دوو يا څو تورو څخه جوړ شوی وي، نو موږ کولای شو نظر هر توري ته يې په صعودي يا نزولي ډول ترتيب کړو، لکه: د $x^3y+3x^2y^2+2xy^3-5y^4$ پولينوم نظر x ته په نزولي ډول او نظر y ته په صعودي ډول ترتيب شوی دی.

فعاليت

دا پولينومونه په صعودي ډول ترتيب کړئ:

$$4x-5+6x^2+8x^3 \quad , \quad 2y^2-4y+3-3y^4+y^3 \quad , \quad 2a^3-5+4a^4+a^5+3a^2+a$$

څلورم مثال: د $P(y)=4xy^4-3x^3y^2+2x^2y^3+x^4+y^5$ پولينوم نظر y ته په صعودي ترتيب وليکئ:

حل

$$P(y)=x^4-3x^3y^2+2x^2y^3+4xy^4+y^5$$

معادل پولينومونه: هغه پولينومونه دي چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي.

پنځم مثال: که د x^2+3x+2 او $m(x-1)^2+n(x-1)+P$ پولينومونه سره معادل وي، د n,m او p قيمتونه پيدا کړئ.

حل

$$m(x^2-2x+1)+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2-2mx+m+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2+(-2m+n)x+(m-n+p)=1x^2+3x+2$$

ketabton.com - The Digital Library

په نتيجه کې:

$$m = 1$$
$$-2m + n = 3 \quad \Rightarrow n = 5$$
$$m - n + p = 2 \quad \Rightarrow p = 6$$

متجانس پولينومونه (Hemogence Polynomes): چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، لکه: د $2x^2 + y^2 - z^2$ يو متجانس پولينوم دی.

شپږم مثال: که د $3x^2y + 5x^m z - 7y^{n-3}z^2$ پولينوم متجانس وي، د m او n قيمتونه پيدا کړئ.

حل:

$$m + 1 = 2 + 1 \qquad n - 3 + 2 = m + 1$$
$$m = 2 \qquad n - 1 = m + 1$$
$$n - 1 = 2 + 1$$
$$n = 4$$

که پولينوم له يوه توري څخه جوړ شوی وي، د دې توري لوړ توان د پولينوم درجه ده او که پولينوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د لوړ توان لرونکي مونوم درجه د دې پولينوم درجه ده. هغه پولينومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولينومونو په نامه يادېږي او هغه پولينوم چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، متجانس پولينوم دی.

ketabton.com - The Digital Library

پونښتنې

1- په لاندې افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست او درجې یې پیدا کړئ.

$$\frac{1}{2}x^2y^5 \quad , \quad x^2-y+4 \quad , \quad x-1$$
$$x-x^2-x^3 \quad , \quad 12x \quad , \quad -12$$

2- په لاندې پولینومونو کې مکمل او ناقص پولینومونه وښیاست او بیا ناقص پولینومونه د مکملو پولنیومونو په شکل ولیکئ.

$$x \quad , \quad x+1 \quad , \quad x^2-1 \quad ,$$
$$2x^2-2x-2 \quad , \quad 15 \quad , \quad x^3+x-1$$

3- لومړی د لاندې پولینومونو درجې پیدا کړئ او بیا یې په نزولي ډول ترتیب کړئ.

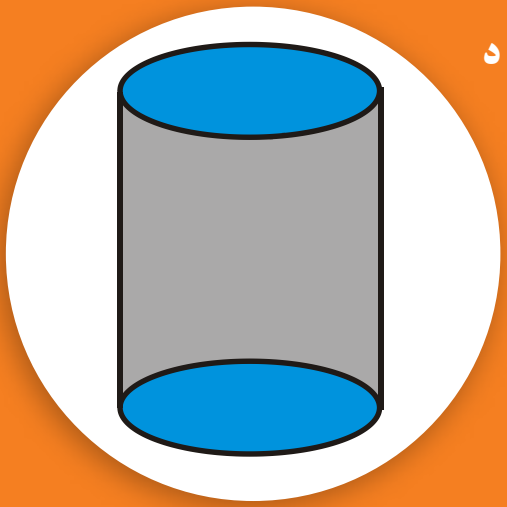
$$4x-5+6x^2+8x^3$$
$$2y^2-4y+3-3y^4+y^3$$
$$1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$$

4- که $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ وي د n, p او c قیمتونه پیدا کړئ.

5- د a, b او c قیمتونه پیدا کړئ که $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ او $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ معادل پولینومونه وي.

6- که $5xy^2+8x^pz-3y^{m-3}z^2$ یو متجانس پولینوم وي، د m او p قیمتونه پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library



د پولینوم د قیمت او د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول

آیا ویلای شئ د $x=-1$ لپاره د $P(x)=x^3-x^2-x-1$ پولینوم قیمت څو دی؟ یا $P(-1)=?$

که په یوه پولینوم کې د متحول پر ځای یو حقیقي عدد (د متحول خاص قیمت) وضع کړو، یو حقیقي عدد په لاس راځي چې دا حقیقي عدد ددې پولینوم قیمت دی. د $x=2$ لپاره د $P(x)=3x+2$ پولینوم قیمت $P(2)=3\cdot 2+2=8$ دی.

لومړی مثال: د $P(x)=2x^2-7x+1$ پولینوم قیمتونه د $P(5)$، $P(-1)$ او $P(0)$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

$$P(5)=2\cdot 5^2-7(5)+1=50-35+1=51-35=16$$

$$P(0)=1$$

$$P(-1)=2(-1)^2-7(-1)+1=2+7+1=10$$

فعالیت

د $P(x)=x^5-x^3-x-1$ پولینوم لپاره $P(0)$، $P(-1)$ او $P(1)$ پیدا کړئ.

دویم مثال: که $P(x)=16x^3-8x^2+\frac{3}{4}$ وي، نو $P(-\frac{1}{4})$ پیدا کړئ.

حل:

$$P(-\frac{1}{4})=16(-\frac{1}{4})^3-8(-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}=16(-\frac{1}{64})-8(\frac{1}{16})+\frac{3}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-1-2+3}{4}=\frac{-3+3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

ketabton.com - The Digital Library

دریم مثال: لکه: څرنګه چې پوهېږئ د دایرې محیط (Circumference) د $C = 2\pi r$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې چېرې $\pi = \frac{22}{7}$ او د دایرې شعاع $r = 3\frac{1}{2}cm$ وي، نو د دې دایرې محیط (C) پیدا کړئ.

حل

$$C = 2\pi r = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{2} cm = 22cm$$

څلورم مثال: که a, b او c د مثلث د ضلعو اوږدوالی او p د مثلث د محیط نیمایي وي یعنې $p = \frac{a+b+c}{2}$، د مثلث مساحت د دې فورمول په واسطه لاس ته راځي.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که په یوه مثلث کې د ضلعو اوږدوالی $a = 9cm, b = 12cm$ او $c = 15cm$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$$

$$= \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 9^2} = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54cm^2$$

فعالیت

د استوانې حجم د $V = \pi r^2 h$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې V د استوانې حجم، r د قاعدې شعاع او h د استوانې لوړوالی دی. که د یوې استوانې $r = 5cm$ او $h = 21cm$ وي، ددې استوانې حجم پیدا کړئ.

د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول:

که $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ وي، د ضریبونو مجموعه یې $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ ده.

پنځم مثال: د $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل: $p(1)$ پیدا کوو: $P(1)=2\cdot1^3+5\cdot1^2-3\cdot1+1=2+5-3+1=5$

که پولینوم له څو تورو څخه جوړ شوی وي، د هر توري پر ځای یو (1) وضع کوو، لکه: د $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ د ضریبونو د مجموعې د پیداکولو لپاره د x او y پر ځای یو (1) وضع کوو:

$$1^4+4\cdot1^3\cdot1+6\cdot1^2\cdot1^2+4\cdot1\cdot1^3+1^4=1+4+6+4+1=16$$

شپږم مثال: د $(x-3y)^4$ د ضریبونو مجموعه پیداکړئ.

حل:

$$(1-3\cdot1)^4=(1-3)^4=(-2)^4=16$$

اووم مثال: د $(7x^2-5x-1)^{600}(2x^3-1)^{17}(x+2)^4$ د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل:

$$(7\cdot1^2-5\cdot1-1)^{600}(2\cdot1^3-1)^{17}(1+2)^4=(1)^{600}(1)^{17}(3)^4=81$$

اتم مثال: که ددې توپ شعاع $6cm$ وي، ددې توپ حجم پیداکړئ.

حل:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6cm)^3=\frac{4}{3}\pi(216cm^3)=288\pi cm^3$$

د x د راکړل شوي قیمت لپاره د $P(x)$ په پولینوم کې د x پر ځای راکړل شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي که په یوه پولینوم کې د توري (متحول) پر ځای یو وضع شي د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راځي.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1. که $p(x) = -x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ وي $p(-1)$ او $p(\frac{1}{2})$ پیدا کړئ.

2. د $p(x) = kx^3 - x^2 + 3x - 1$ په پولینوم کې که $p(2) = 17$ وي د k قیمت پیدا کړئ.

3. که د $mx^2 - 2x + 1$ د ضریبونو مجموعه 18 وي د m قیمت پیدا کړئ.

4. د $x = -\frac{1}{2}$ لپاره د $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

5. د $A = x^2 - 4x + 4$ ☐ $B = -4x^3 + 10x^2$ ☐ $C = -x + 3x^4 - 6x^3$ او $D = x^2 + 4x - 4$ په پولینومونو کې د $x = 4$ لپاره د کوم پولینوم قیمت له 100 څخه زیات دی؟

a) C b) D c) A d) B

6. په لاندې پولینومونو کې د $x = 5$ لپاره د کوم پولینوم قیمت تر ټولو زیات دی؟

a) $x^2 - 2x + 6$

b) $3x^4 + 6x + 12$

c) $-x^3 - 40x - 300$

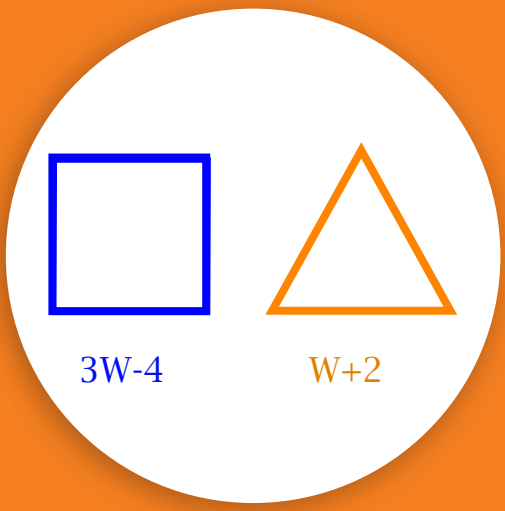
d) $x^5 - 120x^4 + 10$

7. که $p(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ وي، $p(-1)$، $p(0)$، $p(\frac{1}{2})$ او $p(-\frac{1}{2})$ پیدا کړئ.

8. د $x = 2$ لپاره د $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{7}{8}$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

د پولینوم څلورګوني عملیې



که د مربع هره ضلع $3w-4$ او د متساوي الاضلاع مثلث هره ضلع $w+2$ وي، یوه الجبري افاده ولیکئ چې د دواړو شکلونو محیط ښکاره کړي.

که $A=8x^2-2x+3$ او $B=9x-5$ وي، $A+B$ او $A-B$ پیدا کړئ.

1 د جمعې عملیه: مشابه حدونه (Like terms) یو له بل سره جمع کېږي او هم مشابه حدونه یو له بله تفریق کېږي، دا دواړه عملیې په افقي او عمودي ډول سر ته رسیدلای شي.

لومړی مثال: که $A=-3cd^2-2cd+5$ او $B=9cd-7cd^2-5$ وي $A+B$ پیدا کړئ.

حل:

$$A+B=(-3cd^2-2cd+5)+(9cd-7cd^2-5)$$
$$=-3cd^2-2cd+5+9cd-7cd^2-5=-10cd^2+7cd$$

فعالیت

که $A=ab^2+3a$, $B=2ab^2+3a-2$ او $C=2a+4$ وي، د دې درې واړو پولینومونو د جمعې حاصل پیدا کړئ. $(A+B+C=?)$

دویم مثال: جمع یې کړئ که: $A=1+2x+3x^2$, $B=3x-5-2x^2$ او هم که $C=x^2-5x+4$ او

$A=a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b$, $B=a^3b^2-2a^2b^3+4b-4$ او $C=a^4b+a^3b^2-2c$ وي.

حل: لومړی پولینومونه په منظم ډول لیکو او بیا مشابه حدونه سره جمع کوو.

ketabton.com - The Digital Library

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x+1 \\ -2x^2+3x-5 \\ +\quad x^2-5x+4 \\ \hline 2x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^4b-2\ a^3b^2-3a^2b^3\quad -4c-2b \\ a^3b^2-2a^2b^3\qquad +4b-4 \\ a^4b\ +\ a^3b^2\qquad\qquad -2c \\ \hline 2a^4b\qquad -5a^2b^3\ -6c\ +2b-4 \end{array}$$

2- **د تفریق عملیه**: د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعې معکوس له مفروق منه سره جمع کوو. یا په بل عبارت د مفروق علامې تغیروو او له مفروق منه سره یې جمع کوو.

لومړی مثال: د B پولینوم د A له پولینوم څخه تفریق کړئ، که $A=-x^3+x^2+x-7$ او $B=-x^3+x^2+4x+3$ وی او هم که $A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2$ او $B=b^2-3c^2-3d^2-3e^2-f^2$ وي.

حل:

$$\begin{array}{r} A=-x^3+x^2+x-7 \\ -B=\mp x^3\pm x^2\pm 4x\pm 3 \\ \hline A-B=\qquad -3x-10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2 \\ B=\pm b^2\ \mp 3c^2\ \mp\ 3d^2\ \mp 3e^2\mp f^2 \\ \hline A-B=b^2\ +\ c^2\ +\ d^2\ +e^2+f^2 \end{array}$$

یا

$$-x^3+x^2+x-7-(-x^3+x^2+4x+3)$$
$$=-x^3+x^2+x-7+x^3-x^2-4x-3$$
$$=-3x-10$$

باید په یاد ولرو چې د یو پولینوم د ساده کولو لپاره مشابه حدونه (Like terms) سره جمع یا تفریقوو. د مثال په ډول

a) $x^2+6x^4-8+9x^2+2x^4-6x^2=8x^4+4x^2-8$

b) $3x-x-1+3-2x=2$

c) $2x^2-x-x^2-x-2=x^2-2x-2$

d) $6xy-xy-x-y+2x=5xy+x-y$

e) $mn-4+mn-5=2mn-9$

ketabton.com - The Digital Library

فعالیت

په لاندې پولینومونو کې مشابه حدونه (Like terms) وښیاست.

$-t+5t^2-6t^2+6t-3$ $\qquad$ $9rs-2r^2s^2+4r^2s^2+3rs-7$

$3p-4p^2+6p+10p^2$ $\qquad$ $2fg+f^2g-fg^2-2fg+3f^2g+5fg^2$

دویم مثال: د $a^4+2a^3b-3ab^3+a^2b^2$ له پولینوم سره کوم پولینوم جمع کړو چې د جمعې حاصل یې $2a^4-3a^3b-3ab^3-b^4+a^2b^2$ شي؟

حل:

$$\begin{array}{l} 2a^4-3a^3b+a^2b^2-3ab^3-b^4 \\ -a^4\pm 2a^3b\pm a^2b^2\mp 3ab^3 \\ \hline a^4-5a^3b \qquad\qquad -b^4 \end{array}$$

فعالیت

د $2x^2-4x+6$ او $3x^2-x^3-3$ پولینومونو مجموعه د x^3+x^2-2x او $-2x^3+3x-7$ پولینومونو له مجموعې څخه تفریق کړئ.

دریم مثال: تفریق یې کړئ.

$$\begin{array}{l} 202x^4y-303x^3y^2-101x^2y^3-404xy^4-505y^5 \\ -101x^4y\mp 303x^3y^2\pm 101x^2y^3\mp 404xy^4\pm 505\ y^5 \\ \hline 101x^4y \qquad -202x^2y^3 \qquad -1010y^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3ax-5bx-8cx-11dx \\ \pm 3ax\mp 5bx\mp 8cx\mp 11dx \\ \hline 0 \end{array}$$

څلورم مثال: مشابه حدونه (Like terms) سره جمع او ساده یې کړئ.

$20-k-k-10-6-k^2=-k^2-2k+4$ $\qquad$ $8-10+x-7+x=2x-9$

$y^2-1+y^2-1=2y^2-2$ $\qquad$ $ab+a-b-a=ab-b$

ketabton.com - The Digital Library

$$4b^3-2b^2-2+b-4b^3+b^2+b^2-b+2=0$$

$$x^2-5x-2x^2+5=-x^2-5x+5$$

بايد په ياد ولرو چې که Q,P او R پولينومونه وي، نو

(د جمعې د عملیې تبديلي خاصيت)..... $P+Q=Q+P$

(د جمعې د عملیې اتحادي خاصيت)..... $P+(Q+R)=(P+Q)+R$

(د ضرب توزيعي خاصيت پر جمع باندې)..... $P(Q+R)=PQ+PR$

يا $(Q+R)P=QP+RP$

د پولينومونو د جمعې او تفريق په عمليو کې مشابه حدونه سره جمع او يا يو له بله تفريق کېږي د پولينومونو د جمعې په عمليه کې د تبديلي او اتحادي خاصيتونه صدق کوي او د تفريق په عمليه کې د مفروق جمعې معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي او د ضرب توزيعي قانون پر جمع باندې په پولينومونو کې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. د دوو پولينومونو مجموعه x^2+2x-y^2 ده، که يو پولينوم $x^2-2xy+3$ وي، بل پولينوم پيدا کړئ.
2. د $3x^4+5x^3+2x^2-x+1$ پولينوم له $4x^4+2x^2+x^3-x+1$ پولينوم څخه تفريق کړئ.
3. د $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ پولينوم څخه د $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ پولينوم تفريق کړئ.
4. که $A=a^3+2a^2-6a+7$ او $B=a^3+2a+5$, $C=2a^3-a^2+2a-8$ وي ددې درې واړو پولينومونو مجموعه پيدا کړئ. ($A+B+C=?$)
5. د $(2a+4)+(2ab^2+3a-2)+(ab^2+3a)$ افادې د جمعې حاصل مساوي دی، په:

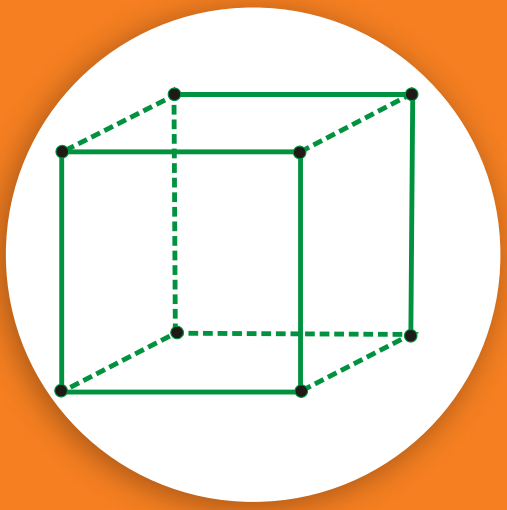
a) $-3ab^2+8a+2$ b) $3ab^2+8a$ c) $3ab^2+8a+2$

6. جمع يې کړئ.

$$(3a^2b^2+2a^2-5ab)+(-3ab+a^2-2)+(1+6ab)$$

7. که دوه الوتکې له يوه هوايي ډګر څخه يو د بل مخالف لوري ته والوزي، که 2 ساعتونه وروسته د يوې الوتکې واټن له هوايي ډګر څخه $x^2+2x+400$ ميله وي او دبلې الوتکې واټن له هوايي ډګر څخه $3x^2-50x+100$ ميله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واټن(فاصله) پيدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library



د پولینومونو ضرب

د هغه مکعب حجم به څومره وي چې هره ضلع یې $(x+1)$ سانتي متره وي؟

د مونوم ضرب په مونوم کې: که د $3r^2s^3$ مونوم د $5r^4s^5$ په مونوم کې ضرب کړو، د ضرب حاصل یې $(3r^2s^3)(5r^4s^5)=15r^6s^8$ کېږي.

فعالیت

د $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$, $(-\frac{1}{3}x)(-x)$ او $(-30a^2b)(-5ab)$ سره ضرب کړئ.

لومړی مثال: د لاندې مونومونو د ضرب حاصل پیدا کړئ.

$(-5y^a)(5y)=-25y^{a+1}$ $\quad$ $\frac{1}{4}(4)^2(\frac{1}{2})^2=(\frac{16}{4})(\frac{1}{4})=\frac{16}{16}=1$

$(-4s^2t^2)(2st^3)=-8s^3t^5$ $\quad$ $(-2a)^3(-2a)^2=-32a^5$

$-a^{2x}(-2a)=2a^{2x+1}$ $\quad$ $x(x^m)=x^{m+1}=x^{1+m}$

$(-\frac{1}{2}a)(-\frac{1}{2}a)=\frac{1}{4}a^2$ $\quad$ $(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)=\frac{125}{8}m^3n^3$

$(-0.1)(-0.1)(-0.1)=-0.001$ $\quad$ $(-a^b)(-a)=a^{b+1}=a^{1+b}$

$(-mn)(-mn^2)=m^2n^3$ $\quad$ $(0.01p)(0.01p)=0.0001p^2$

$(0.1x^2)(0.1x^2)=0.01x^4$

د مونوم ضرب په پولینوم کې:

دویم مثال: د ضرب لاندې حاصل لاس ته راوړئ.

$(2m^2n^3)(1-4mn^4)=2m^2n^3-8m^3n^7$ $\quad$ $x^3(x-x^2y^4)=x^4-x^5y^4$

$-3b(5b^4-8b+12)=-15b^5+24b^2-36b$

$-4s^2t^2(5s^2t+6st-2s^2t^2)=-20s^4t^3-24s^3t^3+8s^4t^4$

ketabton.com - The Digital Library

فعالیت

د هغه مکعب حجم پیداکړئ چې اوږدوالی یې، $2x$، سور یې x او لوړوالی یې $x+2$ وي.

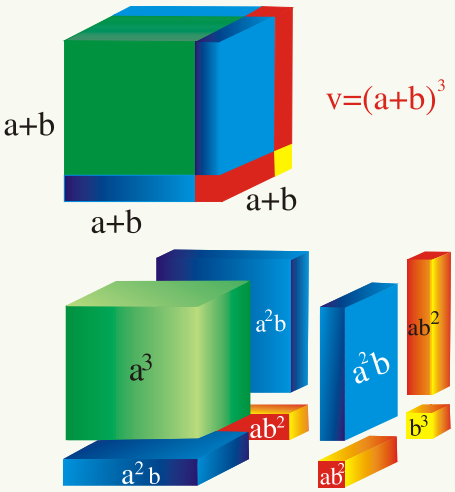
د پولینوم ضرب په پولینوم کې:

دریم مثال: a: د $(x-4)(x-5)$ د ضرب حاصل لاس ته راوړئ.

حل: $(x-4)(x-5)=x^2-5x-4x+20=x^2-9x+20$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$



c: که $P(x)=x^3+2x$ او $Q(x)=2x^2-x+1$ وي. $P(x)\cdot Q(x)$ پیداکړئ.

$$P(x)\cdot Q(x)=(x^3+2x)\cdot(2x^2-x+1)$$

$$=x^3\cdot 2x^2+x^3(-x)+x^3\cdot 1+2x\cdot 2x^2+2x(-x)+2x\cdot 1$$

$$=2x^5-x^4+x^3+4x^3-2x^2+2x=2x^5-x^4+5x^3-2x^2+2x$$

ketabton.com - The Digital Library

څلورم مثال: لاندې افادې د a^3+b^3 او a^3-b^3 مطابقتونو په مرسته ضرب کړئ.

حل

a) $(x^m+y^n)(x^{2m}-x^m y^n+y^{2n})=(x^m+y^n)[(x^m)^2-(x^m)(y^n)+(y^n)^2]$

$=(x^m)^3+(y^n)^3=x^{3m}+y^{3n}$

b) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$

$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$

$=[(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3][(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3]=[(\sqrt{x})^3]^2-[(\sqrt{y})^3]^2$

$=(x^{\frac{3}{2}})^2-(y^{\frac{3}{2}})^2=x^3-y^3$

په یاد ولرئ چې که Q,P او R پولینومونه وي

$P\cdot Q=Q\cdot P$ (د ضرب د تبدیلی خاصیت)

$P\cdot(Q\cdot R)=(P\cdot Q)\cdot R$ (د ضرب اتحادی خاصیت)

فعالیت

که $P(x)=2x^2-x-1$ او $Q(x)=4x-8$ وي، د ضرب د تبدیلی او اتحادي خاصیتونه په کې وڅېړئ.

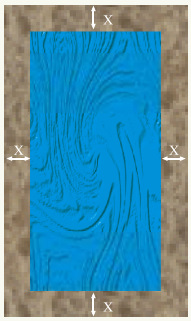
په لاندې جدول کې د هندسی شکلونو مساحت (Area) پیدا کړئ.

مساحت	راکړ شوی اوږدوالی	هندسي شکلونه
n^2+n-20	اوږدوالی یې $n+5$ اوسور یې $n-4$	مستطیل
$6y^2+3y-3$	اوږدوالی یې $3y+3$ اوسور یې $2y-1$	مستطیل
$b^3-\frac{5}{2}b^2+2b-5$	قاعده یې $2b-5$ او لوړوالی یې b^2+2	مثلث
$m^2+26m+169$	هره ضلع یې $m+13$، ده	مربع
$4g^2-16g+16$	هره ضلع یې $2g-4$ ده	مربع
$(9c^2+12c+4)\pi$	شعاع یې $3c+2$ ده	دایره

ketabton.com - The Digital Library

فعالیت

د $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.



پوښتنه: د یوه حوض څلورو خواوو ته له سمنټو څخه پخه شوې لاره ده، که د دې لارې سور x مترہ وي او د حوض اوږدوالی او سور په ترتیب سره 50m او 25m وي د لارې مساحت معلوم کړئ.

حل: د لارې او حوض مجموعي مساحت

$$A=(25+2x)(50+2x)=1250+150x+4x^2$$

د حوض مساحت: $(25m)(50m)=1250m^2$

د لارې مساحت: $1250+150x+4x^2-1250=4x^2+150x$ د

پولینومونو په ضرب کې کېدای شي، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو او د ضرب په عملیه کې د تبدیلی، اتحادي او د ضرب توزیعي خاصیت په جمع باندې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. ضرب یې کړئ: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$, $-2xy(2x^2+2y^2-2)$

2. یو بکس چې لوړوالی یې x انچه، اوږدوالی یې $(x+1)$ او سور یې $2x-4$ انچه دی، که لوړوالی یې 3 انچه وي، د دې بکس حجم مساوي دی، په:

a) $40in^3$ b) $24in^3$ c) $48in^3$ d) $20in^3$

3. د $\left(\frac{a^p}{a^{-q}}\right)^{p-q}\left(\frac{a^q}{a^{-r}}\right)^{q-r}\left(\frac{a^r}{a^{-p}}\right)^{r-p}$ د ضرب حاصل مساوي دی، په:

a)1 b)-1 c) صفر d) درې واړه سم نه دي

ketabton.com - The Digital Library

د پولینوم وېش پر مونوم

آیا د

$$\frac{\frac{4m^2}{n}}{n} \quad , \quad \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} \quad , \quad \frac{3mn^2}{-mn} \quad , \quad \frac{-x^2}{x}$$

او د $\frac{-n^a}{n^b}$ د وېش حاصل په لاس $\frac{14x^5}{2x^2}$

راوړلای شئ؟(هیڅ یو مخرج له صفر سره مساوي نه دی).

د مونوم وېش پر مونوم (Dividing monomial by monomial):

لومړی مثال: ویې وېشئ:

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3} = 3ab^4c^4 \quad , \quad \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2} = \frac{3}{2}x^3y \quad , \quad \frac{-a^2}{-a^x} = a^{2-x} \quad , \quad \frac{-n^a}{n^b} = -n^{a-b}$$

د پولینوم وېش پر مونوم:

$$(x^4 + 5x^3 - 7x^2) \div x^2$$

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 7x^2}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} = x^2 + 5x - 7 \qquad (x^2 \neq 0)$$

دویم مثال: ویې وېشئ.

$$\frac{x^8y^2 - x^4y^6 - 4x^3y^9}{x^3y} = x^5y - xy^5 - 4y^8 \qquad (x^3y \neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2 - r^5s - 4r^3s^4}{r^2s} = r^4s - r^3 - 4rs^3 \qquad (r^2s \neq 0)$$

فعالیت

د وېش حاصل په لاس راوړئ. (مخرجونه خلاف د صفر دي)

$$a: \frac{27x^6y^{13} - 18x^{12}y^8}{9x^3y^8} \qquad b: \frac{x^2}{y^2 - 1} \div \frac{x^2}{y - 1} \qquad c: \frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

ketabton.com - The Digital Library

د پولینوم وېش پر پولینوم: څه وخت چې یو پولینوم پر بل پولینوم وېشو، مقسوم (Dividend) او مقسوم علیه (Divisor) دواړه باید په منظم ډول ترتیب شي.

دریم مثال: د $(13x+2x^4+12+3x^3-4x^2)\div(3+x^2-2x)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+3x^3-4x^2+13x+12 & x^2-2x+3 \\ \pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2 & \hline 2x^2+7x+4 \\ \hline 7x^3-10x^2+13x & \\ \pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x & \\ \hline 4x^2-8x+12 & \\ \pm 4x^2 \mp 8x \pm 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

فعالیت

د $(a^5+b^5)\div(a+b)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

څلورم مثال: د وېش حاصل یې پیدا کړئ $(x^3-19x-30)\div(x+3)$.

حل:

$$\begin{array}{r|l} x^3-19x-30 & x+3 \\ \underline{-x^3 \pm 3x^2} & \hline x^2-3x-10 \\ -3x^2-19x & \\ \underline{\mp 3x^2 \mp 9x} & \\ -10x-30 & \\ \underline{\mp 10x \mp 30} & \\ 0 & \end{array}$$

پنځم مثال: د $4x^3-10x^2+12x+6$ له پولینوم سره کوم عدد جمع کړو چې په $(2x+1)$ پوره ووېشل شي؟

ketabton.com - The Digital Library

حل

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-10x^2+12x+6 & 2x+1 \\ \underline{-4x^3\pm 2x^2} & \\ -12x^2+12x & 2x^2-6x+9 \\ \underline{\mp 12x^2\mp\ 6x} & \\ 18x+6 & \\ \underline{-18x\pm 9} & \\ -3 & \end{array}$$

په نتيجه کې که له پورتني پولينوم سره 3 جمع کړو، نو په $(2x+1)$ پوره د وېشلو وړ دی.
بايد پام مو وي، د وېش عملیې ته به تر هغو پورې دوام ورکوو چې پاتې(باقي مانده) صفر او یا د باقي مانده درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

فعالیت

د دوو پولینومونو د ضرب حاصل $6y^3-11y^2+6y-1$ دی. که یو پولینوم $3y^2-4y+1$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

شپږم مثال: د x په کوم قیمت $12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $3x^2-1$ باندې پوره وېشل کېږي؟

حل

$$\begin{array}{l|l} 12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\ \underline{-12x^4\quad\mp 4x^2} & \\ 3x^3-9x^2+\ x & 4x^2+x-3 \\ \underline{-3x^3\quad\mp\ x} & \\ -9x^2+2x+5 & \\ \underline{\mp 9x^2\quad\pm 3} & \\ 2x+2 & \end{array}$$

$$2x+2=0$$
$$2x=-2$$
$$x=-1$$

نو د $x=-1$ لپاره پورتنی پولینوم پر $3x^2-1$ پوره وېشل کېږي.

ketabton.com - The Digital Library

د پولینومونو په وېش کې کېدای شي چې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم او یا پولینوم پر پولینوم ووېشو. لومړی باید مقسوم او مقسوم علیه په نزولي ډول ترتیب شي او د وېش عملیې ته تر هغه پورې دوام ورکوو، تر څو د پاتې (باقي) درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

پوښتنې

1. د P په کوم قیمت $3x^3 - 7x^2 - 9x + p$ پولینوم پر $x - 13$ پوره وېشل کېږي؟

2. د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \div (a + b + c)$

$(x^2 + x - 6) \div (x - 2)$

$(x^5 - y^5) \div (x - y)$

$$\frac{j^5k^2 - 3j^8k^4}{2j^4k}$$

$$\frac{12x^5 + 9x^4 + 15x^2}{3x^3}$$

$$\frac{27a^6b^{13} - 18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$$

$(x^3 - a^3) \div (x^2 - ax + a^2)$

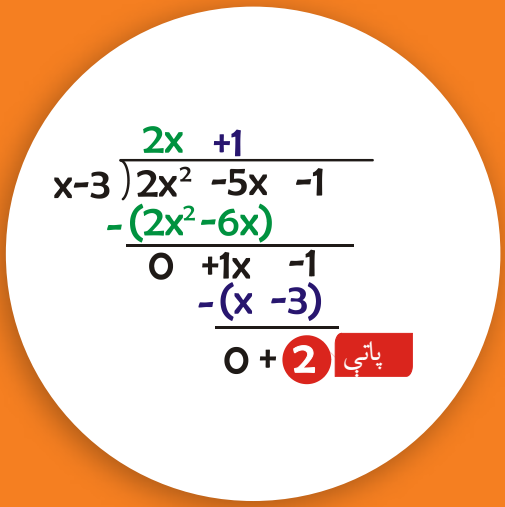
$(9x^4 + 2x^2 + 7x + 2) \div (3x + 2)$

$(8x^3 + 27y^3) \div (2x + 3y)$

$(7x - 12 + 2x^4 - 8x^3 - x^2) \div (2x^2 + 5)$

ketabton.com - The Digital Library

د باقي مانده قضيه
(Remainder Theorem)



آيا د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته ویلای شئ چې که د x^3-6x^2-x-6 پولینوم په $x-4$ ووېشو پاتې(باقي) به څو وي؟

که د $P(x)$ پولینوم په $x-a$ ووېشل شي باقي (پاتې) د $P(a)$ سره مساوي ده. یا $R=P(a)$

لومړی مثال: که د $P(x)=2x^2+3x+4$ پولینوم پر $(x+3)$ ووېشل شي، نو باقي (Remainder) له $P(-3)$ سره مساوي ده.

حل:

$$P(-3)=2(-3)^2+3(-3)+4=13$$

اوس یې ازمایو او د وېش عملیه سرته رسوو.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+3x+4 & x+3 \\ \underline{-2x^2\pm 6x} & \hline 2x-3 \\ -3x+4 & \\ \underline{\mp 3x\mp 9} & \\ 13 & \end{array}$$

قضیه: که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$ ووېشو، نو باقي یا پاتې $R=P(a)$ ده.

ثبوت: که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$، ووېشو او خارج قسمت $Q(x)$ او پاتې R وي، نو لرو چې:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R \qquad x-a=0$$
$$P(a)=Q(a)(a-a)+R \qquad x=a$$
$$P(a)=R$$

دویم مثال: که د $2x^3-x^2-7$ پولینوم پر $(x-2)$ ووېشل شي، پاتې به څو وي؟

ketabton.com - The Digital Library

حل:

$$P(2) = 2(2)^3 - (2)^2 - 7 = 16 - 4 - 7 = 5$$

$$R = 5$$

فعالیت

د پورتنۍ قضیې په مرسته یې پاتې(باقي مانده) پیدا کړئ.

- که $x^3 - x^2 - 226x + 1410$ پر $(x + 17)$ووېشل شي.
- که $x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ پر $(x - 4)$ ووېشل شي.
- که $x^3 + 18x^2 + 164x + 199$ پر $(x + 8)$ ووېشل شي.

دریم مثال: که د $5x^2 + x - 9$ پولینوم پر $(x + \frac{1}{2})$ ووېشل شي، د وېش د عملیې له سرته رسولو څخه پرته ووایاست چې څو پاتې کېږي؟

حل

$$x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2}) = 5(-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 9$$

$$= 5(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5 - 2 - 36}{4} = -\frac{33}{4}$$

څلورم مثال: که د $P(y) = 10y^3 + 7y^2 - y - 11$ پولینوم پر $(2y + 1)$ ووېشو، د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته یې پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل

$$2y + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -1$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2}) = 10(-\frac{1}{2})^3 + 7(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) - 11$$

$$P(-\frac{1}{2}) = 10(-\frac{1}{8}) + 7(\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} - 11$$

$$= -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2} - 11 = \frac{-5 + 7 + 2 - 44}{4} = \frac{-40}{4} = -10$$

$$R = -10$$

ketabton.com - The Digital Library

فعالیت

د 4 مثال په پوښتنه کې د وېش عملیه سرته ورسوئ او باقي يې په لاس راوړئ.

پنځم مثال: که د $4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولینوم پر $(x+4)$ ووېشل شي، باقي يې پیدا کړئ.

حل:

$$P(-4)=4(-4)^4+12(-4)^3-13(-4)^2-33(-4)+18$$
$$=1024-768-208+132+18=1174-976=198$$

اوس د وېش عملیه سرته رسوو.

$$\begin{array}{r|l}
4x^4+12x^3-13x^2-33x+18 & x+4 \\
\hline
-4x^4\pm16x^3 & 4x^3-4x^2+3x-45 \\
\hline
-4x^3-13x^2 & \\
\mp4x^3\mp16x^2 & \\
\hline
3x^2-33x & \\
\pm3x^2\pm12x & \\
\hline
-45x+18 & \\
\mp45x\mp180 & \\
\hline
198 &
\end{array}$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $P(x-a)$ ووېشل شي، د وېش د عملیې له سر ته رسوولو پرته يې د باقي مانده قضیې (Remainder Theorem)په مرسته باقي پیدا کولای شو چې باقي مانده (R) له (a) P سره مساوي ده.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1. د باقي مانده قضيې (Remainder theorem) په مرسته يې باقي (پاتې) پيدا کړئ.

$(5x^3 - x^2 + 4x + 1) \div (x - 3)$ ، $(6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$

$(6x^2 + 15) \div (4x + 9)$ ، $(4y^2 - y - 6) \div (y - 1.6)$

2. د باقي مانده قضيې په مرسته ووايئ چې د k په کوم قيمت د $5x^3 - k^2x^2 + 3kx - 6$ پولينوم پر $(x + 2)$ ووېشل شي، تر څو -44 باقي شي؟

3. د k په کوم قيمت که د $2k^2y^4 - ky^2 + 1$ پولينوم، پر $(y - \frac{1}{2})$ ووېشل شي، ترڅو 2 باقي شي؟

4. که چېرې $m^2x^4 - 10x^2 + 2$ پولينوم پر $(x - 1)$ ووېشو او باقي 17 وي، د m قيمت به څو وي؟

ketabton.com - The Digital Library

د فکټور قضیه
(The Factor Theorem)

$(x^5+1)\div(x+1)$

$$P(-1)=[(-1)^5+1]$$
$$=-1+1=0$$

آیا $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ پولینوم یو فکټور دی؟

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشل شي او $P(a)=0$ شي، نو $x-a$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

ثبوت: د باقي مانده قضیې په اساس $R=P(a)$ دی، نو که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشل شي او د وېش حاصل(خارج قسمت) یې $Q(x)$ وي، نو لرو چې: $P(x)=Q(x)(x-a)+R$ که $R=0$ وي، نو: $P(x)=Q(x)(x-a)$

لیدل کېږي چې $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکټور دی. او یا که $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکټور وي، نو $P(a)=0$ دی.

لومړی مثال: وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2+4x-28$ د پولینوم یو فکټور دی.

حل

$x-2=0$ $\qquad$ $P(x)=x^3+3x^2+4x-28$

$x=2$ $\qquad$ $P(2)=2^3+3(2)^2+4\cdot2-28=8+3(4)+8-28=0$

څرنګه چې R یا $P(2)=0$ دی، نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکټور دی.

فعالیت

د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته، د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې $x-1$ د $P(x)=2x^3-13x^2+26x-15$ پولینوم یو فکټور دی.

دویم مثال: د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^5-32$ پولینوم یو فکټور دی.

ketabton.com - The Digital Library

حل

$$P(x) = x^5 - 32$$
$$P(2) = 2^5 - 32 = 32 - 32 = 0$$

څرنګه چې $R = P(2) = 0$ ده، نو $(x-2)$ د $x^5 - 32$ پولینوم یو فکټور دی.

دریم مثال: وښیاست چې $(x+1)$ د $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ پولینوم یو فکټور دی.

حل: $P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 4 = -2 + 5 - 7 + 4 = 0$

څرنګه چې R یا $P(-1)$ له صفر سره مساوي دی، نو $(x-1)$ د دې پولینوم یو فکټور دی.

څلورم مثال: د k په کوم قیمت، $(x-1)$ د $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ پولینوم یو فکټور دی؟

حل

$$P(1) = 2(1)^4 - 3(1)^3 - 1 - 2k = 2 - 3 - 1 - 2k = -2 - 2k$$
$$-2 - 2k = 0$$
$$-2k = 2$$
$$k = -1$$

د $k = -1$ لپاره باقي مانده صفر کېږي، نو $x - 1$ د دې پولینوم یو فکټور دی.

فعالیت

د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې آیا دکینې خوا دوه حدې (باینومونه) د اړوندو پولینومونو فکټورونه دي او که نه؟

$(y+5) : (y^3 + 125)$ $\qquad$ $(x-6) : (x^6 - 36x^3 + 1296)$

$(x-\frac{1}{2}) : (x^3 - \frac{1}{8})$ $\qquad$ $(x+\frac{1}{2}) : (20x^3 + 7x + 6)$

$(x+2) : (x^5 + 32)$ $\qquad$ $(x-0.1) : (10x^3 - 11x^2 + 1)$

د فکټور د قضیې معکوس (Converse of Factor Theorem):

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکټور وي، نو $P(a) = 0$ دی او د a عدد $P(x) = 0$ پولینومي معادلې یو جذر (Root) دی.

لومړی مثال: که $(x-2)$ د $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ پولینوم یو فکټور وي، نو

ketabton.com - The Digital Library

وښیاست چې $P(2)=0$ دی او $x^3-6x^2+11x-6=0$ د 2 معادلې یو جذر دی.

حل: که $x^3-6x^2+11x-6=0$ د 2 معادلې یو جذر وي، نو $(x-2)$ ددې پولینوم یو فکټور دی $P(2)=0$ دی.

$$P(2)=2^3-6(2)^2+11(2)-6=8-24+22-6=0$$

دویم مثال: که $x^3+4x^2+kx+8=0$ د -2 معادلې یو جذر وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$(-2)^3+4(-2)^2+k(-2)+8=0$$
$$-8+16+k(-2)+8=0$$
$$-2k=-8+8-16$$
$$k=8$$

دریم مثال: وښیاست چې $x^3-6x^2+5x+12=0$ د 3 پولینومي معادلې یو جذر دی.

حل:

$$(3)^3-6(3)^2+5(3)+12=0$$
$$27-54+15+12=0$$
$$54-54=0$$
$$0=0$$

نو لیدل کېږي چې 3 ددې پولینومي معادلې یو جذر دی.

فعالیت

وښیاست چې $x^3-4x^2+5x-2=0$ د 2 معادلې یوجذر دی.

څلورم مثال: د k دکوم قیمت لپاره $2x^4-6x^3-7x^2+kx-15=0$ د 3 معادلې یو جذر دی؟

حل:

$$2(3)^4-6(3)^3-7(3)^2+3k-15=2(81)-6(27)-7(9)+3k-15=0$$
$$162-162-63+3k-15=0$$
$$3k=15+63+162-162=78$$
$$3k=78$$
$$k=26$$

ketabton.com - The Digital Library

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکټور وي، نو $P(a)=0$ دی او که د $P(x)$ په پولینوم کې $P(a)=0$ شی نو $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکټور دی.

پوښتنې

1 - د k د کوم قیمت لپاره $(x-2)$ د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولینوم یو فکټور دی؟

2 - آیا $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولینوم یو فکټور دی؟

3 - د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x+7)$ د $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ د پولینوم یو فکټور دی، که نه؟

4 - د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته وښیاست چې آیا $(y-7)$ د $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ پولینوم یو فکټور دی که نه؟

5 - وښیاست چې آیا $(m+\frac{1}{2})$ د $P(x)=2m^2+4m-2$ پولینوم یو فکټور دی که نه؟

6 - د $x^3+x^2-10x+8$ پولینوم د فکټور د قضیې په مرسته تجزیه کړئ.

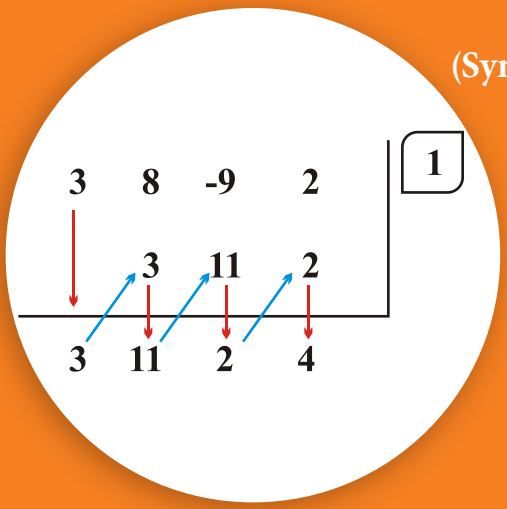
7 - که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ د پولینوم فکټورونه وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

8 - د k، د کوم قیمت لپاره $(x-5)$ د $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ پولینوم یو فکټور دی؟

9 - د k د کوم قیمت لپاره (-1)، د $x^3-9x^2+14x+k=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی؟

ketabton.com - The Digital Library

ترکیبي وېش
(Synthetic Division)



آیا د وېش عملیې له سرته رسولو پرته، د وېش حاصل او باقي پیداکولای شئ.
که د $P(x)=2x+3x^3-x^2-5$ پولینوم پر $(x-2)$ ووېشل شي؟

د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$، د وېشلو لپاره ترکیبي وېش (Horner's Method) یوه لنډه طریقه ده چې په عمومي ډول د دې هدفونو لپاره تر ټولو کار اخیستل کېږي.

1 – د x د مختلفو قیمتونو لپاره د $P(x)$ پولینوم د قیمت پیداکول.

2 – د $P(x)=0$ معادلې د ناطق جذر د پیداکولو لپاره.

3 – د الجبري افادو د تجزیې لپاره.

لومړی مثال: که د $P(x)=4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولینوم پر $(x+4)$ باندې ووېشو د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د ترکیبي وېش (تقسیم) په مرسته یې د وېش حاصل (Quotient) او باقی مانده (Remainder) پیداکړئ.

حل:

لومړی کرښه	4	12	−13	−33	18	−4	$x+4=0$
دویمه کرښه		−16	16	−12	180		$x=-4$
دریمه کرښه	4	−4	3	−45	198		

چې د وېش حاصل (خارج قسمت) یې $4x^3-4x^2+3x-45$ او پاتې یا باقي مانده یې 198 ده، په دې معنا چې: $P(x)=(x+4)(4x^3-4x^2+3x-45)+198$

پورتنۍ عملیه په لاندې پراوونو کې ښودلای شو.

د لومړی کرښې عددونه د مقسوم ضریبونه دي چې نظر د x توان ته په نزولي ډول ترتیب شوي دي.

1. د 4 عدد له لومړۍ کرښې څخه دریمې کرښې ته راښکته شوی دی.

ketabton.com - The Digital Library

2. 4 په (4–) کې ضرب شوی دی چې (16–) کېږي او (16–) د 12 د عدد لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
3. د 12 او (16–) د جمعې حاصل چې (4–) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
4. د(4–) عدد په (4–) کې ضربوو چې 16 کېږي او د (13 –) لاندې یې په دویمه کرښه کې لیکو.
5. د16 او (13–) د جمعې حاصل چې 3 کېږي، په دریمه کرښه کې لیکل شوی دی.
6. د 3 او (4–)د ضرب حاصل چې (12–) کېږي، د (33-) لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
7. د(33–) او (12–) د جمعې حاصل چې (45 –) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
8. د(45–) او (4–) د ضرب حاصل چې 180 کېږي، تر 18 لاندې په دویمه کرښه لیکل شوی دی.
9. د180 او 18 د جمعې حاصل 198 په دریمه کرښه کې دی، 198باقی مانده دی او $4x^3-4x^2+3x-45$ د وېش حاصل دی.

$Q(x)=4x^3-4x^2+3x-45$ او $R=198$

$P(x)=(4x^3-4x^2+3x-45)(x+4)+198$

پاتې + (د وېش حاصل)x (مقسوم علیه)= مقسوم

فعالیت

د وېش عملیې د سرته رسولو په مرسته د پورتنۍ پوښتنې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

دویم مثال: د ترکیبي وېش او د وېش د عملیې د سرته رسولو په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$

په یاد ولرئ کوم حدونه چې موجود نه وي، د هغوی د ضریبونو پر ځای صفر لیکو یا په بل عبارت پولینوم د مکمل پولینوم په شکل په نزولي ډول ترتیبوو.

4	0	–5	2	–3	2
	8	16	22	48	
4	8	11	24	45	

ketabton.com - The Digital Library

اوس د وېش عمليه سرته رسوو:

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 \quad -5x^2+2x-3 & x-2 \\ \cline{2-2} -4x^4 \mp 8x^3 & 4x^3+8x^2+11x+24 \\ \cline{1-1} \quad 8x^3-5x^2 & \\ -8x^3 \mp 16x^2 & \\ \cline{1-1} \quad 11x^2+2x & \\ -11x^2 \mp 22x & \\ \cline{1-1} \quad 24x-3 & \\ -24x \mp 48 & \\ \cline{1-1} \quad 45 & \end{array}$$

د وېش حاصل $4x^3+8x^2+11x+24$ او باقي (45) ده.

دريم مثال: $(x^5-x^3+27x^2-28)\div(x+3)$ د ترکيبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل او پاتې(باقي) پيدا کړئ.

حل: $x^5-x^3+27x^2-28=x^5-0\cdot x^4-x^3+27x^2+0\cdot x-28$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 27 & 0 & -28 & -3 \\ & -3 & 9 & -24 & -9 & 27 & \\ \hline 1 & -3 & 8 & 3 & -9 & -1 & \end{array}$$

$x+3=0$

$x=-3$

د وېش حاصل(خارج قسمت) يې $x^4-3x^3+8x^2+3x-9$ او پاتې(باقي مانده) عبارت له (-1) څخه دی.

څلورم مثال: د $(2t^3-7t^2-2t+14)\div(2t-3)$ د وېش حاصل(خارج قسمت) او پاتې (باقي) پيدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & -2 & 14 & \frac{3}{2} \\ & 3 & -6 & -12 & \\ \hline 2 & -4 & -8 & 2 & \end{array}$$

$$\frac{2t-3}{2}=t-\frac{3}{2}$$

$$t-\frac{3}{2}=0$$

$$t=\frac{3}{2}$$

ketabton.com - The Digital Library

نو $2t^2-4t-8$ د وېش حاصل نه دی، بلکې د وېش حاصل (t^2-2t-4) دی. (مقسوم او مقسوم علیه دواړه په 2 وېشل شوي دي).

پنځم مثال: د ترکیبي وېش(Synthetic division) په مرسته د وېش حاصل(quotient) او پاتې یې (remainder) پیدا کړئ.

$$(4V^3-2V^2+5)\div(V-5)$$

4	−2	0	5	
	20	90	450	5
4	18	90	455	

نو $Q(x)=4v^2+18v+90$ او $R=455$ ده.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې پیدا کړئ.

$$(x^5+6x^3-5x^4+5x-15)\div(x-3)$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ باندې ووېشو، نو مقسوم د مکمل نزولي پولینوم په شکل ترتیبوو او د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د وېش حاصل او باقي مانده لاس ته راوړلای شو چې د وېش د حاصل درجه د یوه په اندازه د مقسوم علیه له درجې څخه کمه ده.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$$(2x^3-7x^2-2x+12)\div(2x-3) \qquad (10x^2+2x+1)\div(x+1)$$

$$(6x^2+15)\div(4x+9) \qquad (5x^3-3x+7)\div(x+4)$$

$$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$$

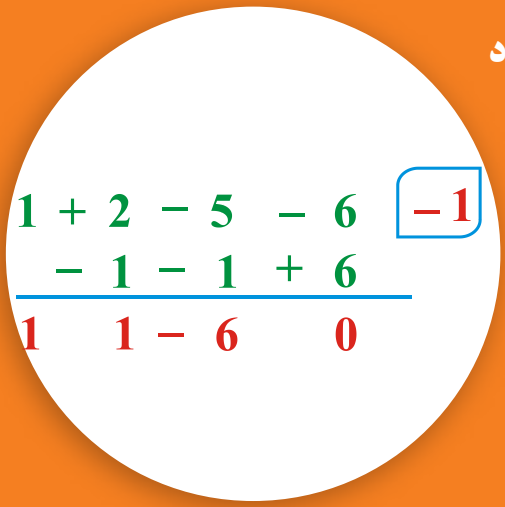
2- د ترکیبي وېش په مرسته یې پاتې (باقي مانده) او د وېش حاصل پیدا کړئ.

$$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5) \quad , \quad (y^5-17y^3-9)\div(y-3)$$

$$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$$

ketabton.com - The Digital Library

د ترکیبي وېش په مرسته د پولینوم د فکټور او د پولینوم د قیمت پیدا کول



آیا د ترکیبي وېش په مرسته ویلای شئ چې

$x^3+9x^2+27x+27$ د $(x+3)$

پولینوم یو فکټور دی؟

لومړی مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=2x^4-x^3-x^2+x-1$ پولینوم یو فکټور دی.

2	−1	−1	1	−1	1
	2	1	0	1	
2	1	0	1	0	

څرنګه چې $R=0$ دی، نو $(x-1)$ ددې پولینوم یو فکټور دی. یا دا چې:

$$2x^4-x^3-x^2+x-1=(x-1)(2x^3+x^2+1)$$

یا د باقي مانده قضیې په مرسته:

$$P(1)=2\cdot1^4-1^3-1^2+1-1=2-1-1+1-1=0$$

دویم مثال: آیا $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولینوم یو فکټور دی او که نه؟

1	3	0	−150	−10
	−10	70	−700	
1	−7	70	−850	

څرنګه چې $R=-850$ دی $(R\neq0)$، نو $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولینوم فکټور نه دی.

دریم مثال: که $P(x)=3x^3-12x^2+25+5x$ وی، د $x=2$ لپاره د ترکیبي وېش په مرسته ددې پولینوم قیمت پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل: لومړی پولینوم په نزولي ډول ترتیبوو.

$$P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 5x + 25$$

3	−12	5	25	2
	6	−12	−14	
3	−6	−7	11	

نو: $P(2) = 11$ دی.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته د $P(x) = x^3 - x^2 + 10x + 5$ پولینوم قیمت د $x = 1$ او $x = 3$ لپاره پیدا کړئ.

څلورم مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکټور دی.

$$r^4 - 256 = r^4 + 0 \cdot r^3 + 0 \cdot r^2 + 0 \cdot r - 256$$

حل:

$$r - 4 = 0$$
$$r = 4$$

1	0	0	0	−256	
	4	16	64	256	4
1	4	16	64	0	

$$Q(x) = r^3 + 4r^2 + 16r + 64$$
$$R = 0$$

نو $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکټور دی.

د ترکیبي وېش په مرسته د یوې معادلې د جذرونو پیدا کول:

پنځم مثال: که د (1) عدد د $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل:

1	4	1	−6	
	1	5	6	1
1	5	6	0	

نو د وېش حاصل يې x^2+5x+6 دی.

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$(x+3)(x+2)=0$$

$$x=-3 \qquad x=-2$$

د دې معادلې دوه نور جذرونه -2 ا و -3 دي.

د ترکیبي وېش په مرسته د پولینوم فکټور، د پولینوم قیمت او د پولینومي معادلې جذر پیدا کولای شو، که چېرې د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$ ووېشو او $(R=0)$ وی، نو $(x-a)$ د دې پولینوم یو فکټور دی او د (a) عدد د $P(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(x+\frac{1}{2})$ د $20x^3+7x+6$ پولینوم یوفکټور دی او $(x+1)$ د x^4-2x^2+x+2 پولینوم یو فکټور دی.

2- آیا $(x-0,1)$ د $10x^3-11x^2+1$ د پولینوم یو فکټور دی؟ ولې؟

3- د ترکیبي وېش په مرسته د y^3-6y^2-y+6 پولینوم قیمت د $y=6$ لپاره پیدا کړئ.

4- که (1) د $x^3+x^2-10x+8=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

5- که د (-2) عدد د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library

د څېرکي لنډيز

- الجبري افادې په درې ډوله دي(ناطقه الجبري افاده، غير ناطقه الجبري افاده، پولينومي الجبري افاده).
- هغه حدونه چې متحولونه او درجې يې سره مساوي وي، مشابه حدونه (Like terms) نومېږي، لکه: $3x^2$ او $5x^2$ يا $4x^2y^2$ او $-6x^2y^2$ مشابه حدونه دي.
- پولينوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د حروفو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.
- د يوه پولينوم درجه چې له يوه توري (متحول) څخه جوړ شوی وي، د هغه توري له لوړ توان څخه عبارت ده او که له يوه څخه د زياتو تورو څخه جوړ شوی وي، د زيات توان لرونکي مونوم درجه ددې پولينوم درجه ده.
- د يوه حد عددي فکټور (Numerical Factor) ته ضريب وايي، لکه: په $3x^2$ کې 3 د x^2 ضريب دی.
- ټول ثابت عددونه پولينومونه دي چې ثابت پولينومونه نومېږي او درجه يې صفر ده، د صفري پولينوم درجه تعريف شوې نه ده.
- هغه پولينومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولينومونو په نوم يادېږي.
- د متحول په راکړ شوي قيمت کې د يوه پولينوم قيمت هغه عدد دی چې په پولينوم کې د متحول د راکړل شوي قيمت له وضع کېدو څخه په لاس راځي.
- هغه پولينومونه چې د متحول له لوړ توان څخه تر ثابت عدده پورې، ټول حدونه په کې موجود وي، مکمل پولينوم او که يو يا څو حدونه، ونه لري، د ناقص پولينوم په نوم يادېږي.
- که د يوه پولينوم متحول له ټيټ توان څخه تر لوړ توان پورې ترتيب شي، منظم صعودي او که له لوړ توان څخه تر ټيټ توان پورې ترتيب شي، منظم نزولي پولينوم نومېږي.
- د پولينوم د جمعې په عمليه کې مشابه حدونه (Like terms) يو له بل سره جمع کېږي، د تفريق

ketabton.com - The Digital Library

په عمليه کې د مفروق علامې ته تغير ورکوو او نوره عمليه د جمعې د عملیې په شان سرته رسول کېږي (د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي.

• د پولینومونو د جمعې او ضرب په عملیو کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه او هم د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې صدق کوي.

• د ضرب په عمليه کې کولای شو، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو.

• په همدې ډول کولای شو، د وېش په عمليه کې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم یا پولینوم پر پولینوم باندې ووېشو.

• که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو د باقي مانده قضیې په اساس پاتې(باقي) له $\mathrm{P(a)}$ سره مساوي ده.

• که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو او باقی صفر شي، نو $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکټور دی.

• د فکټور د معکوسې قضیې په اساس که $(\mathrm{x-c})$ د $\mathrm{M(x)}$ پولینوم یو فکټور وي، نو $\mathrm{P(c)=0}$ او د c عدد د $M(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

• د ترکیبي وېش په مرسته کولای شو چې که $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو، د وېش حاصل او باقي لاس ته راوړو او هم د ترکیبي وېش په مرسته د متحول په راکړ شوي قیمت کې د $P(x)$ د پولینوم قیمت پیدا کولای شو.

• د ترکیبي وېش په مرسته $P(x)=0$ د پولینومي معادلې جذرونه پیدا کولای شو.

• د باقي مانده قضیې په مرسته الجبري افاده هم تجزیه کولای شو.

ketabton.com - The Digital Library

د څېړکي پوښتنې:

1 – د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې:

a: که $(x+5)$ د $P(x)=x^3+kx+125$ پولینوم یو فکټور وي.

b: که $(x-1)$ د $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ پولینوم یو فکټور وي.

c: که $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2-x+k$ پولینوم یو فکټور وي.

2 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل (Quotient) او پاتې (Remainder) پیدا کړئ.

$(x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$, $(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4)$

$(30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$, $(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2})$

3 – د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ د پولینوم یو فکټور دی.

4 – د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-\frac{1}{2})$ د $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ پولینوم یو فکټور دی.

5 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x)=5x^2+x-9$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

6 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=3$ لپاره د $k(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

7 – د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې د 3 عدد د $x^3-3x^2+x-3=0$ پولینومي معادلې یو حل (جذر) دی.

8 – د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې د -1 او 2 عددونه د $x^4-5x^2+4=0$ معادلې حلونه (جذرونه) دي.

9 – د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ چې که $(x+3)$ د $P(x)=3x^3+kx^2-22x+24$ پولینوم یو فکټور وي.

10 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

$(4x^4 - 5x^2 + 2x - 3) \div (x - 2)$ $(x^3 - x^2 - 14x + 11) \div (x - 4)$

$(7x^4 + 41x^2 - 6) \div (x + 6)$ $(5x^3 - 3x + 7) \div (x + 4)$

11 - د b او c قیمتونه په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $P(x) = x^4 + 6x^3 - 20x^2 + bx + c$ پولینوم پر $x^2 - 3x + 2$ ووېشو، باقي صفر شي.

12 - د m قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $k(x) = 2x^3 + 5x^2 - mx + 4$ پولینوم پر $(x^2 + 2x - 1)$ ووېشو او باقي صفر شي.

13 - که $k = 3a(x-1)^2 - a(x-1) - 4$ او $L = 16 + b(x-1) - 3b(x-1)^2$ وي $Kb + La$ پیدا کړئ.

14 - د x په کوم قیمت د $P(x) = 12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5$ پولینوم پر $(3x^2 - 1)$ پوره وېشل کېږي؟

15 - د P د کوم قیمت لپاره د $K(x) = 3x^3 - 7x^2 - 9x + P$ پولینوم پر $(x - 13)$ پوره د وېشلو وړ دی؟

16 - که د $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ پولینوم پر $(2x + 1)$ ووېشل شي، د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته ویلای شئ چې پاتې (باقي مانده) به خومره وي؟

a) -3 b) $-\frac{3}{2}$ c) 3 d) $\frac{7}{2}$

17 - د m قیمت به خو وي، که د $P(x) = 5x^2 + 6x - 7$ پولینوم پر $(x + m)$ ووېشل شي تر خو باقي مانده (1) شي؟

a) 2 b) $\frac{-4}{5}$ c) -4 d) a او b سم دي

18 - که د $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 8$ پولینوم، پر $(x + 3)$ ووېشل شي د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته ووایاست چې باقي خومره ده؟

a) صفر b) 13 c) -23 d) 7

19 - که چېرې $x = 4$, $y = -3$ او $z = 2$ وي، د لاندې الجبري افادو قیمت پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

$a: x^2yz + zxy^2 + 3xyz^2$ $\qquad$ $b: \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}Z^2$

20 - د x د راکړل شوو قیمتونو لپاره د ترکیبي وېش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \quad , \quad x = 2$

$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad , \quad x = -1$

$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x - 1 \quad , \quad x = 1$

$P(x) = 4x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 3 \quad , \quad x = -2$

21 - د لاندې معادلو یو، یو جذر راکړل شوی دی، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ یو جذر یې (3) دی.

$x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

22 - که $P(x) = 0$ وي، د دې پولینوم درجه څو ده؟

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) صفر $\qquad$ d) تعریف شوې نه دی

23 - د هغه مستطیل له مساحت څخه چې بعدونه یې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطیل مساحت تفریق کړئ چې بعدونه یې $(x+3)$ او $(x+1)$ وي.

24 - که $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ او $a = 13$, $b = 5$, $c = 12$ او $p = \frac{a+b+c}{2}$ وي، د A قیمت پیدا کړئ.

25 - که $(x-1)^3$ او $x^3 + ax^2 + bx + c$ معادل پولینومونه وي، د b قیمت مساوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 3 $\qquad$ c) -3 $\qquad$ d) -1

26 - د $(a - \frac{2}{a-1})(a \div \frac{a+1}{a-1})$ افادې حاصل مساوي دی په:

ketabton.com - The Digital Library

a) $a(a+1)$ b) $a(a-2)$ c) $\frac{a-2}{a}$ d) $\frac{a-1}{a}$

27 - د $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) x^2-y^2 b) x^2+y^2 c) $2x^2-y$ d) $x-y$

28 -لاندې پولینومونه په نزولي ډول (Descending Order) ترتیب او هم ووایاست چې درجې یې څو دي؟

a) $-5x^2+3x^5+9$ b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$ c) 3

29 - د $Q(x)=x^2+3x-5$ په پولینوم کې $Q(-1)$ مساوي دی، په:

a) 7 b) -7 c) 1 d) -1

30 -که $P(x)=x^2-2x+3$ او $Q(x)=2x^2+3x-1$ وي، د لاندې افادو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x)-Q(x)$ $P(0)+Q(0)$ $P(1)-Q(-1)$

$P(x)-P(x)$ $[P(x)+Q(x)]+p(x)$

31 -لاندې پولینومونه نظر y ته په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$ $4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

32 - په لاندې الجبري افادو کې پولینومونه، ناطقې الجبري افادې او غیر ناطقې الجبري افادې په نښه کړئ.

13 , $\sqrt{2}x$, 0

$\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, $y^2-\frac{1}{y^2}$

33 - د $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) 1 *b*) صفر *c*) -1 *d*) 2

34 - د دوو الجبري افادو د ضرب حاصل $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ دی. که یوه افاده یې $(a+b+c)$ وي، بله افاده پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

35 – د وېش حاصل يې پيدا کړئ.

$(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$ $(a^3+b^3)\div(a+b)$

$(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$ $(a^5-b^5)\div(a-b)$

$\frac{x^{a-2}}{x}$ $\frac{-m^a}{m^b}$

36 – ضرب يې کړئ.

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)$ $(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$

$(e^x+1)(e^x-1)$ $(m^2-2n^2)(2m^2-n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)$ $(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

37 – لومړی لاندې افادې ساده او بيا يې جمع کړئ.

$(a-1)+1-(a-1)-3$ $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$ $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$ $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

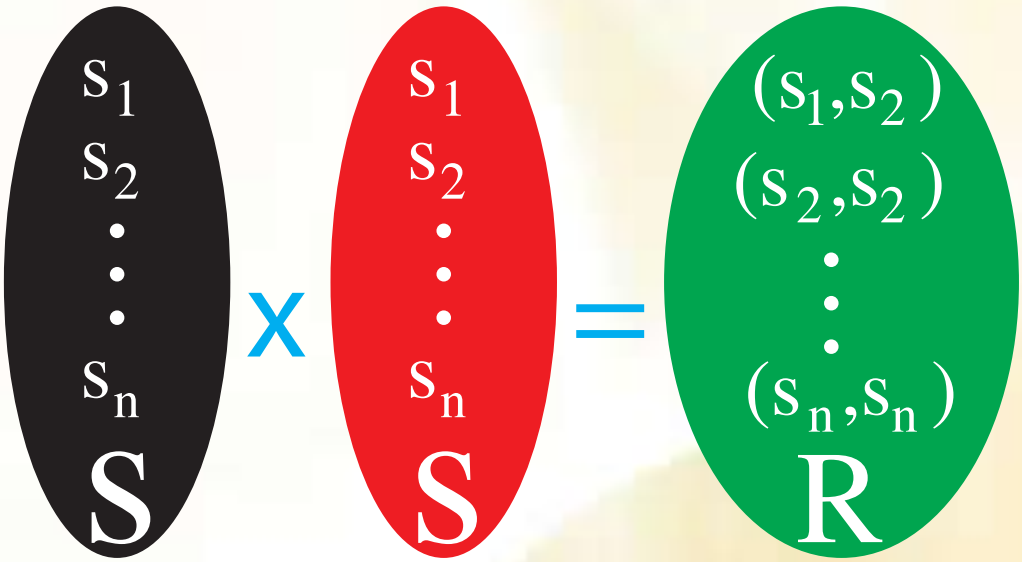
38 – د کومې لاندينې راکړل شوې يو حده درجه صفر ده؟

a) x b) $\sqrt{2}\,x$ c) $\sqrt{2}$

ketabton.com - The Digital Library

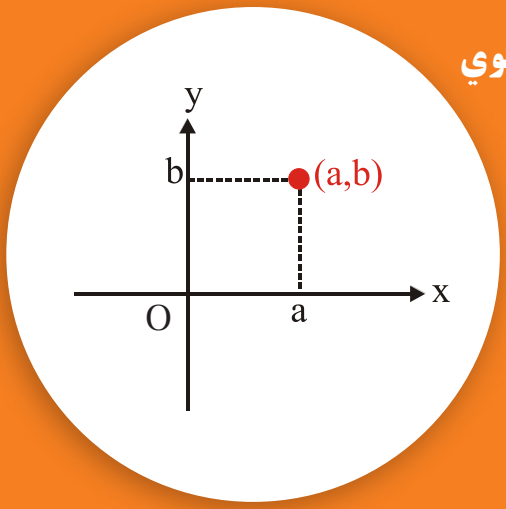
دویم څپرکی
رابطه

ketabton.com - The Digital Library



ketabton.com - The Digital Library

مرتبې جوړې او کارتيزيني مستوي



- د (a,b) مرتبــه جوړه پــه کوم حالت کې د (c,d) لــه مرتبې جوړې ســره مســاوي کېدای شي؟
- آيــا د (a,b) مرتبه جــوړه د (b,a) له مرتبې جوړې سره مساوي ده؟

که a اوb د يوه ستې او يا د مختلفو ستونو عناصر وي او a ته لومړنی عنصر او b ته دويم عنصر ووايو، نو (a,b)ته مرتبه جوړه وايي او (b,a) هم يو مرتبه جوړه ده، خو $(a,b) \neq (b,a)$ د (a,b) مرتبه جوړه په هغه صورت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوی کېدای شي چې a=c او b=d وي.

لومړی مثال: که $(x-2, y+1) = (1,3)$ وي د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

حل

$$x-2=1 \qquad y+1=3$$

$$\boxed{x=3} \qquad \boxed{y=2}$$

فعاليت

که $(a+1, 2b-3) = (0,-1)$ وي، د a او b قيمتونه پيدا کړئ.

کارتيزيني مستوي (Cartesian Plane)

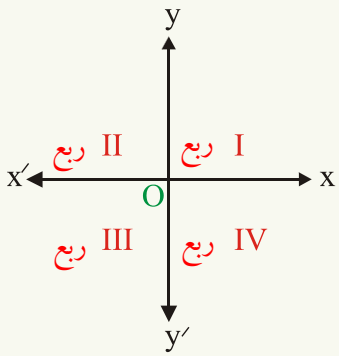
دوه، عمود او افقي خطونه رسم کړئ او د تـقاطع ټکي ته يې مبدأ (Origin) وايي، افقي خط ته د X محور او عمود خط ته د Y محور وايي.

د X محورپه X'OX او د Y محور په Y'OY سره وښيئ، هغه مستوي چې دا محورونه په کې واقع دي د کارتيزيني مستوي په نامه يادېږي.

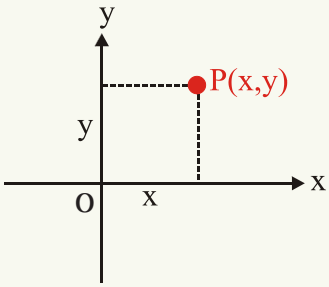
دواړه محورونه مستوي په څلورو برخو وېشي چې هرې برخې ته يې ربع (ناحيه)(Quadrant)

ketabton.com - The Digital Library

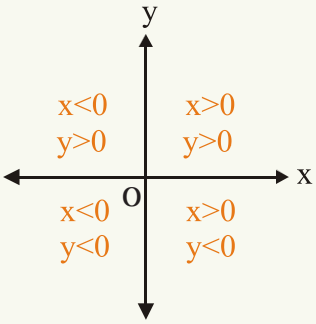
وايي، د ساعت د عقربي د حرکت په مخالف جهت (Anti clockwise) په ترتيب سره لومړنۍ دويمه، دريمه او څلورمه ربع ده، لکه: څنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.



په دې مستوي کې د P دنقطې موقعيت د (x,y) د حقيقي عددونو د مرتبې جوړې په واسط داسې ښودل کېږي چې د P د نقطې افقي فاصله د Y له محور څخه x او د P د نقطې عمودي فاصله د x له محور څخه y ده.



که د P نقطه د Y د محورښي خواته واقع وي، د x قيمت مثبت دی او که د Y د محور کينې خواته واقع وي، د x قيمت منفي دی او که د P نقطه د Y پر محور پرته وي $x = 0$ دی.

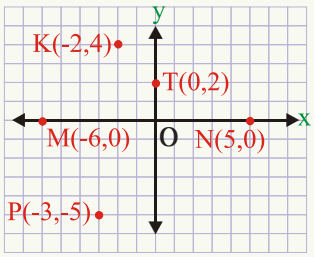


همدارنګه که د P نقطه د X له محور څخه پورته واقع وي، د y قيمت مثبت او که د X له محور څخه لاندې واقع وي د y قيمت منفي دی. $(y < 0)$ او که د p نقطه د X پر محور پرته وي، $y = 0$ کېږي، په لنډ ډول په شکل کې ښودل شوي دي

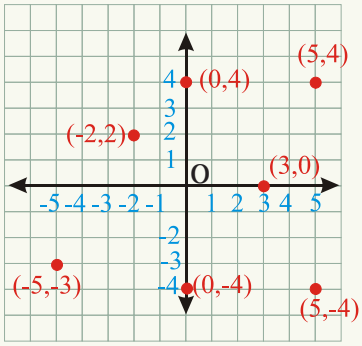
ketabton.com - The Digital Library

چې x او y ته کارتیزیني مختصات(Cartesion Coordinates) وایي چې په $P(x,y)$ کې لومړنی عنصر x ته فاصله (abscissa) او دویم عنصر y ته ترتیب(Ordinate)وایي چې د مختصاتو مبدا $(0,0)$ ده، څرګنده ده چې د حقیقي عددونو (x,y) د هرې مرتبې جوړې لپاره په مستوي کې یوه نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره د حقیقي عددونو یوه جوړه شته دی.

دویم مثال: د $P(-3,-5), K(-2,4), T(0,2), N(5,0)$ او $M(-6,0)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.



دریم مثال: د هرې نقطې لپاره چې په لاندې شکل کې ښودل شوي دي، اړونده مرتبه جوړه وليکئ.



فعالیت

د $(2,-1), (-1,2), (-2,-1), (2,1), (2,0)$ او $(0,1)$ نقطې دوضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1 - که د P د نقطي فاصله مثبت او ترتیب یې منفي وي، د P نقطه په کومه ربع کې واقع ده؟

2 -که د یوه شکل څلور رأسونه $A(3,3), B(-3,3), C(-3,-3)$ او $D(3,-3)$ وي، داکوم ډول هندسي شکل دی؟

3 - د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه مثلث چې رأسونه یې $A(2,0), B(0,2)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړئ او ووایاست چې د اکوم ډول مثلث دی؟

4 - د $P_1(2,-3), P_2(-3,2), P_3(1,5)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

5 - ووایاست چې لاندې مرتبې جوړې په کومه ربع کې واقع دي؟

$(1,5)$, $(-5,1)$

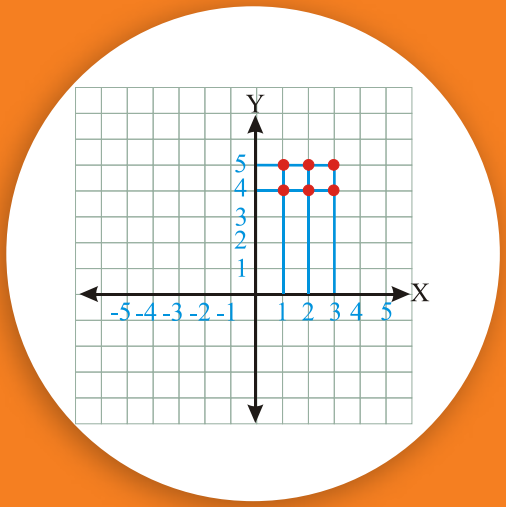
$(-4,-6)$, $(4,-5)$

$(-\frac{1}{2},-2)$, $(-\frac{1}{2},2)$

$(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(2,0)$

$(0,-1)$

ketabton.com - The Digital Library



د کارتیزني ضرب حاصل او ګراف يې

آیا په مخامخ شکل کې $A \times B$ ښودلای شئ؟

فعالیت

که $A\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي:

- $A \times B$ پیدا کړئ.
- د $A \times B$ د عناصرو شمېر پیدا کړئ.
- آیا $A \times B = B \times A$ دی؟
- آیا $A \times A$ او $B \times B$ پیدا کولای شئ؟

که A او B دوه غیر خالي سټونه وي، $(A \times B)$ په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

په دې معنا چې د A او B د ضرب حاصل $(A \times B)$ داسې یوسټ دی چې عناصر یې د (x,y) د هغه مرتبو جوړوسټ دی چې x د A د سټ او y د B د سټ عنصروي، که $A \neq B$ وي نو: $A \times B \neq B \times A$ دي که د A د سټ د عنصرونو شمېر m او د B دسټ د عنصرونو شمېر n وي، د $A \times B$ د عناصرو شمېر له $(m \times n)$ څخه عبارت دی.

لومړی مثال: که $A = \{0,1,2\}$ او $B = \{3,4\}$ وي $A \times B, B \times A$ او $A \times A$ پیدا کړئ.

حل

$$A \times B = \{0,1,2\} \times \{3,4\} = \{(0,3),(0,4),(1,3)(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

$$B \times A = \{3,4\} \times \{0,1,2\} = \{(3,0),(3,1),(3,2)(4,0),(4,1),(4,2)\}$$

$$A \times A = \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} = \{(0,0),(0,1),(0,2)(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

ketabton.com - The Digital Library

فعالیت

که $A=\{-4,-1,0\}$ او $B=\{1,4\}$ وي $A\times A, A\times B$ او $B\times B$ پیداکړئ.

دویم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $L=\{0\}$ وي، نو $IN\times L$ پیداکړئ.

حل:

$$IN\times L=\{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)...\}=\{(x,0)/x\in IN\}$$

دریم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $W=\{0,1,2,3...\}$ وي $W\times N$ پیداکړئ.

حل

$$W\times IN=\{(0,1),(0,2),(0,3),...,(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,\}$$
$$=\{(x,y)/x\in w\wedge y\in IN\}$$

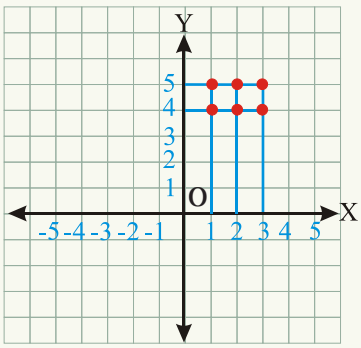
د کارتیزني حاصل ضرب ګراف: (Graph of Cartesian Product)

کولای شو چې د کارتیزني ضرب حاصل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هم وښودلای شو.

څلورم مثال: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي $A\times B$ پیداکړئ او د وضعیه کمیاتو په مستوي کې یې وښیاست.

حل

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$



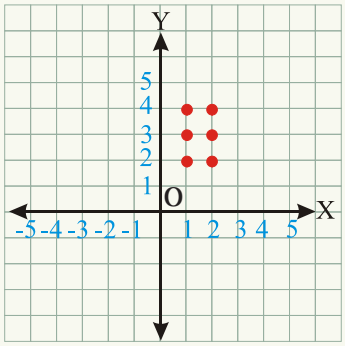
د X پرمحور د 1,2,3 عددونه او د Y پر محور د 4 او 5 عددونه ټاکو له 2,1 او3 څخه عمود خطونه او له 4 او 5 څخه افقي خطونه رسموو، ددې دواړو خطونو د تقاطع نقطې د $A\times B$ مرتبې جوړې ښکاره کوي.

ketabton.com - The Digital Library

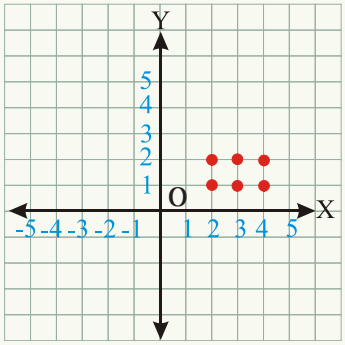
پنځم مثال: که $A = \{1,2\}$ او $B = \{2,3,4\}$ وي $A \times B$ او $B \times A$ پیدا کړئ او په شکل کې یې وښیاست.

$$A \times B = \{1,2\} \times \{2,3,4\} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$

$$B \times A = \{2,3,4\} \times \{1,2\} = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$



$A \times B$

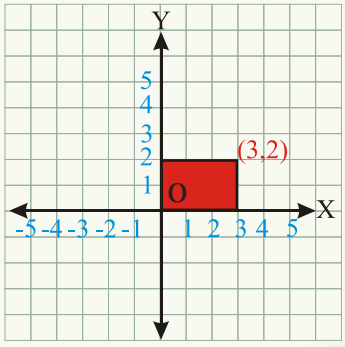


$B \times A$

شپږم مثال: که $A = \{x / x \in IR, 0 \le x \le 3 = [0,3]\}$ او $B = \{y / y \in IR, 0 \le y \le 2 = [0,2]\}$ وي $A \times B$ په شکل کې یې وښیاست.

حل

$$A \times B = \{(x, y) / 0 \le x \le 3 \wedge 0 \le y \le 2\}$$



فعالیت

که چېرې $A = \{1,2\}$ او $B = \{3,4\}$ وي $A \times B$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1 - که:

i) $B = \{2,4\}$ $A = \{-1,1,3\}$

ii) $B = \{2,3\}$ $A = \{-1,1\}$

وي $A \times B$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

2 - د لومړۍ پوښتنې د ستونو لپاره $B \times A$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

3 - که $A = \{1,2,3\}$ وی $A \times A$ پیداکړئ.

4 - که $A = \{2,4,6\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وی $A \times B, A \times A, B \times A$ او $B \times B$ پیداکړئ

ketabton.com - The Digital Library

رابطه
(Relation)

عطاالله د عزت الله ورور دی
(عطا الله R عزت الله)
وروروليي هم يوه رابطه ده.

يوستٍ چې د شيانو او مفهومونو له مرتبو جوړو څخه جوړ شوی وي، له يوې رابطې څخه عبارت دی. ياکه A او B دوه غير خالي ستٍونه (non empty sets) وي، نو د $A \times B$ هرفرعي ستٍ له A څخه په B کې يوه رابطه ده، که $(a,b) \in R$ وي، ويل کېږي چې a له b سره رابطه لري او د (aRb) په شکل ليکل کېږي.

که R لهA څخه په B کې يوه رابطه وي، نو $R \subset A \times B$ ده اوکه R د $A \times A$ يو فرعي ستٍ وي، نو R په A کې يوه رابطه ده.

لومړی مثال: که $A = \{x, y\}$ او $B = (1,2)$ وي، $A \times B$ پيداکړئ، او لهA څخه په B کې څلور رابطې وليکئ.

حل

$$A \times B = \{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$$
$$R_1 = \{(x,1),(x,2)\}$$
$$R_2 = \{(y,1)\}$$
$$R_3 = \{(y,2)\}$$
$$R_4 = \{(x,1),(y,1)\}$$

چې د $A \times B$ د عناصرو شمېر څلور او د $A \times B$ د ټولو فرعي ستٍونو شمېر $16 = 2^4$ دی، نو له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 16 دي.

دويم مثال: که $A = \{1,3,5,...19\}$ چې د A د ستٍ د عناصرو شمېر 10 دی او $B = \{2,4,6\}$ وي چې د B د عناصرو شمېر (3) دی، د $A \times B$ د عناصرو شمېر(ټولې مرتبې جوړې)

ketabton.com - The Digital Library

$30 = 3 \times 10$ دي او له A خخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 2^{30} دی.

پام مووي چې: ϕ او $A \times B$ هم په فرعي سټونو کې شامل دی.

دریم مثال: که $A = \{1,2,3\}$ او $B = \{a,b\}$ وي له A خخه په B کې (3) رابطې ولیکئ.

حل:

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

درې رابطې عبارت دي له:

$$R_1 = \{(1,a),(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_2 = \{(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_3 = \{(2,a),(2,b),(3,a)\}$$

فعالیت

که $A = \{1,2,3,4\}$ په $R = \{(x,y)/x+y=5\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

څلورم مثال: که $A = \{1,2,3,4\}$ په $R = \{(x,y)/x-y=2\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

حل: $R = \{(3,1),(4,2)\}$ ده.

د رابطې د تعریف ساحه (Domain) **او د قیمتونو ساحه** (Range) **یې**:

پوهېږو چې که R له A خخه په B کې یوه رابطه وي، نو $R \subseteq A \times B$ ده، په دې معنا چې R یو سټ دی چې عناصر یې د (x,y) مرتبې جوړې دي چې $x \in A$ او $y \in B$ ده.

د R د تعریف ساحه د مرتبو جوړو لومړني عناصر دي چې په Dom_R سره ښودل کېږي. همدارنګه د R د قیمتونو ساحه (Range) د مرتبو جوړو دویمي عناصر دي، په $Range_R$ سره ښودل کېږي.

لومړی مثال: که $A = \{1,2\}$ او $B = \{x,y\}$ وي او R له A خخه په B کې یوه رابطه وي، لومړی د دې رابطې عناصر ولیکئ، بیا د رابطې د تعریف ساحه (Dom_R) او د قیمتونو ساحه ($Range_R$) یې ولیکئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل

$R = \{(1,x),(2,x),(1,y),(2,y)\}$

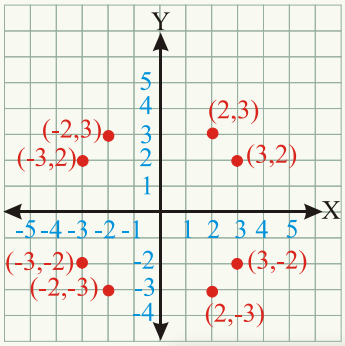
$Dom_R = \{1,2\}$ $\quad Range_R = \{x,y\}$

دویم مثال: که د $R = \{(x,y)/x^2 + y^2 = 13\}$ رابطه د $A = \{-3,-2,1,2,3\}$ په سټ کې تعریف شوي وي، لومړی د (R) عناصر د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ، (Dom_R) او ($Range_R$) پیدا کړئ او بیا یې ګراف رسم کړئ.

$R = \{(-3,-2),(-3,2),(-2,-3),(-2,3),(2,-3),(2,3),(3,-2),(3,2)\}$

$Dom_R = \{-3,-2,2,3\}$

$Range_R = \{-3,-2,2,3\}$



فعالیت

که $R = \{(x,y)/y = 2x\}$ وي او د R د تعریف ناحیه $\{0,4,8\}$ وي، د R د قیمتونو ناحیه معلومه کړئ.

معکوسه رابطه (Inverse of a Relation)

که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R معکوس چې په R^{-1} سره ښودل کېږي او له $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$ څخه عبارت ده:

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$$

د R دتعریف ساحه د R^{-1} د قیمتونو ساحه او د R^{-1} د تعریف ساحه د R د قیمتونو له ساحې څخه عبارت ده.

مثال: که $R = \{(1,2)(2,3)(3,4)\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي، د R د رابطې معکوسه رابطه یا R^{-1} پیدا کړئ.

حل:

$R^{-1} = \{(2,1)(3,2)(4,3)\}$

ketabton.com - The Digital Library

معادله رابطه (Equivalent Relation): د R رابطه د A په سټ کې يوه معادله رابطه ده، که درې لاندنې خاصيتونه ولري:

1- انعکاسي خاصيت (Reflexive Property): د x د هر عنصر $x \in A$ لپاره $(x,x) \in R$ وي يا $\forall x \in A \Rightarrow (x,x) \in R$

2- تناظري خاصيت (Symmetric Property): که (x,y) په R کې شامله وي، نو (y,x) هم په R کې شامله وي يا: $\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

3 - انتقالي خاصيت (Transitive Property): که $(x,y) \in R$ او هم $(y,z) \in R$ وي په نتيجه کې (x,z) مرتبه جوړه هم په R کې شامله وي يا:

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

مثال: د مساوات رابطه د حقيقي عددونو په سټ کې يوه معادله رابطه ده:

1- په حقيقي عددونو کې د هر x لپاره x=x دی، 5=5 (انعکاسي خاصيت)

2- د هر $x, y \in IR$ لپاره که x=y وي، نو y=x ده (تناظري خاصيت)

3- د هر $x, y, z \in IR$ لپاره که $x = y$ او y=z وي په نتيجه کې x=z دی (انتقالي خاصيت)

پوښتنې

1- که $A = \{1,2\}$ او $B = \{0,4,6\}$ وي.

له A څخه په B کې درې رابطې وليکئ.

له B څخه په A کې څلور رابطې وليکئ.

په A کې څلور رابطې وليکئ.

2- که $A = \{1,2,3,4\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وي او $R = \{(x,y) \mid y < x\}$ ، له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

3- که $R = \{(x,y) \mid y+1 = 2x^2\}$ د طبيعي عددونو په سټ کې يوه رابطه وي او د تعريف ساحه پې ټول طبيعي عددونو وي، د قيمتونو ساحه (Range) پې پيدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

- (a,b): چې دليکلو ترتيب په کې اهميت لري، مرتبه جوړه نومېږي چې a ته لومړنۍ مختصه او b ته دويمه مختصه وايي، په عمومي ډول $(a,b) \neq (b,a)$
- د (a,b) او (c,d) دوه مرتبې جوړې په داسې حال کې سره مساوي دي چې $a=c$ او $b=d$ وي.
- **د کارتيزيني ضرب حاصل**: د A او B دسټونو کارتيزيني ضرب چې په $A\times B$ سره ښودل کېږي په دې ډول تعريف شوي دی: $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$
- که د A ست د عناصرو شمېر په m او د B د ست د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د $A\times B$ د عناصر شمېر $m\times n$ دی.
- کولای شوچې د A اوB، دسټونو ضرب $(A\times B)$ د وضعيه کمياتو په مستوي کې وښايو.
- **رابطه**: د $A\times B$ هر فرعي ست له A څخه په B کې د R يوه رابطه ده.
$R\subset A\times B$ او که $R\subset A\times A$ وي، نو په دې صورت کې R په A کې يوه رابطه ده.
$(x\ ,\ y)\in R\Leftrightarrow x\,R\,y$
- که د A ست د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د A د فرعي سټونو شمېر 2^n دی.
- که د A ست د عناصرو شمېر په m او د B دست د عناصرو شمېر په n سره وښايو له A څخه په B کې د رابطو شمېر 2^{mxn} دی
- که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R د تعريف ساحه (Dom_R) د مرتبو جوړو دلومړنيو عناصرو ست او د قيمتونو ساحه (Range_R) يې دمرتبو جوړو د دويمو عناصرو ست دی.
- **معکوسه رابطه**: که R له A څخه پهB کې يوه رابطه وي، د R معکوسه رابطه په R^{-1} سره ښودل کېږي چې:

$$R.^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in R\}$$

$$(x,y)\in R\Leftrightarrow(y,x)\in R^{-1}$$

ښکاره خبره ده چې R^{-1} د تعريف ساحه د R دقيمتونو له ساحې سره او د R^{-1} دقيمتونو ساحه د R د تعريف له ساحې سره مساوي ده.

- **معادله رابطه**: R د A په ست کې يوه معادله رابطه ده که چېرې لاندې درې خاصيتونه ولري.

1- انعکاسي خاصيت. 2- تناظري خاصيت. 3- انتقالي خاصيت.

ketabton.com - The Digital Library

دځپرکي پوښتنې

1- که $A = \{1,3,5\}$ او $B = \{2,4,6\}$ وي $A \times A$ او $B \times A, A \times B$ پیدا کړئ.

2- که $A = \{1,2,3\}$ او $B = \{0,1\}$ وي $A \times B$ په شکل کې وښیاست.

3- که $(3,1) = (x - 2y, 2x + y)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

4- په $A = \{1,3,5\}$ کې د R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.

5- که $A = \{a, b\}$ وي د A^2 عناصر ولیکئ.

6- که د $R = \{(x, y) | y = x^2\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R رابطې ګراف رسم کړئ.

7- که $R = \{(x, y) | y^2 = x\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R رابطې ګراف رسم کړئ.

8- که $R = \{(1,-1), (2,-2)(3,-3)\}$ وي د R^{-1} تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

9- که $R = \{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\}$ وي د R او R^{-1} تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

10- که $A = \{3,6,12\}$ او $B = \{-1,0\}$ وي په A کې د رابطو شمېر او له A څخه په B کې درابطو شمېر پیدا کړئ.

11- که د $(4a + 1, 2b + a)$ او $(5, 3a - 4b)$ دوه مرتبي جوړې سره مساوي وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

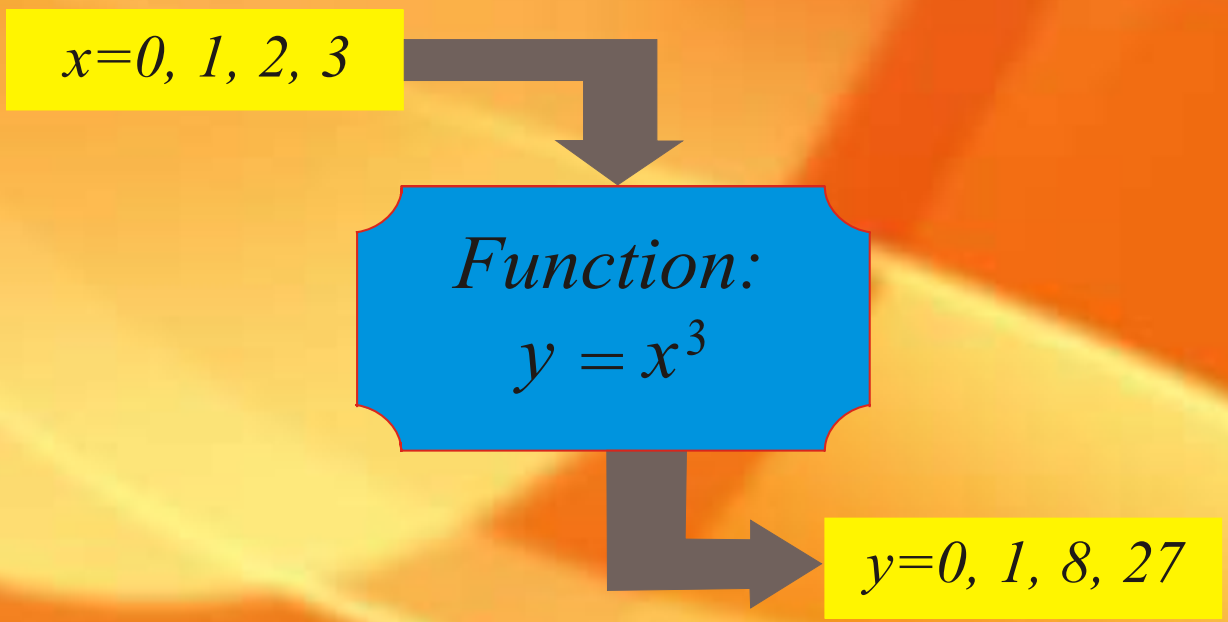
12- که $A = \{a, b, c\}$ او $B = \{x, y\}$ وي $A \times B$ او $B \times A$ پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

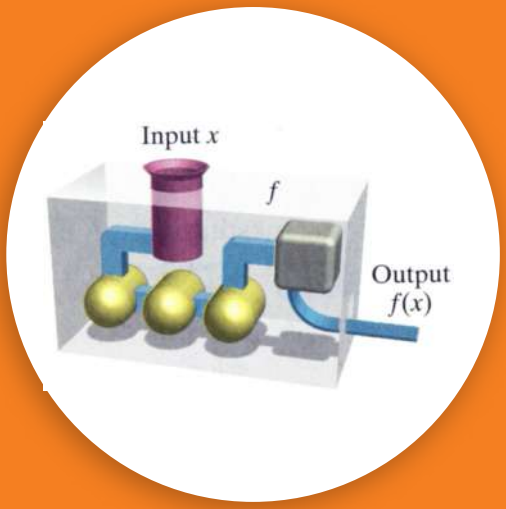
دریم څپرکی

تابع

ketabton.com - The Digital Library



ketabton.com - The Digital Library



تابع (function)

آیا تابع او رابطه یو له بله سره توپیر لري؟

فعالیت

- آیا هره تابع یوه رابطه ده او هره رابطه یوه تابع ده ؟
- آیا د مرتبو جوړو هر ستِ یوه تابع ده؟
- آیا کولای شئ چې یوې تابع ته د یو ماشین په شان فکر وکړئ؟

د لومړي ځل لپاره د تابع مفهوم د یوه المانې ریاضي پوه لیبنز (Leibniz)، (1646 – 1716) له خوا معرفي شوه.

تابع یوه رابطه یا یوه قاعده ده چې یو کمیت ته د بل کمیت سره اړیکه ورکوي، د تابع د مفهوم د ښه پوهیدو لپاره لاندې مثالونه تر غور لاندې ونیسئ.

1 - د یوې مربع مساحت (A) د مربع په ضلعې (x) پورې اړه لري. هغه معادله چې د مربع مساحت ته د مربع په ضلعې پورې اړیکه ورکوي له $A = x^2$ څخه عبارت ده.

د مربع ضلع x	1	2	3	4	5	...
د مربع مساحت A	1	4	9	16	25	...

یا په بل عبارت د مربع مساحت د مربع د ضلعې تابع دی یا $A = f(x)$

2 - د نړۍ د نفوسو شمېر (p) په وخت (t) پورې اړه لري، لکه: څرنګه چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي په تقریبي ډول د نړۍ د نفوسو شمېر د میلیون په حساب ښودل شوی دی.

کال (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
نفوس په میلیون (p)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

ketabton.com - The Digital Library

لیدل کېږي چې نفوس (Population) یا P د وخت (t) تابع ده یا $p = f(t)$

3 - د دایرې مساحت (A) ، د دایرې په شعاع (r) پورې اړه لري ($A = \pi r^2$)

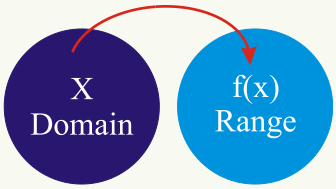
4 – د کرې حجم (V) د کرې په شعاع (r) پورې اړه لري چې د $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ د معادلې په واسطه ښودل کېږي.

له پورتنیو مثالونو څخه دا نتیجه اخیستل کېږي چې د تابع په مفهوم کې اړیکه مرکزي حیثیت لري د مثال په ډول د هر انسان عمر له یوه عدد سره اړیکه لري، په یوه مغازه کې هر جنس له یوه ټاکلي قیمت سره اړیکه لري، هر موټر د یوې ټاکلې شمېرې جوازسپر پورې اړه لري او د هر عدد مکعب، یو عدد دی $(3^3 = 27 \quad , \quad 2^3 = 8)$.

په پورتنیو مثالونو کې لیدل کېږي چې مساحت (A)، نفوس (P) اوحجم (V) د مربع ضلعې (x)، وخت (t) او د کرې شعاع (r) تابع دي چې مساحت، نفوس او حجم هر یوه ته مربوط (مقید) متحول (dependent Variable) او د مربع ضلعې، د کرې شعاع او د وخت کمیتونو ته ازاد متحول یا مستقل متحول (Independent Variable) وایي کولای شو چې تابع داسې تعریف کړو:

تعریف

تابع د دوو سټونو تر منځ یوه داسې رابطه یا قاعده ده چې د لومړني سټ هر عنصر یوازې او یوازې د دویم سټ له یو عنصر سره اړیکه ولري چې لومړنی سټ د تعریف د ناحیې (Domain) او دویم سټ د قیمتونو د ناحیې (Range) په نوم یادېږي.



یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

که $S = \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,3)(5,4)\}$ وي، نو د S رابطه د یوې تابع ښودونکي ده، ځکه چې د مرتبو جوړو لومړني عناصر یې تکرار شوي نه دي.

Domain(s) = {1,2,3,4,5}

Range(s) = {2,3,4}

ketabton.com - The Digital Library

فعالیت

که $T = \{(1,4),(2,3),(3,2),(2,4),(1,5)\}$ وي آیا T یوه تابع ښیي؟

لومړی مثال: په لاندې جدولونو کې کوم یو، یوه تابع ښکاره کوي؟

(جدول I)

Domain	Range
د عدد مکعب (عدد)	
-2	8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

(جدول II)

Domain	Range
د عدد مربع (عدد)	
-2	4
-1	1
0	0
1	
2	

(جدول III)

Domain	Range
(د عدد مربع جذر) (عدد)	
0	0
1	1
	-1
4	2
	-2
9	3
	-3

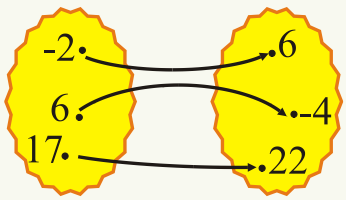
I او II جدولونه تابع ښکاره کوي، لیکن III جدول تابع نه ښکاره کوي، ځکه چې د لومړنۍ ستې یا (Domain) یو عنصر د دویم ستې (Range) له دوو عنصرو سره اړیکه لري، یا په بل عبارت د مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي دي چې مرتبې جوړې یې :

$(1,1),(1,-1),(4,2),(4,-2),(0,0),(9,3),(9,-3)$ دي او یا دا چې د لومړنۍ ستې د یو عنصر لپاره په دویم ستې کې دوه تصویرونه (Images) موجود دي، ډېره ښه به دا وي چې یوې تابع ته د یو ماشین فکر وکړو، کوم شکل چې د ځېرکې په لومړۍ مخ کې راکړل شوی دی، خام مواد یا ورودي (input) یا Domain او خروجي output یا $f(x)$ د Range په نامه یادېږي.

که A او B د حقیقي عددونو ستونه وي له A څخه B ته هره تابع د حقیقي تابع په نامه یادېږي. پام مو وي چې : $Range \subseteq codomain$ دی.

دویم مثال: که $f = \{(-5,3m),(-5,2m-10),(1,2)\}$ د یوې تابع ښودونکي وي، د m قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $-5 = -5$ دي، نو باید $3m = 2m - 10$ سره وي، په نتیجه کې $m = -10$ کېږي په دې معنا ددې لپاره چې f یوه تابع وي، باید $m = -10$ وي.



دریم مثال: له لاندېنیو دیاګرامونو څخه کوم یو یې یوه تابع ښیي؟

(a)

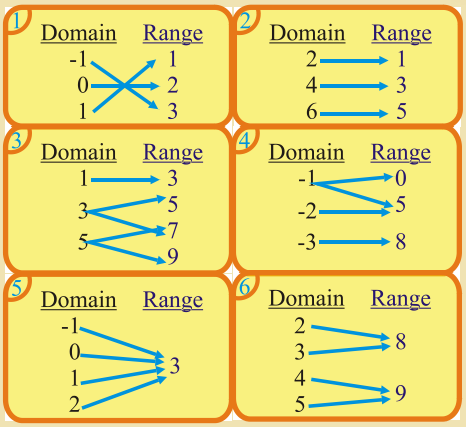
ketabton.com - The Digital Library

حل: د a او b دياګرامونه تابع ښيي، ليکن د c دياګرام د يوې تابع ښودونکی نه دی.

تابع د X او Y د دوو سټونو ترمنځ يوه داسې رابطه ده چې د x د سټ يا (Domain) هر عنصر يوازې د Y د سټ (Range) د يو عنصر سره اړيکه لري چې X ته ازاد متحول او Y ته مقيد (مربوط) متحول وايي يا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړنۍ عناصر يې تکرار شوي نه وي.

پوښتنې

1 – د مخامخ جدولونو څخه کوم يو يې د تابع ښودونکی دی؟



2 – د لاندې مرتبو جوړو له سټونو څخه کومه يوه يې يوه تابع ښيي؟ د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې تعين کړئ.

1 – $\{(2,4)\ ,\ (3,6)\ ,\ (4,8)\ ,\ (5,10)\}$

2 – $\{(-1,4)\ ,\ (0,3)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\}$

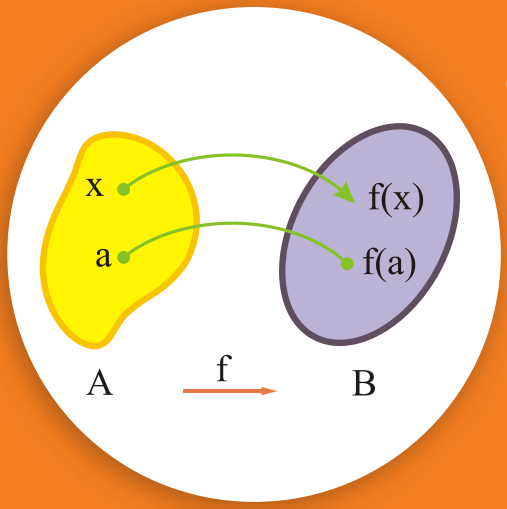
3 – $\{(10,-10)\ ,\ (5,-5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

4 – $\{(-10,10)\ ,\ (-5,5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

5 – $\{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

6 – $\{(1,1)\ ,\ (2,1)\ ,\ (3,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,2)\ ,\ (3,2)\}$

ketabton.com - The Digital Library



د تابع د ليکلو طريقه او د يوې تابع د قيمت پيدا کول

- څه وخت يوه معادله د يوې تابع بڼکارندويه ده؟
- يوه رابطه څه وخت يوه تابع بڼيي؟
- يو جدول څه وخت يوه تابع بڼيي؟

د لومړی ځل لپاره سويسي رياضي پوه اويولر (1707 -1783) (Euler) دا عبارت چې y د x تابع ده، د $y = f(x)$ مساوات په شکل وښوده چې f(x) د x لپاره د y يا f(x) د تابع قيمت دی.

که f له A څخه B ته يوه تابع وي، په لاندې ډول بڼودل کېږي چې

$$f : A \rightarrow B$$

$$y = f(x)$$ يا

په شکل کې x له (input) او f(x) له (output) څخه عبارت دی، تابع ګانې د f,g,h او نورو تورو په واسطه بڼودل کېږي.

تابع عموماً په 4 طريقو بڼودل کېږي.

1 – د عبارتونو (جملو) په واسطه (Verbally)

2 – د يوه جدول په واسطه يا عددي (Numerically)

3 - مشاهده وي: د ګراف په واسطه (Visually)

4 - د يو واضح فورمول يا معادلې په واسطه يا په الجبري ډول (Algebraically)

فعاليت

که f(x) او g(x) په جدولونو کې په لاندې ډول راکړل شوي وي، د x په راکړل شوو قيمتونو کې ددې تابع ګانو قيمت پيدا کړئ. يا په بل عبارت د تابع د تعريف ساحه (Domain) درکړل شوي ده، د تابع اړونده قيمتونه (Range) يې پيدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

$g(x) = x^3 - 1$

x=	0	-1	1	2
g(x)=	?	?	?	?

$f(x) = \frac{1}{2}x - 4$

x=	-1	-2	0	2	4
f(x)=	?	?	?	?	?

لومړی مثال: که $f(x) = x^2 + 3x - 2$ وي $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(-3)$ او $f(a)$ پیدا کړئ.

حل:

د تابع قیمتونه	تابع (Rule) $f(x) = x^2 + 3x - 2$	د تعریف ساحه
8	$f(2) = 2^2 + 3\cdot 2 - 2 = 4 + 6 - 2$	2
-2	$f(0) = 0^2 + 3\cdot 0 - 2 = -2$	0
-2	$f(-3) = (-3)^2 + 3(-3) - 2 = 9 - 9 - 2$	-3
$a^2 + 3a - 2$	$f(a) = a^2 + 3a - 2$	a

یا $f(a) = a^2 + 3a - 2$ ، $f(-3) = -2$ ، $f(0) = -2$ ، $f(2) = 8$

دویم مثال: که $f(x) = x^2 + 3x + 5$ وي، $f(-x)$ ، $f(x+3)$ او $f(2)$ پیدا کړئ.

حل

$$f(2) = 2^2 + 3\cdot 2 + 5 = 4 + 6 + 5 = 15$$

$$f(x+3) = (x+3)^2 + 3(x+3) + 5 = x^2 + 6x + 9 + 3x + 9 + 5 = x^2 + 9x + 23$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 3(-x) + 5 = x^2 - 3x + 5$$

فعالیت

که $g(x) = x^2 - 2x + 7$ وي $g(-x)$ ، $g(x+4)$ او $g(-5)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $h(x) = 3 - 2x$ او $f(x) = 2x + 6$ وي $f(-1)$، $h(6)$ او $f(-1) + f(3)$ پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل:

$$f(-1)=2(-1)+6=-2+6=4$$
$$h(6)=3-2\cdot 6=3-12=-9$$
$$f(-1)+f(3)=4+2\cdot 3+6=4+12=16$$

څلورم مثال: که $f(x)=ax^2-bx+1$ او $f(1)=0, f(3)=10$ وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$0=a-b+1 \quad , \quad 10=9a-3b+1$$

$$10=9a-3b+1$$
$$0=_\ 3a\mp 3b\pm 3$$

$$10=6a-2 \qquad 10=18-3b+1$$
$$12=6a \qquad 3b=19-10$$
$$a=2 \qquad 3b=9$$
$$b=3$$

پنځم مثال: له لاندینیو معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟

$$a:\ x^2+y=4 \qquad b: x^2+y^2=4$$

حل: هغه وخت یوه معادله یوه تابع ښیي چې د x د هر قیمت لپاره د y یو قیمت موجود شي.

$$a:\ x^2+y=4 \Rightarrow y=4-x^2$$

د x د هر قیمت لپاره y یو قیمت لري، د مثال په ډول که $x=1$ وي، $y=4-1^2=3$، نو $y=4-x^2$ یوه تابع ده.

$$b:\ x^2+y^2=4 \Rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$$

د x د یوه قیمت لپاره y دوه قیمتونه لري، نو y یوه تابع نه ده.

د مثال په ډول که $x=1$ وي، $y=\pm\sqrt{3}$ یا $(1,\sqrt{3})(1,-\sqrt{3})$ چې لومړني عناصر یې تکرار شوي دي.

ketabton.com - The Digital Library

فعالیت

وښیاست چې د $y - x^2 = 1$ او د $x^3 - y = 2$ معادلې د تابع ښودونکي دي او د $x^2 + y^2 = 4$ معادله د یوې تابع ښودونکي نه ده.

یوه تابع د $y = f(x)$ په شکل لیکل کېږي، د تابع د قیمت د پیدا کولو لپاره د x قیمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قیمت په لاس راځي او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع ښکارندویه وي چې د هر x لپاره یو y وجود ولري.

پوښتنې

1- که $g(x) = x^2 + x - 2$ او $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ وی $g(2) - g(-3)$, $g(-2), f(-3)$

او $\dfrac{f(0) \cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړئ.

2 - که $f(x) = x^2 - x$ او $g(x) = \sqrt{x+4}$ وي. $g(0)$, $f(-2)$ او $f(x-1)$ پیدا کړئ.

3- که $g(x) = 3\sqrt{x}$ او $h(x) = 1 + 4x$ وي $h(16)$, $h(-3)$ او $g(-4)$ پیدا کړئ.

4 - $f(x) = \dfrac{15}{x-3}$, $g(x) = 16 + 3x - x^2$ او $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$ وي $g(-7), f(6)$

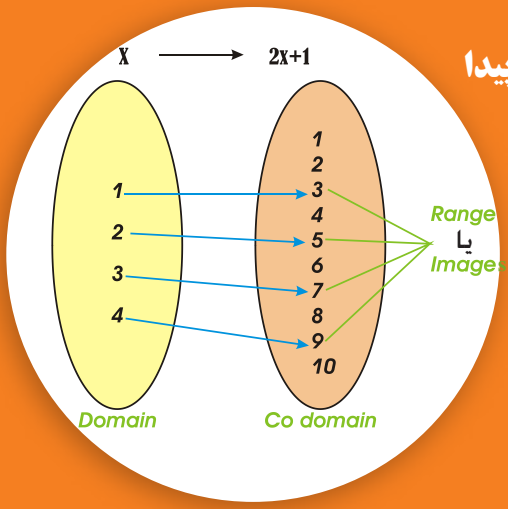
او $f(0) + g(4) - h(-3)$ پیدا کړئ.

5 - که $g(x) = \sqrt{x+40} - 2$ وي $g(12), g(5), g(4), g(0)$ او $g(-2)$ پیدا کړئ.

6 - آیا د $x^2 + xy = 1$ معادله یوه تابع ښیي؟

ketabton.com - The Digital Library

د یوې تابع د تعریف د ساحې پیدا کول



آیا کېدای شي چې د هرې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه وي؟

فعالیت

- د x کوم قیمتونه دتابع د تعریف په ساحه کې شامل وي؟
- د $f(x)=\frac{1}{x-4}$ تابع د تعریف ساحه وټاکئ.
- آیا $g(x)=3\sqrt{x}$ تابع د تعریف په ساحه کې $x=-4$ شامل دی؟

د یوې تابع د تعریف په ساحه (Domain) کې د x ټول هغه قیمتونه شامل وي چې تابع په هغه قیمتونو کې تعریف شوي وي یا د تابع قیمت یو حقیقي عدد وي.

لومړی مثال: د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه (Domain) وټاکئ.

$$f(x)=\frac{1}{x-3} \qquad h(x)=x^2-7x \qquad K(x)=\frac{6x}{x^2-9}$$

$$g(x)=\sqrt{x} \qquad R(x)=\sqrt{3x+12}$$

حل:

- د $f(x)=\frac{1}{x-3}$ تابع په $x=3$ کې تعریف شوي نه ده، ځکه چې $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي یا د $x=3$ لپاره د تابع قیمت یو حقیقي عدد نه دی نو:

$$\text{Dom}\, f=\{x\in IR / x\neq 3\}$$

- د $g(x)=\sqrt{x}$ په تابع کې ددې لپاره چې د تابع قیمت یو حقیقي عدد (Real number)

ketabton.com - The Digital Library

وي، بايد $x \geq 0$ وي، نو $Dom\, g = \{x \in IR / x \geq 0\}$ يا $\text{dom}\, g = [0\ ,\ \infty)$

- $h(x) = x^2 - 7x$ په تابع کې، څرنګه چې د x د هر قيمت لپاره د $h(x)$ تابع تعريف شوي ده، نو: (د حقيقي عددونو ست) $\text{Dom h} = \text{IR} = (-\infty\ ,\ \infty)$

- د $k(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ يا $\text{k(x)} = \dfrac{6x}{(x-3)(x+3)}$ تابع د تعريف ساحه عبارت ده له:

$$Dom\, k(x) = \{x \in IR / \quad x \neq 3\ ,\quad x \neq -3\}$$

- د $\text{R(x)} = \sqrt{3x+12}$ په تابع کې بايد $3x + 12 \geq 0$ وي، نو $x \geq -4$ کېږي.

$$Dom\, R = \{x \in IR / x \geq -4\} = [-4, \infty)$$

فعالیت

د لاندې تابع ګانو د تعريف ساحه (Domain) پيدا کړئ.

$$\text{f(x)} = \text{x}^2 + 3\text{x} - 17 \quad , \quad \text{g(x)} = \frac{5\text{x}}{\text{x}^2 - 49} \quad , \quad \text{h(x)} = \sqrt{9\text{x} - 27}$$

دويم مثال: د $y = \sqrt{x-3}$ د تابع د تعريف ساحه پيدا کړئ.

$$x - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 3$$

$$\text{Dom y} = \{\text{x} \in \text{IR} / \ \text{x} \geq 3\} = [3\ ,\ \infty)$$

دريم مثال: د لاندې تابع ګانو د تعريف ساحه پيدا کړئ.

$\text{f(x)} = \sqrt{\text{x} - 2}$ $\qquad \text{Dom f} = \{\text{x} / \quad \text{x} \geq 2\}$ يا $[2, \infty]$

$g(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$ $\qquad dom\, g = IR - \{4\}$ يا $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

يا د ست په شکل: $dom\, g = \{x \in IR / x \neq 4\}$

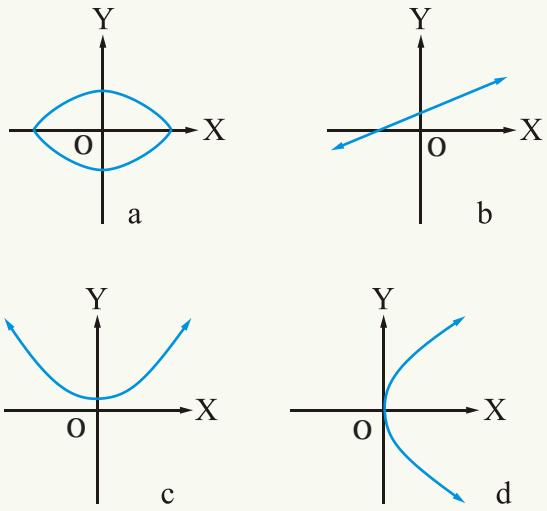
$\text{h(x)} = \sqrt{\text{x}^2 - 2\text{x} - 3}$

$\text{Dom h} = \{\text{x} / \ \text{x} \leq -1$ يا $x \geq 3\}$ يا $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

ketabton.com - The Digital Library

د یوې تابع ګراف او د ګراف له مخې د یوې تابع پیژندنه
(Graph of a function and vertical line test)

په راکړل شوو شکلونو کې کوم ګراف د یوې تابع ګراف دی؟



فعالیت

- د y له محور سره یو موازي خط رسم کړئ.
- وګورئ چې دا خط د تابع ګراف په څو نقطو کې قطع کوي؟
- که دا خط ګراف په یوه نقطه کې قطع کړي آیا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟
- که دا خط، ګراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي آیا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟

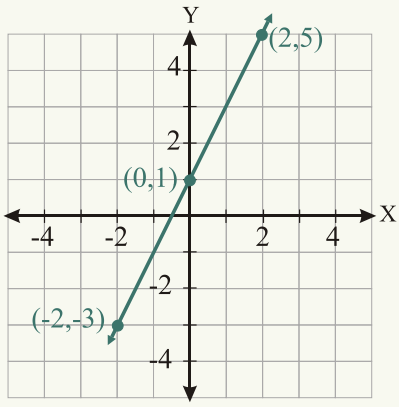
که $f(x)$ یوه حقیقي تابع وي، د $f(x)$ د تابع ګراف د $(x , f(x))$ د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې د $y=f(x)$ په معادله کې صدق وکړي.

یا د یوې تابع ګراف د XOY د مستوي د هغو نقطو سټ دی چې $\{(x , y) / y = f(x)\}$ صدق کړي او $x \in dom\, f(x)$ وي.

ketabton.com - The Digital Library

لومړي مثال: د $y = f(x) = 2x + 1$ تابع ګراف رسم کړئ.

input	تابع	output	مرتبې جوړې
x	$2x+1$	$y = f(x)$	(x, y)
0	$2(0)+1$	1	$(0,1)$
2	$2(2)+1$	5	$(2,5)$
-2	$2(-2)+1$	-3	$(-2,-3)$



دویم مثال: د $f(x) = x^2 + 1$ او $y = -1$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.

د تعریف او د قیمتونو ساحې یې هم پیدا کړئ.

حل:

$f(x) = x^2 + 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

د $(3,10)$, $(2,5)$, $(1,2)$, $(0,1)$, $(-1,2)$, $(-2,5)$, $(-3,10)$ مرتبو جوړو په نظر کې نیولو سره د تابع ګراف رسم کړئ:

$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$f(0) = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1$

$f(1) = 1^2 + 1 = 2$

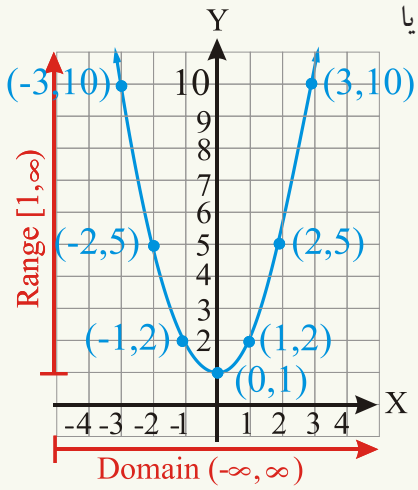
$f(2) = 2^2 + 1 = 5$

$f(3) = 3^2 + 1 = 10$

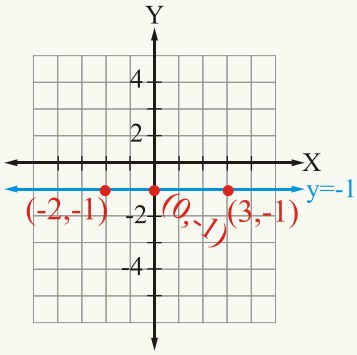
$\text{Dom}\, f = (-\infty, \infty)$

$\text{Range}\, f = (1, \infty)$

یا



ketabton.com - The Digital Library



$f(x) = -1$

Input	Output	مرتبه جوړه
x	$y = f(x)$	(x, y)
-2	-1	$(-2, -1)$
0	-1	$(0\ , -1)$
3	-1	$(3\ , -1)$

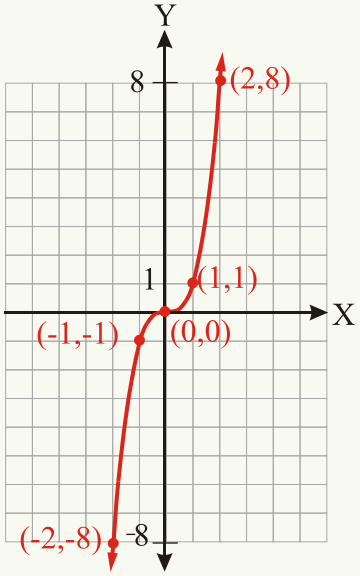
$\text{Dom } y = IR$

$\text{Range } y = -1$

فعالیت

د $f(x) = x^2 - 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دریم مثال: د $y = f(x) = x^3$ تابع ګراف رسم کړئ.



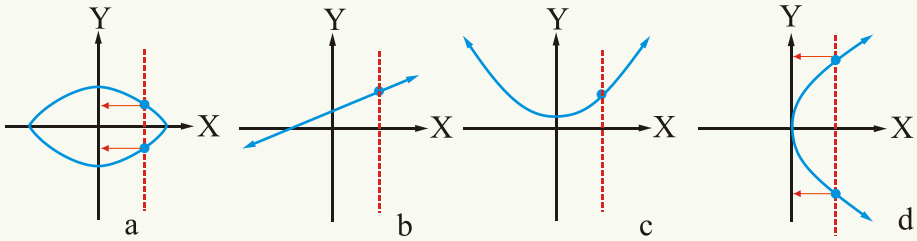
$f(x) = x^3$

x	2	1	0	−1	−2
$y = f(x)$	8	1	0	−1	−8

که یو عمودي خط (د y له محور سره موازي) یو ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف دی او که له یوې نقطې څخه یې په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف نه دی.

ketabton.com - The Digital Library

خلورم مثال: په لاندې راکړل شوو ګرافونو کې لیدل کېږي چې b او c د تابع ګانو ګرافونه دي، ځکه چې عمود خط یې ګرافونه په یوه نقطه کې قطع کړي دي، لیکن د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي، ځکه چې عمودي خط ګرافونه له یوې څخه په زیاتو نقطو (دوو نقطو) کې قطع کړي دي یا د یوه x لپاره د y یا $f(x)$ دوه قیمتونه وجود لري، نو د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي.



د تابع د تعریف په ناحیه domain کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعریف شوي وي یا د تابع قیمت یو حقیقي عدد وي. د یوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د نقطو ستې دی، په دې ډول چې $S=\{(x,y)\,|\,y=f(x)\}$ چې x د تابع د تعریف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د یوې تابع ګراف دی.

پوښتنې

1 - د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحې (Domains) پیدا کړئ.

$f(x)=\sqrt{x^2-9}$ $\quad g(x)=2x-5$ $\quad h(x)=\sqrt{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{x+1}$ $\quad g(x)=|x-3|$ $\quad h(x)=\dfrac{3}{x-4}$

$f(x)=\dfrac{7x}{x^2-16}$ $\quad g(x)=\dfrac{2}{(x+3)(x-7)}$ $\quad h(x)=\dfrac{4}{x^2+11x+24}$

$f(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$

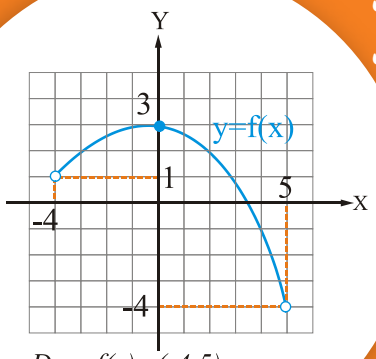
2 - د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3 - د $g(x)=2x-1$ تابع ګراف رسم کړئ که $x=-3,-2,-1,0,1,2,3,$ وي.

4 - د $x=y^2-2$ ګراف رسم کړئ او آیا دا د یوې تابع ګراف دی؟ ولې؟

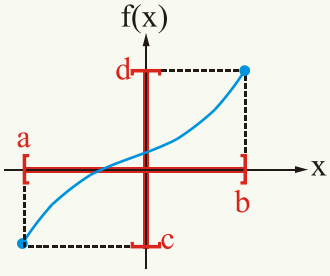
ketabton.com - The Digital Library

د ګراف له مخې د یوې تابع د تعریف او د قیمتونو د ناحیو او د تابع د قیمتونو پیدا کول:

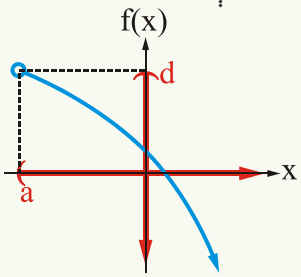


Dom f(x)=(-4,5)
Range f(x)=(-4,3]

آیا د توابعو په لاندینیو راکړل شوو ګرافونو کې د تابع د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې ټاکلای شئ؟



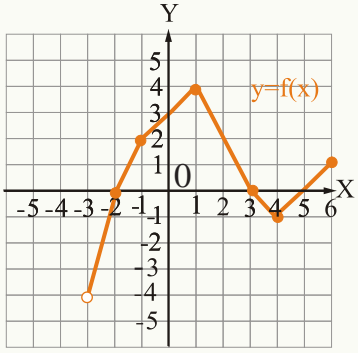
Dom f=[a,b]
Rage f= [c,d]



Dom f = (a,∞)
Rang f =(-∞,d)

فعالیت

شکل وګورئ لاندینیو پوښتنو ته ځواب ورکړئ:

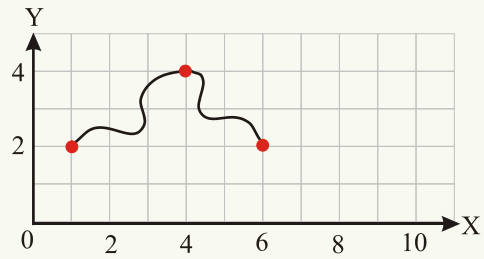


- د شکل له مخې د f تابع د تعریف او قیمتونو ساحه پیدا کړئ.
- آیا د 4 – عدد د f د تابع د قیمتونو په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آیا د 3 – عدد د f د تعریف په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آیا د 6 عدد د f د تعریف په ساحه کې شامل دی؟

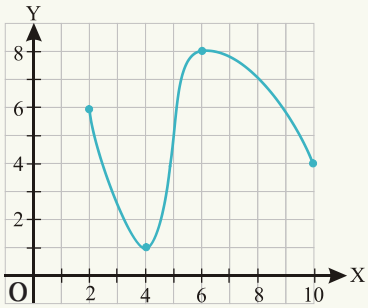
ketabton.com - The Digital Library

لیدل کېږي چې $f(-1)=2$ او $f(1)=4$ دي او هم د شکل له مخې د تابع د تعریف ساحه له 3- څخه تر 6 پورې ده، لیکن $-3 \notin dom\ f$ او $6 \in dom\ f$، نو $dom\ f=(-3,6]$ او په همدې ډول د f(x) تابع د قیمتونو ساحه (Range) له 4- څخه تر 4 پورې ده، خو $-4 \notin Range\ f$ نو $Range\ f=(-4,4]$.

لومړی مثال: په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګانو د تعریف او د قیمتونو ساحې پیداکړئ.



(1)



(2)

حل:

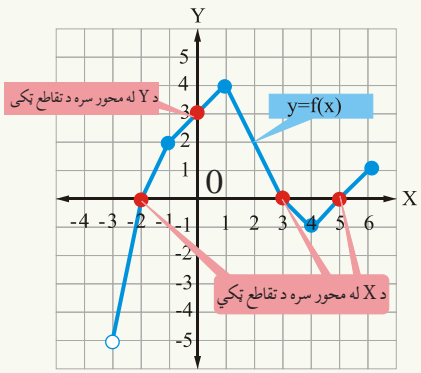
د لومړي شکل په ګراف کې د تعریف ساحه د 1 او 6 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي او د قیمتونو ساحه یې د 2 او 4 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي یا: $1 \le x \le 6$ او $2 \le y \le 4$

د (2) شکل په ګراف کې $2 \le x \le 10$ یا $Dom=[2,10]$

$Range=[1,8]$ یا $1 \le y \le 8$

دویم مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.

- $f(-2)$, $f(3)$ او $f(5)$ پیداکړئ.
- د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطو وضعیه کمیات پیداکړئ.



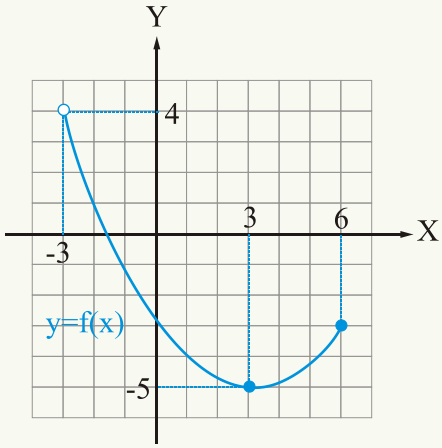
حل: څرنګه چې د X له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $y=0$ وي، نو $f(-2)=0$, $f(3)=0$ او $f(5)=0$ دي، نو ګراف د X محور د

ketabton.com - The Digital Library

$(-2,0)$, $(3,0)$ او $(5,0)$ په نقطو کې قطع کوي.

څرنګه چې د y له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $x=0$ دی $f(0)=3$ ، نو ګراف د y محور د $(0,3)$ په نقطه کې قطع کوي.

دريم مثال: په لاندې شکل کې د f تابع Domain او Range پيدا کړئ $f(3)$ او $f(6)$ هم په لاس راوړئ.



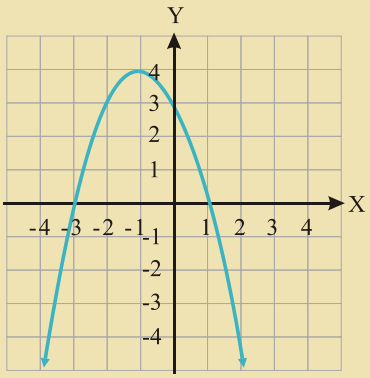
حل: ليدل کېږي چې د تعريف ساحه يې له 3 - څخه تر 6 پورې ده، خو 3 - د تعريف په ساحه کې شامل نه دی.

$Domain\, f(x) = -3 < x \le 6$ يا $(-3,6]$

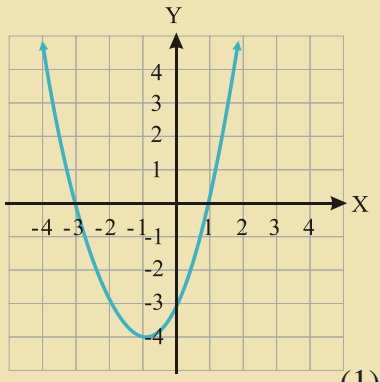
او د قيمتونو ساحه يې: $\text{Range}\, f(x) = -5 \le y < 4$ يا $[-5,4)$ ، $f(6) = -3$ او $f(3) = -5$ ده.

ketabton.com - The Digital Library

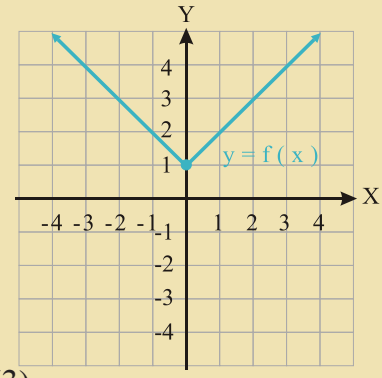
په راکړل شوو شکلونو کې:



(2)



(1)



(3) $f(-1)=?$ $f(3)=?$

a- د تابع د تعریف ساحه

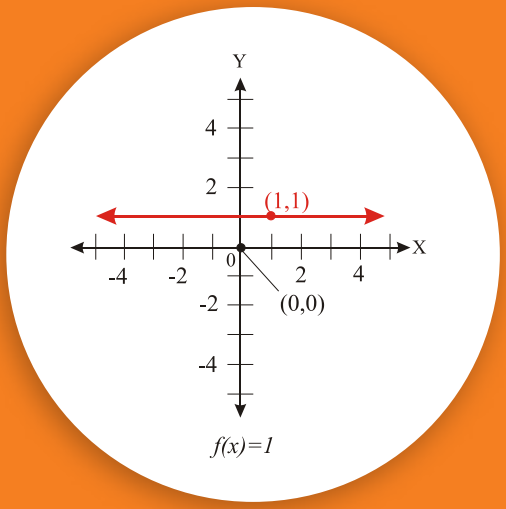
b- د تابع د قیمتونو ساحه

c- د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي

d- د Y له محور سره د تقاطع ټکي او په دریم شکل کې د تابع غوښتل شوي قیمتونه پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

ځينې خاصې تابع ګانې او ګرافونه يې

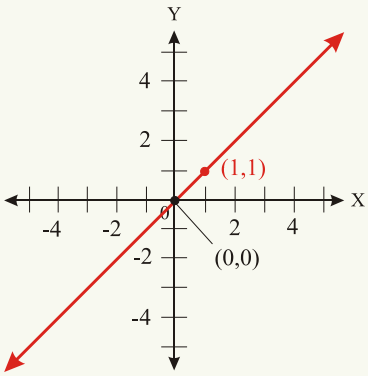


$f(x)=1$

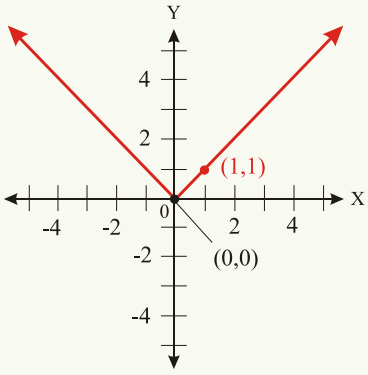
د هغو تابع ګانو نومونه واخلی چې ګرافونه يې راکړل شوي دي

توابع دوه ډولونه لري چې ځينې خاصې تابع ګانې ترځېرنې لاندې نيسو:

ثابته تابع، د عينيت تابع، د مطلقه قيمت تابع، څو معادله يي تابع او د علامې تابع



$f(x)=x$



$f(x)=|x|$

فعاليت

- ثابتي تابع ته ولې ثابته تابع وايي؟
- آيا د عينيت تابع د تعريف او د قيمتونو ساحې سره مساوي وي؟
- آيا د مطلقه قيمت د تابع د قميتونو ساحه منفي قيمتونه اخيستلای شي؟

ketabton.com - The Digital Library

ثابته تابع (Constant Function)

که x او y د حقیقي عددونو سټونه وي، د $f : x \to y$ یا $f(x) = y$ په تابع کې که y له یوه ثابت عدد سره مساوي وي یا $y = f(x) = c$ چې (c) یو ثابت عدد دی، نو y د ثابتې تابع په نوم یادېږي.

د مثال په ډول: $f(x) = 2$, $f(x) = -3$ او $f(x) = -2$ او داسې نورې ثابتې تابع ګانې دي.

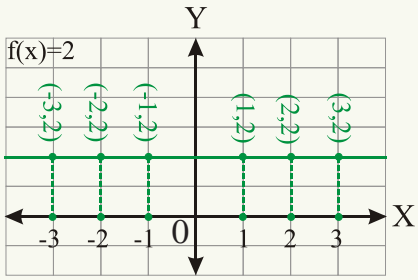
لومړی مثال: $f(x) = 2$ او $f(x) = -2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

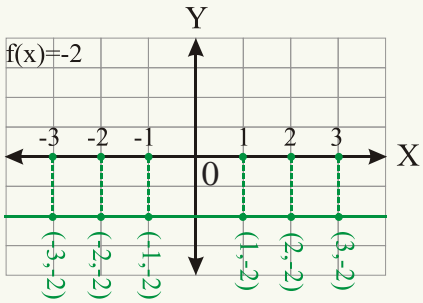
$f(x) = 2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	2	2	2	2	2	2

$f(x) = -2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	−2	−2	−2	−2	−2	−2

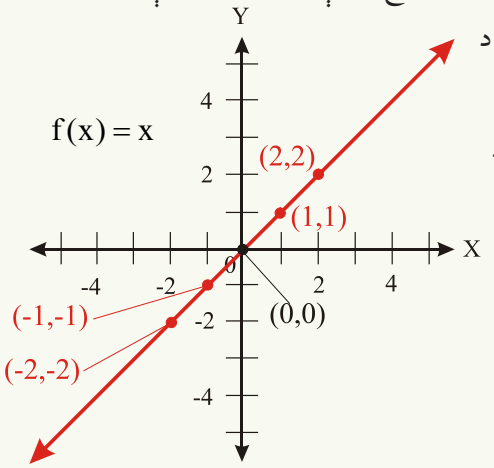




په دې معنا چې په ثابته تابع کې د تعریف د ساحې د هر عنصر تصویر همغه ثابت عدد دی.

د عینیت تابع (Identity function): هغه تابع ده چې د تعریف د ساحې هر عنصر ته له خپل ځان سره ارتباط ورکړي یا $f(x) = x$ د عینیت د تابع په نامه یادېږي.

مثال: د $f(x) = x$ د تابع ګراف رسم کړئ.



f(x) = x

x =	0	1	2	−1	−2	...
f(x) =	0	1	2	−1	−2	...

ketabton.com - The Digital Library

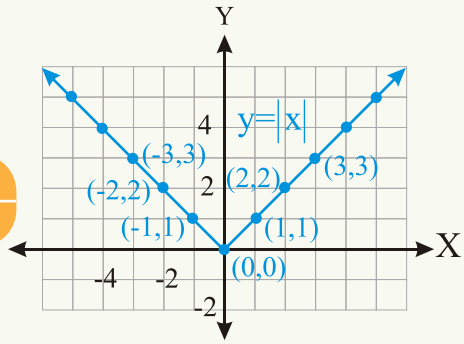
د مطلقه قیمت تابع (Absolute value function)

د مطلقه قمیت تابع $f(x)=|x|$ په لاندې ډول تعریف شوی ده:

$$f(x)=\begin{cases} x & , x\geq 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}$$

لومړی مثال: د $f(x)=|x|$ تابع ګراف رسم کړئ.

$f(x)=\|x\|$							
$x=$	0	1	2	3	−1	−2	−3
$f(x)=$	0	1	2	3	1	2	3



لیدل کېږي چې د مطلقه قیمت د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې $[0,\infty)$ ده.

خو معادله یې تابع (Piecewise function) او ګراف یې

آیا کېدای شي چې یوه تابع د تعریف په ساحه کې د دوو یا خو معادلو په واسطه تعریف شوي وي؟

لومړي مثال: که $f(x)=\begin{cases} 2x+3 : x<4 \\ x^2-1 : 4\leq x\leq 10 \end{cases}$ وي، نو $f(-5)$ ، $f(8)$ او د f تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $-5<4$ دی، نو په لومړی معادله کې وضع کېږي، لرو چې:

$$f(-5)=2(-5)+3=-10+3=-7$$

او څرنګه چې د 8 عدد د 4 او 10 ترمنځ واقع دی $4<8<10$ ، نو په دویمه معادله کې وضع کېږي لرو چې:

$$f(8)=8^2-1=64-1=63$$

د f تابع د تعریف ساحه په لومړۍ معادله کې $(-\infty\ ,\ 4)$ او په دویمه معادله کې $[4\ ,\ 10]$ ده، نو د

ketabton.com - The Digital Library

f د تعریف ساحه د $(-\infty , 10]$ څخه عبارت ده.

فعالیت

که چېرې $g(x)=\begin{cases} -\frac{11}{60}x+15 & : \ 0 \le x < 60 \\ \frac{1}{5}x-8 & : \ 60 \le x \le 90 \end{cases}$ وي،

وښیاست چې $g(80)=8$ او $g(30)=9.5$ دی.

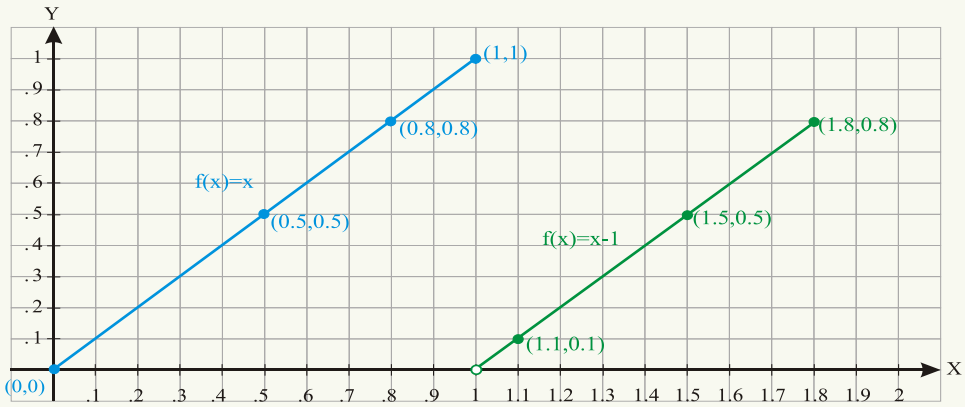
د څو معادله یې تابع ګراف (Graph of function defined piecewise)

دویم مثال: د f (x) تابع د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا او ګراف یې هم رسم کړئ که:

$f(x)=\begin{cases} x : 0 \le x \le 1 \\ x-1 : 1 < x \le 2 \end{cases}$ وي.

حل: د لومړی معادلې د تعریف ساحه $[0,1]$ او د دویمې معادلې د تعریف ساحه $(1,2]$ ده چې په نتیجه کې د f (x) د تعریف ساحه $[0,2]$ ده.

د ګراف د رسمولو لپاره، د دواړو برخو ګراف رسموو په دې ډول:



ketabton.com - The Digital Library

$y = f(x) = x - 1$

x	1,1	1,5	1,8
$f(x)$	0,1	0,5	0,8

$y = f(x) = x$

x	0	0.5	0.8	1
y = f(x)	0	0.5	0.8	1

په نتیجه کې دوه مستقیم خطونه په لاس راځي چې دواړه د f (x) تابع ګراف دی.

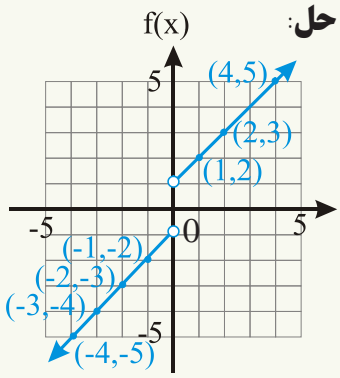
فعالیت

که: $f(x) = \begin{cases} x \Leftarrow 0 \le x \le 4 \\ x - 1 \Leftarrow 0 < x < -4 \end{cases}$ وي، $f(0), f(-2), f(2)$ پیدا کړئ او ددې تابع ګراف هم رسم کړئ.

دریم مثال: د $f(x) = \begin{cases} x - 1 \Leftarrow x < 0 \\ x + 1 \Leftarrow x > 0 \end{cases}$ تابع ګراف رسم د تعریف او د قیمتونو ساحې یې وټاکئ.

حل:

x	1	2	4	−1	−2	−3	−4
$f(x)$	2	3	5	−2	−3	−4	−5



لیدل کېږي چې د تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی $(x \neq 0)$ یا

$Dom\ f(x) = (-\infty\ ,\ 0) \cup (0, \infty)$ او د قیمتونو ناحیه (Range) یې عبارت دی له:

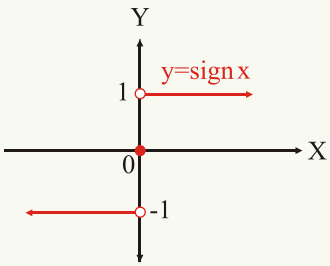
$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ یا $y > 1$ او $y < -1$

د علامې تابع (Sign Function): د علامې تابع چې په sgn (x) سره ښودل کېږي د خو معادله یې تابع یو مثال دی چې په لاندې ډول تعریف شوي ده:

ketabton.com - The Digital Library

$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & : x>0\\ 0 & : x=0\\ -1 & : x<0\end{cases}$ د دې تابع د تعریف ناحیه د حقیقي عددونو ستې او د قیمتونو ساحه

(Range) یې $\{-1,0,1\}$ ده.



$Dom_{sgn}=IR \qquad Range_{sgn}=\{-1\ ,\ 0\ ,1\}$

$f(x)=c$ ثابته تابع ، $f(x)=x$ د عینیت تابع او $f(x)=|x|$ د مطلقه قیمت تابع ده چې د تعریف ساحه یې ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې صفر او مثبت حقیقي عددونه دي.

پوښتنې

1- د $f(x)=-5$ ، $g(x)=\frac{1}{2}$ او $h(x)=4$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

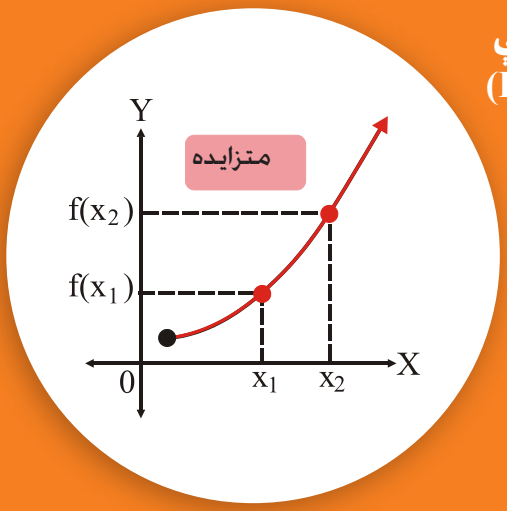
2 – د $f(x)=|x|-3$ تابع ګراف رسم کړئ.

3- که $f(x)=\begin{cases}-x : x<0\\ x : x\geq 0\end{cases}$ وي $f(0)\ ,f(-2,3)$ او $f(16)$ پیدا کړئ.

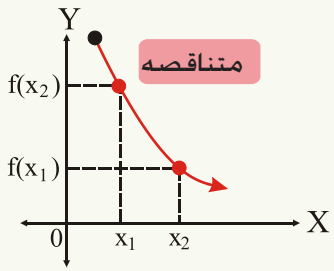
4- که $h(x)=\begin{cases}x+1 : -1\leq x<0\\ -x+1 : 0\leq x\leq 1\end{cases}$ وي د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

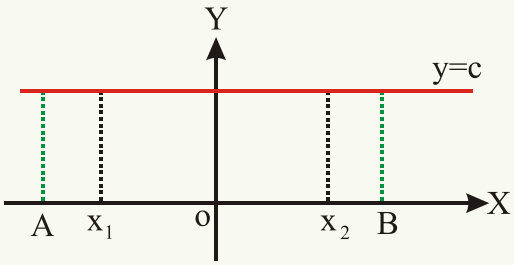
ketabton.com - The Digital Library

متزايدې او متناقصې تابع ګانې
(Increasing and decreasing functions)



- په راکړل شوو ګرافونو کې کوم ګراف د متزايدی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف د متناقصی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف نه متزايد دی او نه متناقص؟





1 – يوه تابع په يوه انټروال کې متزايده ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتيجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي.

2 – يوه تابع په يوه انټروال کې متناقصه ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتيجه کې $f(x_1) > f(x_2)$ شي.

3 – که $x_1 < x_2$ وي او په نتيجه کې $f(x_1) = f(x_2)$ شي دا تابع نه متناقصه ده او نه متزايده.

لکه: خرنګه چې په شکل کې ليدل کېږي دا يوه ثابته تابع ده.

مثال: د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع ګانو ګراف په کومو انټروالونو کې متزايد او په کومو انټروالو کې متناقص دی؟

x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

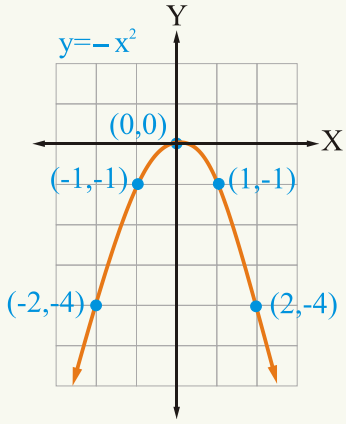
x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = -x^2$	0	−1	−1	−4	−4

ketabton.com - The Digital Library

$-1 < 2$

$f(-1) > f(2)$

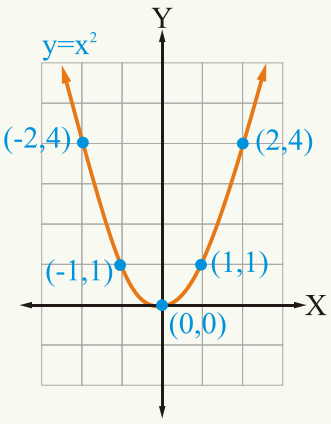
$-1 > -4$



$-1 < 2$

$f(-1) < f(2)$

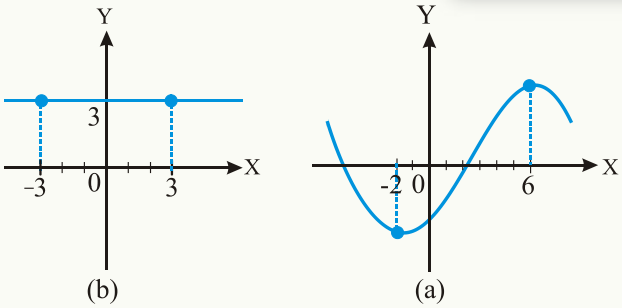
$1 < 4$



لیدل کېږي چې د $f(x) = x^2$ تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0, \infty)$ په انټروال کې متزایده ده، لیکن د $f(x) = -x^2$ تابع په $(-\infty, 0)$ انټروال کې متزایده او د $(0, \infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

فعالیت

په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګراف په کومو انټروالونو کې متزاید په کومو کې متناقص دی، کوم ګراف نه متزاید او نه متناقص دی؟

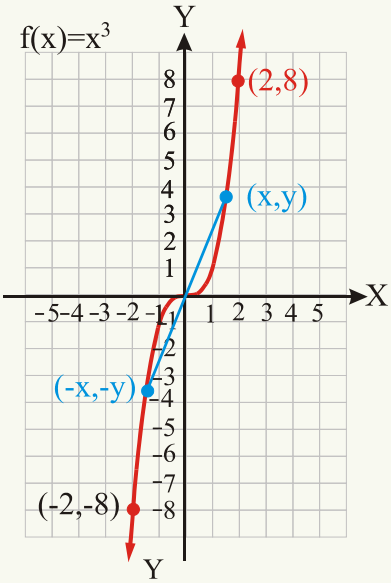


جفتي او طاقي تابع ګاني (Even and Odd Functions):

1- د $f(x)$ تابع یوه جفته تابع ده که چېرې $f(-x) = f(x)$ وي، په دې معنا که په تابع کې د x پر ځای $-x$ عوض کړو، د تابع په قیمت کې تغیر رانه شي.

2- د $f(x)$ تابع یوه طاقه تابع ده که چېرې $f(-x) = -f(x)$ وي یا دا چې که په تابع کې د

ketabton.com - The Digital Library



x پر ځای x− عوض کړو، د تابع قیمت منفي شي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2$ او $f(x)=x^3$ په تابع ګانو کې کومه تابع جفته او کومه یوه طاقه ده؟

حل: په دواړو تابع ګانو کې

د x پر ځای x − عوض کوو:

$$f(-x)=(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=-x^3$$

نو د $f(x)=x^3$ تابع یوه طاقه تابع ده،

ځکه چې $f(-x)=-f(x)$ کېږي لکه:

$f(-2)=-f(2)=-8$ او د $f(x)=x^2$ په

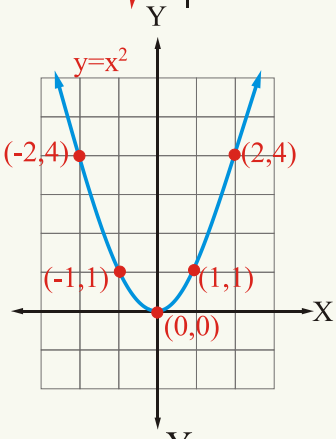
تابع کې لرو چې:

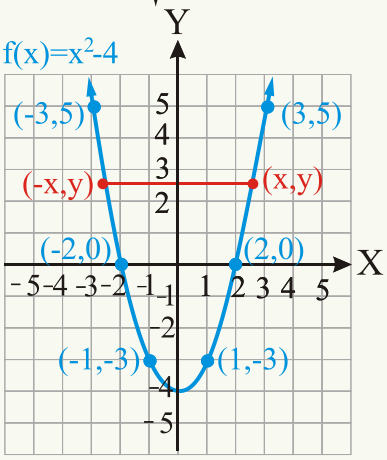
$$f(-x)=(-x)^2=(-x)(-x)=x^2$$

نو $f(x)=x^2$ یو جفته تابع ده، ځکه چې

$f(-x)=f(x)$ کېږي لکه: $f(-2)=f(2)=4$

لیدل کېږي چې د جفتو تابع ګانو ګرافونه نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګرافونه نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته سره متناظر دي.





دویم مثال: د $f(x)=x^2-4$ او $g(x)=x^2+3x+2$ په تابع ګانو کې کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

حل:

$$f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$$

نو دا تابع جفته ده، په شکل کې هم لیدل کېږي، دوه نقطې د $(3,5)$ او $(-3,5)$ تابع د $x=3$ او $x=-3$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې د (5) عدد دی.

ketabton.com - The Digital Library

يعني: $f(-3)=f(3)=5$

همدارنګه د $x=2$ او $x=-2$ لپاره د تابع قيمت سره مساوي دی چې صفر دی، نو په نتيجه کې تابع جفته ده.

$$g(x)=(-x)^2+3(-x)+2=x^2-3x+2$$

چې دا تابع نه جفته او نه طاقه ده.

دريم مثال: که f له حقيقي عددونو څخه حقيقي عددونو ته يوه طاقه تابع وي او $f(-2)=k+5$ او $f(2)=2k+3$ وي، د k قيمت پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې f يوه طاقه تابع ده، نو: $f(-x)=-f(x)$

د طاقې تابع د تعريف په اساس: $f(-2)=-f(2)$

$$k+5=-(2k+3)$$
$$k+5=-2k-3$$
$$3k=-8$$
$$k=-\frac{8}{3}$$

که د $f(x)$ په تابع کې $x_1<x_2$ وي او په نتيجه کې $f(x_1)<f(x_2)$ شي تابع متزايده او که $x_1<x_2$ وي او $f(x_1)>f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده که $f(-x)=f(x)$ وي تابع جفته او که $f(-x)=-f(x)$ شي تابع طاقه ده د جفتو تابع ګانو ګراف نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سره متناظر دي.

پوښتنې

1- د لاندينيو تابع ګانو څخه کومه يوه يې متزايده، کومه يوه يې متناقصه او کومه يوه نه متزايده او نه متناقصه ده؟

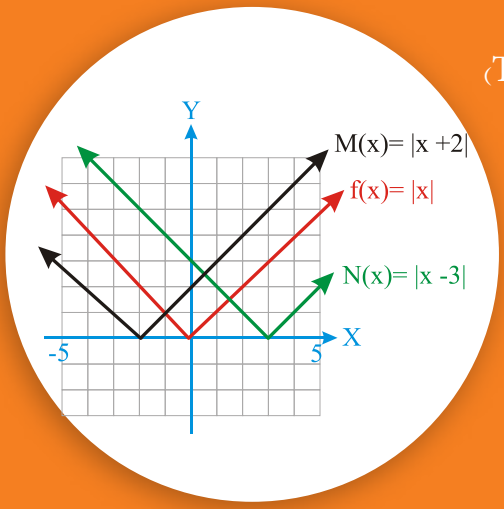
$$f(x)=x^2-x^4 \quad , \quad f(x)=x^2+x \quad , \quad f(x)=x^3+x$$

2- د لاندينيو راکړل شوو تابع ګانو څخه کومه يوه جفته او کومه يوه طاقه ده؟

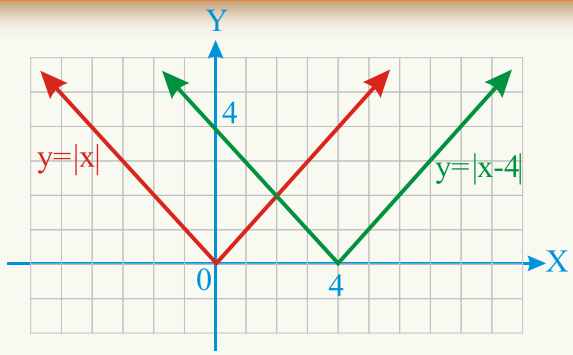
$$f(x)=|x| \quad , \quad f(x)=x$$
$$f(x)=x^5 \quad , \quad f(x)=x^4$$

ketabton.com - The Digital Library

د گرافونو انتقال (Translation)



آیا کولای شئ چې ووایئ راکړل شوي ګرافونه
یو له بله سره څه اړیکه لري؟



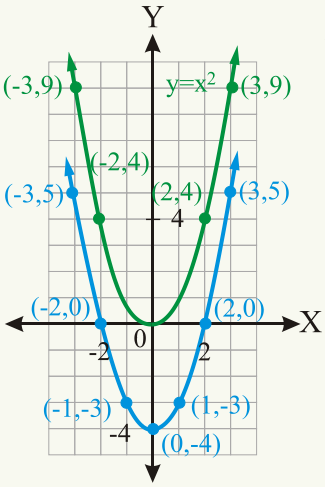
فعالیت

- د $f(x)=x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2+4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- ووایاست چې پورتني ګرافونه یو له بله سره څه ډول اړیکه لري؟

که د $f(x)=x^2$ ګراف رسم کړو، څنګه کولای شو د $f(x)=x^2$ د ګراف له انتقال څخه د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړو؟

د $y=x^2$ د ګراف د (x,y) د هرې نقطې لپاره د $(x,y-4)$ اړونده نقطه د $y=x^2-4$ په ګراف واقع ده، نو د $y=x^2$ تابع ګراف هره نقطه د 4 واحدو په اندازه ښکته خواته انتقال کوي تر څو د $y=x^2-4$ ګراف لاس ته راشي، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي، دا انتقال

ketabton.com - The Digital Library



د عمودي انتقال (Vertical Translation) په نوم یادېږي.

انتقال په دوه ډوله دی: عمودي انتقال او افقي انتقال.

1- عمودي انتقال (Vertical Translation):

عمودي انتقال پورته او یا ښکته خواته وي.

که $c > 0$ وي:

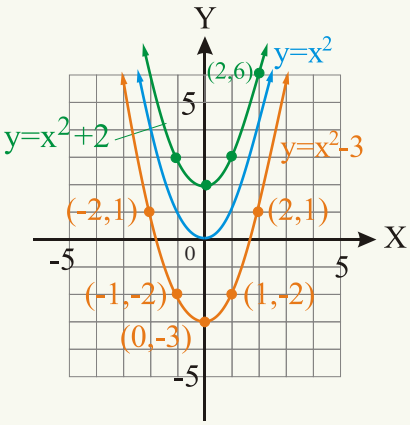
1: که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c په اندازه پورته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) + c$ ګراف لاس ته راځي.

2: که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c په اندازه ښکته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) - c$ ګراف لاس ته راځي.

لومړی مثال: د $y = x^2 + 2$ او $y = x^2 - 3$ تابع ګانو ګرافونه د $y = x^2$ تابع له ګراف سره څرنګه اړیکه لري؟ درې واړه ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ.

حل: د $y = x^2$ تابع ګراف د (2) واحدو په اندازه پورته خواته انتقالوو، ترڅو د $y = x^2 + 2$ د تابع ګراف په لاس راشي او که د $y = x^2$ تابع ګراف د (3) واحدو په اندازه ښکته خواته نقل کړو، د $y = x^2 - 3$ تابع ګراف لاس ته راځي:

x =	0	1	2	−1
$y = x^2$	0	1	4	1
$y = x^2 + 2$	2	3	6	3
$y = x^2 - 3$	−3	−2	1	−2



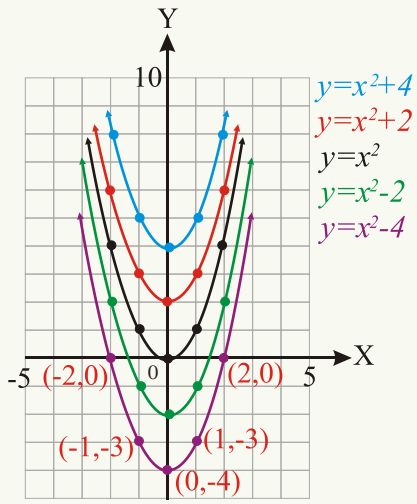
یا عمودي انتقال داسې هم تعریفولای شو:

که د تابع په ګراف کې د y پر ځای $y - a$ وضع کړو داسې چې a یو ثابت عدد دی، نو ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي که $a > 0$ وي، انتقال په عمودي ډول پورته خواته او که $a < 0$ وي ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال کوي.

ketabton.com - The Digital Library

دویم مثال: د $y = x^2$ تابع ګراف له انتقاله څخه د $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$ ، $y = x^2 + 4$ او $y = x^2 - 4$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$y = x^2$		$y = x^2 + 2$		$y = x^2 + 4$		$y = x^2 - 2$		$y = x^2 - 4$	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	2	0	4	0	-2	0	-4
± 1	1	± 1	3	± 1	5	± 1	-1	± 1	-3
± 2	4	± 2	6	± 2	8	± 2	2	± 2	0



افقي انتقال: (Horizontal Translation)

که د تابع په ګراف کې د x پر ځای $x - b$ وضع شي چې b یو ثابت عدد دی. د تابع ګراف د $|b|$ په اندازه په افقي ډول انتقال کوي، که $b > 0$ وي ګراف ښي خواته او که $b < 0$ وي، ګراف کینې خواته انتقال کوي.

دریم مثال: د $y = x^2$ ګرا ف له انتقال څخه د $y = (x+2)^2$ او $y = (x-3)^2$ ګرافونه رسم کړئ.

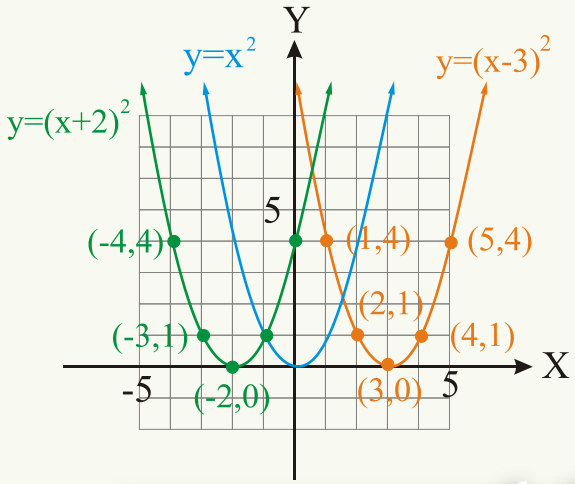
حل: لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي که د $y = x^2$ تابع ګراف د 2 واحدو په اندازه کښې

ketabton.com - The Digital Library

خواته انتقال کړو، د $y=(x+2)^2$ ګراف لاس ته راځي، که د $y=x^2$ ګراف 3 واحده ښي خواته انتقال کړو، د $y=(x-3)^2$ د تابع ګراف لا س ته راځي، لکه: څنګه چې په شکل کې هم لیدل کېږي.

x	-2	0	-1	-3	-4	....
$y=(x+2)^2$	0	4	1	1	4	....

x =	3	4	2	5	1	....
$y=(x-3)^2$	0	1	1	4	4	....



فعالیت

د $f(x)=|x|$ تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x)=|x+2|$ او $h(x)=|x-3|$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ.

د عمودي او افقي انتقالونو ترکیب:

(Combining Horizontal and Vertical Shifts)

څلورم مثال: د $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x+1)^2-3$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: لومړی د $f(x)=x^2$ تابع ګراف رسموو چې د دویمې درجې تابع د معیاري ګراف په نامه یادېږي لومړی د ګراف پر مخ د $(0,0)$, $(2,4)$ او $(-2,4)$ درې نقطې ټاکو.

ketabton.com - The Digital Library

بیا د $g(x)=(x+1)^2$ تابع گراف رسمو چې د $f(x)=x^2$ د تعریف له ساحې سره د (1) عدد جمع کوو، ترڅو چې د $f(x)=x^2$ گراف کینې خواته د یو واحد په اندازه نقل شي، په دویم شکل کې ښودل شوی دی. په پای کې د $f(x)=(x+1)^2-3$ تابع گراف د رسمولو لپاره د دویم شکل گراف د 3 واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقالوو چې گراف یې په دریم شکل کې ښودل شوی دی:

$f(x)=x^2$

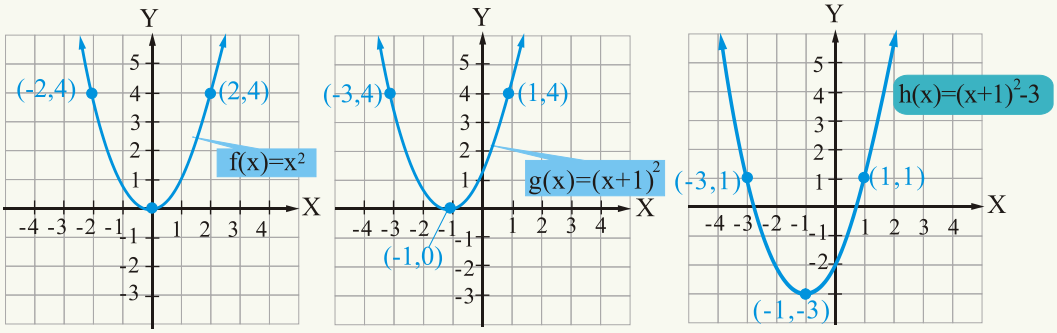
x	0	2	−2
f(x)	0	4	4

$g(x)=(x+1)^2$

x	−1	1	−3
f(x)	0	4	4

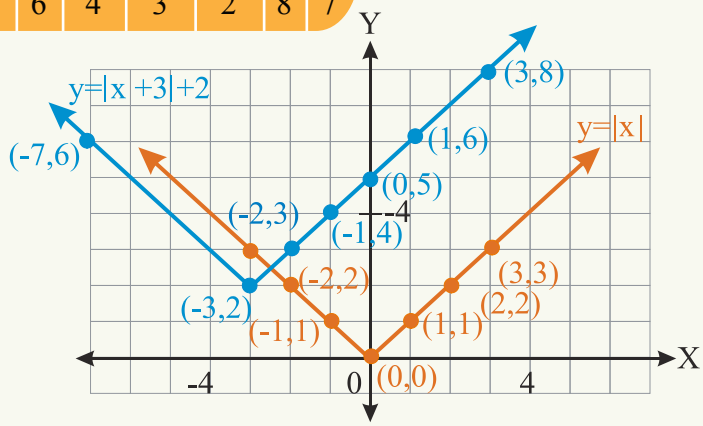
$f(x)=(x+1)^2-3$

x	1	−3	−1
f(x)	1	1	−3



پنځم مثال: د $y=|x|$ تابع گراف له انتقال کولو څخه د $y=|x+3|+2$ تابع گراف رسم کړئ.

x	0	1	−1	−2	−3	3	2
y = | x |	0	1	1	2	3	3	2
y = | x + 3 | +2	5	6	4	3	2	8	7



ketabton.com - The Digital Library

انتقال په (2) ډول دی، (عمودي او افقي)

عمودي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که چېرې د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي، د $y = f(x) + c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي د $y = f(x) - c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه کېنې خواته انتقال شي، د $y = f(x + c)$ ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x - c)$ د تابع ګراف لاس ته راځي.

پوښتنې

1- د $y = x^2$ تابع ګراف له انتقال څخه د لاندېنیو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$g(x) = x^2 - 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $g(x) = (x - 2)^2$

2- د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې له انتقال څخه د $f(x) = \sqrt{x} + 2$ او $f(x) = \sqrt{x + 2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3- د $f(x) = |x|$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې ګراف له انتقال څخه د $g(x) = |x| + 4$, $g(x) = |x + 4|$ او $h(x) = |x - 4|$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

4- د $f(x) = x^3$ تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x) = x^3 - 3$ او $g(x) = (x - 3)^3$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

د تابع ګانو عملیې
(Operations on functions)

$$f(x)=\sqrt{4-x}$$
$$g(x)=\sqrt{3+x}$$
$$(f+g)(x)=?$$

که $f(x)=x+2$ او $g(x)=2x+11$ وي $(f+g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیدا کولای شی؟

د تابع ګانو څلورګونې عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x).\,g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

$$dom\,(f+g)(x)=dom\ f\cap dom\,g$$
$$dom\,(f-g)(x)=dom\ f\cap dom\,g$$
$$dom\,(f\cdot g)(x)=dom\ f\cap dom\,g$$
$$dom\,(\frac{f}{g})(x)=dom\ f\cap dom\,g-\{x/g(x)=0\}$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x+1$ او $g(x)=x^2-4$ وي، $(f+g)(x)$ پیدا کړئ او هم د دې تابع د تعریف ساحه په لاس راوړئ.

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f+g)(x)=(2x+1)+(x^2-4)=2x-3+x^2=x^2+2x-3$$
$$dom\ g=IR \quad \text{او} \quad dom\ f=IR$$
$$dom(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

دویم مثال: که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=4x+5$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(3)$ پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل:

$$(f+g)(x)=(x^2-3)+(4x+5)=x^2+4x+2$$

$$(f+g)(3)=3^2+4(3)+2=9+12+2=23$$

$$\text{dom } g=IR \quad \square \quad \text{dom } f=IR$$

$$\text{dom}(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

فعالیت

که $f(x)=3x^2+4x-1$ او $g(x)=2x+7$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(4)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $f(x)=2x-1$ او $g(x)=x^2+x-2$ وي، $(f-g)(x)$ او $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ او د تعریف ساحې یې هم وټاکئ.

حل

$$(f-g)(x)=(2x-1)-(x^2+x-2)=2x-1-x^2-x+2=-x^2+x+1$$

خرنګه چې $dom\, f=IR$ او $dom\, g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(f\cdot g)(x)=(2x-1)(x^2+x-2)=2x^3+x^2-5x+2$$

$$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{2x-1}{x^2+x-2}=\frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=IR\cap IR-\{x/g(x)=0\}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq -2 \text{ او } x\neq 1\}$$

فعالیت

که $f(x)=x-5$ او $g(x)=x^2-1$ وي، نو $(\frac{f}{g})(x)$، $(f\cdot g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

څلورم مثال: که $f(x)=x+3$ او $g(x)=x-1$ وي، $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+3-(x-1)=x+3-x+1=4$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$$

څرنګه چې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شامل دي (x هر حقیقي عدد اخیستلای شي) یا $dom\, f=IR$ په همدې ډول: $dom\, g=IR$

$$dom\,(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$
$$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x-1}\quad (x\neq 1)$$

$$dom(\frac{f}{g})(x)=IR-\{1\}$$

یا

$$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/\,x\neq 1\}$$

یا

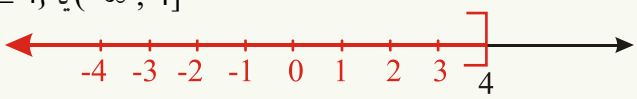
$$dom(\frac{f}{g})(x)=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$$

پنځم مثال: که $f(x)=\sqrt{4-x}$ او $g(x)=\sqrt{3+x}$ وي، $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ او $\frac{f}{g}$ پیدا کړئ او د تعریف ناحیه (Domain) یې وټاکئ.

حل:

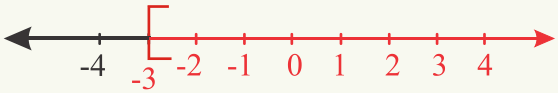
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{3+x}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{4-x})(\sqrt{3+x})=\sqrt{(4-x)(3+x)}$$
$$=\sqrt{12+x-x^2}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}=\sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$$

$dom\,f:\{4-x\geq 0\ ,\ x\leq 4\}$ یا $(-\infty\ ,\ 4]$



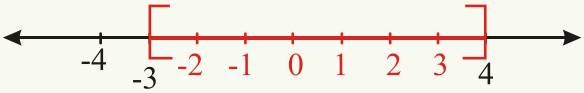
ketabton.com - The Digital Library

$\text{dom}\, g : \{x / 3 + x \geq 0, x \geq -3\}$ یا $[-3, \infty)$

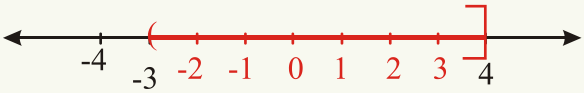


$(-\infty, 4] \cap [-3, \infty) = [-3, 4]$

چې $[-3,4]$ د $f+g$ ، $f-g$ او $f \cdot g$ د تابع ګانو د تعریف ساحه ده.



د $dom\frac{f}{g}$ د تعریف په ناحیه کې څرنګه چې $g(-3) = 0$ دی، نو: $Dom\frac{f}{g} = (-3, 4]$



له ثابت عدد سره د تابع د ضرب حاصل

که c یو ثابت عدد او f یوه تابع وي، نو حاصل ضرب یې عبارت دی له:

$$(c\, f)(x) = c \cdot f(x)$$

شپږم مثال: که $f(x) = x^2 - x + 2$ او $c = 5$ وي.

$$(5\ f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5(x^3 - x + 2) = 5x^3 - 5x + 10$$

پوښتنې

لاندې تابع ګانې په پام کې ونیسئ .

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})x$ پیدا کړئ.

2- د تعریف ناحیې یې وټاکئ.

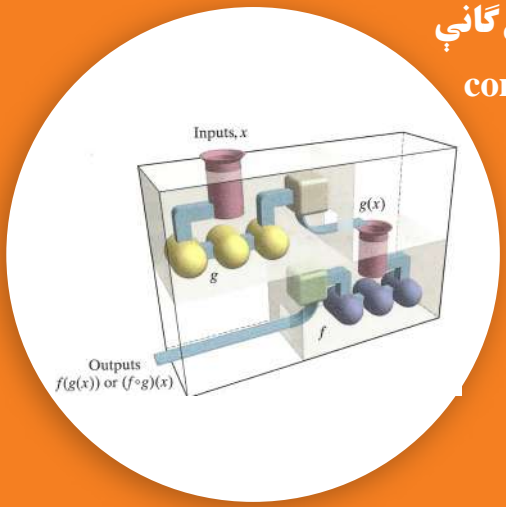
$a: f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = x - 1$ ، $b: f(x) = x - 5$ ، $g(x) = 3x^2$

$c: f(x) = 2x^2 - x - 3$ ، $g(x) = x + 1$ ، $d: f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x - 5$

$e: f(x) = \sqrt{x+4}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f: f(x) = \sqrt{3x}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

ketabton.com - The Digital Library

د تابع ګانو ترکیب یا مرکبې تابع ګانې
composition of functions or composite functions



فعالیت

- که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.
- په کوم حالت کې $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي.
- $(f\,o\,f)(x)$ او $(g\,o\,g)(x)$ پیدا کړئ.

که چېرې f او g د x تابع ګانې وي د f ترکیب له g سره د $(f\,o\,g)(x)$ یا $f\big(g(x)\big)$ سره ښودل کېږي $(f\,o\,g)(x)=f\big(g(x)\big)=f\big[g(x)\big]$

د $(f\,o\,g)(x)$ د تعریف ساحه عبارت له x څخه ده چې x د g د تعریف په ساحه کې او $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

یا: د $(f\circ g)$ تعریف ساحه: $\mathrm{Dom}\,(fog)x=\{x\in IR\,/\,x\in \mathrm{dom}\,g\,,g(x)\in \mathrm{dom}\,f\}$

1- چې x د g د تعریف په ساحه کې شامل وي.

2- $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

په پورتني شکل کې $(f\,o\,g)(x)$ تابع د دوو ماشینو په واسطه ښودل شوي ده چې په لومړی ماشین کې ورودي x ، (in put) دی او خروجي (output) یې g(x) ده، په دویم ماشین کې(input) یې $g(x)$ او (output) یې $(fog)(x)$ دی. که g(x) د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي، نو په دویم ماشین (f) کې داخلیدلای نه شي.

$$x \xrightarrow{g} \boxed{g(x)} \xrightarrow{f} f\,(g\,(x))$$

$$x \xrightarrow{f} \boxed{f(x)} \xrightarrow{g} g\,(f\,(x))$$

ketabton.com - The Digital Library

لومړی مثال: که $f(x)=x^2-1$ او $g(x)=3x$ وي $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f\big(g(x)\big)=f(3x)=(3x)^2-1=9x^2-1$$
$$(g\,o\,f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(x^2-1)=3(x^2-1)=3x^2-3$$

لیدل کېږي چې:

$$(f\,o\,g)(x)\neq(g\,o\,f)(x)$$
$$9x^2-1\neq 3x^2-3$$

دویم مثال: که $f(x)=3x-4$ او $g(x)=x^2+6$ وي $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل: په حقیقت کې په $(f\,o\,g)(x)$ کې د $g(x)$ تابع د f په تابع کې د (Domain) یا x ځای نیسي

$$f\big(g(x)\big)=f(x^2+6)=3(x^2+6)-4=3x^2+18-4=3x^2+14$$
$$g\big(f(x)\big)=(g\,o\,f)(x)=g(3x-4)=(3x-4)^2+6=9x^2-24x+22$$

ښکاره خبره ده چې د $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

فعالیت

که $f(x)=x+6$ او $g(x)=x-6$ وي، وښیاست چې $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ دی.

دریم مثال: که $g(x)=1-x$ او $f(x)=\sqrt{x}$ وي:

لومړی د fog او gof د تعریف ساحې پیدا کړئ، بیا $f\,o\,g$ او gof په لاس راوړئ.

حل: د f تابع د تعریف ساحه $[0\ ,\ \infty)$ او د g تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه $(-\infty,\infty)$ دي.

یا: $\quad Domf=[0,\infty) \qquad Domg=(-\infty,\infty)$

یا: $\quad Dom(fog)=\{x\,/\,x\in domg\ ,\ g(x)\in domf\}$

ketabton.com - The Digital Library

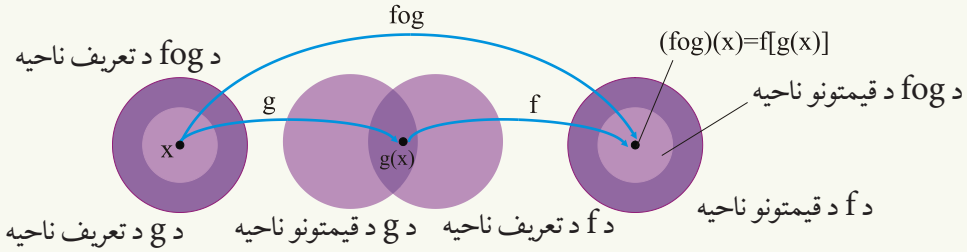
$$\text{Dom}(fog)=\{x/x\in IR\ ,\ 1-x\geq 0\}\ ,\ -x\geq -1\Rightarrow\ x\leq 1=(-\infty,1]$$

$$\text{Dom}\ (g\,o\,f\,)=\{x/x\in \text{dom}\,f\,,f(x)\in \text{dom}\,g\}=\{x/x\geq 0\ ,\sqrt{x}\in IR\}=(0,\infty]$$

$$(f\,o\,g)(x)=f(1-x)=\sqrt{1-x}$$

$$(g\,o\,f)(x)=g(\sqrt{x})=1-\sqrt{x}$$

د مرکبو تابع ګانو د تعریف د ساحې د لا روښانتیا لپاره لاندې شکل وګورئ.



څلورم مثال: که $h(x)=\sqrt{3x^2+1}$ وي، په دوو طریقو سره وښیاست چې د $h(x)$ تابع د کومو دوو تابع ګانو له ترکیب څخه په لاس راغلې ده؟

حل: د $h(x)$ تابع کولای شو د $(g\,o\,f)(x)$ او $(jok)(x)$ دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو.

په دې ډول که: $f(x)=3x^2+1$ او $g(x)=\sqrt{x}$ وي.

$$(g\,o\,f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(3x^2+1)=\sqrt{3x^2+1}$$

په همدې ډول کولای شو د $h(x)$ تابع د $(jok)(x)$ د دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو. په دې ډول چې: $j(x)=\sqrt{x+1}$ او $k(x)=3x^2$ وي.

$$(j\,o\,k)(x)=j\big(k(x)\big)=j(3x^2)=\sqrt{3x^2+1}$$

پنځم مثال: که $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ ، $(x\neq -2)$ وي، $f(f(x))$ $(f\,o\,f)(2)$ او $(fo\,fo\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f\,o\,f)(x)=\frac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x}{x+2}+2}=\frac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x+2x+4}{x+2}}=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{3x+4}=\frac{x}{3x+4}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$(fof)(2)=?\quad (fof)(x)=\frac{x}{3x+4}\Rightarrow (fof)(2)=\frac{2}{3\cdot 2+4}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$(fofof)(x)=\frac{\frac{x}{x+2}}{3(\frac{x}{x+2})+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2}+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x+4x+8}{x+2}}$$

$$=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{7x+8}=\frac{x}{7x+8}$$

فعالیت

که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$, $(g\circ f)(-2)$ او $(fog)(3)$ پیدا کړئ.

پوښتنې

1- که $f(x)=-3x+2$ او $g(x)=x^3$ وي:

$(\frac{g}{f})(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(g-f)(x)$, $(f+g)(x)$ پیدا او د تعریف ساحې یې هم وټاکئ.

2- که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=\sqrt{x-3}$ وي، $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ او $(\frac{g}{f})(x)$ پیدا کړئ.

3- که $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=\sqrt{4-x^2}$ او $k(x)=\sqrt{3x+4}$ وي، د $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$, $(h\cdot k)(x)$ او $(\frac{h}{k})(x)$ تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړئ.

4- که $f(x)=3x-2$, $g(x)=x^2$ وي $(g\circ f)(3)$ او $(f\circ g)(1)$ پیدا کړئ.

5- که $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{2-x}$ وي، $f\circ g$ $g\circ f$ او $f\circ f$ پیدا کړئ.

6- که $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $g(x)=x^{10}$ او $h(x)=x+3$ وي $(f\circ g\circ h)(x)$ پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

معکوسه تابع (Inverse Function)

فعالیت

- په شکل کې د دواړو تابع ګانو ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟
- آیا د هرې تابع معکوس، هم یوه تابع وي؟
- که د یوې تابع معکوس هم یوه تابع وي، داسې تابع په څه نامه یادېږي؟
- که $f=\{(1,2)(3,5)(6,7)\}$ او $g=\{(2,1)(5,3)(7,6)\}$ وي آیا د g تابع د f معکوسه تابع ده او که نه؟ ولې؟
- که $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي، آیا g د f تابع معکوسه تابع ده؟

په پورتني شکل کې یو ترمامیتر لیدل کېږي او پوهېږو چې د سانتي ګریډ او فارنهایټ د تودوخې د درجو ترمنځ د $f=\frac{9}{5}c+32$ اړیکه شته دی، که دا معادله د (c) له پاره حل شي لرو چې:

$$f=\frac{9}{5}c+32 \Rightarrow f-32=\frac{9}{5}c+32-32$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}(f-32)=\frac{5}{9}(\frac{9}{5}c)$$

$$c=\frac{5}{9}(f-32)$$

د c تابع د f معکوسه تابع ده.

د (x,y) رابطې معکوس له (y,x) څخه عبارت ده چې د معکوسې تابع د تعریف ساحه د تابع

ketabton.com - The Digital Library

د قیمتونو د ساحې او د معکوسې تابع د قیمتونو ساحه، د تابع د تعریف له ساحې څخه عبارت ده.

$Range\, f^{-1} = dom\, f$ او $domain\, f^{-1} = Range\, f$

د f د تابع معکوس په f^{-1} ښودل کېږي، پام مو وي چې: $(f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)})$

لومړی مثال: که $f(x) = \{(1,5)(3,7)(8,-10)\}$ وي.

نو $f^{-1}(x) = \{(5,1)(7,3)(-10,8)\}$ ده. ځکه چې:

$f(3) = 7 \qquad f^{-1}(7) = 3$

$f(1) = 5 \qquad f^{-1}(5) = 1$

$f(8) = -10 \qquad f^{-1}(-10) = 8$

نو $f^{-1}(x)$ هم یوه تابع ده.

خو که $f(x) = \{(1,2)(3,2)(4,5)\}$ وي، $f^{-1}(x) = \{(2,1)(2,3)(5,4)\}$ ده.

لیدل کېږي چې $f^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه د $x = 2$ لپاره دوه مختلف تصویرونه په (Range) کې وجود لري. $f(2) = 1$ او $f(2) = 3$.

نو د هرې تابع معکوس یوه تابع نه وي، یا په بل عبارت هره تابع معکوس منونکي نه وي.

څه وخت چې یوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي وي، که د لومړیو او دویمو عناصر ځایونه یې یو تر بله تبدیل کړو، هغه رابطه چې لاسته راځي، د لومړنۍ تابع معکوسه ده، هغه تابع چې معکوس یې هم تابع وي، نو تابع معکوس منونکي ده.

دویم مثال: آیا د f او g تابع ګانې چې په لاندې ډول د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي دي معکوس منونکي دي که نه؟

$f = \{(1,2), (-2,3), (3,1), (0,-1)\} \quad g = \{(2,4), (3,1), (0,2), (5,1)\}$

حل: که د مرتبو جوړو د لومړنیو او دویمو عناصرو ځایونه یو تر بله تبدیل شي، نو لرو چې:

$f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (1,3), (-1,0)\}$

لیدل کېږي چې f^{-1} یا د f تابع معکوس هم یوه تابع ده، ځکه چې د f^{-1} د مرتبو جوړو لومړنۍ عناصر تکرار شوي نه دي. او $g^{-1} = \{(4,2), (1,3), (2,0), (1,5)\}$

ketabton.com - The Digital Library

لیدل کېږي چې g^{-1} یا د $g(x)$ معکوس تابع نه ده، ځکه د $x=1$ لپاره دوه قیمتونه د 3 او 5 وجود لري، نو د g تابع معکوس منونکی تابع نه ده.

په لنډ ډول څرنګه چې f یو په یو تابع ده، نو معکوس منونکي هم ده او د g تابع چې یو په یو تابع نه ده، نو معکوس منونکي هم نه ده.

نتیجه: یوازې د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع وي.

یو په یو تابع (one-to-one function)

د $f(x)$ تابع یوه یو په یو تابع ده که چېرې $x_1 \neq x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) \neq f(x_2)$ شي.

یا : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ او که $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$

که یوه تابع یو په یو وي، نو معکوس یې هم یوه تابع ده.

دریم مثال: که $f(x) = -4x + 12$ او $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ وي، وښیاست چې کومه یوه له دې تابع ګانو څخه یو په یو تابع ده؟

حل: که $a \neq b$ وي، $-4a + 12 \neq -4b + 12$ دی.

نو $f(x)$ یوه یو په یو تابع ده.

د مثال په ډول: که $x = 2$ وي:

$$f(2) = -4(2) + 12 = -8 + 12 = 4$$

که $x = 3$ وي:

$$f(3) = -4(3) + 12 = -12 + 12 = 0$$

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$2 \neq 3 \Rightarrow 4 \neq 0$$

نو $f(x)$ یو په یو تابع ده. او $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ لپاره:

که $x = 3$ وي. $g(3) = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

که $x = -3$ وي. $g(-3) = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

$f(3) = f(-3)$ لېکن $3 \neq -3$ نو $g(x)$ یو په یو تابع نه ده.

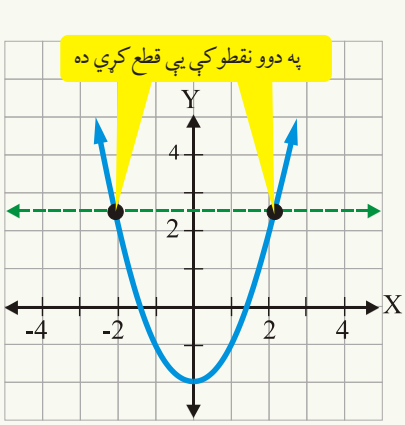
فعالیت

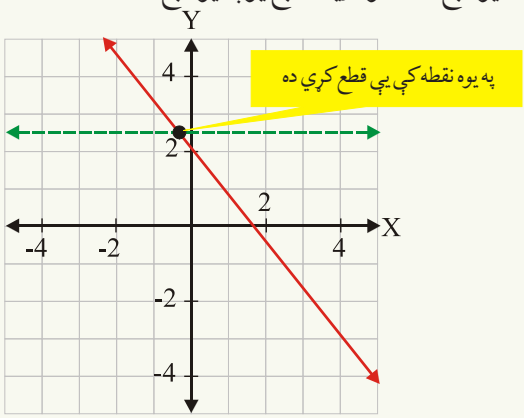
که $f(x) = 3x + 8$ او $g(x) = x^2$ وي، وښیاست چې کومه یوه تابع یو په یو تابع ده او کومه یوه تابع یو په یو تابع نه ده؟ ولې؟

ketabton.com - The Digital Library

د ګراف له مخې د یو په یو تابع پیژندنه: که یو افقي خط چې د x له محور سره موازي وي د تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کړي، دا یو په یو تابع ده، که افقي خط د تابع ګراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د یو په یو تابع ګراف نه دی.

څلورم مثال: په راکړل شوو شکلونو کې لیدل کېږي چې د x له محور سره موازي خط لومړنی تابع ګراف په یوه نقطه کې او د دویمي تابع ګراف یې په دوو نقطو کې قطع کړی دی، نو لومړنی تابع یو په یو تابع ده، خو دویمه تابع یو په یو تابع نه ده.





د معکوسي تابع تعریف: که f یوه یو په یو تابع وي چې د تعریف ساحه یې x او د قیمتونو ساحه یې y ده، نو د g تابع د f د تابع معکوسه تابع ده، که د g د تعریف ساحه y او د قیمتونو ساحه یې x وي او یا د g تابع په هغه صورت کې د f د تابع معکوسه ده که چېرې:

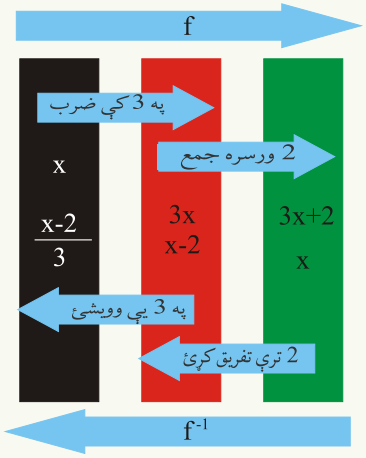
$$(f \circ g)(x) = x$$
$$(g \circ f)(x) = x$$
$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

پنځم مثال: که $f(x) = 3x + 2$ وي، د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع $f^{-1}(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = 3x + 2$$
$$x = 3y + 2$$
$$3y = x - 2$$

ketabton.com - The Digital Library



$$y=\frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$$

دا مثال په لنډ ډول په شکل کې هم ښودل شوی دی.

له بلې خواکه $f^{-1}(x)$ په $g(x)=\frac{x-2}{3}$ سره وښودل شي، $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)=x$ دی.

ځکه چې:

$$(f\,o\,g)(x)=3(\frac{x-2}{3})+2=x-2+2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=\frac{3x+2-2}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

يا: $f^{-1}(f(x))=x$ او $f(f^{-1}(x))=x$

شپږم مثال: که $f(x)=x^3+1$ وي $f^{-1}(x)$ او که $g(x)=x^2$ وي $g^{-1}(x)$ پيدا کړئ.

حل:

$$y=x^3+1$$

$$x=y^3+1 \qquad \Rightarrow y^3=x-1\Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}$$

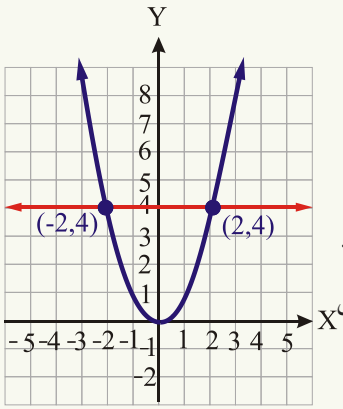
که y په $f^{-1}(x)$ سره وښيو، نو $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$

$$g(x)=x^2\Rightarrow y=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

x پر y او y پر x بدلوو.

$$y=\pm\sqrt{x} \quad \text{يا} \quad g^{-1}(x)=\pm\sqrt{x}$$

ليدل کېږي چې $g^{-1}(x)$ يوه تابع نه ده، ځکه چې که $x=2$ او يا $x=-2$ وي، $g(-2)=4$ او $g(2)=4$ کېږي شکل وګورئ نو د g(x) تابع معکوس پذيره نه ده.



ketabton.com - The Digital Library

اووم مثال: د x دکوم قمیت لپاره د $f(x)=5x-2$ تابع له خپل معکوس سره مساوي کېږي؟

حل: که $y=5x-2$ وي، نو معکوس يې

$$x=5y-2 \Rightarrow \qquad 5y=x+2$$

$$y=\frac{x+2}{5} \qquad f^{-1}(x)=\frac{x+2}{5}$$

$$\frac{x+2}{5}=5x-2 \Rightarrow \quad 24x=12$$

$$x=\frac{1}{2}$$

نو د $x=\frac{1}{2}$ په قیمت سره د $f(x)$ تابع له خپلې معکوسې تابع سره مساوي کېږي.

اتم مثال: وښیاست چې د $f(x)=7x-2$ او $g(x)=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$ تابعګاني یو د بل معکوسې تابع ګانې دي.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})=7(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})-2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=f(g(x))=g(7x-2)=\frac{1}{7}(7x-2)+\frac{2}{7}=x$$

نو د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې یو د بل معکوسي تابعګاني دي، نو نتیجه کېږي چې د تابع او د تابع د معکوسې تابع ترکیب د عینیت $(f(x)=x)$ تابع ده.

فعالیت

که $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ وي، $f^{-1}(x)$ پیدا کړئ او هم وښیاست چې $(f\,o\,f^{-1})(x)=x$ کېږي.

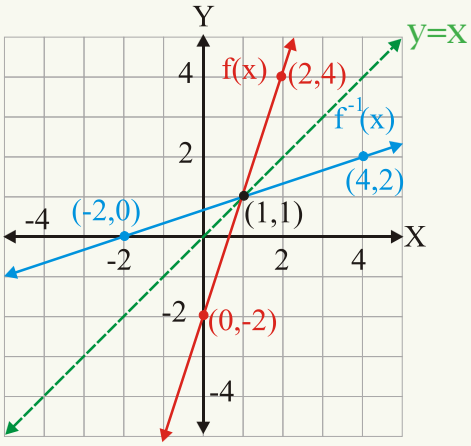
د تابع او دهغې د معکوسي تابع ګراف: د $f(x)$ د یو په یو تابع او د هغې د معکوسی تابع $f^{-1}(x)$ دګرافونو ترمنځ یوه رابطه موجوده ده، څکه که چېرې (a,b) د $f(x)$ تابع دګراف پر مخ یوه نقطه وي، نو د (b,a) نقطه د $f^{-1}(x)$ تابع دګراف پرمخ واقع ده چې (a,b) او (b,a) نقطې له نظره د $y=x$ خط ته سره متناظرې دي.

ketabton.com - The Digital Library

نهم مثال: که $f(x)=3x-2$ وي، نو ښکاره ده چې $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ د $f(x)$ معکوسه تابع ده. د دواړو تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ چې ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

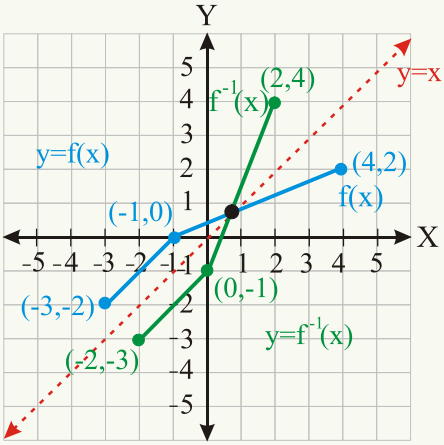
x	0	1	2
$f(x)$	-2	1	4

x	-2	1	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2



لیدل کېږي چې د دواړو تابع ګانو ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

لسم مثال: که $f(x)$ د $(-1,0),(-3,-2)$ او $(4,2)$ مرتبو جوړو لرونکي وي د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ د تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړي او وښیاست چې دواړه ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.



ketabton.com - The Digital Library

لیدل کېږي چې د f (x) او $f^{-1}(x)$ تابع ګانو ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

- د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y = f(x)$ تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره د تابع معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلی تابع $y = f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده.
- د $f(x)$ د تابع او د $f(x)$ د معکوسې تابع ګرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.
- $dom\, f(x) = Range\, f^{-1}(x)$ او $Range\, f(x) = dom\, f^{-1}(x)$ دي.

پوښتنې

1- د لاندېنیو تابع ګانو معکوس پیدا کړئ او ووایئ چې د کومې تابع معکوس هم یوه تابع ده؟

$f = \{(-1,0),(-2,1),(4,3),(3,4)\}$ $h = \{(1,4),(2,3),(4,1)\}$

$g = \{(1,2),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ $k = \{(3,0),(2,-1),(1,2),(0,1),(-1,2)\}$

2 – د لاندېنیو هرې یوې تابع معکوسه تابع پیدا کړئ او د خپل ځواب صحت د $f(f^{-1}(x)) = x$ سره وازمایئ.

$f(x) = x+3$ $f(x) = 2x$ $f(x) = 2x+3$

$f(x) = x^3+2$ $f(x) = (x+2)^3$ $f(x) = \frac{1}{x}$

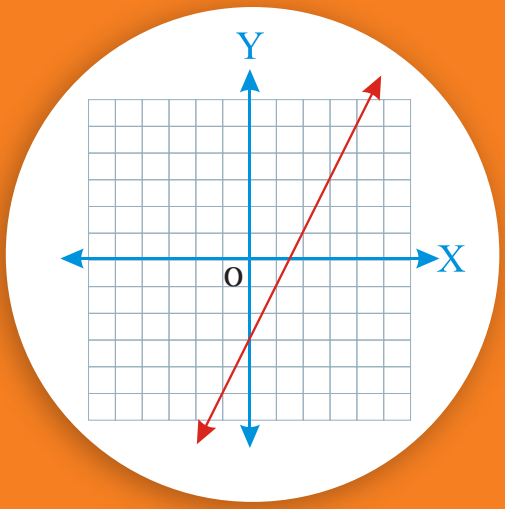
3 – د لاندېنیو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د X له محور سره د موازي خط (افقي خط) په واسطه وښیاست چې ددوی معکوس هم یوه تابع ده.

$f(x) = 1-x^2$ $g(x) = \frac{7-2x}{5}$

4 – له لاندېنیو تابع ګانو څخه کومه یوه یو په یو تابع ده.

$y = 4x-5$ $y = 6-x$ $y = (x-2)^2$ $y = 9$ $y = \frac{1}{x+2}$

ketabton.com - The Digital Library



پولينومي تابع ګانې

- آيا پوهېږي چې لومړی درجې تابع ته ولې خطي تابع وايي؟
- آيا د لومړی درجې تابع ګراف يو مستقيم خط دی؟

پولينومونه مو په لومړي فصل کې تر څېړنې لاندې ونيول. هغه پولينوم چې له يوه توري (متحول) څخه جوړ شوې وي د پولينومي تابع په نامه يادېږي.

خطي تابع (Liner function) يا لومړی درجه تابع

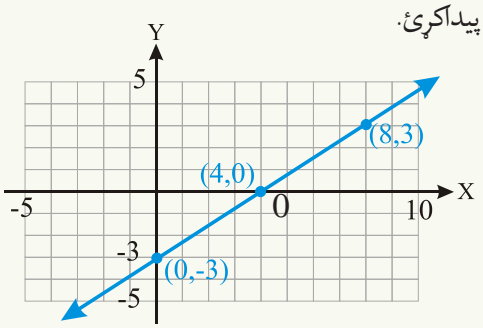
هغه پولينومي تابع ده چې درجه يې يوه وي، د لومړی درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax+b$ دی چې $a\neq 0$ او a , b حقيقي عددونه دي.

د مثال په ډول: $f(x)=3x+4$, $f(x)=x-1$, $f(x)=2x$ او $f(x)=\frac{1}{2}x$ خطي تابع ګانې دي.

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{3}{4}x-3$ تابع ګراف رسم کړئ او د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پيدا کړئ.

$f(x)=\frac{3}{4}x-3$

x =	8	4	0
f(x)	3	0	−3



د X له محور سره ګراف د تقاطع نقطه (4 ,0) او د Y له محور سره ګراف د تقاطع نقطه (0,−3) ده.

ketabton.com - The Digital Library

لیدل کېږي چې د لومړۍ درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی او له همدې سببه ورته خطي تابع هم وایي، د خطي تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدومره کافي ده چې د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع ټکې پیدا کړو او مستقیم خط رسم کړو، لکه: چې په شکل کې لیدل کېږي.

فعالیت

د $y = f(x) = x + 1$ او $y = x - 1$ تابع ګانو ګراف رسم او د X او Y له محورنو سره یې د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات هم پیدا کړئ.

دویم مثال: د $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ خطي تابع ګراف رسم کړئ.

حل: د Y له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې $(x = 0)$ دی، نو:

$$f(0) = \frac{2}{3}(0) + 2 = 2$$

نو د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $(0, 2)$ ده.

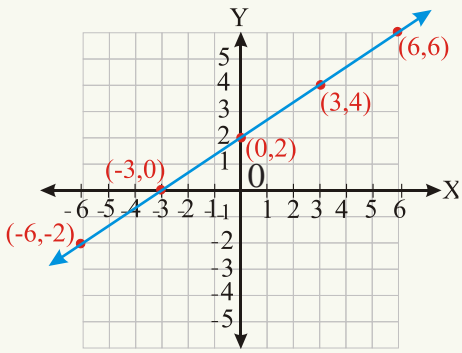
او د X له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې د y یا $f(x)$ قیمت صفر دی $f(x) = 0$

$$0 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow x = -3$$

نو د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکی $(-3, 0)$ دی.

د $(0, 2)$ او $(-3, 0)$ نقطې یو له بله سره نښلوو او مستقیم خط رسموو او هم کولای شو چې د ګراف یو څو نورې نقطې وټاکو چې پر همدې مستقیم خط باندې پرتې دي.

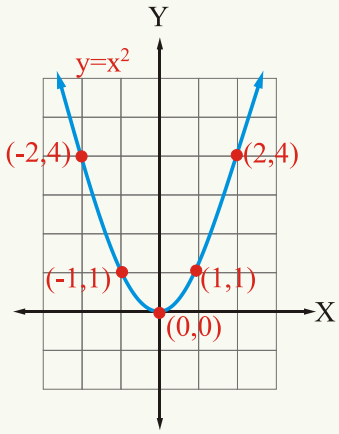
x =	0	3	−3	6	−6	...
f(x) =	2	4	0	6	−2	...

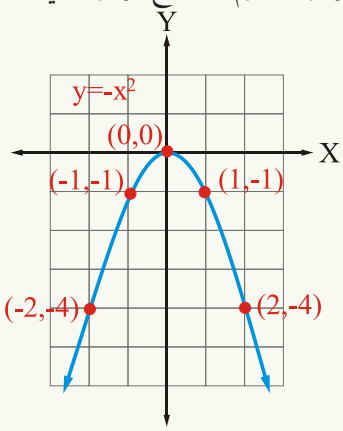


ketabton.com - The Digital Library

دویمه درجه تابع (Quadratic Function) او ګراف يې:

داګرافونه د کوم ډول تابع ګرافونه دي؟





- دا دواړه ګرافونه سره څه توپير لري؟
- له $k(x)=x^2, h(x)=x^2+3x, g(x)=x^2+1, f(x)=x^2+7x+12$ او $r(x)=2x-1$ څخه کومه یوه يې دویمه درجه تابع نه ده؟

هغه پولینومي تابع چې درجه يې یوه وي، لومړی درجه یا د خطي تابع (Liner Function) په نامه یادېږي او که د پولینومي تابع درجه (2) وي، د دویمي درجې تابع په نوم یادېږي.

فعالیت

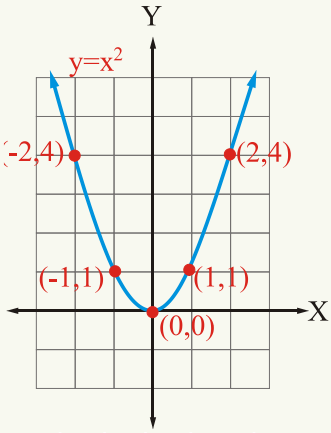
- د دویمې درجې تابع ګراف په کوم نوم یادېږي؟
- د دویمې درجې تابع د ګراف د تناظر محور کوم خط دی؟
- د دویمې درجې تابع ګراف څه وخت پورته خواته او کوم وخت ښکته خواته خلاصېږي؟
- د دویمې درجې تابع د ګراف رأس په کوم وخت کې اصغري (Minimum) او په کوم وخت کې اعظمي (Maximum) دی؟
- آیا د دویمې درجې تابع ګراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کولای شي؟
- په کوم حالت کې د دویمې درجې تابع ګراف د X او Y محورونه قطع کولای شي؟
- آیا د X او Y له محورونو سره د دویمې درجې تابع د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا

ketabton.com - The Digital Library

کولای شئ؟

د دویمې درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax^2+bx+c$ دی چې a ، b او c حقیقي عددونه او $a\neq 0$ دی.

د دویمې درجې تابع ګراف: ترټولو ساده دویمه درجه تابع د $f(x)=y=x^2$ تابع ده چې $a=1$ او $b=c=0$ که x ته یو څو قیمتونه ورکړل شي د تابع یا y اړونده قیمتونه لاس ته راوړلای شو، ګراف یې رسم کېدای شي لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.



x	0	1	2	−1	−2
y	0	1	4	1	4

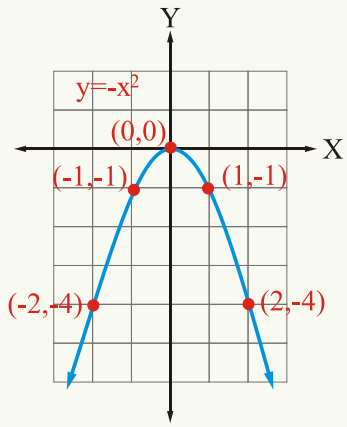
دویمې درجې تابع ګراف د پارابولا (Parabola) په نوم یادېږي چې دا ګراف نظر د y محور ته متناظر دی، هغه خط چې د پارابول له رأس څخه تېر شي او د y له محور سره موازي وي، د تناظر د محور په نامه یادېږي چې د y محور ددې تابع د ګراف د تناظر محور دی.

هغه نقطه چې د تناظر محور په کې ګراف قطع کوي، د پارابول د رأس (Vertex) په نامه یادېږي. که $a>0$ وي، د پارابول خوله پورته خواته خلاصېږي او د ګراف د رأس تکی اصغري دی د $y=x^2$ د تابع ګراف د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقص او د $(0,\infty)$ په انټروال کې ګراف متزاید دی.

لومړی مثال: د $y=-x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

د پارابول خوله ښکته خواته خلاصېږي، ځکه چې $a<0$ دی، د $(-\infty,0)$ په انټروال کې ګراف متزاید او د $(0,\infty)$ په انټروال کې ګراف متناقص دی.



x	0	1	−1	2	−2
y	0	−1	−1	−4	−4

ketabton.com - The Digital Library

فعالیت

د $y = x^2 + 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دویم مثال: د $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ او $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$g(x) = 2x^2$

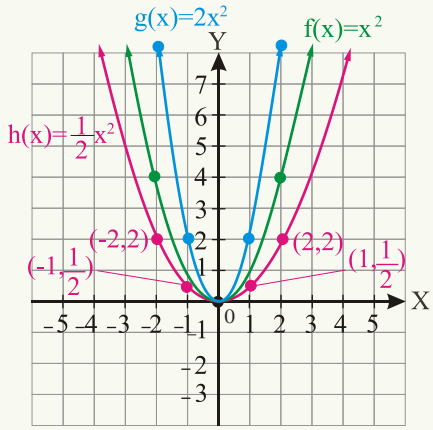
$x =$	0	1	-1	2	-2
g(x) =	0	2	2	8	8

$f(x) = x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$f(x) =$	0	1	1	4	4

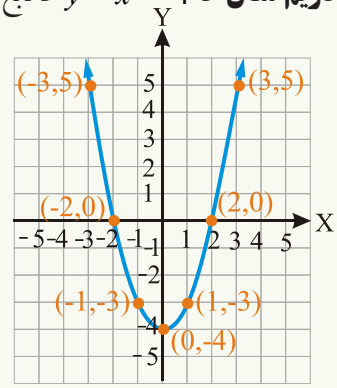
$h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
h(x) =	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



دریم مثال: د $y = x^2 - 4$ د تابع ګراف رسم کړئ.

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	−4	−3	−3	0	0	5	5

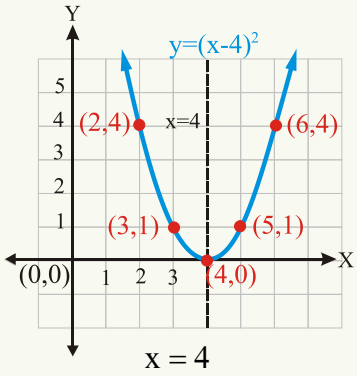


په حقیقت کې د $y = x^2$ تابع ګراف 4 واحده ښکته خواته نقل شوی دی.

خلورم مثال: د $y = (x-4)^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که x ته یو څو قیمتونه ورکړو او د y اړونده قیمتونه پیدا کړو د تابع ګراف رسمیدلای شي لکه:

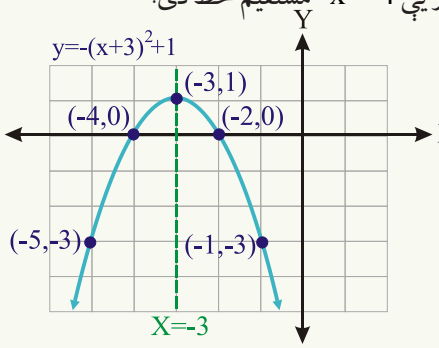
ketabton.com - The Digital Library



x	4	5	3	6	2	...
y	0	1	1	4	4	...

لیدل کېږي چې ګراف د $(-\infty\ ,\ 4)$ په انټروال کې متناقص او د $(4,\infty)$ په انټروال کې متزاید دی. له شکل څخه لیدل کېږي چې د $y=x^2$ ګراف په افقي ډول 4 واحده ښي خواته انتقال شوی دی د پارابول رأس د $(4\ ,0)$ ټکی دی او د تناظر محور یې $x=4$ مستقیم خط دی.

پنځم مثال: د $y=-(x+3)^2+1$ تابع ګراف رسم کړئ.



x	-3	-2	-4	-5	-1
y	1	0	0	-3	-3

د $y=x^2$ ګراف درې واحده کینې خواته او یو واحد په عمودي ډول پورته خواته نقل شوی دی او د پارابول راس د $(-3,1)$ ټکی د ګراف اعظمي نقطه او د تناظر محور یې $x=-3$ دی چې په شکل کې هم لیدل کېږي.

فعالیت

د $y=3x^2$ او $y=-3x^2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع ټکي:

ددې لپاره چې په اسانۍ سره پارابول رسم کړو، د X او Y له محور سره یې د تقاطع ټکي پیدا کوو (که چېرې د X له محور سره تقاطع ولري)

ketabton.com - The Digital Library

د Y له محور سره د تقاطع ټکي پيدا کولو لپاره د $y = ax^2 + bx + c$ معادله کې $x=0$ وضع کېږي په نتيجه کې $y=c$ دی.

د X له محور سره د تقاطع د پيدا کولو لپاره $y = 0$ وضع کوو، نو لرو چې:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

څرنګه چې پوهېږئ $ax^2 + bx + c = 0$ يوه دويمه درجه معادله ده او جذرونه يې

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ دی، پوهېږو چې ددې معادلې جذرونه هغه وخت حقيقي عددونه دي

چې $b^2 - 4ac \geq 0$ وي، که $b^2 - 4ac < 0$ گراف د X محور قطع کولای نه شي، په لنډ

ډول يې په لاندې جدول کې وګورئ:

د $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ تابع گراف

a	د دويمې درجې تابع گراف په هغه صورت کې د X محور په دوو نقطو کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac > 0$ وي.
b	په هغه صورت کې د X محور په يوه نقطه کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac = 0$ وي.
c	په هغه صورت کې د X محور قطع کولای نه شي چې $b^2 - 4ac < 0$ وي.

د پارابولا د راس د نقطې د وضعيه کمياتو پيدا کول:

د تکميل مربع په طريقه هم کولای شو چې د پارابول د رأس د نقطې وضعيه کميات پيدا کړو.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right] + c$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2}) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

ketabton.com - The Digital Library

د پارابولا د رأس د ټکي وضعیه کمیات $\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ او یا (h,k) دي او څرنګه چې د تناظر محور د پارابولا له رأس څخه تېریږي، نو $x=-\frac{b}{2a}$ د تناظر د محور معادله ده.

که چېرې $a>0$ وي، رأس اصغري (Minimum) او که $a<0$ وي، رأس اعظمي (Maximum) دی.

شپږم مثال: د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع ګراف رسم کړئ.

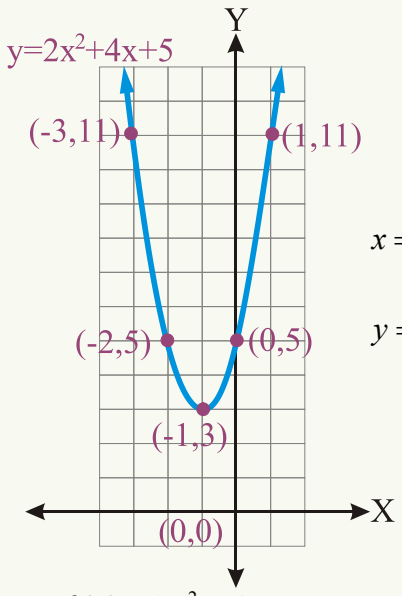
1- د X له محور سره د تقاطع ټکي پیدا کوو. څرنګه چې $a=2$, $b=4$ او $c=5$ دی.

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot2\cdot5=-24<0$ دا چې $\Delta<0$ ده نو ګراف د X محور نه قطع کوي.

2- د Y له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي پیدا کوو په دې حالت کې $x=0$ دی.

د $y=ax^2+bx+c$ په تابع کې که $x=0$ شي $y=c$ کېږي، نو $(0,c)$ د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده. $f(0)=2\cdot0^2+4\cdot0+5=5$

نو په دې مثال کې $(0,5)$ د y له محور سره د تقاطع نقطه ده.



$f(x)=2x^2+4x+5$

x =	−1	−2	0	1	−3
f(x) =	3	5	5	11	11

3 – د رأس د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot2\cdot5-4^2}{4\cdot2}=\frac{40-16}{8}=\frac{24}{8}=3$$

$(-1,3)$ د پارابولا د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي او رأس اصغري دی، ځکه چې $a>0$ دی.

4 – د تناظر د محور معادله $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{4}=-1$

د ګراف د تناظر د محور معادله $x=-1$ ده، د ګراف د رسمولو لپاره کولای شو د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کړو:

ketabton.com - The Digital Library

اووم مثال: د $y=-3x^2-2x+1$ تابع ګراف رسم کړئ.

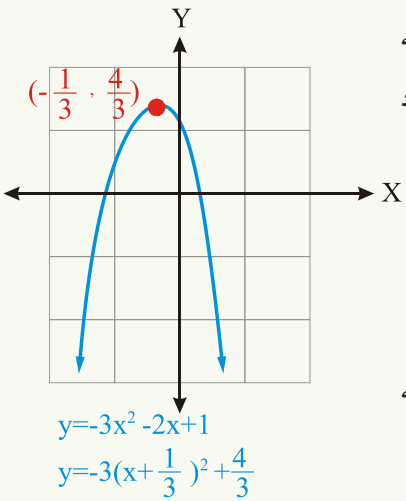
$$y=-3(x^2+\frac{2}{3}x)+1$$

د x د ضریب نیمایي مربع جمع او هم تفریقوو.

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2\right]+1$$

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]-3(-\frac{1}{9})+1=-3\left[(x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]+\frac{4}{3}$$

$$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$$



په نتیجه کې $x=-\frac{1}{3}$ د تناظر د محور معادله ده، ځکه چې : $x+\frac{1}{3}=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ او $(-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ د رأس د ټکي وضعیه کمیات دي او ځرنګه چې $a<0$ دی، نو د پارابولا رأس اعظمي دی.

یاددونه: که دویمه درجه تابع د $y-k=a(x-h)^2$ یا $y=a(x-h)^2+k$ په شکل ولیکل شي $x=h$ د تناظر د محور معادله او (h,k) د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي.

$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ د لومړی درجې یا خطي تابع عمومي شکل دی.

او $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ د دویمي درجې معادلې عمومي شکل دی.

د دویمي درجې تابع ګراف ته پارابول (Parabola) وایي که $a>0$ وي، رأس اصغري او که $a<0$ وي، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعیه کمیات او $x=-\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د محور معادله ده. که $\Delta=b^2-4ac>0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta=0$ نو پارابولا د x محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta<0$ وي، پارابولا د X محور قطع کولای نه شي.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1 - د $h(x)=-\frac{3}{2}x+3$ د تابع ګراف رسم کړئ.

2 – د $g(x)=2x+1$ او $g(x)=2x-1$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او سره پرتله یې کړئ.

3–د $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او یو له بله سره یې پرتله کړئ

4 – د لاندې تابع ګانو د ګراف د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

$f(x)=3x^2-2x+6$ ، $f(x)=x^2-12x+30$ ، $f(x)=x^2+8x+13$

5 – د $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x-3)^2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او ووایاست چې د $f(x)=x^2$ له ګراف سره څه اړیکه لري؟

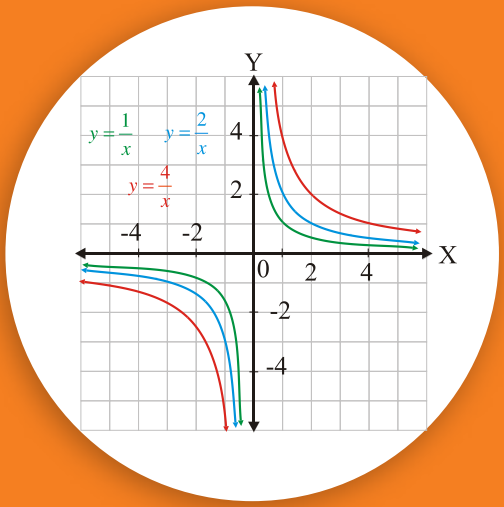
6 – د $y=-x^2-1$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(-1,1)$ b: $(1,-1)$ c: $(0,-1)$ d : $(0,1)$

7 – د $y=(x-1)^2-2$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(1,1)$ b: $(-1,2)$ c: $(-1,-2)$ d : $(1,-2)$

ketabton.com - The Digital Library



ناطقي يا نسبتي تابع ګاني
(Rational functions)

دا شکل د کوم ډول تابع ګانو ګرافونه دي؟

فعاليت

- آيا د ناطقي تابع د عمودي مجانب معادله پيدا کولای شئ ؟
- آيا د هري ناطقي تابع د تعريف په ساحه کې ټول حقيقي عددونه شاملیدلای شي؟
- آيا د يوې ناطقي تابع افقي مجانب پيدا کولای شئ؟
- آيا هره ناطقه تابع عمودي مجانب لري؟

تعريف

ناطقه تابع هغه تابع ده چې د دوو پولينومي تابع ګانو له خارج قسمت څخه جوړه شوې وي که $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ ، $g(x)\neq 0$ وي، په داسې حال کې چې $p(x)$ او $g(x)$ پولينومونه وي، نو $f(x)$ يوه ناطقه تابع ده.

د ناطقي تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، پرته د x له هغو قيمتونو څخه چې د ناطقي تابع مخرج پرې صفر کېږي، د مثال په ډول: $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $h(x)=\frac{x^3-1}{x}$ ، $g(x)=\frac{x-1}{x^2-x-6}$ ، $g(x)=3$ او $P(x)=2x^2-3$ ناطقي تابع ګاني دي.

فعاليت

آيا $k(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$ يوه ناطقه تابع ده؟ ولې ؟

ketabton.com - The Digital Library

د ناطقې تابع د تعریف د ساحې پیدا کول

(Finding Domain of Rational function)

لومړی مثال: د لاندې نیوناطقو تابع ګانو د هرې یوې د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-9} \quad , \quad h(x)=\frac{x+3}{x^2+9}$$

حل: د $f(x)$ په تابع کې د $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي، نو د 3 عدد د $f(x)$ د ناطقې تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی یا: $Dom\ f(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 3\}$

د $g(x)$ په تابع کې که چېرې $x=3$ یا $x=-3$ شي، نو مخرج یې صفر کېږي، نو د 3 او 3 - عددونه د $g(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$Dom\ g(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 3\ ,\ x\neq -3\}$$

خرنګه چې د $h(x)$ تابع مخرج د x په هیڅ قیمت نه صفر کېږي، نو د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

$$Dom\ h(x)=IR \quad \text{يا} \quad Dom\ h(x)=(-\infty\ ,\ \infty)$$

فعالیت

د لاندې نیو ناطقو تابع ګانو د تعریف ساحې تعین کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-25} \quad , \quad h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$$

دویم مثال: د لاندې نیو ناطقو تابع ګانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x+3}{x-4} \qquad g(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

حل: د $f(x)$ تابع د تعریف ساحه پرته له (4) څخه ټول حقیقي عددونه دي.

ketabton.com - The Digital Library

$dom\ f(x) = IR \setminus \{4\}$ یا $IR - \{4\}$

$y = f(x) = \dfrac{x+3}{x-4} \Rightarrow y(x-4) = x+3$

$xy - x = 4y + 3$

$(y-1)x = 4y + 3$

$xy - 4y = x + 3 \Rightarrow \quad x = \dfrac{4y+3}{y-1}$

$Range\ f(x) = IR \setminus \{1\}$ یا $IR - \{1\}$

د $g(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له (-5) څخه:

$\text{dom}\, g(x) = IR - \{-5\}$ یا $\{x \in IR / x \neq -5\}$

$g(x) = y = \dfrac{x-3}{x+5} \Rightarrow y(x+5) = x - 3 \Rightarrow xy + 5y = x - 3$

$x = \dfrac{-5y-3}{y-1}$ $\qquad$ $\text{Range}\, g(x) = IR - \{1\}$ یا $\{y \in IR / y \neq 1\}$

فعالیت

د لاندې راکړل شوو ناطقو تابع ګانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$h(x) = \dfrac{1}{x^3}$ ، $k(x) = \dfrac{x+1}{3}$ ، $r(x) = \dfrac{4x-1}{2-x}$ ، $m(x) = \dfrac{x}{3x-2}$

د ناطقي تابع د ګراف رسمول (Graphing Rational function):

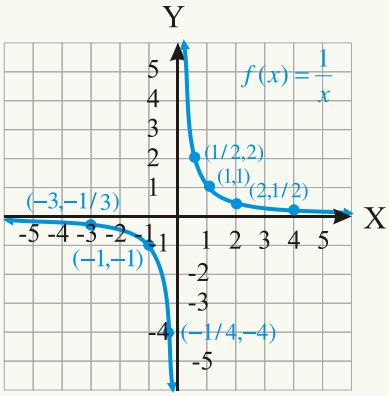
دریم مثال: د $f(x) = \dfrac{1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که $x = 0$ شي، نو د تابع مخرج صفر کېږي، صفر د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$Dom\ f = IR - \{0\}$

x	$\ldots -4$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$4\ldots$
f(x)	$\ldots -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\ldots$

ketabton.com - The Digital Library



اوس د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع وضعیت مطالعه کوو:

څرنګه چې $x=0$ د $f(x)$ تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره x ته داسې قیمتونه ورکوو چې له دواړو خواوو څخه صفر ته نژدې شي (تقرب وکړي)، که x له کینې خوا څخه صفر ته نژدې شي $(x\to 0^-)$ د تابع قیمت $-\infty$ ته نږدې کېږي $(f(x)\to -\infty)$ او که x له ښې خوا څخه صفر ته نژدې کېږي، $(x\to 0^+)$ د تابع قیمت $+\infty$ ته تقرب کوي $(f(x)\to \infty)$ لاندې جدول وګورئ.

a: x له کېنې خوا څخه صفر ته نژدې کېږي.

x	...−1	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	$x\to 0^-$
$f(x)=\frac{1}{x}$	...−1	−2	−10	−100	−1000	$f(x)\to -\infty$

b : x له ښې خوا څخه صفر ته نژدې کېږي.

x	$0^+\leftarrow x$	0.001	0.01	0.1	0.5	1...
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\infty\leftarrow f(x)$	1000	100	10	2	1...

عمودي مجانب (Vertical Asymptotes)

که په یوه ناطقه تابع $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ کې چې صورت او مخرج یې مشترک فکټور، ونه لري او $p(a)\neq 0$ وي، که $g(a)=0$ شي، نو د $x=a$ خط د $f(x)$ د تابع عمودي مجانب دی چې د y له محور سره موازي دی. د عمودي مجانبونو شمېر د مخرج د جذرونو له شمېر سره مساوي دي یا په بل عبارت که $x\to a$ په نتیجه کې $f(x)\to -\infty$ یا $f(x)\to +\infty$ ، نو د $x=a$ عمودي خط ددې تابع عمودي مجانب دی یا که:

$x\to a\Rightarrow |f(x)|\to\infty$ نو $x=a$ د تابع عمودي مجانب دی.

ketabton.com - The Digital Library

x هر څومره چې د a قیمت ته نژدې شي، خو د تابع ګراف د $x = a$ مستقیم خط قطع کولای نه شي، ځکه چې د a عدد د تابع دتعریف په ساحه کې شامل نه دی، لکه: د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی، نو $x = 0$ یا د Y محور د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع عمودي مجانب دی.

څلورم مثال: د $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ ، $g(x) = \frac{x}{x^2-25}$ او $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ تابع ګانو عمودي مجانبونه پیدا کړئ.

حل:

1 - د f(x) تابع د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د x هغه قیمت پیدا کوو چې د f(x) تابع مخرج پرې صفر کېږي. نو د 3 عدد د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$$domf(x) = \{x / x \in IR \ , \ x \neq 3\}$$

نو د $x = 3$ خط د f(x) تابع عمودي مجانب دی.

2 -

$$g(x) = \frac{x}{x^2-25} = \frac{x}{(x-5)(x+5)}$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

د $x=5$ او $x = -5$ لپاره د g(x) تابع مخرج صفر کېږي، نو د 5 او 5 - عددونه د g(x) د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$dom\, g(x) = \{x / \in IR \ , \ x \neq -5 \ , \ x \neq 5\}$$

نو د $g(x)$ د تابع عمودي مجانبونه د $x = 5$ او $x = -5$ خطونه دي.

3 - څرنګه چې د x په هر قیمت د $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ تابع مخرج نه صفر کېږي، نو عمودي مجانب نه لري یا ددې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

افقی مجانب (Horizontal Asymptote)

که په یوه ناطقه تابع کې د صورت او مخرج درجې سره مساوي وي، نو ښکاره خبره ده چې دوښ

ketabton.com - The Digital Library

حاصل (خارج قسمت) به يو ثابت عدد وي، كه دې ثابت عدد ته b ووايو، نو د $y=b$ افقي خط ددې تابع افقي مجانب دی چې دا خط يا د X محور او يا د X له محور سره موازي خط دی چې په حقيقت کې د b عدد د صورت او مخرج د لوړو توانونو د ضريبونو له نسبت څخه عبارت دی او يا صورت پر مخرج وېشو.

د مثال په ډول د $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$ د تابع افقي مجانب د $y=2$ خط دی.

افقي مجانب داسې تعريفوو:

که $x\to\infty$ يا $x\to-\infty$ او په نتيجه کې $f(x)\to b$ نو $y=b$ مستقيم خط د f(x) تابع افقي مجانب دی او يا که $|x|\to\infty$ او $y\to b$ ، نو $y=b$ مستقيم خط ددې تابع افقي مجانب دی.

پنځم مثال: د $f(x)=\frac{2x}{x-1}$ تابع گراف رسم کړئ.

حل:

1 - **د X له محور سره د گراف د تقاطع نقطه**: د X له محور سره د تقاطع په نقطه کې $f(x)=0$ کېږي، په نتيجه کې لرو چې: $0=\frac{2x}{x-1}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

نو د تابع گراف د X محور په $x=0$ يا د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي.

2 - **د Y له محور سره د گراف د تقاطع نقطه**: $f(0)=\frac{2\cdot 0}{0-1}=\frac{0}{-1}=0$

نو گراف د X او Y محورونه د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي يا په بل عبارت ددې تابع گراف د وضيعه کمياتو له مبدأ څخه تېريږي.

3 - د تابع د عمودي مجانب معادله: $x-1=0\Rightarrow x=1$ دی دا خط رسم کړئ.

4 - د تابع د گراف افقي مجانب $\frac{2}{1}=2$ دی، نو $y=f(x)=2$ د تابع افقي مجانب دی، يا $\frac{2x}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$ افقي مجانب يې هم رسم کړئ.

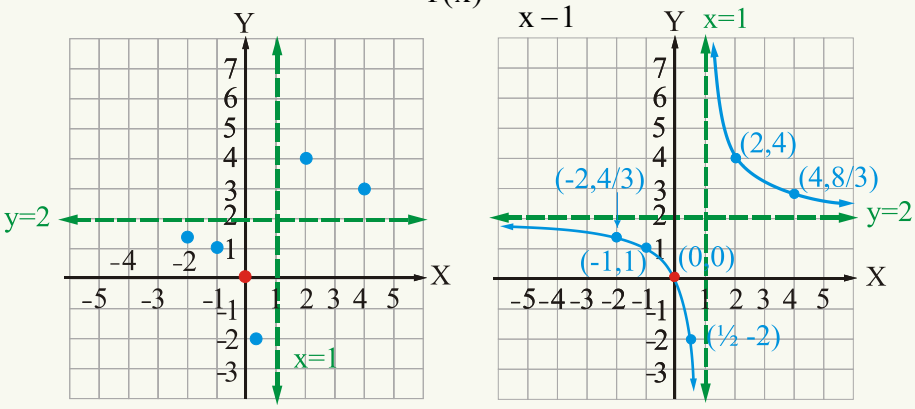
5 - د گراف يو څو نورې نقطې هم پيدا کوو، لکه:

x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$y=f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$

ketabton.com - The Digital Library

له محورونو سره د تقاطع نقطې ټاکو، د تابع مجانبونه رسموو او بيا يې گراف، لکه: څنگه چې په شکل کې ليدل کېږي، رسموو.

$$f(x)=\frac{2x}{x-1}$$



فعاليت

د $f(x)=\frac{3x}{x-2}$ تابع گراف رسم کړئ.

شپږم مثال: د $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ د تابع افقي او عمودي مجانبونه پيدا کړئ او گراف يې رسم کړئ.

حل: د عمودي او افقي مجانبونو معادلې عبارت دي له:

1 - د عمودي مجانب معادله $x=2$

2 - د افقي مجانب معادله $f(x)=y=1$

3 - د Y له محور سره تقاطع:

که $x=0$ شي، نو $f(x)=-1$ دي، گراف د Y محور په $(0,-1)$ کې قطع کوي.

4 - د X له محور سره تقاطع $f(x)=0$ شي، نو:

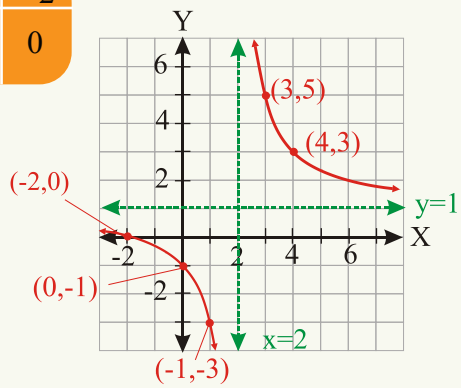
$$x+2=0$$
$$x=-2$$

نو د $(-2,0)$ په نقطه کې گراف د X محور قطع کوي.

ketabton.com - The Digital Library

5 - ددې لپاره چې ګراف په اسانه ډول رسم شي، په لاندې جدول کې د ګراف د هرې ځانګې قیمتونه وګورئ.

x	-1	0	1	3	4	5	-2
f(x)	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$2\frac{1}{3}$	0



که صورت پر مخرج ووېشو $\frac{x+2}{x-2}=1+\frac{4}{x-2}$

په حقیقت کې د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ګراف د یو واحد په اندازه پورته خواته او د (2) واحدونو په اندازه ښي خواته ا نتقال شوی دی او $f(x)=1$ =y د تابع افقي مجانب دی.

مایل مجانب: (slant or Oblique asymptote)

څه وخت چې د یوې ناطقې تابع د صورت درجه د یو په اندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي ښکاره خبره ده چې تابع افقي مجانب نه لري په دې حالت کې تابع مایل مجانب لري.

اووم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - د مایل مجانب د پیدا کولو لپاره صورت پر مخرج وېشو، نو لرو چې:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=\underbrace{x+1}_{\text{مایل مجانب}}+\frac{2}{x-1}$$

که $|x|$ هر څومره لوی شي $\frac{2}{x-1}$ صفر ته نژدې کېږي، نو په نتیجه کې ګراف د $y=f(x)=x+1$ مستقیم خط ته نژدې کېږي چې همدا د $y=x+1$ خط د $f(x)$ تابع مایل مجانب دی.

ketabton.com - The Digital Library

2 – د Y له محور سره يې د تقاطع نقطه:

$$f(0)=0+1+\frac{2}{0-1}=1-2=-1$$

گراف د $(0,-1)$ په نقطه کې د Y محور قطع کوي.

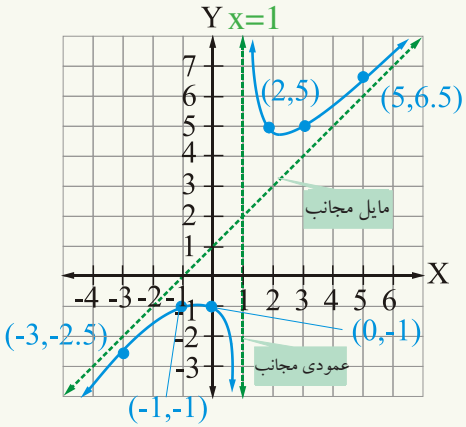
3 - ښکاره خبره ده چې گراف د X محور قطع کولای نه شي، ځکه چې $x=\sqrt{-1}$ کېږي.

4 - عمودي مجانب يې

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ دی.

5 - ښکاره ده چې افقي مجانب نه لري.

6 - يو څو نورې نقطې پيدا کوو او د تابع گراف رسموو:



x	2	3	5	−1	−3
f(x)	5	5	6.5	−1	−2.5

اتم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$ تابع گراف رسم کړئ.

1 - د تابع عمودي مجانب د $x=2$ خط دی، ځکه چې $x-2=0 \Rightarrow x=2$

2 - x^2+1 پر $(x-2)$ وېشو لرو چې: $\frac{x^2+1}{x-2}=x+2+\frac{5}{x-2}$

که $|x|$ لوی شي $\frac{5}{x-2}$ صفر ته نږدې کېږي او د تابع گراف د $y=x+2$ خط ته نژدې کېږي چې $y=x+2$ خط ددې تابع مايل مجانب دی.

3 – د Y له محور سره تقاطع $-\frac{1}{2}$ ده، ځکه که $x=0$ شي $f(0)=\frac{0+1}{0-2}=-\frac{1}{2}$

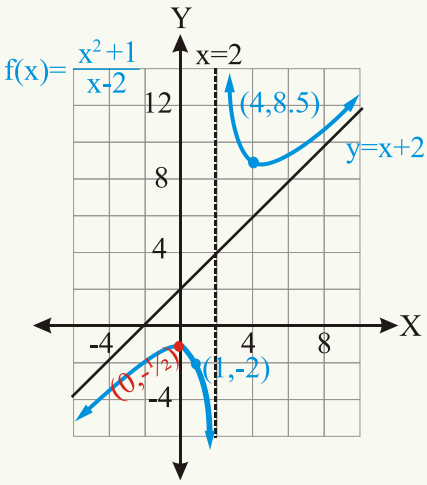
4 – گراف د X له محور سره تقاطع نه لري، ځکه چې که $f(x)=0$ شي، نو: $0=\frac{x^2+1}{x-2}$

ketabton.com - The Digital Library

(چې په حقيقي عددونو کې تعريف شوی نه دی) $x^2+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{-1}$

د مجانبونو په رسمولو او د Y له محور سره د تقاطع ټکی او څو نورو قيمتونو په مرسته د تابع ګراف رسمولای شو.

x	0	1	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-2	8.5



که $f(x)=\frac{P(x)}{g(x)}$ په تابع کې په ترتيب سره m او n د صورت او مخرج درجې وي نو:

1 – که $m<n$ وي د x محور افقي مجانب دی.

2 – که $m=n$ وي $y=b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n د درجو حدونو د ضريبونو نسبت دی يا که چېرې $f(x)=\frac{a_nx^n+\ldots+a_0}{b_nx^n+\ldots+b_0}$، $(b_n\neq 0)$ وي، نو $y=\frac{a_n}{b_n}$ د f(x) تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د يو په اندازه د مخرج له درجې څخه زياته وي، نو د تابع ګراف مايل مجانب لري چې په بې نهايت کې له ګراف سره موازي کېږي، يوه ناطقه تابع يو يا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو يو افقي يا مايل مجانب به لري.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1 – د $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-4}$ تابع افقي او عمودي مجانبونه پيدا کړئ.

2 – آيا د $f(x)=\frac{x^4}{x^2+1}$ تابع عمودي مجانب لري؟ ولې؟

3 – د لاندې راکړل شوو تابع ګانو د تعريف ساحې پيدا کړئ او د عمودي مجانبونو معادلې يې وليکئ.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4}\ ,\ g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}\ ,\ h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}\ ,\ k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$$

4 – له لاندې تابع ګانو څخه کومه يوه چې عمودي مجانب ولري، پيدا يې کړئ.

$$f(x)=\frac{x}{x+4} \quad , \quad g(x)=\frac{x+3}{x(x+4)}$$

$$h(x)=\frac{x}{x(x+4)} \quad , \quad k(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

5 – د لاندې ناطقو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x)=\frac{4x}{x-2} \quad , \quad g(x)=\frac{2x}{x-4}$$

6 - د $f(x)=\frac{3x+1}{x-3}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a:\ y=2$ $\qquad$ $b:\ y=3$

$c:\ y=-2$ $\qquad$ $d:\ y=-3$

7 - د $f(x)=\frac{1}{x+2}$ او $f(x)=\frac{3}{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع له ګراف سره يې پرتله کړئ.

8 – د $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ تابع مايل مجانب پيدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

د څېړکي لنډيز

• تابع د دوو ستونو تر منځ داسې يوه رابطه يا قاعده (Rule) ده چې د لومړني ستې هر عنصر يوازې او يوازې د دويم ستې له يو عنصر سره اړيکه ولري. لومړني ستې ته د تابع د تعريف ساحه (Domain) او دويم ستې ته د قيمتونو ساحه (Range) وايي يا تابع د هغو مرتبو جوړو ستې دی چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.

• يوه تابع د $y = f(x)$ په شکل ليکل کېږي، په يوه نقطه کې د تابع د قيمت د پيدا کولو لپاره د x راکړل شوی قيمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قيمت په هغه نقطه کې په لاس راځي او يوه معادله هغه وخت د يوې تابع ښودونکی وي چې د هر x لپاره يو y وجود ولري.

• د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوي وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي. د يوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د هغو نقطو ستې دی په دې ډول چې $S = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ او x د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د يوې تابع ګراف دی.

• $f(x) = c$ ثابته تابع، $f(x) = ax + b$ خطي تابع، $f(x) = x\ ,(a \neq 0)$ د عينيت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قيمت تابع ده چې د تعريف ساحه يې ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې صفر او مثبت حقيقي عددونه دي.

• د علامې تابع دا ډول تعريف شوي ده:

$$f : IR \to IR \qquad sgn(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$

ددې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې $\{-1, 0, 1\}$ ده.

• د دويمې درجې تابع عمومي شکل $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ د ی او د دويمې درجې تابع ګراف ته پارابولا (parabola) وايي که $a > 0$ وي، رأس اصغري او که $a < 0$ وي، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعيه کميات او $x = -\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د

ketabton.com - The Digital Library

محور معادله ده. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta = 0$ ، نو پارابولا د x محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta < 0$ ، وي پارابول د x محور نه قطع کوي.

• که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي، تابع متزایده، که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده او هم که $f(-x) = f(x)$ وي، تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي، تابع طاقه ده.

• انتقال په (2) ډوله دی (عمودي او افقي انتقال)

• **عمودي انتقال**: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي د $y = f(x) + c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي، د $y = f(x) - c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x + c)$ ګراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x - c)$ تابع ګراف لاس ته راځي.

• د تابع ګانو عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$dom(f + g)(x) = dom\, f \cap dom\, g$$

$$dom(f - g)(x) = dom\, f \cap dom\, g$$

$$dom(f \cdot g)(x) = dom\, f \cap dom\, g$$

$$dom(\frac{f}{g})(x) = dom\, f \cap dom\, g - \{x / g(x) = 0\}$$

ketabton.com - The Digital Library

• د مرکبو تابع ګانو د تعریف ساحه:

$$Dom(fog)(x) = \{x / x \in domg \quad , \quad g(x) \in domf\}$$
$$Dom(gof)(x) = \{x / x \in domf \quad , \quad f(x) \in domg\}$$

• د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.

• د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.

• د $y = f(x)$ یو په یو تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلی تابع $f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده. د f(x) او د f(x) د معکوسې تابع ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

• که د $f(x) = \frac{P(x)}{g(x)}$ په ناطقه تابع کې په ترتیب سره m او n عددونه د صورت او مخرج درجې وي، نو:

1 – که $m < n$ وي، د X محور افقي مجانب دی.

2 – که $m = n$ وي، $y = b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضریبونو نسبت دی یا که چېرې $f(x) = \frac{a_n x^n + ... + a_0}{b_n x^n + ... + b_0}$ وي، $(b_n \neq 0)$ نو د $y = \frac{a_n}{b_n}$ د f (x) د تابع افقي مجانب دی.

3 –که $m > n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه د f(x) د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو تابع مایل مجانب لري.

• یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

ketabton.com - The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 - د لاندې نيو مرتبو جوړو له سټونو څخه کوم يو يې د يوې تابع ښودونکي دی؟ د تعريف او د قيمتونو ساحې يې پيدا کړئ.

1 – $\{(1,2),(3,4),(5,5)\}$

2 – $\{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$

3 – $\{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$

4 – $\{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

2 - که $g(x)=x^2+2x+3$ وي، $g(-x),g(-1)$ او $g(x+5)$ پيدا کړئ.

3 - که $h(x)=x^4+x^2+1$ وي، $h(-x),h(-1),h(2)$ او $h(3a)$ پيدا کړئ.

4 - د لاندې نيو تابع ګانو دتعريف ساحې پيدا کړئ.

$f(x)=2x$ $\qquad$ $f(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$

$f(x)=\sqrt{16-x^2}$ $\qquad$ $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}}$ $\qquad$ $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

5 - که چېرې $f(x)=\begin{cases}x+3 & : \quad x<0\\ 4x+7 & : \quad x\geq 0\end{cases}$ وي، $f(0),f(3)$ او $f(-2)$ پيدا کړئ.

6 - که چېرې $g(x)=\begin{cases}x+3 & : \quad x\geq -3\\ -(x+3) & : x<-3\end{cases}$ وي، $g(-6),g(0)$ او $g(-3)$ پيدا کړئ.

7 - که چېرې $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & \Leftarrow \quad x\neq 3\\ 6 & \Leftarrow \quad x=3\end{cases}$ وي، $h(0),h(3)$ او $h(5)$ پيدا کړئ.

8 - له لاندې نيو معادلو څخه کومه يوه يې تابع تعريفوي؟

$x+y=16$ $\qquad$ $x^2+y=16$ $\qquad$ $x^2+y^2=16$

$x=y^2$ $\qquad$ $y=\sqrt{x+4}$ $\qquad$ $x+y^3=8$

ketabton.com - The Digital Library

9 - په لاندینیو تابع ګانو کې کومه طاقه، کومه یوه جفته او کومه یوه، نه طاقه او نه جفته ده؟

$$f(x)=x^4-2x^2+5 \quad , \quad f(x)=x^2+2x-1 \quad . \quad f(x)=\frac{2}{x-6}$$

10 - د $f(x)=(x-1)^2, f(x)=x^2-1$ تابع ګانو ګرافونه رسم او د $f(x)=x^2$ سره یې پرتله کړئ.

11 - د لاندینیو تابع ګانو $(f+g),(f-g),(f\cdot g)$ او $(\frac{f}{g})$ پیدا کړئ او د تعریف ساحې یې وټاکئ.

$f(x)=4x-1$ $\quad$ $g(x)=6x+3$

$f(x)=\sqrt{2x+5}$ $\quad$ $g(x)=\sqrt{4x-9}$

$f(x)=4x^2-11x+2$ $\quad$ $g(x)=x^2+5$

12 - که $f(x)=4x^2-2x$ او $g(x)=8x+1$ وي، نو:

$(f+g)(3)$ $\quad$ $(f+g)(-5)$ $\quad$ $(f\cdot g)(4)$

$(\frac{f}{g})(4)$ $\quad$ $(fog)(2)$ $\quad$ $(gof)(-5)$

پیدا کړئ.

13 - fog او gof پیدا کړئ که:

$f(x)=8x+12$ $\quad$ $g(x)=3x-1$

$f(x)=5x+3$ $\quad$ $g(x)=-x^2+4x+3$

$f(x)=-x^3+2$ $\quad$ $g(x)=4x$

$f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad$ $g(x)=x^2$

$f(x)=\sqrt{x+2}$ $\quad$ $g(x)=8x^2-6$

14 - د $y=f(x)$ تابع د ګراف په پام کې نیولو سره ووایاست چې د $y=f(x)-5$ تابع ګراف د 5 واحدو په اندازه:

a- ښکته خواته انتقال شوي دی. $\quad$ b- پورته خوا ته انتقال شوي دی.

c- ښې خواته انتقال شوي دی. $\quad$ d- کینې خواته انتقال شوي دی.

15 - که د $f(x)$ تابع په لاندې ډول تعریف شوی وي ګراف یې رسم کړئ، د تعریف او قیمتونو

ketabton.com - The Digital Library

ساحې يې وټاکئ.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & : \quad x>1\\ x^2 & : \quad -1<x<1\\ x+2 & : \quad x<-1\end{cases}$$

16 - د $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

17 - د $f(x)=\sqrt{2x-1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

18 - د لاندېنيو ناطقو تابع ګانو د تعريف ساحې پيدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري، د عمودي مجانبونو معادلې يې هم پيدا کړي.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4} \qquad g(x)=\frac{7x}{x-8} \qquad h(x)=\frac{x+8}{x^2-64}$$

$$f(x)=\frac{x+8}{x^2+64} \qquad g(x)=\frac{x+7}{x^2-49} \qquad h(x)=\frac{x+7}{x^2-36}$$

19 - د $f(x)=x^2+2$ ، $f(x)=x^2+1$ ، $f(x)=x^2-1$ او $f(x)=x^2-2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له ګراف سره يې پرتله کړئ.

20 - د لاندېنيو دويمې درجې تابع ګانو د رأسونو وضعيه کميات اود تناظر د محورونو معادلې پيدا کړئ.

$$y=(x-2)^2 \qquad y=(x+3)^2-4$$

21 - د $y=-\dfrac{x}{2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

22 - د $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+2}$ تابع عمودي او مايل مجانبونه پيدا کړئ.

23 - د $h(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ تابع د افقي مجانب معادله عبارت ده له:

$a)$ $y=-1$ $b)$ $y=1$

$c)$ $y=-\dfrac{1}{4}$ $d)$ $y=4$

ketabton.com - The Digital Library

24 - د $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2\\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ د تابع ګراف رسم کړئ.

25- $g(x)=|x|-5$ د تابع ګراف رسم او د قیمتونو ساحه یې پیدا کړئ.

26 - د علامې تابع د قیمتونو په ساحه کې کوم عددونه شامل وي؟

27 - د لاندینیو تابع ګانو معکوسه تابع پیدا کړئ او وښیاست چې $f(f^{-1}(x))=x$ دی.

$f(x)=\frac{1}{8}x$ $\qquad$ $f(x)=8x-1$ $\qquad$ $f(x)=x^2+6$

$f(x)=\frac{4x+6}{5}$ $\qquad$ $f(x)=x^3-1$

28 -آیا د $g(x)=x^2$ تابع معکوس منونکي ده؟ (معکوس یې هم یوه تابع ده)

29 - که $(fog)(x)=(gof)(x)$ وي، د f او g تابع ګانې سره څه اړیکه لري؟

30 - د X او Y له محورونو سره د $g(x)=3-\frac{3}{2}x$ د ګراف، د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

31 - د $f(x)=-3$ تابع ګراف رسم کړئ.

32 - د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع د ګراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - د $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ ، $f(x)=3x^2$ ، $f(x)=2x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ تابع د ګراف سره یې پرتله کړئ.

34 – د $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ د ناطقې تابع مایل مجانب عبارت دی له:

a : $y=x$

b : $y=x-1$

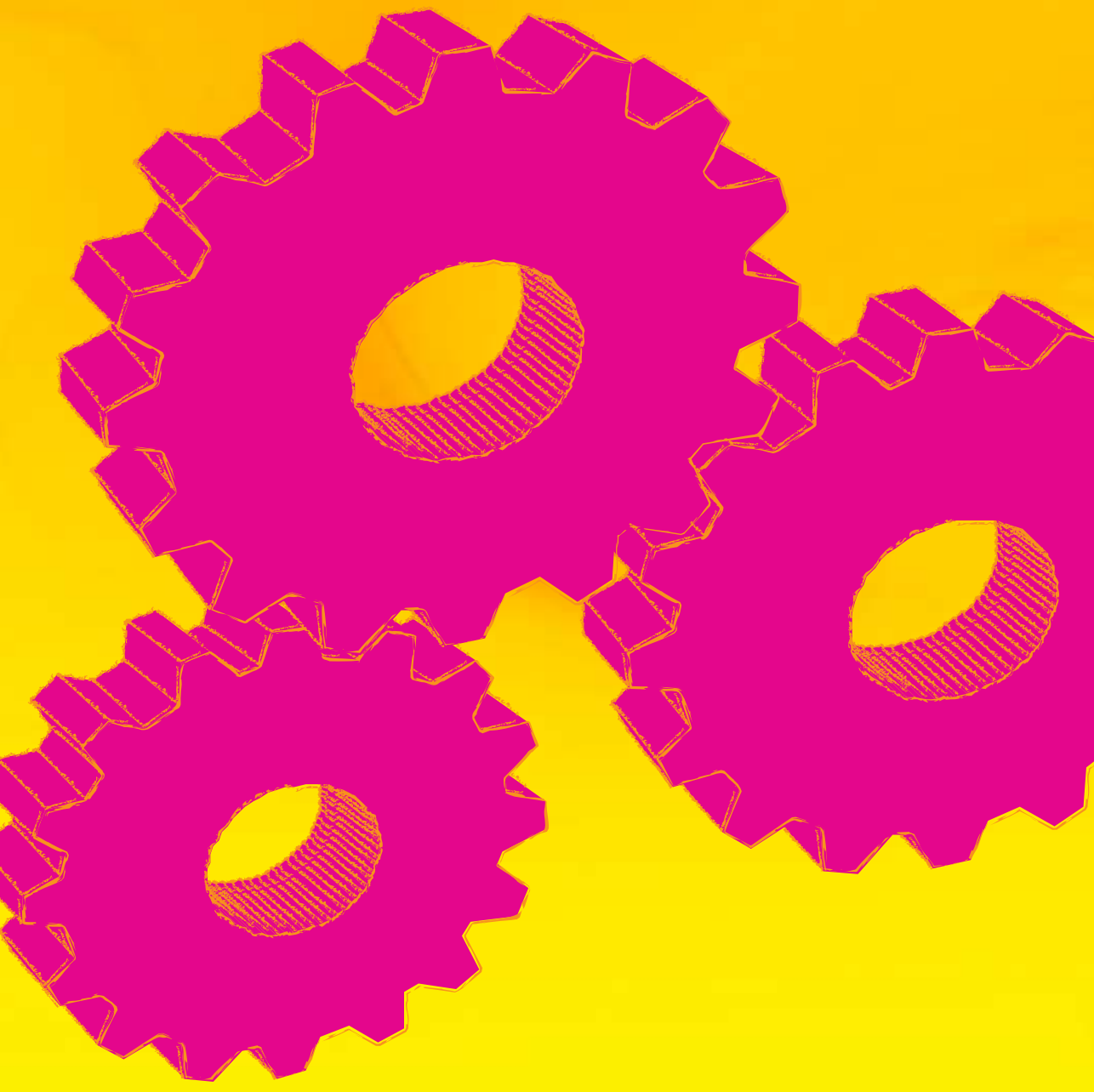
c : $y=x+1$

ketabton.com - The Digital Library

څلورم څپرکی

مثلثاتي تابع ګانې

ketabton.com - The Digital Library



ketabton.com - The Digital Library

زاویه او رادیان(Angle and Radian)
زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه:

آیا زاویه په مثلثاتو او هندسه کې یو له بله توپیر لري؟

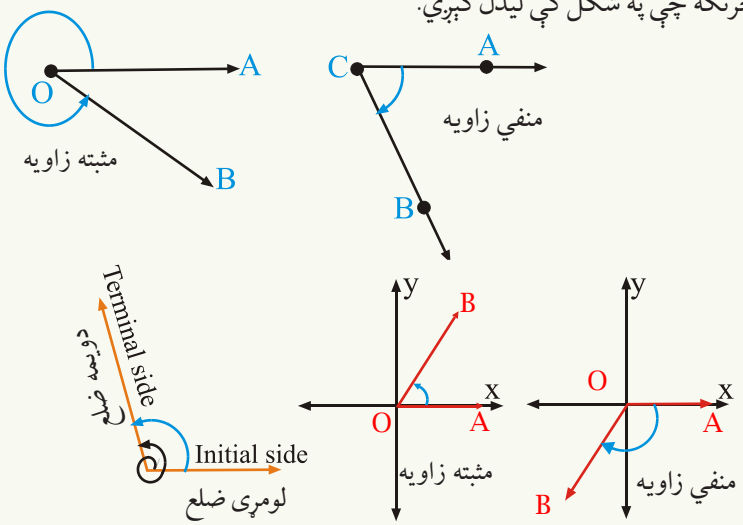
آیا په هندسه کې منفي زاویې شته دي؟

له هندسې څخه پوهېږو، زاویه هغه شکل دی چې د دوه نیمو خطونو له یو ځای کیدو څخه چې مشترکه مبدأ ولري، تشکیل شوی وي چې مشترکه مبدأ د زاویې له رأس څخه عبارت ده. په هندسه کې زاویه له $1°$ څخه تر $360°$ پورې وي، خو په مثلثاتو کې په هره اندازه زاویه درلودلای شو. له بلې خوا په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاویې هم شته دي.

په مثلثاتو کې زاویه د یو خط له دوران څخه په دې ډول چې د خط یو انجام ثابت وي، لاس ته راځي. چې د لومړي خط دوران د دویمې ضلعې موقعیت اختیاروي(یوه ضلع د رأس په نقطه کې دوران کوي). د ساعت د عقربې د حرکت مطابق دوران(clockwise) منفي او د ساعت د عقربې د حرکت مخالف(Counter clockwise) دوران مثبت فرض شوی دی.

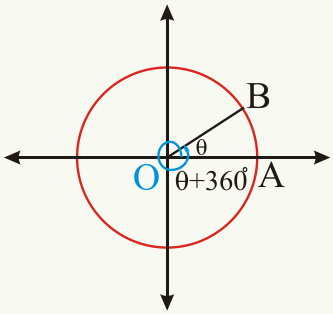
چې لومړۍ ضلعې ته (Initial side) او د دوران پای ته دویمه ضلع (Terminal side) وایي.

لکه: څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.



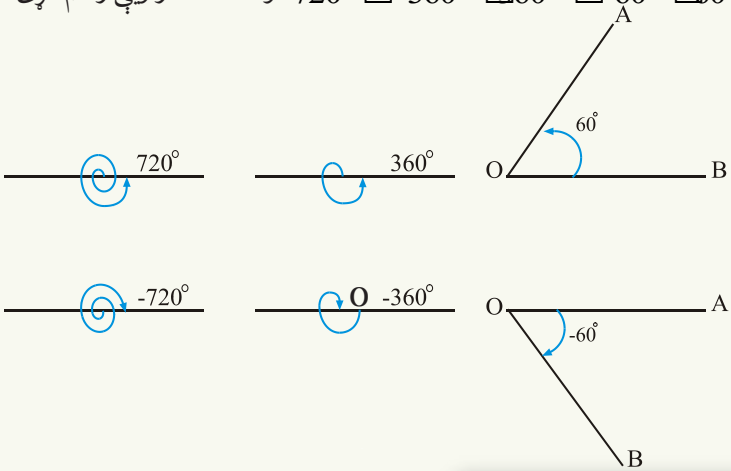
ketabton.com - The Digital Library

که په شکل کې د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د مختصاتو د مبدأ پر شاوخوا د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، د θ زاویه لاس ته راځي.



که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د 360^o په اندازه(یو پوره دوارن) دوران ورکړو، او دوران ته دوام ورکړو، تر څو د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط د OB موقعیت ته ورسېږي. په دې حالت کې جوړه شوې زاویه $\theta + 360^o$ ده. او که د دوو پوره دورانونو وروسته د B ټکي ته ورسېږو، طی شوی زاویه به $\theta + 720^o$ او په همدې ډول که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته K دورانونه ورکړو او د B ټکي ته ورسېږو، نو د زاویې اندازه به $\theta + K \cdot 360^o$ وي، لکه: څرنګه چې لیدل کېږي، په مثلثاتو کې له 360^o څخه لوېې زاویې هم شته دی.

لومړی مثال: د 60^o ، -60^o ، 360^o ، -360^o ، 720^o او -720^o زاویې رسم کړئ.



فعالیت

د 45^o ، 90^o ، -180^o او 180^o زاویې رسم کړئ.

د زاویې د اندازه کولو واحدونه: زاویه د درجې، ګراد او راډیان په مرسته اندازه کېږي.

ketabton.com - The Digital Library

درجه: د يو دوران (Rotation) $\frac{1}{360}$ برخه له درجې څخه عبارت ده، يا ديوې قايمې زاويې $\frac{1}{90}$ برخې ته درجه وايي.

$$1^o = 60' \qquad 1' = 60'' \qquad 1^o = 60 \cdot 60 = 3600''$$

$$(\frac{1}{60})^o = 1' \quad , \quad (\frac{1}{60})' = 1'' \qquad (\frac{1}{3600})^o = 1''$$

دويم مثال: $35^o\ 15'\ 27''$ د درجې په اعشاري شکل وليکئ او $(48,3625)^o$ په درجه، دقيقه او ثانيه(DMS) واړوئ.

حل

$$35^o\ 15'\ 27'' = 35^o + (\frac{15}{60})^o + (\frac{27}{3600})^o = 35^o + 0,25^o + 0,0075^o = 35,2575^o$$

$$48,3625^o = 48^o + 0,3625^o = 48^o + (0,3625 \cdot 60)' = 48^o + (21,75)'$$

$$= 48^o + (21)' + (0,75 \cdot 60)'' = 48^o\ \ 21'\ \ 45''$$

فعالیت

$36^o\ 47'\ 12''$ په درجه واړوئ او 967663^o, 55 په درجه، دقيقه او ثانيه (DMS) (Degree, Minute, Second) واړوئ.

ګراد: ګراد هم د زاويې د اندازه کولو واحد دی، د يو دوران $\frac{1}{400}$ برخې ته ګراد وايي. د ګراد $\frac{1}{100}$ برخې ته دقيقه ګراد او د دقيقه ګراد $\frac{1}{100}$ مې برخې ته ثانيه ګراد وايي.

$$1g = 100'g \quad , \quad 1`g = 100''g \quad , \quad 1g = 10000''g$$

د درجې بدلول په ګراد او د ګراد بدلول په درجې باندې: کولای شو چې درجه په ګراد او ګراد په درجه واړوو.

دريم مثال: 45^o درجې په ګراد او 100g په درجه واړوئ.

حل: څرنګه چې يو مکمل دوران 360^o يا 400g دی نو:

ketabton.com - The Digital Library

$360^o = 400g$ $\qquad$ $400g = 360^o$

$1^0 = \frac{400}{360}g = \frac{10}{9}g$ $\qquad$ $1g = (\frac{360}{400})^o = (\frac{9}{10})^o$

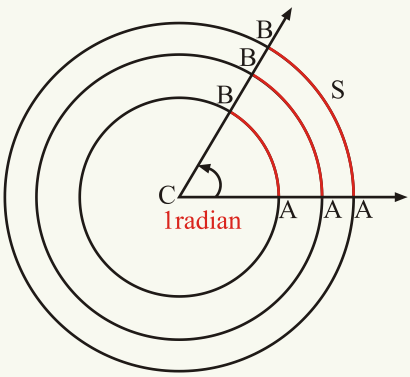
$45^o = 45(\frac{10}{9})g = 50g$ $\qquad$ $100g = 100(\frac{9}{10})^o = 90^o$

اویا:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \quad , \quad \frac{d}{180} = \frac{100}{200}$$

$$d = \frac{180 \cdot 100}{200} = 90^o$$

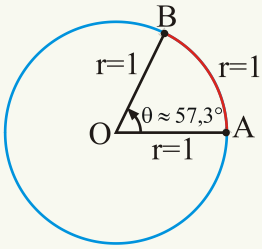
راډیان(Radian): د درجې او ګراد سربېره د زاویې د اندازه کولو بل واحد راډیان دی. راډیان د هغوي مرکزي زاویې اندازه ده چې د مقابل قوس اورېدوالی یې د شعاع له اورېدوالی سره مساوي وي. راډیان په عالي ریاضیاتو کې ډېر استعمالېږي. په شکل کې د $\hat{ACB}$ مرکزي زاویه چې شعاع یې r او د AB قوس اورېدوالی له r سره مساوي دی، نو د $\hat{ACB}$ زاویه 1Radian ده.



$$\hat{ACB} = 1\text{radian} = 1^R$$

که د AB قوس د دایرې له شعاع r سره مساوي وي، θ د راډیان په حساب مساوي ده په:

$$\hat{\theta} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{s}{r} \text{ او یا } s = r\theta$$



په مثلثاتي دایره یا واحده دایره(Unite Circle) کې چې شعاع یې د اورېدوالی واحد او مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي، د راډیان په حساب د مرکزي زاویې اندازه له مقابل قوس سره مساوي ده.

ketabton.com - The Digital Library

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{1} = \overset{\frown}{AB} = S \quad \text{radian}$$

څرنګه چې د دايرې محيط $C = 2\pi r$ دی، نو $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \ radian$ په دې معنا چې يو پوره دوارن 360^{o} يا $2\pi^{R}$ دی.

$$2\pi^{R} = 360^{\circ}$$

$$1^{R} = \frac{360^{\circ}}{2\pi} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \approx \frac{180^{\circ}}{3.14159} \approx (57.29578)^{\circ} \approx 57^{\circ}\,17'45'' \approx (57.3)^{\circ}$$

$$1^{\circ} = \frac{2\pi}{360^{\circ}} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \approx \frac{3.14159}{180^{\circ}} \approx 0.01745 \,\text{Randians}$$

څلورم مثال: د $\frac{\pi}{3} \ radian$ د مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پيدا کړئ، که د دايرې قطر 30m وي.

حل: څرنګه چې: $r = \frac{d}{2} = \frac{30m}{2} = 15m$ دی، نو: $s = r\theta = 15(\frac{\pi}{3}) = 5\pi \ m \approx 15,7m$

فعاليت

د 1Rad مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟ که د دايرې شعاع 10cm وي.

د درجې او ګراد بدلول په راډيان او د راډيان بدلول په درجه او ګراد:

څرنګه چې $360^{o} = 400g = 2\pi^{R}$ دی،نو $\frac{d}{360^{\circ}} = \frac{g}{400} = \frac{R}{2\pi}$ او يا $\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi}$

او يا

$$360^{o} = 2\pi^{R}$$

$$1^{o} = (\frac{2\pi}{360})^{R} = (\frac{\pi}{180})^{R}$$

په همدې ډول څرنګه چې: $2\pi^{R} = 360^{o}$

ketabton.com - The Digital Library

$$1^R = (\frac{360}{2\pi})^o = (\frac{180}{\pi})^o$$

$$1^R = \frac{200g}{\pi} = \frac{200g}{3,1415} \approx 63,66198g$$

پنځم مثال: د 75^o , 220^o , -400° , $-100g$ او 40° زاویې په راډیان واړوئ.

خرنګه چې $1^o = (\frac{\pi}{180})^R$ ده، نو:

$$75^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12} \text{radain} \qquad 220 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{9} \text{radain},$$

$$-400^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{20\pi}{9} \text{ radain} \qquad 40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9} \text{ radian}$$

خرنګه چې یو پوره دوران $2\pi^R$ او یا $400g$ دی، نو:

$$1g = (\frac{2\pi}{400})^R = (\frac{\pi}{200})^R$$

$$-100g = (-100 \cdot \frac{\pi}{200})^R = (-\frac{\pi}{2})^R$$

پوښتنه: که دګراد په حساب له یوې زاویې څخه 30 واحده کم کړو، په لاس راغلی عدد، د زاویې اندازه په درجه راکوي، دا زاویه څو راډیانه ده؟

حل

$$\frac{270}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3\pi}{2} \text{Radian} \qquad \frac{10}{9}D - 30 = D$$

$$\frac{10}{9}D - D = 30 \Rightarrow \frac{10D - 9D}{9} = 30 \Rightarrow D = 270^\circ$$

نو دا زاویه $\frac{3\pi}{2}$ راډیانه ده.

شپږم مثال a: $(\frac{5\pi}{6})$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{9}$ او 6π راډیان په درجه واړوئ.

(b): د یو دوران(Revolution) $\frac{1}{4}$ برخه څو راډیانه کېږي؟

حل

ketabton.com - The Digital Library

$1^R = (\frac{180}{\pi})^o$, $\frac{\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = 36^\circ$

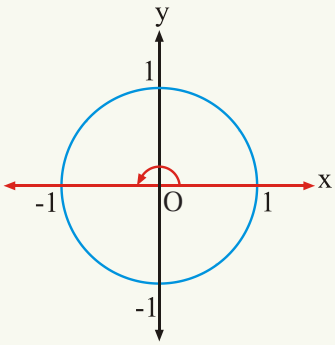
a : $(\frac{5\pi}{6}) \cdot (\frac{180}{\pi}) = 150^\circ$, $6\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 1080^\circ$, $\frac{4\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} = 80^\circ$

b : $= \frac{1}{4} \cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{2}$ radian

لاندې شکلونه وګورئ.

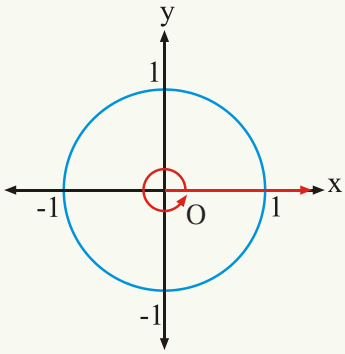
$\frac{1}{2}$ Re v

$\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi^R$



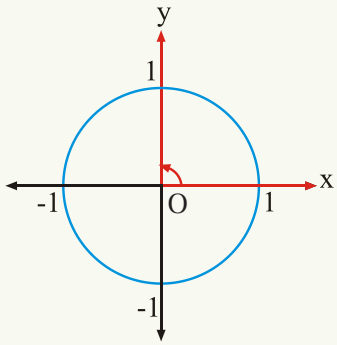
1 Re volution

2 π Radians



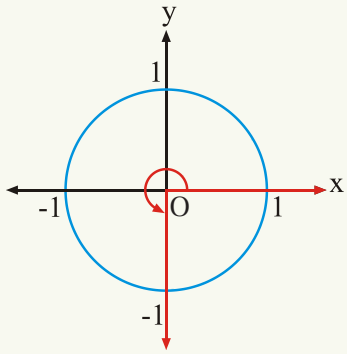
$\frac{1}{4}$ Re v

$\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ Radain



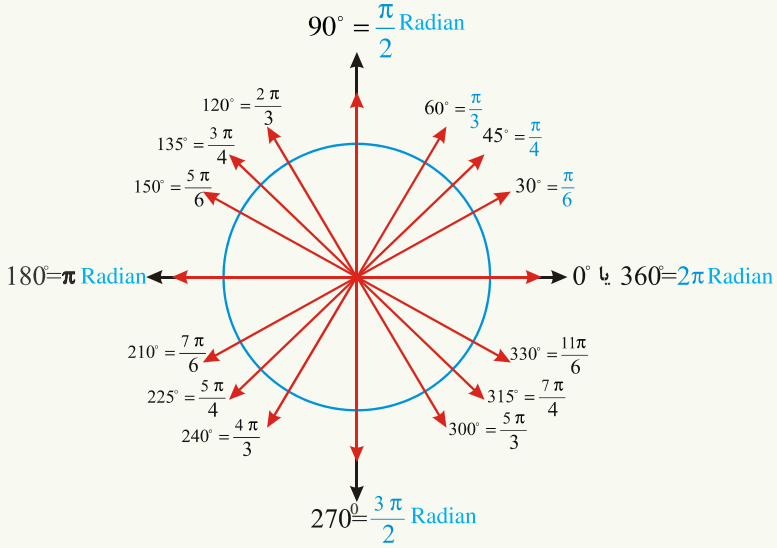
$\frac{3}{4}$ Re volution

$\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ Radians



ketabton.com - The Digital Library

د درجې او راډیان تر منځ د اړیکې د ښه څرګندېدو لپاره لاندې شکل هم وګورئ:



فعالیت

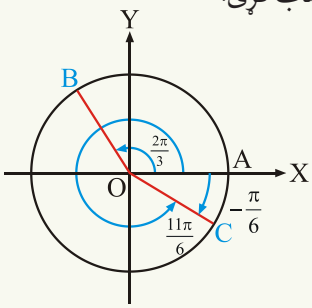
$\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$ او $-\frac{5\pi}{4}$ راډیانه زاویې په درجه واړوئ.

اووم مثال

(a) د $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاویې په شکل کې وښیاست:

(b) په شکل کې لوی او کوچنی څرخ ښودل شوی دی، که د θ_1 او θ_2 د زاویو مقدار د راډیان په حساب وي، د θ_2 د زاویې مقدار د θ_1، r_1 او r_2 له جنسه حساب کړئ.

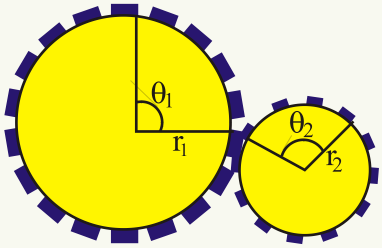
د (a) حل:



ketabton.com - The Digital Library

له شکل څخه لیدل کېږي چې د $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې دي.

د (b) حل:



$$\theta_2 r_2 = \theta_1 r_1 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 r_1}{r_2}$$

اتم مثال: که د ساعت د ثانیې عقربې 40 ثانیې دوران کړی وي، د ثانیې د عقربې په واسطه طی شوې مثبته زاویه په راډیان پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې 60 ثانیې یو پوره دوران یا 2π راډیان کېږي، نو $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}\,\text{Rev}$ او څرنګه چې یو دوران 2π *Radian* دی، نو:

$$\frac{2}{3}\cdot 2\pi^{R} = \frac{4\pi}{3}\ \text{Radian}$$

همدارنګه د ساعت دوو عقربو ترمنځ د زاویې د پیدا کولو لپاره له $\theta = |5{,}5\,\text{min} - 30\text{hr}|$ څخه کار اخلو.

د مثال په توګه د 3 بجو او 40 دقیقو په وخت کې د ساعت ګرد او دقیقه ګرد په منځ کې زاویه څو درجې ده؟

$$\theta = |5{,}5\cdot 40 - 30\cdot 3| = 130^{o}$$

پوښتنې

1 - که د یوې مرکزي زاویې مقابل قوس 50cm او د دایرې شعاع 25cm وي، مرکزي زاویه به څو راډیانه وي؟

2 - $32{,}4222^{o}$ په درجې، دقیقې او ثانیې واړوئ

3 - د یو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو راډیانه، څو درجې او څو ګراده کېږي؟

4 - $\frac{5\pi}{4}$ راډیانه څو ګراده او $-7{,}5^{\circ}$ څو راډیانه کېږي؟

ketabton.com - The Digital Library

5- $225^{o}, -315^{o}, 720^{o}$ او 45^{o} زاویې په راډیان او ګراد واړوئ

6 - د یو دوران $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{24}$ ، $\frac{1}{18}$ او $\frac{4}{5}$ برخې څو راډیانه او څو درجې کېږي؟

7 - $\frac{11\pi}{3}$ ، $\frac{9\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{10}$ ، $\frac{2\pi}{5}$ او $-\frac{5\pi}{12}$ راډیانه په درجو واړوئ

8 - که د یو ساعت د ثانیې د عقربې اوږدوالی 6cm وي، په 40 ثانیو کې د ثانیې عقربه څو سانتي متره فاصله طی کوي؟

9 - که د دایرې شعاع 3cm او مرکزي زاویه $\frac{5}{3}$ راډیانه وي. د دې مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟

10 - که د یو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 35 ثانیې وي، نو د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبته زاویه طی کړي وي؟

11 - د دوو زاویو مجموعه $152°$ ده، که د یوې زاویې اندازه د درجې په حساب له بلې زاویې سره د ګراد په حساب برابره وي، د هرې زاویې اندازه د راډیان په حساب څومره ده؟

12- $1620°$ څو راډیانه کېږي؟

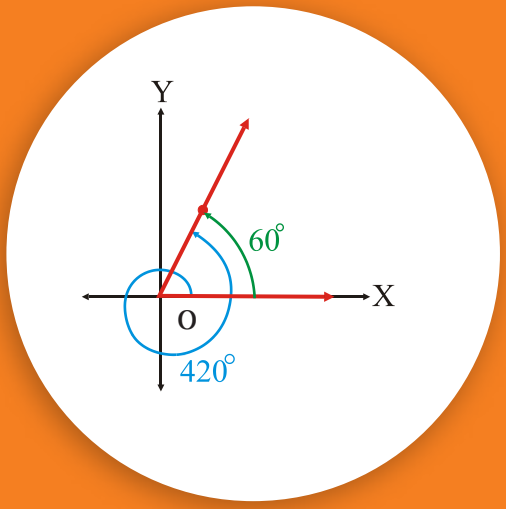
a) $4\pi^{R}$ b) $8\pi^{R}$ c) $9\pi^{R}$ d) $10\pi^{R}$

13 - څلور دورانونه څو راډیانه کېږي؟

a) $2\pi^{R}$ b) $4\pi^{R}$ c) $6\pi^{R}$ d) $8\pi^{R}$

14 - که د یوې دایرې شعاع 10m وي، د 45 radian مرکزي زاویې، مقابل قوس به څو متره وي؟

ketabton.com - The Digital Library



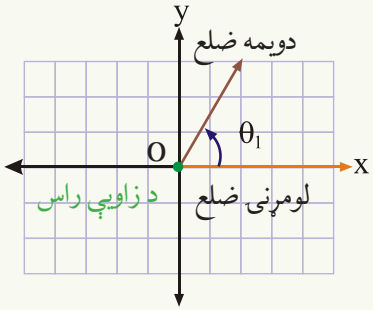
د يوې زاويې معياري حالت او کوټرمينل زاويې

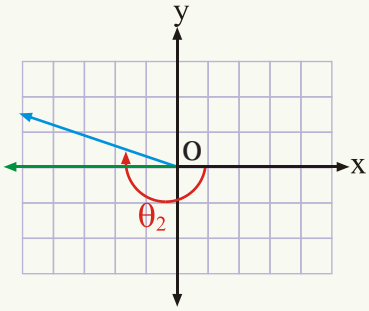
آيا ويلای شئ چې د 60° او 420° زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبق دي؟ ولې؟

د يوې زاويې معياري حالت (Standard position of an angle):

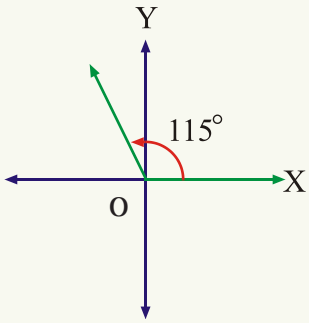
که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع يې د X د محور په مثبت جهت پرته وي، نو دا زاويه په معياري حالت کې ده.

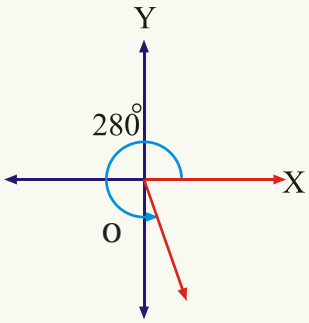
د مثال په توګه: په لاندې شکلونو کې د θ_1 او θ_2 زاويې په معياري حالت کې ښودل شوي دي.

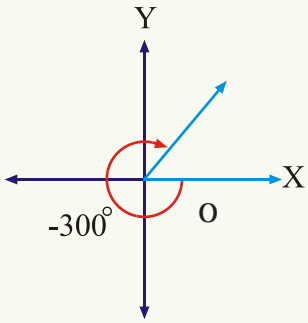




لومړی مثال: 115° ، 280° او -300° زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.







ketabton.com - The Digital Library

که په معیاري حالت کې د یوې زاویې دویمه ضلع د X او یا د Y پر محور منطبق شي، داسې زاویې ته ربعي زاویه(Quadrantale angle) وایي.

د مثال په توګه: $90^o, 180^o, 270^o, 360^o$ او داسې نورې زاویې ربعي زاویې دي.

فعالیت

د $130^o, 50^o, 500^o$ او -210^o زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

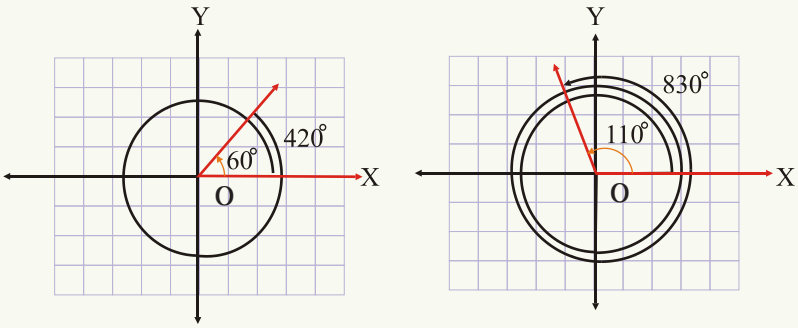
کوټرمینل زاویې: (Conterminal angles)

دوې یا څو زاویې چې په معیاري حالت کې یې دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې شي، د کوټرمینل زاویو په نامه یادېږي.

دویم مثال: په شکل کې وښیاست چې د 60^o او 420^o زاویې او همدارنګه د 110^o او 830^o زاویې چې په معیاري حالت کې دي، یو له بلې سره کوټرمینل زاویې دي.

حل: څرنګه چې په معیاري حالت کې د دې زاویو لومړنۍ ضلعې یو پر بل منطبق دي، لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د 60^o او 420^o زاویو دویمې ضلعې(Conterminal sides) یو پر بل منطبق دي. نو د تعریف په اساس دا دواړه زاویې سره کوټرمینل دي.

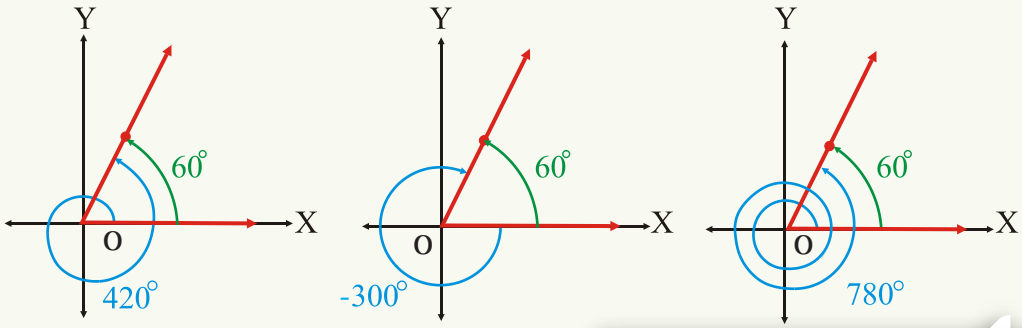
همدارنګه د 110^o او 830^o زاویې هم سره کوټرمینل دي.



دریم مثال: په معیاري حالت کې د 60^o زاویې سره درې کوټرمینل زاویې رسم کړئ او په شکل کې یې هم وښیاست.

حل: $60^o + 360^o = 420^o$, $60^o - 360^o = -300^o$, $60^o + 2 \cdot 360^o = 780^o$

ketabton.com - The Digital Library



فعالیت

ایا د 230° ، 590° او 230° ، -130° زاویې سره کوترمینل دي؟ رسم یې کړئ.

خرنګه چې کوټرمینل زاویې یو له بله سره د یوه پوره دوران (360°) یا $2\pi^R$ او یا خو دورانونه $n\cdot 360^\circ$ او یا $n\cdot 2\pi$ توپیر لري، نو د θ د زاویې سره کوټرمینل زاویې عبارت دي له:

$\theta+2\pi$	$\theta+360^\circ$
$\theta+2\cdot 2\pi$	$\theta+2\cdot 360^\circ$
$\theta+3\cdot 2\pi$	$\theta+3\cdot 360^\circ$
ـــــ	ـــــ
$\theta+2n\pi$	$\theta+n\cdot 360^\circ$

څلورم مثال:

(a) له 30° زاویې سره څلور کوټرمینل زاویې پیدا کړئ.

(b): له 90° زاویې سره دوه کوټرمینل زاویې پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

حل(a)

$30^\circ+360^\circ=390^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}$ Radian

$30^\circ+2\cdot 360^\circ=750^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi=\frac{25\pi}{6}$ Radian

$30^\circ+3\cdot 360^\circ=1110^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+3\cdot 2\pi=\frac{37\pi}{6}$ Radian

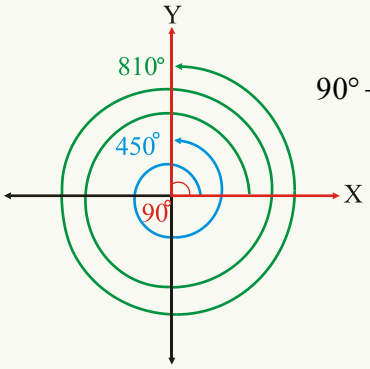
$30^\circ+4\cdot 360^\circ=1470^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+4\cdot 2\pi=\frac{49\pi}{6}$ Radian

ketabton.com - The Digital Library

حل(b)

$90° + 2 \cdot 360° = 810°$

$90° + 360° = 450°$



پنځم مثال: آیا $410°, 50°$ $800°, 80°$ $-680°, 40°$ او د $60°$ او $410°$ زاویې سره کوټرمینل دي؟

حل: څرنګه چې $410° = 50° + 360°$ دی، نو د $50°$ او $410°$ زاویې سره کوټرمینل دي او $800^0 = 80° + 2 \cdot 360°$ نو د $80°$ او $800°$ زاویې هم سره کوټرمینل دي. همدارنګه $-680° = 40° - 2 \cdot 360°$ نو $40°$ او $-680°$ زاویې هم سره کوټرمینل دي، خو $410° \neq 60° + 360°$، نو د $410°$ او $60°$ زاویې سره کوټرمینل نه دي.

که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدآ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور پر مثبت جهت منطبق وي، نو دا زاویه په معیاري حالت کې ده. که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبق وي، داسې زاویې د کوټرمینل زاویو په نوم یادېږي.

پوښتنې

1 - د $90°, 120°, -270°$ او $240°$ زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

2 - تر ټولو کوچنۍ مثبته زاویه پیدا کړئ چې له لاندېنیو زاویو سره کوټرمینل وي.

$-40°$ $-125°$ $450°$ $539°$ $60°$ $90°$ $135°$

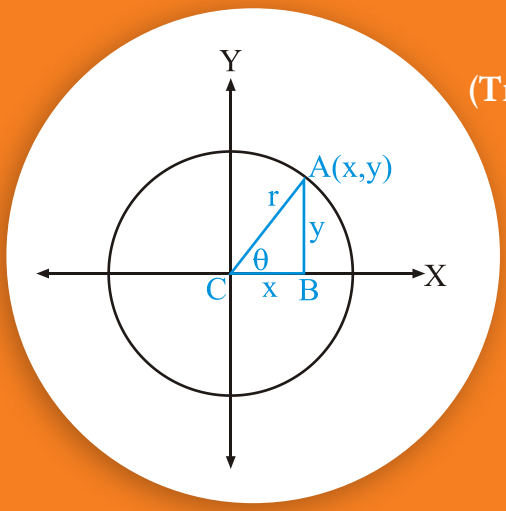
3 - آیا د ($-80°$ ، $280°$) او د ($35°$ ، $395°$) زاویې سره کوټرمینل دي؟

4 - له $40°$ زاویې سره، شپږ کوټرمینل زاویې پیدا کړئ.

5 - آیا د $(-930°, 150°)$ او د $(180°, 900°)$ زاویې سره کوټرمینل دي، په شکل کې یې هم وښیاست؟

ketabton.com - The Digital Library

مثلثاتي تابعګاني
(Trigonometric Functions)



آیا ویلای شئ چې د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه د θ د زاویې د ضلعو په اوږدوالی پورې اړه لري او که نه؟

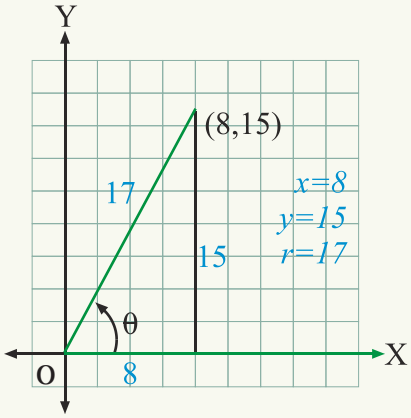
څرنګه چې پوهېږو چې د دیوې حادې زاویې (θ) مثلثاتي نسبتونه (Trigonometric ratios) په یوه قایمه الزاویه مثلث کې په لاندې ډول تعریف شوي دي.

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{y}{r}\ ,\ \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{y}{x}\ ,\ \cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{r}{x}\ ,\ \csc\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{r}{y}$$

او په نتیجه کې لیدل کېږي چې: $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ، $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ او $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.



لومړی مثال: که په معیاري حالت کې د θ زاویې دویمه ضلع د (8,15) له ټکي څخه تېره شي، د θ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د فیثاغورث د قضیې په اساس لروچې:

$r^2 = x^2 + y^2$ دی.

ketabton.com - The Digital Library

$$r^2 = 8^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289$$

$$r = \sqrt{289} = 17$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17}\ ,\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}\ ,\ \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8}\ ,\ \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$$

د زاویو د ځینو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اساسي اړیکې:

د فیثاغورث د قضیې په اساس د شکل له مخې لیکلای شوچې:

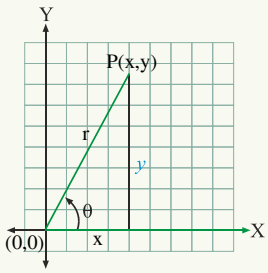
$$y^2 + x^2 = r^2 \text{.....I}$$

دواړو خواوې په r^2 وېشو:

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$(\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = 1$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$



همدارنګه که د (I) معادلې دواړه خواوې په y^2 ووېشو، نو لرو چې:

$$\frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} \Rightarrow 1 + (\frac{x}{y})^2 = (\frac{r}{y})^2$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

او که د (I) معادلې دواړه خواوې په x^2 ووېشو:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow (\frac{y}{x})^2 + 1 = (\frac{r}{x})^2$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

له بلې خوا:

ketabton.com - The Digital Library

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\cot\theta \qquad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta$$

او له دې ځايه څخه نتيجه کېږي چې:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\ \sin\theta\cdot\csc\theta=1\ ,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\ ,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=1\ ,\ \cos\theta\cdot\sec\theta=1\ ,\ 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\ ,\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

څرنګه چې دا اړيکې د θ د هر قيمت لپاره سمې دي، نو په دې اساس مثلثاتي مطابقتونه هم ورته وايي.

فعاليت

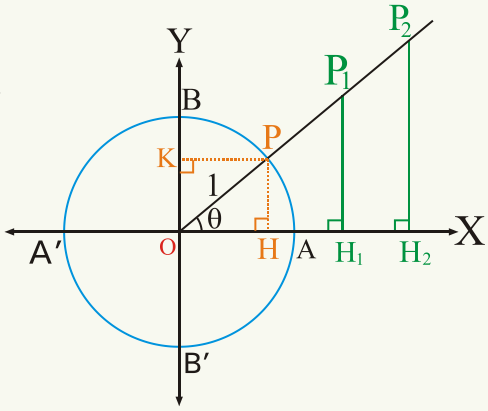
که په معياري حالت کې د θ دويمه ضلع د $(12,5)$ له ټکي څخه تېره شي، د θ د زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د مثلثاتي تابع ګانو پورتنۍ قيمتونه يوازې د θ زاويې د اندازې پورې اړه لري، د P د ټکي پر موقعيت پورې چې د θ پر دويمه ضلع واقع دی اړه نه لري چې دا حقيقت په شکل کې د $\overset{\Delta}{OH_1P_1}$ او $\overset{\Delta}{OPH}$ مثلثونو د مشابهت په اساس ليدل کېږي.

$$|OP|=1$$

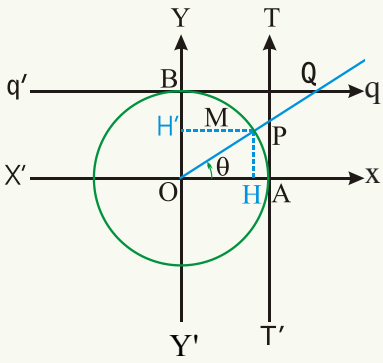
$$\cos\theta=\frac{|OH|}{|OP|}=\frac{|OH_1|}{|OP_1|}=\frac{|OH_2|}{|OP_2|}$$

$$\sin\theta=\frac{|PH|}{|OP|}=\frac{|P_1H_1|}{|OP_1|}=\frac{|P_2H_2|}{|OP_2|}$$



ketabton.com - The Digital Library

که د θ زاویه د رادیان په حساب وي. θ آزاد متحول او $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مقید (مربوط) متحولونه دي. په دې معنا چې $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مثلثاتي تابعګانې دي چې مقدار يې د θ د ضلعو اوږدوالی پورې اړه نه لري، بلکې د θ د زاویې په مقدار پورې اړه لري.



خرنګه چې مثلثاتي دایره (Trigonometric Circle) هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی يې د اوږدوالی واحد دی.

په مثلثاتي دایره کې چې مرکز يې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او د XX' او YY' محورونه د دې دایرې افقي او عمودي قطرونه دي. د قرارداد په اساس $y'oy$ ته د سینو محور او $x'ox$ ته د کوسینو محور وایي. د TAT' محور چې د A په ټکي کې له دایرې سره مماس دی، د ټانجانټ محور او د $q'Bq$ محور چې د B په ټکي کې پر دایره مماس دی، د کوټانجانټ محور بلل کېږي. د سینو او کوسینو د محورونو مبدأ د دایرې مرکز او د ټانجانټ د محور مبدأ، د A ټکی د کوټانجانټ د محور مبدأ، د B ټکی دی.

که چېرې د A له ټکي څخه په مثبت جهت کې د M تر ټکي حرکت وکړو او د $\hat{MOA}$ زاویې ته θ ووایو، د θ د زاویې مثلثاتي توابع په لاندې ډول هم تعریفېږي.

$(r = OM = OA = OB = 1)$

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OM} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{OA} = \overline{AP} \qquad \sec\theta = \frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OA} = \overline{OP}$$

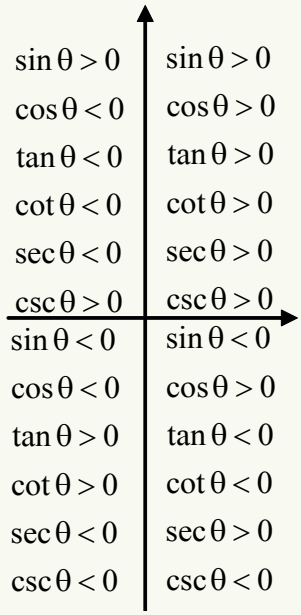
$$\cot\theta = \frac{\overline{OH}}{HM} = \frac{BQ}{OB} = \overline{BQ} \qquad \csc\theta = \frac{OM}{HM} = \frac{OQ}{OB} = \overline{OQ}$$

په دې اساس مثلثاتي نسبتونو ته مثلثاتي خطونه هم وایي.

په همدې ډول که د θ دویمه ضلع او یا دقوس پای په دویمه، دریمه یا څلورمه ناحیه(ربع) کې وي.

ketabton.com - The Digital Library

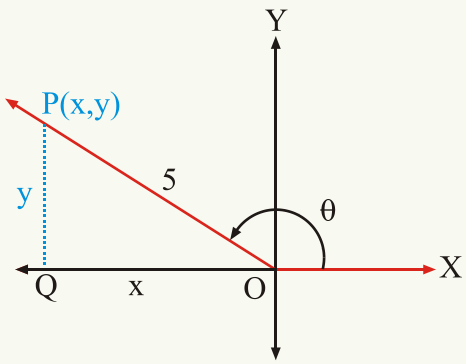
کولی شو چې مثلثاتي نسبتونه يې پر لاس راوړو:
د مثلثاتي نسبتونو علامې په څلورو ناحيو(ربعو) (quadrants) کې په لاندې ډول دي.



ربع	$\sin\theta, \csc\theta$	$\tan\theta, \cot\theta$	$\sec\theta, \cos\theta$
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	+	−
IV	−	−	+

د ويم مثال: له لاندې شکل سره سم که په معياري حالت کې د θ د زاويې دويمه ضلع، په دويمه ناحيه(ربع) کې واقع وي او $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ وي، د θ د زاويې نور مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل: لومړی د P د ټکي وضعيه کميات پيدا کوو: څرنګه چې $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ دی، په دويمه ربع کې د x قيمت منفي دی، نو $x = -3$ او $r = 5$ د فيثاغورث د قضيې له مخې لرو چې:



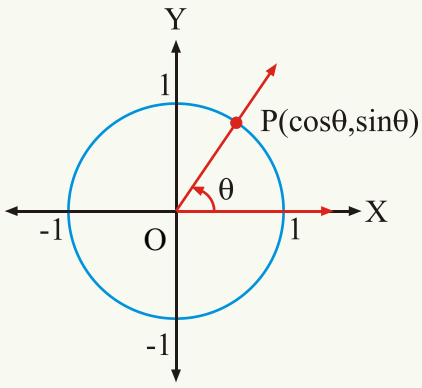
$$5^2 = (-3)^2 + y^2$$
$$y^2 = 25 - 9 = 16$$
$$y = \pm\sqrt{16}$$
$$y = 4$$

ketabton.com - The Digital Library

(ځکه چې د P ټکی په دویمه ربع کې دی، $y > 0$ دی)

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \text{ ، } \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} \text{ ، } \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{4} \text{ ، } \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} \text{ ، } \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4}$$



خرنګه چې د X محور ته د cos محور او د Y محور ته د sine محور وایي، مورږ کولای شو چې په مثلثاتي دایره کې د P د ټکي وضعیه کمیات له $P(\cos\theta, \sin\theta)$ او یا $P(x, y)$ سره وښایو.

د θ د زاویې مثلثاتي توابع یوازې د θ د زاویې په مقدار پورې اړه لري چې θ آزاد متحول او د θ مثلثاتي نسبتونه مقید متحولونه دي.

په لومړي ناحیه(ربعه) کې ټول مثلثاتي نسبتونه مثبت، په دویمه ناحیه(ربع) کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت، په دریمه ناحیه(ربع) کې $\tan\theta, \cot\theta$ مثبت او په څلورمه ناحیه(ربع) کې $\cos\theta, \sec\theta$ مثبت او نور منفي دي.

پوښتنې

1- د لاندینیو زاویو د مثلثاتي نسبتونو نښې(علامې) په شفاهي ډول ووایاست.

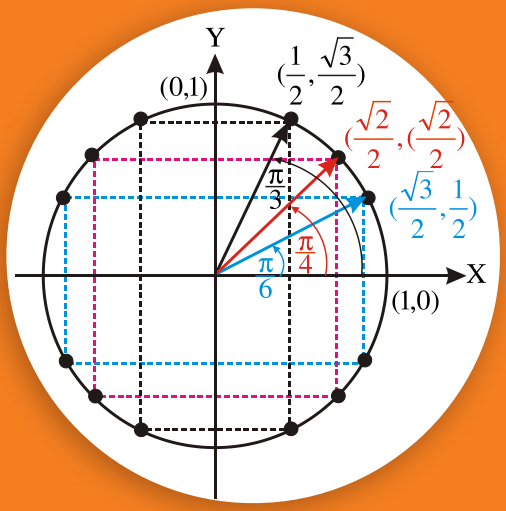
$\sin 120^\circ$ $\tan 170^\circ$ $\tan 60^\circ$ $\cos 330^\circ$ $\sec 200^\circ$

$\cot 271^\circ$ $\csc 91^\circ$ $\sin 271^\circ$ $\csc 181^\circ$ $\csc 315^\circ$

2- که θ په معیاري حالت کې د راډیان په حساب وي او د θ دویمه ضلع له لاندې راکړل شوو ټکو څخه تېره شي، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ پیدا کړئ.

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ ، } (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ ، } (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ ، } (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

ketabton.com - The Digital Library



د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

آیا کولای شئ چې ووایئ $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ دی؟

د 45° مثلثاتي نسبتونه: په یوه قایم الزاویه متساوي الساقین مثلث کې، دوې قایمې څنډې یې یو، یو واحد په پام کې ونیسئ.

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

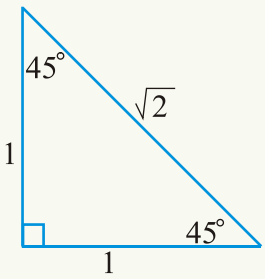
$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \csc\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$



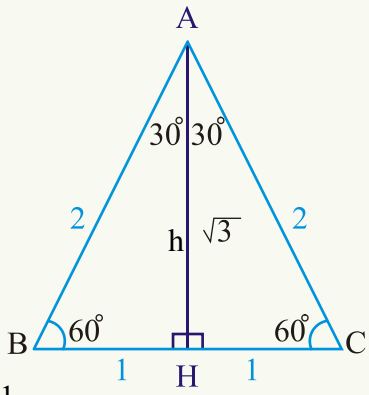
ketabton.com - The Digital Library

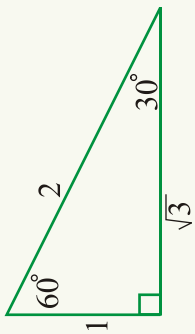
فعالیت

یو متساوي الساقین قایمه زاویه مثلث داسې په پام کې ونیسئ چې هره قایمه ضلع یې b واحده وي، د 45^{o} زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

که د $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوي الاضلاع مثلث چې هره ضلع یې دوه واحده وي، په پام کې ونیسو، د A له رأس څخه د AH ارتفاع رسمو، څرنګه چې د $\hat{A}$ زاویه نیمایي شوې ده چې نیمایي یې 30^{o} ده، نو:

$$h^2 + 1^2 = 2^2$$
$$h^2 = 4 - 1 = 3$$
$$h = \sqrt{3}$$





$$\sin 30° = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30° = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30° = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc 30° = \csc\frac{\pi}{6} = \frac{2}{1} = 1$$

فعالیت

یو داسې متساوي الاضلاع مثلث په پام کې ونیسئ چې هره ضلع یې a واحده وي د $30^{o} = \frac{\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

همدارنګه که شکل ته پام وکړو:

$$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \csc 60^\circ = \csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

لیدل کېږي چې $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ کېږي:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ \qquad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \qquad \tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ \qquad \csc 30^\circ = \sec 60^\circ \qquad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ$$

یا په عمومي ډول هر وخت چې د دوو زاویو مجموعه 90° وي، که یوه زاویه θ وي، بله زاویه به $(90^\circ - \theta)$ وي.

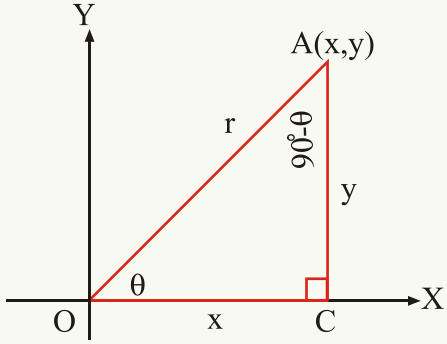
$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r}\ ,\ \cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r}\ ,\ \sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y}\ ,\ \cot\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y}\ ,\ \csc\theta = \frac{r}{y} \Rightarrow \sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x}\ ,\ \sec\theta = \frac{r}{x} \Rightarrow \csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$



ketabton.com - The Digital Library

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

لکه: څنګه چې د نهم ټولګي په مثلثاتو کې مو ویلي دي چې د زاویو د مثلثاتي نسبتونو جدول هم په همدې اساس جوړ شوی دی:

لومړی مثال: د 39^o زاویې مثلثاتي نسبتونه راکړل شوي دي، د 51^o زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$\sin 39^o = 0,6293$ $\tan 39^o = 0,8098$ $\sec 39^o = 1,287$

$\cos 39^o = ,7771$ $\cot 39^o = 1,235$ $\csc 39^o = 1,589$

حل: څرنګه چې $39° + 51° = 90°$ کېږي، نو:

$\sin 51^o = \cos 39^o = 0,7771$ $\cos 51^o = \sin 39 = 0,6293$

$\tan 51^0 = \cot 39^o = 1,235$ $\cot 51^o = \tan 39^o = 0,8098$

$\sec 51^o = \csc 39 = 1,589$ $\csc 51^o = \sec 39^o = 1,287$

پوښتنې

1 – که:

$\sin 17^o = 0,2927$ $\cos 17^o = 0,9563$ $\sec 17^o = 1,046$ $\csc 17^o = 3,420$

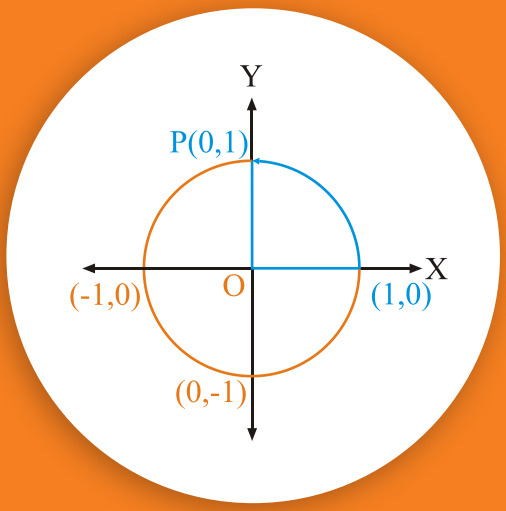
$\tan 17^o = 0,3057$ $\cot 17^o = 3,271$ وي د 73° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 – د لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې ناسمه ده؟

$\sin 28° = \cos 62°$ $\cos 12° \ 10' \ 20'' = \sin 77° \ 49' \ 40''$

$\sec 12° = \sec 88°$ $\tan 70° = \cot 20°$

ketabton.com - The Digital Library



د $270^o,180^o,90^o,0^o$ او 360^o زاویو مثلثاتي نسبتونه:

آیا $\tan 90^o$ او $\tan 270^o$ تعریف شوي دي؟

د $90^o = \frac{\pi}{2}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

څرنګه چې $P(0,1)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 90^o زاویې په دویمه ضلع واقع دی، نو:

$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = 1$

$$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^o = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^o = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan\frac{\pi}{2} = \tan 90^o = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} \text{ (تعریف شوی نه دی)} \qquad \cot\frac{\pi}{2} = \cot 90^o = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

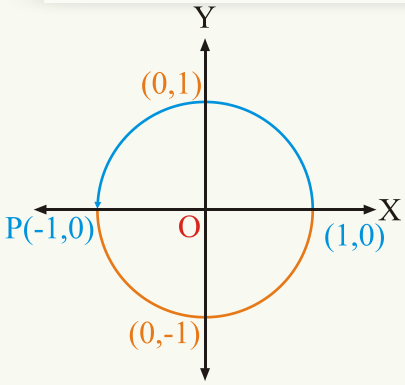
$$\sec\frac{\pi}{2} = \sec 90^o = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \text{ (تعریف شوی نه دی)} \qquad \csc\frac{\pi}{2} = \csc 90^o = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

فعالیت

آیا کولای شئ، ووایئ چې $\cot 0^o$ او $\csc 0^\circ$ تعریف شوي نه دي؟ ولې؟

د 180^o زاویې مثلثاتي نسبتونه: څرنګه چې د $p(-1,0)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 180° زاویې په دویمه ضلع باندې پروت دی، نو:

$r = 1 \qquad x = -1$ او $y = 0$ دی.



ketabton.com - The Digital Library

$$\sin 180^{o} = \sin \pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 180^{o} = \cos \pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

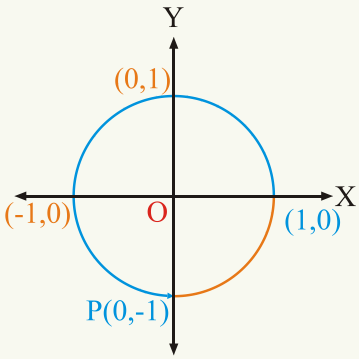
$$\tan 180^{o} = \tan \pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot 180^{o} = \cot \pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{(تعریف شوی نه دی)}$$

فعالیت

$\sec 180°$ او $\csc 180°$ پیداکړئ.

د $270^{o} = \frac{3\pi}{2}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

څرنګه چې د $P(0,-1)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 270^{o} زاویې پر دویمه ضلع واقع دی.



$$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = -1$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = \sin 270^{o} = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos \frac{3\pi}{2} = \cos 270^{o} = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan \frac{3\pi}{2} = \tan 270^{o} = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \text{(تعریف نه دی)} \qquad \cot \frac{3\pi}{2} = \cot 270^{o} = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec \frac{3\pi}{2} = \sec 270^{o} = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \text{ (تعریف نه دی)} \qquad \csc \frac{3\pi}{2} = \csc 270° = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

ketabton.com - The Digital Library

په یاد ولرئ چې د 360^{o} او 0^{o} زاویو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي دي، کولای شئ چې ووایئ ولې؟

د $360^{\circ}=2\pi$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

څرنګه چې د $p(1,0)$ نقطه د 360° د زاویې په دویمه ضلعه باندې پرته ده، نو:

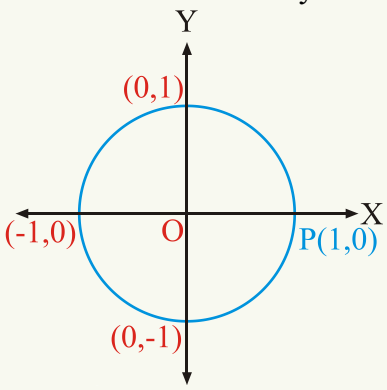
$x=1 \qquad y=0 \qquad r=1$

$$\sin 2\pi=\sin 360^{0}=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0 \qquad \cos 2\pi=\cos 360^{o}=\frac{x}{r}=\frac{1}{1}=1$$

$$\tan 2\pi=\tan 360^{o}=\frac{y}{x}=\frac{0}{1}=0$$

$$\cot 2\pi=\cot 360^{o}=\frac{x}{y}=\frac{1}{0}$$ (تعریف شوي نه دي)

$$\sec 2\pi=\sec 360^{o}=\frac{r}{x}=\frac{1}{1}=1 \text{ ،} \csc 2\pi=\csc 360^{o}=\frac{r}{y}=\frac{1}{0}$$ (تعریف شوي نه دي)



فعالیت

د 0^{o} زاویې ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$0^{o},90^{o},180^{o},270^{o}$ او 360^{o} زاویو ته محوري زاویې وایي چې د هرې زاویې دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوي نه دي.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې جدول ډک کړئ.

θ	0^o	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

2- $\tan 270° = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوي نه دي

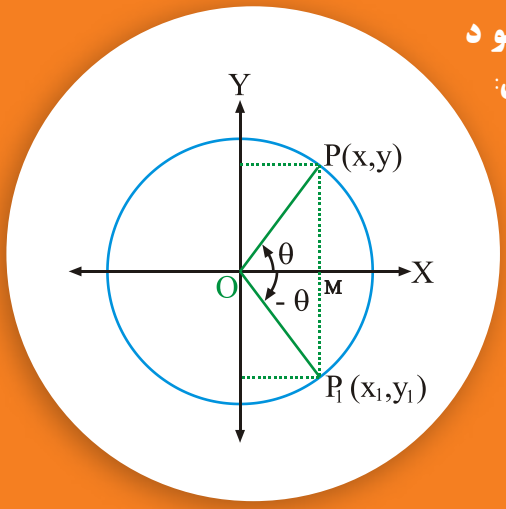
3- $\cos 90° = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوي نه دي

4- آیا $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{9\pi}{2}$ دی؟ ولې؟

ketabton.com - The Digital Library

د يوې حادې زاويې او نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې:



څرنګه چې مو په نهم ټولګي کې وليدل چې مثلثاتي جدول يوازې د يوې حادې مثبتې زاويې مثلثاتي نسبتونه را ښيي ددې لپاره چې د منفي او منفرجه زاويو مثلثاتي نسبتونه هم له مثلثاتي جدول څخه پيدا کړای شو، نو بايد ددې زاويو او د يوې حادې مثبتې زاويې د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې پيدا کړو.

د $\hat{\theta}$ او $-\hat{\theta}$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکې:

د θ حاده زاويه مثبت او له θ سره مساوي زاويه، د ساعت د عقربې د حرکت په جهت کې $-\theta$ زاويه په معياري حالت په مثلثاتي دايره کې رسموو.

د $P(x,y)$ ټکی د θ پر دويمه ضلع او د $P_1(x_1,y_1)$ ټکی د $-\theta$ د زاويې پر دويمه ضلع واقع دی.

څرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OMP}$ او $\overset{\Delta}{OMP_1}$ مثلثونه يو له بله سره مساوي دي.

$$x_1 = x \qquad |y_1| = |y| \qquad -y_1 = y \quad \Rightarrow \quad y_1 = -y$$

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

لومړی مثال: د $(-30^\circ = -\frac{\pi}{6})$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec(-30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

و ښیاست چې: $\csc(-\theta) = -\operatorname{cec}\theta$, $\operatorname{Sec}(-\theta) = \operatorname{Sec}\theta$.

دویم مثال: د $-\frac{3\pi}{2}$ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

فعالیت

د $-\frac{3\pi}{2}$ زاویې نور څلور مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

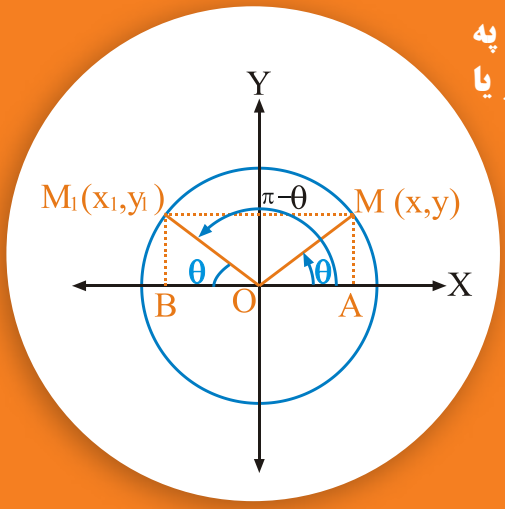
پوښتنې

1 – د -360^o یا -2π راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 – د -45° یا $-\frac{\pi}{4}$ راډیان د (-30°) او (-60°) زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3 – د -90° یا $-\frac{\pi}{2}$ راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library



د دوه زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې چې مجموعه او يا توپير يې π يا 180° وي

- آيا د 150° او 135° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيداکولای شئ؟
- آيا $\sin 135^\circ$ او $\sin 45^\circ$ سره مساوي دي؟ ولې؟
- آيا ويلای شئ چې $\sin 130^\circ$ او $\sin 50^\circ$ يو له بله سره څه اړيکه لري؟

دوې زاويې چې مجموعه يې π يا 180° وي، په پام کې نيسو. که θ يوه حاده مثبته زاويه وي بله زاويه $(\pi-\theta)$ ده. دا دواړه زاويې په مثلثاتي دايره کې په معياري حالت کې رسمو.

د $M(x,y)$ ټکی د θ د زاويې په دويمه ضلع باندې او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi-\theta)$ يا $(180-\theta)$ د زاويې پر دويمه ضلع باندې واقع دی. خرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OM_1B}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$(r=1) \quad |x_1|=|x| \quad -x_1=x \Rightarrow x_1=-x \quad y_1=y$$

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\frac{y_1}{r}=\frac{y_1}{1}=y_1=\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos(\pi-\theta)=\frac{x_1}{r}=\frac{-x}{r}=\frac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$$

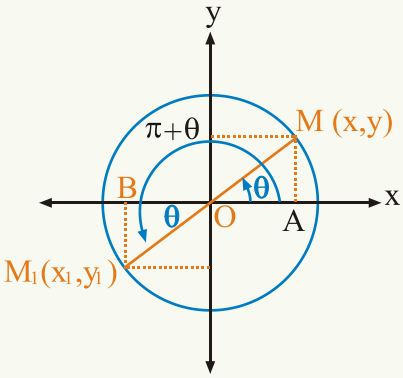
$$\tan(180^\circ-\theta)=\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعاليت

- د $(\pi-\theta)$ زاويې نور درې مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ.

د هغو دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې چې توپير يې 180° او يا π راډيان وي.

ketabton.com - The Digital Library



که حاده زاویه θ وي، بله زاویه $(\pi+\theta)$ کېږي.
د $M(x,y)$ ټکی پر مثلثاتي دایره باندې د θ پر دویمه ضلع او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi+\theta)$ یا $(180°+\theta)$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع دی.
څرنګه چې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OBM_1}$ مثلثونه سره مساوي دي: $x_1=-x$, $y_1=-y$

$$\sin(180^\circ+\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=x_1=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\frac{\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

لومړی مثال: د 120^o او 240^o زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^o=\sin(\pi-60^\circ)=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^o=\cos(\pi-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^o=\tan(\pi-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sin 240^o=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

فعالیت

د 120° او 240° زاویو نور درې، درې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

دویم مثال: د $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{4\pi}{3}$ زاویو $\sin$ ، $\cos$ او $\tan$ پیدا کړئ.

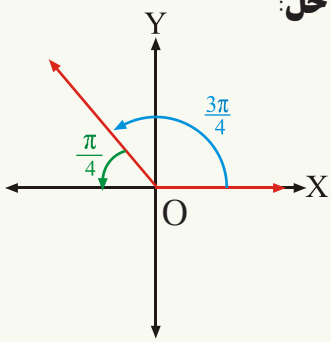
حل:

$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

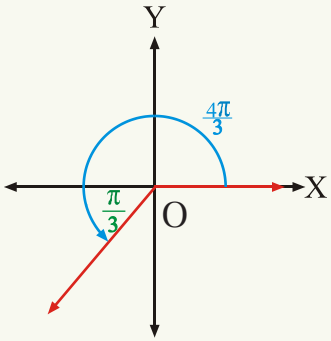


$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$



څرنګه چې $(180^\circ - \theta)$ د زاویې دویمه ضلع په دویمه ناحیه(ربع) کې پرته ده. په دویمه ناحیه کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت او د $(180^\circ - \theta)$ زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي او څرنګه چې د $(180+\theta)$ یا $(\pi + \theta)$ زاویې دویمه ضلع په دریمه ربع کې پرته ده، نو ددې زاویې $\tan\theta$ او $\cot\theta$ مثبت او د $(180+\theta)$ د زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1- د 225^{o} زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 210^{o} زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3- د 150^{o} زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

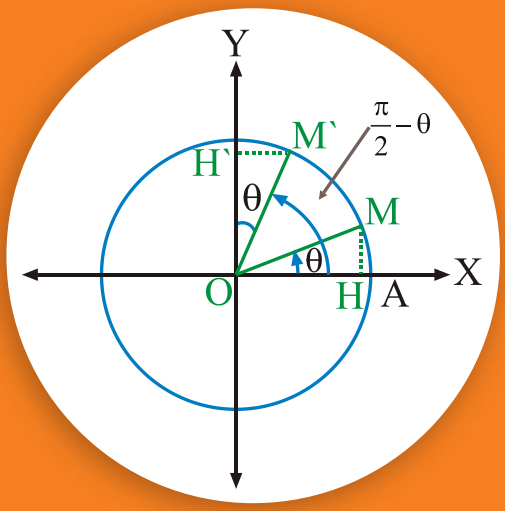
4- $\cot\frac{3\pi}{4}=?$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

5- $\sec(225^{\circ})=?$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ketabton.com - The Digital Library



د دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکې چې مجموعه يې 90^o يا $\frac{\pi}{2}$ راډيانه وي.

- آيا $\sin 60^o = \cos 30^o$ دی؟ ولې؟
- د $150°$ او $60°$ زاويو مثلثاتي نسبتونه سره څه اړيکه لري؟

د $A\hat{O}M$ زاويه θ او د $A\hat{O}M'$ زاويه له $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ څخه عبارت ده چې د θ او $\frac{\pi}{2}-\theta$ زاويو مجموعه 90^o يا $\frac{\pi}{2}$ کېږي. څرنګه چې د ΔOHM او $\Delta OH'M'$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$\overline{OH'} = \overline{OH}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$$

$$\overline{H'M'} = \overline{HM}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$$

فعاليت

وښياست چې: $\sec(90-\theta) = \csc\theta$ او $\csc(90-\theta) = \sec\theta$ دي.

ketabton.com - The Digital Library

لومړی مثال: که:

$\sin 23^\circ = 0{,}3907 \qquad \cos 23^\circ = 0{,}9205 \qquad \tan 23^\circ = 0{,}4245$

$\cot 23^\circ = 2{,}356 \qquad \sec 23^\circ = 1{,}086 \qquad \csc 23^\circ = 2{,}559$

وي، د 67° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$\sin 67^\circ = \cos 23^\circ = 0.9205 \qquad \cot 67^\circ = \tan 23^\circ = 0.4245$

$\cos 67^\circ = \sin 23^\circ = 0.3907 \qquad \sec 67^\circ = \csc 23^\circ = 2.559$

$\tan 67^\circ = \cot 23^\circ = 2.356 \qquad \csc t67^\circ = \sec 23^\circ = 1.086$

فعاليت

که:

$\sin 8^\circ \ 10' = 0.1421 \qquad \cos 8^\circ \ 10' = 0.9899$

$\tan 8^\circ \ 10' = 0.1435 \qquad \cot 8^\circ \ 10' = 6.968$

$\sec 8^\circ \ 10' = 1.010 \qquad \csc 8^\circ \ 10' = 7.040$

وي، د $81^\circ \ 50'$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

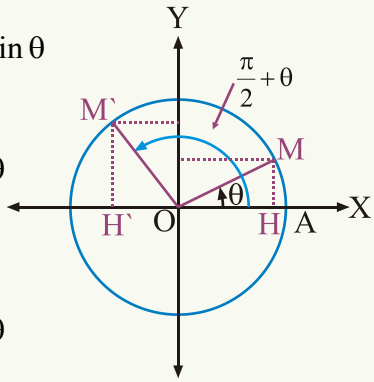
د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې توپير يې $\frac{\pi}{2}$ يا 90° وي په لاندې ډول دي:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \sin[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$



ketabton.com - The Digital Library

$$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

دويم مثال: د 120^o زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\sin 120^o=\sin(90^o+30^o)=\cos 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^o=\cos(90^o+30^o)=-\sin 30^o=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^o=\tan(90^o+30^o)=-\cot 30^o=-\sqrt{3}$$

$$\cot 120^o=\cot(90^o+30^o)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^o=\sec(90^\circ+30^\circ)=-\csc 30^o=-2$$

$$\csc 120^o=\csc(90^\circ+30^\circ)=\sec 30^o=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta \qquad \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta \qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta \qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$$

$$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)=\csc\theta \qquad \sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sec\theta \qquad \csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$$

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1- د 135^{o} زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

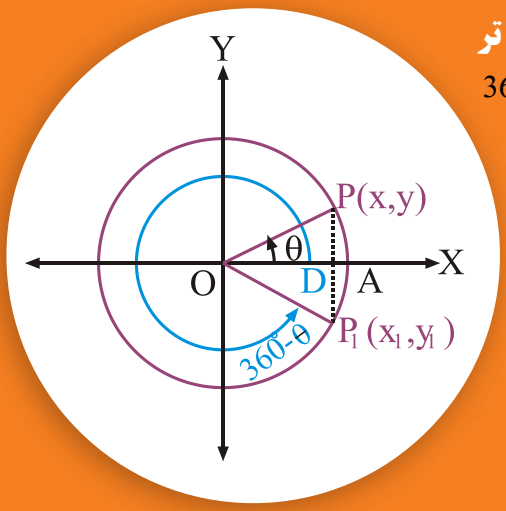
3- $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=?$

a) $\cos x$ b) $\sin x$ c) $-\cos x$ d) $-\sin x$

4- $\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=?$

a) $\tan\theta$ b) $-\tan\theta$ c) $\cot\theta$ d) $-\cot\theta$

ketabton.com - The Digital Library



د هغه زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکې چې مجموعه یې 360° یا 2π وي.

آیا ښودلای شئ چې

$\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$ او

$\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$ اړیکې سمې دي؟

په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OPD}$ او $\overset{\Delta}{OP_1D}$ مثلثونو له مساوي والی څخه لرو چې:

$x_1 = x \quad |y_1| = |y|$ $\qquad -y_1 = y \Rightarrow y_1 = -y$

$\sin(360^\circ-\theta) = y_1 = -y = -\sin\theta$

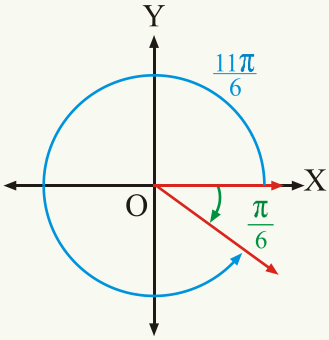
$\cos(360^\circ-\theta) = x_1 = x = \cos\theta$

$$\tan(360^\circ-\theta) = \frac{\sin(360^\circ-\theta)}{\cos(360^\circ-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

فعالیت

په همدې ډول د θ او $360^\circ-\theta$ زاویو د $\sec,\cot$ او $\csc$ د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې پیدا کړئ او د θ او $(-\theta)$ زاویو مثلثاتي نسبتونو له اړیکو سره یې پرتله کړئ.

مثال: د 330° یا $\frac{11\pi}{6}$ راډیانه زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.



حل:

ketabton.com - The Digital Library

$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sin 330^{o}=\sin(360^{o}-30^{0})=-\sin 30^{o}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cos 330^{o}=\cos(360^{o}-30^{o})=\cos 30^{o}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan(2\pi-\frac{\pi}{6})=\tan 330^{o}=\tan(360^{o}-30^{o})=-\tan 30^{o}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{11\pi}{6}=\cot(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cot 330^{o}=\cot(360^{o}-30^{o})=-\cot 30^{o}=-\sqrt{3}$$

$$\sec\frac{11\pi}{6}=\sec(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sec 330^{o}=\sec(360^{o}-30^{o})=\sec 30^{o}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

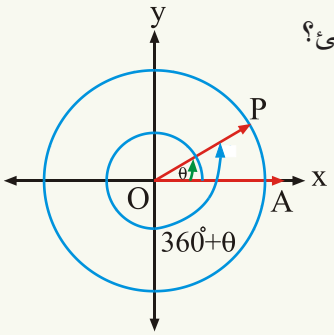
$$\csc\frac{11\pi}{6}=\csc(2\pi-\frac{\pi}{6})=\csc 330^{o}=\csc(360^{o}-30^{o})=-\csc 30^{o}=-2$$

فعالیت

د 315^{o} زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د کوټرمینل زاویو مثلثاتي نسبتونه:

- آیا $\sin 450^{o}$ ، $\tan 390^{o}$ او $\csc 450^{\circ}$ پیدا کولای شئ؟
- آیا $\sin 90^{o}$، $\sin 450^{\circ}$ او $\sin 790^{\circ}$ سره برابر دي ؟ ولې؟



په معیاري حالت کې د θ حاده زاویې او $360^{\circ}+\theta$ زاویو دویمې ضلعې یو پر بل پرتې دي، نو:

$$\sin(360^{\circ}+\theta)=\sin\theta \qquad \cos(360^{\circ}+\theta)=\cos\theta$$

$$\tan(360^{\circ}+\theta)=\tan\theta \qquad \cot(360^{\circ}+\theta)=\cot\theta$$

$$\csc(360^{\circ}+\theta)=\csc\theta \qquad \sec(360^{\circ}+\theta)=\sec\theta$$

ketabton.com - The Digital Library

لومړی مثال: د 405° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 405^\circ = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^\circ = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^\circ = \tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 405^\circ = \sec(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sec(360^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\csc 405^\circ = \csc(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \csc(360^\circ + 45^\circ) = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

دویم مثال: د 1500° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin 1500^\circ = \sin(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1500^\circ = \cos(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 1500^\circ = \tan(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 1500^\circ = \cot(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 1500^\circ = \sec(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 1500^\circ = \csc(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

دریم مثال: د 900° او -930° زاویو $\sin$ ، $\cos$ او $\tan$ پیدا کړئ.

حل

ketabton.com - The Digital Library

$$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

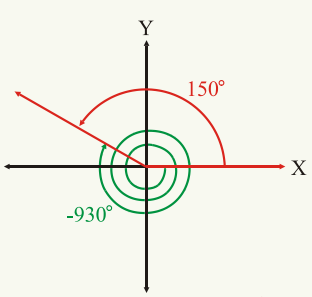
$$\cos(-930^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-930^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

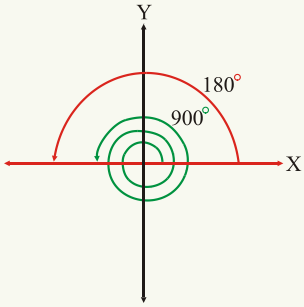
$$\sin 900^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 900^\circ = \cos(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 900^\circ = \tan(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \tan 180^\circ = 0$$



$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$



$900^\circ = (2\cdot 360^\circ + 180^\circ)$

څلورم مثال: د $-\frac{5\pi}{2}$ او $\frac{7\pi}{3}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$-\frac{5\pi}{2} = (-2\pi - \frac{\pi}{2})$$

حل:

$$\sin(-\frac{5\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 \qquad \sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \cos\frac{7\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-\frac{5\pi}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{0} \qquad \tan\frac{7\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

تعریف شوی نه دی

$$\cot(-\frac{5\pi}{2}) = \cot(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot(\frac{7\pi}{3}) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ketabton.com - The Digital Library

فعالیت

د $\frac{7\pi}{3}$ او $(-\frac{5\pi}{2})$ زاویو نور دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(2\pi-\theta)=\sin(360^{o}-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(2\pi-\theta)=\cos(360^{o}-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi-\theta)=\tan(360^{o}-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(2\pi-\theta)=\cot(360^{o}-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sec(2\pi-\theta)=\sec(360^{o}-\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi-\theta)=\csc(360^{o}-\theta)=-\csc\theta$$

$$\sin(2\pi+\theta)=\sin(360^{\circ}+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(2\pi+\theta)=\cos(360^{\circ}+\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi+\theta)=\tan(360^{\circ}+\theta)=\tan\theta$$
$$\cot(2\pi+\theta)=\cot(360^{\circ}+\theta)=\cot\theta$$
$$\sec(2\pi+\theta)=\sec(360^{\circ}+\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi+\theta)=\csc(360^{\circ}+\theta)=\csc\theta$$

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1- د 480^o او 390^o زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2- د 600^o او 300^o زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3- د 1830^o او د $(1095^\circ\ 20')$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

4- د $\frac{25\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

5- د $\frac{5\pi}{3}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

6- د $\frac{41\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

7- د $780^o, -300^o$ او 420^o زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

8- $\cos(-3\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

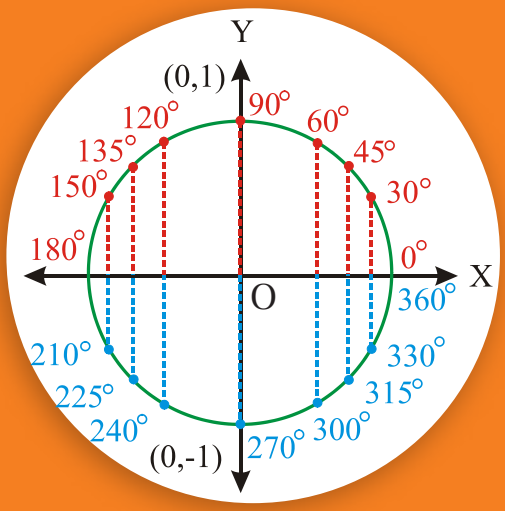
9- $\cos(-15\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) درې واړه سم نه دي.

10- $\sin(-1110^\circ) = ?$

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ketabton.com - The Digital Library



- آیا کولای شئ وویاست چې د $f(x)=\sin x$ او $f(x)=\cos x$ د تابعګانو د تناوب دوره څومره ده؟
- آیا ویلای شئ چې د $f(x)=\sin x$ او $f(x)=\cos x$ د توابعو domain کوم عددونه دي؟

د $f(x)=\sin x$ تابع د ګراف رسول (graph of the sine function):

د $f(x)=\sin x$ د تابع د تعریف ناحیه (domain) د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range یې $[-1,1]$ دی. د دې تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه پوهیږئ چې د یوې تابع د تعریف ساحه ټول هغه حقیقي عددونه (Real numbers) دي چې تابع په کې تعریف شوی وي.

د هر حقیقي عدد x لپاره یوه د x راډیان زاویه او له مثلثاتي دایرې سره د x راډیان د زاویې د تقاطع ټکی، هر وخت تعریف شوی دی. که x د راډیان په حساب وي، ددې ټولو زاویو اندازه $2k\pi + x$ راډیان ده، نو د sine او cosine د تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

څرنګه چې sinx او cosx په مثلثاتي دایره باندې د یوه ټکي وضعیه کمیات دي، نو د $f(x)=y=\sin x$ او $f(x)=y=\cos x$ د تابع ګانو Range د (1) او (−1) تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ انټروال د $y=\sin\theta$ او $y=\cos\theta$ د تابع ګانو Range دی.

فعالیت

وښیاست چې $-1\le \sin\theta,\cos\theta \le 1$ دی.

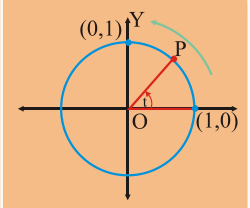
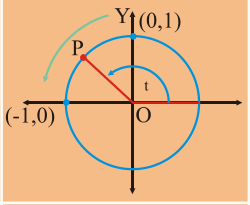
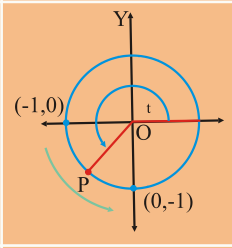
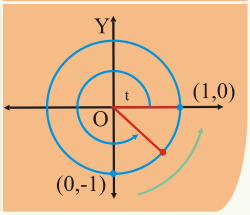
باید په یاد ولرو چې د f تابع ته متناوبه تابع ویل کېږي، که چېرې د t یو عدد د صفر خلاف موجود وي، په دې شرط چې که لومړی $x\in D_F$ وي $x+t$ او $x-t$ هم د f د تابع د تعریف په ساحه (domain) کې شامل وي او $f(x+t)=f(x)$ وي.

تر ټولو کوچنی داسې عدد، لکه: (t) چې د $f(x+t)=f(x)$ په اړیکه کې صدق وکړي. دا د (t)

ketabton.com - The Digital Library

عدد د f د تابع د اصلي تناوب په نوم یادېږي. که (t) د f د تابع د تناوب دوره وي. نو (-t) هم د f د تابع د تناوب دوره ده. څرنګه چې پوهېږئ $\sin(x+2K\pi)=\sin x$ او $\cos(x+2K\pi)=\cos x$ دی چې K یو تام عدد دی، نو د sinx او cosx توابع متناوبې توابع دي او تر ټولو کوچنی عدد چې په پورتنیو اړیکو کې صدق کوي 2π دی، نو د دې دواړو توابعو اصلي تناوب 2π دی.

له شکل سره سم په معیاري حالت کې یو د $\hat{t}$ راډیان زاویه په پام کې ونیسئ په داسې حال کې چې د t د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د y مختصه له sin t څخه عبارت ده. $h(t)=\sin t$ د t او sint تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وګورئ:

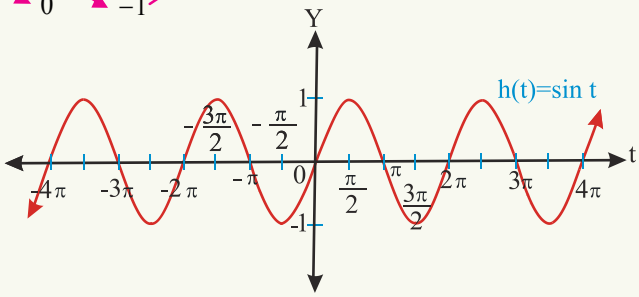
اړونده شکل	sin t	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له (1,0) څخه تر (0,1)	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې
	له یوه څخه تر صفره پورې تناقص کوي	له (0,1) څخه تر (−1,0)	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې
	له صفره څخه تر -1 پورې تناقص کوي	له (−1,0) څخه تر (0,−1)	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې
	له -1 څخه تر صفره پورې تزاید کوي	له (0,−1) څخه تر (1,0)	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې

ketabton.com - The Digital Library

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي په نتيجه کې $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی.

لاندې جدول او شکل وګورئ:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$h(t) = \sin t$	0	1	0	−1	0



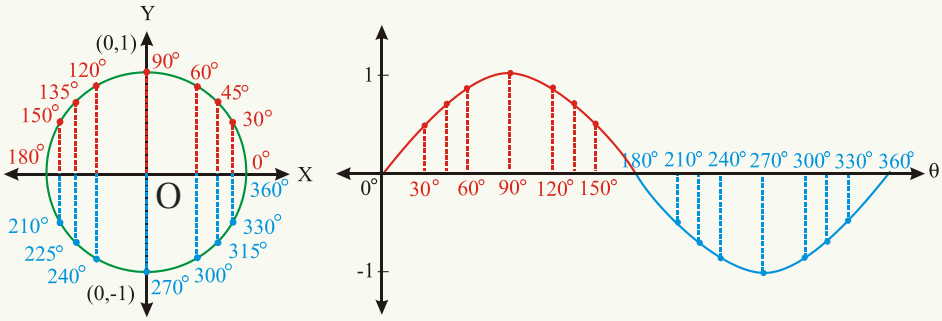
او یا کولای شو، که د یو دوران زاویې د درجې په حساب وي، د $\sin t$ تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وښایو:

$h(t) = \sin t$

t	واقعي	تقريبي
0°	0	0.00
30°	$\frac{1}{2}$	0.50
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
90°	1	1.00
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
150°	$\frac{1}{2}$	0.50

180°	0	0.00
210°	$-\frac{1}{2}$	−0.50
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−0.71
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−0.87
270°	−1	−1.00
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−0.87
315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−0.71
330°	$-\frac{1}{2}$	−0.50
360°	0	0.00

ketabton.com - The Digital Library



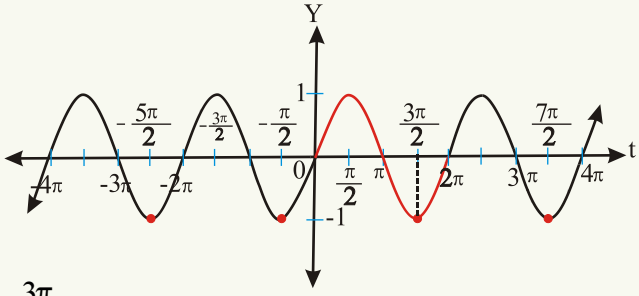
دې ته په پام سره چې $\sin t$ د تابع د تناوب دوره 2π ده، نو $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی، نو د $\sin t$ د تابع ګراف په $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$، $[-2\pi,0]$ او داسې نورو انټروالونو کې یو شان دی.

فعالیت

په $4\pi, 2\pi, \pi, 0, -\pi, -2\pi, -3\pi$ او -4π کې د $\sin t$ د تابع قیمتونه پیدا کړئ.

لومړی مثال: د t هغه ټول قیمتونه وښیاست چې د $\sin t$ قیمت په کې (-1) وي.

حل: څرنګه چې د sint قیمت د (1) او (-1) تر منځ دی او په هر 2π کې په افقي محور باندې تکرارېږي، نو بې شمېره قیمتونه شته چې په هغه کې د sint قیمت 1 - دی. د نمونې په ډول خو ټکي په سور رنګ په شکل کې ښودل شوي دي.

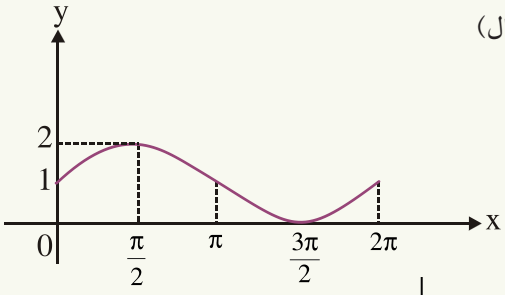


د sint په ګراف کې له صفر څخه تر 2π پورې یوازې یو ټکی(نقطه) د $(\frac{3\pi}{2},-1)$ شته چې په سره رنګ ښودلی شوي دی. ټول هغه قیمتونه چې sint په کې (-1) دی، له $t=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ څخه عبارت دي چې k یو تام عدد دی.

ketabton.com - The Digital Library

دویم مثال: د $y = \sin x + 1$ تابع ګراف په $[0,2\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: ددې لپاره د تابع د تعریف ساحه $[0,2\pi]$ اوRange یې $[0,2]$ دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدا بس دی چې د $y = \sin x$ ګراف رسم کړو او د یوه واحد په اندازه یې د Y پر محور پورته خوا ته انتقال کړو.(عمودی انتقال)



x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = \sin x + 1$	1 ↗	2 ↘	1 ↘	0 ↗	1

د sine او cos*ine* د تابع ګانو پریود او لمن(Amplitude):

که $b > 0$ وي د $f(t) = \sin bt$ او $g(t) = \cos bt$ ګرافونه، د صفر او 2π تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، ددې دواړو تابع ګانو پریود $\frac{2\pi}{b}$ دی($b > 0$). د مثال په ډول د $y = \cos 3t$ پریود $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$ دی او د $y = \sin \frac{1}{2}t$ تابع پریود $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ دی او د $y = a\sin bt$ او $y = a\cos bt$ د تابعګانو لمن د $|a|$ دی($a \neq 0$)، د مثال په ډول د $y = -2\sin 4t$ لمن $|a| = |-2| = 2$ او پریود یې $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ دی.

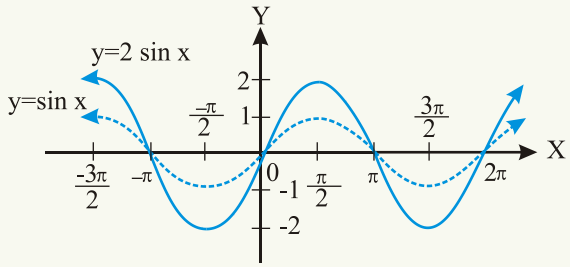
دریم مثال: د $y = 2\sin x$ تابع ګراف رسم او د $y = \sin x$ د تابع له ګراف سره یې پرتله کړئ.

حل: د ددې تابع ګراف توپیر د $y = \sin x$ د تابع له ګراف سره دا دی چې $-2 \le y \le 2$ دی چې د 2 عدد ته لمن(amplitude) وایي. ځکه چې د $|2| = 2$ دی. ددې تابع پر یو د هم 2π

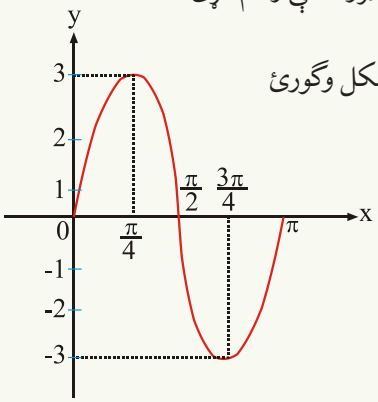
ketabton.com - The Digital Library

دی، لاندې جدول او شکل وګورئ:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	-1	0
2 sin x	0	2	0	-2	0



څلورم مثال: د $y = 3\sin 2x$ تابع ګراف په $[0,\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.



حل: د دې تابع پریود $\frac{2\pi}{2} = \pi$ دی، لاندې جدول او شکل وګورئ

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
2x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0
$3\sin 2x$	0	3	0	-3	0

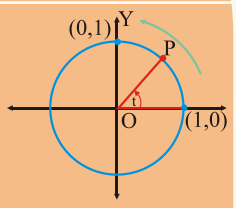
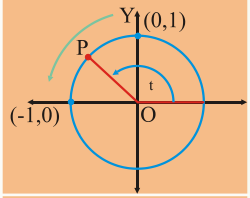
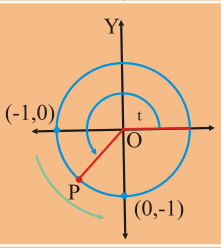
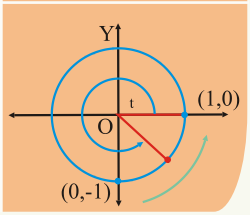
د sint د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، د sint د تابع ګراف د y محور په (0،0) او د X محور په (0.0)، π، 2π، 3π، 4π ... او $-\pi$، -2π، -3π -4π او نورو کې قطع کوي، د $\sin t$ تابع له صفر څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متزایده، له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې متناقصه، له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې متزایده ده.

د $f(t) = \cos t$ د تابع ګراف (Graph of the cosine function)

د دې تابع د تعریف ساحه(domain) هم د ټولو حقیقي عددونو ست دی او Range یې $[-1,1]$

ketabton.com - The Digital Library

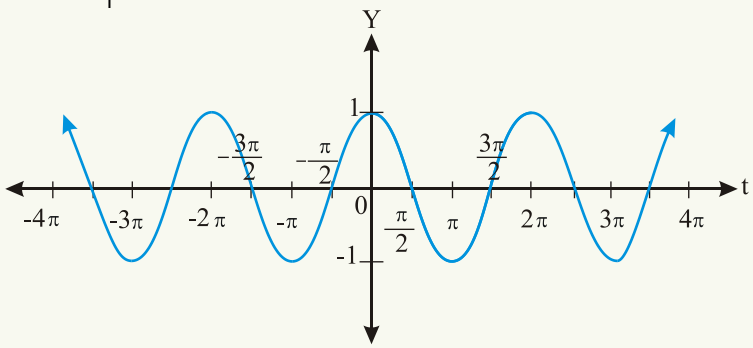
دی، د cosx د تابع د تناوب دوره هم 2π ده، له شکل سره سم په معیاري حالت(Standard position) کې د $\hat{t}$ رادیان یوه زاویه په پام کې ونیسئ چې د $\hat{t}$ د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د x مختصه د cost خخه عبارت ده. $f(t)=\cos t$ د تابع ګراف د رسمولو لپاره لاندې جدول او شکلونه وګورئ.

اړونده شکل	cost یا د p ټکي د x مختصه	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له یوه خخه ترصفره پورې تناقص کوي	له (1,0) خخه تر (0,1) پورې	له 0 خخه تر $\frac{\pi}{2}$
	له صفر خخه تر 1- پورې تناقص کوي.	له (0,1) خخه تر (−1,0) پورې	له $\frac{\pi}{2}$ خخه تر π
	له1- خخه تر صفره پورې تزاید کوي.	له (−1,0) خخه تر (0,−1) پورې	له π خخه تر $\frac{3\pi}{2}$
	له صفر خخه تر یوه پورې تزاید کوي	له (0,−1) خخه تر (1,0) پورې	له $3\frac{\pi}{2}$ خخه تر 2π

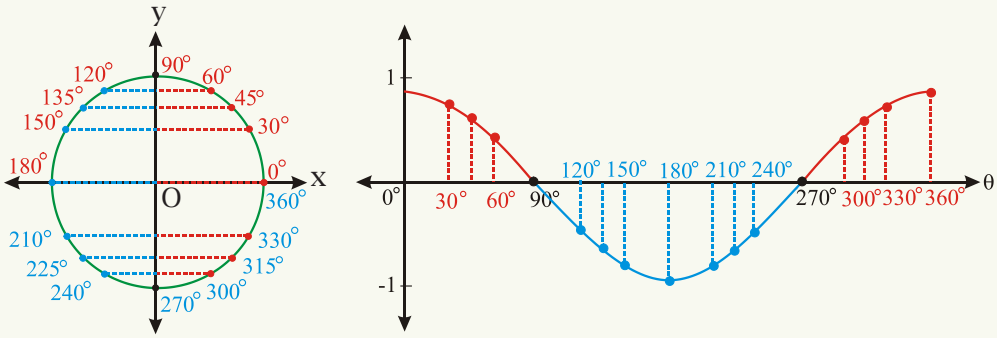
ketabton.com - The Digital Library

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي. په نتیجه کې $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی. لاندې جدول او شکل وګورئ.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t)=\cos t$	1	0	-1	0	1



کولای شو، د درجې په حساب د $f(t) = \cos t$ تابع ګراف هم رسم کړو:



د $f(t) = y = \cos t$ تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه چې د cost د تابع ګراف د $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$ او $[-2\pi,0]$ او داسې نورو کې یو شان دی.

د cost د تابع د تعریف ساحه د حقیقي عددونو ست او Range یا د y قیمت یې د 1 او -1 تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ انټروال د cost د تابع Range دی.

ketabton.com - The Digital Library

$f(t)=\cos t$

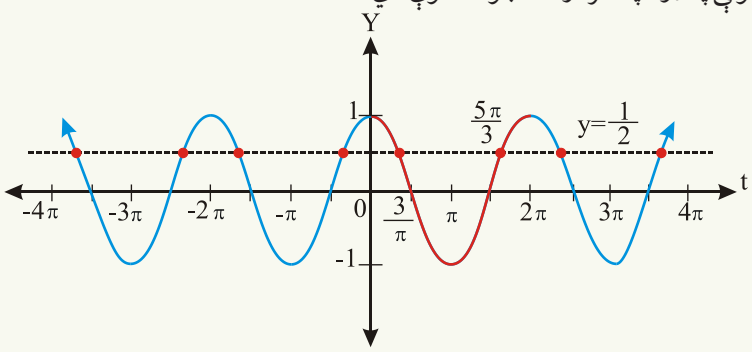
t	واقعي	تقريبي
0°	1	1.00
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{1}{2}$	0.50
90°	0	0.00
120°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
180°	-1	-1.00
210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
270°	0	0.00
300°	$\frac{1}{2}$	0.50
315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.711
330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
360°	1	1.00

فعالیت

د $g(t)=\cos t$ تابع ګراف د t په کومو قیمتونو کې د y محور قطع کوي؟

لومړی مثال: د t ټول هغه قیمتونه وښیاست چې د cost د تابع قیمت په کې له $\frac{1}{2}$ سره مساوی وي.

حل: خرنګه چې بې شمېره زاویې شته دی چې په هغه قیمتونو کې $y=\cos t=\frac{1}{2}$ دي، په شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول په سره رنګ ښودل شوي دي.



ketabton.com - The Digital Library

د $[0,2\pi]$ په انټروال کې داسې دوه ټکي شته چې $\cos t = \frac{1}{2}$ شي چې له $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ او $(\frac{5\pi}{3},\frac{1}{2})$ خخه عبارت دي. ټول هغه قیمتونه چې په هغو کې $\cos t = \frac{1}{2}$ وي، له $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ یا $t = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ خخه عبارت دي. چې k یو تام عدد دی.

د sin او cos تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، $y = \cos t$ تابع له صفره خخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{\pi}{2}$ خخه تر π هم متناقصه ده. لیکن له π خخه تر $\frac{3\pi}{2}$ متزایده او له $\frac{3\pi}{2}$ خخه تر 2π پورې هم متزایده ده. د $y = \sin t$ او $y = \cos t$، د تابع ګانو پریود 2π دی، په دې معنا چې: $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$, $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی.

د $f(t) = \sin t$ تابع طاقه او $f(t) = \cos t$ تابع یوه جفته تابع ده، ځکه چې: $\sin(-t) = -\sin t$ او $\cos(-t) = \cos t$ دی یا د $\sin t$ د تابع ګراف نظر مبداء ته متناظر او د $\cos t$ تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر دی.

پوښتنې

1- د لاندې تابع ګانو ګرافونه په راکړل شوو انټروالونو کې رسم کړئ.

$g(t) = \cos t : [\pi,3\pi]$ $\quad$ $f(t) = \sin t : [2\pi,6\pi]$

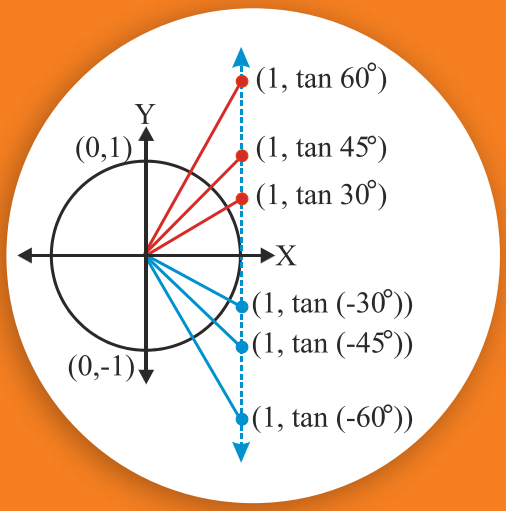
2- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\sin t = 1$ دی؟

3- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\cos t = 0$ دی؟

4- د $g(t) = -\frac{1}{2}\sin t$ د تابع ګراف په $[-2\pi,6\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

د تانجانټ د تابع ګراف



آیا پوهېږئ چې د tan تابع یوه متزایده تابع ده؟

څرنګه چې $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ دی، په دې شرط چې $\cos t \neq 0$ وي، نو د tan تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له هغو زاویو څخه چې cos یې صفر وي، د $\frac{\pi}{2}$ او $\frac{3\pi}{2}$ او یا $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ او $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ د زاویو کوساینونه صفر دي.

څرنګه چې د $\frac{\pi}{2}$ زاویې د دویمې ضلعې د تقاطع ټکی له مثلثاتي دایرې سره د $(0,1)$ ټکی دی، نو د $\frac{\pi}{2}$ زاویې سره دیو پوره دوران (2π) په جمع کولو سره د $\ldots -\frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \ldots$ زاویې په لاس راځي چې ددې زاویو د tan قیمتونه تعریف شوي نه دي او د $t = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ مستقیم خطونه د tan د تابع عمودي مجانبونه دي.

په همدې ډول د $(0,-1)$ ټکی د $\frac{3\pi}{2}$ زاویې پر دویمه ضلع واقع دي، د $\frac{3\pi}{2}$ له زاویې سره د یو پوره دوران (2π) له جمع کولو څخه د $\ldots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \ldots$ زاویې په لاس راځي چې د tan د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

یا د tan د تابع د تعریف په ناحیه(domain) کې ټول حقیقي عددونه شامل دي پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه، او یا $IR - \{t / t \in IR, t = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ او د ټانجانټ د تابع Range د

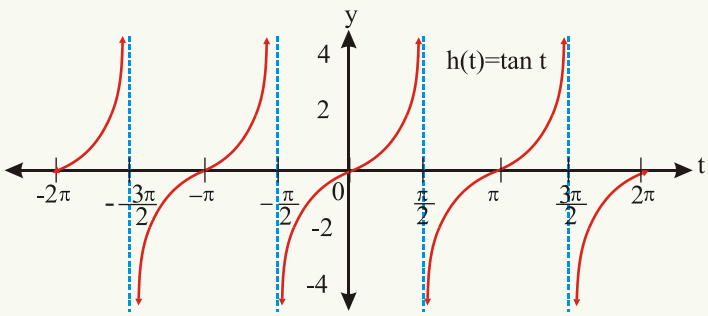
ketabton.com - The Digital Library

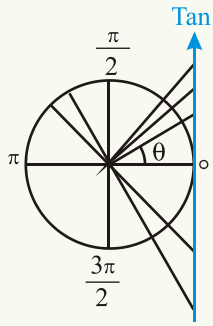
ټولو حقیقي عددونو سټ دی. د ټانجانټ د تابع پریود π دی. د t رادیان زاویې لپاره لرو چې:

$\tan(t \pm \pi) = \tan t$ دی. خه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزاید وکړئ، نو $\tan t$ هم له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي ($\tan\frac{\pi}{2}$ تعریف شوی نه دی). په د ویمه ربع کې هم خه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تزاید وکړي، $\tan t$ هم له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي.

په همدې ډول په دریمه ناحیه کې هغه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزاید وکړي، د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي. په څلورمه ناحیه کې د $\hat{t}$ زاویې ټانجانټ له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي. لاندې جدول د ټانجانټ د تابع تحول ښکاره کوي، همدارنګه د دې تابع تحول په لاندې شکلونو کې ښودل شوی دی:

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\pi/2$		2π
$\tan t$	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0

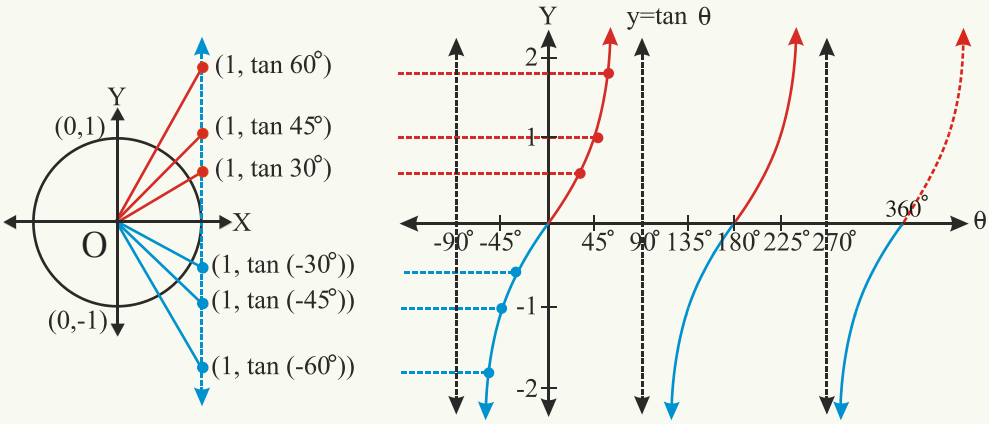




که θ د درجې په حساب وي، د ټانجانټ تابع قیمتونه او شکل په لاندې ډول وګورئ.

	θ	-90° / 90°	-60° / 120°	-45° / 135°	-30° / 150°	0° / 180°	30° / 210°	45° / 255°	60° / 240°
$\tan\theta$	حقیقی	تعریف شوی نه دی	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	تقریبی	تعریف شوی نه دی	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73

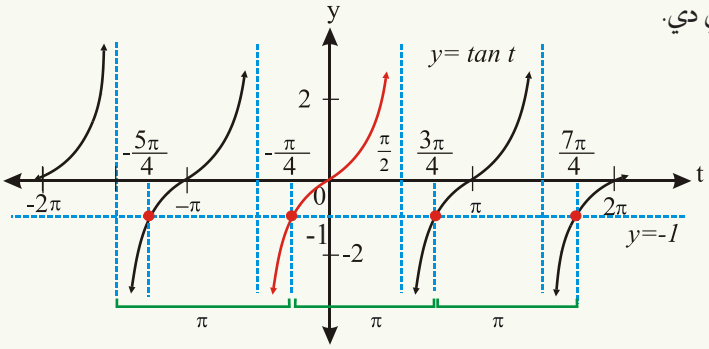
ketabton.com - The Digital Library



څرنګه چې د $(\pi,2\pi)$ او د $(0,\pi)$ په فاصله کې د ټانجانټ د تابع تغیرات یو شی دي، نو د tan تابع پریود π دی او د tan تابع یوه متزایده تابع ده. له بلې خوا که $b>0$ وي، د $f(t)=\tan bt$ تابع د $\frac{\pi}{2}$ او $-\frac{\pi}{2}$ تر منځ یوه دوره (Cycle) جوړوي، د دې تابع پریود $\frac{\pi}{b}$ دی. د مثال په ډول د $f(t)=\tan 2t$ پریود $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ دی.

مثال: د t ټول هغه قیمتونه پیدا کړئ چې $\tan t=-1$ وي.

حل: څرنګه چې د $\tan t$ قیمتونه د π په فاصله کې تکرارېږي، نو د t بې شمېره قیمتونه شته چې $y=\tan t$ له 1 - سره مساوي وي چې په لاندې شکل کې خو ټکي د نمونې په ډول ښودل شوي دي.



څرنګه چې د $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ په انټروال کې یوازې د $(-1,-\frac{\pi}{4})$ یو ټکی لري، نو د t ټول قیمتونه چې $\tan t=-1$ دي مساوي دی په: $t=-\frac{\pi}{4}+K\pi$ (K یو تام عدد دی).

ketabton.com - The Digital Library

د tan تابع هر وخت متزايده ده او پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب له زاويو څخه پرته په ټولو حقيقي عددونو کې تعريف شوې ده. او د تناوب دوره يې π ده، ځکه چې: $\tan(t \pm \pi) = \tan(t)$.

څرنګه چې $\tan(-t) = -\tan t$ دی، نو $y = \tan t$ يوه طاقه تابع ده او د $\frac{\pi}{2}$ په تام مضرب کې عمودي محانب هم لري.

د sine ، cosine او tangent تابع ګانو د مشخصو لنډيز:

جفته / طاقه	پريود	Range	Domain	سمبول	تابع
طاقه	2π	ټول حقيقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	د ټولو حقيقي عددونو سټ	$f(t) = \sin t$	$\sin e$
جفته	2π	ټول حقيقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	ټول حقيقي عددونه	$f(t) = \cos t$	$\cos ine$
طاقه	π	ټول حقيقي عددونه	ټول حقيقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	$f(t) = \tan t$	$\tan gent$

يا په بل عبارت:

$$D_{\sin} = D_{\cos} = IR \qquad R_{\sin} = R_{\cos} = [-1,1]$$

$$D_{\tan} = \{x \in IR \ : \ \cos x \neq 0\}$$

پوښتنې

1 – د t د زاويې په کوم قيمت د $\tan t$ د تابع قيمت په $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ انټروال کې له صفره کوچنی دی؟

2 – د $y = 3\tan\theta$ تابع ګراف رسم کړئ.

3 – د $\tan\theta$ تابع پريود مساوي دی په:

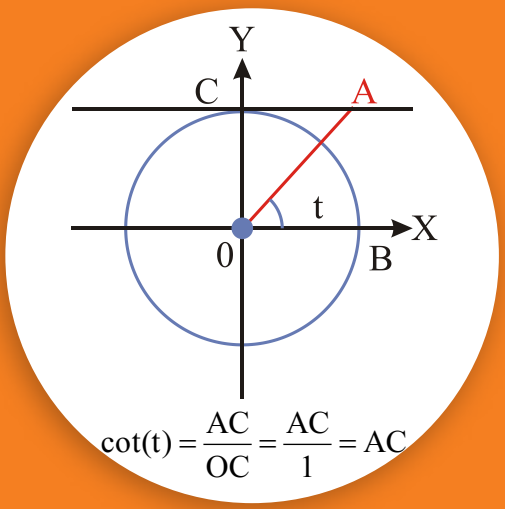
a) 2π b) π c) 3π d) دري واړه سم نه دي

4 – که د θ زاويه له 0^o څخه تر 90^o پورې تحول وکړي، د $\tan\theta$ تحول عبارت دی له:

a) $-\infty$ له 1-څخه تر b) $+\infty$ له صفر څخه تر c) $+\infty$ له $-\infty$ څخه تر

ketabton.com - The Digital Library

د کوټانجانټ د تابع ګراف



- آیا د کوټانجانټ د تابع د تناوب دوره پېژنئ؟
- که $\sin t = 0$ وي، آیا $\cot(t)$ تعریف شوی دی؟ که نه، ولې؟

خرنګه چې $\cot(t)=\frac{\cos t}{\sin t}$ دی، که $\sin t = 0$ وي، $\cot(t)$ تعریف شوی نه دی چې t یو تام عدد وي.

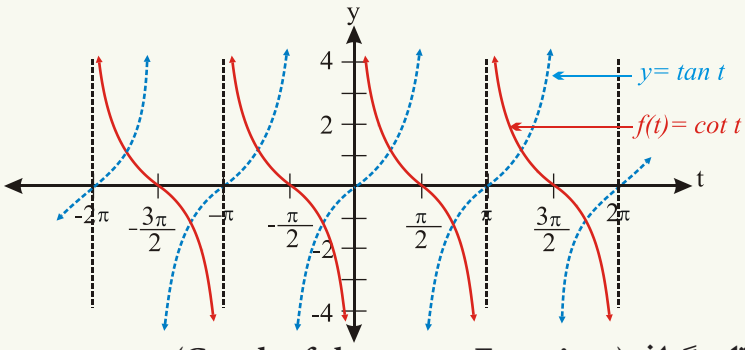
د cot تابع د تعریف ساحه (domain) ټول حقیقي عددونه دي پرته د π له تام مضرب څخه، یا په بل عبارت $\mathrm{IR}-\{t/t\in \mathrm{IR}, t=k\pi, k\in z\}$ یا $\mathrm{dom}_{\cot}=\{t\in \mathrm{IR}/\sin t\neq 0\}$ او د دې تابع Range ټول حقیقي عددونه دي.

د $f(t)=\cos(t)$ د تابع ګراف د π په تام مضرب کې عمودي مجانب (Vertical asymptotes) لري $(t=k\pi)$ چې k یو تام عدد دی.

څه وخت چې د t زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې زیاته شي، د $\cot(t)$ قیمت له $+\infty$ څخه تر صفره پورې کمېږي ($\cot 0°$ نه دی تعریف شوی) په دویمه ناحیه کې څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې زیاته شي، $\cot(t)$ له صفره تر $-\infty$ پورې کمېږي (تناقص کوي). دې ته په پام سره چې د cot د تابع د تناوب دوره π ده، نو په دریمه او څلورمه ناحیه کې د $\cot(t)$ د تابع تغیرات د لومړۍ او دویمې ناحیې په شان دي. پورتنی حقیقت په لاندې جدول او شکل کې لیدلای شئ.

t	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$\cot t$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$

ketabton.com - The Digital Library



د secant(t) تابع ګراف (Graph of the secant Function)

د sec (t) او cos (t) ګرافونه يو له بله سره څه اړيکه لري؟

د $f(t)=\sec(t)$ تابع ګراف د $\cos t$ تابع له ګراف سره معکوسه اړيکه لري، ځکه چې $\sec(t)=\frac{1}{\cos(t)}$ دی. که $\sec t$ د $\frac{1}{\cos t}$ په شکل په پام کې ونيسو، څه وخت چې د t زاويې قيمت له صفر څخه تر $\frac{\pi}{2}$ يا $90°$ پورې زيات شي، د $\cos t$ قيمت له (1) څخه صفر ته نژدې کېږي، د $\frac{1}{\cos t}$ يا $\sec t$ قيمت له 1 څخه تر $+\infty$ زياتېږي، که $t=90°$ شي، $\sec t$ تعريف شوی نه دی ، که t له $90°$ لږ څه زياته شي د $\sec t$ قيمت $-\infty$ کېږي او په $t=\pi=180°$ کې د -1 سره مساوي کېږي. په همدې ډول که t له $180°$ څخه تر $270°$ پورې زياته شي، نو د $\cos t$ قيمت له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\sec(t)$ له -1 څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي.

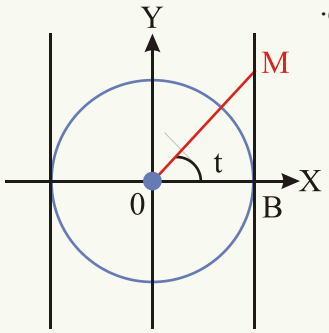
په $t=\frac{3\pi}{2}=270°$ کې د $\sec t$ قيمت غير معين کېږي په همدې ډول، څه وخت چې د t قيمت له $270°$ څخه تر $360°$ زيات شي، نو $\cos(t)$ له صفر څخه تر يوه پورې قيمت اخلي او $\sec(t)$ د $+\infty$ څخه تر (1) پورې تناقص کوي. ليدل کېږي چې:

$$\text{Domain } \sec t = IR - \{t \mid t=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in z\}$$

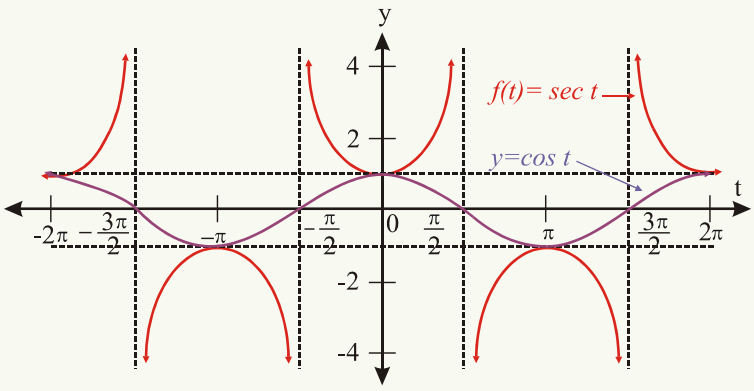
او $\text{Range } \sec(t) = IR - \{t \mid -1 \le t \le 1\}$ يا ټول حقيقي عددونه پرته د $[-1,1]$ له انټروال څخه يا په بل عبارت د $f(t)=\sec(t)$ تابع د تعريف ساحه (*Domain*) د ټولو حقيقي عددونو ستې دی پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب څخه او د $f(t)=\sec(t)$ د تابع Range ټول حقيقي عددونه دي چې لوی يا مساوي د يو او يا کوچنی يا مساوي له -1 وي، لکه: څنګه چې ليدل کېږي د

ketabton.com - The Digital Library

$\sec(t)$ تابع پریود هم 2π دی او د $f(t)=\sec(t)$ تابع د $t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ کې عمودي مجانبونه لري چې k یو تام عدد دی.



$$\sec t=\frac{\overline{OM}}{OB}=\frac{\overline{OM}}{1}=\overline{OM}$$



t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	360
$F(t)=\sec t$	1 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ -1		↘ $+\infty$	$-\infty$ ↘ 1

فعالیت

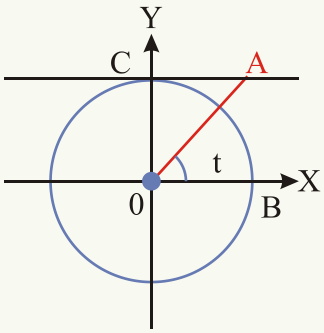
د $f(t)=\frac{4}{3}\sec(t)$ تابع گراف رسم کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

د cosecant د تابع ګراف (Graph of the cosecant Function)

د $f(t)=\sin(t)$ تابع ګراف د $f(t)=\csc(t)$ د تابع له ګراف سره څه اړیکه لري؟

خرنګه چې $\csc t=\dfrac{1}{\sin t}$ دی، sint او csct یو د بل معکوس دي. څه وخت چې $\sin(t)=0$ وي، $\csc t$ تعریف شوی نه دی، د $f(t)=\csc(t)$ د تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه دي پرته له هغو زاویو څخه چې د π تام مضرب وي، (هغه زاویې چې sine یې صفر وي) چې په دې قیمتونو کې عمودي مجانبونه هم لري او د $f(t)=\csc(t)$ د تابع Range ټول هغه حقیقي عددونه دي چې لوی یا مساوي د یو، کوچنی یا مساوي له (-1) سره وي. او ددې تابع پریود هم 2π دی.



څه وخت چې د t زاویه له $0°$ څخه تر $90°$ پورې زیاته شي، نو $\sin t$ له صفر څخه تر (1) پورې زیاتېږي (تزاید کوي) او $\csc(t)$ له $+\infty$ څخه تر (1) پورې کمېږي (تناقص کوي)، څه و خت چې $t=90°$ شي، $\csc(t)=1$ کېږي او که د t زاویه له $90°$ څخه تر $180°$ زیاته شي، نو $\sin(t)$ له یوه څخه صفر ته راکمېږي او $\csc(t)$ له (1) څخه $+\infty$ ته زیاتېږي (تزایدکوي). کله چې $t=180°$ شي نو $\sin(t)=0$ او د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي او که t زاویه $180°$ څخه تر $270°$ پورې زیاته شي، $\sin(t)$ له صفر څخه تر (-1) پورې کمېږي او $\csc(t)$ له $-\infty$ څخه تر (-1) پورې زیاتېږي، د $t=270°$ په قیمت $\csc(t)$ له (-1) سره مساوي کېږي.

په همدې ډول کله چې د t زاویه له $270°$ څخه تر $360°$ پورې زیاته شي(تزاید وکړي)، نو $\sin t$ له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\csc(t)$ له (-1) څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي. په $t=360°$ کې د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي(تعریف شوی نه دی). $t=k\pi$ کې تابع عمودي مجانبونه لري.

په شکل کې د مثلثاتي دایرې د C په ټکي کې یو مماس رسموو، د $\overset{\Delta}{OCA}$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

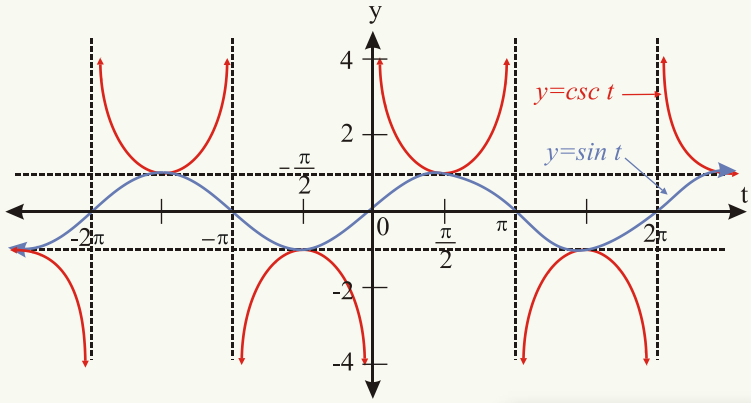
$$\csc(t)=\csc\hat{OAC}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}\qquad(\hat{t}=\hat{OAC})$$

ketabton.com - The Digital Library

د $\overline{OA}$ د خط یا $\csc(t)$ تحول په لاندې جدول کې لنډوو:

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$F(t)=\csc t$	$+\infty$ ↘	1 ↗	$+\infty$ | $-\infty$ ↗	-1 ↘	$-\infty$

لیدل کېږي چې که د t زاویه له صفر څخه تر $360°$ یا (2π) پورې قیمتونه واخلي، نو $\csc(t) \le -1$ او یا $\csc(t) \ge 1$ کېږي، نو لاندې شکل وګورئ.



فعالیت

د $h(t) = -3\csc t$ د تابع ګراف رسم کړئ.

لاندې جدول ته وګورئ:

طاقه یا جفته	پریود	Range	Domain	سمبول
جفته	2π	ټول حقیقي عددونه کوچني یامساوي په -1، لوی یا مساوي په (1)	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ خخه له طاق مضرب	$f(t)=\sec t$

ketabton.com - The Digital Library

طاقه	2π	ټول حقيقي عددونه کوچني يامساوي په -1 لوی يا مساوي په 1	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	$f(t)=\csc(t)$
طاقه	π	ټول حقيقي عددونه	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	$f(t)=\cot(t)$

له مثلثاتي تابع ګانو څخه دا نتيجه په لاس راځي چې: د θ يا (t) د زاويې په زياتوالي سره د $\sin\theta$ او $\tan\theta$ مثلثاتي نسبتونه هم زياتيږي، خو د $\cos\theta$ او $\cot\theta$ قيمت کمېږي.

پوښتنې

1 – د $f(t)=\cot(t)$ تابع د t په کوم قيمت کې تعريف شوې نه ده او ولې؟

2 – څه وخت چې د θ زاويه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تحول وکړي، د $\cot\theta$ تحول عبارت دی:

a) $1\to-\infty$ b) $0\to-\infty$ c) دواړه سمې نه دي

3 – که $\hat{t}=\pi$ وی، $\cot(t)$ عبارت دی له:

a) صفر *b*) -1 *c*) نه دی تعريف شوی

4 – د sec او csc تابع ګانو *Range* عبارت دی له:

a) $IR-\{t\,|\,-1<t<1\}$ *b*) ټول حقيقي عددونه c) $IR-\{t\,|\,-1\le t\le 1\}$

5 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د تعريف ساحه (*Domain*) عبارت ده، له:

a) ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه

b) ټول حقيقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه

c) ټول حقيقي عددونه پرته د 2π له تام مضرب څخه d) درې واړه سمې نه دي

6 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې:

a) متزايده ده *b*) متناقصه ده *c*) نه متزايده او نه متناقصه ده

ketabton.com - The Digital Library

د څپرکي لنډيز

- د $\frac{R}{\pi}=\frac{g}{200}=\frac{d}{180}$ د فورمول په مرسته کولای شو، زاویه له یوه واحد څخه بل واحد ته واړوو.
- یو رادیان هغه مرکزي زاویه ده چې د مقابل قوس اوږدالی یې د شعاع له اوږدوالي سره مساوي وي.
- θ د رادیان په حساب مساوي ده په: $\theta=\frac{s}{r}$ چې s د مرکزي زاویې مقابل قوس او r د دایرې شعاع ده.
- که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور په مثبت جهت منطبق وي، زاویه په معیاري حالت کې ده.
- که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې وي، دا زاویې کوټرمینل زاویې نومېږي.
- مثلثاتي دایره هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالي واحد وي.

$\sin(90-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90-\theta)=\sin\theta$ $\tan(90-\theta)=\cot\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(90-\theta)=\tan\theta$ $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ $\csc(90-\theta)=\sec\theta$	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$	$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$ $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$ $\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$	$\cot(\pi+\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$	$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(2\pi-\theta)=\sec\theta$ $\csc(2\pi-\theta)=-\csc\theta$

ketabton.com - The Digital Library

• د θ او $(\theta + 2k\pi)$ زاویې چې k یو تام عدد دی، کوټرمینل زاویې دي چې ټول مثلثاتي نسبتونه یې سره مساوي دي.

• د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د توابعو *domain* ټول حقیقي عددونه او *Range* یې $[-1,1]$ دی.

• د $y = \sin\theta$ تابع یوه طاقه تابع ده، ځکه چې $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ددې تابع ګراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته متناظر دی او د $y = \cos\theta$ تابع جفته تابع ده، ځکه چې $\cos(-\theta) = \cos\theta$ او د cos تابع ګراف نظر y محور ته متناظر دی.

• د $0°$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ او 2π د زاویو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوې نه دي.

• د sin ، cos ، sec او csc تابع ګانو د تناوب دوره 2π او د tan او cot د تابع ګانو د تناوب دوره(پریود)، π ده.

• د tan تابع هر وخت متزاید او د cot تابع هر وخت متناقصه تابع ده.

• د cos او sec تابع ګانې جفتې او د sin، tan، cot او csc تابع ګانې طاقې دي.

• که د یوې تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر وي، دا ډول تابع ګانې جفتې دي یا د هر x لپاره، $x \in domf$ د $f(-x) = f(x)$ رابطه صدق وکړي.

• که د یوې تابع ګراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته سره متناظر وه، طاقه تابع ده چې د هر x لپاره، $x \in domf$ د $f(-x) = -f(x)$ رابطه صدق وکړي.

د مثلثاتي توابعو تحول په لنډ ډول په لاندې جدول کې ښودل شوی دی.

ketabton.com - The Digital Library

θ / تابع	0°	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
Sin	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
Cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
Tan	0	↗	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	↗	0
Cot	$+\infty$	↘	0	↘	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
Sec	1	↗	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	↗	-1	↘	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	↘	1
Csc	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

ketabton.com - The Digital Library

د څېرکي پوښتنې

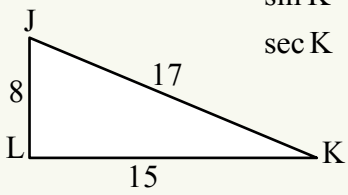
1 – $42,6033°$ په درجه، دقیقه او ثانیه بدلې کړئ؟

2 – که د یو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 3 دقیقې او 25 ثانیې وي، د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبته زاویه طی کړي وي؟

3 – د JKL په مثلث کې لاندې قیمتونه پیدا کړئ؟

$\sin K \quad \sin J \quad \cos J \quad \cos K \quad \tan K \quad \tan J$

$\sec K \quad \sec J \quad \cot J \quad \cot K \quad \csc J \quad \csc K$



4 – که د یوې دایرې شعاع $20cm$ او د مرکزي زاویې مقابل قوس یې $s = 85cm$ وي، مرکزي زاویه څو راډیانه ده؟

5 – د 1 radian او $2\,radian$ مرکزي زاویو د مقابلو قوسو اوږدوالی پیدا کړئ. په دې ډول چې د دایرې قطر $10\ cm$ وي.

6 – د لاندې زاویو دویمې ضلعې (terminal side) ځېرې واقع کېږي؟

$$\frac{3\pi}{2} \ , \quad -7\pi \ , \quad -\frac{11\pi}{2} \ , \quad -500° \ , \quad 900° \ , \quad -\pi$$

7 – لاندې زاویې چې په راډیان راکړل شوي دي، په درجه یې واړوئ.

$$\frac{\pi}{8} \ , \quad \frac{\pi}{15} \ , \quad \frac{\pi}{4} \ , \quad \frac{\pi}{3} \ , \quad \frac{\pi}{2} \ , \quad \frac{\pi}{6} \ , \quad \frac{17\pi}{45}$$

8 – په 54 دقیقو کې د یوه ساعت د ثانیې او د ساعت عقربه هره یوه څو راډیانه طی کوي؟

9 – که د یوه ټراکټور د کوچنۍ ټایر قطر یو متر او د لوی ټایر قطر $120cm$ وي، څه وخت چې کوچنی ټایر د $70°$ درجو په اندازه وخرخېږي لوی ټایر څو راډیانه طی کوي؟

10 – یو خرخ په یو ساعت کې $300\,\mathrm{Re\,V}$ دورانونه کوي، دا خرخ په یوه ثانیه کې څو راډیانه ګرځي؟

11 – د یوه مثلث زاویې په ترتیب سره $4x$ درجې، $\frac{70x}{9}$ ګرادې او $\frac{\pi x}{20}$ راډیانه دي. هره یوه

ketabton.com - The Digital Library

زاويه څو درجې ده؟

12- $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ، $\hat{C}$ او $\hat{D}$ ديوې څلور ضلعې زاويې دي، که $\hat{A}+\hat{D}=240°$ ، $\hat{C}+\hat{D}=200g$

او $\hat{B}+\hat{D}=\frac{2\pi^{R}}{3}$ وي: د دې څلور ضلعې زاويې د درجې په حساب پيدا کړئ.

13 - ديوه دوران $\frac{1}{12}$ برخه مساوي ده په:

a) $=30^{\circ}$ b) $\frac{\pi}{6}$radian c) $\frac{100}{3}$g d) دري واړه سمې دي

14 - د دوو زاويو مجموعه $17°$ او تفاضل يې 17 گراده دی، دا دواړه زاويې پيدا کړئ.

15 - د درجې په حساب د دوو زاويو مجموعه x او تفاضل يې د گراد په حساب هم x دی، دا دواړه زاويې پيدا کړئ.

16 -لاندې زاويې د درجې په اعشاري شکل وليکئ.

$47°\quad 15'\quad 36''$ $\qquad$ $15°\quad 24'\quad 45''$

17 - لاندې زاويې په درجه، دقيقه او ثانيې (DMS) واړوئ.

$23.16°$ $\qquad$ $4.2075°$

18 - $\sin(-\frac{\pi}{3})$ ، $\tan\frac{3\pi}{4}$ او $\cot\frac{7\pi}{6}$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ

19 - د $[-2\pi,2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قيمت، $\sin\theta=1$ دی؟

20 - د $[-2\pi,2\pi]$ په انټروال کې د $\tan\theta$ تابع، د θ په کومو قيمتونو کې عمودي مجانب لري؟

21 - له (i) څخه تر (iii) پورې کومه يوه اړيکه سمه نه ده؟

(i) $\sin(-x)=-\sin x$ $\qquad$ (ii) $\cos(-x)=-\cos x$

(iii) $\tan(-x)=-\tan x$

a) i او ii سمې دي. $\qquad$ *b*) يوازې ii سمه ده.

c) i او iii سمې دي. $\qquad$ *d*) دري واړه سمې دي.

e) هيڅ يو.

ketabton.com - The Digital Library

22 – $\cos\frac{47\pi}{2}$ ، $\sin(-13\pi)$ او $\tan\frac{8\pi}{3}$ پیدا کړئ؟

23 –داسې زاویه پیدا کړئ چې که د ګراد په حساب یې له مقدار ه 23 واحده کم کړو، د زاویې مقدار په درجه لاس ته راشي.

24 - د دریو زاویو مجموعه 240 ګراده ده، که لومړنۍ زاویه 40 ګراده، دویمه $\frac{3\pi}{4}$ راډیانه وي، دریمه زاویه څو درجې ده؟

25 – د $4185°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

26 – د $(-3660°)$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

27 – د $y=\cos\theta$ تابع د $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ په انټروال کې:

متزایده ده $a)$ متناقصه ده $b)$ هم متزایده او هم متناقصه ده $c)$

28 – د $y=\tan\theta$ تابع پریود عبارت دی، له:

a) 2π b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{2}$

29 – د $f(t)=\cos(t)$ تابع:

a) جفته ده b) طاقه ده c) نه جفته او نه طاقه ده

30 – هغه تابع چې ګراف یې نظر مبدأ ته متناظر وي.

a) جفته ده b) طاقه ده c) نه جفته او نه طاقه ده

31 – د $y=\cos\theta$ تابع د تناوب دوره عبارت ده، له:

a) π b) $\frac{3\pi}{2}$ c) 2π d) 3π

32 – $\sin 67°$ له $\sin 787°$ سره څه اړیکه لري؟

a) $\sin 787° > \sin 67°$ b) $\sin 787° < \sin 67°$ c) $\sin 67° = \sin 787°$

33 –کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

ketabton.com - The Digital Library

a) $\sec 135° = -\csc 45°$ b) $\sec 135° = \csc 45°$

d) $\sec 135° = \sec 45°$ c) $\sec 135° = -\sec 45°$

34 - کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\tan 240° = \tan 60°$ b) $\tan 240° = -\tan 60°$

c) $\tan 240° = \cot 60°$ d) $\tan 240° = -\cot 60°$

35 - $\cot 0° = ?$

a) 1 *b*) -1 *c*) 0 *d*) تعریف شوی نه دی.

36 - $\cos 9\pi = ?$

a) 1 *b*) -1 *c*) 0 *d*) $\frac{1}{2}$

37 - $\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

a) 1 *b*) -1 *c*) 0 *d*) درې واړه سم نه دي

38 - د $-2430°$ له زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

39 - $\sin(270° - \theta) = ?$

a) $\sin\theta$ *b*) $-\sin\theta$ *c*) $\cos\theta$ *d*) $-\cos\theta$

40 - $\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

a) 1 *b*) -1 *c*) 0 *d*) تعریف شوی نه دی

41 - $\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

a) 1 *b*) -1 *c*) 0 *d*) تعریف شوی نه دی

42 - $\tan(-15\pi) = ?$

a) 1 *b*) -1 *c*) 0 *d*) تعریف شوی نه دی

43 - $\sec(-1530°) =$

ketabton.com - The Digital Library

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

44 - $\cot(-2430°) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

45 - $\sin(\frac{235\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

46 - $\cos(\frac{407\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) 0 c) -1 d) ∞

47 - $\tan(90+\theta)$ مساوی دی په:

$a)\ \cot\theta$ $b)-\cot\theta$ $c)-\tan\theta$ $d)\tan\theta$

48 - $\tan(270+\theta) = ?$

$a)\ \cot\theta$ $b)\ -\cot\theta$ $c)\ \tan\theta$ $d)-\tan\theta$

49 - $\sin(-1980°) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\frac{1}{2}$

50 - $\sin(-\frac{3\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\frac{1}{2}$

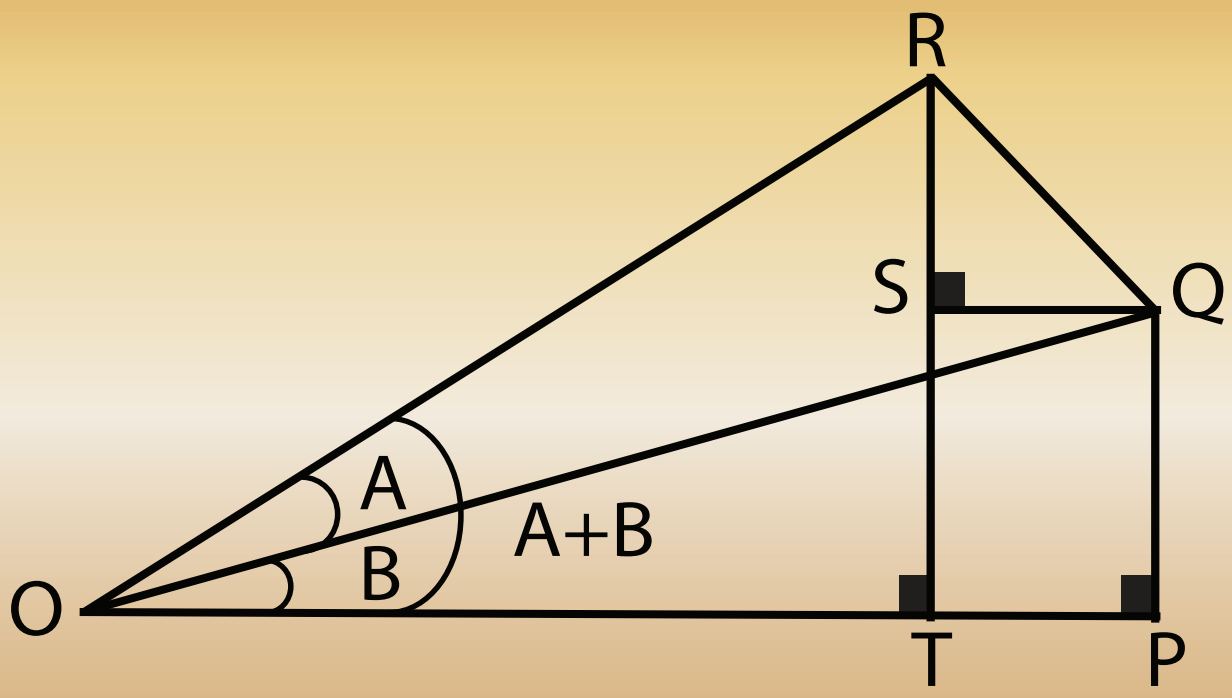
51 - له لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې سمه ده؟

a) $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ b) $\sin\frac{3\pi}{4} > \sin\frac{\pi}{4}$ c) $\sin\frac{3\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{4}$

ketabton.com - The Digital Library

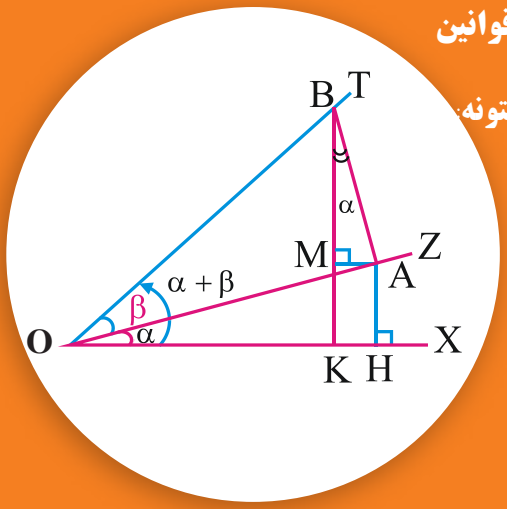
پنځم څپرکی
د مثلثاتو تطبیقات

ketabton.com - The Digital Library



ketabton.com - The Digital Library

د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونو قوانین
د جمعې او تفاضل فورمولونه
د دوو زاویو د مجموعې مثلثاتي نسبتونه:



آیا د

$$Sin(\alpha+\beta) = Sin\alpha\cos\beta + Cos\alpha Sin\beta$$

رابطې سموالی ښودلای شئ؟

1- د $Sin(\alpha+\beta)$ محاسبه کول: د $\hat{XOZ}$ زاویه له α او د $\hat{ZOT}$ زاویه له β سره مساوي جلا کوو او داسې یې یو د بل څنګ ته ږدو چې دوه مجاورې زاویې جوړې کړي بیا د OT د قطعه خط پر مخ د OB قطعه خط د واحد په اندازه جلا کوو. د B له ټکي څخه د BA خط پر OZ عمود رسموو، بیا د A له ټکي څخه د AH خط پر OX عمود رسموو، شکل ته په پام سره لرو چې:

$$Sin\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$$

$$Cos\beta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA}$$

$$Sin\alpha = \frac{\overline{HA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{HA}}{\cos\beta} \Rightarrow \overline{HA} = \sin\propto\cos\beta$$

$$Cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OH}}{\cos\beta} \Rightarrow \overline{OH} = \cos\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{KB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{KB}}{1} = \overline{KB}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OK}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OK}}{1} = \overline{OK}$$

ketabton.com - The Digital Library

د A له ټکي څخه پر KB باندې د AM عمود رسموو چې د KHAM خلور ضلعي مستطيل دی، په نتيجه کې KM=HA او MA=KH دی.

د $M\hat{B}A$ زاويه د α له زاويې سره مساوي ده (ددې دواړو زاويو ضلعي يو پر بل باندې عمود دي). د BMA په قايم الزاويه مثلث کې لرو چې:

$$\cos(M\hat{B}A)=\cos\alpha=\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}=\frac{MB}{\sin\beta}\Rightarrow\overline{MB}=\cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\sin(M\hat{B}A)=\sin\alpha=\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}}=\frac{MA}{\sin\beta}=\frac{\overline{KH}}{\sin\beta}\Rightarrow\overline{KH}=\sin\alpha\ \sin\beta$$

که د $\overline{KB}=\overline{KM}+\overline{MB}$ په رابطه کې د KM، KB او $\overline{MB}$ پر ځای يې قيمتونه وضع کړو، لرو چې: $(KM=AH=\sin\alpha\cos\beta)$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

2: د $\cos(\alpha+\beta)$ محاسبه کول : په همدې ډول که د $\overline{OK}=\overline{OH}-\overline{KH}$ په رابطه کې د KH، OK او OH پر ځای يې قيمتونه وضع کړو، نو لرو چې:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta$$

3: د $\tan(\alpha+\beta)$ محاسبه کول:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta}$$

صورت او مخرج په $\cos\alpha\cos\beta$ وېشو:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

لومړی مثال: $\sin\frac{7\pi}{12}$ ، $\sin120°$ ، $\cos120°$ او $\tan\frac{5\pi}{12}$ پيدا کړئ.

حل

ketabton.com - The Digital Library

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\sin 90^\circ\cos 30^\circ+\cos 90^\circ\sin 30^\circ$$

$$\sin 120^\circ=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=\cos 90^\circ\cos 30^\circ-\sin 90^\circ\sin 30^\circ$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

د دوو زاویو د تفاضل مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=?$$

که د جمعې په فورمولونو کې د β پر ځای $-\beta$ وضع کړو، نو لرو چې:

$$\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)$$

پوهېږو چې:

$$\cos(-\beta)=\cos\beta$$

$$\sin(-\beta)=-\sin\beta$$

$$\tan(-\beta)=-\tan\beta$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

$$\tan[(\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$ دی.

لومړي مثال: $\cos\frac{\pi}{12}$ او $\sin 150°$ پیدا کړئ.

حل:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 180°\cos 30°-\cos 180°\sin 30°$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\cdot\frac{1}{2}=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

دویم مثال: د تفاضل د فورمولونو په مرسته ښکاره کړئ چې $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ دی.

حل:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta$$

دریم مثال: وښیاست چې $\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$ دی.

حل:

ketabton.com - The Digital Library

$$\cos(270^\circ-\theta)=\cos 270^\circ\cos\theta+\sin 270^\circ\sin\theta$$
$$\cos(270^\circ-\theta)=0\cdot\cos\theta+(-1)\sin\theta=-\sin\theta$$

څلورم مثال: $\tan 120^\circ$ پیدا کړئ:

حل:

$$\tan 120^\circ=\tan(180^\circ-60^\circ)=\frac{\tan 180^\circ-\tan 60^\circ}{1+\tan 180^\circ\cdot\tan 60^\circ}=\frac{0-\sqrt{3}}{1+0\cdot\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$=-\sqrt{3}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sin 211^\circ\cos 59^\circ+\cos 211^\circ\sin 59^\circ=-1$ او
$\cos 211^\circ\cos 149^\circ-\sin 211^\circ\sin 149^\circ=1$ دی.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1- وښیاست چې:

$$\tan(45-\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

2- وښیاست چې:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\ \sin\beta$$

3- $\cos 277^\circ\cos 97^\circ+\sin 277^\circ\sin 97^\circ=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

4- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\sin 240^\circ$، $\cos 240^\circ$ او $\tan 240^\circ$ پیدا کړئ.

5- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y]=\cos x\cdot\cos y$ دی.

6- د جمعې د فورمولونو په مرسته د 210° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

7- $\sin 105^\circ$، $\cos 105^\circ$ او $\tan 105^\circ$ پیدا کړئ $(105^\circ=(60^\circ+45^\circ)$

8- که $\sin x=-\frac{3}{4}$ وی او $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ وی، $\cos(\frac{\pi}{4}+x)$ پیدا کړئ.

9- وښیاست چې: $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ دی.

10- $\sin 2^\circ\cos 88^\circ+\cos 2^\circ\sin 88^\circ=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

ketabton.com - The Digital Library

د 2α مثلثاتـی نسـبتونه د α له جنسه:

$$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=?$$

آیا ښودلای شئ چې:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

دی؟

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

خرنګه چې $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ دی:

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

او همدارنګه $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ دی، نو:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

لومړی مثال: که $\sin\theta=\frac{4}{5}$ او د θ دویمه ضلع په دویمه ناحیه (ربع) کې واقع وي، $\sin 2\theta$

$\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

حل: $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې ده).

$$\cos\theta=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{\frac{25-16}{25}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\frac{-3}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{24}{7}$$

فعالیت

که $\cos\alpha = \frac{4}{5}$، وي او د α دویمه ضلع په لومړی ربع کې پرته وي، $\tan 2\alpha$ پیدا کړئ.

او که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ او د β دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي $\sin 2\beta$ پیدا کړئ.

دویم مثال: د $60°$ زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د $120°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 120° = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 120° = \cos^2 60° - \sin^2 60° = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan 120° = \frac{2\tan 60°}{1-\tan^2 60°} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

په همدې ډول:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\quad,\quad \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

دریم مثال: که $90°<\theta<180°$ او $\cos\theta=-\frac{3}{4}$ وي، د $\cos 2\theta$ قیمت پیدا کړئ.

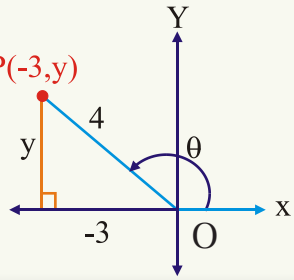
حل:

$$x^2+y^2=r^2$$

$$(-3)^2+y^2=4^2$$

$$y=\pm\sqrt{4^2-(-3)^2}$$

$y=\sqrt{7}$ (ځکه چې د y قیمت په دویمه ربع کې مثبت دی.)



$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(-\frac{3}{4})^2-(\frac{\sqrt{7}}{4})^2=\frac{1}{8}$$

فعالیت

که $90°<\theta<180°$ او $\cos\theta=-\frac{1}{3}$ وي، د $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمت پیدا کړي.

همدارنګه کولای شو چې د $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ قیمتونه د $\tan\frac{\theta}{2}$ له جنسه پیدا کړو:

$$\sin\theta=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

پوهېږو چې:

$$\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}=1$$

(صورت او مخرج پر $\cos^2\frac{\theta}{2}$ وېشو:)

ketabton.com - The Digital Library

$$\sin\theta=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+1}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\qquad,\qquad\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

همدارنګه کولای شو چې د θ زاویې مثلثاتي نسبتونه د 2θ زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه په لاس راوړو:

$$2\cos^2\theta-1=\cos2\theta$$

$$2\cos^2\theta=1+\cos2\theta$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos2\theta}{2}}\qquad\text{يا}\qquad\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

ketabton.com - The Digital Library

په همدې ډول:

$$1-2\sin^2\theta=\cos 2\theta$$

$$-2\sin^2\theta=-1+\cos 2\theta$$

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{يا} \quad \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

په نتيجه کې:

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} \quad \text{يا} \quad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

لومړی مثال: د $30°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه د $60°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 30°=\sqrt{\frac{1+\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{1+\cos 60°}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

دويم مثال: که $180°<\theta<270°$ او $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ وي د $\cos\frac{\theta}{2}$ قيمت پيدا کړئ.

حل:

$$x^2+y^2=r^2$$

$$x^2+(-2)^2=3^2 \qquad x=\pm\sqrt{3^2-(-2)^2}=-\sqrt{5}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{5}}{3}$$ (ځکه چې د x قيمت په دويمه ربع کې منفي دی)

ketabton.com - The Digital Library

خرنګه چې $180° < \theta < 270°$ ده، نو $\frac{180°}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270°}{2}$ یا $90° < \theta < 135°$ ده په دې معنا چې د $\cos\frac{\theta}{2}$ علامه منفی ده.

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+(\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ او $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

دریم مثال: **که** $\cos\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دویمه ضلع په لومړنی ربع کې وي $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\tan\frac{\theta}{2}$ قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

ketabton.com - The Digital Library

څلورم مثال: وښیاست چې $\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}=2$ دی.

حل:

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin(3\theta-\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta \quad ، \quad \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \qquad \cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$$

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1- د $120°$ زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د $240°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 - که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په لومړنۍ ربع کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پيدا کړئ.

3 - که $\sin\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي $\cos\theta/2$ پيدا کړئ.

4 - $\sin\frac{\pi}{12}$ د $\sin\frac{\pi}{6}$ له جنسه پيدا کړئ.

5 - که $\sin\theta = \frac{12}{13}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، $\sin\theta/2$ او $\tan\theta/2$ پيدا کړئ.

6 - د $15°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه د $30°$ زاويې له جنسه پيدا کړئ.

7 - که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ وي او د β دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، د $\sin 2\beta$ قيمت مساوی دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $= -\frac{169}{120}$ d) درې واړه سم نه دي

8 - $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = ?$

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

ketabton.com - The Digital Library

د 3α زاويي مثلثاتي نسبتونه د α زاويي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$$

آيا ښودلای شئ چې دا رابطه

$$\cos 90^\circ = 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$$

سمه ده؟

څرنګه چې:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

لومړي مثال: $\sin 180^\circ$ د $\sin 60^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 180^\circ = 3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

څرنګه چې:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$

ketabton.com - The Digital Library

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$$
$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) \quad (\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha)$$
$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$$

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

فعالیت

$\cos 270°$ د $\cos 90°$ له جنسه پیدا کړئ.

دویم مثال: $\cos 180°$ د $\cos 60°$ له جنسه پیدا کړئ.

حل:

$$\cos 180° = 4\cos^3 60° - 3\cos 60° = 4(\frac{1}{2})^3 - 3\cdot\frac{1}{2} = 4\cdot\frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

د $\tan 3\propto$ پیدا کول:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha\cdot\tan\alpha} = \frac{\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\dfrac{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

دریم مثال: $\tan 135°$ د $\tan 45°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\tan 135° = \frac{3\tan 45° - \tan^3 45°}{1-3\tan^2 45°} = \frac{3\cdot 1 - 1}{1 - 3\cdot 1} = \frac{2}{-2} = -1$$

ketabton.com - The Digital Library

څلورم مثال: وښیاست چې $4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\sin 3\theta$

حل:

$$4\sin\theta(\sin 60^\circ\cos\theta-\cos 60^\circ\sin\theta)(\sin 60^\circ\cos\theta+\cos 60^\circ\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

$$=4\sin\theta\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)=\sin\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$\text{Sin}\,\theta[3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta]=\sin\theta\cdot 3-3\sin^3\theta-\sin^3\theta$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin 3\theta$$

د $(\alpha+\beta+\square)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\square)=\sin[\alpha+(\beta+\square)]=\sin\alpha\cos(\beta+\square)+\cos\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\sin\alpha(\cos\beta\cos\square+\sin\beta\sin\square)+\cos\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$=\sin\alpha\cos\beta\cos\square+\sin\alpha\sin\beta\sin\square+\sin\beta\cos\alpha\cos\square+\sin\square\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos[\alpha+(\beta+\square)]=\cos\alpha\cos(\beta+\square)-\sin\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\cos\alpha(\cos\beta\cos\square+\sin\beta\sin\square)-\sin\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta\cos\square+\cos\alpha\sin\beta\sin\square+\cos\square\sin\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha\sin\square$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\tan[\alpha+(\beta+\square)]=\frac{\tan\alpha+\tan(\beta+\square)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(\beta+\square)}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\frac{\tan\alpha+\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{1-\tan\alpha\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta\tan\square+\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{\dfrac{1-\tan\beta\tan\square+\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\cdot\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\square + \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\square}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta - \tan\beta\tan\square + \tan\alpha\tan\square}$$

پنځم مثال: $\sin 135°$ د $\sin(30° + 45° + 60°)$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 135° = \sin(30° + 45° + 60°) = \sin 30° \cos 45° \cos 60°$$
$$- \sin 30° \sin 45° \sin 60° + \sin 45° \cos 30° \cos 60° + \sin 60° \cos 30° \cos 45°$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پوښتنې

1- $\sin 90°$ ، $\cos 90°$ او $\tan 90°$ په ترتیب سره د $\sin 30°$ ، $\cos 30°$ او $\tan 30°$ له جنسه پیدا کړئ.

2- $\cos 135°$ او $\tan 135°$ پیدا کړئ. $135° = (30° + 45° + 60°)$

3- $8\cos^3\theta - 6\cos\theta = ?$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

4- $\cos(\hat{A} - \hat{B} + \hat{C})$ د $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پیدا کړئ.

5- وښیاست چې:

$$4\cos x \cos(60° - x)\cos(60° + x) = \cos 3x$$
$$\tan x \tan(60° - x)\tan(60° + x) = \tan 3x$$

ketabton.com - The Digital Library

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعي او تفاضـل بدلول د ضرب دحاصل په شکل

$$\sin 30° + \sin 60° = ?$$
$$\tan 45° + \tan 60° = ?$$

آیا د $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ$ قیمت پیداکولای شئ؟

څرنگه چې پوهېږو:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \ldots\ldots (I)$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \ldots\ldots (II)$$

که $A+B=P$ او $A-B=q$ فرض کړو او (I) او (II) رابطې سره جمع کړو، نولرو چې:

$$\sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin A \cos B$$

$$\begin{array}{ll} A+B=p & A+B=p \\ \underline{-A\mp B=-q} & \underline{A-B=q} \\ 2B=P-q & 2A=P+q \\ B=\dfrac{P-q}{2} & A=\dfrac{P+q}{2} \end{array}$$

په نتیجه کې لرو چې:

$$\boxed{\sin p+\sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له I رابطې څخه II رابطه تفریق کړو، نو لرو چې:

$$\sin(A+B)-\sin(A-B) = 2\cos A \sin B$$

$$\boxed{\sin p-\sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

ketabton.com - The Digital Library

په همدې ډول:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B....III$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B....IV$$

که III رابطه د IV سره جمع کړو، لرو چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له III رابطې څخه IV رابطه تفریق کړو، نو:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

فعالیت

د $\sin 60^\circ+\sin 30^\circ$ او $\cos 60^\circ+\cos 30^\circ$ قیمتونه پیدا کړئ.

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q-\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

لومړی مثال(a): وښیاست چې: $\dfrac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\tan 5\theta$

$$\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\frac{2\sin\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}=\frac{\sin 5\theta\cos 2\theta}{\cos 5\theta\cos 2\theta}=\tan 5\theta$$

ketabton.com - The Digital Library

b: وښیاست چې $\sin 3x + \sin x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x$ دی:

حل: $\sin 3x + \sin x = 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x$

فعالیت

وښیاست چې $\cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$ او $\cot p - \cot q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$

دویم مثال: وښیاست چې: $\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta - \theta)$ او

$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin 3\theta \sin\theta$

حل:

$$\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \frac{-2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\sin\frac{2\theta-2\beta}{2}}{2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\cos\frac{2\theta-2\beta}{2}} = \frac{-2\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}{2\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\beta)}$$

$$= -\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\beta)} = -\tan(\theta-\beta) = \tan(\beta-\theta)$$

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\sin\frac{4\theta-2\theta}{2} = -2\sin 3\theta\sin\theta$$

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع او یا تفاضل باندې:

ځرنګه چې: $A + B = P$, $A - B = q$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

یا

$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$

$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$$\boxed{\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]}$$

ځرنګه چې: $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$ دی.

ketabton.com - The Digital Library

نو: $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

$$\boxed{\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]}$$

څرنګه چې: $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$

نو: $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

$$\boxed{\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]}$$

څرنګه چې: $\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$

نو: $-2\sin A\sin B=\cos(A+B)-\cos(A-B)$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A\sin B&=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)\\&=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\end{aligned}}$$

لومړی مثال: وښیاست چې:

$$a:\quad \frac{\sin 8x+\sin 5x+\sin 2x}{\cos 8x+\cos 5x+\cos 2x}=\tan 5x$$

$$b:\quad \cos 75^\circ-\cos 15^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

د a حل:

$$=\frac{2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\sin 5x}{2\cos\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\cos 5x}$$

$$=\frac{2\sin 5x\cos 3x+\sin 5x}{2\cos 5x\cos 3x+\cos 5x}=\frac{\sin 5x(2\cos 3x+1)}{\cos 5x(2\cos 3x+1)}=\tan 5x$$

ketabton.com - The Digital Library

د b حل:

$$\cos 75° - \cos 15° = -2 \cdot \sin \frac{75° + 15°}{2} \sin \frac{75° - 15°}{2} = -2 \sin 45° \sin 30°$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دویم مثال: د جمعې یا تفاضل شکل ته یې واړوئ.

$$2 \cos 95° \sin 13° = \sin(95° + 13°) - \sin(95° - 13°) = \sin 108° - \sin 82°$$

$$\cos 38° \cos 61° = \frac{1}{2}[\cos(38° + 61°) + \cos(38° - 61°)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos(-23°)] = \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos 23°]$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2} \cos 2x$$

دریم مثال:

$$\cos 34° \sin 28° = \frac{1}{2}[\sin(34° + 28°) - \sin(34° - 28°)] = \frac{1}{2}(\sin 62° - \sin 6°)$$

$$2 \cos 45° \cos 15° = \cos(45° + 15°) + \cos(45° - 15°) = \cos 60° + \cos 30°$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 10\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2}[\sin(10\theta + 4\theta) + \sin(10\theta - 4\theta)] = \frac{1}{2}(\sin 14\theta + \sin 6\theta)$$

څلورم مثال: وښیاست چې: $\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \cos x \cos y$

حل:

$$\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$+ (\cos x \cos y + \sin x \sin y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y + \cos x \cos y)]$$

$$= \frac{1}{2}(2 \cos x \cos y) = \cos x \cos y$$

ketabton.com - The Digital Library

پنځم مثال: وښیاست چې: $\dfrac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\tan 2\theta$

حل:

$$\frac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 7\theta)-\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)+\frac{1}{2}(\cos 7\theta-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin 7\theta-\sin 3\theta}{\cos 3\theta+\cos 7\theta}=\frac{2\cos 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 5\theta\cos(-2\theta)}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta$$

$$\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}\qquad\tan A-\tan B=\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\mathrm{Sin}A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-(\cos A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B$$

ketabton.com - The Digital Library

1- وښیاست چې:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعې یا تفاضل شکل ته واړوئ.

$\sin 5x \cos 8x$ $\quad$ $\sin 3\theta \cos 5\theta$ $\quad$ $\cos 30^\circ \cos 60^\circ$

$\sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ$ $\quad$ $\cos 5x \sin 8x$ $\quad$ $\cos 7\theta \sin 5\theta$

$\sin 88^\circ \sin 12^\circ$ $\quad$ $2\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ$

$2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta$ $\quad$ $2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha$ $\quad$ $\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$

3- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د جمعې او تفریق حاصل، ضرب ته واړوئ.

$\cos 56^\circ + \cos 22^\circ$ $\quad$ $\sin 84^\circ - \sin 76^\circ$ $\quad$ $\sin 94^\circ - \sin 86^\circ$

$\cos 86^\circ + \cos 22^\circ$ $\quad$ $\cos 84^\circ - \cos 76^\circ$ $\quad$ $\sin 8\theta + \sin 4\theta$

$\cos 95^\circ - \cos 41^\circ$ $\quad$ $\sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2}$ $\quad$ $\sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6}$

$\cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3}$ $\quad$ $\cos 84^\circ + \cos 76^\circ$ $\quad$ $\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$

4- وښیاست چې:

$$\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A \quad , \quad \frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

5- که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ وي، (دیو مثلث د داخلي زاویو مجموعه) وښیاست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

ketabton.com - The Digital Library

6- وښیاست چې: $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$

7- $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

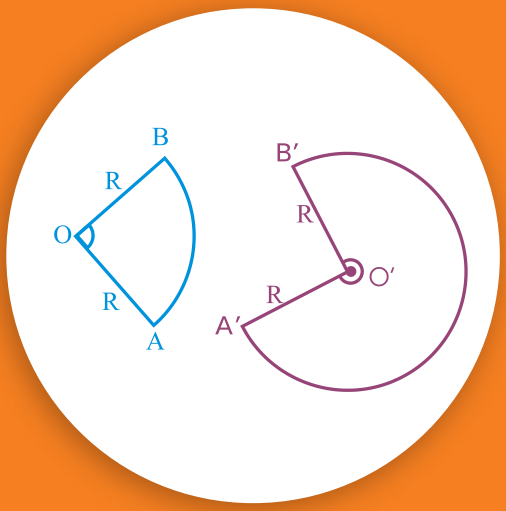
8- د جمعې یا تفاضل د فورمولونو په واسطه وښیاست چې:

$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$ $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$ $\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta$ $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$

ketabton.com - The Digital Library



د قوس اوږدوالی
(Arc length)

که ديوې دايرې شعاع 5cm وي، د دې دايرې د 45° مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی به څو cm وي؟

که د دووقوسونو شعاع ګانې سره مساوي وي، د دې دوو قوسونو اوږدوالی د راډيان په حساب د قوس له مقدار سره متناسب دی، لکه: څنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{m\overset{\frown}{AB}} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{m\overset{\frown}{A'B'}}$$

چې $m\overset{\frown}{AB}$ او $m\overset{\frown}{A'B'}$ ددې دواړو قوسونو مقدار د راډيان په حساب دي. که د قوس مقدار دوه چنده شي، د قوس اوږدوالی هم دوه چنده کېږي.

که د يو قوس مقدار θ° او شعاع يې R وي، د θ° د زاويې د مقابل اړدوالی L او د دايرې محيط C وي، نو لرو چې:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{C}{360^\circ}$$

څرنګه چې د دايرې محيط $C = 2\pi R$ دی، نو:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{2\pi R}{360^\circ} \Rightarrow L = \frac{\theta^\circ}{180^\circ}\pi R$$

بايد پام مو وي، که د قوس يا θ مقدار د راډيان په حساب وي، نو $L = R\theta$ کېږي.

لومړی مثال: د 45° مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پيدا کړئ، که د دايرې شعاع 14cm وي.

ketabton.com - The Digital Library

حل:

$$L = \frac{45^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \cdot 14\text{cm} = \frac{14}{4}\pi\text{cm} \approx \frac{14}{4} \cdot \frac{22}{7}\text{cm} = 11\text{cm}$$

دویم مثال: د $\frac{\pi}{4}$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شعاع 14cm وي.

$$L = R\,\theta$$

$$L = 14\text{cm}\,\frac{\pi}{4} \approx 14\text{cm} \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{4} = 11\text{cm}$$

دریم مثال: که په یوه دایره کې، د $45°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $3\pi\text{cm}$ وي، د دې دایرې شعاع پیدا کړئ.

حل: خرنګه چې: $45° = \frac{\pi}{4}$ radian، نو:

$$L = R\theta$$

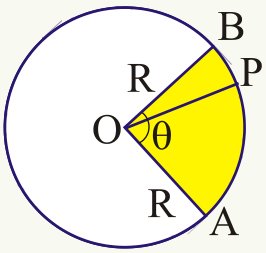
$$R = \frac{L}{\theta} = \frac{3\pi\text{cm}}{\frac{\pi}{4}} = 3\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 12\text{cm}$$

د یـوې دایرې قطاع(Sector of a circle): د یوې دایرې د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې د دایرې مرکز O او شعاع یې R ده، په پام کې نیسو، د $\overline{OP}$ د ټولو خطونو مجموعې ته چې P د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس یوه نقطه ده، قطاع ویل کېږي.

که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس اندازه θ راډیان وي، θ ته د قطاع زاویه وایي.

یا قطاع په دې ډول هم تعریفولای شو:

د یوې دایرې د سطحې هغه برخه چې د دایرې د دوو شعاع ګانو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي.



ketabton.com - The Digital Library

د قطاع د مساحت پیدا کول: که د دایرې شعاع R وي، د دې دایرې د θ راډیان د قطاع مساحت مساوي دی په: $S=\frac{1}{2}R^2\theta$ چې S د قطاع مساحت او R د دایرې شعاع ده، ځکه چې:

$$\left.\begin{matrix} 2\pi^R & \square R^2 \\ \theta^R & S \end{matrix}\right\} \Rightarrow S=\frac{\pi R^2\cdot\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}R^2\theta$$

او یاکه د θ زاویه د درجې په حساب وي.

$$\left.\begin{matrix} 360^\circ & \pi R^2 \\ \theta^\circ & S \end{matrix}\right\} \Rightarrow S=\pi R^2\frac{\theta}{360^\circ}$$

لومړی مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=90^\circ$ وي.

حل: خرنګه چې $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ Radian دی:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta$$

$$S=\frac{1}{2}(10cm)^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot 100cm^2\cdot\frac{\pi}{2}=25\pi cm^2$$

دویم مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=72^\circ$ وي.

حل:

$$72^\circ=72\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{5}\ \text{Radian}$$

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}\cdot 100cm^2\cdot\frac{2\pi}{5}=20\pi\,cm^2$$

دریم مثال: که د دایرې شعاع 6cm او د دې دایرې د یوې قطاع مساحت $15\pi cm^2$ وي. د قطاع د قوس اوږدوالی پیدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta \quad \text{یا} \quad 15\pi cm^2=\frac{1}{2}(6cm)^2\theta$$

ketabton.com - The Digital Library

$$15\pi cm^2 = 18\theta$$

$$\theta = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6} \text{ Radian}$$

طول قوس $L = R\theta = 6cm\frac{5\pi}{6} = 5\pi cm = 5 \cdot 3{,}14cm \approx 15{,}7cm$

څلورم مثال: يوه دايره چې $7cm$ شعاع لري، ددې دايرې محيط، مساحت او د $60°$ مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی يې پيدا کړئ او هم ددې دايرې د قطاع مساحت پيدا کړئ چې $\theta = 60°$ وي.

حل: څرنګه چې $60° = \frac{\pi}{3}$ Radian دی، نو:

$$C = 2\pi R \approx 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7\,cm = 44\,cm \quad , \quad A = \pi R^2 \approx \frac{22}{7} \cdot 49\,cm^2 = 154\,cm^2$$

$$L = R\theta = 7 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}cm \quad , \quad A = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2} \cdot 49\,cm^2 \cdot \frac{\pi}{3} \approx 25.6\,cm^2$$

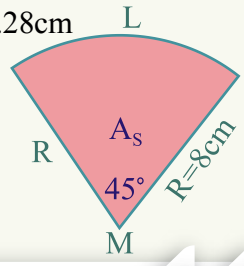
پنځم مثال: که د يوې دايرې شعاع $8cm$ او د قطاع زاويه يې $45°$ وي، د قطاع مساحت، د قطاع د مقابل قوس اوږدوالی او ددې قطاع محيط پيدا کړئ.

حل:

د قطاع مساحت $A_s = \pi R^2 \frac{\theta}{360°} = (8cm)^2(3{,}14) \cdot \frac{45°}{360°} \approx 25{,}12cm$

د قطاع مقابل قوس $L = 2\pi R \frac{\theta}{360°} = 2 \cdot 8cm \cdot 3.14 \cdot \frac{45°}{360°} \approx 6.28cm$

د قطاع محيط $= 2\pi R \frac{\theta}{360°} + 2R = 6.28cm + 2 \cdot 8cm \approx 22.28cm$



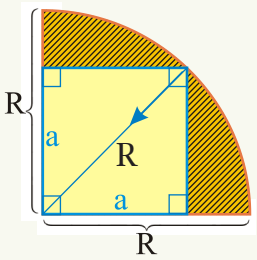
فعاليت

که د دايرې شعاع $10cm$ وي، د هغه قطاع ګانو مساحت پيدا کړئ چې د قوس اندازه يې $180°$ ، $216°$ او $324°$ وي.

ketabton.com - The Digital Library

شپږم مثال: د لاندې شکل په شان په $90°$ قطاع کې د R په شعاع مربع محاط شوي ده، د خط شوي برخې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې شعاع R ده،د دایرې په څلورمه برخه کې د مربع قطر $d = R = a\sqrt{2}$ دی، که a د مربع ضلع وي، نو د مربع یوه ضلع $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ او د مربع مساحت $S = \frac{R^2}{2}$ دی، څرنګه چې د دایرې د څلورمې برخې مساحت $\frac{1}{4}\pi R^2$ دی.

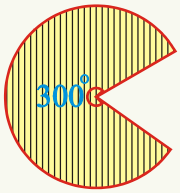


نود خط شوی برخې مساحت مساوي دی په: $\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$

اووم مثال: په شکل کې د دایرې قطاع چې شعاع یې $1cm$ او مرکزي زاویه یې $300°$ ده. د دې شکل محیط څو سانتي متره کېږي؟

$360°$ $2\pi R$

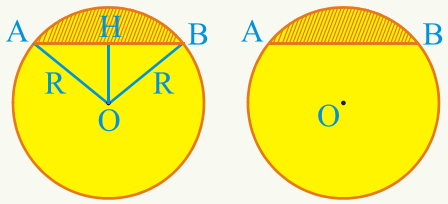
$300°$ x $\quad x = \frac{300° \cdot 2\pi R}{360°} = \frac{5\pi R}{3}cm$



د دې شکل محیط $= (\frac{5}{3}\pi R + 2)cm$

د دایرې قطعه(Segment of a circle): د دایرې د سطحې یوې برخې ته چې د قوس او مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه وایي.

د دایرې قطعه د قطعې د قوس په حساب ښودل کېږي. د مثال په ډول که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس $\frac{\pi}{6}$ رادیان وي، قطعې ته هم $\frac{\pi}{6}$



ketabton.com - The Digital Library

راډیان وایي.

د قطعې مساحت: د θ راډیان د قطعې مساحت چې ددایرې شعاع R وي، مساوي دی، په:

$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

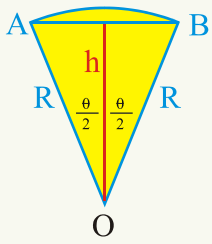
څکه که د AB قوس θ راډیان وي او د O نقطه د A او B له نقطو سره ونښلوو، نو لرو چې:

د AOB د مثلث مساحت - د AOB د قطاع مساحت = د قطعې مساحت

$S_{\overset{\Delta}{AOB}}$ د مثلث مساحت $-S_{OAB}$ د قطاع مساحت $=S$ د قطعې مساحت

په لاندې شکل کې لیدل کېږي چې د $\overset{\Delta}{AOB}$ مثلث متساوي الساقین دی، نو په دې اساس:

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{h}{R}$$



ارتفاع $h=R\cos\frac{\theta}{2}$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

د مثلث قاعده: $AB=2R\sin\frac{\theta}{2}$

د $\overset{\Delta}{AOB}$ مثلث مساحت $=\frac{\text{قاعده}\cdot\text{ارتفاع}}{2}=\frac{h\cdot AB}{2}$

څرنګه چې $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

په نتیجه کې: $\text{مثلث مساحت}=\frac{R\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2}}{2}=\frac{R^2\sin\theta}{2}=\frac{1}{2}R^2\sin\theta$

څرنګه چې $S_{OAB}=\frac{R^2\sin\theta}{2}$ د مثلث مساحت او د قطاع مساحت $A_s=\frac{1}{2}R^2\theta$ دی.

نو:

د قطعې مساحت $S=\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}R^2\sin\theta=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$

لومړی مثال: د پورته شکل په شان که د یوې دایرې شعاع $R=6.8cm$ وي او د دې دایرې د یوې قطاع زاویه $\theta=71°$ وي، د قطاع مساحت، د ABO د مثلث مساحت او د دې دایرې د

ketabton.com - The Digital Library

قطعې مساحت پیدا کړئ.

حل:

$R = 6,8cm$

$\theta = 71°$

د قطاع مساحت $A = \pi R^2 \frac{\theta}{360°} = (6.8cm)^2 \cdot 3.14 \frac{71°}{360°} \approx 28.64cm^2$

د مثلث ارتفاع $h = R\cos\frac{\theta}{2} = 6.8cm \cdot \cos\frac{71°}{2} \approx 5.54cm$

$\cos 35^\circ 30' = 0.8141$

د مثلث قاعده $b = 2 \cdot R\sin\frac{\theta}{2} = 2 \cdot 6.8cm \cdot \sin\frac{71°}{2} \approx 7.9cm$

$\sin 35^\circ 30' = 0.5807$

د مثلث مساحت $A = \frac{1}{2}R^2 \sin\theta = \frac{1}{2}(6.8cm)^2 \cdot \sin 71° \approx 21.96cm^2$

$\sin 71^\circ = 0.9455$

د قطعې مساحت = د قطاع مساحت - د مثلث مساحت

د قطعې مساحت $= 28,64cm^2 - 21,96cm^2 = 6,68cm^2$

دویم مثال: د هغه قطعي مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې R او قوس یې $\overset{\frown}{AB}$ وي، که:

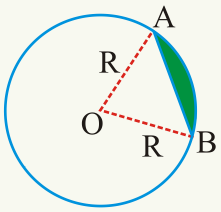
$\overset{\frown}{AB} = 60° , R = 12cm$ وي.

حل: څرنګه چې $60^\circ = \frac{\pi^R}{3}$ دی، نو:

$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(12cm)^2(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \cdot 144cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 72cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 24\pi\,cm^2 - 36\sqrt{3}\,cm^2 = (24\pi - 36\sqrt{3})cm^2$$

ketabton.com - The Digital Library

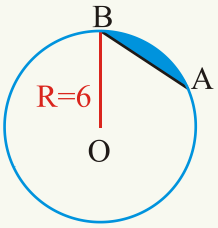


فعالیت

د هغې دایرې د قطعې مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې $6cm$ او $\overset{\frown}{AB}=120°$ قوس وي.

دریم مثال: د هغه قطعې مساحت پیدا کړئ چې د $6cm$ وتر په واسطه جلا شوی وي او د دایرې شعاع هم $6cm$ وي.

حل: څرنګه چې د قطعې قوس $\frac{\pi}{3}$ راډیانه دی:



$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)=\frac{1}{2}(6cm)^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$=18cm^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})=(6\pi-9\sqrt{3})cm^2$$

$$\approx 6(3.14)cm^2-9(1.73)cm^2=3.27cm^2$$

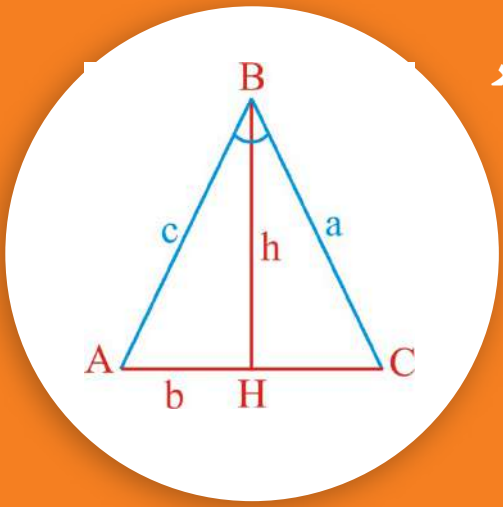
پوښتنې

1- د هغې قطاع مساحت پیدا کړئ چې د $\frac{\pi}{6}$ راډیان مرکزي زاویې په مقابل کې واقع وي، که د دایرې شعاع $20cm$ وي.

2- د هغې قطاع اړونده مرکزي زاویه پیدا کړئ چې مساحت یې $55.5cm^2$ او د دایرې شعاع $12cm$ وي.

3- که د یوې دایرې شعاع $10m$ وي، د هغو قوسونو اوږدوالی پیدا کړئ چې د $3,8$ راډیان او 27 راډیانه مرکزي زاویو په مقابل کې واقع وي.

ketabton.com - The Digital Library



د مثلث د مساحت پیدا کول د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ د زاویې له جنسه:

که په یوه مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی $4cm$ او $8cm$ وي او ددې ضلعو تر منځ زاویه $30°$ وي آیا ددې مثلث مساحت پیدا کولای شئ؟

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په پام کې نیسو او د B له راس څخه د $\overline{BH}$ ارتفاع د $\overline{AC}$ پر ضلع باندې رسموو:

څرنګه چې $\sin A = \frac{BH}{c} = \frac{h}{c}$ دی، په نتیجه کې $h = c\sin A$ کېږي له هندسې څخه پوهېږو چې د یوه مثلث مساحت ($S = \frac{\text{قاعده} \cdot \text{ارتفاع}}{2}$) دی.

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b c \sin A \qquad (h = c\sin A)$$

فعالیت

د پورتني مثلث د A او C له رأسونو څخه ارتفاع ګانې رسم کړئ او وښیاست چې:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$ او $S_{ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$ دی.

لومړی مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د دوو ضلعو اوږدوالی یې $a = 3,5cm$ او $c = 6cm$ او د دواړو ضلعو ترمنځ زاویه یې $B = 47,5°$ وي.

حل:

ketabton.com - The Digital Library

$$A=\frac{1}{2}ac\sin B$$

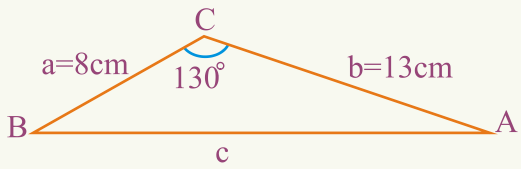
$$\sin 47.5^\circ = 0.73727733$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot 3{,}5cm\cdot 6cm\cdot \sin 47{,}5^\circ \approx 7{,}74cm^2$$

دویم مثال: د لاندې شکل د مثلث مساحت پیدا کړئ.

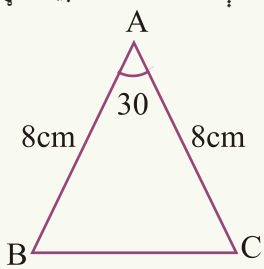
حل:

$$A=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(8)(13)\sin 130^\circ \approx 39.83\,cm^2$$



$(\sin 130^\circ = 0.7660)$

دریم مثال: د $\overset{\Delta}{A}BC$ په متساوي الساقین مثلث کې $\overline{AB}=\overline{AC}=8cm$ او $A=30^\circ$ ده، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.



$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 30^\circ$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \frac{1}{2}=16cm^2$$

د مثلث د مساحت پیدا کول د دریو ضلعو له جنسه (د هیرون فورمول)

ددې کار لپاره د یوې زاویې د نیمایي sin، د مثلث د ضلعو د اوږدوالي له جنسه په لاس راوړو:
د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې صدق کوي.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

چې a,b,c د مثلث ضلعې او p د مثلث د محیط نیمایي ده $\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$ په تیرو لوستو کې مولوستل چې:

ketabton.com - The Digital Library

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \quad \square \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}} \quad \square \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$$

په هر مثلث کې $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ چې دا رابطه د $\cos ine$ د قضيې په نوم يادېږي، دلته د دې رابطې له ثبوت څخه صرف نظر کوو او په خپل وخت کې به وروسته ثبوت شي، د $\cos A$ پر ځای يې قيمت وضع کوو.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{\frac{2bc}{2}}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

څرنګه چې: $a+b+c=2p$ دی.

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

د $(a-b+c)$ او $(a+b-c)$ قيمتونه وضع کوو، نو لرو چې:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

فعاليت

په همدې ډول وښياست چې:

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \quad , \quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$ وي.

په همدې ډول کولای شو چې د مثلث د ضلعو له جنسه د يوې زاويې نيمايي $\cos ine$ په لاس راوړو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad \square \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \quad \square \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

ketabton.com - The Digital Library

ثبوت: خرنگه چې $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ دی.

د $\cos A$ قیمت وضع کوو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{\frac{2bc}{2}}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$b+c+a-2a=2p-2a$$

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$

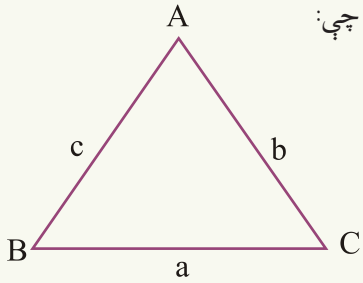
په نتیجه کې لرو چې:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

فعالیت

خرنگه چې $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ دی، وښیاست چې: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

پوهېږو چې $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ دی که د $\sin\frac{A}{2}$ او $\cos\frac{A}{2}$ قیمتونه وضع کړو لرو چې:



$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A=2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

خرنگه چې د $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ مثلث مساحت دی.

ketabton.com - The Digital Library

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

د $\sin A$ قیمت وضع کوو:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

د پورتنیو مساواتو له پرتله کولو څخه لرو چې:

$$\sin A = \frac{2}{bc} \cdot S = \frac{2S}{bc} \quad \square \quad \sin B = \frac{2S}{ac} \quad \square \quad \sin C = \frac{2S}{ab}$$

دریم مثال: د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې په لاندې ډول راکړل شوی وي.

$$a = 5cm \qquad b = 4cm \qquad c = 3cm$$

حل:

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5cm+4cm+3cm}{2} = 6cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$

$$= \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6\,cm^2$$

فعالیت

د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې: $b = 5cm$, $c = 6cm$ او $a = 4cm$ وي.

څلورم مثال: که د یوه مثلث ضلعې $a = 18cm$، $b = 24cm$ او $c = 30cm$ وي. د دې مثلث مساحت پیداکړئ.

حل

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18+24+30}{2} = 36cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)} = \sqrt{36 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 6} = 216\ cm^2$$

ketabton.com - The Digital Library

پنځم مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 29,7ft$، $b = 42,3ft$ او $c = 38,4ft$ وی.

حل:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{29.7+42.3+38.4}{2} = 55,2ft$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{55.2(55.2-29.7)(55.2-42.3)(55.2-38.4)}$$

$$= \sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)} = 552ft^2$$

د یو مثلث د محیطي دایرې د شعاع پیدا کول:

محیطي دایره هغه دایره ده چې مثلث د دایرې په داخل کې واقع وي او دایره د مثلث په درې واړو راسونو باندې مماس وي، او د محیطي دایرې مرکز د مثلث د درې واړو عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ده.

د شکل په شان د ΔABC مثلث د ضلعو اوږدوالی د a، b او c څخه عبارت دی چې د O ټکی چې د دایرې مرکز دی د مثلث د ضلعو د درې واړو عمودي ناصفونو (Bisector Perpendicular) د تقاطع ټکی هم دی.

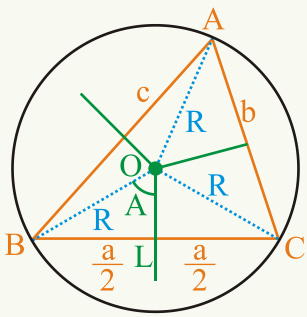
څرنګه چې د BOC مثلث متساوي الساقین دی، نو ارتفاع د $B\hat{O}C$ زاویه او د مثلث قاعده نیمایي کوي. په نتیجه کې: $\hat{A} = B\hat{O}L = L\hat{O}C$

$$\sin\hat{A} = \sin B\hat{O}L = \sin L\hat{O}C$$

څکه چې مرکزي زاویه د محیطي زاویې دوه برابره ده چې د عین قوس په مقابل کې واقع وي.

$$\sin\hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{2\cdot\frac{2s}{bc}} = \frac{abc}{4s} \qquad (\sin A = \frac{2S}{bc})$$



او د $R = \frac{a}{2\sin A}$ څخه لرو چې:

$$a = R\cdot 2\sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

ketabton.com - The Digital Library

په همدې ډول

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ يا } R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

لومړی مثال: د ABC مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې ضلعې یې $a=11cm$ ، $b=12cm$ او $c=13cm$ وي.

حل:

$$p=\frac{11+12+13}{2}=18cm \quad , \quad R=\frac{abc}{4s}=\frac{11\cdot12\cdot13}{4\sqrt{18\cdot7\cdot6\cdot5}}=6,98cm$$

فعالیت

د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $18cm$ ، $24cm$ او $30cm$ وي.

دویم مثال: د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a=3cm$ $b=5cm$ او $c=6cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{3\cdot5\cdot6}{4\cdot\sqrt{7\cdot4\cdot2\cdot1}}=\frac{90}{4\cdot\sqrt{56}}=\frac{45}{2\cdot\sqrt{56}}\approx3cm$$

د یو مثلث د محاطي دایرې د شعاع پیدا کول:

د مثلث محاطي دایره هغه دایره ده چې دایره د مثلث په دننه کې واقع وي او دایره د مثلث په دننه کې د مثلث د درې واړه ضلعو سره مماس وي، د محاطي دایرې مرکز د مثلث د درې واړو ناصف الزاویو د تقاطع ټکی (O) دی.

د $\overset{\Delta}{AB}C$ مثلث له مساحت سره د مثلثونو مساحت = د $\overset{\Delta}{OBC}$ + د $\overset{\Delta}{OCA}$ + د $\overset{\Delta}{OAB}$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr==\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r\cdot2p$$

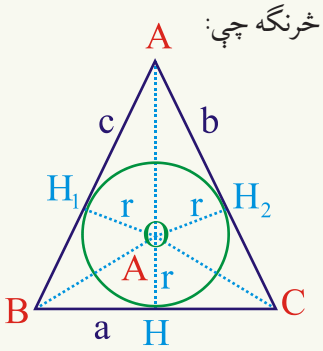
$$S=r\cdot p \Rightarrow r=\frac{s}{p}$$

ketabton.com - The Digital Library

خرنګه چې:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$



دریم مثال: د هغه مثلث د محاطي دایرې شعاع او د محاطي دایرې مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې 7cm ، 8cm او 9cm وي.

حل

$$p=\frac{7+8+9}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=26.83cm^2$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{26.83cm^2}{12cm}=2.23cm$$

د محاطي دایرې مساحت مساوي دی، په:

$$=\pi r^2=\frac{22}{7}\cdot(2.23cm)^2\approx 15.6cm^2$$

څلورم مثال: د یو قایم الزاویه مثلث دوه قایمې ضلعې په ترتیب سره 3cm او 4cm دي، د محیطي او محاطي دایرو شاع ګانې یې پیدا کړئ.

حل:

$$p=\frac{3+4+5}{2}=6cm$$

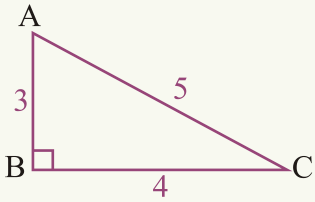
$$(\overline{AC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2$$

$$AC=\sqrt{9+16}=5$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}}=\frac{60}{4\cdot\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{60}{4\cdot6}=\frac{60}{24}$$

$$=\frac{5}{2}cm=2,5cm$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{6}{6}=1cm$$



ketabton.com - The Digital Library

پنځم مثال: د MTN په قایم الزاویه مثلث کې که قایمې ضلعې یې m او n راکړ شـوي وي، د دې مثلث مساحت او د محیطي دایرې شعاع یې پیدا کړئ.

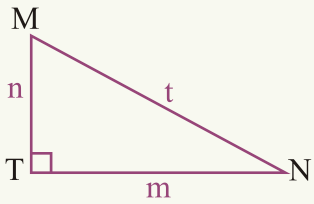
حل:

$$(\overline{MN})^2 = m^2 + n^2$$

$$t = MN = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$S = \frac{n \cdot m}{2} \ , \ R = \frac{m \cdot n \cdot t}{4S} = \frac{m \cdot n \cdot \sqrt{m^2 + n^2}}{4\frac{n\,m}{2}} = \frac{m\,n\sqrt{m^2 + n^2}}{2mn}$$

محیطی دایری شعاع $R = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}$



فعالیت

د هغه مثلث د محاطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که چېرې د ضلعو اوږدوالی یې 34cm ، 35cm او 36cm وي.

د متساوي الاضلاع مثلث ارتفاع، مساحت او د محیطـي او محاطي دایرو د شعاع ګانو پیدا کول:

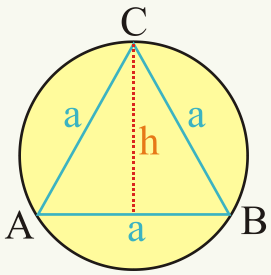
$$\sin A = \sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

د فیثاغورث د قضیې په اساس لرو چې:

$$h^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



ketabton.com - The Digital Library

د ABC مثلث مساحت $S=\frac{h\cdot a}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot a}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{a^3}{4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3a}=\frac{a}{6}\sqrt{3}$$

شپږم مثال: د يو متساوي الاضلاع مثلث محيط 18cm دی. د دې مثلث مساحت، ارتفاع او د محيطي او محاطي دايرو شعاع ګاڼي پيدا کړئ.

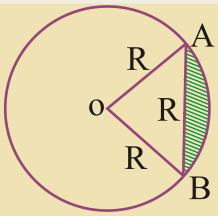
حل: د دې مثلث يوه ضلع (a) مساوي ده، په:

$$a=\frac{1}{3}\cdot 18cm=6cm$$

$$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{(6cm)^2}{4}\sqrt{3}=15,6cm^2 \qquad h=\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{6cm}{2}\sqrt{3}=5,2cm$$

$$R=\frac{a}{3}\sqrt{3}=\frac{6cm}{3}\sqrt{3}=3,5cm \qquad r=\frac{a}{6}\sqrt{3}=\frac{6cm}{6}\sqrt{3}\approx 1,7cm$$

پوښتنې



1- د شکل مطابق د OAB مثلث متساوي الاضلاع دی چې هره ضلع يې R ده. د O په مرکز دايره رسم شوې ده چې د A او B له ټکو څخه تيرېږي. د AB په وتر سره د قطعې مساحت مساوي دی په:

a) $(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$

ketabton.com - The Digital Library

2- که د یو متساوی الساقین مثلث د هر ساق اوږدوالی $6cm$ او د ساقو تر منځ زاویه یې $30°$ وي د مثلث مساحت پیدا کړئ.

3- که د یوه مثلث د دوو ضلعو اوږدوالی $5\sqrt{2}cm$ او $6cm$ وي، او دواړو ضلعو تر منځ زاویه یې $45°$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

4- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $3cm$ ، $4cm$ او $5cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 7cm$ ، $b = 9cm$ او $c = 12cm$ وي.

6- د هغه قایم الزاویه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که قایمې ضلعې یې $12cm$ او $5cm$ وي.

7- که د ABC ، د متساوي الساقین مثلث قاعده $a = 8cm$ او د دې مثلث محاطي شعاع $r = 3cm$ وي. د محیطي دایرې شعاع اوږدالی یې پیدا کړئ.

8- که د یوه قایم الزاویه مثلث مساحت $84cm^2$ وي او د یوې ارتفاع اوږدوالی یې $3,36cm$ وي، د دې مثلث د محیطي شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

د څېرکي لنډيز

- د جمعې او تفاضل فورمولونه:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ او $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ او $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

- د 2α د زاويې مثلثاتي نسبتونه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

- د يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه، د زاويې د دوه چند مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}\ ،\quad \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}\ ،\quad \tan\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

- د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\ ,\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\ ,\quad \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

- د يوې زاويې د درې چنده مثلثاتي نسبتونه د هغې زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\ ,\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

- د دريو زاويو د مجموعې $(\alpha+\beta+\theta)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\theta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\cos\alpha\cos\theta$$
$$+\sin\theta\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta$$
$$-\cos\beta\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta\sin\alpha\sin\beta$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\tan(\alpha+\beta+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\theta-\tan\alpha\tan\theta}$$

د ضرب فورمولونه (هغه فورمولونه چې د دوو زاویو د مجموعې یا تفاضل مثلثاتي نسبتونه په ضرب بدلوي).

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

• هغه فورمولونه چې د دوه زاویو د مثلثاتي نسبتونو ضرب د جمعې او یا د تفاضل په شکل بدلوي:

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

• د R په شعاع د دایرې د مرکزي زاویې (θ°) د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=\pi R\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

• د R په شعاع د دایرې مرکزي زاویې θ راډیان د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=R\theta$$

• د دایرې د سطحې هغه برخه چې د دوو شعاعو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي:

• د قطاع مساحت د $A_{sector}=\frac{1}{2}R^2\theta$ فورمول په مرسته لاسته راځي:

ketabton.com - The Digital Library

• د دايرې د سطحې هغه برخه چې د قوس او د مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه بلل کېږي:

• د قطعې مساحت د $A_{Segment} = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$ د فورمول په مرسته پيدا کېږي:

• د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ زاويې له جنسه د مثلث مساحت مساوي دی په:

$$S = \frac{1}{2}ac\sin B\ ,\quad S = \frac{1}{2}bc\sin A\ ,\ S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

• د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\quad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

• د مثلث مساحت د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

• د يوه مثلث د محيطي دايرې شعاع(R) مساوي دی په:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

يا $R = \frac{abc}{4S}$

• د يوه مثلث د محاطي دايرې شعاع د فرمول څخه په لاس راځي. يا $r = \frac{s}{p}$

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

ketabton.com - The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- وښیاست چې د متساوي الاضلاع مثلث مساحت $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ دی، که a د مثلث یوه ضلع وي؟

2- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a=7cm$ ، $b=8cm$ او $c=9cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ؟

3- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\cos 165°$ او $\sin 165°$ پیدا کړئ؟

4- $\sin(-165°)=?$ مساوي دی په:

$a)\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $b)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $c)\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5- وښیاست چې: $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos 3\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ دی.

6- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندنیو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟

$\sin(30°+45°)$ $\cos(150°-45°)$ $\tan(30°+60°)$

$\sin(135°+180°)$ $\sin(135°-180°)$ $\tan(180°-45°)$

7- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندنیو رابطو سموالی وښیاست.

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ $\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$

8- که $0°<\theta<90°$ او $\sin\theta=\frac{2}{5}$ وي، د $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ ، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمتونه په لاس راوړئ؟

9- وښیاست چې:

$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$ ، $\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta$ ، $\cos 2\theta+2\sin^2\theta=1$

$2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta$ ، $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\cos\theta-\sin\theta$

ketabton.com - The Digital Library

10- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $5cm$ ، $7cm$ او $8cm$ وي، د دې مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګانې پیدا کړئ؟

11- $\sin(180^\circ+\theta)=?$

$a)\ \sin\theta$ $b)\ -\cos\theta$ $c)-\sin\theta$ $d)\cos\theta$

12- د جمعی او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta$ ، $\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$ او $\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$

13- $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=?$

$a)\ 2\sin\alpha\sin\beta$ $b)2\cos\alpha\cos\beta$ $c)-2\sin\alpha\sin\beta$

14- وښیاست چې: $\dfrac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha}=\sin 5\alpha$ دی؟

15- لاندې د مثلثاتی نسبتونو ضرب حاصلونه د مجموعې او یا تفاضل په شکل ولیکئ؟

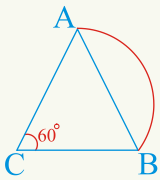
$\cos 100^\circ \sin 50^\circ$ ، $\cos 40^\circ \cos 60^\circ$

$\sin 8\theta \cos 10\theta$ ، $\sin\dfrac{3\theta}{2}\sin\dfrac{5\theta}{2}$

16- لاندې د مثلثاتی نسبتونو مجموعې او یا تفاضل د ضرب د حاصل په څېر ولیکئ؟

$\sin 80^\circ-\sin 72^\circ$. $\sin 12\theta+\sin 8\theta$

17- وښیاست چې: $\dfrac{\sin 5\theta+\sin 3\theta}{\cos 5\theta-\cos 3\theta}=-\cot\theta$ دی.



18- د یوې دایرې مساحت $180cm^2$ دی، ددې دایرې د 80° قطاع مساحت پیدا کړئ.

19- د شکل مطابق د 60° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $(1cm)$ دی. د دې قوس شعاع او د د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library

-20 $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ} = ?$

$a) -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $b) \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $c) \sqrt{3}$ $d) -\sqrt{3}$

-21 که $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ او د θ دویمه ضلع په لومړۍ ربع کې وي، $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ؟

-22 وښیاست چې: $\tan(45^\circ + \theta) = \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ دی؟

-23 $\cos 37^\circ \cos 53^\circ - \sin 37^\circ \sin 53^\circ$ مساوي دی په:

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ دري واړه ناسم دي

-24 $\cos 60^\circ \cos 14^\circ + \sin 60^\circ \sin 14^\circ$ مساوي دی په:

$a) \cos 74^\circ$ $b) \cos 46^\circ$ $c) \sin 74^\circ$ $d) \sin 46^\circ$

-25 $\cos 14^\circ \cos 31^\circ - \sin 14^\circ \sin 31^\circ$ مساوي دی په:

$a) \cos 17^\circ$ $b) \cos 45^\circ$ $c) \sin 17^\circ$ $d) -\sin 17^\circ$

-26 $\cos 80^\circ \cos 35^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ$ مساوي دی په:

$a) \cos 115^\circ$ $b) \sin 115^\circ$ $c) \cos 45^\circ$ $d) \sin 45^\circ$

-27 که $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ ، $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$ وي، α او β په لومړنۍ ربع کې واقع وي $\cos(\alpha - \beta)$ پیدا کړئ؟

-28 که $\cos\theta = -\dfrac{8}{17}$ ، $\cos\square = -\dfrac{3}{5}$ وي او د θ او $\square$ دویمې ضلعې په دریمه ربع کې واقع وي. $\cos(\theta - \square)$ پیدا کړئ؟

-29 وښیاست چې: $\dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)} = \tan x \cdot \tan y$ دی.

ketabton.com - The Digital Library

30- $\cos(0^\circ - t) = ?$

$a)\sin t \qquad b)\cos t \qquad c)-\sin t \qquad d)-\cos t$

31- وښیاست چې: $\dfrac{\cos\theta \cdot \sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \sin\theta$ دی؟

32- وښیاست چې:

$$\frac{\cos 8x+\cos 4x}{\cos 8x-\cos 4x} = -\cot 6x \cot 2x$$

$$\frac{\sin 4x+\sin 6x}{\cos 4x-\cos 6x} = \cot x \quad , \qquad \frac{\sin x-\sin 3x}{\cos x+\cos 3x} = -\tan x$$

$$\frac{\sin x-\sin 3x}{\cos x-\cos 3x} = -\cot 2x \quad , \qquad \frac{\sin t+\sin 3t}{\cos t+\cos 3t} = \tan 2t$$

33- $\cos(x+y)\cos y+\sin(x+y)\sin y$ افاده مساوي ده په:

$a)\sin x \qquad b)\cos x \qquad c)-\sin x \qquad d)-\cos x$

34- $\sin(x-y)\cos y+\cos(x-y)\sin y = ?$

$a)\sin x \qquad b)\cos x \qquad c)-\sin x \qquad d)-\cos x$

35 – د هغې قطاع مساحت چې شعاع يې $2m$ او مرکزي زاویه يې $0,5$ $radian$ وي، مساوي ده په:

$a)\ 3m^2 \qquad b)\ 2m^2 \qquad c)\ 1m^2 \qquad d)$ درې واړه سمې نه دي

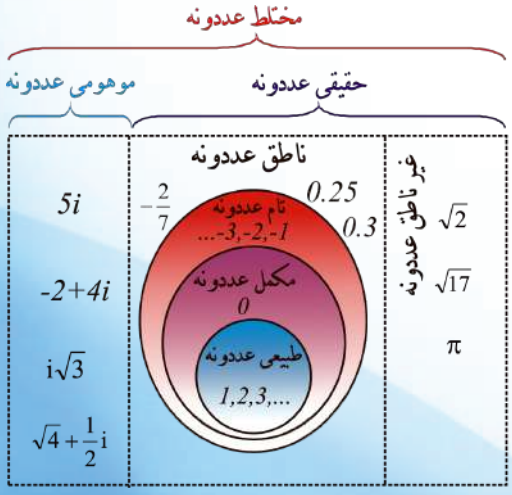
36 – که د يوې دايرې د يوې قطاع مساحت 200cm^2 او مرکزي زاویه يې 2 radian وي، د دې دايرې شعاع مساوي ده په:

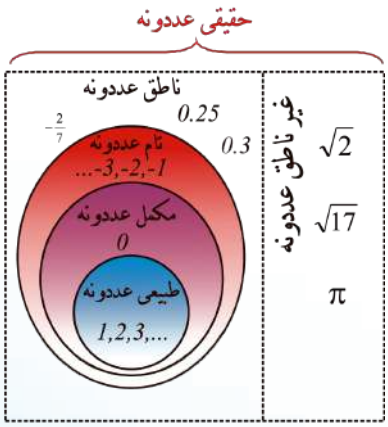
a) 14.14cm b) -14.14cm c) 14cm d) درې واړه غلط دي.

ketabton.com - The Digital Library

شپږم څپرکی
مختلط عددونه

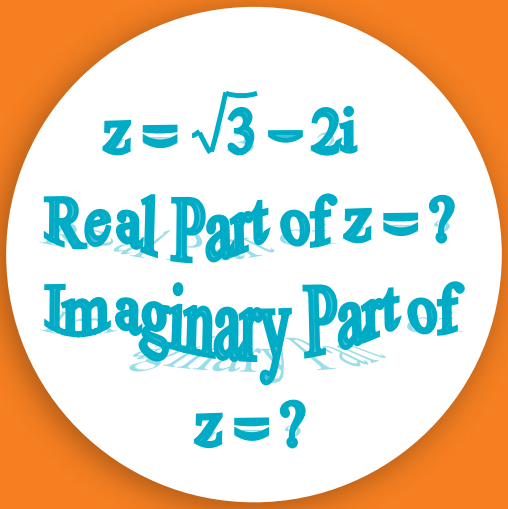
ketabton.com - The Digital Library





ketabton.com - The Digital Library

مختلط عددونه
(Complex Numbers)



آیا ویلای شئ چې د $x^2+9=0$ معادله ولې د حقیقي عددونو په ست کې حل نه لري؟

آیا پوهېږئ چې د حقیقي عددونو ست د مختلطو عددونو د ست یو فرعي ست دی؟

موهومي عددونه (Imaginary Numbers):

$\sqrt{-1}=i$ یا $i^2=-1$ دی د i توری له یوناني کلمې (iota) څخه اخیستل شوی دی چې $\sqrt{-1}=i$ ته، د موهومي عددونو واحد وایي.

لومړی مثال: $\sqrt{-16}$ پیدا کړئ.

حل: $\sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\cdot 16}=\sqrt{-1}\sqrt{16}=i\sqrt{16}=\pm 4i$

دویم مثال: د $x^2+a^2=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$x^2+a^2=0$$
$$x^2=-a^2$$
$$x=\pm\sqrt{-a^2}=\pm\sqrt{(-1)\cdot(a^2)}=\pm a\sqrt{-1}=\pm ai$$

ai او ai − موهومي عددونه دي (چې a یو حقیقي عدد دی).

د (i) طاقتونه (Powers of i):

لیدل کېږي چې د $i^2=-1$ یا $i=\sqrt{-1}$ په مرسته موهومي عددونه ساده کولای شو . په یاد ولرئ چې د حقیقي عددونو مربع مثبت او د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$$i=\sqrt{-1} \qquad i^2=(\sqrt{-1})^2=-1 \qquad i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot(i)=-i$$

$$i^4=(\sqrt{-1})^4=[(\sqrt{-1}^2)]^2=(-1)^2=1 \quad \text{یا} \quad i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$$

$$i^5=i^4\cdot i=(1)(i)=i \qquad i^6=(i)^4\cdot(i)^2=(1)\cdot(-1)=-1$$

ketabton.com - The Digital Library

$$i^7 = (i)^6 \cdot (i) = (-1) \cdot (i) = -i \qquad i^8 = i^7 \cdot i = (-i) \cdot (i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

(i) ته موهومي واحد وايي.

له دې څايه نتيجه په لاس راځي، که د موهومي واحد توان $n = 4$ يا يوداسې عددوي چې پر څلورو د وېش وړوي، نو له يوه (1) سره مساوي دی.

دريم مثال:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$
$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$
$$i^{16} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$
$$\vdots$$
$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \ldots i^4 = 1$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1 \cdot i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1(-1)i = -i$$

فعاليت

$(i)^{61}, (i)^{-37}$ و $(i)^{256}$ طاقتونو قيمت پيدا کړئ.

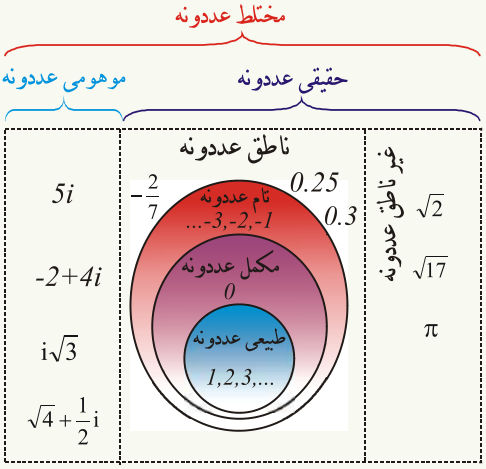
څلورم مثال: i^{54}، i^{1998} او i^{89} پيدا کړئ.

حل: که د 54 عدد پر 4 ووېشو، پاتې (باقي) يې 2 ده، نو:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4 \cdot 13} \cdot i^2 = (i^4)^{13} \cdot i^2 = (1) \cdot i^2 = (1) \cdot (-1) = -1$$
$$i^{1998} = i^{4(499)} \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = i^2 = -1$$
$$i^{89} = i^{4 \cdot 22} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

هغه عددونه چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکټور وي، د موهومي عددونو په نوم يادېږي. د i طبيعي توانونه يو له i، 1، $-i$ او -1 عددونو څخه دي. د حقيقي عددونو مربع مثبت اود موهومي عددونو مربع منفي ده.

ketabton.com - The Digital Library



د عددونو ستونه د تاریخ په اوږدوکې د اړتیاوو او د ریاضي د علم له انکشاف سره سم منځ ته راغلي دي، لکه: څرنګه چې پوهېږئ، د طبیعي عددونو ست $IN = \{1,2,3,4....\}$ ټولو مسألو ته ځواب نه شي ویلای. د مثال په ډول د $3x = 0$ معادله د طبیعي عددونو په ست کې حل نه لري، ښکاره خبره ده چې ځواب یې $x = 0$ دی، نو یو بل ست ته اړتیا پیدا شوه چې د مکملو عددنو ست $W = \{0,1,2,3,...\}$ دی. دا ست هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x + 2 = 0$ معادله د مکملو عددونو په ست کې حل نه لري، ځکه چې ځواب یې $x = -2$ دی چې 2 - د مکملو عددونو په ست کې شامل نه دی، نو یو بل ست ته اړتیا پیدا شوه چې منفي عددونه هم ولري چې د تامو عددونو د ست (Integer Numbers set) یا $I = \{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ په نامه یادېږي، خو د عددونو په دې ست کې هم د $2x + 1 = 2$ د معادلې حل نشته، ځکه چې حل یې $x = \frac{1}{2}$ دی، نو د ناطقو عددونو ست (Rational Numbers Set) منځ ته راغی خو د $x^2 - 2 = 0$ معادله د ناطقو یا ګویا عددونو په ست کې هم حل نه لري، ځکه چې، ددې معادلې حل $x = \sqrt{2}$ دی چې $\sqrt{2}$ د غیرو ناطقو عددونو (Irrational Numbers set) په ست کې شامل دی، نو د غیر ناطقو عددونو ست منځ ته راغی د ناطقو او غیر ناطقو عددونو د سیټونو مجموعې ته د حقیقي عددونو ست (Real Numbers Set) وایي.

خود حقیقی عددونو ست هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x^2 + 16 = 0$ یا د $x^2 + 1 = 0$ د معادلو حل د حقیقي عددونو په ست کې نه شته دی.

ketabton.com - The Digital Library

یا په بل عبارت منفي عددونه د حقیقي عددونو په سټ کې جفت جذر نه لري، لکه: $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$ او نور، خو هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. په 1795م. کال کې یو جرمني ریاضي پوه ګوس (Gauss) د مختلطو عددونو مفهوم په لاندې ډول وړاندې کړ. که یو مختلط عدد په z سره وښایو $z = a + bi$ چې د یو مختلط عدد معیاري شکل دی چې a د z عدد حقیقي برخه (Real Part of z) او bi د z د مختلط عدد موهومي برخه (Imaginary Part of z) ده، د مختلطو عددونو سټ داسې تعریف کېږي.

$C = \{z \mid z = a + bi \ , \ a, b \in \mathbb{R} \ , \ i^2 = -1\}$ د z یو مختلط عدد د یوې مرتبې جوړې په شکل هم لیکلای شو : $z = a + bi = (a, b)$, $z = a - bi = (a, -b)$ که a=0 شي: $Z = 0 + bi = bi$ چې bi ته خالص موهومي عدد (Pure imaginary number) وایي او که $b = 0$ وي، نو $z = a + 0 \cdot i = a$ (چې a یو خالص حقیقي عدد (Pure real number) دی) په یاد ولرئ چې مختلط عددونه، لکه: حقیقي عددونه د ترتیب خاصیت نه لري.

صفري مختلط عدد (Zero Complex Number):

هغه عدد دی چې حقیقي او موهومي دواړه برخې یې صفرونه وي. $(a = 0 \quad b = 0)$ ، نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ صفري مختلط عدد دی.

فعالیت

په $4 + 3i$ او $2 - 5i$ مختلطو عددونو کې حقیقي او موهومي برخې وښیاست.

لومړی مثال: د $1 - i$, $\sqrt{3} - 3i$, $5i$ او $2 - 5i$ په مختلطو عددونو کې حقیقي او موهومي برخې وښیاست.

حل: په $1 - i$ کې حقیقي برخه یې 1 او موهومي برخه یې $-i$ ده.

ketabton.com - The Digital Library

د $\sqrt{3}-3i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې $\sqrt{3}$ او موهومي برخه یې $-3i$ ده، په $2-5i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې 2 او موهومي برخه یې $-5i$ ده.

په $5i$ کې حقیقي برخه صفر او موهومي برخه یې $5i$ ده.

دویم مثال: د $6i$ ، -9 ، 0 ، $9-i$ او $i-1$ مختلط عددونه په معیاري شکل (Standard Form) وليکئ.

حل: څرنګه چې $z=a+bi$ ته د مختلط عدد معیاري شکل وایي چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده. په لاندې جدول کې پورتني مختلط عددونه په معیاري شکل ښودل شوي دي.

مختلط عددونه	معیاری شکل $(z=a+bi)$
$6i$	$0+6i$
-9	$-9+0i$
0	$0+0i$
$9-i$	$9-i$
$i-1$	$-1+i$

$z=a+bi$ د یوه مختلط عدد معیاري شکل دی چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده، که $a=0$ وي، نو bi خالصه موهومي برخه اوکه $b=0$ وي، نو a د مختلط عدد خالصه حقیقي برخه ده او هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1- د $(i)^{-33},(i)^{79},(i)^{202},(2i)^2$ او $(3i)^2$ قیمتونه پیداکړئ.

2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معیاري شکل ولیکئ.

$$-i-4 \quad , \quad 5i \quad , \quad -4i+\sqrt{2} \quad , \quad -3i$$

3- $7-i\ ,\ 5+3i\ ,\ -3i$ $\sqrt{5}-\sqrt{7}i$ مختلط عددونه د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ.

4- د $-i$ په مختلط عدد کې حقیقي برخه مساوي ده په:

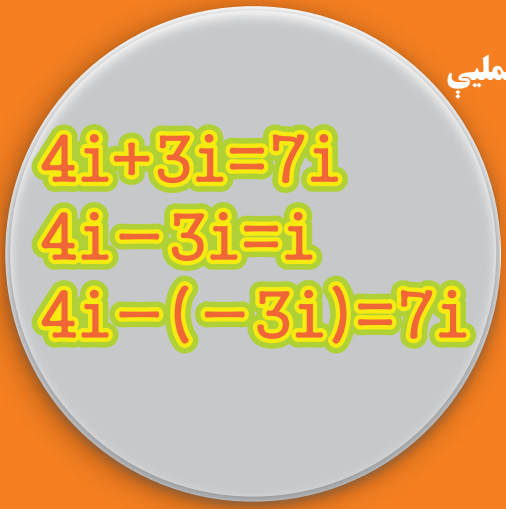
a) 1 , b) -1 , c) 0 , d) 2

5- د $\sqrt{-16}$ عدد جذر مساوي دی په:

a) ± 4 , b) -4 , c) $\pm 4i$, d) ± 2

ketabton.com - The Digital Library

د موهومي عددونو څلورګونې عملیې



آیا د $3i$ او $4i$ موهومي عددونه جمع کولای شئ؟

آیا د $10i$ او $50i$ موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي عدد دی؟

د موهومي عددونو جمع او تفریق: موهومي عددونه کولای شو چې په لاندې ډول یې جمع او تفریق کړو.

a: د جمعې عملیه: د دوو موهومي عددونو د جمعې حاصل یو موهومي عدد دی.

لومړی مثال: د $(7i+8i)$ او $5i$ او $\sqrt{7}i$ د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$7i+8i=(7+8)i=15i$$

$$\sqrt{7}i+5i=(\sqrt{7}+5)i$$

b: د تفریق علمیه: د دوو عددونو د تفریق حاصل یو موهومي عدد دی.

دویم مثال: $7i-4i$ او $9i-13i$ د تفریق حاصل پیدا کړئ.

$$7i-4i=(7-4)i=3i$$

$$9i-13i=(9-13)i=-4i$$

c: د ضرب عملیه: د دوو موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي (Real number) عدد دی.

دریم مثال: د $(5i)\cdot(10i)$ او $(\sqrt{9}i)\cdot(\sqrt{4}i)$ د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$(10i)\cdot(5i)=(10)\cdot(5)\cdot i\cdot i=50i^2=-50$$

ځکه چې $i^2=-1$ دی نو $50i^2=50\cdot(-1)=-50$ چې -50 یو حقیقي عدد (Real number) دی.

همدارنګه $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)=\sqrt{4\cdot9}\cdot i\cdot i=\sqrt{36}\cdot i^2=6\cdot(-1)=-6$

ketabton.com - The Digital Library

د موهومي عددونو د ضرب په عمليه کې د تبديلي خاصيت (Commutative Property)
صدق کوي يعني: $\boxed{(ai)\cdot(bi)=(bi)\cdot(ai)=-ab}$

فعاليت

$(\frac{2}{3}i)\cdot(-\frac{3}{5}i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

d : **د وېش عمليه**: د دوو موهومي عددونو دوېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

څلورم مثال: $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$, $\frac{5i}{7i}$ او $\frac{\sqrt{13}\ i}{\sqrt{3}\ i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

1) $\frac{5i}{7i}=\frac{5}{7}$ ($\frac{5}{7}$ يو حقيقي عدد دی)

2) $\frac{\sqrt{13}\,i}{\sqrt{3}\ i}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ ($\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ يو حقيقي عدد دی)

3) $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\,i}{\sqrt{5}\,i}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

فعاليت

$36i$ پر $-2i$ ووېشئ.

د موهومي عددونو د جمعي او ضرب په عمليو کې د تبديلي خاصيت صدق کوي. د دوو موهومي عددونو د ضرب او وېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

پوښتنې

1) جمع يې کړئ. $\sqrt{7}\,i+\sqrt{7}\,i$, $\sqrt{-7}+\sqrt{-4}$, $\sqrt{-1}b+\sqrt{-1}c$

2) تفريق يې کړئ. $5i-2i$, $12i-7i$, $\sqrt{5}\,i-\sqrt{5}\,i$

3) لاندې موهومي عددونه سره ضرب او تقسيم کړئ.

$(\frac{7}{4}i)(-\frac{2}{9}i)$, $(\sqrt{7}\,i)\cdot(-7i)$, $(3i)\cdot(5i)$, $\frac{16i}{-4i}$, $\frac{13i}{26i}$

ketabton.com - The Digital Library

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې:

آیا د $3x-2yi=6+i$ له مساوات څخه د x او y قیمتونه په لاس راوړلای شئ؟

آیا پوهېږئ چې کوم عدد ته د مختلطو عددونو د جمعې د عملې د عینیت عنصر وایي؟

مساوي مختلط عددونه (Equal Complex Numbers): دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. د $z_1=a+bi$ او $z_2=x+yi$ عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې $x=a$ او $y=b$ وي.

لومړی مثال: که چېرې $z_1=x_1+2y_1i$ او $z_2=3-5i$ وي، نو هغه وخت $z_1=z_2$ دی چې: $x_1=3$ او $y_1=-\frac{5}{2}$ وي.

فعالیت

1- که چېرې $z_1=\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,yi$ او $z_2=-5-6i$ وي، د $z_1=z_2$ له مخې د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

2- که چېرې $2+mi=k+3i$ وي د m او k حقیقي عددونو قیمت پیدا کړئ.

د مختلطو عددونو د جمعې عملیه: د مختلطو عددونو د جمعې عملیه داسې تعریف شوې ده. که چېرې $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي، نو:

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\cdot i$$

ketabton.com - The Digital Library

یا په بل عبارت د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دې دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلي وي.

دویم مثال: که چېرې $z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وی، $z_1 + z_2$ پیدا کړئ

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3 + 4)i = 5 + i$$

په همدې ډول:

$$(3 - 4i) + (-2 + 6i) = (3 - 2) + (-4 + 6)i = 1 + 2i$$

$$(-9 + 7i) + (3 - 15i) = (-9 + 3) + (7 - 15)i = -6 - 8i$$

$0 + 0i$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینت عنصر (additive identity) دی، ځکه چې: $(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi$.

همدارنګه د $a + bi$ عدد جمعې معکوس (additive inverse) د $-a - bi$ عدد دی، ځکه چې: $(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$

فعالیت

د $(3x - yi) + (5x + 3yi)$ د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

د مختلطو عددونو د تفریق عملیه: د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه په لاس راغلي وي یعنې: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

لومړی مثال: $(-4 + 3i) - (6 - 7i) = (-4 + 3i) + (-6 + 7i) = -10 + 10i$

دویم مثال: $(12 - 5i) - (8 - 3i) = (12 - 8) + (-5 + 3)i = 4 - 2i$

ketabton.com - The Digital Library

دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د حقيقي برخو اوموهومي برخه يې د موهومي برخو له مجموعی څخه په لاس راغلي وي، په همدې ډول د دوو مختلطو عددونو د تفريق حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له حاصل تفريق څخه په لاس راغلي وي.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(2+5i)+(3+4i)$ ، $(13-12i)+(13+12i)$

$(-3+6i)+(10-7i)$ ، $(\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)$

2- لاندې مختلط عددونه يو له بله تفريق کړئ.

$(5-i)-(7+3i)$

$(2\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{7}\,i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}\,i)$

$(3c+4di)-(3c+8di)$

3- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوس پيدا کړئ.

$2+3i$ ، $(2,-3)$ ، $\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

4- که $(x,y\in IR)$ او $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ وي، د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

5- لاندې عملیې سرته ورسوئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ

ketabton.com - The Digital Library

$(2+3i)+(-5+2i)$

$(-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)$

$(2+3i)+(-5-i)$

$(6-5i)+(3+2i)$

$(3.7+6.1i)-(1+5.9i)$

$(8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)$

$(-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)$

$(-2+5i)+(3-i)$

$(3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)$

$(-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)$

$(-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})$

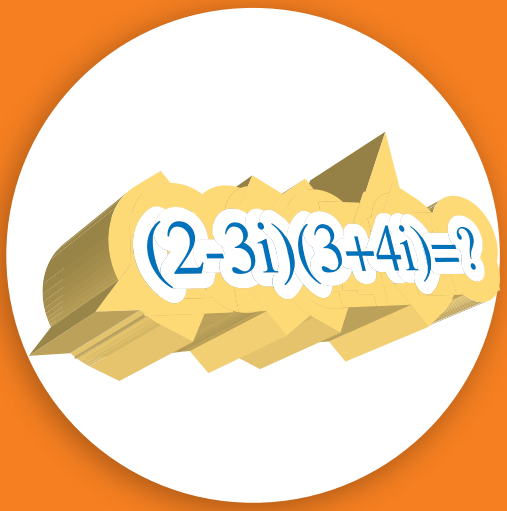
$(\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})$

6- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوس پيداکړئ.

$2-3i$	$8+11i$	$1-i$	$-1+i$
$5-8i$	$-13+13i$	$-5i$	$2i$

ketabton.com - The Digital Library

د مختلطو عددونو ضرب



آیا کولای شئ چې د $(2-3i)(3+4i)$ مختلطو عددونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ؟

د $i^2=-1$ په نظر کې نیولو سره د دوو مختلطو عددونو ضرب په لاندې ډول دی که:

$z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي.

$$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bidi$$
$$=ac+adi+bci+bdi^2$$
$$=ac+(ad+bc)i+bd(-1)$$
$$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

لومړی مثال: د $(5-4i)\cdot(7-2i)$ ضرب حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$(5-4i)(7-2i)=5(7)+5(-2i)+(-4i)(7)-4i(-2i)=35-10i-28i+8i^2$$
$$=35-38i+8(-1)$$
$$=35-38i-8$$
$$=27-38i$$

فعالیت

د $(3+4i)(2-3i)$ ضرب حاصل په لاس راوړئ.

خرنګه چې $(a+bi)(1+0i)=a\cdot1+a\cdot0i+bi\cdot1+bi\cdot0i=a+bi$ دی، نو $1+0i$ ته د مختلطو عددونو د ضرب د عملیې د عینیت عنصر (Multiplicative identity) وایي لکه:

$$(3+5i)(1+0i)=3+5i$$

ketabton.com - The Digital Library

د یوه مختلط عدد مزدوج (Conjugate of a Complex Number):

د $z = x + yi$، د مختلط عدد مزدوج $\bar{z} = x - yi$ دی په دې ډول چې:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , \quad 2x\,Re(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \quad , \quad 2yi\,Im(z)$$

دویم مثال: د $z = 3 + 4i$ د عدد مزدوج $\bar{z} = 3 - 4i$ دی، $z - \bar{z}$, $z + \bar{z}$ او $z \cdot \bar{z}$ په لاس راوړئ:

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3(3) + 3(-4i) + 4i(3) + 4i(-4i)$$

$$= 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$

$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$ (6 یو حقیقي عدد دی)

$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$ (8i یو موهومي عدد دی)

فعالیت

د $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 7 + i$ او $z_3 = \sqrt{5} + \sqrt{7}\,i$ مختلطو عددونو مزدوجونه پیدا کړئ.

څرنګه چې وموليدل، د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره، یوازې د موهومي برخې علامه تغیروو لکه:

عدد	مزدوج یې
-i	i
1-i	1+i
-4+2i	-4-2i
5i-6	-5i-6

د یو مختلط عدد ضربي معکوس (Multiplicative inverse)

پوهېږو چې د $a + bi$ د عدد مزدوج $a - bi$ دی او

$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (b^2 i^2) = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$ دی.

ketabton.com - The Digital Library

د $a+bi$ عدد د ضربي معکوس د پیدا کولو له پاره د $\frac{1}{a+bi}$ عدد د مختلط عدد په معیاري شکل لیکو، نو د $\frac{1}{a+bi}$ د عدد صورت او مخرج په $a-bi$ کې ضربوو. ($a-bi$ د مخرج مزدوج دی)

$$\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

د $(a+bi)$ د عددضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

دریم مثال: د $2-3i$ د عدد ضربي معکوس پیدا کړئ.

$$\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

څلورم مثال: د x^2+4 افاده تجزیه کړئ.

$$x^2+4=x^2-(-1)\cdot 4=x^2-(i)^2\cdot 4=x^2-(2i)^2=(x-2i)(x+2i)$$

فعالیت

د $5+3i$ او $\sqrt{2}-4i$ مختلطو عددونو ضربي معکوس پیدا کړئ.

که چېرې $z=x+yi$ او $w=x'+y'i$ دوه مختلط عددونه وي، نو $z\cdot w$ په دې ډول تعریف شوی دی.

$$z\cdot w=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i$$

د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره یوازې د موهومي برخې علامه تغیرو او $a+bi$ د مختلط عدد ضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ.

$(2+i)(3-2i)$, $(3+i)(3-i)$

$(-2+3i)(4-2i)$, $(2-5i)(2+5i)$

$(5+2i)(5-3i)$, $(\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i)$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

2- د لاندې مختلطو عددونو ضربي معکوس پیدا کړئ.

$1-i$, $2+4i$, $5-3i$, $3a-4bi$, $(7,4)$

3- لاندې افادې تجزیه کړئ.

x^2+16 , x^2+8 , x^2+5 , x^2+7

4- د $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قیمتونه په لاس راوړئ.

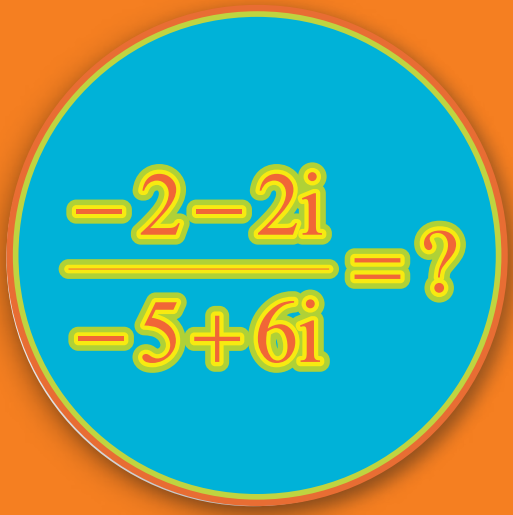
5- که $z=4-3i$ وي، $8z-z^2$ پیدا کړئ.

6- دا معادله حل کړئ. $x+yi=(2-3i)(2+3i)$.

7- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، د i مربع جذر دی.

8- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ د $-i$ دریم جذر دی.

ketabton.com - The Digital Library



د دوو مختلطو عددونو وېش
Division of two complex numbers

آیا د $\frac{-2-2i}{-5+6i}$ د وېش حاصل (خارج قسمت) په لاس راوړلای شئ؟

څرنګه چې د $\frac{a+bi}{c+di}$ عدد په مخرج کې c حقیقي عدد او di موهومي عدد دی، نو لومړی باید مخرج په حقیقي عدد بدل کړو، ددې لپاره صورت او مخرج، د مخرج په مزدوج کې ضربوو چې دې عملیې ته ګویا کول (Rationalization) وایي.

لومړی مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل: د $2+5i$ مزدوج $2-5i$ دی، صورت او مخرج د مخرج په مزدوج یا $2-5i$ کې ضربوو.

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2}=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}$$

$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

لیدل کېږي چې د وېش په حاصل کې حقیقي او موهومي برخې سره جلا دي.

فعالیت

د $\frac{1+i}{1-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ او خپل ځواب د مختلط عدد په معیاري شکل ولیکئ.

ketabton.com - The Digital Library

تعریف

که $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي، $\frac{z_1}{z_2}$ په لاندې ډول تعریف شوی دی

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=\frac{ac+bd-(ad-bc)i}{c^2+d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

دویم مثال: د $z_1=2-3i$ عدد پر $z_2=1+i$ وویشئ او بیا یې امتحان کړئ.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1+i}=\frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1-5i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$$

$$(1+i)(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i)=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}i-\frac{5}{2}i^2=-\frac{1}{2}-3i+\frac{5}{2}=2-3i$$

دریم مثال: د $\frac{3+2i}{5-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\frac{3+2i}{5-i}=\frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{15+3i+10i+2i^2}{25-i^2}=\frac{15+13i-2}{25+1}=\frac{13+13i}{26}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

که $z=x+yi$ او $w=x'+y'i$ دوه مختلط عددونه وی، نو $\frac{z}{w}$ داسې تعریف شوی دی.

$$\frac{z}{w}=\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}+\frac{x'y-xy'}{x'^2+y'^2}i \quad , \quad (x'^2+y'^2\neq 0)$$

د یو مختلط عدد د مزدوج خاصیتونه:

که z_1 او z_2 دوه مختلط عددونه وي:

1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

ketabton.com - The Digital Library

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$

4) $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5) $z + \overline{z} = 2x$

6) $z - \overline{z} = 2yi$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

لومړی مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ او $z_2 = -3 + 2i$ وي، وښیاست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ او $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

حل:

$$z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (-3 + 2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$
$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4 - 5i) + (-3 - 2i) = 1 - 7i$$

په پایله کې $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i) \cdot (-3 + 2i) = -12 - 10 + (8 - 15)i = -22 - 7i$$
$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4 - 5i) \cdot (-3 - 2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2 = -12 - 8i + 15i - 10$$
$$= -22 + 7i$$

په پایله کې: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$

دویم مثال: که $z = x + yi$ وي $z + \overline{z}$ او $z - \overline{z}$ پیدا کړئ.

حل: $z - \overline{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$, $z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x$

فعالیت

که $z = 2 + 3i$ وي، $Z + \overline{Z}, \overline{\overline{Z}}$ او $Z - \overline{Z}$ پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

1- د وېش حاصل يې پيدا کړئ:

$$\frac{7-i}{3-5i} \quad , \quad \frac{5-2i}{6-i} \quad , \quad \frac{3-4i}{2-5i} \quad , \quad \frac{1+i}{1-1}$$

2- که $z_1 = -a-3bi$ او $z_2 = 2a-3bi$ وي. وښياست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ او $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ دی.

3- د وېش حاصل پيداکړئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$$a: \frac{2}{5-i} \qquad b: \frac{3-i}{2+i} \qquad c: \frac{2-3i}{3}$$

4- د $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ د وېش حاصل مساوي دی په:

$$a:1 \qquad b:2 \qquad c:3i \qquad d:-2$$

5- خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

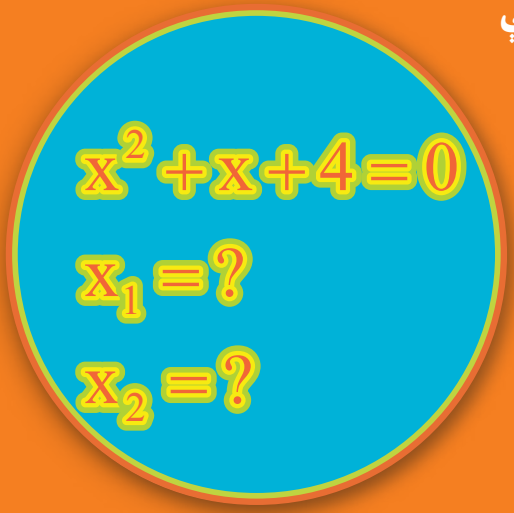
$$\frac{3+4i}{4i} \qquad \frac{-5}{2-3i} \qquad \frac{6}{1+3i}$$

$$\frac{7}{7-2i} \qquad \frac{-4+8i}{2-4i} \qquad \frac{3-2i}{-6+4i}$$

$$\frac{1}{i}$$

ketabton.com - The Digital Library

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دويمې درجې يو مجهوله معادلې حل:



آيا د $x^2+x+4=0$ معادلې جذرونه پيدا کولای شئ؟

د يوې دويمې درجې يو مجهوله معادلې عمومي شکل $ax^2+bx+c=0$ ، $(a\neq 0)$ دی.

که $\Delta=b^2-4ac>0$ معادله دوه د مختلفو علامو لرونکي حقيقي جذرونه لري.

که $\Delta=0$ معادله دوه مساوی جذرونه لري.

که $\Delta<0$ معادله د حقيقي عددونو په ستې کې حل نه لري، خو د مختلطو عددونو په ساحه کې دوه جذرونه لري.

لومړی مثال: د $x^2-10x+26=0$ معادله حل کړئ.

حل: $a=1 \quad b=-10 \quad c=26$ دی.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot26}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$=\frac{10\pm2i}{2}=5\pm i \quad \Rightarrow \quad x_1=5+i \quad x_2=5-i$$

فعالیت

دا جذرونه په پورتنۍ معادله کې وضع او امتحان يې کړئ.

دويم مثال: د $4x^2+4i\,x+15=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(4i)^2-4\cdot4\cdot15=16i^2-240=-256$$

$$\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{-256}=\pm\sqrt{256(-1)}=\pm16i$$

ketabton.com - The Digital Library

$$x_1 = \frac{-4i+16i}{2\cdot 4} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i-16i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

دریم مثال: $x^2+3ix-2=0$ معادله د محمد بن موسی د فورمول په مرسته، د مختلطو عددونو په ساحه کې حل کړئ.

$$\Delta = b^2-4ac = (3i)^2-4\cdot 1\cdot(-2) = 3^2\cdot i^2+8 = -9+8 = -1$$
$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$
$$x_{1,2} = \frac{-3i\pm i}{2\cdot 1} \qquad x_1 = \frac{-4i}{2} = -2i \qquad x_2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

فعالیت

د $x^2+3=0$ ، $x^2-6x+18=0$ او $x^2-4x+13=0$ معادلې حل کړئ.

پوښتنې

1) هغه دویمه درجه معادله پیدا کړئ چې جذرونه یې $(3+2i)$ او $(3-2i)$ وي.
2) لاندې معادلې حل کړئ.

$$x^2-4x+13=0 \ , \ x^2-6x+18=0 \ , \ -4x^2+3x-5=0$$
$$x^2+8x+41=0 \ , \ x^4-1=0 \ , \ 3x^2+x+2=0$$

3) داسې دویمې درجې معادلې په لاس راوړئ چې جذرونه یې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

$2+5i \ , \ 2-5i$	$1+i \ , \ 1-i$
$4i \ , \ -4i$	$5i \ , \ -5i$
$2i \ , \ 3i$	$i \ , \ \frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i \ , \ \frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i \ , \ 2+i$

ketabton.com - The Digital Library

د څېرکي لنډيز

- منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذرنه لري، خو د مختلطو عددونو په سټ کې منفي عددونه جفت جذر لري.
- مختلط عددونه د حقيقي او موهومي عددونو له يو ځای کېدو څخه په لاس راځي.
- د حقيقي عددونو مربع مثبت، خو د موهومي عددونو مربع منفي ده

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

- داسې عددونو ته چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، موهومي عددونه وايي.
- د مختلطو عددونو سټ C په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$C = \{z / z = a + bi, \mathrm{a, b} \in \mathrm{IR}, \mathrm{i} = \sqrt{-1}\}$$

- د يو مختلط عدد معياري شکل $\mathrm{z = a + bi}$ دی چې a ته د z د عدد حقيقي برخه او bi ته د z موهومي برخه وايي يا $a = \mathrm{Re}(z)$ او $\mathrm{bi} = \mathrm{Im\,g(z)}$
- د i د مختلفو توانونو د پيدا کولو لپاره د i توان پر 4 وېشو چې له يوه سره مساوي کېږي او که پوره پرې نه وېشل کېږي، نو د i د توري توان پر 4 د وېشلو له پاتې (باقي مانده) سره مساوی دی، لکه:

$$i^{4k+r} = i^r \quad \text{يا} \quad (\mathrm{i})^{1379} = \mathrm{i}^{4\cdot 344} \cdot \mathrm{i}^3 = (1)(\mathrm{i})^3 = -\mathrm{i}$$

- که د $\mathrm{z = a + bi}$ په مختلط عدد کې $b = 0$ وي، نو a ته خالص حقيقي عدد او که $a = 0$ وي، bi ته خالص موهومي عدد وايي.
- هغه مختلط عدد چې حقيقي او موهومي برخې يې دواړه صفرونه وي، صفري مختلط عدد ورته وايي. $(\mathrm{a = 0, b = 0})$
- دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ او $\mathrm{Im\,g}(z_1) = \mathrm{Im\,g}(z_2)$
- د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومی برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې

ketabton.com - The Digital Library

څخه عبارت ده.

• د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل داسې یو مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه عبارت ده.

• که $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ وي، نو د مختلطو عددونو د جمعې، تفریق، ضرب او وېش عملیې داسې تعریف شوي دي.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 . z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}.i \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

• د $z = x + yi$ مختلط عدد مزدوج له $\overline{Z} = x - yi$ څخه عبارت دی.

$$z\overline{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \overline{z} = 2x$$

$$z - \overline{z} = 2yi$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$

$$\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right) = \frac{\overline{z_1}}{z_2}$$

• د $z = a + bi$ عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی او ضربي معکوس يې $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ دی.

• $0 + 0i = (0,0)$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر او $1 + 0i$ د ضرب د عملیې د عینیت عنصر دی.

• هغه دویمه درجې معادلې چې د حقیقي عددونو په ست کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په ست کې حل لري.

ketabton.com - The Digital Library

د فصل پوښتنې:

1) $(i)^{51}$ مساوي دي په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

2) i^{-98} موهومي عدد مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

3) i^{67} موهومي عدد مساوي دی په:

a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

4) $7i-4i$ مساوي دی په:

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

5) $3i\cdot 4i$ مساوي دی په:

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

6) $\frac{64i}{8i}$ مساوي دی په:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

7) $\frac{7}{9}i\cdot\frac{2}{9}i$ مساوي دی په:

a) $-\frac{14}{81}$ b) $\frac{14}{81}$ c) $-\frac{14}{81}i$ d) $\frac{14}{81}i$

8) $\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دی په:

a) $\sqrt{\frac{11}{5}}$ b) $\frac{-11}{5}$ c) $\frac{-11}{5}i$ d) $\frac{11}{5}i$

9) $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1}\cdot 5}$ مساوي دی په:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ *b)* $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ *c)* $\frac{5}{3}i$ *d)* درې واړه سم نه دي

ketabton.com - The Digital Library

10) $\frac{xi}{\sqrt{yi}}$ – مساوي دی په:

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

11) لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(3+4i)+(2+5i)$ $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)+(1-i)$ $(2+3i)+(2-3i)$

12) لاندې مختلط عددونه تفریق کړئ.

$(4+3i)-(4+4i)$ $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$ $(1+i)-(1-i)$

13) $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوي دي په:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

14) $(2+3i)(2-3i)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

15) لاندې مختلط عددونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$4(2+5i)-(3-4i)$ $(4-3i)(2+i)$

$i(3-2i)^2$ i^{51}

16) که $z_1=2-4i$ او $z_2=1-i$ وي، وښیاست چې:

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

17) د لاندې مختلطو عددونو جمعي او ضربي معکوس پیدا کړئ.

$3x-\frac{1}{2}yi$ $2a-bi$ $2+5i$ $-7+3i$ $-6+2i$ $3-i$ $\sqrt{2}+i$

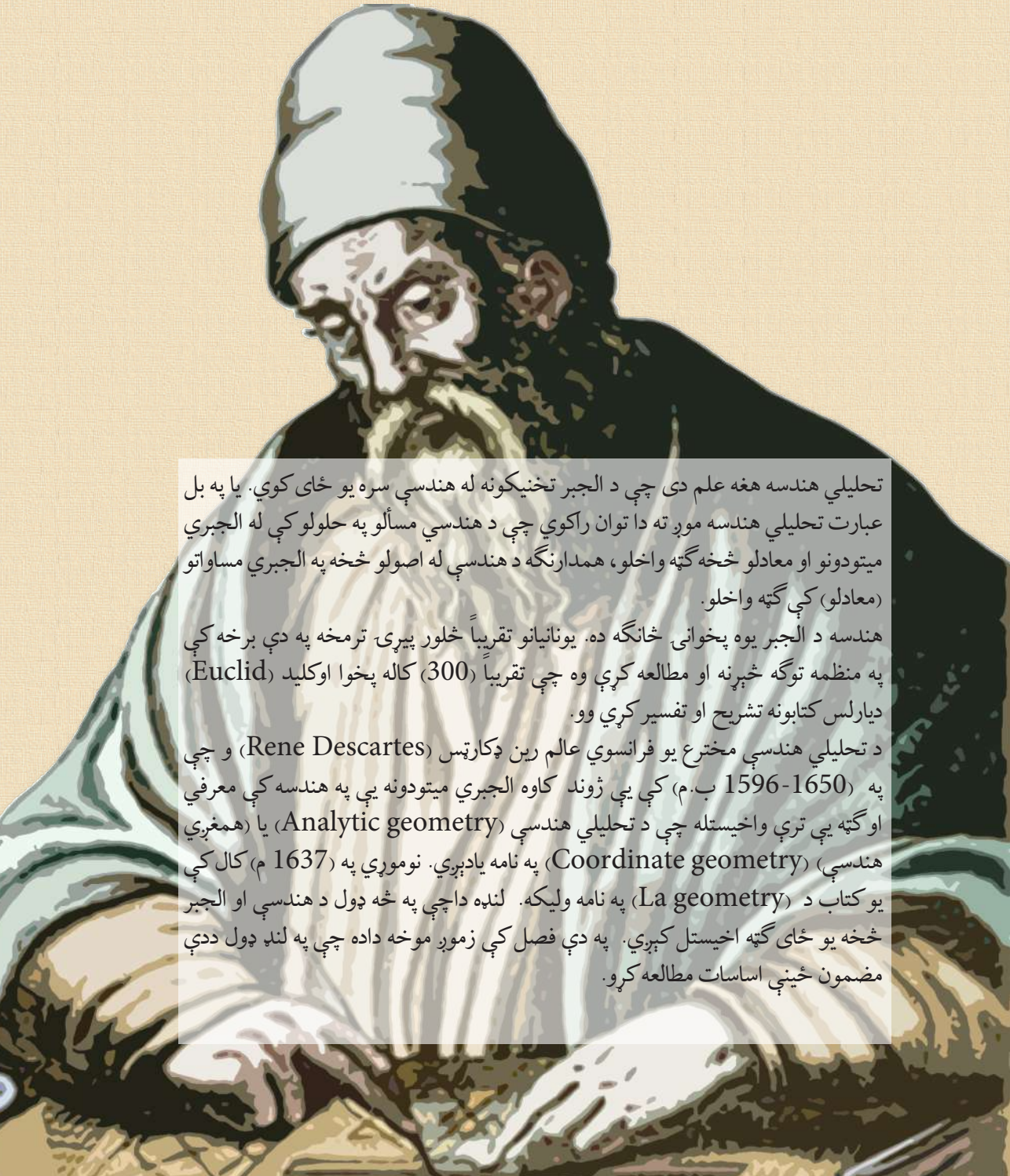
18) د $5x^2+2x+1=0$ معادله حل کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

اووم څپرکی

تحلیلي هندسه

ketabton.com - The Digital Library



تحليلي هندسه هغه علم دی چې د الجبر تخنيکونه له هندسې سره يو ځای کوي. يا په بل عبارت تحليلي هندسه مور ته دا توان راکوي چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري ميتودونو او معادلو څخه گټه واخلو، همدارنگه د هندسې له اصولو څخه په الجبري مساواتو (معادلو) کې گټه واخلو.

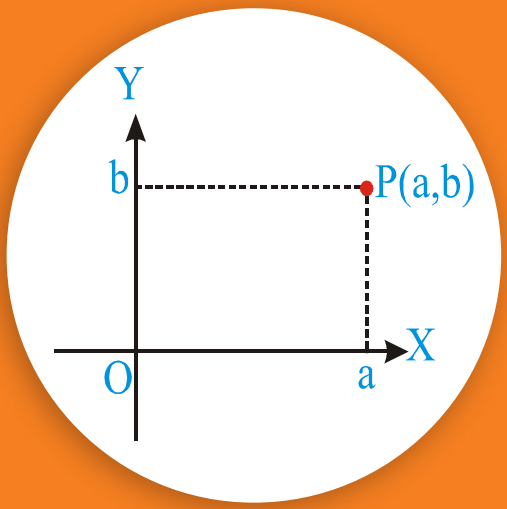
هندسه د الجبر يوه پخوانۍ څانگه ده. يونانيانو تقريباً څلور پيړۍ ترمخه په دې برخه کې په منظمه توگه څېړنه او مطالعه کړې وه چې تقريباً (300) کاله پخوا اوکليد (Euclid) ديارلس کتابونه تشريح او تفسير کړي وو.

د تحليلي هندسې مخترع يو فرانسوي عالم رين ډکارټس (Rene Descartes) و چې په (1596-1650 ب.م) کې يې ژوند کاوه الجبري ميتودونه يې په هندسه کې معرفي او گټه يې ترې واخيسته چې د تحليلي هندسې (Analytic geometry) يا (همغږي هندسې) (Coordinate geometry) په نامه يادېږي. نومورې په (1637 م) کال کې يو کتاب د (La geometry) په نامه وليکه. لنډه داچې په څه ډول د هندسې او الجبر څخه يو ځای گټه اخيستل کېږي. په دې فصل کې زمور موخه داده چې په لنډ ډول ددې مضمون ځينې اساسات مطالعه کړو.

ketabton.com - The Digital Library

د وضعیه کمیاتو سیستم یا کوارډنټ سیستم

(Coordinate system)



آیا د $(0,-1)$ ، $(2,2)$ ، $(-4,7)$ ، $(2,0)$ او د $(0,-2)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکلای شئ؟

فعالیت

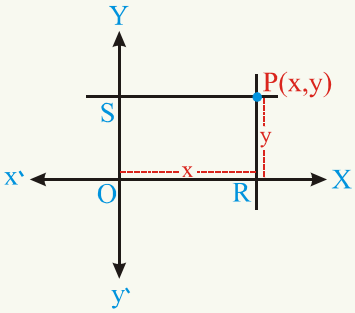
د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د XX' او YY' یو پر بل دوه عمود خطونه رسم کړئ. ددې دوو خطونو د تقاطع ټکي (نقطې) ته (O) وایې چې د O نقطې ته د وضعیه کمیاتو د محورونو مبدا (Origin) وایي.

دوه یو پر بل عمود خطونه د کوارډنټ د محورونو (Coordinate axises) په نامه یادېږي. چې د XOX' افقي خط د X محور او د YOY' عمودي خط د Y له محور څخه عبارت دی. ښکاره ده ټول عددونه چې د X پر محور د مبدا ښي خواته واقع دي، مثبت او که د مبدا کینې خواته واقع وي، منفي دي. همدرانګه هغه عددونه چې د Y پر محور له مبدا پورته واقع دي، مثبت او که له مبدا لاندې واقع دي، منفي عددونه دي.

فرضوو چې که p په مستوي کې یوه نقطه وي، کولای شو چې د p نقطه د یوې مرتبې جوړې (*OrderPair*) په واسطه وښایو. په دې ډول چې د p له نقطې څخه د X او Y له محورونو سره موازي مستقیم خطونه رسموو. چې دا مستقیم خطونه د Y محور د S په نقطه کې او د X محور د R په نقطه کې قطع کوي. چې د $\overline{OR}$ مستقیمه فاصله $\overline{OR} = x$ او $\overline{OS} = y$ ده. په نتیجه کې د p د نقطې موقعیت د (x, y) د مرتبې جوړې په واسطه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکل کېږي.

په مستوي کې هره مرتبه جوړه د یوې نقطې په واسطه او د مستوي هره نقطه د (x, y) د حقیقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه ښودل کېږي. چې x او y د X او Y له محورونو څخه د p د

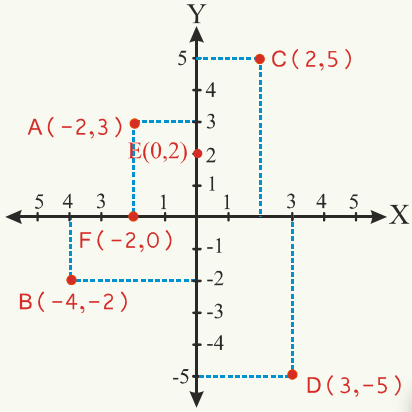
ketabton.com - The Digital Library



نقطې مستقيمې فاصلې دي چې دې سيستم ته کارتيزني يا کوارډنټ سيستم (Coordinate System) وايي. د مرتبې جوړې لومړنۍ مرکبې ته د x مختصه او دويمې ته د y مختصه (Y-Coordinate) وايي. د کوارډنټ محورونه مستوي په څلورو ناحيو (ربعو) (quadrants) وېشي. په دې ډول چې په لومړنۍ ناحيه (ربع) کې، $x > 0$ ، $y > 0$ په دويمه ربع کې $x < 0$ ، $y > 0$ په دريمه ربع کې $x < 0$ ، $y < 0$ او په څلورمه ربع کې $x > 0$ او $y < 0$ دي.

لومړی مثال: د $A(-2,3)$ ، $B(-4,-2)$ ، $C(2,5)$ ، $D(3,-5)$ ، $E(0,2)$ او $F(-2,0)$ نقطې د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

حل:



فعاليت

- وښياست کومې نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصې يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي، د x مختصې يې صفر دي.
- ووياست چې د $(2,3)$، $(-2,3)$، $(2,-3)$، $(-2,-3)$، $(0,4)$ او $(4,0)$ نقطې په کومو ربعو کې واقع دي.

د دوو نقطو ترمنځ فاصله (Distance between two points):

آيا کولای شئ چې و وياست، د $A(4,8)$ او $B(1,2)$ د نقطو تر منځ فاصله څو واحده ده؟

که $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ په مستوي کې دوې نقطې وي. مورږ کولای شو چې د P_1 او

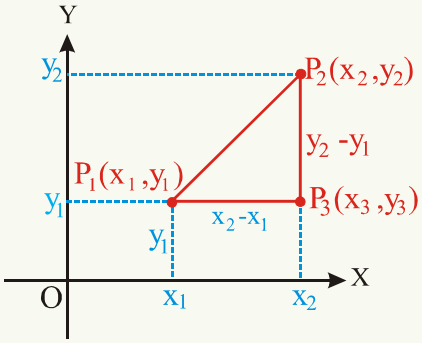
ketabton.com - The Digital Library

P_2 ترمنځ فاصله یا $d = |P_1\ P_2|$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $\overset{\Delta}{P_1P_3P_2}$ د قایم الزاویه مثلث له مخې د فیثاغورث د قضیې په اساس پیدا کړو، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$(\overline{P_1\,P_2})^2 = (\overline{P_1\,P_3})^2 + (\overline{P_2\,P_3})^2$$

$$d = |P_1\,P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

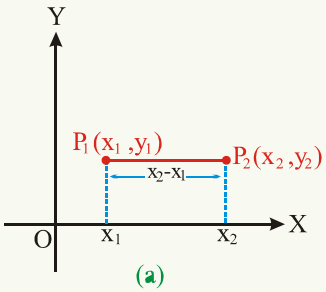


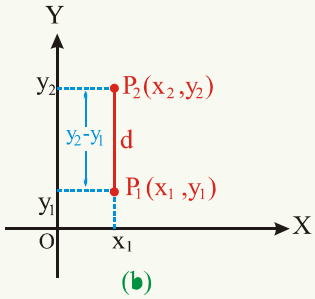
پام مو وي چې که د $P_1\ (x_1, y_1)$ او $P_2\ (x_2, y_2)$ نقطې پر افقي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $y_1 = y_2$ کېږي، لکه: څرنګه چې د (a) په شکل کې لیدل کېږي.

$$d = |P_1\,P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0} = |x_2 - x_1|$$

او که د P_1 او P_2 نقطې پر عمودي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $x_1 = x_2$ دی، لکه: چې د (b) په شکل کې ښودل شوي دي.

$$d = |P_1\,P_2| = \sqrt{0 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$





دویم مثال: د $P_1\ (3,-2)$ او $P_2\ (-1,-5)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل:

ketabton.com - The Digital Library

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-1-3)^2 + [-5-(-2)]^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

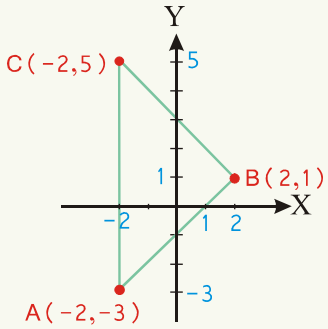
فعالیت

د $P_1(8,0)$ او $P_2(2,0)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د فاصلې د فورمول په مرسته وښیاست چې $A(-2,-3)$ ، $B(2,1)$ او $C(-2,5)$ د یو قایم الزاویه مثلث رأسونه دي.

حل:

$$|AB| = \sqrt{[2-(-2)]^2 + [1-(-3)]^2} = \sqrt{32}$$
$$|BC| = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32}$$
$$|CA| = \sqrt{[-2-(-2)]^2 + [5-(-3)]^2} = \sqrt{64}$$
$$|AB|^2 + |BC|^2 = 32 + 32 = 64$$
$$|CA|^2 = 64$$



خرنګه چې: $|CA|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ دی نو د $\hat{A}BC$ مثلث یو قایمه زاویه مثلث دی.

فعالیت

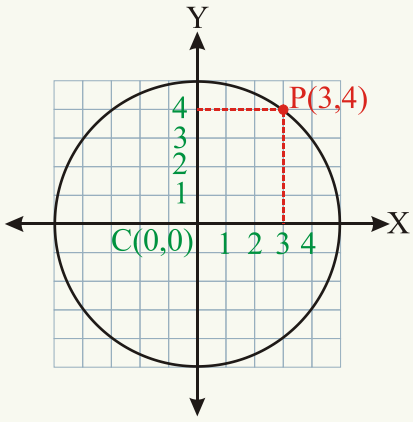
وښیاست چې $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ نقطې د قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

څلورم مثال: که $C(0,0)$ د دایرې مرکز او د $P(3,4)$ نقطه د دایرې د محیط یوه نقطه وی، ددې دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل:

$$\overline{PC} = R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



د وضعيه کمیاتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصې يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصې يې صفر دي.

د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د له فورمول څخه په لاس راځي.

$$d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1- په لاندې راکړل شوو نقطو کې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده؟

a : $(\sqrt{176},7)$

b : $(10,-10)$

C : $(1,15)$

d : $(\frac{15}{2},\frac{15}{2})$

2- وښیاست چې د $A(0,2)$ ، $B(\sqrt{3},1)$ او $C(0,-2)$ نقطې د یو قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

3 - د $(0,5)$ او $(0,-3)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

4 - د $A(-\frac{1}{2},3)$ او $B(-1,\frac{-3}{4})$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

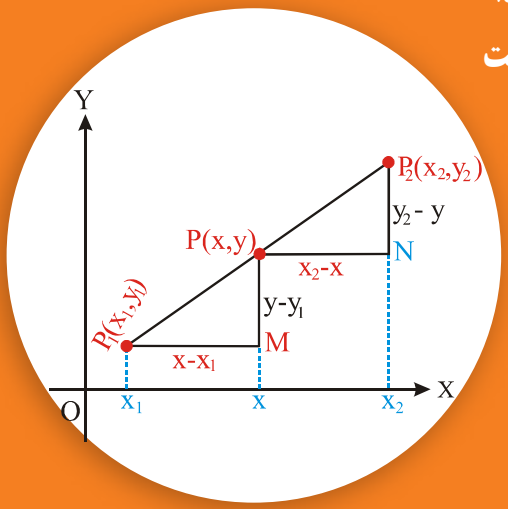
5 - د $(7,11)$ او $(1,3)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

6 - د $(3,6)$ او $(1,2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

7 - د $(3,7)$ او $(12,19)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

ketabton.com - The Digital Library

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې وېشي:



آیا کولای شئ د هغه مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,4)$ له نقطو څخه تېرېږي؟ که د p د نقطې وضعیه کمیات (x,y) وي

چې د $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط د r په نسبت وېشي یا $\frac{P_1P}{PP_2}=r$ وي. د $\overset{\Delta}{P_1MP}$ او $\overset{\Delta}{PNP_2}$ د مثلثونو له مشابهت څخه لرو چې:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1M}{PN}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=r \qquad \frac{P_1P}{PP_2}=\frac{PM}{P_2N}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=r$$

$$x-x_1=rx_2-rx \qquad y-y_1=ry_2-ry$$

$$x+rx=rx_2+x_1 \qquad y+ry=ry_2+y_1$$

$$(1+r)x=rx_2+x_1 \qquad (1+r)y=ry_2+y_1$$

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r} \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

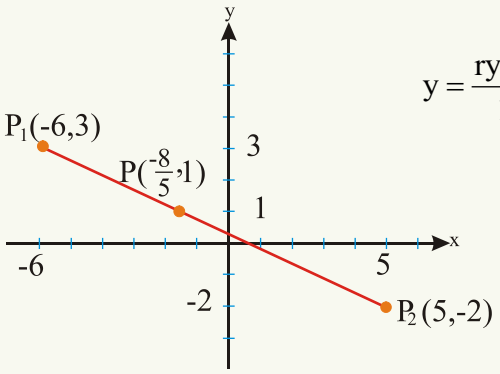
لومړی مثال: د P نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1(-6,3)$ او $P_2(5,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي یا $\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{2}{3}$ وي.

حل

$$x_1=-6 \qquad x_2=5 \qquad r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 5-6}{1+\frac{2}{3}}=-\frac{8}{5}$$

ketabton.com - The Digital Library

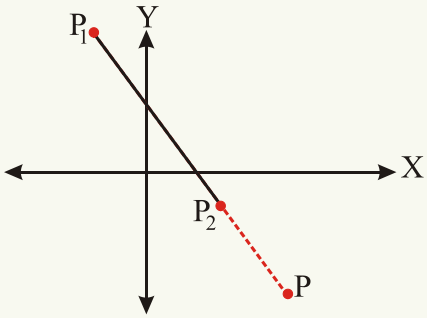


$$y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-2)+3}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-4}{3}+3}{1+\frac{2}{3}}=1$$

نو د p نقطې وضعيه کميات $P(\frac{-8}{5},1)$ دي چې د $\overline{P_1P_2}$ خط د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي.

متوجه بايد اوسو چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت وېشي، $r>0$ او که خارجاً يې وېشي، نو $r<0$ دی.

د مثال په ډول په شکل کې ليدل کېږي چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه داخلاً د r په نسبت ووېشي يا په بل عبارت که P_1P او PP_2 همجهت وي، $r>0$ او که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د r په نسبت ووېشي يا داچې P_1P او PP_2 مختلف الجهت وي، $r<0$ دی، نو $\frac{P_1P}{PP_2}=-r$ لکه:



چې په پورتني شکل کې ليدل کېږي.

دويم مثال: د p د نقطې وضعيه کميات پيدا کړئ، که هغه مستقيم خط چې د $P_1(-8,4)$ او $P_2(2,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

a : داخلاً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي. b: خارجاً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

د a حل:

$$r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 2-8}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4\ ,\quad y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-1)+4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{10}{5}=2$$

ketabton.com - The Digital Library

نو د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-4,2)$ څخه عبارت دي

د b حل: څرنګه چې د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي، نو:

$$r=-\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{(\frac{-2}{3})\cdot 2-8}{1-\frac{2}{3}}=-28\ ,\quad y=\frac{(\frac{-2}{3})(-1)+4}{1-\frac{2}{3}}=14$$

د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-28,14)$ څخه عبارت دي.

فعالیت

د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي، داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

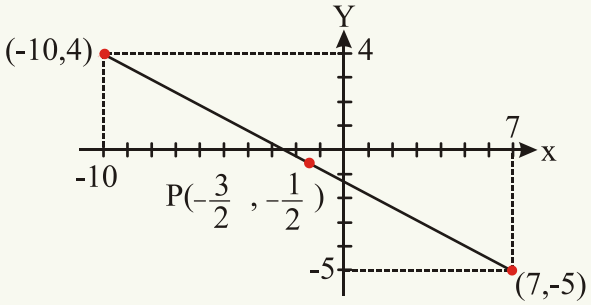
که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ د مستقیم خط د تنصیف نقطه وي، په دې حالت کې $r=1$ دی او د p نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ او $y=\frac{y_1+y_2}{2}$

دریم مثال: د هغه قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $(-10,4)$ او $(7,-5)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-10+7}{2}=-\frac{3}{2}\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4-5}{2}=-\frac{1}{2}$$

ketabton.com - The Digital Library



د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي.

د $x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}$ ، $y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}$ قطعــه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات عبــارت دي له: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ □ $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشي، نو r مثبت او که خارجاً یې و وېشي، نو r منفي دی.

پوښتنې

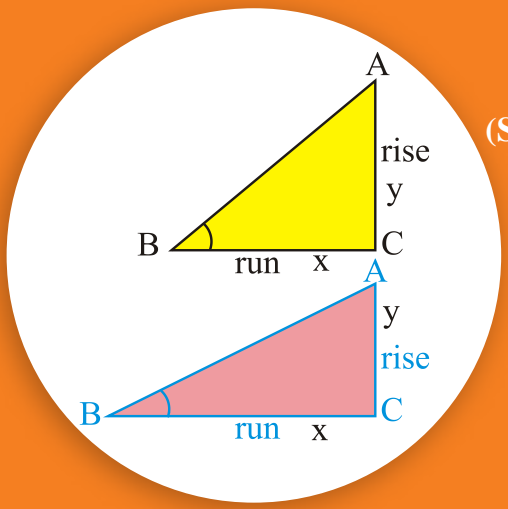
1 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات $(2,-1)$ دي، که $A(-1,-3)$ وي، د B د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

2 - د هغــه قطعــه خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

3 - د هغې نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ په داســې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي

a :داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي. b: خارجاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

ketabton.com - The Digital Library

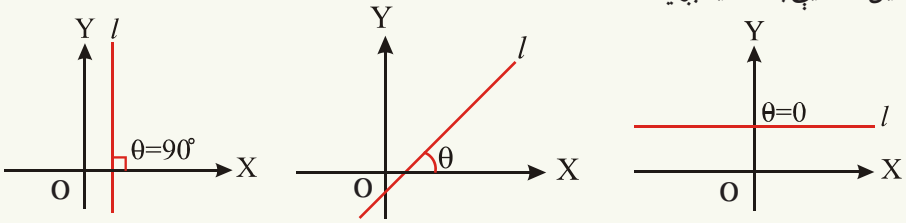


د يو مستقيم خط ميل

(Slope of a straight Line)

کـولای شـئ چـې ووايـئ د کومـې مايلې سطحې ميل زيات دی؟

د $\square$ زاويه چې د l مسـتقيم خط يې د X د محور له مثبت جهت سـره جوړوي، د مستقيم خط د ميل د زاويې په نامه يادېږي.



لکه څرنګه چې په شکل کې ليدل کېږي که د l خط د X له محور سره موازي وي $\square = 0$ او که د Y له محور سره موازي وي، نو $\square = 90°$ ده.

څه وخت چې موږ پر مايله سـطحه (inclined plane) پورته خواته حرکت کوو، په يو وخت کې افقي فاصله (run) او عمودي فاصله (rise) طی کوو. که د AB د مسـتقيم خط ميل په m و ښايو.

$$m = \frac{\text{rise}}{\text{run}} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

د مستقيم خط ميل د هغه زاويې له tan څخه عبارت دی چې مستقيم خط يې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي، که $0 < \theta < 90°$ وي، نو د مستقيم خط ميل مثبت او که $90° < \theta < 180°$ وي ميل منفي دی او که $\theta = 0$ وي $\tan 0° = 0$ دی، نو ميل يې صفر او که $\theta = 90°$ وی، نو په دې حالت کې د مستقيم خط ميل تعريف شوی نه دی، ځکه چې $\tan 90°$ تعريف شوی نه دی.

ketabton.com - The Digital Library

فعالیت

د X او Y د محورونو د میل په برخه کې څه فکر کوئ؟

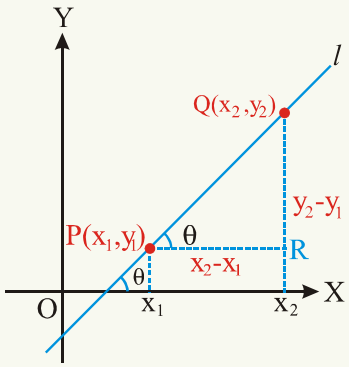
د هغه مستقیم خط میل چې عمود نه وي او د $P(x_1 y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي.
$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ دی، ځکه لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$\hat{RPQ} = \hat{\theta}$

$\overline{PR} = x_2 - x_1$

$\overline{QR} = y_2 - y_1$

$m = \tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



که د A، B، او C درې نقطې داسې ولرو چې د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل د $\overline{BC}$ د مستقیم خط له میل سره مساوي وي، نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $P_1(2,4)$ او $P_2(6,10)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-4}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

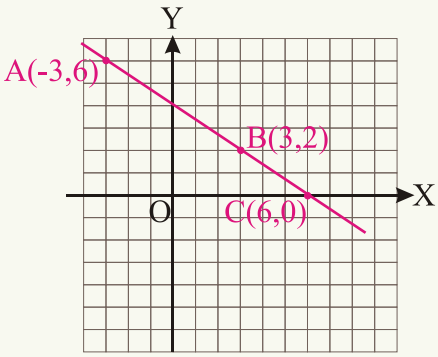
یا:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4-10}{2-6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: و ښیاست چې د $A(-3,6)$، $B(3,2)$ او $C(6,0)$ درې نقطې پر یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

د $\overline{AB}$ مستقیم خط میل $= \frac{2-6}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

ketabton.com - The Digital Library



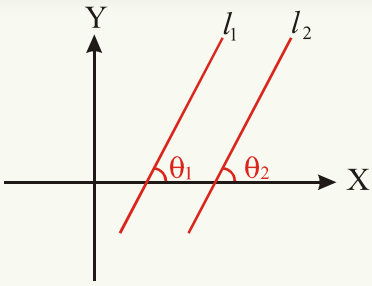
$\overline{BC}$ د مستقیم خط میل $= \frac{0-2}{6-3} = -\frac{2}{3}$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ او $\overline{BC}$ مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي دي. نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

نتیجه: د یوه مستقیم خط میل د مستقیم خط په ټولو نقطو کې سره مساوي دی.

فعالیت

- د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(-2,4)$ او $(5,1)$ له نقطو څخه تېرېږي.
- د مستقیم خط د میل په مرسته وښیاست چې د $(4,-5)$ ، $(7,5)$ او $(10,15)$ نقطې پر یوه مستقیم خط پرتې دي.



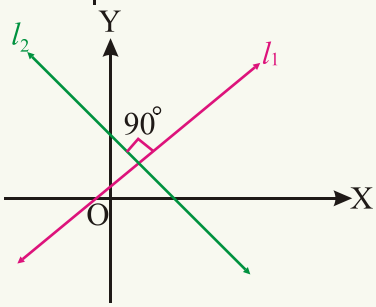
که د l_1 او l_2 دوه مستقیم خطونه وي او میلونه یې په ترتیب سره m_1 او m_2 وي، نو:

1- که l_1 د l_2 سره موازي وي $m_1 = m_2$ دی.

ځکه چې د شکل مطابق $\theta_1 = \theta_2$ دی

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$

$$m_1 = m_2$$



2- که l_1 او l_2 یو پر بل عمود وي، نو:

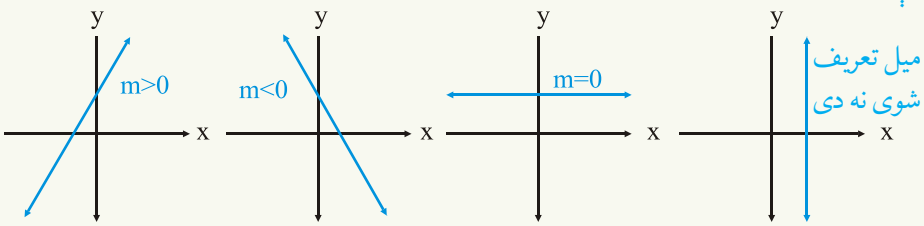
$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 + 1 = 0$ یا $m_1 \cdot m_2 = -1$ دي.

د یو مستقیم خط میل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او د $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي، د

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو مستقیمو

ketabton.com - The Digital Library

خطونو میل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو مستقیمو خطونو میل چې د Y له محور سره موازي وي تعریف شوی نه دی. که د یوه مستقیم خط د میل زاویه حاده وي، میل یې مثبت او که منفرجه وي، میل یې منفي دی او که د مستقیم خط د میل زاویه صفر وي، میل یې صفر دی.



پوښتنې

1 - د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(3,-2)$ او $(2,7)$ له نقطو څخه تېرېږي.

2 - که $A(8,6)$ ، $B(-4,2)$ او $C(-2,-6)$ دیو مثلث رأسونه وي، د مثلث د هرې ضلعې میل پیدا کړئ.

3 - د مستقیم خط د میل په مرسته و ښیاست چې د $(a,2b)$ ، $(c,a+b)$ او $(2c-a,2a)$ نقطې پر یو مستقیم خط باندې واقع دي.

4 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط چې د $A(1,-2)$ او $B(2,4)$ له نقطو او د $\overline{CD}$ مستقیم خط چې د $C(4,1)$ او $D(-8,2)$ له نقطو څخه تېرېږي، دا دواړه خطونه سره:

a: موازي دي b: عمود دي c: هېڅ یو

5 - د $y=3$ مستقیم خط او د $x=3$ مستقیم خط یو له بله سره څه اړیکه لري؟

a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ یو

6 - د $x=-1$ او $x=3$ خطونه سره: a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ یو

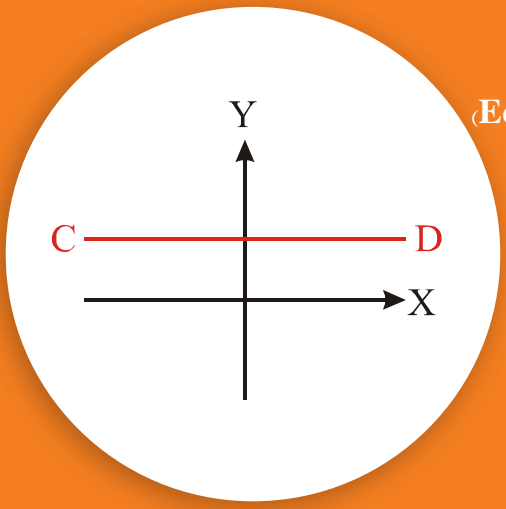
7 - د $y=-\sqrt{3}$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b - صفر c - -1 d - تعریف شوي نه دی

8 - د $x=0,03$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b - صفر c - -1 d - تعریف شوی نه دی.

ketabton.com - The Digital Library

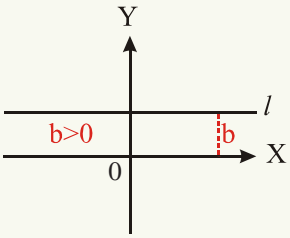


د یو مستقیم خط معادله

(Equation of a straight Line)

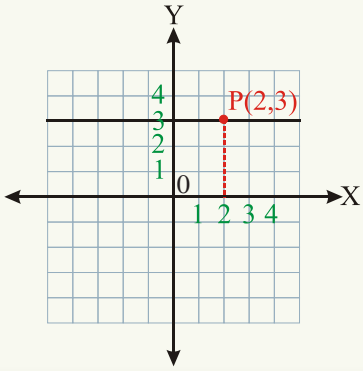
آیـا کولای شـئ د $\overline{CD}$ د مسـتقیم خط معادلـه پیدا کـړئ چې د X له محور سـره موازي وي.

1-د هغه مستقیم خط معادله چې د X له محور سره موازي وي.



تولـې نقطې چې د l پر مسـتقیم خط پرتـې وي، د X له محور څخه مسـاوي فاصلې لري یا په بل عبـارت د تولو هغو نقطو د y مختصـې چې د X له محور سـره پر موازي خط واقع دي سـره مسـاوي دي. که د X له محور څخه د l د خط فاصلې ته (b) ووایو د l د مستقیم خط معادله $y=b$ ده.

کـه $b>0$ وي، نـو د l خط د X لـه محور څخه پورته اوکه $b<0$ وي، نـو د l خـط د X له محـور لاندې اوکه $b=0$ وي، نو د l خط د X پر محور پروت دی.



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تېرېږي او د X له محور سره موازي وي.

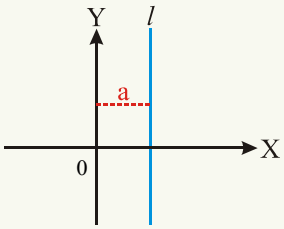
حل: $y=3$ ددې خط معادله ده

فعالیت

د X د محور معادله پیدا کړئ.

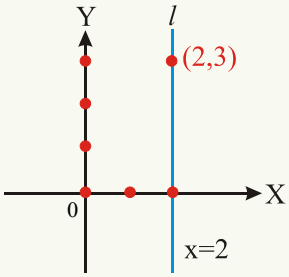
ketabton.com - The Digital Library

2 - **د هغه مستقيم خط معادله چې د Y له محور سره موازي وي**: تولې نقطې چې



د l پر خط چې د Y له محور سره موازي دی، پرتې وي، د Y له محور څخه مساوي فاصلې لري که د Y له محور څخه د l د مستقيم خط فاصلې له a و وايو چې a ددې نقطو لومړنۍ مختصه ده، نو د l د خط معادله $x = a$ ده.

که $a > 0$ وي د l خط د Y د محورښي خواته او که $a < 0$ وي د l خط د Y د محور کينې خواته او که $a = 0$ وي، نو د l خط د Y پر محور منطبق دی.



دويم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيداکړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تېر شي او د Y له محور سره موازي وي.

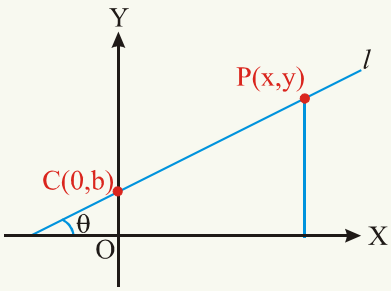
حل: $x = 2$ ددې خط معادله ده.

فعاليت

د Y د محور معادله وليکئ.

3. **د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې د تقاطع نقطه معلومه وي يا د مستقيم خط معياري معادله**:

که $P(x,y)$ د l مستقيم خط يوه نقطه وي او $C(0,b)$ د Y له محور سره د مستقيم خط د تقاطع نقطه وي، نو د l د مستقيم خط ميل عبارت دی له:



$$m = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

$$y - b = mx \quad \text{يا} \quad y = mx + b$$

ketabton.com - The Digital Library

که $b = 0$ وي، د مستقيم خط معادله $y = mx$ ده چې په دې حالت کې مستقيم خط د وضعيه کمياتو له مبدا څخه تېرېږي.

دريم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې:

a- ميل يې 2 او د Y محور په 5 کې قطع کړي.

b- د Y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کړي او پر هغه خط عمود وي چې ميل يې -6 دی.

حل:

a: $m = 2$ او $b = 5$ $\qquad y = mx + b \Rightarrow y = 2x + 5$

b: ددې خط ميل $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$

دی؛ نو: $m = \frac{1}{6}$ او $b = \frac{4}{3}$

$$y = mx + b \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$$

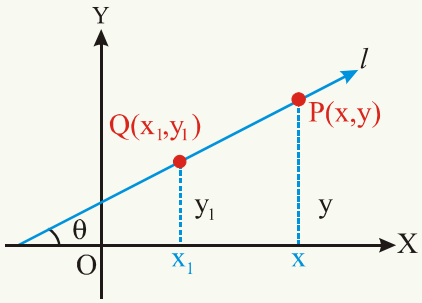
دا معادله کولای شو، د $6y = x + 8$ ، $6y - x = 8$ او يا $x - 6y + 8 = 0$ په شکل وليکو.

4 - د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي:

د l د مستقيم خط معادله چې ميل يې m او د $Q(x_1, y_1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

که $p(x, y)$ د l د مستقيم خط يوه اختياري نقطه وي. څرنګه چې د $Q(x_1, y_1)$ او $P(x, y)$ نقطې په يوه مستقيم خط واقع دي، نو د l د مستقيم خط ميل مساوي دی په:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$



ketabton.com - The Digital Library

څلورم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د $(5,1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = -2(x - 5)$$
$$y = -2x + 11$$
$$2x + y - 11 = 0 \quad \text{يا}$$

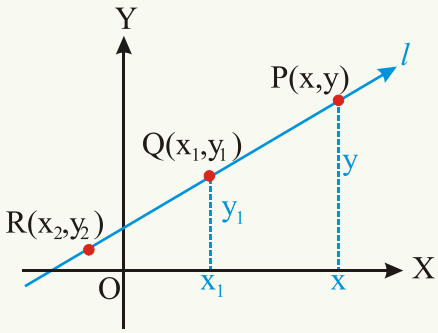
5: د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي:

د l د خط میل چې عمود نه وي، د $Q(x_1, y_1)$ او $R(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي او $P(x, y)$ ددې خط یوه کیفي نقطه وي، څرنګه چې د مستقیم خط میل په هره نقطه کې سره مساوي دي، نو لرو چې:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{يا}$$



پنځم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-2,1)$ او $(6,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$y_1 = 1 \quad , \quad x_1 = -2$$
$$y_2 = -4 \quad , \quad x_2 = 6$$

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{6 - (-2)}[x - (-2)]$$

$$y - 1 = \frac{-5}{8}(x + 2) \quad \text{يا} \quad 5x + 8y + 2 = 0$$

6: د هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې تقاطع معلومه وي:

که $P(x, y)$ د l د مستقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د l مستقیم خط د X محور په a کې او د Y محور په b کې قطع کړي یا د X محور د $A(a,0)$ او د Y محور د $B(0,b)$ په نقطه کې قطع کوي چې د A ، B او p نقطې د l پر مستقیم خط واقع دي.

ketabton.com - The Digital Library

د هغه مستقیم خط له معادلې څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي لرو چې:

$x_1 = a \ , \ y_1 = 0 \quad x_2 = 0 \ , y_2 = b$

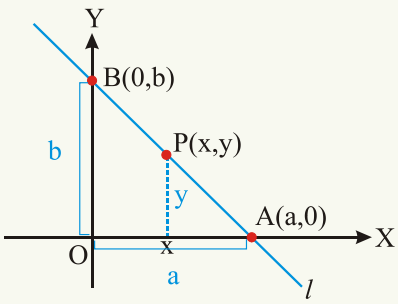
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ , \ y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) \Rightarrow -ay = b(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$bx + ay = ab$$

دواړه خواوې پر ab وېشو

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



شپږم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د x محور په $(2,0)$ او د Y محور په $(0,-4)$ کې قطع کوي.

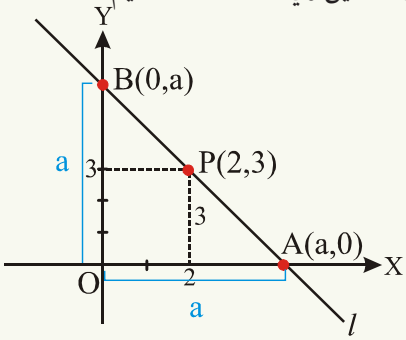
حل: $a = 2$ او $b = -4$ ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

$2x - y - 4 = 0$ یا

اووم مثال: په شکل کې که د $\overset{\Delta}{OAB}$ مثلث متساوی الساقین وي، د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله په داسې حالت کې پیدا کړئ چې ددې مثلث د $\overline{AB}$ ضلع د $P(2,3)$ له نقطې څخه تېرېږي.



حل: د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل مساوي دی په:

د $\overline{AB}$ مستقیم خط میل $\overline{AB} = \frac{a - 0}{0 - a} = -1$

ketabton.com - The Digital Library

نو اوس د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې (-1) او د $P(2,3)$ له نقطې څخه تېرېږي عبارت ده له:

$y-3=-1(x-2)$ یا $x+y-5=0$

د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې تقاطع معلومه وي عبارت ده له: $y=mx+b$ د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي عبارت ده له:

$y-y_1=m(x-x_1)$، د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي عبارت ده له:

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ او د هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ده.

پوښتنې

1- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیدا کړئ چې:

a: د هغه افقي خط معادله پیدا کړئ چې له $(7,-9)$ نقطې څخه تېرېږي.

b: د هغه مستقیم خط معادله چې د X پر محور عمود او له $(5,-3)$ نقطې څخه تېرېږي.

2- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیدا کړئ چې:

a: میل یې 7 او د $(5,-6)$ له نقطې څخه تېر شي.

b: میل یې صفر او د $(3,-8)$ له نقطې څخه تېرېږي.

c: د $(5,-8)$ له نقطې څخه تېرېږي او میل یې تعریف شوی نه وي.

d: د $(3,-5)$ او $(1,-9)$ له نقطو څخه تېرېږي.

e: میل یې -4 او د Y محور په -9 کې قطع کړي.

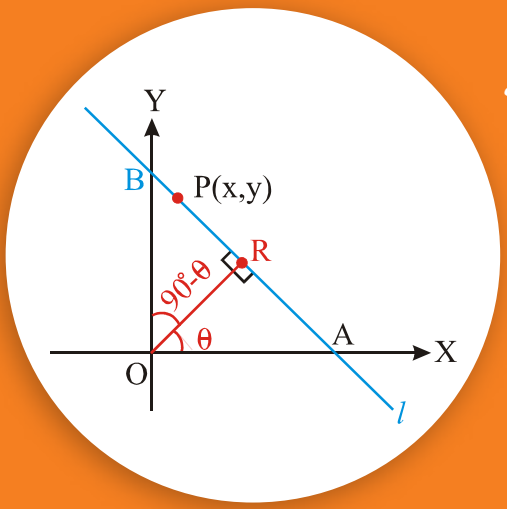
3- د هغه مثلث د ضلعو معادلې پیدا کړئ چې راسونه یې $A(-3,2)$ ، $B(5,4)$ او $C(3,-8)$ وي.

4- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-4,-6)$ له نقطې څخه تېرېږي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې $\frac{-3}{2}$ وي.

5- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-5,11)$ له نقطې څخه تېرېږي او له هغه خط سره موازی وي چې میل یې -24 وي.

ketabton.com - The Digital Library

7 - د مستقیم خط نورمال معادله



آیا ویلای شـئ د یوه مسـتقیم خط نورمال خط کوم خط ته وایي ؟

د l د مسـتقیم خط معادله که p د هغه عمود خط اوږدوالی وي چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پر خط عمود وي او θ د عمود خط د میل زاویه وي.

عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$

د l مسـتقیم خـط د X محـور د A پـه نقطه کې او د Y محـور د B په نقطه کې قطع کوي، که $P(x,y)$ د $\overline{AB}$ د مسـتقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د $\overline{OR}$ خط د l پر خط عمود وي، نو: $|\overline{OR}| = P$ دی چې د $\overline{OR}$ خط ته د l د خط نورمال خط وایي او P د نورمال اوږدوالی دی.

د $\overset{\Delta}{OR}A$ او $\overset{\Delta}{OR}B$ په قایمه زاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\cos\theta = \frac{P}{OA} \text{ یا } OA = \frac{P}{\cos\theta}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{P}{OB} \text{ یا } OB = \frac{P}{\cos(90^\circ - \theta)} = \frac{P}{\sin\theta}$$

له مثلثاتو پوهیږو : $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ مسـتقیم خط د X محور په $(OA,0)$ او د Y محور په $(0,OB)$ کې قطع کوي، نو د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\frac{x}{\frac{P}{\cos\theta}}+\frac{y}{\frac{P}{\sin\theta}}=1$$

يا:

$$x\cos\theta+y\sin\theta=P$$

چې $x\cos\theta+y\sin\theta=P$ يا $x\cos\theta+y\sin\theta-P=0$ د l د مستقيم خط نورمال معادله ده.

لومړی مثال: که د هغه عمود خط اوږدوالی چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پرخط عمود وي 5 واحده وي او ددې عمود خط د میل زاویه $120°$ وي، د l د مستقیم خط میل، نورمال معادله یې او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه پیدا کړئ.

حل: $\theta=120°$ او $P=5$ دی.

$$x\cos120°+y\sin120°=5$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=5 \qquad (\cos120°=-\frac{1}{2}\ ,\ \sin120°=\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x-\sqrt{3}y+10=0$$

د l خط د میل د پیدا کولو لپاره د ا معادله د $y=mx+b$ په شکل لیکو:

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{3}}$$

نو د l خط میل $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او د Yمحور د $(0,\frac{10}{\sqrt{3}})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال یې د X د محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

8- **د مستقیم خط عمومي معادله**:(General equation of a straight Line)

د $ax+by+c=0$ معادله د x او y دوه متحوله لري a، b، او c ثابت عددونه دي چې a او b دواړه په یو وخت کې صفر نه وي،د مستقیم خط دعمومي معادلې په نامه یادېږي.

ketabton.com - The Digital Library

1) که $a \neq 0$ او $b = 0$ وي، نو $x = -\frac{c}{a}$ يا $ax + c = 0$ دا د هغه مستقيم خط معادله ده چې د Y له محور سره موازي وي ددې خط مستقيمه فاصله د Y له محور څخه $-\frac{c}{a}$ ده.

2) که $a = 0$ او $b \neq 0$ وي، نو معادله د $by + c = 0$ شکل نيسي يا $y = -\frac{c}{b}$ چې دا د هغه مستقيم خط معادله ده چې د X له محور سره موازي دی. د X له محور څخه ددې خط مستقيمه فاصله $\frac{-c}{b}$ ده.

3) که $a \neq 0$ او $b \neq 0$ وي، نو:

$$by = -ax - c \quad \text{يا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

دا د هغه مستقيم خط معادله ده چې ميل يې $m = \frac{-a}{b}$ دی او د y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

1- د مستقيم خط د عمومي معادلې بدلول په معياري شکل:

د $ax + by + c = 0$ عمومي معادله د معياري معادلې په شکل عبارت ده له:

$$by = -ax - c \quad \text{يا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

چې ددې خط ميل $m = \frac{-a}{b}$ او د Y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

دويم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقيم خط عمومي معادله په معياري شکل واړوئ.

حل:

$$12y = 5x + 39 \quad \text{يا} \quad y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

چې ميل يې $m = \frac{5}{12}$ او د Y محور په $\frac{39}{12}$ کې قطع کوی.

2- د مستقيم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقيم خط د معادلې په شکل چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي.

ketabton.com - The Digital Library

د $ax+by+c=0$ په معادله کې د مستقیم خط میل $\frac{-a}{b}$ او یوه نقطه یې $(\frac{-c}{a},0)$ ده، نو:

$$m=\tan\theta=\frac{-a}{b} \qquad y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

دریم مثال: د $5x-12y+39=0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه خط د معادلې په شکل تبدیله کړئ چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

حل: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط یوه نقطه $(\frac{-39}{5},0)$ ده او میل یې $\frac{5}{12}$ دی، نو:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{5}{12}(x+\frac{39}{5})\Rightarrow y=\frac{5}{12}x+\frac{39}{12}$$

3 - د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې دوې نقطې یې معلومې وي.

هغه خط چې معادله یې $ax+by+c=0$ وي، د $(\frac{-c}{a},0)$ او $(0,\frac{-c}{b})$ له نقطو تېرېږي.

$$x_1=\frac{-c}{a} \qquad y_1=0 \qquad x_2=0 \qquad y_2=\frac{-c}{b}$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{\frac{-c}{b}-0}{0+\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=\frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=-\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}(x+\frac{c}{a})$$

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

څلورم مثال: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط عمومي معادله د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل ولیکئ چې دوې نقطې یې معلومې وي.

ketabton.com - The Digital Library

حل: د $5x-12y+39=0$ خط د $P_2(0,\frac{39}{12})$ او $P_1(\frac{-39}{5},0)$ له نقطو څخه تېرېږي.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \text{يا} \quad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\frac{y-0}{x+\frac{39}{5}}=\frac{\frac{39}{12}-0}{0+\frac{39}{5}}$$

4- د يو مستقيم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقيم خط د معادلې په شکل چې د X او Y له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$ax+by+c=0$$

$$ax+by=-c$$

دواړه خواوې په $(-c)$ وېشو:

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$

يا

$$\frac{x}{\frac{-c}{a}}+\frac{y}{\frac{-c}{b}}=1$$

پنځم مثال: د $5x-12y+39=0$ معادله د هغه مستقيم خط معادلې ته واړوئ چې له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$5x-12y=-39$$

دواړه خواوې په -39 وېشو:

$$\frac{5x}{-39}-\frac{12y}{-39}=1$$

:

$$\frac{x}{-\frac{39}{5}}+\frac{y}{\frac{39}{12}}=1$$

په دې معنا چې دا مستقيم خط د X محور د $(-\frac{39}{5},0)$ او د Y محور د $(0,\frac{39}{12})$ په نقطه کې قطع کوي.

ketabton.com - The Digital Library

فعالیت

د $3x-2y=6$ مستقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات د X او Y، له محورونو سره پیدا کړئ.

5: د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په نورمال شکل:

څرنګه چې پوهېږو د مستقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta+y\sin\theta=P$ ده او عمومي معادله یې $ax+by+c=0$ یا $ax+by=-c$ ده چې دواړه د یوه مستقیم خط ښودونکي دي، نو د ضریبونو نسبتونه یې د k د یوه ثابت عدد سره مساوي دی.

$$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{-c}{P}=k$$

$$\frac{P}{-c}=\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\sin\theta}{b}=\frac{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

ځکه چې: $$\frac{\cos^2\theta}{a^2}=\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{a^2+b^2}$$

په نتیجه کې: $\sin\theta=\dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $\cos\theta=\dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ کېږي.

د $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ په معادله کې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د قیمتونو په لیکلو سره لرو چې:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

او یا $$\frac{b}{\sin\theta}=k \quad , \quad \frac{a}{\cos\theta}=k$$

نو: $k\sin\theta=b$ ، $k\cos\theta=a$ او $k^2\sin^2\theta=b^2$ ، $k^2\cos^2\theta=a^2$

$$k^2\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta=a^2+b^2$$

$$k^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a^2+b^2$$

یا: $$k=\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

ketabton.com - The Digital Library

د $ax+by=-c$ معادلې دواړه خواوې په K وېشو، نو لرو چې:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y=-\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{يا} \quad \frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

ددې لپاره چې د p قیمت هر وخت مثبت وي، نو د مخرج د جذر علامه د c مخالفه علامه ده او که $c=0$ وي، د جذر علامه د b د علامې په شان ده.

شپږم مثال: $2x-3y+6=0$ معادله په نورمال شکل واړوئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په $\pm\sqrt{2^2+(-3^2)}=\pm\sqrt{13}$ باندې وېشو. ددې لپاره چې ښي خوا مثبت وي د $\sqrt{13}$ علامه باید منفي ونیول شي:

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0 \quad \text{يا} \quad \frac{2x-3y+6}{-\sqrt{13}}=0$$

نو θ په دویمه ناحیه (ربعه) کې ده.

له مثلثاتي جدول څخه لرو چې $\theta=123^\circ 40'$ ده، نو ددې مستقیم خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos 123^\circ 40'+y\sin 123^\circ 40'-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

فعالیت

د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط معادله په نورمال شکل تبدیله کړئ.

د یوه مستقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ او د مستقیم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده. د مستقیم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل عبارت له:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1 - د $x\cos 60° + y\sin 60° - 7 = 0$ مستقيم خط نورمال معادله د مستقيم خط په عمومي معادله تبديله کړئ.

2 - د $x\cos 225° + y\sin 225° - 6 = 0$ مستقيم خط نورمال معادله، د مستقيم خط په عمومي معادله واړوئ.

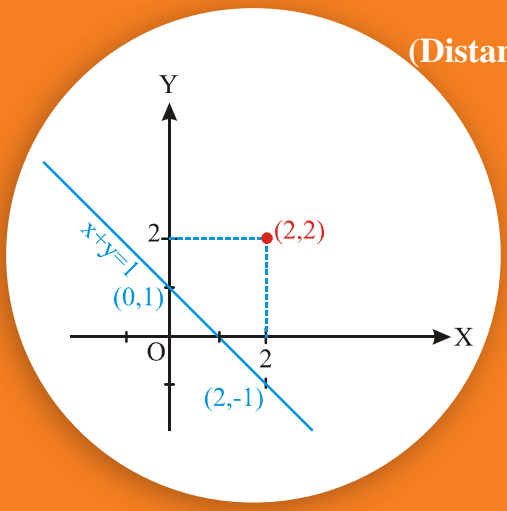
3 - د مستقيم خط لاندې عمومي معادلې په نورمال شکل واړوئ.

$2x + 4y + 7 = 0$ $\quad 2x + 5y - 2 = 0$ $\quad 15y - 8x + 3 = 0$

ketabton.com - The Digital Library

د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه:

(Distance of a point from a line)



آيا د $(2,2)$ نقطې فاصله د $x+y=1$ له خط څخه پيدا کولای شئ؟

کـه د P نقطې فاصله، لکه: څنګه چې په شـکل کـې لیدل کېږي د $\overline{AB}$ له خط څخه چې د P نقطه پر $\overline{AB}$ واقع نه وي، d فرض کړو (د $\overline{AB}$ خط نه عمود وي او نه افقي)

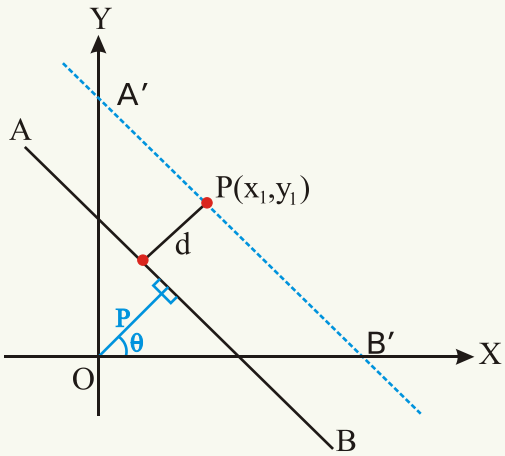
د p له نقطې څخه د $\overline{A'B'}$ مستقيم خط له $\overline{AB}$ سره موازي رسم کړئ، په دی حالت کې د AB د خط نورمال معادله عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$

څرنګـه چـې د $A'B'$ مسـتقيم خط د AB له خط سـره موازي دی، نـو د $A'B'$ د خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$d = x\cos\theta + y\sin\theta - p \quad \text{يا} \quad x\cos\theta + y\sin\theta - (p+d) = 0$$

څرنګه چې د $P(x_1, y_1)$ نقطه د $\overline{A'B'}$ پر مستقيم خط پرته ده، نو په پورتنی معادله کې په ترتيب سره د x او y، پرځای x_1 او y_1 ږدو، نو لرو چې:

$$\boxed{d = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - P}$$



چـې دا معادله د $\overline{AB}$ له خـط څخه د p د نقطې فاصله ښـيي، کـه چېرې د AB د خط معادله په نورمال شـکل راکړل شـوي وي او که د $\overline{AB}$ د خط معادله په عمومي شکل $(ax + by + c = 0)$ راکړل شوي وي، نو:

ketabton.com - The Digital Library

خرنگه چې: $\sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ ، $\cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $p = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

که دا قیمتونه د AB د مستقیم خط په نورمال معادله کې وضع کړو، لرو چې:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

د فاصلې په معادله کې که د P نقطه او د وضعیه کمیاتو مبدا د AB خط یوې خواته واقع وي، نو د d قیمت منفي کېږي. اوکه د p نقطه او مبدا د AB د خط دواړو خواوو ته واقع وي د d قیمت مثبت دی. خرنگه چې فاصله هر وخت مثبت ده، نو باید چې مطلقه قیمت یې په پام کې ونیسو. (د c علامه د مخرج د جذر د علامې مخالفه علامه ده)

لومړی مثال: د $P(-2,8)$ د نقطې فاصله د $4x+3y-11=0$ له خط څخه پیدا کړئ.

حل: $a=4$ ، $b=3$ او $c=-11$ ده، خرنگه چې د c علامه منفي ده، نو د جذر علامه باید مثبت وي.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4(-2)+3(8)-11|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \frac{|-8+24-11|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

فعالیت

د $(5,8)$ نقطې فاصله د $3x-2y+7=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله:

(Distance between two parallel lines):

د دوو موازي خطونو ترمنځ فاصله پر یو ددې خطونو د یوې نقطې فاصله ده، له بل موازي خط څخه:

دویم مثال: د $2x-5y+13=0$ او $2x-5y+6=0$ موازي مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: یوه نقطه په یو ددې موازي خطونو باندې پیدا کوو، د مثال په ډول که د

$2x-5y+13=0$

په معادله کې $x=1$ وي، نو $y=3$ کېږي.

ketabton.com - The Digital Library

اوس نو د $(1,3)$ نقطې فاصله د $2x-5y+6=0$ له مستقیم خط څخه د فاصلې د فورمول $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ په مرسته په لاس راوړو.

$$d=\frac{|2(1)-5(3)+6|}{\sqrt{(2)^2+(-5)^2}}=\frac{|2-15+6|}{\sqrt{4+25}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

یادونه: د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د $ax+by+c=0$ مستقیم خط فاصله د $\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ څخه عبارت ده.

فعالیت

د $3x+2y=10$ او $y=-\frac{3}{2}x+7$ د موازي خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د $2x+y+2=0$ او $6x+3y-8=0$ د مستقیمو موازي خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل: که د $2x+y+2=0$ په معادله کې $x=0$ وي، $y=-2$ کېږي. اوس د $(0,-2)$ او د $6x+3y-8=0$ د مستقیم خط فاصله په لاس راوړو:

$$d=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6(0)+3(-2)-8|}{\sqrt{36+9}}=\frac{14}{3\sqrt{5}}$$

د $P(x_1,y_1)$ د نقطی فاصله له یوه مستقیم خط څخه د $d=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-P$ او یا د $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

ketabton.com - The Digital Library

1- د هـرو دوو جـوړو موازي خطونو ترمنځ فاصله پيداکـړئ چې معادلې يې په لاندې ډول دي:

$3x-4y+7=0$ او $3x-4y+3=0$

$12x+5y+13=0$ او $12x+5y-6=0$

$2x+4y=1$ او $x+2y-5=0$

2 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله له $6x-4y+9=0$ مستقيم خط څخه پيداکړئ.

3 - د $3x+6y-8=0$ او $2x+4y+5=0$ مـوازي خطونـو ترمنځ فاصله مسـاوي ده په:

a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هيڅ يو

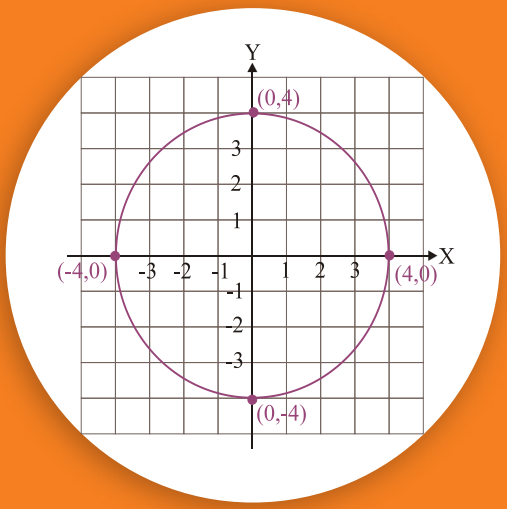
4 - د $(1,2)$ د نقطې فاصله د $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

$a:2$ $b:1$ $c:3$ $d:\frac{1}{2}$

5 - د $(-2,7)$ نقطې فاصله له $24x+7y-2=0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

$a:0,04$ b: $\frac{1}{25}$ c: 4×10^{-2} d: درې واړه سم دي

ketabton.com - The Digital Library



دایره (Circle)

آیـا د هغې دایرې معادله پیدا کولای شـئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او شـعاع یې 4 واحده وي؟

تعریف

دایره د هغو نقطو ستِ دی چې له یوې ثابتې نقطې څخه یې فاصلې مساوي وي. چې دې ثابتې نقطې ته د دایرې مرکز (Center) او مساوي فاصلې ته د دایرې شعاع (Radius) وایي.

د دایرې معادله (Equation of circle): که $C(h,k)$ د دایرې مرکز، r د دایرې شـعاع او $P(x,y)$ د دایرې په محیط یوه نقطه وي، د شـکل له مخې د فیثاغورث د قضیې په اسـاس لرو چې:

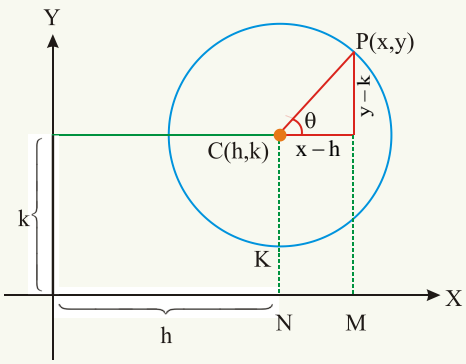
$$(\overline{CP})^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (\overline{CP} = r)$$

چې دې معادلې ته د دایرې معیاري معادله وایي. که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو په دې حالت کې $h = k = 0$ دی او د دایرې معادلـه: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$ یـا

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ده، اوکه $r = 0$ وي داسـې دایرې ته نقطوي دایره (Point circle) وایي.



ketabton.com - The Digital Library

لومړی مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې مرکز یې $(-3,5)$ او د شعاع اوږدوالی یې (7) واحده وي.

حل: $r = 7 \ , k = 5$ او $h = -3$

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 7^2$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$$

فعالیت

د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او شعاع یې 3 واحده وي.

د یوې دایرې عمومي معادله (General form of an equation of a circle):

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

یا:

که $-k = f$ ، $-h = g$ او $h^2 + k^2 - r^2 = c$ فرض شي، نو لرو چې:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{یا} \quad (x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c$$

چې دې معادلې ته د دایرې عمومي معادله وایي چې مرکز یې $(-g,-f)$ او شعاع یې $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ ده.

که $g^2 + f^2 - c > 0$ وي دایره حقیقي ده.

که $g^2 + f^2 - c = 0$ دایره نقطوي ده.

که $g^2 + f^2 - c < 0$ دایره مجازي ده. (دایره وجود نه لري)

او یا که د $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

په معادله کې $-2h = a$ ، $-2k = b$ او $h^2 + k^2 - r^2 = c$ عوض کړو لرو چې

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ چې دا هم د دایرې عمومي معادله ده، ځینې وختونه د دایرې عمومي معادله داسې هم ښودل کېږي.

$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey - F = 0$ په دې ډول چې $A = B$ او هم علامه وي، نو دا هم د دایرې عمومي معادله ده.

ketabton.com - The Digital Library

خاص حالتونه:

1 -که د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ د دايرې په معادله کې $h=0$ وي، نو د دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی او د دايرې معادله دا شکل $x^2+(y-k)^2=r^2$ غوره کوي.

2 - او کـه $k=0$ وي، د دايـرې مرکـز د X پرمحـور پـروت دی او د دايـرې معادلـه دا: $(x-h)^2+y^2=r^2$ ده.

3 -که $k=r$ وي، دايره د X پر محور مماس ده او د دايرې معادله $(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$ ده.

4 - اوکه $h=r$ وي، دايره د Y پر محور مماس ده او د دايرې معادله $(x-r)^2+(y-k)^2=r^2$ ده.

5 - يوه دايره هغه وخت د وضعيه کمياتو له مبدا څخه تېرېږي چې د $h^2+k^2=r^2$ رابطه صدق کړي.

6 - يوه دايره هغه وخت د X او Y پر محورونو مماس ده چې معادله يې دا $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ شکل ولري.

دويم مثال: د $x^2+(y-5)^2=10$ دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی.

د $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ دايره د X له محور سره مماس ده.

د $(x+3)^2+y^2=9$ د دايرې مرکز د X پر محور پروت دی.

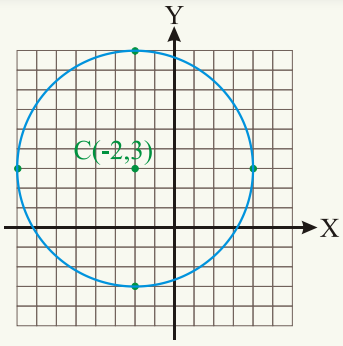
فعاليت

په شکل کې وښياست چې د دويم مثال، د لومړۍ دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی، دويمه دايره د X له محور سره مماس ده او د دويمې دايرې مرکز د X پر محور واقع دی.

دريم مثـال: د هغې دايرې عمومي او معياري معادلې پيدا کړئ چې د مرکز وضعيه کميات يې $(-2,3)$ او شـعاع يې 6 واحده وي او هم دا دايره رسم کړئ.

(د دايرې معياري معادله)

$$(x+2)^2+(y-3)^2=6^2$$



ketabton.com - The Digital Library

(د دایرې عمومي معادله)

$$x^2+y^2+4x-6y-23=0$$

څلورم مثال: وښیاست چې $5x^2+5y^2+24x+36y+10=0$ دیوې دایرې معادله ده او هم ددې دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې:

$$x^2+y^2+\frac{24}{5}x+\frac{36}{5}y+2=0$$

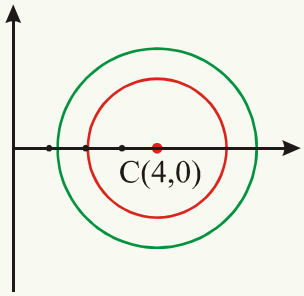
چې $g=\frac{12}{5}$، $f=\frac{18}{5}$ او $c=2$ دی.

د دایرې مرکز $(-g,-f)=(\frac{-12}{5},\frac{-18}{5})$

او د دایرې شعاع: $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{324}{25}-2}=\sqrt{\frac{418}{25}}=\frac{\sqrt{418}}{5}$

پنځم مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $x^2+y^2-8x+4=0$ له دایرې سره متحد المرکز (Concnteric) وي او د $x+2y+6=0$ له مستقیم خط سره مماس وي.

حل: د $x^2+y^2-8x+4=0$ دایرې مرکز $C_1(-g,-f)$ دی.



$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$2g=-8\Rightarrow g=-4\Rightarrow -g=4$$

$$2f=0 \quad \Rightarrow \quad f=0$$

د $C_1(4,0)$ نقطـه د هغې دایرې مرکز هم دی چې غواړو معادله یې پیـدا کړو، نو د C_1 وضعیه کمیات د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ په معادله کې وضع کوو، لرو چې:

$$(x-4)^2+(y-0)^2=r^2$$

ددې لپاره چې د C_2 ددایرې شعاع پیدا کړو، نو څرنګه چې دایره د $x+2y+6=0$ له مستقیم خط سره مماس ده. نو د $(4,0)$ د نقطې فاصله له دې مستقیم خط څخه د دایرې شعاع ده

$$d=r=\frac{|4(1)+2(0)+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}} \quad \text{یا} \quad r^2=\frac{100}{5}=20$$

ketabton.com - The Digital Library

نو ددې دایرې معادله عبارت ده له: $(x-4)^2+y^2=20$ یا $x^2+y^2-8x-4=0$

شپږم مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $B(6,5)$ او $A(4,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط پروت وي.

حل: که د ایرې مرکز $C(h,k)$ وي، نو د دایرې معادله $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ده، څرنګه چې مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط واقع دی، نو $4h+k=16$ دی.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ او $|AC|=|BC|$ او $|AC|^2=|BC|^2$

$$(h-4)^2+(k-1)^2=(h-6)^2+(k-5)^2$$
$$4h+8k=44$$
$$\underline{\pm 4h\pm k=\pm 16}$$
$$7k=28$$
$$k=4 \quad \Rightarrow \quad h=3$$
$$r^2=(3-4)^2+(4-1)^2=10$$
$$(x-3)^2+(y-4)^2=10 \Rightarrow x^2+y^2-6x-8y+15=0$$

چې دا د غوښتل شوې دایرې عمومي معادله ده.

فعالیت

د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له خط سره مماس وي.

اووم مثال: د هغې دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ چې معادله یې $x^2+y^2-4x+4y-9=0$

حل:

$$x^2+y^2-4x+4y-9=0$$
$$x^2-4x+y^2+4y-9=0$$
$$x^2-4x+(-2^2)-(-2^2)+y^2+4y+2^2-2-9=0$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=17$$

ketabton.com - The Digital Library

نو مرکز يې $(2-2)$ او شعاع يې $r=\sqrt{17}$

د هغې دايرې معادله چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدآ کې واقع نه وي او (h,k) يې مرکز وي: معادله يې $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ يا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او يا $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ده.

پوښتنې

1 – د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې:

a: د مرکز مختصات يې $(5,-2)$ او $r=4$ وي

b: د مرکز مختصات يې $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ اوشعاع يې $r=2\sqrt{2}$ وي.

c: مرکز يې $(0,0)$ اود $(1,2)$ له نقطې څخه تېرېږي.

d: د مرکز مختصات يې $(0,0)$ او د $(-3,-4)$ له نقطې څخه تېرېږي.

e: د مرکز مختصات يې $(8,-6)$ او د وضعيه کمياتو له مبدا څخه تېرېږي

2 - لومړی وښياست چې لاندې راکړل شوی معادلې د دايرې معادلې دي، بيا يې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ.

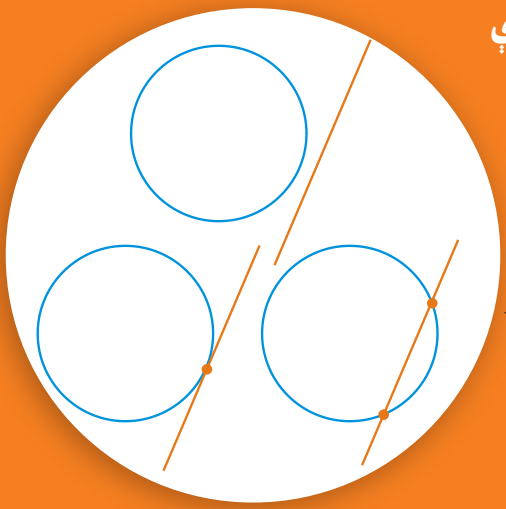
$x^2+y^2+12x-10y=0$ ، $5x^2+5y^2+14x+12y=0$

$x^2+y^2-6x+4y+13=0$ ، $3x^2+3y^2-2x+4y-1=0$

$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$

ketabton.com - The Digital Library

د یو مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره:



کولای شئ چې ووایاست د $3x-4y+20=0$ مستقیم خط د $x^2+y^2=25$ دایره په څو نقطو کې قطع کوي؟

د $x^2+y^2+ax+by+c=0$ دایرې معادله په پام کې نیسو او غواړو چې د یو مستقیم خط حالت له دایرې سره وڅېړو چې آیا دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي، یا مستقیم خط پر دایره مماس دی او یا دا چې مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

د x او یا y قیمت د مستقیم خط له معادلې څخه په لاس راوړو او د دایرې په معادله کې یې وضع کوو. یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله په لاس راځي.

1) که په دې معادله کې $\Delta=b^2-4ac>0$ وي، مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي.

2) که $\Delta=b^2-4ac=0$ وي مستقیم خط له دایرې سره مماس دی.

3) او که $\Delta=b^2-4ac<0$ مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

لومړی مثال: آیا د $2x=y+7$ مستقیم خط د $x^2+y^2-8x-2y+12=0$ دایره قطع کوي؟ د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې پیدا کړئ.

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه $y=2x-7$ ده چې د y دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو.

$$x^2+(2x-7)^2-8x-2(2x-7)+12=0$$

$$5x^2-40x+75=0$$

یا

$$x^2-8x+15=0$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

نو دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = 5 \ , \ x_2 = 3$$

د y قیمت د پیدا کولو لپاره د $x_1 = 5$ او $x_2 = 3$ قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې وضع کوو، نو لرو چې:

$$y_1 = 2x_1 - 7 \ = 2\cdot 5 - 7 = 3$$

$$y_2 = 2x_2 - 7 = 2\cdot 3 - 7 = -1$$

نو دا خط دایره د $(3,-1)$ او $(5,3)$ په نقطو کې قطع کوي.

دویم مثال: آیا د $x + 3y - 5 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی که نه؟

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه لرو چې $x = 5 - 3y$ دی، د x دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو:

$$(5-3y)^2 + y^2 - 2(5-3y) + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

او $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1 = 0$ نو دا مستقیم خط له دایرې سره مماس دی او د تماس د نقطې وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

$$x = 5 - 3\cdot 1 = 2$$

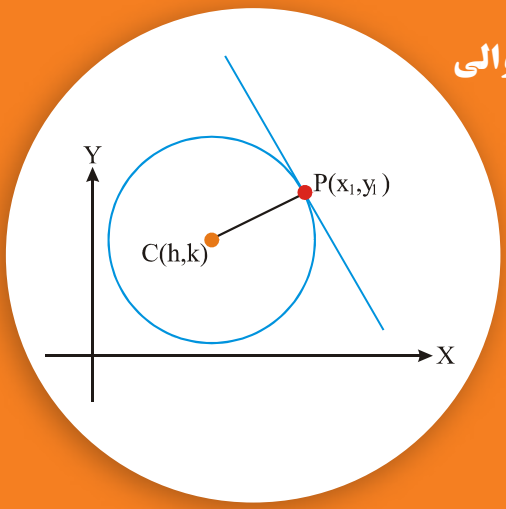
نو مستقیم خط د $(2,1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

فعالیت

آیا د $x - y + 1 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی، که دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او یا دا چې دایره نه قطع کوي؟

ketabton.com - The Digital Library

د مماس معادله او د مماس اوږدوالی



آیا د هغه مماس معادله پیدا کولای شـی چې د $P(-3,-2)$ په نقطه کې د $x^2+y^2=13$ په دایره مماس وي؟

کـه یو مسـتقیم خط پر هغـه دایره چې مرکز یې $C(h,k)$ او د $p_1(x_1,y_1)$ پـه نقطه کې پر دایره مماس وي، نو د شعاع میل مساوي دی په: $m=\frac{k-y_1}{h-x_1}$

او څرنګه چې شعاع د تماس په نقطه کې پر مماس عمود ده، نو د مماس میل له $-\frac{h-x_1}{k-y_1}$ سره مساوي دی.

څرنګه چې د مستقیم خط یوه نقطه $P_1(x_1,y_1)$ او میل یې $-\frac{h-x_1}{k-y_1}$ دی.

د مستقیم خط د $y-y_1=m(x-x_1)$ معادلې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

چې دا د هغه مماس معادله ده چې د $P_1(x_1,y_1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

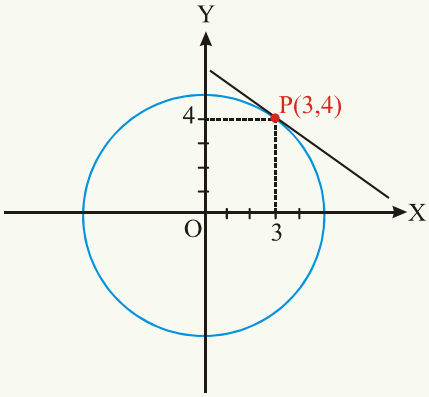
او کـه د دایـرې مرکـز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو پـه دې حالت کې $h=k=0$ دی او د مماس معادله دا شکل اختیاروي.

$$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2 \qquad \text{یا} \qquad y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

څرنګه چې $x_1^2+y_1^2=r^2$ ، نو د مماس معادله $yy_1+xx_1=r^2$ ده.

ketabton.com - The Digital Library

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(3,4)$ په نقطه کې د $x^2+y^2=25$ پر دایره مماس وي:



حل: څرنګه چې د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې دی، نو: $y\cdot 4+x\cdot 3=25$

نو د مماس معادله عبارت ده له: $3x+4y=25$

او یا $3x+4y-25=0$.

دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $P(3,5)$ په نقطه کې پر هغې دایرې مماس دي چې مرکز یې $(1,2)$ دی.

$$h=1 \qquad k=2$$
$$x_1=3 \qquad y_1=5$$
$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$
$$m=-\frac{1-3}{2-5}=-\frac{2}{3}$$
$$y-5=-\frac{2}{3}(x-3)$$
$$2x+3y=21$$
$$2x+3y-21=0$$

یا:

د مماس اوږدوالی

که د $P_1(x_1,y_1)$ له نقطې څخه چې له دایرې د باندې واقع ده، د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ پر دایره د P_1T مماس د شکل په شان رسم شي، د (T) د تماس نقطه د دایرې له مرکز (C) سره ونښلوو، دفیثاغورث د قضیې په اساس د P_1TC په قایمه زاویه مثلث کې لرو چې:

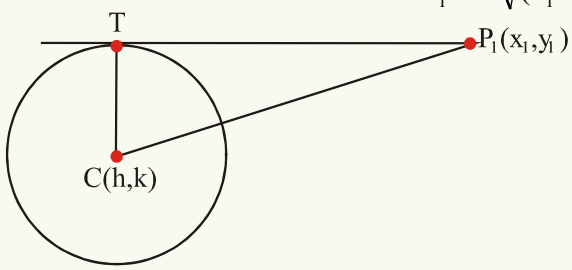
$$(\overline{P_1C})^2=(\overline{P_1T})^2+(\overline{CT})^2$$

ketabton.com - The Digital Library

$(P_1T)^2 = (P_1C)^2 - (CT)^2$ يا

له بلې خوا: $(\overline{P_1C})^2 = (x_1-h)^2 + (y_1-k)^2$ او $\overline{CT} = r$ نو د مماس اوږدوالی مساوي

دی په: $\overline{P_1T} = \sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - r^2}$



پـه یاد ولرئ چـې د مماس په امتداد د مماس د اوږدوالی د پیـدا کولو لپاره د دایرې له کومې خارجي نقطې څخه د x او y قیمتونه د دایرې په معادله کې وضع کوو.

دریم مثال: د $(-5,10)$ له نقطې څخه د $5x^2+5y^2+14x+12y-10=0$ پر دایره د مماس اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلی دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې: $x^2+y^2+\frac{14}{5}x+\frac{12}{5}y-2=0$

د مماس اوږدوالی $= \sqrt{(-5)^2+(10)^2-14+24-2} = \sqrt{133}$

فعالیت

د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $P(-2,2)$ له نقطې څخه د $x^2+y^2-6x+8y=0$ پر دایره باندې مماس وي.

د دایـرې پـه معادله کې د مسـتقیم خط د یو مجهول په وضع کولو سـره، یـوه دویمه درجه یو مجهولـه معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مسـتقیم خط دایره په دوو

ketabton.com - The Digital Library

نقطـو کـې قطع کوي او که $\Delta = 0$ وي خط پر دایره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، مسـتقیم خط دایره نه قطع کوي.

د هغـه مسـتقیم خط معادله چـې د $P_1\ (x_1, y_1)$ په نقطه کـې پر هغه دایره چـې مرکز یې (h,k) دی مماس وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله: $yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$ یا $yy_1 + xx_1 = r^2$ ده، د مماس اوږدوالی د $P(x,y)$ له نقطې څخه چې د دایرې د باندې واقع ده او د دایرې مرکز (h,k) دی مساوی ده په:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2}$$

پوښتنې

1 - د لاندې مسـتقیو خطونو حالتونه له دایرو سـره چې معادلې یې په لاندې ډول راکړل شـوي دي وڅېړئ.

د مستقیمو خطونو معادلې	د دایرو معادلې
$3x - 2y + 3 = 0$	$x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$
$x - y - 1 = 0$	$2(x^2 + y^2) - 3x + 2y - 6 = 0$
$5x - y = 1$	$x^2 + y^2 - x - 9y + 14 = 0$

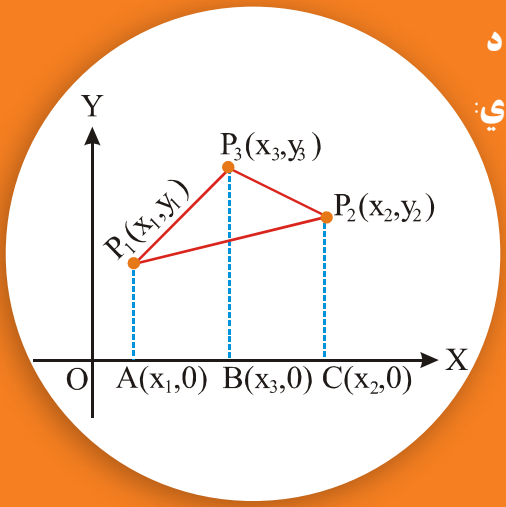
2- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې په $(2,-3)$ نقطه کې د $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ له دایرې سره مماس وي.

3 - د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $(-5,4)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 131 = 0$ پر دایره مماس رسم شوی وي

4- د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $(-2,-5)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 + 8x + 5y = 7$ پر دایره مماس رسم شوی وي.

ketabton.com - The Digital Library

د مثلث د مساحت پیدا کول چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي:



آیا د هغه مثلث مساحت پیدا کولای شئ چې رأسونه یې $(-3,6)$ ، $(3,2)$ او $(6,0)$ وي؟

که P_1 ، P_2 او P_3 لکه چې په شکل کې لیدل کېږي د یوه مثلث راسونه وي. د X پر محور $\overline{P_1 A}$ ، $\overline{P_2 C}$ او $\overline{P_3 B}$ درې عمود خطونه رسم کړئ.

د مثلث مساحت $P_1 P_2 P_3$ = د ذوذنقې مساحت $P_1 ABP_3$ + د ذوذنقې مساحت $P_3 BCP_2$ − د ذوذنقې مساحت $P_1 ACP_2$

لکه څرنګه چې پوهېږو:

د ذوذنقې مساحت = (د موازي ضلعو د نیمایې مجموعه) × (د موازي ضلعو ترمنځ فاصله)

نو:

$$\text{د مثلث مساحت } \overset{\Delta}{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}(|P_1A| + |P_3B|)(|AB|) + \frac{1}{2}(|P_3B| + |P_2C|)(|BC|)$$

$$-\frac{1}{2}(|P_1A| + |P_2C|)(|AC|)$$

$$= \frac{1}{2}[(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)] + \frac{1}{2}[(y_3 + y_2)(x_2 - x_3)] - \frac{1}{2}[(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)]$$

$$= \frac{1}{2}(x_3y_1 + x_3y_3 - x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 + x_2y_2$$
$$- x_3y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_2y_2 + x_1y_1 + x_1y_2)$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

ketabton.com - The Digital Library

مثال: که چېرې $A(4,-5)$ ، $B(5,-6)$ او $C(3,1)$ د یوه مثلث راسونه وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل: $x_1=4 \quad , \quad y_1=-5 \quad , \quad x_2=5 \quad , \quad y_2=-6 \quad x_3=3 \quad y_3=1$

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث مساحت $= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$

$$= \frac{1}{2}\left[4(-6-1)+5(1+5)+3(-5+6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(-28+30+3) = \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2} = 2.5$$

□

که د $P_1P_2P_3$ مثلث رأسونه $P_1(x_1,y_1)$ ، $P_2(x_2,y_2)$ او $P_3(x_3,y_3)$ وي، نو

د مثلث مساحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتنې

1 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې رأسونه یې $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ او $C(12,4)$ وي.

2 - کـه د یـوه مثلث رأسـونه $A(4,0)$ ، $B(-4,0)$ او $C(0,3)$ وي، ددې مثلث مسـاحت پیدا کړئ.

3 - د هغـه څلور ضلعي مسـاحت پیـدا کړئ چې رأسـونه یې $A(1,0)$ ، $B(6,2)$ ، $C(8,6)$ او $D(2,4)$ وي.

ketabton.com - The Digital Library

د څېرکي لنډيز:

• د وضعيه کمياتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصه يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د x مختصه يې صفر ده

• د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د p د نقطې وضعيه کميات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي عبارت دي له: $x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r}$ او د $\overline{P_1 P_2}$ د قطعه خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات $y = \frac{ry_2 + y_1}{1+r}$ عبارت دي له:

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ خط داخلاً د r په نسبت ووېشي نو $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ r مثبت اوکه خارجاً يې و وېشي، نو r منفي دی.

• د يو مستقيم خط ميل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو خطونو ميل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو خطونو ميل چې د Y له محور سره موازی وي، تعريف شوي نه دي. که د يوه مستقيم خط د ميل زاويه حاده وي، ميل يې مثبت او که منفرجه وي ميل يې منفي دی.

• د هغې مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې تقاطع معلومه وي، عبارت ده له:

$y = mx + b$.

د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د هغه مستقيم خط معادله چې دوې نقطې يې معلومې وي عبارت ده له:

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ اويا $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ او د هغه مستقيم خط معادله چې

ketabton.com - The Digital Library

له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ده.

• د يـوه مسـتقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ او د مسـتقيم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده.

• د $P(x_1, y_1)$ د نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه د $d = x\cos\theta + y\sin\theta - P$ او يا د $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د هغـې دايـرې معادله چـې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبـدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخـه عبـارت ده او که مرکز يې د وضعيه کمياتو پـه مبدا کې واقع نه وي او (h,k) يې مرکز وي، معادله يې: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

يا $x^2+y^2+ax+by+c=0$ او يا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

• د دايرې په معادله کې د مستقيم خط د يو مجهول په وضع کولو سره، يوه دويمه درجه يو مجهوله معادلـه په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta>0$ وي، مسـتقيم خـط دايره په دوو نقطو کې قطع کوي او که $\Delta=0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta<0$ وي، خط دايره نه قطع کوي.

• د هغه مستقيم خط معادله چې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کې پر هغه دايره چې مرکز يې (h,k) دی مماس وي عبارت ده له: $y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$

او که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله يې:

$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2$ يا $yy_1+xx_1=r^2$ ده او د PT مماس اوږدوالی د $P(x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دايرې د باندې واقع ده او مرکز يې (h,k) دی، مساوي ده په:

$$\overline{PT}=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}$$

□

• که د يوه مثلث رأسـونه $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ او $P_3(x_3, y_3)$ وي، نو $P_1P_2P_3$ د مثلث مسـاحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

ketabton.com - The Digital Library

د څپرکي پوښتنې:

1 - د لاندې هرې جوړې نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او همدرانګه ددې مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د A او B له دوو نقطو څخه تېرېږي.

$A(3,1)\ , B(-2,-4)$ $\qquad$ $A(-8,3)\ , B(2,-1)$

$A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3})\ ,\ B(-3\sqrt{5},5)$

2 - کـه $A(\sqrt{3},-1)$ ، $B(0,2)$ او $C(h,-2)$ دیـوه قایـم الزاویه مثلث راسـونه وي او د $\hat{A} = 90°$ وي، د (h) قیمت پیدا کړئ.

3 - د p د نقطـې وضعیـه کمیـات پیدا کړئ، په داسـې حال کې هغه مسـتقیم خط چې د $A(1,4)$ او $B(5,6)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{AP}{PB} = 2$ په نسبت و وېشي.

4 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د Y محور په 3 کې قطع کړي.

5 - د $x = \sqrt{7}$ او $y = -\sqrt{7}$ د خطونو میل پیدا کړئ.

6 - د y د محور میل مساوي دی په:

$a)\ -1$ $\qquad$ $b)\ 1$ $\qquad$ $c)\ 0$ $\qquad$ $d)$ تعریف شوی نه دی

7 - دیوه مستقیم خط میل $m = \frac{2}{3}$ دی، د هغه خط میل چې پر دې خط عمود وي، مساوي دی په:

$a)\ \frac{2}{3}$ $\qquad$ $b)\ -\frac{2}{3}$ $\qquad$ $c)\ \frac{3}{2}$ $\qquad$ $d)\ \frac{-3}{2}$

8 - د هغو مستقیمو خطونو میل پیدا کړئ چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تېرېږي.

$(4,8)$ او $(4,6)$ $\qquad$ $(2,7)$ او $(3,-2)$ $\qquad$ $(5,11)$ او $(-2,4)$

9 - د $4x - y + 2 = 0$ او $12x - 3y + 1 = 0$ مستقیم خطونه:

a) موازي دي $\qquad$ b) عمود دي $\qquad$ c) نه موازي او نه عمود دي

10 - د $3x - 4y + 3 = 0$ او $3x - 4y + 7 = 0$ مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

11 - د هغـه مسـتقیم خـط معادلـه پیـدا کـړئ چـې د $(-4,7)$ لـه نقطـې تېر شـي او د $2x - 7y + 4 = 0$ له مستقیم خط سره موازي وي.

ketabton.com - The Digital Library

12 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

13 - د p د نقطې وضعیه کمیات په داسې حال کې پیدا کړئ چې $\overline{P_1\ P_2}$ مستقیم خط چې د $P_1\ (2,-5)$ او $P_2\ (6,3)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{3}{4}$ په نسبت ووېشئ.

14 - د لاندې مستقیمو خطونو معادلې نورمال شکل ته واړوئ.

$2x+5y-2=0$ $\qquad$ $2x-3y+6=0$

15 - د هغه مستقیم خط میل چې د $(4,0)$ او $(-4,0)$ له نقطو څخه تېرېږي مساوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) تعریف شوي نه دی

16 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال خط یې د X محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

17 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ او $C(4,-5)$ وي.

18 - د هغه مثلث مساحت چې رأسونه یې $A(1,4)$ ، $B(2,-3)$ او $C(3,-10)$ دي مساوی دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 2 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) هېڅ یو

19 - د $x+2y=6$ د مستقیم خط د تقاطع نقطې د $x^2+y^2-2x-2y-39=0$ له دایرې سره پیدا کړئ.

20 - د هغې دایرې معادله پیدا کړی چې د $A(1,1)$ ، $B(2,-1)$ او $C(3,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي.

21 - د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $A(3,-1)$ او $B(0,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x-3y-3=0$ پر مستقیم خط واقع وي.

22 - د $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی یې پیدا کړئ.

23 - د هغې دایرې معادله پیدا کړی چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط باندې واقع وي.

ketabton.com - The Digital Library

24 - که د یوه مثلث رأسونه $A(5,-6)$ ، $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي، دا مثلث:

a) متساوی الاضلاع دی b) متساوی الساقین دی c) مختلف الاضلاع دی

25 - که د یوه مثلث رأسونه په ترتیب سره $(5,4)$ ، $(4,10)$ او $(7,8)$ وي دا مثلث:

a) متساوي الاضلاع دی b) متساوي الساقین دی c) مختلف الاضلاع دی

26 - کـه $P(-8,4)$ او $Q(2,-1)$ وي د A د نقطـې مختصات پیدا کړئ که د A نقطه د PQ خط داخلاً او خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

27 - د $x-y+1=0$ مسـتقیم خـط د تقاطـع نقطې له $x^2+y^2=5$ دایرې سـره پیدا کړئ.

28 - کـه د $x+ay-5=0$ مسـتقیم خط د $x^2+y^2-2x+4y=0$ پـر دایره مماس وي، د a قیمت پیدا کړئ.

29 - د هغې دایرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له مستقیم خط سره مماس وي، عبارت ده له:

a) $x^2+y^2-4x=0$ b) $x^2+y^2-2x=0$ c) $x^2+y^2+2x=0$

30 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ ده:

a) حقیقي ده b) نقطوي ده c) موهومي ده

31 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

a) موهومي ده b) نقطوي ده c) حقیقي ده

32 - کـه $A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وي د A او B د نقطـو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او هم د $\overline{AB}$ د خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - کـه د یوه مثلث رأسـونه $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي، وښیاسـت چې دا مثلث قایم الزاویه مثلث دی.

34 - وښیاست چې $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ او $D(a,b)$ د یو مستطیل رأسونه دي او هم وښیاست چې د مستطیل د قطرونو اوږدوالی سره مساوي دی.

35 - وښیاست چې $A(3,1)$ ، $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

ketabton.com - The Digital Library

36 - د هغـه مسـتقيمو خطونـو معادلې پيداکړئ چـې د لاندې هروجوړو لـه نقطو څخه تېرېږي.

(5,8)	(1,2)	(3,5)	(8,15)
(−1,−3)	(2,−1)	(−2,−1)	(3,−4)
(0,3)	(5,0)	(0,2)	(−2,0)

37 - د هغـه مسـتقيم خط معادله چې د (5,8) او (−1,10) له نقطو څخـه تېرېږي عبارت ده له:

$a:\quad y=-\frac{1}{3}x+9\frac{2}{3}$

$b:\quad y=-\frac{x}{3}+9\frac{2}{3}$

$c:\quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{29}{3}$

d: درې واړه سم دي

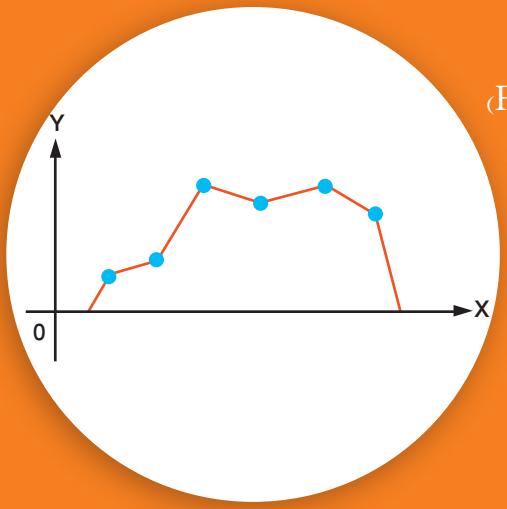
ketabton.com - The Digital Library

اتم څېرکی
احصائیه

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

د فريکونسي څو ضلعي ګراف
(Frequency Polygon graph)



مخامخ شکل په پام کې ونيسئ، آيا کولای شئ د راکړل شوي منحني لاندې مساحت پيدا کړئ؟
آيا ويلای شــئ چې تر منحني لاندې مساحت له څه شي سره برابر دی؟

فعاليت

د فريکونسيو مخامخ جدول په نظر کې ونيسئ.

کلاسونه	د کلاس (صنف) مرکز	فريکونسی
10-13	11.5	3
13-16	14.5	6
16-19	17.5	7
19-22	20.5	4

- د هر کلاس (صنف) مرکز د لومړی مختصې او اړونده فريکونسي يې د دويمې مختصې په حيث د مرتبو جوړو په شکل په نظر کې ونيسئ.
- ددې مرتبو جوړو موقعيت د قايمو وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.
- هغه نقطې چې په مستوي کې له دې مرتبو جوړو څخه په لاس راځي، سره ونښلوئ.

آيا کولای شئ چې ددې ګراف لاندې مساحت پيدا کړئ؟

- د X پر محور د ګراف دواړو خواوو ته (8.5,0) او (38.5,0) نقطې زياتې کړئ. په لاس راغلی ګراف د فريکونسي جدول له مستطيلي ګراف سره يوځای رسم کړئ او د مستطيلونو مساحت د منحني لاندې مساحت سره پرتله کړئ.

په څو ضلعي ګراف کې د هر کلاس مرکز پر افقي محور اود هر کلاس مطلقه فريکونسي يا نسبي

ketabton.com - The Digital Library

فریکونسي پر عمودي محور ښودل کېږي، د کلاس مرکز (منځني نقطه) او د کلاس د فریکونسیو په مقابل کې په مستوي کې یوه نقطه ټاکل کېږي چې عرض یې د کلاس مرکز او اوږدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسیو سره برابر دی، د جدول د کلاسونو په شمېر په مستوي کې په هماغه اندازه نقطې په لاس راځي. که د کلاسونو په اول او اخر کې دوي نورې د $(x_n + c\ ,\ 0)$ ، $(x_1 - c\ ,\ 0)$ اختیاري نقطې زیاتې کړئ، څرنګه چې c د هر کلاس وسعت دی یعنې (پاسني سرحد منفي د هماغه صنف لاندینی سرحد) چې ددې نقطو له نښلولو څخه یو ګراف په لاس راځي چې د فریکونسي څو ضلعي ګراف نومیږي.

مثال: د لاندې جدول د ډیټا (Data) مستطیلي (هستوګرام) او د فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه یې رسم کړئ.

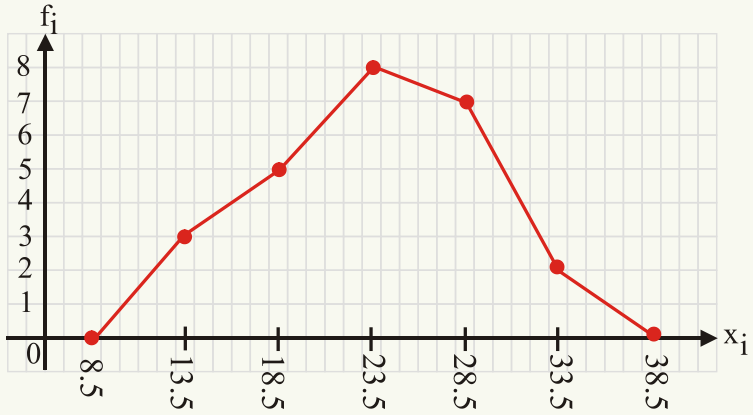
د کلاسونو حدود = CL	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
مطلقه فریکونسي = f_i	3	5	8	7	2
د کلاسونو مرکز = X_i	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

پوهېږو چې $c = 5$ ده، ددې لپاره چې دوه اختیاري نقطې په لاس راوړو، نو:

$$(x_1 - 5\ ,\ 0) = (13.5 - 5\ ,\ 0) = (8.5\ ,\ 0)$$

$$(x_n + 5\ ,\ 0) = (33.5 + 5\ ,\ 0) = (38.5\ ,\ 0)$$

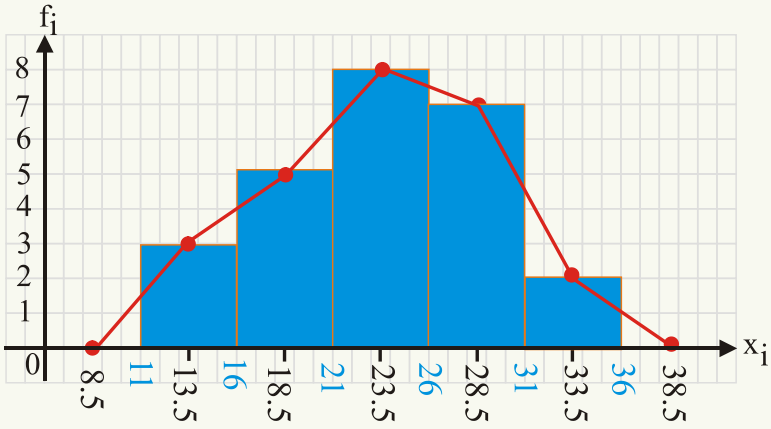
ددې نقطو $(8.5\ ,0)$ او $(38.5\ ,0)$ په اضافه کولو سره ګراف رسموو:



د فریکونسي څو ضلعي ګراف

ketabton.com - The Digital Library

مستطیلي ګراف د فریکونسي څو ضلعي ګراف سره:



له پورتني ګراف څخه لیدل کیږي چې:

- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف راسونه تر مطالعې لاندې دفریکونسیو له جدول د اړونده مستطیل د پورتنی ضلعې منځني نقطه سره واقع دي.
- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف د لاندې سطحې مساحت د مستطیلي ګراف له مساحت سره برابر دی.
- د نسبي فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه زیات د متصلو ډیټاوو (Data) له پاره کارول کیږي.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1 - د نهم اولسم ټولګيو د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړل شوی دی.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
152	98	117	153	141	126

د پورتنۍ ډيټا (Data) لپاره د فريکونسي يو جدول ترتيب کړئ. ډيټا (Data) په شپږو طبقو ووېشئ، ددې ډيټا (Data) د ښودلو لپاره کوم ډول ګراف ښه دی، د فريکونسيو څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

د ساقې او پاڼې ګراف

مور د عددونو په نړۍ کې ژوند کوو، هر ټن د خپل هیواد د ټولنې د یو غړی په حیث یوه خاصه شمېره لري چې د نورو مشخصو په شان د اهمیت ور ده. آیا ویلای شئ چې دا شمېره څه شی ده؟ او آیا تاسو هم خپله شمېره پیژنئ؟

فعالیت

• په لاندې جدول کې د سانتي متر په حساب د 20 نویو پیدا شوو ماشومانو د تنې لوړوالی چې په تصادفي ډول انتخاب شوی دی، راکړل شوی دی.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

• پورتنۍ ډیټا (Data) له کوچني عدد څخه لوی عدد ته ترتیب کړئ.

- لیدل کېږي چې په دې ټولو عددونو کې د 4 رقم مشترک دی، کولای شو چې دا رقمونه په لاندې ډول ولیکو.

$$40 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)$$

• له 0 تر 9 پورې رقمونه هر یو رقم څو واړې تکرار شوی دی.

پورتنۍ رقمونه په لاندې شکل لیکو.

4	0			
	2			
	3	3	3	3
	5	5	5	
	6	6		
	7	7	7	
	8	8		
	9	9	9	9

ketabton.com - The Digital Library

• که د عددونو پورتنی شکل د 90° زاویې په اندازه کینې خوا ته دوران ورکړئ، دا شکل له کوم ډول ګراف سره مشابه دی؟

ډیټا عموماً د عددونو په شکل وي. له دې عددونو څخه څرنګه چې په پورتني فعالیت کې ولیدل شول، کولای شو، ګراف یې جوړ کړو چې دا ګراف د ساقې او پانې د ګراف په نامه یادېږي.

او که دې ګراف ته د 90° زاویې په اندازه کینې خواته دوران ورکړو، میله یي ګراف لاس ته راځي.

د مثال په ډول که ډیټا د صفر او 100 ترمنځ وي، کولای شو، لکه: د 37 عدد 3 په ساقه او (7) د پانې په حیث ولیکو.

د ساقې او پانې ګراف د هغو ډیټا (Data) لپاره چې تر ټولو لوی او تر ټولوکوچنی ډیټا (Data) ترمنځ توپیر یې لږ وي، مناسب دی.

لومړی مثال: د کتابونو په یو پلورنځي کې 20 ډوله کتابونه چې هر ډول شمېر یې په لاندې جدول کې راکړل شوی دی، ددې ډیټا (Data) د ساقې او پانې ګراف رسم کړئ.

10	11	15	23	27	28	38	38	39	39
40	41	44	45	46	46	52	57	58	65

حل: شکاره ده چې د ډیټا (Data) د کینې خوا اولنی عددونه 5.4.3.2.1 او 6 دي. چې دا عددونه د ساقې لپاره په نظر کې نیسو. او د هرې څانګې اړونده ډیټا ورته ددې عددونو مخکې لیکو چې په لاندې ډول لاس ته راځي.

ساقه	پانې					
1	0	1	5			
2	3	7	8			
3	8	8	9	9		
4	0	1	4	5	6	6
5	2	7	8			
6	5					

ketabton.com - The Digital Library

که د کتاب مخ ته د ساعت د ستنې حرکت په مخالفه خواکې د 90° زاویې په اندازه دوران ورکړو. داګراف د میله یي ګراف په شکل بدلېږي چې په لاندې ډول یې لیکلای شو.

فریکوینسی						
6				6		
5				6		
4			9	5		
3	5	8	9	4	8	
2	1	7	8	1	7	
1	0	3	8	0	2	5
	1	2	3	4	5	6

دویم مثال: د ریاضي په یوه امتحان کې لاندې نتیجې له زده کوونکو څخه پلاس راغلي دي، ددې ډیټا لپاره د ساقې او پانې ګراف رسم کړئ.

25 45 46 50 50 50 55 55 55 55
55 57 58 58 60 60 62 65 67 72

حل: د ساقې د رسم لپاره له لسیزو رقمونو او د پانې د ترسیم لپاره له یوویزو رقمونو څخه استفاده کوو:

ساقه	پانې
2	5
3	
4	5 6
5	0 0 0 5 5 5 5 5 7 8 8
6	0 0 2 5 7
7	2

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1- د لاندې ډیټا (Data) لپاره د ساقې اوپانې ګراف رسم کړئ.

7.9	8.3	10.9	11.7	8.4	9.1	6.8	12.5
11.2	7.8	12	11.3	8.4	13	6.8	

پاملرنه: د ساقې او پانې د ګراف د ښودلو لپاره د 8.3 عدد د 83 په شکل او د 11.2 عدد د 112په شکل او د 12 عدد د 120 په شکل لیکو.

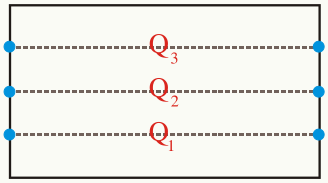
ketabton.com - The Digital Library

ربعي (خلورمې)

په مخامخ شکل کې که دا د خلکو ټولنه نظر د دوی د تنې د لوړوالي په نسبت په خلورو مساوي برخو و وېشل شي، هره برخه يې په کوم نامه يادوي ؟

فعالیت

مخامخ شکل يو مستطيل دی چې د Q_1, Q_2 او Q_3 خطونو په واسطه په خلورو مساوي برخو وېشل شوی دی.



- د مستطيل د مساحت څو فيصده مساحت د Q_1 د خط لاندې، څو فيصده مساحت د Q_1 د خط له پاسه واقع دی؟
- دمستطيل څو فيصده مساحت د Q_2 تر خط لاندې او څوفيصده مساحت د Q_2 د خط له پاسه دی؟
- د مستطيل څو فيصده مساحت د Q_3 تر خط لاندې او څو فيصده مساحت د Q_3 د خط له پاسه دی؟

هغه عددونه چې ترتيب شوي ډيټا په خلورو مساوي برخو وېشي، دغه عددونو ته لومړۍ ربع، دويمه ربعه او دريمه ربع وايي او په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کېږي.

لومړۍ ربع هغه مقدار دی چې 25% ډيټا له هغې لاندې او 75% ډيټا له هغې پورته واقع وي.

دويمه ربع هغه مقدار دی چې 50% ډيټا له هغې لاندې او 50% ډيټا له هغې پورته واقع وي.

دريمه ربع هغه مقدار دی چې 75% ډيټا تر لاندې او 25% ډيټا يې له پاسه واقع وي.

که ډيټا (Data) په صعودي ډول ترتيب کړو، د ډيټا (Data) ميانه د Q_2 سره مساوي لومړنۍ نيمايي ډيټا (Data) ميانه له Q_1 سره مساوي او همدارنګه د دويمې نيمايي ميانه له Q_3 سره مساوي ده.

د ربعو د پيدا کولو په وخت کې لاندې پراونه په پام کې ونيسئ.

ketabton.com - The Digital Library

- ډيټا (Data)په صعودي ډول ترتيب کړئ.
- ترتيب شوی ډيټا ته له (1) څخه تر n پورې شمېره (کوډ) ورکړئ.
- د P ام موقعيت ($P=1,2,3$) دلاندې رابطې په مرسته په لاس راځي.

$$C_{QP}=\frac{P\cdot n}{4}+\frac{1}{2}$$

•د ربعې د موقعيت په اساس، د ربعې مقدار وټاکئ.

مثال: فرض کړئ په لاس راغلي ډيټا (مشاهدي) په لاندې ډول راکړل شوي وي.

90 85 80 120 100 140

د لومړۍ او دريمې ربعې ځايونه وټاکئ.

د لومړۍ او دريمې ربعې مقدارونه پلاس راوړئ.

د ډيټا شمېره:	1	2	3	4	5	6
ډيټا :	80	85	90	100	120	140

د لومړۍ او دريمې ربعې ځايونه عبارت دي له:

$$C_{Q_1}=\frac{1\cdot 6}{4}+\frac{1}{2}=2$$

$$C_{Q_3}=\frac{3\cdot 6}{4}+\frac{1}{2}=5$$

نو د لومړۍ او دريمې، ربعې مقدارونه مساوي دي په:

$$Q_1=85 \qquad Q_3=120$$

پوښتنې

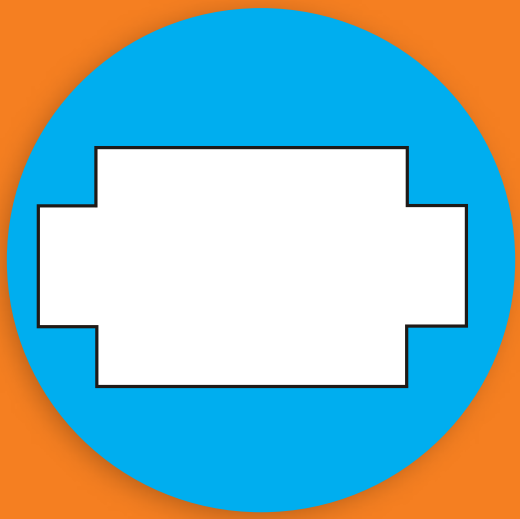
فرض کړئ په لاس راغلي ډيټا په لاندې ډول راکړل شوي وي.

100 90 80 120 160 140 85

- لومړۍ او دريمه ربعې (څلورمې) پيدا کړئ.
- له مياني تر مخه عددونه وليکئ.
- له مياني وروسته عددونه په لاس راوړئ.

ketabton.com - The Digital Library

صندوقچه يې ګراف



د يوې تختې کاغذ له څلورو کنجونو څخه څلور مربعګانې چې هره ضلع يې $5cm$ وي، جلا کړئ، بيا د کاغذ څنډې له پورته خواڅخه قات کړئ.

کوم شکل چې په لاس راځي، له څه شي سره ورته والی لري؟

فعالیت

د هغه ناروغانو شمېر چې د 17 ورځو، په موده کې يوه روغتون ته راغلي دي، په لاندې ډول ثبت شوي دي.

11	10	15	23	14	27	16	17	24
28	13	31	31	18	25	26	19	

- ميانه يې پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکي چې د ميانې تر مخې نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکئ چې د ميانې په وروسته نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- دويمه ربع (څلورمه) يا Q_2 کوم عدد دی؟

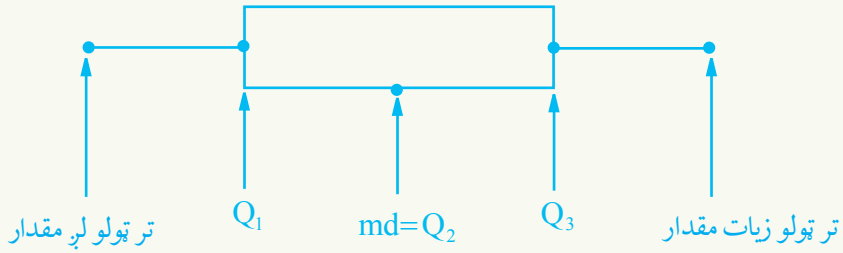
صندوقچه يې يا جعبه يي ګراف: دا يو داسې تصويري ګراف دی چې د ډيټا (Data) تيت والی د نورو ګرافونو په نسبت ښه روښانه کوي، د اګراف د لاندېنيو اندازو پر بنياد د ډيټا (Data) ګراف ښکاره کوي.

الف) تر ټولو کوچنۍ ډيټا ب) لومړنۍ ربع (څلورمه) ج) ميانه

د) دريمه ربع هـ) تر ټولو لويه ډيټا

صندوقچه يې ګراف د ربعو او له زيات نه زيات او کم تر کمه ډيټا (Data) ښودونکی دی.

ketabton.com - The Digital Library



کولای شو د صندوقچه یې ګراف د رسمولو پراوونه په لاندې ډول ولیکو:

الف) تر ټولو کوچنۍ ډیټا پیدا کړئ. ب) تر ټولو لویه ډیټا پیدا کړئ

ج) میانه پیدا کړئ د) لومړۍ ربع پیدا کړئ

هـ) دریمه ربع پیدا کړئ و) ګراف رسم کړئ.

مثال: که په یو ښار کې د 15 ورځو په موده کې د ترافیکي پیښو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي وي، صندوقچه یې ګراف یې رسم کړئ.

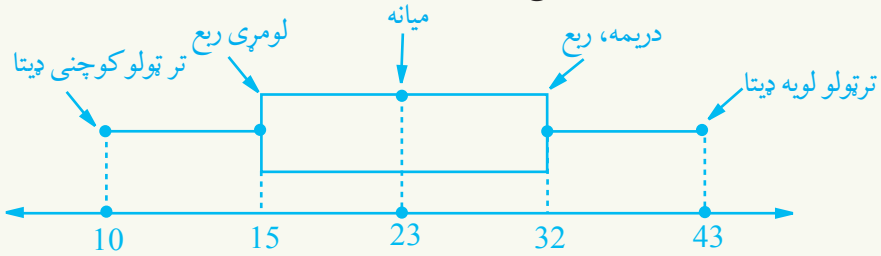
12 10 15 23 14 27 16 34
41 43 32 18 25 31 19

حل: پورتنۍ ډیټا په ترتیب لیکو.

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

نو: تر ټولو کوچنۍ ډیټا = 10 تر ټولو لویه ډیټا= 43

میانه = 23 لومړۍ ربع $= Q_1 = 15$ دریمه ربعه $= Q_3 = 32$



پورتنۍ ګراف صندوقچه یې ګراف دی چې 50% ډیټا دصندوق په داخل کې (د لومړۍ، دریمې او ربعې ترمنځ) پرتې دي، 25% یې 10 او 15 ترمنځ او 25% ډیټا د 32 او 43 ترمنځ پرته ده.

ketabton.com - The Digital Library

د نارمل منحني د مرکزي ټاکوونکو پرتله کول

آیا کولای شو چې د نارمل منحني په مرسته مرکزي ټاکوونکی پلاس راوړو؟

$$\text{mod} = ?$$
$$\text{med} = ?$$
$$\overline{x} = ?$$

لاندې کوم منحني چې وینئ، په احصائیه کې یوله مشهورو منحني ګانو څخه دی، کولای شو چې زیاتې طبیعي پیښې ددې منحني په مرسته وښایو. نارمل منحني یو متناظره منحني دی چې د یوه زنګ په شان شکل لري.

- آیا د اوسط، میانې او مودې د مرکزي ټاکوونکو ځایونه په دې منحني کې ښودلای شئ؟

فعالیت

- که په یوه ټولګي کې ټول زده کوونکي ښې نمرې واخلي:
- آیا څه فکر کوئ چې ددوی د نمرو اوسط هم ښه دی؟
- آیا د اوسط لوړوالی د ټولګي د تعلیمي وضعي پر ښه والي دلالت کوي؟
- ددې لپاره چې د ټولګي وضع ښه ارزیابي کړی، نیم ټولګی باید ښې نمرې واخلي.
- هغه کومه نمره ده چې د نیمایي ټولګي د زده کوونکو نمرې له هغې زیاتې وي؟

ketabton.com - The Digital Library

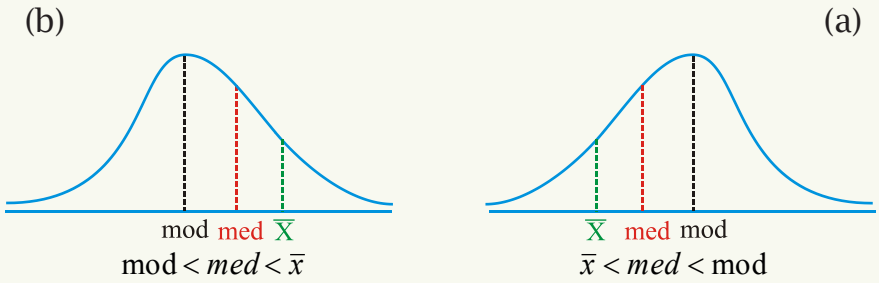
• که میانه له اوسط څخه ډېره کوچنۍ وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟

• که میانه له اوسط څخه ډېره لویه وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟

د پورتني فعالیت او د منحني له متناظر والي څخه نتیجه په لاس راځي چې د میانې او اوسط ځای په نارمل منحني کې یو دی او څرنګه چې نارمل منحني اعظمي نقطه لري، نو له همدې سببه د مود ځای هم له اوسط او میانې سره مساوي دی یعنې:

$$\overline{X} = \text{mod} = \text{md}$$

که نارمل منحني، متناظره نه وي، په دې حالت کې لرو چې:



$\text{mod} < med < \overline{x}$ $\quad$ $\overline{x} < med < \text{mod}$

- که چېرې اوسط او میانه سره مساوي وي، له اوسط او میانې څخه تر مخه او له اوسط او میانې څخه وروسته ډیتاګانې سره مساوي دي.

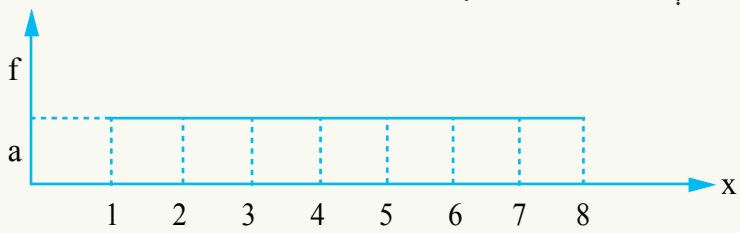
-که اوسط د میانې کینې خوا ته پروت وي، د هغو ډیتا شمېر چې د اوسط ښې خواته پرتې دي، د هغو ډیتا (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کینې خواته پرتې دي، زیات دی، لکه: د a به شکل کې.

-که اوسط د میانې ښې خواته پروت وي، د هغه ډیتا (Data) شمېر چې د اوسط ښي خواته پرتې دي، د هغه ډیتاوو (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کینې خوا ته پرتې دي، لږ دي.

ketabton.com - The Digital Library

لکه د b به شکل کې

مثال: په لاندې ګراف کې اوسط او میانه پیدا کړئ.



حل:

میانه =

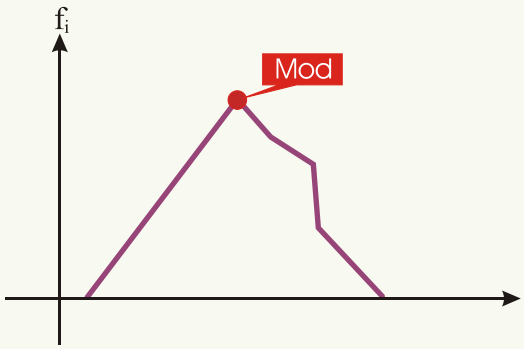
اوسط = $\text{med} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$

$$\bar{x} = \frac{a\cdot 1 + a\cdot 2 + a\cdot 3 + a\cdot 4 + a\cdot 5 + a\cdot 6 + a\cdot 7 + a\cdot 8}{a+a+a+a+a+a+a+a}$$

$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

مثال: په لاندې ګراف کې د مودې تقریبي قیمت پرته له محاسبې په ګوته کړئ.

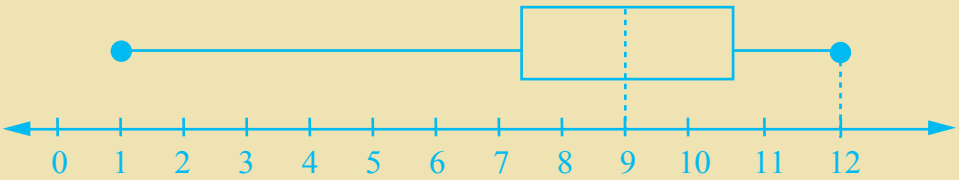
حل:



ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1- دلاندې صندوقچه يې ګراف په نظر کې نيولو سره لاندې اړوندو پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ.



- په پورتني ګراف کې ميانه څومره ده؟
- په دې ډيتا کې لومړنی، ربع د 8 عدد دی، دا عدد، څه شی ښيي؟
- دريمه ربع څو ده؟ دا عدد، د څه شي ښودونکی ده؟
- دا چې ميانه د صندوق کينې خواته ده، د څه شي ښکارندويه دی؟
- داچې د کينې خوا د عددونو شمېر نظر ښې خوا ته زيات دی دا زياتوالی د څه ښکاره کوونکی دی؟

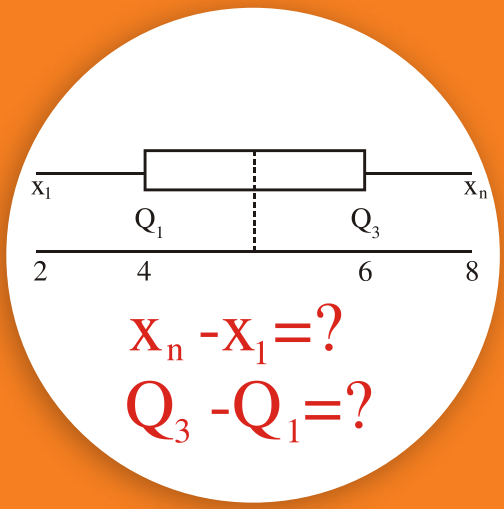
2- د يوه هېواد د فوټبال ملي ټيم د لوبغاړو عمرونه په لاندې ډول دي.

25	24	26	19	31	18	23	22	25	26
25	27	23	29	25	25	33	31	26	

د لاندې نتيجو څخه کومه يوه سمه ده؟

- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له اوسط څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له مياني څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له اوسط څخه ښکته وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له اوسط څخه ډېر وي د هغه لوبغاړو له شمېر سره مساوي دی چې عمرونه يې له اوسط څخه لږ دي.

ketabton.com - The Digital Library



ربعي انحراف

که د يوې ټولنې د احصائيوي تغيراتو لمن لويه وي، آيا فکر کوئ چې د ډيټا د تحول ساحه به له ټولنې څخه نامناسبه پايله وړاندې کړي؟

فعاليت

له يو موزيم څخه د ليدونکو شمېر په 12 ورځو کې په لاندې ډول دی.

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

- ددې ډيټا (Data) د تحول ساحه پلاس راوړئ.
- په عمومي ډول پورتنۍ ډيټاوې د کومو دوو عددونو ترمنځ تيت شوي دي؟
- يو په څلورمه برخه ډيټا له پورته اوښکته خوا څخه حذف کړئ او بيا د پاتې ډيټا (Data) د تحول ساحه پيدا کړئ.
- دا د تحول دوه ساحې چې په لاس راغلي دي، يو له بله سره يې پرتله کړئ، کومه يو ه يې ډېر تيت والي ښيي؟
- په ځينو وختونو کې د تحول ساحه د دوو ډېرو کوچنيو او يا ډېرو لويو مقدارونو له سببه، نامناسبه تعبيرونه له ټولنې څخه مورِ ته په لاس راکوي.

نو له دې امله د نورو ټاکونکو څخه چې د ربعو د انحراف په نامه يادېږي، ګټه اخيستل کېږي، تر څو د ټولنې د تحول ساحه په ښه ډول وټاکي.

که Q_1 او Q_3 په ترتيب سره د ډيټا د ستِ، لومړۍ ربع او دريمه ربع وي، نو د ربعو انحراف په (Q) سره ښودل کېږي او په لاندې ډول تعريف شوي دي.

$$Q = Q_3 - Q_1$$

ربعي انحراف يو له هغو ټاکونکو څخه دی چې د ډيټا (Data) تيت والي ښکاره کوي.

داسې چې د لومړۍ او دريمې ربعې له تعريف څخه پوهېږو چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه چې دا فاصله لږه وي، ډيټا سره نژدې دي، يا په بل عبارت د هغوی

ketabton.com - The Digital Library

تیت والې لرو دی.

ځپنې وختونه د ربعو (څلورمو) انحراف د $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ په شکل تعریفوي او دې ته د ربعو نیمایې لمن وایي.

مثال: دلاندې عددونو د ربعو (څلورمو) انحراف پیدا کړئ.

36 35 29 30 31 25 24 23 22 22 20

حل: لومړی عددونه په صعودي ډول ترتیب کوو او بیا ورته یوه شمېره ټاکو:

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33+2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

نوله دې ځایه: $Q_3 = 30.75$

همدارنګه: $C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11+2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$

نوله دې ځایه: $Q_1 = 22.25$

د لومړنۍ او دریمې، ربعې قیمتونه په ترتیب سره 22.25 او 30.75 دي نو:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

پوښتنې

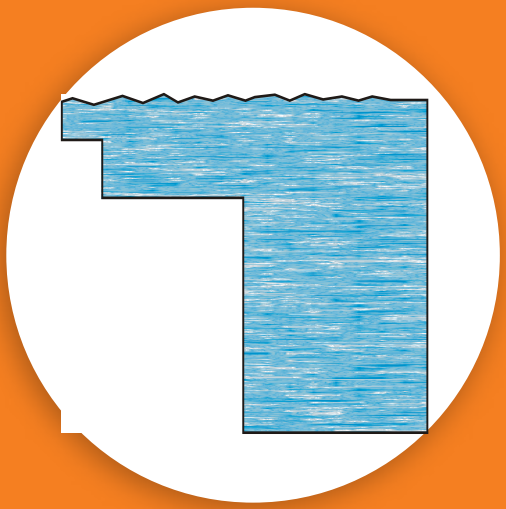
1 – د لاندې ډیټا د تحول ساحه، د ربعو (څلورمو) انحراف او مودې پیدا کړئ او وواياست چې د ډیټا ګڼوالی په کومه ساحه کې ډېر دی.

5 11 12 14 15 15 16 17 30

2 – د لاندې ډیټا د تحول ساحه او د څلورمو انحراف پیدا او د لومړۍ پوښتنې د تحول د ساحې او د څلورومو د انحراف سره یې پرتله یې کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22

ketabton.com - The Digital Library



واریانس (variance)

که ستاسو لامبو ښه زده نه وي او وغواړی چې په داسې ډنډ کې ولامبئ چې ژور والی یې په ټولو برخو کې یو شان نه وي. ددې لپاره چې په ډاډه زړه ولامبئ، کوم معلومات باید ولرئ؟

فعالیت

که د لمبا په یو ډنډ کې د یوځای ژوروالی 1.5 متره او دبل ځای ژوروالی یې 2.5 متره وي.

- ددې ډنډ د دواړوو ځایونو د ژوروالي اوسط پیدا کړئ.
- ددې دوو ډیتاوو د انحرافونو مربع له حسابي اوسط څخه پیدا کړئ.
- ددې دوو ډیتاوو د انحرافو د مربعګانو مجموعه پیدا کړئ.
- د پورتنیو ډیتاو (Data) مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر و وېشئ.

د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ډیتا د واریانس د پیدا کولو لپاره لاندې پرلاوونه په نظر کې ونیسئ.

- د ډیتا اوسط پیدا کړئ یعنې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$$

- د انحرافونو د مربعګانو مجموعه یعنې:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2$$

په لاس راوړئ.

-پورتنۍ مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر (n) و وېشئ او په s^2 یې وښیې:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

ketabton.com - The Digital Library

چې دلته S^2 د واریانس په نامه یادېږي. واریانس برابر دی د انحرافونو د مربع اوسط له اوسط څخه.

پاملرنه: ځینې وختونه واریانس د پیدا کولو لپاره له دې لاندې فورمول څخه هم ګټه اخلي.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت: پورتنې فورمول کولای شو، په لاندې ډول لاس ته راوړو.

پوهېږو چې :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2} - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^{\,2}}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: د لاندې ډیټا (Data) وریانس د دواړو فورمولونو په مرسته پیدا کړئ.

1 5 6 7 9

الف: د $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(xi - \bar{x})^2}{5}$ له فورمول څخه ګټه واخلئ چې $i = 1,2,3,4,5$

$$\bar{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = 5.6$$

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$= \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (0.4)^2 + (1.4)^2 + (3.4)^2}{5}$$

$$= \frac{21.16 + 0.36 + 0.16 + 1.96 + 11.56}{5} = \frac{35.2}{5_5} = 7.04$$

ب: له دې فورمول $S^2 = \frac{\sum x_i^{\,2}}{5} - \bar{x}^2$ څخه هم کولی شو چې همدا قیمت په لاس راوړو

$$S^2 = \frac{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + x_4^2 + x_5^{\,2}}{5} - \bar{x}^{-2} = \frac{192}{5} - (5.6)^2$$

$$= 38.4 - 31.36 = 7.04$$

یادونه: که ډیټا په ګروپونو (کلاسوونو) کې ترتیب شوي وي او د کلاسونو مرکزونه $x_1, x_2, .., x_n$ او $f_1, f_2, ..., f_n$ فریکونسي هم راکړل شوي وي. په دې حالت کې د واریانس د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول څخه کار واخلو:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

داسې چې $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ دی.

د واریانس د واحد ټاکل مشکل دي. په عمومي ډول په عمل کې مطلقه قیمت یې نیول کېږي، ځېنې وخت د متحول د واحد مربع د واریانس د واحد په حیث ګڼل کېږي.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

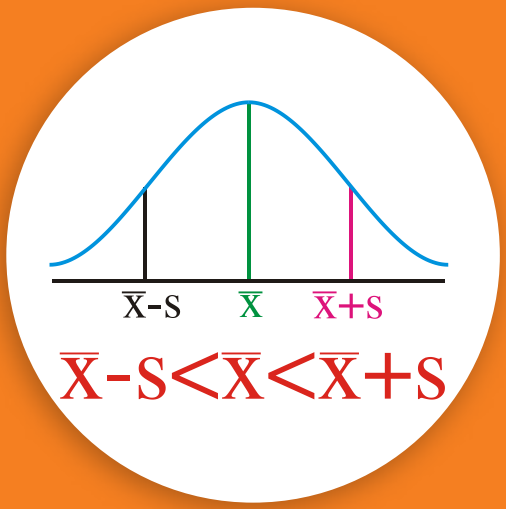
د هغو ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په یوه اونۍ کې د لوبو کولو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

3 2 1 4 3 2 2

ددې ډیټا (Data) وریانس پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

معياري انحراف



که S دوريانس جذر $\bar{x}$ دډيتا اوسط وي
مخامخ شکل کوم ډول ټاکونکی توضيح کوي؟

فعاليت

که S^2 د $x_1, x_2, ..., x_n$ ډيټا واريانس وي. آيا څه فکر کوئ چې د S^2 او S واحدونه سره څه توپير لري؟ فرض کړئ چې په يوه اونۍ کې يوې کارخانې ته د توکو د فرمايشونو د تسليمۍ وخت له څېنو ټاکونکو سره، لکه: انحراف، د انحراف مطلقه قيمت د انحرافو مربع په لاندې جدول کې راکړل شوی وي، څرنګه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{8+9+6+4+8}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

ورکړې وخت په ورځ x_i	$\bar{x}$	انحراف $x_i - \bar{x}$	دانحراف مطلقه قيمت $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	د انحرافونو مربع $(x_i - \bar{x})^2$
8	7	1	1	1
9	7	2	2	4
6	7	-1	1	1
4	7	-3	3	9
8	7	1	1	1

ketabton.com - The Digital Library

- د ډيټا (جامو) د ورکړې د وخت اوسط پيدا کړئ.
- د انحرافو د مطلقه قيمت اوسط يا په لنډ ډول د انحراف اوسط (AD) پيدا کړئ.
- د توکو د ورکړې وخت واريانس پيدا کړئ.
- د واريانس مربع جذر محاسبه کړئ.
- د واريانس د مربع جذر واحد د واريانس له واحد سره پرتله کړئ.

د واريانس له فورمول څخه مو زده کړل چې په توان وړلو سره نه يوازې داچې د واريانس اندازه کولو مقياس له شک سره مخامخ کوي، بلکې انحرافونه هم لوی ښيي.

ددې لپاره چې دا ستونزې له مينځه يوسو، په کار ده چې د وريانس مربع جذر په لاس راوړو.

د واريانس جذر د ډيټا (Data) د تيت والي، يو بل تاکوونکی د معياري انحراف يا مطلق تيت والي په نوم را پيژني.

معياری انحراف چې د S په سمبول ښودل کېږي، د واريانس له مربع جذر سره مساوي دی.

په دې معنا:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\bar{x}^{2}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n})^2}$$

د معياری انحراف يا د مطلق تيت والې واحد هم هغه د متحول واحد دی.

پورتنی رابطه په لاندې ډول ثبوت کېږي:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2}-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2n\bar{x}^{\,2}+n\bar{x}^{\,2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\bar{x}^{\,2}\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n})^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}\right)$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n})^2\Rightarrow S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n})^2}$$

ketabton.com - The Digital Library

مثال: د 5 ناروغانو د بدن د حرارت درجې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

38 39 39 40 41

معياري انحراف يې پيدا کړئ

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{38+39+39+40+41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$S^2 = \frac{(38-39.4)^2 + (39-39.4)^2 + (39-39.4)^2 + (40-39.4)^2 + (41-39.4)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$S = \sqrt{1.04} = 1.01980$$

پاملرنه: د فريکونسيو له جدول څخه، معياري انحراف په تقريبي ډول په لاندې ډول په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - (\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \bar{x}^2}$$

چې $\bar{x}$ د ډيټا، اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فريکونسي ښيي.

پوښتنې

د څلورو ټلويزوني سټيشنونو د ښوونې او روزنې د پروګرامونو د خپرولو د ساعتونو شمېر په لاندې ډول راکړل شوی دی، د ډيټا معياري انحراف پيدا کړئ.

1 3 4 5

ketabton.com - The Digital Library

• **د فریکونسي څو ضلعي ګراف**:د هغو مرتبو جوړو نقطې چې عرض یې د کلاس مرکز او اوږدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسي سره مساوي دی، یوه له بلې سره ونښلوو، د فریکونسي څو ضلعي ګراف په لاس راځي، د فریکونسي په څو ضلعي ګراف کې دوې نورې اختیاري نقطې د صفر په فریکونسي د کلاسونو (ګروپونو) په لومړۍ او اخیرنۍ برخه کې ډېروو، تر څو د فریکونسي څو ضلعي ګراف له محور سره ونښلوي.

• **د ساقې او پاڼې ګراف**: د ساقې او پاڼې د ګراف د رسمولو لپاره له عددونو څخه ګټه اخیستل کېږي. احصائیوی ډیټا د عددونو په شکل راوړو، بیا له دې عددونو څخه د ساقې او پاڼې ګراف رسموو. دا ډول ګراف د هغو ډیټا (Data) لپاره چې د رقمونو د شمېر له مخې تر ټولو لوی او کوچنی رقم تر منځ توپیر لږ وي، مناسب دی.

• **ربعي**: هغه عدد چې مرتبه جامعه په دوو مساوی برخو وویشي، د میانې په نوم یادېږي. اوس هغه عددونه په نظر کې ونیسئ چې مرتبه جامعه په څلورو مساوي برخو وېشي، دا عددونه په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کېږي، دې عددونو ته په ترتیب سره لومړۍ ربع، دویمه ربع او د دریمه ربع وایي. ښکاره ده چې Q_2 میانه ده.

• **صندوقچه یې یا جعبه یې ګراف**: له دې ګراف څخه د هغې ډیټا (Data) لپاره چې سره نژدې دي یا هغه ډیټاوې چې د اوسط پر شاوخوا راټولې شوي دي او یا هم هغه ډیټا چې ترټولو لویو یا ترټولو کوچنیو ډیټاګانو پرشاوخوا راټولې شوي وي، ګټه اخیستل کېږي، داګراف یو تصویرې ګراف دی چې ترټولو لویې ډیټا، ترټولو کوچنۍ ډیټا، میانې، لومړۍ ربعې او دریمې ربعې په اساس ښکاره کوي.

• **د نارمل منحني په بنیاد د مرکزي ټاکونکو پرتله کول**: څه وخت چې وغواړو مرکزي ټاکونکي (اوسط، میانه، او مود) له نارمل منحني څخه په ګټه اخیستنې سره پرتله کړو: په دې حالت کې که نارمل منحني متناظر وي، نو اوسط، میانه او مود سره مساوي دي. که نارمل منحني متناظر نه وي، نو مرکزي ټاکونکي نظرخپل موقعیت ته د منحني ښې خوا یا کېنې خواته قیمتونه اخلي.

• **ربعي انحراف**: که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د ډیټا (Data)لومړۍ ربع او دریمه ربع وي، کولای شوو چې د څلورمو (ربعې) انحراف (Q) په لاندې ډول ولیکو

$$Q = Q_3 - Q_1$$

له پورتني تعریف څخه ښکاری چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه

ketabton.com - The Digital Library

چې دا فاصله لږه وي، ډيتا ګڼې دي او د ډيتا تيت والی لږ دی.

• **واريانس**: د تيت والی ټاکونکي هغه مقدارونه دي چې د ډيتا (Data) د تيت والی حالت نسبت يوبل ته او نسبت يې اوسط ته ټاکي.

واريانس د ټيټ والي له ټاکونکو څخه يو مهم ټاکونکی دی چې په S^2 سره ښودل کېږي او له لاندې رابطې څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$$

د واريانس پيدا کول د فريکونسي په جدول کې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

• **معياري انحراف**: د واريانس مربع جذر په S ښيي چې معياري انحراف ورته وايي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}$$

د معياري انحراف پيدا کول د فريکونسي له جدول څخه د لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

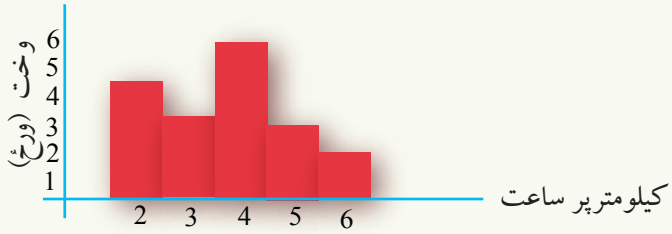
ketabton.com - The Digital Library

د څېړکې پوښتنې

1 - لاندې ګراف د باد سرعت په 19 ورځو کې ښکاره کوي، په ګراف کې د راکړل شوو اطلاعاتو پر بنسټ د باد سرعت لپاره د فریکونسي څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

که چېرې یوې کشتۍ ته د حرکت لپاره لږ تر لږه په یوه ساعت کې 5 کیلو متره د باد سرعت ته اړتیا وي، نو څو ورځې د کشتۍ د حرکت کولو لپاره مناسبې دي؟

په دې پوښتنه کې ولې د فریکونسي څو ضلعي ګراف، نظر مستطیلي ګراف ته مناسب دی؟



2 - د فریکونسي څو ضلعي ګراف هغه ګراف دی چې ..... په افقي محور او ..... د عمودي محور پر مخ ښودل کېږي.

الف) د کلاسونو مرکز، نسبي فریکونسي

ب) نسبي فریکونسي، د کلاسونو مرکز

ج) د کلاسونو حدود، مطلقه فریکونسي

د) د کلاس مرکز، مطلقه فریکونسي

3 - دساقې او پانې ګراف راکړل شوی دی:

- له دې ګراف څخه په لاس راغلي ډیټا ولیکئ.

ساقه	پانې
1	0 3 3 4
2	0 2 4 8 8
3	2

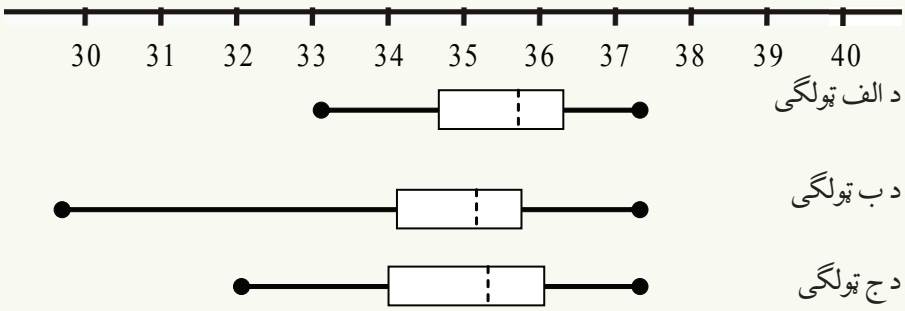
4 - کوم ګراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف لوري ته) دوران ورکړو، تر څو میله یې ګراف لاس ته راشي.

ketabton.com - The Digital Library

الف) د ساقې او پانې ګراف　　ب) مستطیلي ګراف

ج) د فریکونسي د څو ضلعي ګراف　　د) دایروی ګراف

5: لاندې ګراف د الف،ب او ج د دریو ټولګیو د ریاضي ازموینې نمرې ښکاره کوي، ګراف ته په پاملرنې سره لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- د کوم ټولګي د تحول ساحه زیاته ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو میانه تر ټولو زیاته ده؟ او د کوم ټولګي د نمرو میانه تر ټولو لږه ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو تیت والی تر ټولو ډېر دی.
- ددې دریو ټولګیو د ازموینې نمرې له کمزورې څخه د قوي په لور ترتیب کړئ.

6 : په ګراف کې د a مقدار عبارت دی له:

الف) میانه　　ب) اوسط　　ج) دریمه ربع　　د) موډ

ketabton.com - The Digital Library

7: د غذايې موادو د توليد دوه فابريکې د A او B په نامه، د 48 ګرامو په قطيو کې بسکيټ خرڅوي.

• په تصادفي ډول د دواړو فابريکو د بسکيټ له قطيو څخه 5 قطي ټاکل شوي دي او په پوره غور سره يې وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندې ډول دي.

A:	48.08	48.32	47.96	47.84	47.96
B:	49.16	48.84	48.88	49.08	49

• په قطيو کې کومه فابريکه زيات بسکيټ خرڅوي؟ د پوښتنې د حل لپاره له کوم ټاکونکي څخه استفاده کوي؟

• د بسکيټ په وېشلو کې کومې فابريکې يو شان عمل کړی دی؟

8: که د ډيټا د تحول ساحه صفر وي. د ډيټا په برخه کې څه نتيجه اخلئ؟

9 : د هغه ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په يوه اونۍ کې د لوبو لپاره ټاکلې دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

1 5 7 9

ددې ډيټا (Data) ورايانس پيدا کړئ.

10: په لاندې جدول کې واريانس پيدا کړئ.

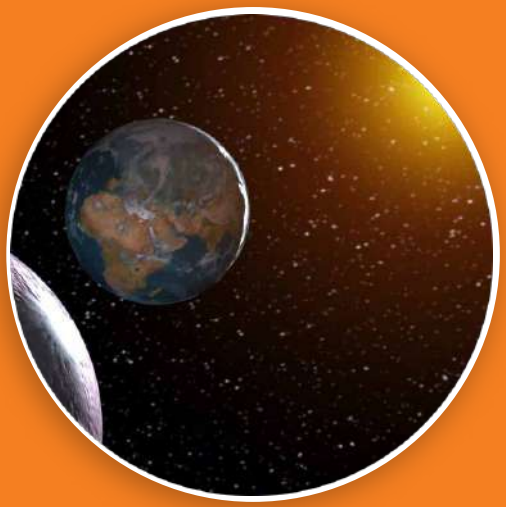
x_i	25	35	45
f_i	10	25	15

ketabton.com - The Digital Library

نهم څپرکی
د ریاضي منطق

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library



د شهودي درک استدلال:

پخوا تر دې پيړيو پورې خلکو فکر کاوه چې ځمکه هواره ده او ستوري د ځمکې پر شاوخوا څرخيږي.

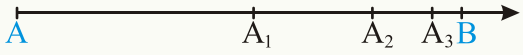
آيا پوهيږي چې ځمکه کروي ده؟

آيا لمر د ځمکې پر شاوخوا او که ځمکه د لمر پرشاوخوا څرخيږي؟

تعريف: هغه طبيعي يا حسي پوهه چې دهغې په مرسته ديوې موضوع سموالی يا حقيقت او يا يو مفهوم پر ته له استدلاله قبلوو، له شهودی درک څخه عبارت دی چې کيدلی شي، دوخت په مختلفو مرحلو کې يوله بله سره توپير ولري.

فعالیت

د لاندې شکل په نظر کی نيولو سره د مستقيم خط پر مخ د A او B دوې نقطې په پام کې ونيسئ.



يو سړی غواړي چې ددې مستقيم خط پر مخ د A له نقطې څخه د B نقطې ته لاړشي چې د $\overline{AB}$ د قطعه خط منځنی نقطه A_1 کې توقف وکړي او بل وار چې د A_1 نقطې ته رسيدلي دی، ددې لپاره چې د B نقطې ته ورسيږي، بياد A_2 په نقطه (د $\overline{A_1B}$ د قطعه خط دتنصيف نقطه) کې توقف وکړي، که په همدې ډول دوام ورکړي، نو لاندې پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ:

- آيا په پورته ډول چې د خط پر مخ د هرو دوو نقطو په منځنی نقطه کې توقف وکړي، پای لری؟
- که په همدې ډول تر پايه دوام ورکړي، دا سړی به د B نقطې ته ورسيږي؟
- که دا سړی توقف و نه کړي او يا له لارې بيرته راونه گرځي، نو نه يوازې چې د B نقطې ته به ورسيږي، بلکې تري تېر به هم شي. په دې اساس ددې مسلئې د واقعيت او ستاسو د شهودي درک ترمنځ څه توپير شته؟

ketabton.com - The Digital Library

له پورتني فعاليت څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي:

نتيجه: د شهودي درک نتيجه هر وخت صحيح نه وي، خو کېدای شي چې د قضيو دحل لپاره يو ښه بنسټ وي.

له هغه مثال څخه چې په پورتني فعاليت کې مو ترې استفاده وکړه او يادا‌سې نور مثالونه دا ددې په معنا نه دي چې دشهودي درک استدلال ګمراه کوونکی دی، بلکې بر عکس په زياتو حالتونوکې دشهودي درک استدلال د مسلؤ دحل، د انګيزې د پيداکولو او د نورو سوالونو د طرح کولو سبب ګرځي.

لومړی مثال: د شهودي درک په استدلال سره په اسانی سره حکم کولای شو چې دوه موازي خطونه يو بل نه قطع کوي.

څرنګه چې ددې مسلې په قبلولو کې استدلال په کار وړل شوی نه دی، په واقعيت يو احساس دی چې پر اساس يې داحکم منل کېږي، نو دا ډول نتيجه اخيستنه دشهودي درک په نامه يادوو.

دويم مثال: که يوه نقطه د داسې دايرې د باندې پرته وي چې قطر يې 4 واحده وي. ددې نقطې د فاصلې د مطالعه کولو لپاره چې له 2 واحده څخه زياته ده، نه شو ويلای چې دا استدلال يو شهودي درک دی، ځکه دمسلئې د وضاحت لپاره لازمه ده چې استدلال وکړو. څرنګه چې د دايرې د مرکز فاصله له محيط څخه 2 واحد ده. نقطه د دايرې د باندې واقع ده، نوله دې امله د دايرې له مرکز څخه د نقطې فاصله د 2 واحده څخه لويه ده. يعنې پرته له استدلال څخه د طبيعي پوهې او يا غريزه يې احساس په واسطه نه شو کولای، مسئله درک او صحت يې قبول کړو.

پوښتنې

1- د دوو نقطو ترمنځ لنډه فاصله له يوه مستقيم خط څخه عبارت ده، آيا ددې مسئلې درک کول يو شهودي درک دی؟ څرنګه استدلال کوئ؟

2- له لاندې حکمونو څخه کوم يو يې د شهودي استدلال په طريقه د درک وړدی؟

a- ديوې متوازي الاضلاع مقابلې زاويې سره مساوي دي.

b- د لوزي (معين) قطرونه يو پر بل عمود او يوبل نيمايي کوي.

c- په يوه قايم الزاويه مثلث کې و تر، له هرو دوو ضلعو څخه لوی دی.

ketabton.com - The Digital Library

تمثيلي يا ګماني استدلال

ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژيړ شی دی؟

د منطق يوه ښوونکي غوښتل چې دخپل يوه زده کوونکي قياسي استدلال وازمايي، خپل مخ يې هغه ته وروړوه او ورته ويې ويل:

پوهېږئ چې ګمان او يا تمثيل حقيقت ته د رسيدو پل دی. د لوست په جريان کې مو زده کړل چې تمثيلي استدلال مورږ حقيقت ته نژدې کوي، ليکن هر وخت سوچه حقيقت نه دی.

ښوونکي په داسې حال کې چې په خپلو لاسونوکې يې د چرګې هګۍ پټه کړې وه، له زده کوونکي وپوښتل: ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژيړ شی دی.

زده کوونکی چې په همدې وخت کې له زراعتی فارم نه راغلی و، له ژور فکر کولو وروسته يې ښوونکی ته مخ وروړوه او ويې ويل:

استاده فکر کوم چې دسپين شوي شلغم(ټيپر) په منځ کې ګازره ده.

تعريف

د دوو پېښو ترمنځ د ورته والي پيداکول او دهغوی په باره کې د يوشان نتيجې اخيستلوته تمثيلي يا قياسي (ګماني) استدلال وايي.

فعاليت

يوه ښوونکی يو شوخ زده کوونکی چې لوست يې اخلالوه، له ټولګي څخه وويست. دټولګي د باندې يې د خپل ټولګي بل زده کوونکی وليده چې هغه هم له ټولګي څخه د باندې و تلی دی. دپورتني تعريف په نظر کې نيولو سره له لاندې اړيکو څخه کوم يو يې يو تمثيلي يا قياسي استدلال دی.

- دويم زده کوونکي د لوست په وخت کې تفريح کوي.

ketabton.com - The Digital Library

- دويم زده کوونکي هم شوخي کړي ده.
- ناروغه دی، نه غواړي چې په ټولګی کې واوسي.

له تعريف او د زده کوونکو له فعاليت څخه لاندې نتيجه په لاس راځي:

نتيجه: قياس يا تمثيل په حقيقت کې د مختلفو مفهومونو په منځ کې د ورته والي پيداکول دي. له دې سببه تمثيلونه کېدای شي، د ډېرو مفهومونو يا درياضي د قضيو د درک کولو لپاره شهودي زمينه پيداکړي. تمثيلي استدلال د ثبوت په حيث نه شمارل کېږي، بلکې د ثبوت لپاره زمينه برابروي.

لومړی مثال: په عامه ژ به(مارخوړلی له برګ پرې څخه ډارېږي) دا يو قياسي استدلال دی، ځکه چې برګ پرې له مار سره پر تله شوی دی او د هغوی په منځ کې ورته والی ليدل شوی دی.

دويم مثال: له تمثيلي استدلال څخه په ګټه، ددې حقيقت درکول چې د دوو منفي عددونو حاصل ضرب مثبت عدد او د يو منفي او يو مثبت عدد حاصل ضرب منفي عدد دی، داسی په لاس راوړو:

مثلاً ددې حقيقت د درک کولو لپاره چې که چېرې د يوه زده کوونکي لياقت د (+) په علامه او نا لايق والی د (-) په علامې سره په پام کې ونيسو او ددې دواړو عملونو د حاصل د(دی) لپاره (+) او (نه دی) لپاره (-) په پام کې ونيسو، له تمثيل او يا قياس څخه ګټه اخلو او که دوی سره ترکيب کړو په نتيجه کې لروچې:

لايق دی = مثبت ، لايق دی = منفي ، نالايق دی = منفي ، نالايق نه دی = مثبت ،

(+) (+) = + ، (+) (-) = - ، (-) (+) = - ، (-) (-) = + ،

پوښتنې

1 - دا بيان چې(بختور کال د هغه کال له پسرلي نه معلوميږي،) په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي.

a- شهودي درک استدلال.

b- قياسي استدلال. c- هيڅ ډول استدلال په کې نشته دی.

2- د قياسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فيثاغورث د قضې په اساس لاندې نتيجه ثبوت کېدلای شي:

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

ketabton.com - The Digital Library

استقرايي استدلال:

يو زده کوونکی په لومړنی صنفي ازمويني کې 100 نمرې اخلي او په دويم او دريم صنفي ازموينو کې هم 100 نمرې اخلي.
په اخرنۍ ازمويني کې څه نتيجه اخيستلای شئ چې دا زده کوونکی به څونمرې واخلي؟

فعاليت

د مسلسلو طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل په پام کې نيسو، ددې کار لپاره له يو 1 له عدد څخه پيل وکړئ او تش ځايونه ډک کړئ.

$1+3=\square=(\quad)^2$

$1+3+5=\square=(\quad)^2$

$1+3+5+7=\square=(\quad)^2$

$1+3+5+7+9=\square=(\quad)^2$

پورتنيو پوښتنو ته په پاملرنې سره ليدل کېږي چې د طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل د طبيعي عددونو د شمېر له پوره مربع سره مساوي دی.

- آيا کولای شو نتيجه واخلو چې هر وخت د طاقو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل ددې عددونو د شمېر له مربع سره مساوي دی؟
- کوښښ وکړئ له n طاقو مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل لپاره فورمول په لاس راوړئ.

دپورتني فعاليت د سرته رسولو په اساس لاندې نتيجه په لاس راځي.

نتيجه: استقرايي استدلال د يو شمېر مشاهد و پر بنسټ د عمومي نتيجې اخيستنې طريقه ده. په حقيقت کې يوې کوچنۍ نمونې ته په لويه نمونه عموميت ورکول دي.

لومړی مثال: (موټی د خروار نمونه ده) داخبره استقرايي استدلال ته اشاره کوي، ځکه په دې مثال

ketabton.com - The Digital Library

کې له يوې کوچنۍ نمونې څخه د کل نتيجه اخيستل کېږي، په حقيقت کې له مسئلې څخه د يوشمېر مشاهد و پر بنسټ نتيجه اخيستل شوي ده، نو له استقرايي استدلال څخه کار اخيستل شوی دی.

دويم مثال: يو زده کوونکی په اتفاقي ډول په څومرحلو کې درې مسلسل عددونه سره ضرب کړل او ويې ليدل چې د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی. له دې کار څخه نتيجه اخلي چې (د هر درووِ مسلسلو عددونو د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی)

نوموړې زده کوونکي کوم استدلال کړي دي.

الف: شهودي استدلال ب: قياسي (گماني) ج: استقرايي استدلال د: هېڅ يو

حل: استقرايی استدلال

پوښتنې

1- هغه طريقه چې د يوه محدوده شمېر ډيټا پر اساس ترينه عمومي نتيجه اخيستل کېږي، څرنگه يو استدلال دی.

الف: قياسي يا تمثيلي استدلال ب: استقرايي استدلال

ج: د شهودي درک استدلال

2 – د عددونو ترتيب ته په پاملرنې سره لاندې تش ځايونه ډک کړئ:

$1\times8+1=$ ☐

$12\times8+2=$ ☐

$123\times8+3=$ ☐

$1234\times8+4=$ ☐

3-

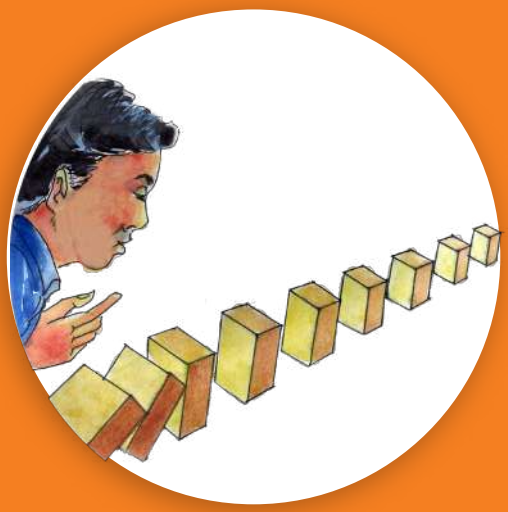
a) د دويمې پوښتنې حل ته په پام سره کېدای شي چې د عددونو پورتنۍ ترتيب ته تر بې نهايت پورې دوام ورکړي؟

b) د محاسبه کولو پرته او د پورتنيو پوښتنو په پاملرنې سره اټکل کړئ چې کوم عددونه د لاندې پوښتنو په تش ځايونو کې را تلای شي:

$12345\times8+5=$ ☐

$123456\times8+6=$ ☐

ketabton.com - The Digital Library



دریاضي د استقرا استدلال

د دوو مینو لوبه :

آیا تاسوکله د دوو مینو لو به تر سره کړې ده؟

پوهېږئ چې د دوو مینو په لوبه کې د لومړی خښتې لویدل، د دویمې خښتې پرمخ چې یوه دبلې څنګ ته پرته وي، په ترتیب سره لومړنی پر دویمه، دویمه پر دریمه... تر پا یه پورې پر مځکه ولوېږي، داد خښتو یو پر بله لوېدل چې د پورته شکل په شان په مساوي فاصلو یو دبل څنګ ته پریوزې، د علاقه مندانو لپاره یو په زړه پورې تصویر ښکاره کوي.

لیدل کېږي چې د k ام خښتې لویدل د $k+1$ ام د خښتې دلوېدلو سبب ګرځي، اوس نو که د خښتو لوېدل له یوې ټاکلې شمېرې څخه پیل شي، له هغې څخه وروسته خښتې یو پر له پسې راولیږي او ټولې خښتې د ځمکې مخ نیسي.

فعالیت

پوهېږئ چې $64+27+8+1=100$ دی، که دا عددونه د مکعبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول ولیکو:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

- آیا هر وخت د مسلسلو طبیعي عددونو د مکعبونو مجموعه د عددونو د مجموعې له مربع سره مساوي ده؟
- آیا کولای شئ د پورتنۍ پوښتنې د حل لپاره یوه عمومي طریقه ووایاست، د پورتنۍ پوښتنې د ځواب لپاره لاندې جدول ډک کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

د متوالي عددونو شمېر	د متوالي طبيعي عددونو معکبونه	د معکبونو مجموعه	د عددونو د مجموعې مربع
1	1^3		1^2
2	1^3+2^3		
3	$1^3+2^3+3^3$	36	
4	$1^3+2^3+3^3+4^3$		10^2
n	$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$		$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

- د $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ او $n=4$ د طبيعي مسلسلو عددونو د مکعبونو د مجموعې لپاره د $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ فورمول سموالی وازمایئ.

- اوس که د n مسلسلو طبيعي عددونو لپاره پورتنی فورمول قبول کړو يعنې که:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

وي، نو د $n+1$ د مسلسلو طبيعي عددونو لپاره يې ثبوت کړئ يا داچې وښياست:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه: که چېرې $P(n)$ د n طبيعي عددونو په برخه کې يو حکم راکړل شوی وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ صحيح وي، په دويم پړاو کې که د $P(k)$ له سموالي څخه $P(k+1)$ په لاس راشي، نو دا ادعا د $P(n)$ د هر n طبيعی عدد لپاره هم سمه ده.

لومړی مثال: وښياست چې $P(n)=4^{2n}-1$ د هر طبيعي عدد لپاره پر 5 د وېش وړ دی.

حل: د $n=1$ لپاره سمه ده ځکه چې:

$$P(1)=4^{2\cdot1}-1=4^2-1=16-1=15 \quad , \quad n=1$$

ليدل کېږي چې $P(1)=15$ پر 5 د وېش وړ دی.

قبلوو چې د k طبيعي عدد لپاره پورتنی ادعا سمه ده يعنې: $P(k)=4^{2k}-1$ پر 5 د وېش وړ

ketabton.com - The Digital Library

دی.

څرنګه چې پر 5 د وېش وړ دی، نو کولای شو په لاندې ډول یې ولیکو

$$P(k)=4^{2k}-1=5r.....(*)$$

غواړو وښایو چې د $n=k+1$ لپاره دا ادعا سمه ده، نو لروچې:

$$n=k+1 \quad , \quad P(k+1)=4^{2(k+1)}-1.....(**)$$

د $(*)$ د رابطې دواړه خواوې په 4^2 کې ضربوو.

$$4^2(4^{2k}-1)=5r\cdot 4^2$$

$$4^{2k+2}-4^2=5r\cdot 16 \Rightarrow 4^{2(k+1)}-1=15+16\cdot(5r)$$

$$4^{2(k+1)}-1=5(3+16r)$$

د پورتني مساوات له ښي خوا $5\cdot(3+16r)$ څخه ښکاري چې د مساوات کېڼه خوا پر 5 د وېش وړ ده.

نو اخرني مساوات ښکاره کوي چې $P(k+1)=4^{2(k+1)}-1$ هم پر 5 دوېش وړ دی، څرنګه چې د $P(k)$ له سموالي څخه د $P(k+1)$ سموالي نتیجه شوه، نو د ریاضي د استقرا د اصل په اساس پورتنی ادعا $P(n)$ د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

یادونه: د ریاضي د استقرا په مرسته د ریاضي د حکمونو د ثبوتولو لپاره لومړی $P(1)$ په لاس راوړو، بیا $P(k)$ د استقرا د حکم په حیث په پام کې نیسو او په همدې ترتیب له فرضیې څخه حکم ثبوتوو.

دویم مثال: د ریاضي د استقرآ په مرسته ثبوت کړئ چې لاندې رابطه د هرطبیعي عدد n لپاره سمه ده:

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: په پورتنی رابطه کې د $n=1$ لپاره لرو چې:

$$n=1 \quad , \quad P(1)=1\times 2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=\frac{1\times 2\times 3}{3}=2$$

$$\Rightarrow 2=2$$

نود $n=1$ لپاره پورتنی رابطه سمه ده، که د $n=k$ لپاره یې سمه قبوله کړو، نو د $n=k+1$ لپاره یې داسې ثبوتوو، لروچې:

ketabton.com - The Digital Library

$$n=k\ ,\ P(k)=1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+k\times(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

داستقرا فرضیه:

د $P(k)$ په فرضولو سره $P(n)$ رابطه د $n=k+1$ په نظر کې نیولو سره د رابطې سموالی ښکاره کړو، نو لروچې:

$$n=k+1,\quad P(k+1)=1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

د استقرا حکم:

د استقرا د فرضیې په نظر کې نیولو سره لروچې:

$$P(k+1)=\left[1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+k(k+1)\right]+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$
$$\Rightarrow1\times2+2\times3+\ldots+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

دا رابطه د $n=k+1$ لپاره سمه ده، نو په دې ډول د $P(n)$ رابطه د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

پوښتنې

1 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لروچې:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې :

$$2+6+10+\ldots+(4n-2)=2n^2 \qquad \text{(i)}$$
$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 \qquad \text{(ii)}$$

ketabton.com - The Digital Library

استنتاجي(نتيجوی) استدلال:

آيا کولای شو د شپې په تياره کې له رڼا څخه پرته شيان وويني؟

فعاليت

دري مختلف داسې ستونه وليکئ چې د هر ستې عناصر دري اختياري مسلسل طبيعي عددونه وي.

- د هرستې د عناصرو د ضرب حاصل جلا، جلا په لاس راوړئ.
- آيا ويلای شو چې دا د ضرب حاصلونه:

(I): پر2 د وېش وړ دي؟ ولې؟

(II): پر 3 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- آيا ويلای شو چې د دريو مسلسلو طبيعي عددونو د ضرب حاصل هروخت پر 6 د وېش وړ دي؟ ولې؟
- د دريو مسلسلو طبيعي عددونو د ضرب حاصل موولی پر 6 د وېش وړ قبول کړو، د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه: داسې طريقې ته چې د حقايقو سموالی يې په لومړی پرلو کې ومنو او عمومي نتيجه ترې لاس ته راوړو، استنتاجي استدلال يا د نتيجې اخيستنې طريقه ورته وايي يا په بل عبارت استنتاجي استدلال هغه طريقه ده چې سموالی مو ثبوت کړی يا منلی وي.

څه وخت چې له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو، ډاډمن يو چې نتيجه يې هر وخت سمه ده.

ketabton.com - The Digital Library

لومړی مثال: د لاندې جدول پراونو ته په دقت سره وګورئ موږ څرنګه له عددونو سره چې د هر پراوحقیقت او سموالی منو، بل پراوته ځو او نتیجه په لاس راوړو.

د یادونې وړ ده چې په جدول کې په اختیاري ډول عدد ټاکل شوی دی، تاسوکولای شئ چې ددې عدد پرځای بل هر عدد چې موغوښتی وي، وټاکئ، وګورئ چې د هر عدد لپاره نتیجه یوشان ده.

یو عدد په خپله خوښه وټاکئ.	4	7	12
له لومړي عدد سره 5 جمع کړئ.	9	12	17
اوس یې دوه برابره کړئ.	18	24	34
له حاصل څخه د 4 عدد کم کړئ.	14	20	30
پر 2 یې ووېشئ.	7	10	15
هغه عدد چې لومړی موټاکلی و، له عدد څخه کم کړئ.	3	3	3

اساسي خبره داده چې موږ په حقیقت کې د هغه عبارت پر بنسټ چې سموالی یې موږ قبول کړی دی، بله نتیجه لاس ته راوړو، دا مسله موږ ډاډ من کوي چې دهر اختیاري عدد په ټاکلو سره نتیجه هر وخت یوشان له 3 سره مساوي ده.

پوښتنې

1 – ښکاره کړئ چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو جفت عدد دی.

2 – ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد د $2k+1$ په شکل دی.

3 – د سرو زرو په 9 سکوکې یوه تقلبي ده چې له نورو سکو څخه یې وزن کم دی.

څرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو څخه د استفادې کولو پرته د پله یي ترازو په واسطه له دوه واره تللو سره تقلبي سکه پلاس راوړو؟

ketabton.com - The Digital Library

د مثال د نفي کولو استدلال:

يوموټی د خروار نمونه ده.
که د يوجنس يوه کوچنی نمونه بې کيفيته وي.
آيا کولای شو ادعا وکړو چې ددې جنس لويه
کتله ښه کيفيت لري؟

فعاليت

کولای شو، ډېر طبيعي عددونه د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په ډول وليکو، لکه:

$9 = 2+3+4$

- پورتني مثال ته په پاملرنې سره لاندې تش ځايو نه ډک کړئ؟

$15= \square + 2 \square + 4 + 5$

$\square = \square + 5 + \square + 7$

$\square = 12 + \square + \square + 14$

$74 = 17 + \square + 19 + \square$

- آيا کولای شو چې هر طبيعي عدد د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په شکل وليکو؟
- که چېرې ځواب مو (نه) وي، نومثال يې ووياست.

د پورتني فعاليت له سرته رسولوڅخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه: کله چې له مثال سره وښايو چې عمومي نتيجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی ښکاره کړو دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وايي.

مثال: د مسلئې د ثبوت لپاره همدو مره کافي ده چې وښايو چې د x او y دوه غير ناطق عددونه

ketabton.com - The Digital Library

لیکن ددوی د جمعې حاصل x+y یو ناطق عدد دی.

ددې لپاره که د $x = 1+\sqrt{2}$ او $y = 1-\sqrt{2}$ وټاکو، لروچې:

$$x + y = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 1+1 = 2$$

لیدل کېږي چې ددې دواړو عددونو د جمعې حاصل د 2 عدد دی چې یوناطق عدد دی، په داسې حال کې چې x او y غیر ناطق (ګنګ) عددونه دي، نو دا ادعا نه شو کولای چې د دووغیر ناطقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو غیر ناطق عدد دی.

پوښتنې

1- د مثال د نفي کولو په استدلال سره وښیاست چې(د هر مثبت حقیقي عدد مربع دعدد له مکعب څخه کوچنی ده)

2- دلاندې کوم یو بیان لپاره د نفي مثال و جود نه لري؟

a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه یو ناطق عدد دی.

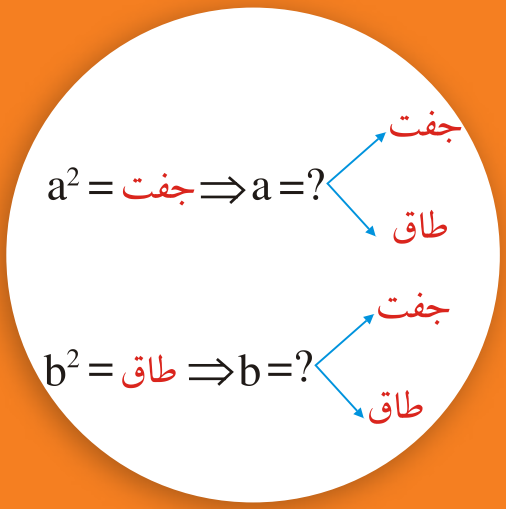
b) د هر مثبت عدد مربع له عدد څخه لویه ده.

c) دوې زاویې چې متناظرې ضلعي یې سره موازي وي، دا دوې زاویې سره مساوي هم دي.

d) د دوو طاقو عددونو مجموعه یو جفت عدد دی.

e) د دوو غیر ناطقو عددونو د ضرب حاصل، غیر ناطق عدد نه دی.

ketabton.com - The Digital Library

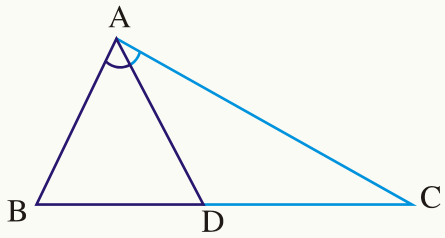


د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

که د یوه عدد مربع جفت وي آیا خپله عدد جفت دی که طاق؟
آیا کولای شو چې دا ادعا وکړو، که د هر عدد مربع جفته وي، خپله عدد جفت دی؟
که وښایو چې خپله عدد طاق نه دی، څه نتیجه اخلئ ؟

فعالیت

د ABC مثلث د لاندې شکل په شان په پام کې ونیسئ:



- د $\hat{A}$ د زاویې ناصف رسم کړئ.
- که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، نو د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعې سره څه اړیکه لري؟
- که فرض کړو چې که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ و ي، خو $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ دی، دا مسئله موږ کومې نتیجې ته رسوي؟

نتیجه: که د خپلې ادعا د عکس په فرضولو او یاد قبلولو په نتیجه کې د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې زموږ فرض شوی ادعا سمه ده، دا ډول استدلال د غیر مستقیم ثبوت (برهان خلف) په نامه یادېږي.

ketabton.com - The Digital Library

یادونه: په یاد ولرئ څه وخت چې له غیر مستقیم ثبوت څخه ګټه اخلو، لاندې پراوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: فرضوو چې مطلوبه ادعا سمه نه ده.

دویم پړاو: ښکاره کوو چې دا فرض د اسې نتیجه په لاس راکوي چې پیژندل شوي حقیقتونه نفي کوي.

دریم پړاو: اوس چې نتیجه نفي شوي ده، نومعلومه خبره ده چې د لومړی پړاو فرض سم نه دی، نو مطلوب سم دی.

مثال: وښیاست که n^2 یو جفت طبعي عدد وي، نو n هم جفت دی؟

ددې مسلئې د ثبوت لپاره فرضوو، سره ددې چې n^2 جفت دی، خو n یو طاق عدد دی، نو کولای شو چې n د $n = 2k+1$ په شکل ولیکو، په داسې حال کې چې k یو تام عدد دی، نو ددې عدد مربع مساوي ده په:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$
$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

پورتني مساوات ښکاره کوي چې n^2 یو طاق عدد دی چې دا د فرض خلاف ده، نو په نتیجه کې دا فرض چې n یو طاق عدد دی، ناسمه ده او دې نتیجې ته رسېږو چې n هم یو جفت عدد دی، ځکه دا فرض چې n طاق عدد دی، موږ دې نتیجې ته ورسولو چې n^2 هم طاق عدد دی

پوښتنه

وښیاست چې $\sqrt{3}$ یو غیر ناطق عدد دی.

ketabton.com - The Digital Library

د رياضی منطق او دبيان استنتاج

له څنګ ملګری څخه د يو خبر اوريدل به څه نتيجه ولري؟
آيا خبر سم دی که ناسم؟

تعريف

يوې خبري جملې ته بيان وايي چې نتيجه يې په سموالي يا ناسم والي پای ته ورسېږي.

فعاليت

لاندې جملې په پام کې ونيسئ او وښياست چې له هغو څخه کومه يوه يې بيان او کومه يوه يې بيان نه دی او منطقي نتيجه يې څه ده؟

i) نن ورځ باران نه اوري.
ii) آيا نن ورځ باران نه اوري؟
iii) بارانه اووره..
iv) څه زيات باران اوري!

له پورتني فعاليت څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه:

1 - هره جمله نه شی کېدای چې بيان وي. يوه جمله کيدای شي يوه حکمي، تعجبي پوښتنه او يا يو خبر وي.

2 - هره خبري جمله سمه يا ناسمه ده.

يادونه: که يو بيان ته P ووايو، د سم بيان د ليکلو طريقه $P \equiv T$ او د ناسم بيان د ليکلو طريقه

ketabton.com - The Digital Library

$P \equiv F$ دی، سر بیره پر دې $\sim P$ د P د بیان نفي ښیي.
هغه جدول ته چې د یو بیان ارزیابي په کې صورت نیسي، د صحت د جدول په نامه یادېږي، نو د P د هربیان لپاره لروچې:

P	$\sim P$
T	F
F	T

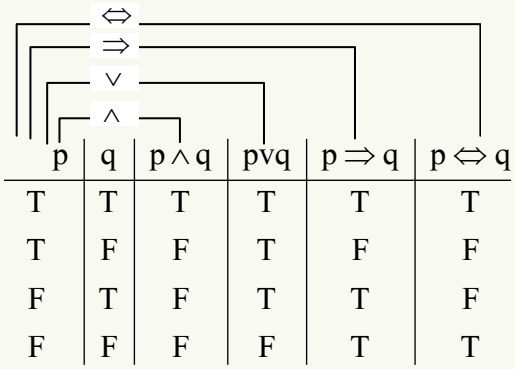
مثال: د (مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې ده $=P$) بیان لپاره د صحت جدول ترتیب کړئ.
حل: د پورتني بیان د ارزیابی لپاره پوهېږو چې نو موږ ی بیان سم او یا ناسم دی.
که بیان سم وي، نو کولای شو چې ولیکو $P \equiv T$ او $\sim P \equiv F$ دی.
نو د P د بیان د نفي حالت عبارت دی له « P سم نه دی» یعنې : $\sim P \equiv F$ دی. دا بیان د دې په معنا دی چې مسکا د لسم ټولګي زده کوونکي نه ده، یعنې P ناسم دی.
که $P \equiv F$ وي، نو په دې حالت کې $\sim P = T$ دی. د پورتني ځواب صحت په لاندې جدول کې ګورو:

P	$\sim P$
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب

که د p او q دوه بیانونه راکړشوي وي، په دې حالت کې:
1 - د $p \wedge q$ ترکیب د p او q د بیانونو د عطفي ترکیب یا (منطقي " او") په نامه یادېږي، د "$\wedge$" علامه د (او) په معنا په کار وړل شوي ده.
2 -د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقي " یا ") په نامه یادېږي، د ''$\vee$'' علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.
3 - د $p \Rightarrow q$ د مشروط ترکیب او یا د (که p نو q ویل کېږي) په نامه یادېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوي چې p د شرطي ترکیب اساس چې q ترې نتیجه کېږي.
4 - د $p \Leftrightarrow q$ د دوو خواوو د شرطي ترکیب په نامه او یا د (که او یوازی که) په نامه یادېږي.
د ($\Leftrightarrow$) علامه ښکاره کوي چې که p د شرطي ترکیب اساس وي q ترې نتیجه کېږي او که q دشرطي ترکیب اساس وي، p ترې نتیجه کېږي. په دې ډول د p د بیانونو او (که اویوازې که) ترکیب لاندې د صحت په جدول کې ګورو:

ketabton.com - The Digital Library



p	q	p ∧ q	pvq	p ⇒ q	p ⇔ q
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

لومړی مثال: که چېرې $P \equiv (2+4=6)$ او (دمنفي عدد مربع) $q \equiv$ بیانونه راکړل شوي وي د p، q، $\sim P$ ، $\sim q$ ، $p \vee q$ ، $p \wedge q$ ، $\sim(p \wedge q)$ او $\sim(p \vee q)$ د بیانونو نتیجې پلاس راوړی.

حل: پورتنیو بیانونو ته په توجه سره ددې بیانونو ارزښت عبارت دی له:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

دویم مثال: د سموالي (صحت) دجدول په تر تیبولو سره ښکاره کړئ چې د $P \vee (p \Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

حل:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

د سموالي دجدول په اخیرني ستون کې وینو چې د $p \vee (p \Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1 – د صحت د جدول په تر ټيبولو سره وښياست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ بيان هر وخت سم دی- متوجه اوسئ چې p او $\sim$ p يوله بله مستقل نه دی.

2 – د صحت د جدول په جوړولو سره وښياست چې د $(p \Rightarrow q)$ او د $\sim (p \vee q)$ د بيانونو ارزښت سره مساوي دی يعنې:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (p \vee q)$$

د فصل لنډيز

د رياضي استدلال:

هغه طريقه چې د هغې په واسطه د رياضي د يوبيان سموالی په لاس راځي، د رياضي د استدلال په نامه يادېږي.

شهودی درک:

هغه طبيعي يا حسي پوهه چې د هغې په مرسته ديوې موضوع سموالی يا حقيقت او يا يو مفهوم پرته له استدلاله قبلوو، له شهودي درک څخه عبارت ده چې د وخت په مختلفو مرحلوکې يوله بله سره توپير لري.

تمثيلي يا قياسي استدلال:

د دوو پيښو تر منځ د ورته والی پيداکول او د هغوی په باره کې يوشان نتيجې اخيستلو ته تمثيلي يا قياسي استدلال وايي.

استقرايی استدلال:

هغه طريقه چې د يو شمېر مشاهد و پر اساس ور څخه عمومي نتيجه اخيستل کېږي يعنې د جز نه کل په لاس راځي د استقرايي استدلال په نامه يادېږي.

د رياضي د استقرا استدلال:

که چېرې $P(n)$ د n د طبيعي عددونو په برخه کې يو حکم راکړل شوی وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ سم وي او په دويم پړاوکې د $p(k)$ له سموالي څخه د $p(k+1)$ سموالی په لاس راشي، نو د $p(n)$ بيان د هر طبيعي عدد (n) لپاره سم دی او درياضي د استقرا د استدلال په نامه يادېږي.

ketabton.com - The Digital Library

نتيجوي استدلال:
له هغه حقيقتونو څخه په ګټه اخيستنه چې صحيح والی يې په پيل کې منل شوی وي، عمومي نتيجه لاس ته راوړل شي، د استنتاجي استدلال يا د نتيجې اخيستنې د طريقې په نامه يادېږي.
يا په بل عبارت هغه طريقه ده چې سم والی مو ثبوت يا قبول کړی وي.

د نفی مثال استدلال:
کله چې له مثال سره وښايو چې عمومي نتيجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی په عمومي ډول ښکاره کړو، دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وايي.

غير مسقيم ثبوت:
که د خپلې ادعا يا قضيې د عکس په فرضولو يا قبلولو د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې فرضيه ناسمه او خلاف يې سم دی. دې ډول استدلال ته غيرمستقيم ثبوت (برهان خلف) وايي.

بيان :
يوې خبرې جملې ته چې نتيجه يې سمه يا ناسمه وي، د بيان په نامه يادېږي، يوه جمله چې نتيجه يې سمه اويا ناسمه نه وي، بيان نه دی.

د بيانونو ترکيب:
که د p او q دوه بيانونه راکړل شوي وي، په دي حالت کې:
1- د $p \wedge q$ ترکيب د p او q دوه بيانونه د عطفي ترکيب يا (منطقي "او") په نامه يادېږي.
چې د p او q د بيان په شکل ويل کېږي.

2- د $p \vee q$ ترکيب د p او q د بيانونو د فصلي ترکيب (منطقی " يا ") په نامه يادېږي، د ($\vee$) علامه د (يا) په معنا په کار وړل شوي ده.

3- (که چېرې نو) او يا د "$\Rightarrow$" منطقي علامه د $p \Rightarrow q$ د p او q مشروط بيان دی، که p نو q ويل کېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوی چې p د شرطي ترکيب اساس دی، ددې لپاره چې q له هغې نتيجه شي.
4- که يوازې که يا دا "$\Leftrightarrow$" منطقي علامه د p او q د بيانونو دوو خواوو شرطي ترکيب دی چې د (p که اويوازې که q) دی.

ketabton.com - The Digital Library

د فصل پوښتنې

1 – له لاندې ځوابونو څخه ستاسو په نظر کوم یو سم دی؟

الف- په مشاهداتو کې خطا د استقرايي طريقې له ستونزو څخه يوه ستونزه ده.

ب- د رياضي د استدلال له قوي طريقو څخه يوه هم استقرايي طريقه ده.

ج- د رياضي په استقرايي طريقې کې يوه ستونزه د مشاهداتو کموالی دی.

د- د الف او ج ځوابونه سم دي.

2 – له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟

استقرايي استدلال

الف- د رياضي له مسألو څخه يوه قوي طريقه ده.

ب- د مسألو په برخه کې مورِ ته د عمومي قوانينو لارښوونه کوي.

ج- دمسألو دحل لپاره له رياضي پرته يوه طريقه ده.

د – دمسألو د حلولو لپاره د رياضي طريقه نه ده.

3 – د شهود په برخه کې له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم (صحيح) دی؟

الف- دداسې نتيجې د اخيستنې لپاره چې سل په سلو کې سمه ده.

ب- له شهود څخه په ګټه اخيستنه پر ډاډ سره نه شوويلای چې نتيجه سل په سلو کې سمه ده.

ج شهود د رياضي د ښه درک کولو لپاره دی.

د: له شهود څخه په ګټه اخيستنه، کولای شو د ثبوت لپاره قطعي ګمان له حتمي استدلال سره وکړو.

4 – له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟

الف: استقرايې استدلال له جز څخه کل ته رسيدل دي.

ب: استقرايې استدلال له کل څخه جز ته رسيدل دي.

ج: له استقرايې استدلال څخه نه شو کولای چې د رياضي د دقيق ثبوت لپاره ګټه واخلو.

د: استقرايې استدلال ديو شمېر مشاهد و پر اساس يوه کلي نتيجه ده.

5 – د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟

الف: که واوره اوري ځمکه نمجنه کېږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وريدلي ده.

ب: د يوه ښوونځي ټول فارغان له کمپيوتر سره بلد او په رياضي ښه پوهېږي، ضمير چې له همدې ښوونځي څخه فارغ شوی دی. نو له کمپيوټر سره ښه بلد او په رياضي ښه پوهېږي.

ج: که يوه څلور ضلعي مربع وي، نو قطرونه يې يو پربل عمود دي، که د څلور ضلعي قطرونه يو پر بل عمود وي، نو دا څلور ضلعي مربع ده.

ketabton.com - The Digital Library

د: که د یوه مثلث دوې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الساقین مثلث دی او که د مثلث درې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الاضلاع مثلث دی، نو هر متساوي الاضلاع مثلث، متساوي الساقین مثلث دي.

6 – د قیاسي استدلال په واسطه وښیاست د هرې زاویې لپاره $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ده.

7 – د استقرایي استدلال په واسطه وښیاست چې د n مسلسلو تاقو طبیعي عددونو مجموعه له n^2 سره مساوي ده.

8 – له استقرایي استدلال سره وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

9 – د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی؟

10 – له یوه مثال سره وښیاست چې د 2^n+3 افاده د هر طبیعي عدد لپاره هر وخت لومړنی عدد نه دی.

11 – د غیر مستقیم ثبوت د استدلال په واسطه وښیاست که n یو طبیعي اختیاری عدد وی او هم n^2 طاق وي، نو nهم طاق دی.

12 – د (باران اوري او وریځ نشته دی، نو باران نه اوري) د ترکیبي بیانونو لپاره د صحت جدول جوړ کړئ، په داسی حال کې که

(α = باران اوري)) او ((وریځ ده = β)) سره وښایو. (1) عدد د سم اود (0) عدد د ناسم لپاره په کار یوسي.

$\propto$	β	$-\propto$	$-\beta$	$\propto \wedge -\beta$	$\propto \wedge -\beta \Rightarrow -\propto$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Thank you for reading

Find more e-books and articles on Ketabton - your multilingual digital library.

www.ketabton.com

Ketabton - Pashto, Farsi, Arabic & English