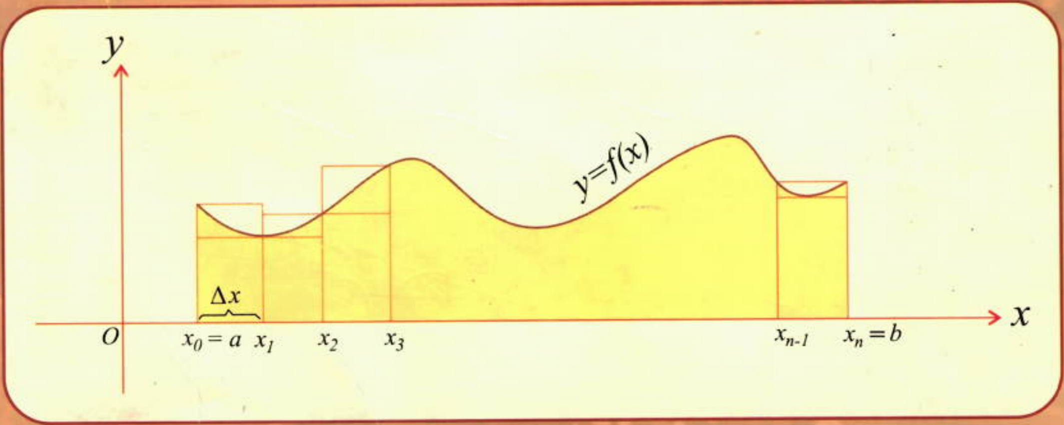
(نوی نصاب)

# عمومي رياضي

## له اووم ټولګي څخه تر دولسم ټولګي پورې



ارشمیدس

اراتوستنس

محمد بن موسی

اسحاق نیوټن

کوشي

Ketabton.com

مؤلف: استاد سردار محمد (خوږياڼی)

ketabton.com - The Digital Library

# عمومي رياضي

## (نوی نصاب)

استاد سردار محمد (خوږیانی)

0700202080
0700203080

ketabton.com - The Digital Library

# کتاب پېژندنه

د کتاب نوم/
**عمومي رياضي (نوی نصاب)**
**مؤلف/**
سردار محمد (خوږياڼی)
**ډيزاين/**
الله يار تسل
**خپرندوی/**
ميهن خپرندويه ټولنه
**چاپکال/**
۱۳۹۵ل
**چاپشمېر/**
۱۰۰۰ټوکه

**آدرس**

ميهن خپرندويه ټولنه پېښور- جلال آباد
**جلال آباد:** اسحاقزی مارکيټ لاندې پوړ، لومړی دوکان
Email: Khorshidhimat@yahoo.com
Abdurashid.himat@gmail.com
Cell: ۰۳۰۰-۵۹۸۱۴۲۵- ۰۳۲۱۹۸۹۵۶۲۱
۰۷۸-۸۵۲۹۱۹۴ ۰۷۷۳۵۳۵۴۲۰

د چاپ حقوق له ميهن خپرندويې ټولنې سره خوندي دي.

ketabton.com - The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

# مقدمه

الحمد لله الذی فهمنا بعلوم الاشیاء والحوادث و علمنا بزیادات هم و النواقص و الصلوة و سلام علی رسوله بفهم الانسان باشرع فی الاعمال و المباحث.

اما بعد!

خوشحاله یم چې د نوي نصاب د ریاضي په لیکلو باندې د خدای (جل جلاله) په فضل او مهرباني باندې قادر شوم. د نصاب د اول څخه شوونکو او زده کوونکو د ریاضي په لندیز او وضاحت باندې اسرار کولو. دا دی د غه کتاب په د 1394 لمریز کال د سرطان په 23 نېټه بشپړ او چاپ ته چمتو شو. پدې کتاب کې د حساب څخه تر انتیګرالونو پورې ټول مباحث په جلا جلا توګه لیکل شوي او مثالونه یې حل شوي دي. که په غور سره ولوستل شي او مثالونه یې چې حل شویدي څو څو واره وکتل شي انشا الله د ریاضي په باب مو به ستونزې حل شي.

د کتاب تصحیح او سمون دوام او غور غوارې که څه هم مونږ دا کتاب څو څو واره په غور سره کتلي او کمی او نواقص مو د امکان تر حده سم کړي، که بیا هم په کتاب کې کوم نقص موجود ؤ، د کتاب سمون لپاره د سپین غر تعلیمي مرکز سره په لاندې پته تماس ونیسئ.

جلال اباد ښار- تالاشی چوک د حاجي زرخان پلازه

سردار محمد خوږیانی

د نصرت عالي لېسې د ریاضاتو استاد

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

# لیک لړ

**حساب**

**اول فصل**

حساب........ 1
د حساب د علم موضوع........ 1
د مکمل اعدادو سیټ........ 1
د طبیعي اعدادو سیټ........ 2
د حساب د علم د زده کړې غرض........ 2
د حساب اصطلاحات........ 2
واحد........ 2
عدد........ 2
ارقام........ 4
طبقې........ 5
د صحیح عددونو څلور ګوني عملیې........ 6
1- د صحیح عددونو جمع........ 6
2- د صحیح عددونو تفریق........ 8
3- د صحیح عددونو ضرب........ 10
اضافي معلومات........ 12
4- د صحیح عددونو تقسیم........ 16

**دویم فصل**

کسر........ 21
اعشار کسر........ 21
د اعشار کسر څلور ګوني عملیې........ 21
عام کسر........ 24
د کسرونو مقایسه........ 26
تجنیس........ 26
د کسرونو اختصار........ 27
د عام کسر څلور ګوني عملیې........ 33

ketabton.com - The Digital Library


کسر الکسر....... 37

د کسرونو تبادله....... 39


**دریم فصل**


طاقت لرونکی عددونه....... 42

تجزیه....... 44

جذر....... 49

د اعدادو سیستمونه....... 59

د 2 په قاعده د اعدادو سیستم....... 60

د 5 په قاعده د اعدادو سیستم....... 61


**څلورم فصل**


نسبت....... 63

تناسب....... 83


**پنځم فصل**


فیصد....... 72

تخفیف....... 73

أحدیت....... 75

ربحه....... 76

تنزیل....... 79

مشارکت....... 80


**شپږم فصل**


سیټ....... 84

د سیټ د لیکلو طریقې....... 84

د سیټ اقسام....... 86

د روابطو له مخې د سیټونو اقسام....... 86

د سیټونو عملیې....... 89


**الجبر**

**اول فصل**


الجبر....... 93

د الجبر اصطلاحات....... 94

ketabton.com - The Digital Library

پولینوم........ 95
د الجبري عددونو څلور ګوني عملیې........ 97
د پولینومونو څلور ګونې عملیې........ 100
د باقي مانده دعوه........ 102
ترکیبي تقسیم........ 104
**دویم فصل**
مساوات........ 106
مطابقت........ 106
تجزیه........ 110
الجبري کسرونه........ 116
د الجبري کسرو خواص........ 116
د الجبري کسرونو جمع........ 117
د الجبری کسرونو تفریق........ 117
د الجبري کسرونو اختصار........ 118
د الجبري کسرونو تقسیم........ 118
د کسرونو ګویا کول........ 119
قسمي کسرونه........ 122
**دریم فصل**
معادله یا شرطیه مساوات........ 127
د معادلې اقسام........ 127
یو مجهوله اوله درجه معادله........ 127
د معادلې خواص........ 128
جذري معادلی........ 129
**څلورم فصل**
دوه مجهوله معادلی........ 133
د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل........ 133
متریکس........ 138
د متریکس ډولونه........ 139
د متریکسونو جمع........ 141

ketabton.com - The Digital Library

د متريکس تفريق........................................ 141
د دوه متريکسونو ضرب........................................ 143
د يوه متريکس ترانسپوز متريکس........................................ 144
ديترمينانت........................................ 145
د ديترمينانت د حل طريقه........................................ 145
د ديترمينانت خواص........................................ 147
الحاقي متريکس........................................ 148

**پنځم فصل**

دويمه درجه يومجهوله معادلې........................................ 151
د دويمه درجه يو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طريقې........................................ 152
دجذرو له مخې د يو مجهوله دويمه درجه معادلې جوړول........................................ 161
د دويمه درجه يومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول........................................ 162
دديکارت قاعده........................................ 163

**شپږم فصل**

غېرمساوات........................................ 173
د غيرمساوات خواص........................................ 173
دغېرمساوات اقسام........................................ 175
مطلقه قيمت........................................ 177
دبېنوم داشاري ځېږل........................................ 177
د يو مجهوله غېرمساوات سيستم........................................ 183
دوه مجهوله غېرمساوات........................................ 184
ددوه مجهوله غېرمساوات سيستم........................................ 185
ددوه مجهوله غېرمساوات د سيستم د حل طريقه........................................ 185
يو مجهوله دويمه درجه غير مساوات........................................ 186
ددويمه درجه غېرمساوات دحل طريقه........................................ 187

**اووم فصل**

پارامتريک معادلې........................................ 190

**اتم فصل**

اکسپوننشل (نمائي) معادلې........................................ 199

ketabton.com - The Digital Library

**نهم فصل**


لوګاریتمي معادلې ........ 203
دقاعدې د بدلولو فارمول ........ 206
د لوګاریتم اقسام ........ 207
دیوه عدد د لوګاریتم پیدا کول ........ 208
د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم ........ 209
انتي لوګاریتم ........ 210
انترپولېشن ........ 211
کولوګاریتم ........ 212
د لوګاریتمي معادلو د حل طریقه ........ 213


**لسم فصل**


توابع ........ 220
د تابع اقسام ........ 221
ناطقه تابع ........ 221
خطي تابع ........ 221
دخطي تابع د تعریف ناحیه ........ 222
د مستقیمې کرښې مېل ........ 224
دمېل معادله ........ 225
محوري معادله ........ 227
پولینومي تابعګانې ........ 231


**یوولسم فصل**


دویمه درجه تابع ........ 233
د دویمه درجه تابع ګراف ........ 233
د دویمه درجه تابع د ګراف ترسیم ........ 233
د ګراف انتقال ........ 235
هوموګرافیک تابع ........ 248
مجانب ........ 248
د هوموګرافیک تابع د ګراف ترسیم ........ 250
اکسپونتشل تابع ........ 253
لوګاریتمي تابع ........ 255

ketabton.com - The Digital Library

**دولسم فصل**

ردیف یا تصاعد.......257
حسابي ردیف.......257
د حسابي ردیف فارمول.......257
حسابي ردیف ته د حدونو داخلول.......259
هندسي ردیف.......260
د هندسي ردیف فارمول.......260
د هندسي ردیف خصوصیات.......262
هارمونیکي ردیف.......263
سلسلې.......265
حسابي سلسله.......265
د حسابي سلسلې فارمول.......265
د مسلسلو عددونو فارمول.......266
دجفتو عددو فارمول.......267
د طاق عددونو فارمول.......267
هندسي سلسله.......269
د هندسي سلسلې فارمول.......269

**دیارلسم فصل**

د ریاضي استقراء.......274

**څوارلسم فصل**

فکتوریل.......277
د بینوم قضیه.......279

**پنځلسم فصل**

لیمیټ.......281
انټروال.......281
د لیمیټ تعریف.......288
د لیمیټ د استعمال ځایونه.......284
د لیمیټ پیدا کول.......285
په (∞) کې د یوې تابع لیمیټ.......287

ketabton.com - The Digital Library


د لیمیټ قضیې ..... 288
ابهام ..... 295
د ابهام رفع کول ..... 295
د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ ..... 302
د تابعګانو متمادیت (اتصال) ..... 305
متمادي تابع ..... 305
غیر متمادي تابعګانې ..... 305
د متمادیت شرطونه ..... 306
دښي لاس لیمیټ ..... 307
د چپ لاس لیمیټ ..... 307
د متمادي تابعګانو خواص ..... 309

**شپاړلسم فصل**

مشتق ..... 311
منحنی یا وسطي تعبیر ..... 312
د یوې تابع مشتق ..... 313
د مشتق تعریف ..... 314
د مشتق هندسي تعبیر ..... 315
د مشتق قوانین ..... 318
د یوې طاقت لرونکې تابع مشتق ..... 318
د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق ..... 319
د دوه تابعګانو د تفاضل مشتق ..... 320
د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق ..... 321
د دوه تابعګانو د حاصل تقسیم مشتق ..... 322
د جذري تابع مشتق ..... 324
د مرکبې تابع مشتق ..... 326
د مثلثاتي تابعګانو مشتق ..... 329
ضمني مشتقات ..... 333
د تابع دویم ضمني مشتق ..... 334
متوالي مشتقات ..... 336

ketabton.com - The Digital Library


د مشتق د استعمال ځایونه............................................337
د یوې تابع بحراني ټکي............................................339
د انعطاف نقطه............................................340
د تابع د ګراف د ترسیم طریقه............................................343
د انعطاف د نقطې پیدا کول............................................344
د دویمه درجه تابع ګراف............................................345
هوموګرافیک تابع............................................348
د مجانب د پاکلو عمومي لار............................................351
د دریمه درجه یومجهوله تابع ګراف............................................352
د رول قضیه............................................355
د متوسط قیمت قضیه............................................357
د لوهپیتال قاعده............................................358
دبحراني ټکو تطبیق............................................359


**اولسم فصل**


انتیګرال............................................363
د ریمان مجموعه............................................363
د انتیګرال مفهوم............................................368
د انتیګرال اقسام............................................368
غیرمعین انتیګرال............................................368
د غیر معین انتیګرال خواص............................................369
معین انتیګرال............................................373
د معین انتیګرال خواص............................................375
دانتیګرال او مشتق اساسي قضیې............................................382
په تعویضي طریقې سره د انتیګرال نیول............................................385
قسمي انتیګرالونه............................................386
دلوګاریتمي او اکسپونشل تابعګانو مشتق............................................387
د اعشاري لوګاریتم مشتق............................................388
د معکوسو تابعګانو مشتق............................................392
د معکوسومثلثاتي تابعګانومشتق............................................392

ketabton.com - The Digital Library

قسمي کسرونه........ 394
د اکسپونښل تابعګانو انتيګرالونه........ 396
د لوګاريتمي تابعګانو انتيګرال........ 397
د منحني سطحې د مساحت پيدا کول........ 401
دکروي اجسامو دحجمو محاسبه........ 410
د انتيګرال پواسطه د کرې د حجم پيدا کول........ 411
د انتيګرال پواسطه د مخروط دحجم پيدا کول........ 411
د انتيګرال پواسطه دبيضوي دحجم پيدا کول........ 412
د قوس د اوږدوالي محاسبه........ 416
تفاضلي معادلې........ 419
د ديفرينشيال ترتيب........ 420
د ديفرينشيال معادلې درجه........ 420
خطي ديفرينشيال معادلې........ 421

**احصائيه**

**اتلسم فصل**

احصائيه........ 425
د اطلاعاتو د راټولو طريقه........ 425
ټولنه او جامعه........ 426
تصادفي نمونه........ 426
تصادفي متحول او دولونه يې........ 426
دفريکونسي جدول........ 427
انځوريز ګراف يا تصويري ګراف........ 427
موډ........ 428
اوسط........ 428
د مجزا داتاګانو د کثرت جدول........ 429
د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصيتونه........ 429
ډله ايز (تجمعي) کثرت........ 430
نسبي کثرت........ 430
ميله اي ګراف........ 431

ketabton.com - The Digital Library

د منکسري کرښې ګراف............431
د ګسسته یا غیر متصلو داتا ګانو اوسط............432
د جدول په مرسته د نښتو داتاګانو اوسط............433
د داتاګانو د ګېډۍ کولو طریقه............434
وسعت............434
د ګېډۍ اوږدوالی............434
میله ئي ګراف............434
د متصلو داتاګانو دسته بندي............434
وزني اوسط یا منځنۍ قیمت............435
مستطیلي ګراف............436
دایروي ګراف............437
میانه............438
د تحول ساحه............438
د انحراف اوسط............439
د څوضلعي فریکونسي ګراف............440
د ساقې او پاڼې ګراف............441
ربعي............442
صندوقچه یي ګراف............443
ربعي انحراف............446
واریانس............446
معیاري انحراف (مطلق تیتوالی)............448
د بدلون ضریب یانسبي پراګنده ګي............450
په نورمال منحني کې تیتوالی............451
د نورماله توزیع مشخصات............452
څومتحوله تړلتیا............453
د پراګنده ګۍ ګراف............454
پیوستون او د پیوستون ضریب............454
د خطي مېلان معادله............456
د احتمال د تابع توزیع............459

ketabton.com - The Digital Library

د دوه جمله يي توزيع او د برنولي ازمايښت ........ 461
د پواسن داحتمال توزيع ........ 462
د نورمال توزيع ........ 463
نمونه اخيستل ........ 467
د نمونې د اوسط توزيع ........ 468

**احتمالات**

**نوولسم فصل**

احتمالات ........ 471
چانس ........ 471
تصادفي پېښه ........ 471
تجربوي احتمال ........ 471
نظري احتمال ........ 471
نسبي كثرت او احتمال ........ 472
په نمونه يي فضا كې برابر او نابرابر چانس ........ 472
د يويې نمونه يي فضا ناڅاپي پېښه ........ 472
د احتمال قاعدې ........ 474
ونه ايز دياګرام ........ 475
د ضرب د حاصل لومړۍ قاعده ........ 475
د ناڅاپي پېښو اتحاد ........ 476
د ناڅاپي پېښو تقاطع ........ 477
د سيټونو او مډل جوړونه ........ 478
د شمېرنې اصل ........ 479
ترتيب (پرموټېشن) ........ 480
تركيب ........ 480
وريشن(تبديل) ........ 481
د بينوم قضيه ........ 483
د دوه جمله يي احتمال ........ 484
متمادي او غېر متمادي فضاګانې ........ 486
هم چانسه پېښې ........ 487

ketabton.com - The Digital Library

د متمادي فضاگانو احتمال........................................................ 488
مشروط احتمال........................................................................ 488
د ناڅاپه پېښو استقلالیت................................................................ 493

**شلم فصل**

موهومي عددونه....................................................................... 495
د اعدادو سیټونه...................................................................... 496
د موهومي عددونو څلورګوني عملیې....................................................... 497
صفري مختلط عدد...................................................................... 498
د مختلطو عددونو څلورګوني عملیې....................................................... 498
د مختلط عدد مزدوج.................................................................... 500
د مختلط عدد ضربي معکوس................................................................ 500
دیوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت......................................................... 501
د مختلطو عددونود دویم جذر پیدا کول.................................................. 505

**یوویشتم فصل**

د ریاضي منطق........................................................................ 507
د ریاضي استدلال..................................................................... 507
تمثیلي استدلال...................................................................... 507
استقرائي استدلال.................................................................... 507
استنتاجي استدلال.................................................................... 509
دحکم د نفی کولو استدلال.............................................................. 509
د ریاضي منطق او د بیان استنتاج...................................................... 510
د بیانونو ترکیب..................................................................... 510

ketabton.com - The Digital Library

# حساب

ketabton.com - The Digital Library

[illegible]

ketabton.com - The Digital Library

# اول فصل

## رياضي

رياضي د رياض څخه اخيستل شويده په رياضي کی تر (ض) وروسته (ی) نسبتي ده رياض د روضة مجموعه ده نو د رياضي لغوي معنی باغونه يا باغچې دي.

او په اصطلاح کې رياضي هغه علم دی چې د اجسامود کيفيتو ، کميتو ، تغيراتو ، ارتباطاتو او تاثيراتو څخه بحث کوي.

رياضي دېرې ځانګې لري لکه :

1- حساب　　2- الجبر　　3- نجوم
4- هندسه　　5- مثلثات　　6- علم هيئت

او داسې نور.

څرنګه چې زمونږ د وطن په تعليمي نصاب کې حساب ، الجبر ، هندسه او مثلثات ټول ليکل شوي دي نو مونږ هم د نصاب مطابق همدغه څلور شيان په دی کتاب کې ليکو.

### 1- حساب :

حساب په لغت کې شمېرلو ته وايې او په اصطلاح کې حساب هغه علم دی چې په معلومو عددونو باندې يوه عمليه اجراء کوي او مجهول عدد پيدا کوي.

### د حساب د علم موضوع:

د حساب د علم موضوع د مکمل اعدادو سيټ دی .

### د مکمل اعدادو سيټ:

د صفر څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د مکمل اعدادو سيټ وايې.

ketabton.com - The Digital Library



## د طبيعي اعدادو سيټ:

د (1) څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د طبيعي اعدادو سيټ وايي.

$1 \longrightarrow \infty$

## د حساب د علم د زده کړې غرض:

د حساب د علم زده کړه په ورځنيو معاملاتو کې انسان د غلطۍ څخه ساتي، لکه اخيستل ، خرڅول ، په صحيح ډول د دوا ګانو ترکيب، حتی چې د حساب د زده کړې څخه په غير په فزيک ، کيميا ، هندسه او داسې نورو علومو کې پر مخ تګ نا ممکن دی.

## د حساب اصطلاحات:

واحد:

د هر شي يوې دانې ته واحد وايي. لکه يو موټر ، يوه طياره يوه کښتۍ او داسې نور.

عدد:

واحد يا د واحدونو مجموعې ته عدد وايي . لکه (1) ، 13 ، 159 او داسې نور.

عدد ډېر قسمونه لري.

1- مشخص عدد: که د يوه عدد سره د کوم شي نوم ذکر وي دغسې عدد ته مشخص عدد وايي 12 کتابونه ، 107 شاګردان او داسې نور.

2- مجرد عدد: که د عدد سره د کوم شي نوم ذکر نه وي دغه ډول عدد ته مجرد عدد وايي. لکه 180 ، 240 او داسې نور،

3- جفت عدد: هغه عددونه چې په (2) باندې پوره تقسيميږي جفت عددونه دي لکه 170 ، 532 ، 714 ، 326 ، 748 او داسې نور ،

4- طاق عدد: هغه عدد دی چې په (2) باندې پوره نه ويشل کيږي لکه : 3 ، 41 ، 587 او داسې نور.

5- لمړني عدد: هغه عدد دی چې په ځان او په (1) پوره ويشل کيږي په نورو عددو پوره نه ويشل کيږی. لکه 2 ، 3، 5 ، 7 او داسې نور.

ketabton.com - The Digital Library



د (1) او 100 تر منځ لمړني عددونه 25 دي. دا عددونه يو يوناني عالم چې Eratosthenes نومېده په (273 -192 ) ق م کی يې يونان کی ژوند کاوه په يوه جدول کې پيدا کړی ؤ.

د (1) څخه تر 100 پورې عددونه يې په يوه مربعي جدول کې وليکل بيا يې (2) پريښودل او هغه عددونه چې په (2) ويشل کيدل حذف کړل. بيا يې (3) پريښودل او هغه عددونه چې په (3) ويشل کيدل حذف کړل په همدې ترتيب په (5) او (7) باندې چه کوم عددونه ويشل کيدل حذف يې کړل په اخر کې يې په جدول کی پاتی شوي عددونه چې 25 عددونه وه په يوه پاڼه کې وليکل او لمړني عددونه يې وبلل. عددونه دا دي.

2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 ، 29 ، 31 ، 37 ، 41 ، 43 ، 47 ، 53 ، 59 ، 61 ، 67،
71، 73، 79، 83 ، 89 ، 97

6- مرکب عددونه : هغه عددونه چې له ځان او يوه څخه په غير په نورو عددو هم ويشل کيږي مرکب عددونه بلل کيږي. لکه 4 ، 6 ، 8 ، 9 ، 10 او داسې نور .

د (1) او 100 تر منځ مرکب عددونه 74 دي.

(1) نه لمړني عدد دی او نه مرکب عدد دی.

7- تام عدد: که د يوه عدد ټول واحدادت پوره وي دغه عدد ته تام عدد وايې لکه 12 هنداونې ، 15 روپۍ.

8- کسري عدد: هغه عدد دي چې يو واحد يې نيم ګړې وي.

لکه $13\frac{1}{4}$ هندوانې، $17\frac{1}{2}$ډالر

کسري عددونه په درې قسمه دي.

a- مختوم کسر: که د کسر صورت په مخرج ووېشل شي او باقي ونکړي دی کسر ته مختوم کسر وايې لکه $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{5}$ ، چې $0.75 = \frac{3}{4}$او $0.4 = \frac{2}{5}$کيږي.

b- غير مختوم متوالي کسر: هغه کسردی چې صورت په مخرج پوره تقسيم نه شي مګر د خارج قسمت رقمونه يې تکراري وي. لکه $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$او داسې نور .

چې $0.33\overline{3} = \frac{1}{3}$کيږي او $0.166\overline{6} = \frac{1}{6}$ کيږی.

c- غیر مختوم غیر متوالي کسر: که د یوه کسر صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي او دخارج قسمت رقمونه يې هم تکراري نه وي دی کسر ته غیر مختوم غیر متوالي کسر وايې لکه $\frac{13}{47}$ چې ... $\frac{13}{47} = 0.27659574468085 1$ کیږي.

9- ناطق عدد: صحیح عدد، متوالي کسر او مختوم کسر ناطق عددونه دي. لکه 15 ، 28 ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{1}{2}$ او داسې نور.

10- غیر ناطق عدد: غیر مختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چې پوره جذر نلري غیر ناطق عددونه دي لکه $\frac{13}{49}$ ، $\frac{11}{47}$ ، $\sqrt{2}$ او $\sqrt{3}$ او داسې نور.

## ارقام:

د اعدادو د لیکنې سمبول ته رقم وايي.

په ډېرو ممالکو کې د اعدادو د لیکنې لپاره سمبولونه ټاکل شوي دي چې په همغه ممالکو کې استعمالیږي. مګر هغه رقمونه چې د نړۍ په زیاتو ممالکو کې استعمالیږي دري دي.

1- رومي رقمونه 2- هندو عربي رقمونه 3- اریک رقمونه.

### 1- رومي رقمونه :

د هندو عربیک رقمو تر لیکنې د مخه رومي رقمونه زیات استعمالیدل. اوس رومي رقمونه په کتابونو کې د مختلفو مقاصدو لپاره استعمالیږي. خو په حسابي او الجبري عملیو کې نه استعمالیږي $I$ د یو لپاره $V$ د 5 لپاره $X$ د 10 لپاره $L$ د 50 لپاره $C$ د 100 لپاره $D$ د 500 لپاره او $M$ د 1000 لپاره په سمبولیک ډول استعمالیږي.

که یو رقم دري واره څنګ په څنګ ولیکل شي جمع کیږي لکه $II$ دوه دي $III$ دري دي که $X$ دري واره ولیکل شي (30) کیږي که $L$ دري واره ولیکل شي 150 کیږي که دوه مختلف عددونه څنګ په څنګ ولیکل شي که د ښي خوا عدد زیات ؤ د چپې خوا عدد ور څخه منفي کیږي $IV$ چې څلور دي $IX$ نه دی $XL = 40$ دي $XC = 90$ دي او که د چپې خوا عدد زیات ؤ د ښې خوا عدد ور سره جمع کیږي.

$VI = 6$ ، $VII = 7$ او $VIII = 8$ دي $XIX = 19$ او $CX = 110$ ، $LX = 60$ دي $CXXX = 130$ او $MDCXIX = 1619$ دي.

ketabton.com - The Digital Library


2- اریک رقمونه :

هغه رقمونه دي چې اریائیانو لیکلي دي. دې رقمو ته شرقي رقمونه هم وایې. اریک رقمونه په لاندې ډول دي. ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹

ټول لس رقمونه دي.

3- هندو عربیک رقمونه :

هغه رقمونه چې مصریانو لیکلي دي او یوازې د صفر سمبول هندیانو لیکل دي دغه رقمو ته غربي رقمونه هم وایې دا رقمونه 10 دي او عبارت دي له 0 ، 1، 2، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 دا رقمونه په دوه برخو ویشل شویدي.

1- معنی دار رقمونه 2- بې معنی رقم

1- معنی دار رقمونه : د 1 څخه تر 9 پورې رقمو ته معنی دار رقمونه وایې .

2- بې معنی رقم : صفر بې معنی رقم دې ځکه که یوازې هر څومره صفرونه ولیکو په کوم شي دلالت نه کوي لکه . 0000000

او که د عدد چپې خواته ولیکل شي هغه عدد نه ډیرېږي او نه کمیږي .

لکه 0000013 چې 13 دي.

طبقې : د عددو د لیکلو او لوستلو لپاره ریاضي دانانو طبقې لیکلي دي چې هره طبقه درې مرتبې ده هره طبقه خپل نوم لري تر اوسه پورې په ریاضي کې 22 طبقې لیکل شویدي.

1- احادو طبقه
2- زرو طبقه
3- میلیون طبقه
4- میلیاردو طبقه
5- بیلیون طبقه
6- بیلیاردو طبقه
7- تریلون طبقه
8- تریلیارد طبقه
9- کوادریلیون
10- کوادریلیارد
11 - کوینتیلیون
12- کوینتیلیارد
13- سکستیلیون
14- سکستیلیارد
15- سپتیلیون
16- سپتیلیارد
17- اوکتیلیون
18- اوکتیلیارد
19- نونیلیون
20- نونیلیارد
21- د سیلیون
22- دسیلیارد

ketabton.com - The Digital Library



چې تر اوسه پورې په نړۍ کې د دغه طبقو څخه اته طبقې استعمال شویدي یعنې تر تریلیارد پورې طبقې استعمال شویدي.

د عدد لوستل : عدد د ښۍ خوا څخه په طبقو ویشو او د چپې خوا څخه یې لولو اول د طبقې عدد لولو بیا دطبقې نوم اخلو. که طبقه یا مرتبه صفر وه نوم یې نه اخیستل کیږي. لکه:

450,347,825,601,234,004,000,801

او داسې ویل کیږي څلورسوه اوپنځوس تریلیارده دری سوه اواوه څلویښت تریلونه اته سوه اوپنځه ویشت بیلیارده شپږسوه اویوبیلونه دوه سوه اوڅلوردېرش میلیارده څلورمیلونه اواته سوه اویو.

د عددو لیکل : عدد د چپې خوا څخه لیکل کیږي هر عدد په خپله طبقه او مرتبه کې لیکل کیږي که د کومې طبقې یا مرتبې نوم وانه خیستل شي پر ځای صفرونه لیکل کیږي لکه.

درې سوه څوارلس تریلیارده اوه تریلیونه نه ویشت بیلونه یو سل او دولس میلیارده نه څلویښت زره او اته

314,007,000,029,112,000,049,008

## د صحیح عددونو څلور ګونې عملیې:

### 1- د صحیح عددونو جمع:

جمع په لغت کې یو ځای کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې د هم جنسو شیانو یو ځای کولو ته جمع وایي.

هغه عددونه چې جمع کیږي د جمع عوامل ورته وایي او هر عدد ته عامل وایي او هغه عدد چې د عواملو د جمع کېدو په نتیجه کې لاس ته راځي. د جمع حاصل ورته وایي.

### د جمع د عملیې طریقه :

د جمع عوامل داسې یو تر بل لاندې لیکو چې هر طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بیا د یویز مرتبو رقمونه جمع کوو که دجمع حاصل یې دوه رقمي شو لمړی رقم یې لیکو او دویم رقم یې دلسیز مرتبې د رقمو سره جمع کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو د جمع حاصل لاس ته راځي.

ketabton.com - The Digital Library


```
 +456783456
   789432187
 1246215643
```

## د جمع د عمليې ميزان:

### 1- د جمع ميزان په جمع :

عوامل د لاندې خوا څخه پورته خواته جمع كوو كه د جمع نوى حاصل د جمع د پخواني حاصل سره مساوي شو سوال صحيح حل شويدى.

```
 12349391
+7894321
 2578092
 1876978
 12349391
```

### 2- د جمع ميزان په تفريق:

كه د جمع عوامل دوه وه د جمع د حاصل څخه يو عامل منفي كوو كه بل عامل لاس ته راشي سوال صحيح حل شويدى.

```
−1165759          + 489785
   675974             675974
  489785            1165759
```

### 3- د جمع ميزان په طرح نه :

د جمع عوامل طرح نه كوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف كې ليكو . بيا د جمع حاصل طرح نه كوو د طرح نه حاصل يې د عواملو د طرح نه د حاصل په مقابل كې ليكو. كه دغه دوه عددونه مساوي شول سوال صحيح حل شويدى.

```
+ 5689247
  7563785
 13253032
  1 X 1
```

ketabton.com - The Digital Library



دجمع دعمليې اساسي اصول:

1- د جمع عمليه د جمعې د تبديلي د قانون پيروي کوي يعنې که د جمع د عواملو ځايونه تغير شي د جمع په حاصل کې تغير نه راځي.

لکه:

$$\begin{array}{r} +238 \\ 451 \\ \hline 689 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +451 \\ 238 \\ \hline 689 \end{array}$$

2- د جمع عمليه د اتحادي قانون پيروي کوي.

يعنې که د جمع عوامل زيات وي په يوه وار يې جمع کول مشکل وي نو دا عددونه په ګروپو ويشو د هر ګروپ د جمع حاصل پيدا کوو او بيا دا جمع حاصلونه جمع کوو د راکړ شوو عددونو د جمع حاصل لاس ته راځي.

3- د اعدادو سيټ د جمع د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.

4- د جمع دعمليې خنثی عنصر صفر دی.

2- د صحيح عددونو تفريق:

تفريق په لغت بېلولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو د فرق د معلومولو طريقې ته تفريق وايي. لوی عدد ته مفروق منه وايي کوچنی عدد ته مفروق وايي د مفروق منه څخه د مفروق د کميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د تفريق حاصل ورته وايي.

د تفريق د عمليې طريقه:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د مفروق منه د يويز مرتبې د رقم څخه د مفروق د يويز مرتبې رقم منفي کوو د لسيز مرتبې د رقم څخه يې دلسيز مرتبې رقم منفي کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د تفريق حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r} -78402138 \\ 14987675 \\ \hline 63414463 \end{array}$$

ketabton.com - The Digital Library



## د تفریق د عملیې میزان:

### 1- د تفریق میزان په جمع :

د تفریق حاصل د مفروق سره جمع کوو که مفروق منه پلاس راغی سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} -48356782 \\ \underline{17987998} \\ 30368784 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +30368784 \\ \underline{17987998} \\ 48356782 \end{array}$$

### 2- د تفریق میزان په تفریق:

د مفروق منه څخه د تفریق حاصل منفي کوو که مفروق لاس ته راغي سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ \underline{1789756798} \\ 6064564748 \end{array}$$

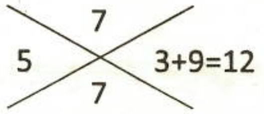
میزان

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ \underline{6064564748} \\ 1789756798 \end{array}$$

### 3- د تفریق میزان په طرح نه :

مفروق منه طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا مفروق طرح نه کوو د طرح نه حاصل یط مفروق منه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو . او منفي کوو يې او په دریم طرف کې يې لیکو بیا د تفریق حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې يې لیکو د دریم او څلوزم عددونه مساوي وه سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} -43756832109 \\ \underline{12898098734} \\ 30858733375 \end{array}$$



ketabton.com - The Digital Library



که د مفروق منه د طرح نه حاصل د مفروق د طرح نه د حاصل څخه کم ؤ د مفروق منه د طرح نه د حاصل سره 9 جمع کوو بیا د مفروق د طرح نه حاصل ور څخه منفي کوو.

د تفریق اساسي اصول:

1- که مفروق منه ثابت وي او مفروق زیات شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 250 \\ \hline 200 \end{array}$$

2- که مفروق منه ثابت وي مفروق کم شي د تفریق حاصل زیاتیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 150 \\ \hline 300 \end{array}$$

3- که مفروق ثابت وي او مفروق منه زیات شي د تفریق حاصل ډیریږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -500 \\ 200 \\ \hline 300 \end{array}$$

4- که مفروق ثابت وي او مفروق منه کم شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array}$$

5- که مفروق او مفروق منه په یوه اندازه زیات یا کم شي د تفریق په حاصل کې تغیز نه راځي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -500 \\ 250 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array}$$

3- د صحیح عددونو ضرب:

ضرب په لغت کې وهلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د مساوي عددونو د جمع لنډې طریقې ته ضرب وایي. د ضرب په عملیه کې اول عدد ته مضروب فیه او د دویم عدد ته مضروب وایي. په مضروب فیه کې د مضروب د ضرب په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د ضرب حاصل ورته وایي.

ketabton.com - The Digital Library


د ضرب د عمليې طريقه:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو د مضروب لمړی رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو. بيا د مضروف دويم رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو په اخر کې دغه عددونه جمع کوو د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل لاس ته راځي

```
×  4587
    896
  27522
 41283
36696
4109952
```

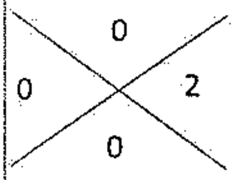
د ضرب د عمليې ميزان:

1- د ضرب ميزان په تقسيم:

د ضرب حاصل په مضروب فيه ويشو که مضروب لاس ته راغی سوال صحيح حل شوی دی او يا د ضرب حاصل په مضورب ويشو که مضروف فيه لاس ته راغي سوال حل شوی دي.

2- د ضرب ميزان په طرح نه :

مضروب فيه طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو بيا مضروب طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د مضروب فيه د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو او ضربوو يې که د ضرب حاصل يې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو يې په دريم طرف کې يې ليکو بيا د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې يې ليکو که د دريم او څلورم طرفو عددونه مساوي شول د سوال حل صحيح دی.




```
×  56783
    5238
  454264
 170349
113566
283915
297429354
```

ketabton.com - The Digital Library



د ضرب د عمليې اساسي اصول:

1- د اعدادو سيټ د ضرب د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.
2- د ضرب عمليه د تبديلی د قانون پيروي کوي.
3- د ضرب عمليه د اتحادي قانون پيروي کوی.
4- د ضرب عمليه د توزيعي خاصيت پيروي کوي.
5- د ضرب دعمليې خنثی عنصر (1) دی.

## اضافي معلومات:

العاملي د بعضی عددونو د ضربولو په باره کې څو قاعدې په خلاصة الحساب کې ليکلي دي. موږ د شاګردانو د ذهن د انکشاف لپاره د دغه قاعدو څخه څو قاعدې رانقلوو.

بهاؤ الدين محمد بن الحسين چې مشهور په العاملي دی په 953 هـ ش کال په بعلبک کې زيږيدلی دی او په 1035 هـ ش په اصفهان کې وفات شويدی اصلاً د لبنان و عامل په لبنان کې يو غر دی د بعلبک کلی پدې غره کې دی.

اوله قاعده:

د 5 او 10 تر منځ د عددونو د ضرب حاصل:

يو عدد په 10 کې ضربوو بل عدد د 10 څخه منفي کوو د تفريق حاصل په لمړني عدد کې ضربوو د ضرب حاصل يې د همدغه عدد د 10 چنده څخه منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

1- مثال: د 7 او 9 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

حل:

$$10 \times 7 = 70$$
$$10 - 9 = 1$$
$$1 \times 7 = 7$$
$$70 - 7 = 63$$

2- مثال: د 6 او 8 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$10 \times 6 = 60$$

ketabton.com - The Digital Library


$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 6 = 12$$
$$60 - 12 = 48$$

دویمه قاعده:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه یې په 10 کې ضربوو د 10 څخه د عددو د تفاضل د ضرب حاصل ور سره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

حل:

$$6 + 8 = 14$$
$$10 \times 4 = 40$$
$$10 - 6 = 4$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 4 = 8$$
$$40 + 8 = 48$$

دریمه قاعده:

د یو رقمي او د 10 او 20 تر منځ دوه رقمي عددو ضرب حاصل:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه یې په 10 کې ضربوو یو رقمي عدد د 10 څخه منفي کوو او د دوه رقمي عدد په لمړي رقم کې یې ضربوو او د اولني حاصل ضرب څخه یې منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 7 او 19 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$19 + 7 = 26$$
$$16 \times 10 = 160$$
$$10 - 7 = 3$$
$$3 \times 9 = 27$$
$$160 - 27 = 133$$

مثال: د 8 او 17 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$8 + 17 = 25$$
$$15 \times 10 = 150$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 7 = 14$$
$$150 - 14 = 136$$

ketabton.com - The Digital Library



ځلورمه قاعده:

د 10 او 20 تر منځ د دوه رقمي عددو د ضرب حاصل:

د يوه عدد د يويز رقم د بل عدد سره جمع کوو د جمع حاصل په 10 کې ضربوو او د دواړو عدد د د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 13 او 18 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$18 \times 3 = 21$$
$$21 \times 10 = 210$$
$$3 \times 8 = 24$$
$$210 + 24 = 234$$

پنځمه قاعده:

په 5 ، 50 او 500 کې د يوه عدد ضربول:

د عدد نيمايي په 10 کې ضربوو په 5 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي د عدد نيمايي په 100 کې ضربوو په 50 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

د عدد نيمايي په 1000 کې ضربوو په 500 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثالونه:

$$5 \times 28 = 10 \times 14 = 140$$
$$50 \times 36 = 100 \times 18 = 1800$$
$$500 \times 32 = 1000 \times 16 = 16000$$

شپږمه قاعده:

د دوه رقمي عددو د ضرب د حاصل پيدا کول چې يو يې د 10 او 20 تر منځ وي.

د کوچني عدد يويز د لوي عدد په لسيز کې ضربوو او د لوي عدد سره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو.

حل: د 17 او 59 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$7 \times 5 = 35$$
$$35 + 59 = 94$$
$$94 \times 10 = 940$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$940 + 63 = 1003$$

ketabton.com - The Digital Library


اوومه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې لسیز یې مساوي وي.

د یوه عدد یویز د بل عدد سره جمع کوو او په لسیز رقم کې یې ضربوو او 10 چنده کوو یې او د یویز رقمو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 63 او 68 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$68 + 3 = 71$$
$$71 \times 6 = 426$$
$$426 \times 10 = 4260$$
$$4260 + 24 = 4284$$

اتمه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې د لسیز مرتبې یې مختلفي وي.

د کوچني عدد لسیز په لوی عدد کې ضربوو د کوچني عدد د یویز مرتبې او دلوی عدد د لسیز مرتبې د ضرب حاصل ور سره جمع کوو او 10 چنده کوو یې او د یویز مرتبو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو. مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 27 او 69 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$69 \times 2 = 138$$
$$7 \times 6 = 42$$
$$138 + 42 = 180$$
$$180 \times 10 = 1800$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$1800 + 63 = 1863$$

مثال: د 35 او 87 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$87 \times 3 = 261$$
$$5 \times 8 = 40$$
$$261 + 40 = 301$$
$$301 \times 10 = 3010$$
$$5 \times 7 = 35$$
$$3010 + 35 = 3045$$

ketabton.com - The Digital Library



مثال: 47 او 95 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$95 \times 4 = 380$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$380 + 63 = 443$$
$$443 \times 10 = 4430$$
$$7 \times 5 = 35$$
$$4430 + 35 = 4465$$

## 4- د صحيح عددونو تقسيم:

تقسیم په لغت کې ویشلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه عدد څخه د مساوي عددونو د تفریقولو لنډې طریقې ته تقسیم وایي.

هغه عدد چه ویشل کیږي مقسوم بلل کیږي هغه عدد چې مقسوم پرې ویشل کیږي مقسوم علیه بلل کیږي په مقسوم علیه باندې د مقسوم د تقسیمیدو په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي خارج قسمت بلل کیږي د مقسوم هغه برخه چې د مقسوم علیه څخه کمه شي او په مقسوم علیه نه ویشل کیږي باقي بلل کیږي.

### د تقسیم د عملیې طریقه :

د مقسوم علیه مرتبې شمېرو د مقسوم د چپې خوا څخه همغومره مرتبې را بېلوؤ د مقسوم علیه سره یې مقایسه کوو که تر مقسوم علیه زیات و پرې ویشو یې حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو یې. د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو رقم راکښته کوو نوی مقسوم جوړ وو که تر مقسوم علیه زیات و پرې ویشو یې او که کم ؤ خارج قمست ته صفر پورته کوو او د مقسوم څخه یو بل رقم راکښته کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا د مقسوم علیه څخه کم شي دغې کمې شوې برخې ته باقي وایي.

ketabton.com - The Digital Library


| | |
|---|---|
| 456340189 | 56342 |
| 450736 | 8099 |
| 560418 | |
| 507078 | |
| 533409 | |
| 507078 | |
| 26331 | |

د تقسیم د عملیې میزان:

1- د تقسیم د عملیې میزان په ضرب:

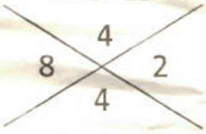
خارج قسمت په مقسوم علیه کې ضربوو باقي ور سره جمع کوو که مقسوم لاس ته راغي سوال صحیح دی.

$$\begin{array}{r} \times 56342 \\ 8099 \\ \hline 507078 \\ 507078\phantom{0} \\ 00000\phantom{00} \\ 450736\phantom{000} \\ \hline 456313858 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +456313858 \\ 26331 \\ \hline 456340189 \end{array}$$

2- د تقسیم د عملیې میزان په طرح نه :

مقسوم علیه طرح نه کوو د طرح حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا خارج قسمت طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د مقسوم علیه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو او ضربوو یې. که د ضرب حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې د باقي د طرح نه حاصل ور سره جمع کوو که د جمع حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې په دریم طرف کې یې لیکو بیا مقسوم طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم څلورم طرفو عددونه مساوي شول سوال صحیح حل شوی دی.

7+6=13



ketabton.com - The Digital Library



نوټ: که د تقسیم عملیې باقي نه لرل او یا یې باقي تر مقسوم علیه کم وه نو د تقسیم میزان په تقسیم هم کولای شو.

مقسوم په خارج قسمت ویشو که مقسوم علیه لاس ته راغی سوال صحیح دی.

893001 | 197
788 | 4534
1050
985
650
591
591
394
197

893001 | 4532
4532 | 197
44980
40788
39214
31724
197

## د تقسیم د عملیې اساسي اصول :

1- که مقسوم او مقسوم دواړه په یوه عدد کې ضرب شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په همغه عدد کې ضربیږي . لکه :

60 | 8
56 | 7
4

300 | 50
280 | 7
20

2- که مقسوم او مقسوم علیه په یوه عدد تقسیم شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په هغه عدد تقسیمیږي. مثال:

25 | 2
2 | 12
5
4
1

250 | 20
20 | 12
50
40
10

ketabton.com - The Digital Library

3- که د دوه عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي مجموعه یې هم په هغه عدد ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو مجموعه ده .

مثال:

| | |
|---|---|
| 1280 | 80 |
| 80 | 16 |
| 480 | |
| 480 | |
| xxx | |

| | |
|---|---|
| 2000 | 80 |
| 160 | 25 |
| 400 | |
| 400 | |
| xxx | |

| | |
|---|---|
| 3280 | 80 |
| 320 | 41 |
| 80 | |
| 80 | |
| xxx | |

$$\begin{array}{r} +1280 \\ 2000 \\ \hline 3280 \end{array}$$

4- که د دوو عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي نو د هغوي تفاضل هم په هغه ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو تفاضل دی.

$$\begin{array}{r} -2000 \\ 1280 \\ \hline 720 \end{array}$$

| | |
|---|---|
| 720 | 80 |
| 720 | 9 |
| xxx | |

5- که د دوه عددو څخه یو په دریم عدد ویشل کیدلو د ضرب حاصل یې هم په هغه دریم عدد ویشل کیږي.

لکه 48 په 6 ویشل کیږي مگر 50 په 6 نه ویشل کیږي مگر $2400 = 48 \times 50$ په 6 ویشل کیږي.

| | |
|---|---|
| 2400 | 6 |
| 24 | 400 |
| 00 | |

ketabton.com - The Digital Library



تمرين:

1- د درې عددو مجموعه 180 ده د اول او دويم مجموعه 105 ده د دويم او دريم مجموعه 135 ده عددونه پيدا کړئ؟

2- کوم عدد د 35817 څخه منفي شي چې 18465 لاس ته راشي.

3- د دوه ښارو تر منځ فاصله $900km$ ده يو موټر د يو ښار څخه د $85km$ په سرعت د بل موټر خواته په 7 بجې روانيږي او دويم موټر د دويم ښار څخه د $95km$ په سرعت اول ښار ته روانيږي ووايا ست چې پس له څه وخته به سره مخ شي.

4- عبدالوهاب دوه ټانه رخت له يوه جنسه يو په $9000Rs$ او بل په $10500Rs$ واخيستل د ټانونو فرق 5 متره دی ووايا ست چې هر ټان څو متره دی.

5- يو سړي دوه بوجۍ مميز له يوه جنسه يو په 37800 روپۍ او بل بوجۍ يې په $31500Rs$ واخيستل که د بوجيو فرق (9) منه وي د هرې بوجۍ اندازه پيدا کړئ؟

6- دوه طياري له يوه ميدان څخه په يوه وخت کې پرواز کوي د يوې سرعت $500km/_h$ او د بلې سرعت $750km/_h$ دی يوه د شرق او بله د غرب خواته ځي پس له 2 ساعتو به يې په منځ کې فاصله څومره شي؟

7- يو موټر په سهار په 7 بجې د کابل څخه حرکت کوي يو د شمال خواته او بل جنوب خواته ځي د يوه سرعت $70km/_h$ او د بلې سرعت $90km/_h$ دی پس له څو ساعتو به د دوی په منځ فاصله $960km$ شي.

ketabton.com - The Digital Library

# دویم فصل

## کسر:

کسر په لغت کې ماتولو ته وايي. او په اصطلاح کې که واحد په څو مساوي برخو وويشل شي دي عمليې ته کسر وايي.

کسر په دوه قسمه دی.

1- اعشار کسر 2- عام کسر

## 1- اعشار کسر:

که واحد په 10 يا د 10 په طاقت وويشل شي دی کسر ته اعشار کسر وايي. لکه 0.3 واحد په 10 برخو ويشل شويدی او 3 برخې ور څخه اخيستل شويدی.

0.13 واحد په 100 برخو ويشل شويدی او 13 برخې ترې اخيستل شويدي. 0.007 واحد په 1000 برخو ويشل شويدی او 7 برخې ور څخه اخيستل شويدی.

## د اعشار کسر څلور گونې عمليې:

### 1- د اعشار کسر جمع:

عددونه داسې يو تر بل لاندې ليکو چې صحيح عدد د صحيح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي. بيا يې د صحيح عددونو د جمع په شان جمع کوو.

$$\begin{array}{r} +87965.38 \\ 32887.45 \\ \hline 120852.83 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +7678.3 \\ 6845.83 \\ \hline 14524.13 \end{array}$$

ميزان يې د صحيح عددونو د جمع د ميزان غوندې دي.

### 2- د اعشار کسر تفريق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې صحيح عدد د صحيح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي بيا يې د صحيح عددو د تفريق په شان تفريقوو.

$$\begin{array}{r} -5345.870 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5345.87 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -1467.23 \\ 894.85 \\ \hline 572.38 \end{array}$$

ميزان يې د صحيح عددونو د تفريق د ميزان غوندې دي.

ketabton.com - The Digital Library



3- د اعشار کسر ضرب:

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو. د صحیح عددونو د ضرب په شان یې ضربوو د کسر د ضرب د حاصل څخه د مضروب او مضروب فیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاري رقمونه را بیلوو د راکړ شوو اعشاري کسرو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

```
    4563.85
     3278.3
    1369155
   3651080
  3194695
 912770
1369155
-----------
14961669.455
```

میزان یې د صحیح عددونو د ضرب د میزان غوندې دی.

4- د اعشار کسر تقسیم:

د اعشار کسر تقسیم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- چې په مقسوم کې اعشاریه وي او په مقسوم علیه که نه وي.

لکه

| | |
|---|---|
| 4587.5 | 345 |

د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو کله چې اعشاریې ته ورسیږو اعشاریه خارج قسمت ته وړو او اعشاري رقم را کښته کوو عملیې ته تر درې اعشاري رقمو پورې ادامه ورکوؤ.

ketabton.com - The Digital Library

```
4587.5 | 345
345    | 13.297
------
 1137
 1035
------
 1025
  690
------
  3350
  3105
------
   2450
   2415
------
     35
```

2- حالت: چې په مقسوم علیه کې اعشاریه وي په مقسوم کې نه وي.

لکه:

7562 | 34.2

د مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو او د صحیح عدد د تقسیم په شان یې تقسیموو که باقي وکړل باقي ته صفر ږدو او خارج قسمت کې اعشاریه ږدو تر دې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

756920 | 347

3- چې په مقسوم او مقسوم علیه دواړو کې اعشاري رقمونه وي دلته درې حالته موجود دي.

الف: چې د مقسوم او مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر مساوي وی لکه:

7843.82 | 9.23

د مقسوم او مقسوم علیه دواړو څخه اعشاریه حذفوو د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو که عملیې باقي وکړل د باقي مخې ته صفر ږدو او په خارج قسمت کې اعشاریه لیکو تر درې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

784382 | 923

ب: چې د مقسوم د اعشاري رقمو شمېر زیات او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر کم وي لکه:

845.234 | 85.7

ketabton.com - The Digital Library



د مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاريه مخ ته وړو بيا يې د اعشار كسر د تقسيم د اول حالت په څېر تقسيموو.

$$8452.34 \mid 857$$

ج: چې د مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر د مقسوم د اعشاري رقمو د شمېر څخه زيات وي لكه.

$$87635.3 \mid 0.456$$

د مقسوم او مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اضافه اعشاري رقمو په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو.

$$87635300 \mid 456$$

د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو.

ميزان يې د صحيح عددونو د تقسيم د ميزان غوندې دی.

## 2- عام كسر:

كه واحد د 10 او او 10 د طاقت څخه په غېر په نورو عددو وويشل شي دی كسر ته عام كسر وايي لكه $\frac{2}{3}$، $\frac{5}{11}$، $\frac{7}{99}$، $\frac{4}{101}$، $\frac{17}{300}$ او داسې نور.

عام كسر په څلور قسمه دی.

1- اصل كسر يا واقعي كسر  2- واحد كسر

3- غېر واجب كسر  4- واجب كسر يا كسري عدد يا مخلوط كسر

1- واقعي كسر: هغه كسر دی چې صورت يې لږ مخرج يې ډېر وي.

لكه $\frac{5}{13}$، $\frac{7}{19}$، $\frac{13}{29}$ او داسې نور.

2- واحد كسر: هغه كسر دی چې صورت او مخرج يې مساوي وي لكه $\frac{8}{8}$، $\frac{9}{9}$ او داسې نور.

ketabton.com - The Digital Library


3- غیر واجب کسر : هغه کسر دی چې صورت یې ډېر او مخرج یې کم وي. لکه $\frac{7}{2}$ ، $\frac{9}{4}$ ، $\frac{13}{5}$ او داسې نور.

4- واجب کسر: هغه کسر دی چې دیوه صحیح عدداو یوه اصل کسرڅخه جوړ شوی وي لکه $3\frac{1}{4}$ ، $7\frac{2}{3}$ ، $8\frac{4}{5}$ او داسې نور.

غیر واجبول:

په غیر واجب کسر باندې د واجب کسر بدلولو ته غیر واجبول وايي.

طریقه یې داسې ده چې مخرج په صحیح عدد کې ضربوو صورت ورسره جمع کوو او پر مخرج یې لیکو.

مثال: $9\frac{1}{7}$ واجب کسر غیر واجب کړئ؟

$$9\frac{1}{7} = \frac{7 \times 9 + 1}{7} = \frac{63 + 1}{7} = \frac{64}{7}$$

مثال: $8\frac{3}{5}$ غیر واجب یې کړئ؟

$$8\frac{3}{5} = \frac{5 \times 8 + 3}{5} = \frac{40 + 3}{5} = \frac{43}{5}$$

تصحیح:

په واجب کسر باندې د غیر واجب کسر بدلولو ته تصحیح وايي.

طریقه یې داسې ده چې صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{27}{5}$ غیر واجب کسر دی واجب یې کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 27 & 5 \\ \underline{25} & 5 \\ 2 & \end{array}$$

$$\frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$$

ketabton.com - The Digital Library



تمرين:

1- غير واجب يې کړئ؟

1- $5\frac{3}{4}$ 2- $11\frac{6}{7}$ 3- $8\frac{2}{5}$ 4 – $9\frac{1}{8}$

2- تصحيح يې کړئ؟

1- $\frac{19}{3}$ 2- $\frac{48}{5}$ 3- $\frac{77}{8}$ 4- $\frac{46}{11}$ 5- $\frac{117}{11}$

## د کسرونو مقايسه:

1- که د څو کسرو صورتونه مساوي او مخرجونه يې مختلف وي لکه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ او $\frac{1}{4}$ پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې مخرج يې کوچنی وي.

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

2- که د څو کسرو صورتونه مختلف او مخرجونه يې مساوي وي.

لکه:

$$\frac{4}{7} ، \frac{3}{7} ، \frac{2}{7} ، \frac{1}{7}$$

پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې صورت يې ډېر وي.

$$\frac{4}{7} > \frac{3}{7} > \frac{2}{7} > \frac{1}{7}$$

3- که د څو کسرو صورتونه او مخرجونه مختلف وي د دې کسرو د مقايسې لپاره کسرونه تجنيسوؤ.

تجنيس :

تجنيس په لغت کې هم جنس کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې که د يوه کسر صورت او مخرج د بل کسر په مخرج کې ضرب شي دې عمليې ته تجنيس وايي.

مثال: $\frac{4}{7}$ او $\frac{5}{9}$ کسرونه مقايسه کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library


$$\frac{4}{7}=\frac{4\times 9}{7\times 9}=\frac{36}{63}$$

$$\frac{5}{9}=\frac{5\times 7}{9\times 7}=\frac{35}{63}$$

$$\frac{36}{63}>\frac{35}{63}$$

$$\frac{4}{7}>\frac{5}{9}$$

**تمرین :**

لاندې کسرونه مقایسه کړئ؟

1- $\frac{6}{11}$ او $\frac{9}{16}$   2- $\frac{7}{9}$ او $\frac{8}{11}$   3- $\frac{2}{5}$ او $\frac{3}{7}$   4- $\frac{5}{7}$ او $\frac{7}{9}$ او $\frac{9}{11}$

**د کسرونو اختصار :**

اختصار په لغت کې لنډولو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه کسر صورت او مخرج په یوه عدد ویشلو ته اختصار وایي.

مثال: $\frac{12}{15}$ کسر اختصار کړئ؟

صورت او مخرج په (3) ویشو.

$$\frac{\overset{4}{12}}{\underset{5}{15}}=\frac{4}{5}$$

صورت او مخرج په 7 ویشو.

$$\frac{\overset{5}{35}}{\underset{9}{63}}=\frac{5}{9}$$

صورت او مخرج په 6 بیا په 4 ویشو.

$$\frac{\overset{\overset{5}{20}}{120}}{\underset{\underset{6}{24}}{144}}=\frac{5}{6}$$

ketabton.com - The Digital Library



صورت او مخرج په 12 ويشو او بيا يې په (2) وېشو.

$$\frac{\frac{120}{10}}{\frac{144}{12}} = \frac{\frac{10}{5}}{\frac{12}{6}} = \frac{5}{6}$$

د کسر د اختصار لپاره د تقسیم د قابلیتونو زده کړه ضرور ده.

1- په (2) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقم صفر يا جفت وي په (2) ويشل کيږي لکه 150، 158، 214، 102 او داسې نور.

2- په (3) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد رقمو مجموعه په 3 ويشل کيدله دا عدد په (3) ويشل کيږي.

لکه 11124 ، 1032 ، 11508 او داسې نور.

3- په (4) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقمونه صفرونه وه يا داسې دوه عددونه وي چې په څلورو ويشل کيږي. نو دا ټول په څلور ويشل کيږي . لکه 300 ، 712 ، 520 ، 316 ، 316 ، 728 او داسې نور.

4- په 5 باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقم صفر يا 5 وي دا عدد په 5 ويشل کيږي لکه 310 ، 715 او داسې نور.

5- په (6) باندې د ويش قابليت :که يو عدد په 2 او 3 ويشل کيدلو دا عدد په (6) هم ويشل کيږي لکه 312 ، 414 ، 276 ، 1308 او داسې نور.

6- په (7) باندې د ويش قابليت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوی دوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوؤ که په اخر کې صفر يا داسې عدد پلاس راغی چې په (7) ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په (7) ويشل کيږي.

لکه: 359156 په 7 ويشل کيږي او که نه:

```
359156
    12
------
 35903
     6
------
  3584
     8
------
   350
```

ketabton.com - The Digital Library

څرنګه چې 350 په 7 ویشل کیږي نو راکړ شوی عدد هم په 7 ویشل کیږی.

7- په (8) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد درې لمړي رقمونه صفرونه وه یا داسې درې عددونه وه چې په 8 ویشل کیدل نو دا ټول عدد په (8) ویشل کیږي.

لکه 11000 ، 13832 ، 15168 او داسې نور.

8- په (9) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد د رقمو مجموعه په (9) ویشل کیداله نو دا عدد په 9 ویشل کیږي.

لکه 1115 ، 11385 ، 591102 او داسې نور.

9- په 10 باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد لمړی صفر وي په (10) ویشل کیږي لکه 1150 ، 210 او داسې نور.

10- په 11 باندې د ویش قابلیت: د طاق مرتبو رقمونه بیل جمع کوو او د جفت مرتبو رقمونه بیل جمع کوو یو دبل څخه یې منفي کوو که د تفریق حاصل صفر یا داسې عدد شو چې په 11 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 11 ویشل کیږی.

لکه : 558998

11- په 12 باندې د ویش قابلیت: که یو عدد په 3 او 4 ویش کیدلو دا عدد په 12 هم ویشل کیږی لکه 8016

12- په 13 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو څلور چنده یې د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 13 ویشل کیدلو نو راکړ شوي عدد هم په 13 ویشل کیږی.

لکه 593814 ، 739622 او داسې نور.

13- په 17 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شو 5 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب تر اخره عملیې ته ادامه ورکوو که په اخرکی صفر یا داسې یو عدد لاس ته راغی چې په 17 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 17 ویشل کیږي.

لکه 77673 ، 96713 او داسې نور.

ketabton.com - The Digital Library


14- په 19 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي دوه چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغې چې په 19 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 19 ويشل کيږي.لکه (871701) اوداسې نور.

15- په 23 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي اوه چنده د متباقي سره جمع کوو عمليې ته په همدې ډول ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 23 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 23 ويشل کيږي.

لکه 10510701 ، 1308562 او داسې نور.

16- په 29 باندې د ويش قابليت: لمړی رقم حذفوو حذف شوي دري چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 29 ويشل کيدلو نو راکړ شوی عدد هم په 29 ويشل کيږي.

لکه 1324923 ، 13249288 او داسې نور.

17- په 31 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 3 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 31 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 31 ويشل کيږي لکه 1416297 ، 141422 او داسې نور.

18- په 37 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 11 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په په لاس راغی په 37 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 37 ويشل کيږي لکه 1690419 ، 210308 او داسې نور.

19- په 41 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي څلور چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عمليې ته تر اخره ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 41 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 41 باندې ويشل کيږي.

لکه 1855988 ، 23160039 او داسې نور.

ketabton.com - The Digital Library

20- په 43 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 13 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې په لاس راغلي عدد په 43 ویشل کیدلو نو ټول عدد په 43 ویشل کیږي.

لکه 2526078 ، 2531109 او داسې نور.

21- په 47 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 14 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عملیې ته ادامه ورکوو که اخرني عدد صفر یا داسې یو عدد شو چې په 47 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 47 ویشل کیږي.

لکه 2462048 ، 3766628 او داسې نور.

22- په 53 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 16 د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغي چې په 53 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 53 ویشل کیږي لکه 24220311 ، 13383825 او داسې نور.

23- په 59 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د پاتې عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 59 ویشل کېدلو نو راکړ شوی عدد په 59 ویشل کیږي لکه 26962233 ، 5166158 او داسې نور.

24- په 61 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په 61 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 61 ویشل کیږي.

لکه 397964 ، 3347192 او داسې نور.

25- په 67 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 20 چنده د پاتې عدد څخه منفي کوو که په اخر کې داسې عدد لاس ته راغلي چې په 67 ویشل کیدلو او یا صفر ؤ نو دا عدد په 67 ویشل کیږي.

لکه 30618129 ، 36648129 او داسې نور.

ketabton.com - The Digital Library


26- په 71 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو حذف شوي اوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که د عملیې په اخر کې که صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 71 ویشل کیږي نو دا ټول په 71 ویشل کیږي.

لکه 3243919 ، 3719477 او داسې نور.

27- په 73 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 22 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که د عملیې په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 73 ویشل کیدلو نو راکړ شوي عدد په 73 ویشل کیږي.

لکه 333537 ، 42921372 او داسې نور.

28- په 79 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 8 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که د عملیې په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغي چې په 79 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 79 ویشل کیږي.

20066 ، 67828215 او داسې نور.

29- په 83 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 25 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو عملیه تر اخره اجراء کوو که اخرني عدد په 83 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 83 ویشل کیږي.

لکه 629638 ، 379144 او داسې نور.

30- په 89 باندې د ویش قابلیت : لمړی رقم حذفوو د حذف شوي (9) چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 89 ویشل کیدلو نو راکړ شوي عدد هم په 89 ویشل کیږي.

لکه 406107 ، 6990594 او داسې نور.

31- په 97 باندې د تقسیم قابلیت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 29 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عملیه تر اجره اجراء کوو که اخرني عدد صفر شو او یا داسې یو عدد شو چې په 97 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد بعضي راکړ شوي عدد په 97 ویشل کیږي.

لکه 530396 ، 5127808 او داسې نور.

ketabton.com - The Digital Library


## د عام کسر څلور ګوني عملیې

### 1- د عام کسر جمع او تفریق :

د څو کسرو د جمع کولو او تفریقولو لپاره لمړی مخرج مشترک پیدا کوو مخرج مشترک د هر کسر په مخرج ویشو د هغه کسر په صورت کې یې ضربوو د مخرج مشترک پر سر یې لیکو د جمع په سوال کې د جمع علامه لیکو .او د تفریق په سوال کې د تفریق علامه لیکو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو بالاخره د کسرونو د جمع حاصل یا د تفریق حاصل لاس ته راځي.

خو د مخرج مشترک د پیدا کولو لپاره د مخرجو پیژندل ضرور دي.

مخرجونه په څلور قسمه دي.

1- متماثل مخرجونه : مساوي مخرجو ته متماثل مخرجونه وایي.

$$4\frac{5}{9}+3\frac{7}{9}+8\frac{8}{9}$$

$$\frac{41}{9}+\frac{34}{9}+\frac{80}{9}=\frac{41+34+80}{9}=\frac{155}{9}=17\frac{2}{9}$$

$$\begin{array}{r|l} 155 & 9 \\ \underline{9} & 17 \\ 65 & \\ \underline{63} & \\ 2 & \end{array}$$

$$19\frac{3}{5}-8\frac{4}{5}$$

$$\frac{98}{5}-\frac{44}{5}=\frac{98-44}{5}=\frac{54}{5}=10\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 5 \\ \underline{5} & 10 \\ 4 & \end{array}$$

2- متداخل مخرجونه : هغه مخرجونه دي چې لوي مخرج په کوچني مخرج پوره تقسیم شي لکه:

$$5\frac{7}{12}+8\frac{3}{4}+7\frac{5}{6}+8\frac{1}{2}$$

ketabton.com - The Digital Library



مخرج مشترک يې لوی مخرج دی.

$$\frac{67}{12}+\frac{35}{4}+\frac{47}{6}+\frac{17}{2}=\frac{67+105+94+102}{12}=\frac{368}{12}$$

$$30\frac{8}{12}=30\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 368 & 12 \\ \underline{36} & 30 \\ 8 & \end{array}$$

$$11\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}$$

$$\frac{93}{8}-\frac{19}{4}=\frac{93-38}{8}=\frac{55}{8}=6\frac{7}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 8 \\ \underline{48} & 6 \\ 7 & \end{array}$$

3- **متوافق مخرجونه** : هغه مخرجونه دي چې ټول په يوه عدد ويشل کيږي لکه $8\frac{5}{9}+7\frac{5}{6}$

مخرج مشترک يې په ذو اضعاف اقل پيدا کيږي.

$$15\frac{5}{6}-7\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 97 & 12 \\ \underline{96} & 8 \\ 1 & \end{array}$$

$$2\Big)\ \frac{95}{6}+\frac{31}{4}=\frac{190-93}{12}=\frac{97}{12}=8\frac{1}{12}$$

$$3 \quad 2$$

4- **متباين مخرجونه** : هغه مخرجونه دي چې نه متماثل وي نه متداخل وي او نه متوافق وي لکه

$$9\frac{2}{3}+7\frac{3}{4}+7\frac{2}{5}$$

مخرج مشترک يې په حاصل ضرب پيدا کيږي.

ketabton.com - The Digital Library


$$\frac{29}{3}+\frac{31}{4}+\frac{37}{5}=\frac{580+456+444}{60}=\frac{1480}{60}=24\frac{40}{60}=24\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 1480 & 60 \\ \underline{120} & 24 \\ 280 & \\ \underline{240} & \\ 40 & \end{array}$$

$$19\frac{1}{2}-8\frac{2}{3}$$

$$\frac{39}{2}-\frac{26}{3}=\frac{117-52}{6}=\frac{65}{6}=10\frac{5}{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 65 & 6 \\ \underline{6} & 10 \\ 5 & \end{array}$$

تمرین :

لاندې سوالونه حل کړئ

1. $9\frac{4}{11}+8\frac{5}{11}+4\frac{7}{11}$
2. $12\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
3. $9\frac{5}{6}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
4. $14\frac{5}{8}-7\frac{1}{2}$
5. $6\frac{2}{9}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
6. $8\frac{1}{4}-3\frac{5}{6}$

2- د عام کسر ضرب:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو يې بيا صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

$-9\frac{2}{3}\times5\frac{1}{4}$ I

ketabton.com - The Digital Library


$$\frac{29}{3} \times \frac{21}{4} = \frac{29 \times 21}{3 \times 4} = \frac{609}{12} = 50\frac{9}{12} = 50\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 609 & 12 \\ \underline{60} & 50 \\ 9 & \end{array}$$

تمرین:

لاندې سوالونه حل کړئ؟

1- $12\frac{3}{4} \times 8\frac{7}{9}$

2- $6\frac{1}{8} \times \frac{11}{13}$

3- $2 \times 4\frac{3}{4}$

4- $6\frac{1}{8} \times 7$

3- د عام کسر تقسیم:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو یې بیا د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوو.

1- $19\frac{1}{2} \div 3\frac{1}{8}$

$$\frac{39}{2} \div \frac{25}{8} = \frac{39}{2} \times \frac{8}{25} = \frac{312}{50} = 6\frac{12}{50} = 6\frac{6}{25}$$

$$\begin{array}{r|l} 312 & 50 \\ \underline{300} & 6 \\ 12 & \end{array}$$

2- $8\frac{1}{4} \div \frac{2}{3}$

$$\frac{33}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{99}{8} = 12\frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 99 & 8 \\ \underline{8} & 12 \\ 19 & \\ \underline{16} & \\ 3 & \end{array}$$

ketabton.com - The Digital Library



$15\frac{4}{9} \div 3$ -3

$$\frac{139}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{139}{27} = 5\frac{4}{27}$$

$$\begin{array}{r|l} 139 & 27 \\ \underline{135} & 5 \\ 4 & \end{array}$$

$8 \div \frac{1}{2} = 8 \times \frac{2}{1} = 16$ -4

**تمرین:**

$20\frac{2}{3} \div 8\frac{5}{6}$ -1

$41\frac{2}{5} \div 3\frac{1}{5}$ -2

$16\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ -3

$111 \div 1\frac{1}{2}$ -4

$14\frac{1}{5} \div \frac{2}{3}$ -5

**کسر الکسر یا مرکب کسر:**

هغه کسر دی چې په صورت یا مخرج او یا په دواړو کې یې کسر وي.

لکه:

$$\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}} \text{ ، } \frac{5}{\frac{3}{4}} \text{ یا } \frac{\frac{2}{3}}{7}$$

که د یوه کسر په صورت یا مخرج کې کسر نه وي نو مخرج یې یو دی.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}$$

ketabton.com - The Digital Library



د کسر الکسر د ساده کولو لپاره د طرفینو حاصل ضرب په صورت کې او د وسطینو حاصل ضرب په مخرج کې لیکو.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}=\frac{1\times 2}{3\times 7}=\frac{2}{21}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\times 5}{3\times 1}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}=\frac{7\times 13}{8\times 11}=\frac{91}{88}$$

هغه کسرچه صورت او مخرج لري ساده کسر ورته وایې.

لکه: $\frac{2}{3}$

تمرین: لاندې کسرونه ساده کړئ؟

-1 $\frac{\frac{6}{11}}{\frac{9}{22}}$

-2 $\frac{9\frac{1}{8}+5\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}}$

-3 $\frac{11\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}}{4\frac{1}{5}}$

-4 $\frac{4\frac{1}{2}\times 6\frac{1}{2}}{9\frac{1}{4}\div 2\frac{1}{3}}$

-5 $\frac{6+7\frac{1}{2}}{9-3\frac{1}{4}}$

-6 $\frac{\frac{2}{3}\div\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\div\frac{1}{4}}$

ketabton.com - The Digital Library


## د کسرونو تبادله:

### 1- د عام کسر بدلول په اعشار کسر:

صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{4}{5}$ عام کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

```
 40   | 5
 40   |0.8
----
  4
```

مثال: $\frac{1}{6}$ اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$

```
 10   | 6
  6   |0.16
----
 40
 36
----
  4
```

مثال: $\frac{3}{8}$ کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

```
 30   | 8
 24   |0.375
----
 60
 56
----
  40
  40
----
  xx
```

### 2- د اعشار کسر بدلول په عام کسر:

د اعشاري رقمو لاندي خط کشوو بیا د اعشاري رقمو په عوض خط لاندي صفرونه ږدو او د اعشاریي د علامي په عوض یو لیکو او اختصار وؤ یي.

ketabton.com - The Digital Library



1- مثال: 0.375 په عام کسر بدل کړئ.

$$\frac{0.375}{1000}=\frac{\overset{\overset{\overset{3}{\cancel{15}}}{\cancel{75}}}{\cancel{375}}}{\underset{\underset{\underset{8}{\cancel{40}}}{\cancel{200}}}{\cancel{1000}}}=\frac{3}{8}$$

2- مثال: $0.\overline{3}$ په عام کسر بدل کړئ؟

حل: پوهیږو چې دا اعشار د $\frac{1}{3}$ عام کسر څخه جوړ شویدی د 0.3 لاندې خط کشوو بیا صورت او مخرج د $\frac{1}{3}$ د کسر په مخرج کې ضربوو او د صورت سره باقي جمع کوو.

$$\frac{0.3}{10}=\frac{3\times3+1}{10\times3}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

یا دا چه د متوالي عدد لاندې 9 لیکو

$$\frac{0.3}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

مثال: $0.1\overline{6}$ عام کسر ته واړوئ؟

$$\frac{0.16}{100}=\frac{16\times6+4}{100\times6}=\frac{96+4}{600}=\frac{100}{600}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{0.16}{90}=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$$

تمرین:

1- اعشار کسر ته یې واړوئ؟

1- $\frac{4}{7}$ 2- $\frac{3}{5}$ 3- $\frac{7}{8}$ 4- $\frac{5}{6}$ 5- $\frac{11}{15}$

2- عام کسر ته یې واړوئ؟

1- $0.\overline{27}$ 2- $0.7\overline{3}$ 3- $0.95\overline{45}$ 4- $0.4\overline{6}$

5- $0.3\overline{8}$ 6- $0.4\overline{16}$ 7- $0.9\overline{1}$ 8- $0.\overline{814}$

ketabton.com - The Digital Library


عبارتي سوالونه:

1- احمد د يوې هنداونې $\frac{3}{7}$ برخه واخیسته پاتې شوې برخه یې پیدا کړئ؟

2- د تیلو د ټانک $\frac{7}{9}$ برخه ډکه ده که د $200li$ ګنجایش ولري وواياست په ټانک کې به ټول تیل څومره وي؟

3- د غوړيو د بيلر $\frac{2}{5}$ برخه د غوړيو څخه ډکه ده د ډکې برخې دريمه برخه يې $30kg$ ده د بيلر ګنجايش څو دی؟

4- احمد د $\frac{1}{2}$200 روپيو بوره د $\frac{1}{4}$300 روپۍ يې چای د $\frac{3}{4}$700 روپۍ غوښه $\frac{1}{2}$30 روپۍ يې مالګه او اورلګيت واخيست که د نوموړي تنخوا 2000 روپۍ وي وواياست چې څو روپۍ ور پاته دي؟

5- امين $10\frac{1}{2}kg$ غوښه واخيسته که غوښه کيلو ګرام په $\frac{1}{4}$300 روپۍ وي وواياست چې قصاب څو روپۍ ور څخه اخيستي دي؟

6- چای خرڅوونکی د چايو يو پيټی چې $50kg$ چای پکې دی خلاصه کړه احمد ته $2\frac{3}{4}kg$ چای عمود ته يې $3\frac{1}{4}kg$ چای او يو دکاندار ورڅخه $\frac{1}{4}$20 کيلو ګارم چای واخيستی دوست چې په پيټی کې څومره چای پاتې دی؟

ketabton.com - The Digital Library



# دريم فصل

## طاقت، تجزيه او جذر

### طاقت لرونکی عددونه :

هغه عددونه دي چې څو واره په خپل ځان کې ضرب شوي وي.

لکه:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

هغه عدد چې په خپل ځان کې ضربيږي د طاقت لرونکي عدد قاعده ورته وايي او د ضربيدو کرتو ته توان وايي.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

### د طاقت قوانين:

1- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي . د قاعدوڅخه يوه قاعده ليکو او توانونه يې جمع کوو.

$$2^3 \times 2^5 \times 2^7 \times 2 = 2^{3+5+7+1} = 2^{16}$$

2- که څو طاقت لروکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مختلفي او توانونه يې مساوي وي قاعدې سره ضربوو او د توانو څخه يو توان راخلو.

$$2^7 \times 3^7 \times 5^7 = (2 \times 3 \times 5)^7 = 30^7$$

3- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي د قاعدو څخه يوه قاعده ليکو او توانونه يې منفي کوو.

$$\frac{7^{11}}{7^5} = 7^{11-5} = 7^6$$

4- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مختلفي او توانونه يې مساوي وي قاعدې يې يو پر بل ليکو او د توانو څخه يو توان راخلو.

1- $\frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5$

ketabton.com - The Digital Library

2- $\frac{16^7}{12^7} = (\frac{16}{12})^7 = (\frac{4}{3})^7$

3- $\frac{5^8}{3^8} = (\frac{5}{3})^8$

5- که یو طاقت لرونکی عدد په بل توان رفع شي توانونه یې ضربیږي.

$$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12}$$

6- هر عدد په توان د صفر یو کیږي.

$\{(5^3)^7\}^0 = 5^0 = 1$

$5^0 = 1$

$\frac{5^3}{5^3} = 1 \dots\dots\dots I$

$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \dots\dots\dots II$

د $I$ او $II$ رابطو چپ طرفونه مساوي دی نو ښي طرفونه یې هم مساوي دي. یعني $5^0 = 1$ کیږي.

2- که یو طاقت لرونکی عدد د صورت څخه مخرج ته یاد مخرج څخه صورت ته ویوړل شي د توان علامه یې تغیر خوري.

$2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$

$3^{-7} = \frac{1}{3^7}$

$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

$\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$

د $2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$ ثبوت:

$$2^5 = \frac{2^5 \times 2^{-5}}{2^{-5}} = \frac{2^0}{2^{-5}} = \frac{1}{2^{-5}}$$

د $\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$ ثبوت:

$$\frac{1}{4^{-6}} = \frac{1 \times 4^6}{4^{-6} \times 4^6} = \frac{4^6}{4^0} = \frac{4^6}{1} = 4^6$$

ketabton.com - The Digital Library


## تجزیه :

تجزیه په لغت کې ټوټه ټوټه کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه مرکب عدد د ضربي عواملو د پیدا کولو طریقې ته تجزیه وایي.

## د تجزیې طریقه:

عدد لیکو خط یې لاندې کشوو چپې خواته یې عمودي خط رسموو د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد لیکو چې د راکړ شوي عدد په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي. راکړ شوی پدې لمړني عدد ویشو حاصل یې د خط لاندې لیکو په همدې ترتیب عملیې ته تر هغه وخته پورې ادامه ورکوؤ تر څو چې د عدد په ستون کې یو لاس ته راشي. د عمودي خط د چپې خوا عددونه د راکړ شوي عدد ضربي عوامل دي.

| | |
|---|---|
| 2 | 450 |
| 3 | 225 |
| 3 | 75 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

د 55125 تجزیه کړئ؟

| | |
|---|---|
| 3 | 55125 |
| 3 | 18375 |
| 5 | 6125 |
| 5 | 1225 |
| 5 | 245 |
| 7 | 49 |
| 7 | 7 |
| | 1 |

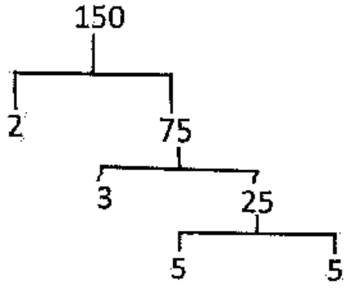
$$55125 = 3^2 \times 5^3 \times 7^2$$

ketabton.com - The Digital Library

## د دیا ګرام په طریقه د یوه عدد تجزیه کول:

عدد لیکو په دوه برخو یې داسې ویشو چه یو یې لمړنی عدد او بل یې مرکب عدد وي مرکب عدد بیا په دوه برخو ویشو په همدې ډول دمرکب عدد ضربي عوامل لاس ته راځي.

مثال: 150 د دیاګرام په طریقه تجزیه کړئ؟




$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

## د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو عددو د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم:دڅوعددولوی مشتر ک قاسم هغه عدد دی چې ترهغه په بل لوی عددباندې دا عددونه تقسیم نه شي.

لکه د 150 او 210 لوی مشترک قاسم 30 دی ځکه چې 150 او 210 تر 30 په بل غټ عدد نه ویشل کیږي.

کوچني مشترک مضرب: د څو عددو کوچنی مشترک مضرب هغه عدد دی چې تر هغه بل کوچنی عدد په دې عددو باندې تقسیم نه شي.

لکه 150 او 210 کوچنی مشترک مضرب 1050 دی. ځکه چې تر 1050 بل کوچنی عدد نشته چې په 150 او 210 باندې وویشل شي.

ketabton.com - The Digital Library



## د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه تجزیه کوو په ضربي عواملو کې يې مشترک او غير مشترک پيدا کوو په مشترکو ضربي عواملو کې د کوچني توان والاضربي عوامل راخلو ضربوويي لوی مشترک قاسم لاس ته راځي.

او که په مشترکو ضربي عواملو کې د لوړ توان والاضربي او غير مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي

مثال: 150 او 210 لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پيدا کړئ؟

| | |
|---|---|
| 2 | 150 |
| 3 | 75 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| 2 | 210 |
| 3 | 105 |
| 5 | 35 |
| 7 | 7 |
| | 1 |

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$
$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2 \times 3 \times 5 = 30$$
$$L.C.M = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050$$

2- د 660 او 840 لوی مشترک قاسم (G.C.D) او کوچنی مشترک مضرب (L.C.M) پیدا کړئ؟

| | |
|---|---|
| 2 | 660 |
| 2 | 330 |
| 3 | 165 |
| 5 | 55 |
| 11 | 11 |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| 2 | 840 |
| 2 | 420 |
| 2 | 210 |
| 3 | 105 |
| 5 | 35 |
| 7 | 7 |
| | 1 |

$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$
$$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$
$$L.C.M = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$$

ketabton.com - The Digital Library

تمرین :

د لاندې عددونو لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1- 630 او 450

2- 780 او 540

3- 960 او 660

5- 1440 او 1260

## د اقلیدس په طریقه د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

لوی عدد په کوچني عدد ویشو که د تقسیم عملیه باقي وکړي مقسوم علیه په باقي ویشو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو کله چې باقي صفر شي اخرنی مقسوم علیه لوی مشترک قاسم دی

مثال: د 1080 او 780 لوی مشترک قسام او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس به طریقه پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 1080 & 780 \\ \underline{780} & 1 \\ 300 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 780 & 300 \\ \underline{600} & 2 \\ 180 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 300 & 180 \\ \underline{180} & 1 \\ 120 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 120 \\ \underline{120} & 1 \\ 60 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 60 \\ \underline{120} & 2 \end{array}$$

$$G.C.D = 60$$

عددونه سره ضربوو په لوی مشترک قاسم یې ویشو $L.C.M$ لاس ته راځي.

$$L.C.M = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{G.C.D}$$

$$G.C.D = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{L.C.M}$$

ketabton.com - The Digital Library



د راکړ شوي سوال $L.C.M$ په لاندې ډول پیدا کوؤ.

$$L.C.M = \frac{\overset{13}{780} \times 1080}{\underset{1}{60}} = 13 \times 1080 = 14040$$

$$L.C.M = 1404$$

## په یوه جدول کې د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه په یوه کرښه کې لیکو خط ور لاندې کشوو چپې خواته یې عمودي خط رسموؤ د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد لیکو چې د دوي په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي راکړ شوي عددونه په دغه لمړني عدد ویشو حاصل یې د خط لاندې لیکو تر هغو پورې عملیې ته ادامه ورکوو تر څو چې ټول په یوه عدد ویشل کیږي د عملیې په اخر کې که د عمودي خط د چپې خوا عددونه ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي. او که د افقي خط لاندې عددونه هم پکې ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د 780 او 1080 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 780 | 1080 |
| 2 | 390 | 540 |
| 3 | 195 | 270 |
| 5 | 65 | 90 |
| | 13 | 18 |

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 60 \times 13 \times 18 = 14040$$

تمرین:

د لاندې عددونه لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس په طریقه پیدا کړئ؟

1- 1350 او 750

2- 930 او 870

3- 540 او 420

4- 900 او 720

ketabton.com - The Digital Library

د لاندې عددونو کوچنی مضرب او لوی مشترک قاسم په یوه جدول کې پیدا کړئ؟

1- 960 او 1530

2- 210 او 180 او 150

3- 225 او 135 او 120

4- 240 او 330 او 90

جذر :

جذر په لغت کې ولې، ريښه يا جرړې ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه عدد جذر هغه عدد دی چې د جذر په درجه رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي لکه که $\sqrt[n]{a} = b$ وي

نو $b^n = a$ کيږي.

د يو عدد دويم جذر : هغه عدد دی چې د (2) په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي . لکه:

1- $\sqrt{64} = 8$
$8^2 = 64$
2- $\sqrt{169} = 13$
$13^2 = 169$

د يو عدد دريم جذر:

هغه عدد دی چې د درې په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد په لاس راشي لکه که

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

نو $64 = 4^3$ کيږي.

ددويم جذرپيدا کول:

ديوه عدد دويم جذر په دوه طريقو پيدا کيږي.

1- د تجزيې پواسطه    2- په عمومي طريقه

ketabton.com - The Digital Library



## 1- د تجزيي پواسطه د يوه عدد د دويم جذر پيدا كول:

عدد تجزيه كوو په مساوي ضربي عواملو كې دوه ، دوه جوړه كوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو او ضربوو يې د هغه عدد دويم جذر لاس ته راځي.

1- مثال: د (324) دويم جذر پيدا كړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 324 |
| | 2 | 162 |
| 3 | 3 | 81 |
| | 3 | 27 |
| 3 | 3 | 9 |
| | 3 | 3 |
| | | 1 |

$$324 = 2 \times 3^2$$

د يوه عدد د دريم جذر پيداكول په

عدد تجزيه كوو مساوي ضربي عوامل ئي درې،درې جوړه كوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو ضربوو يې د هغه عدد دريم جذر لاس ته راځي.

مثال: د (1000) دريم جذر پيدا كړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 1000 |
| | 2 | 500 |
| | 2 | 250 |
| 5 | 5 | 125 |
| | 5 | 25 |
| | 5 | 5 |
| | | 1 |

$$\sqrt[3]{1000} = 2 \times 5 = 10$$

ketabton.com - The Digital Library

### د یو عدد څلورم جذر:

عدد تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل څلور څلور جوړه کوؤ، د هرې جوړې څخه یو عدد راخلو او ضربوو د هغه عدد څلورم جذر لاس ته راځي.

مثال: 1296 څلورم جذر پیدا کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 1296 |
| | 2 | 648 |
| | 2 | 324 |
| | 2 | 162 |
| 3 | 3 | 81 |
| | 3 | 27 |
| | 3 | 9 |
| | 3 | 3 |
| | | 1 |

$$\sqrt[4]{1296} = 2 \times 3 = 6$$

نوټ: په همدغه ډول د تجزیې پواسطه ، پنځم ، شپږم او نور جذرونه پیدا کولای شو.

### 2- په عمومي ډول د یوه عدد د دویم جذر پیدا کول:

عدد لیکو ښی خواته یې د تقسیم علامه او چپې خواته یې یو عمودي خط رسموؤ بیا د عدد د ښی خوا څخه دوه ، دوه مرتبې جوړه کوؤ اخر ته به هم یادوه مرتبې جوړه شي او یا به یوه مرتبه یواځې پاتې شي په دواړه حالتو کې یو داسې عدد پیدا کوو چې په خپل ځان کې ضرب شي او دغه عدد پوره کړي او یا لږ کم شي دا عدد د تقسیم د علامې په سر او د عمودي خط چپې خواته لیکو او سره ضربوو یې د ضرب حاصل د راکړ شوي عدد د اخرني جوړې یا اخرنی عدد لاندې لیکو منفي کوو یې د تفریق د حاصل مخې ته دوه رقمونه کښته او د مقسوم په څیر یې استعمالوو د عمودي خط د چپې خوا عدد دوه چنده کوو او د مقسوم علیه کار ور څخه اخلو مقسوم په مقسوم علیه ویشو حاصل یې د خارج قسمت د مخکینې عدد مخې ته او د عمودي خط د چپې د خوا د عدد مخې ته لیکو. په خارج قسمت کې دغه نوی عدد د عمودي خط د چپې خوا ته په ټول عدد کې ضربوو د ضرب حاصل یې د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو د

ketabton.com - The Digital Library


تفریق د حاصل مخې دوه نور رقمونه راکښته کوو د عمودي خط د چپې نوی رقم دوه چند کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو که عملیې باقي ونکړل د تقسیم د عملیې پر سر عدد د راکړ شوي عدد دویم جذر دی. که عملیې باقي وکړل د تفریق د حاصل مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاریه پورته کوو.

$$\sqrt{209764} = 458$$

$$\begin{array}{r|l|l} 4 & \overset{\frown}{20}\;\overset{\frown}{97}\;\overset{\frown}{64} & 458 \\ 85 & \underline{16} & \\ 805 & \;\;497 & \\ & \;\;\underline{425} & \\ & \;\;\;7264 & \\ & \;\;\;\underline{7264} & \\ & \;\;\;xxxx & \end{array}$$

$$\sqrt{502681} = 709$$

$$\begin{array}{r|l|l} 7 & \overset{\frown}{50}\;\overset{\frown}{26}\;\overset{\frown}{81} & 709 \\ 1409 & \underline{49} & \\ & \;12681 & \\ & \;\underline{12681} & \\ & \;\;xxxx & \end{array}$$

تمرین:

د لاندې عددونو دویم جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

1- $\sqrt{298116} = ?$
2- $\sqrt{318096} = ?$
3- $\sqrt{734449} = ?$
4- $\sqrt{2047.5625} = ?$
5- $\sqrt{5484.8836} = ?$

## تقریبي جذر :

که د یوه عدد جذر په خپل ځان کې ضرب شي د ضرب حاصل یې هغه عدد پوره نکړي چې جذر یې نیول شویدی نو دغه جذر ته تقریبي جذر وایي د یوه عدد تقریبي جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- په عمومي طریقه    2- د اوسط په طریقه

ketabton.com - The Digital Library


1- په عمومي طريقه:

د عدد جذر په عمومي طريقه پيدا کوؤ که باقي يې وکړل د باقي مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاريه پورته کوو او د جذر عمليې ته ادامه ورکوو پلاس راغلي جذر ته تقريبي جذر وايي.

مثال: د 128968 جذر پيدا کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 128968 | 359.1 |
| 65 | 9 | |
| 709 | 389 | |
| 7169 | 325 | |
| | 6468 | |
| | 6381 | |
| | 8600 | |
| | 7169 | |
| | باقي 1431 | |

359.1 د 128968 تقريبي جذر دی.

2- د اوسط په طريقه:

د کوچنيو عددونو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کيږي طريقه يې داسې ده د راکړ شوي عدد څخه لاندې باندې دوه داسې عددونه پيدا کوو چې پوره جذر ولري جذرونه يې جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې مربع کوو که مربع يې کوچنی عدد ته نژدې ؤ نو جذر يې د کوچني عدد د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې د راکړ شوي عدد تقريبي جذر دی.

مثال: د 5 تقريبي جذر پيدا کړئ؟

حل: د 5 څخه لاندې هغه عدد چې پوره جذر لري 4 دی چې جذر يې 2 دی د 5 څخه پورته عدد چې پوره جذر لري 9 دی او جذر يې دري (3) دی 2 او 3 جمع کوو او اوسط يې پيداکوو $2.5 = \frac{5}{2} = \frac{2+3}{2}$ اوسط يې 2.5 دی 2.5 مربع کوو مربع يې 6.25 ده 6.25 د 9 څخه 4 ته نژدې ده نو د 6.25 جذر د 4 د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو.

ketabton.com - The Digital Library



$$\frac{2.5+2}{2}=\frac{4.5}{2}=2.25$$

2.25 د 5 تقريبي جذر دی.

نوټ: د 5 او 6 تقريبي 2.25جذر دی د 7 او 8 تقريبي جذر 2.75 دی.

## د اعشاري عدد دويم جذر پيدا کول:

صحيح عدد يې د ښی خوا څخه دوه دوه مرتبې جوړه کوو او اعشاري رقمونه يې د چيپ خوا څخه دوه دوه جوړه کوو که اعشاري رقمونه يې طاق وي مخې ته يو صفر ږدو. کله چې د اعشار يې د علامې څخه اوړو اعشاريه خارج قسمت ته وړو.

مثال: 903.6036 دويم جذر پيدا کړئ؟

```
   3   |  9 03.6036   | 30.06
 6006  |  9           |
       |  036036
           36036
          xxxxx
```

تمرين:

لاندې عددو تقريبي جذر په عمومي طريقه پيدا کړئ؟

4716 -1　　35811 -2　　7504-3　　9814 -4　　6763 -5

2- د لاندې عددو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کړئ؟

11 -1　　13 -2　　19 -3　　29 -4　　34-5

3- د لاندې اعشاري عدد دويم جذرپيدا کړئ؟

457.96 -1　　1229.9049 -2　　337444.81 -3　　48830.25 -4

2605.0816 -5　　64.048009 -6　　2711.2849 -7

ketabton.com - The Digital Library

## د جذر قوانین:

1- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مساوي او د جذر درجې یې مختلفې وي. که وغواړو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو په طاقت لرونکو عددو یې بدلووو طاقت قوانین پرې تطبیقوو اخري عدد بیرته تر جذر لاندې کوو.

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = 2^{\frac{15+10+6}{30}} = 2^{\frac{31}{30}} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

2- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مختلف او د جذر درجې یې مساوي وي. د طاقت د قوانینو سره سم کولای شو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو.

$$\sqrt[7]{2} \times \sqrt[7]{3} \times \sqrt[7]{5} = \sqrt[7]{2 \times 3 \times 5} = \sqrt[7]{30}$$

$$2^{\frac{1}{7}} \times 3^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{1}{7}} = (2 \times 3 \times 5)^{\frac{1}{7}} = 30^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{30}$$

3-که دوه جذري عددونه د تقسیم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مساوي او د جذر درجې یې مختلفې وي د طاقت د قوانینو په اساس کولای شو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \sqrt[35]{5^4}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{7}}} = 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}} = 5^{\frac{7-3}{21}} = 5^{\frac{4}{21}} = \sqrt[21]{5^4}$$

4- که دوه جذري عددونه تقسیم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مختلف او د جذر درجې یې مساوي وي د طاقت د قوانینو سر سم یې تر یوه جذر لاندې لیکو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

5- که جذري عدد د جذر په درجه رفع شي د جذر لاندې عدد لاس ته راځي

$$\left(\sqrt[7]{5}\right)^7 = 5$$

ketabton.com - The Digital Library



$$\left(\sqrt[7]{5}\right)^7 = \left(5^{\frac{1}{7}}\right)^7 = 5^{\frac{1}{7}\times\frac{7}{1}} = 5^{\frac{7}{7}} = 5^1 = 5$$

6- که یو عدد تر مختلفو جذرو لاندې وي د طاقت د قوانینو سره سم یې تر یوه جذر لاندې کوو.

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \sqrt[30]{2}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \left\{(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{2}$$

تمرین:

تر یوه جذر یې لاندې کړئ؟

1- $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[5]{3}$ 2- $\sqrt[7]{2}\times\sqrt[7]{3}\times\sqrt[7]{5}$ 3- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{2}}$

4- $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[6]{7}}$ 5- $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt{3}}}$

## د حسابي افادو د قیمت پیدا کول:

حسابي افاده: که په یوه حسابي جمله کې څو عملیې (جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم) او قوسونه طاقت او جذر موجود وي د دغسې افادې د قیمت د پیدا کولو لپاره لمړی طاقت او جذر د منځه وړو بیا قوسونه خلاصوو دریم قدم کې د ضرب او تقسیم عملیې او په اخر د جمع او تفریق عملیې اجراء کوو.

قوس: یو سمبول دی چې څو عددونه تر یوه حکم لاندې کوي قوسونه په درې قسمه دي.

1- کوچنې قوسونه چې شکل یې ( ) دی.

2- منځنی قوسونه چې شکل یې { } دی.

3- لوی قوسونه چې شکل یې [ ] دی.

مثال:

$$(8-11)(4-5)+8-2\div 2-11$$

ketabton.com - The Digital Library

$$-3(-1)+8-1-11$$
$$3+8-12$$
$$11-12=-1$$

## هم درجه کول:

که څو جذري عددونه د ضرب یا تقسیم په حال کی وي د جذر لاندې عددونه مختلفې او درجې یې هم مختلفې وي که وغواړو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو لمړی یې هم درجه کوو طریقه یې دا ده چې د ټولو جذرو درجې سره ضربوو چې د جذر عمومي درجه لاس ته راشي دا عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسیموو د همغه جذري عدد توان لاس ته راځي.

1- مثال: $\sqrt[5]{3}\times\sqrt{2}$ تر یوه جذر لاندې کړئ؟

حل: لمړی یې هم درجه کوو.

$$\sqrt[10]{2^5}\times\sqrt[10]{3^2}=\sqrt[10]{2^5\times3^2}=\sqrt[10]{32\times9}=\sqrt[10]{288}$$

2- $\frac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt{3}}$ هم درجه یې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[14]{2^2}}{\sqrt[14]{3^7}}=\sqrt[14]{\frac{2^2}{3^7}}$$

تمرین: هم درجه یې کړئ؟

1- $\sqrt[3]{3}\times\sqrt{2}$ 2- $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2}$ 3- $\sqrt[3]{4\times}\sqrt[4]{5}$ 4- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

5- $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{5}}$ 6- $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$

## د جذري عددونو جمع کول او تفریقول:

همغه جذري عددونه جمع کولای او تفریقولای شو چې د جذر لاندې عددونه مساوي وي او د جذر درجې یې هم مساوي وي.

مثال:

$$7\sqrt[3]{2}+11\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$$

ketabton.com - The Digital Library



$(7+11+6)\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$24\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$(24-15)\sqrt[3]{2}=9\sqrt[3]{2}$

-2 $5\sqrt{32}+7\sqrt{128}+5\sqrt{8}-20\sqrt{2}$ لازمي عمليې پرې اجراء کړئ؟

$5\sqrt{16\times 2}+7\sqrt{64\times 2}+5\sqrt{4\times 2}-20\sqrt{2}$

$5\times 4\sqrt{2}+7\times 8\sqrt{2}+5\times 2\sqrt{2}-20\sqrt{2}$

$(20+56+10-20)\sqrt{2}=66\sqrt{2}$

تمرين:

لاندې جذري عددونه جمع او تفريق کړئ؟

-1 $11\sqrt{5}+19\sqrt{5}+8\sqrt{5}-25\sqrt{5}$

-2 $\sqrt{128}+3\sqrt{8}-5\sqrt{32}$

-3 $13\sqrt{27}+5\sqrt{243}-20\sqrt{3}$

ګويا کول:

که د يوه کسر په صورت يا مخرج کې جذري حد يا عدد موجود وي کولای شو چې ګويا يې کړو. مګر مشهور په رياضي کې د مخرج ګويا کول دي د کسر د مخرج ګويا کول په حساب کې دوه حالتونه لري .

-1 چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې 2 وي لکه $\frac{5}{\sqrt{15}}$. صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوؤ.

$$\frac{5}{\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15^2}}=\frac{5\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

-2 چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې د (2) څخه ډېره وي لکه $\frac{3}{\sqrt[5]{12}}$ د دغه ډول کسرو د مخرجو د ګويا کول لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو د جذر د درجې او جذري عدد د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوؤ.

ketabton.com - The Digital Library


$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{2}{\sqrt[5]{12}\times\sqrt[5]{12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12\times12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12^5}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{12}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{\sqrt[5]{12^4}}{6}$$

تمرين: ګويا يې کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{6}}$ 2- $\frac{3}{\sqrt{12}}$ 3- $\frac{14}{\sqrt{7}}$ 4- $\frac{15}{\sqrt{5}}$ 5- $\frac{2}{\sqrt{2}}$

6- $\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt[4]{5}}$ 8- $\frac{12}{\sqrt[5]{3}}$ 9- $\frac{14}{\sqrt[5]{7}}$ 10- $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

## د اعدادو سيستمونه:

څرنګه چې په حساب کې 10 رقمونه ليکل شويدي نو له همدې کبله هغه عددونه چې په روزمره ژوند کې استعماليږي د 10 په قاعده د اعدادو سيستم او يا اعشاري سيستم بلل کيږي.

مثلاً 5918 يو عدد راکړ شويدی د دې د پاره چې معلوم کړو چې د دغه عدد قاعده معلومه کړو څرنګه چه رقمونه يې څلور دي نو راکړ شوي عدد څلور ځايه کوو او هر رقم په خپله مرتبه کې ليکو.

$$5918 + 5000 + 900 + 10 + 8$$

$$= 5\times10^3 + 9\times10^2 + 1\times10^1 + 8\times10^0$$

که ضريبونه څنګ په څنګ په ترتيب سره وليکل شي نو بيرته لمړنی عدد لاس ته راځي.

همدغه ډول که راکړ شوی عدد په مسلسله توګه په 10 وويشو او باقيات د تقسيم په مقابل کې د پاس څخه کښته خواته وليکو. او بيا دباقياتو د ستون رقمونه په افقي کرښه کې داسي وليکو چې د ستون د سر رقم يې په سر کې راشي. او نور رقمونه يې په ترتيب سره ورپسې وليکل شي بيرته راکړ شوی عدد لاس ته راځي.

ketabton.com - The Digital Library



| | | |
|---|---|---|
| 10 | 5918 | |
| 10 | 591 | 8 |
| 10 | 59 | 1 |
| 10 | 5 | 9 |
| | 0 | 5 |

$5918_{10} = 5918$

نو معلومه شوه چې په روزمره ژوند کې د مستعمل عددونو قاعده 10 ده په کمپیوتري معایناتو کې د امراضو د تشخیص لپاره دوه نور سیستمونه هم لیکل شویدي چې د 2 په قاعده د اعدادو سیستم او بل د 5 په قاعده د اعدادو سیستم دی

1- د 2 په قاعده د اعدادو سیستم:

که وغواړو چې یو عدد د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوو عدد په مسلسل ډول په (2) ویشو باقیات یې د تقسیم د عملیې په مقابل کی دپاس څخه کښته خواته لیکو که د باقیاتو د ستون رقمونه په افقي ډول ولیکل شي د (2) په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال:- 31 د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 31 | |
| 2 | 15 | 1 |
| 2 | 7 | 1 |
| 2 | 3 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 |

$31_{10} = 11111_2$

یا دا چې د طاقت د قوانینو څخه استفاده کوو.

$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$31 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^0$

$31_{10} = 11111_2$

د 2 د قاعدې اساسي رقمونه (2)دي چې عبارت له (0,1) څخه دی.

ketabton.com - The Digital Library

2- د 5 په قاعده د اعدادو سیستم:

عدد په مسلسل ډول په 5 ویشو د باقیاتو د ستون رقمونه په ترتیب سره په افقي کرښه کې لیکو د 5 په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال: 251 د 5 قاعدې ته واړوئ؟

حل:

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 251 | |
| 5 | 50 | 1 |
| 5 | 10 | 0 |
| 5 | 2 | 0 |
| | 0 | 2 |

$$251_{10} = 2001_5$$

$$251 = 2 \times 125 + 1$$

$$251 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0$$

$$251 = 2001_5$$

د 5 د قاعدې اساسي رقمونه 5 دي چې عبارت دي له 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0 څخه

تمرین:

لاندې عددونه د 2 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 33-1 | 47 -2 | 65 -3 |
| 77-4 | 71-5 | 97-6 |

لاندې عددونه د 5 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 211-1 | 314 -2 | 97 -3 |
| 86 -4 | 98 -5 | 101 -6 |

د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول:

د 2 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 2 په مختلفو رقمو کې ضربوو د 10 په قاعده مربوطه عدد لاس ته راځي.

ketabton.com - The Digital Library



مثال: $111011_2$ د 10 قاعدي ته واړوئ

$$1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$$

$$32+16+8+0+2+1=59$$

$$59_{10}=111011_2$$

## د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د يوه عدد اړول

د 5 د قاعدي د عدد ټول رقمونه په ترتيب سره د 5 په مختلفو طاقتو کې داسې ضربوو چې لمړی رقم په $5^0$ کې دريم رقم $5^1$ کې ....... په همدې ترتيب تر اخره ضربوو د ضرب حاصلونه يې جمع کوو د 10 د قاعدې مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: $32104_5$ د 10 قاعدې ته واړو.

$$3\times5^4+2\times5^3+1\times5^2+0\times5^1+4\times5^0$$

$$3\times625+2\times125+1\times25+0\times5+4\times1$$

$$1875+250+25+0+4=2154$$

تمرين:

لاندې عددونه د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- $101111_2$ 2- $111011_2$ 3- $111111_2$

4- $1010001_2$ 5- $100011_2$

لاندې عددونه د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- $231_5$ 2- $341_5$ 3- $423_5$ 4- $143_5$ 5- $234_5$

ketabton.com - The Digital Library

# څلورم فصل

## نسبت او تناسب

**نسبت:**

نسبت په لغت کې رابطې ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو تر منځ رابطې ته نسبت وايي. لکه:

$$\frac{a}{b}$$

$a$ ته اول حد يا صورت يا مقدم وايي $b$ ته دويم حد يا مخرج يا مؤخر وايي.

نسبت مجرد عدد دی واحد نلري.

نسبت د فيصد په شکل اود اعشار کسر په شکل هم ليکلای شو.

اوله قاعده - د نسبت پيدا کول: که دوه عددونه راکړ شوي وي او وغواړو چې نسبت يې پيدا کړو يو پر بل يې ليکو او اختصاروؤ يې.

$$\text{نسبت} = \frac{\text{اول حد}}{\text{دويم حد}}$$

مثال: احمد 210 روپۍ او محمد 270 روپۍ لري نسبت يې پيدا کړئ؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{د محمد روپۍ}} = \frac{210}{270} = \frac{7}{9}$$

دويمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او اول حد معلوم وي دويم حد معلوم نه وي. دويم حد په لاندې ډول پيدا کوو.

$$\text{دويم حد} = \text{اول حد} \div \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود د پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی که د احمد روپۍ 430 وي د محمود روپۍ څو دي؟

ketabton.com - The Digital Library



$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\quad$ $\text{د محمود روپۍ} = 430 \div \frac{5}{8} = 430 \times \frac{8}{5} = \frac{3440}{5} = 688$

$\text{احمد روپۍ} = 430$ $\quad$ $\text{د محمود روپۍ} = 688Rs$

$\text{د محمود روپۍ} = ?$

دريمه قاده: چې د دوه کميتو نسبت او دويم حد معلوم وي او اول حد معلوم نه وي.

$$\text{اول حد} = \text{دويم حد} \times \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی د محمود روپۍ 688 دي د احمد روپۍ څو دي؟

$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\quad$ $\text{احمد روپۍ} = 688 \times \frac{5}{8} = \frac{3440}{8} = 430Rs$

$\text{محمود روپۍ} = 688$ $\quad$ $\text{احمد روپۍ} = 430Rs$

$\text{احمد روپۍ} = ?$

څلورمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او مجموعه معلوم وي او کميتونه معلوم نه وي د کميتو د لاس ته راوړلو لپاره د کميتو مجموعه د صورت او مخرج په مجموعه ويشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب کړو اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې يې ضرب کړو دويم حد لاس ته راځي.

مثال:- د اکرم او انور د پيسو نسبت $\frac{3}{5}$ دی او د پيسو مجموعه 4080 ده د هر يوه روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د اکرم روپۍ}}{\text{د انور روپۍ}} = \frac{3}{5}$$

$\text{مجموعه} = 4080$ $\quad$ $\text{اکرم روپۍ} = \frac{3\times4080}{3+5} = \frac{12240}{8} = 1530$

$\text{د اکرم روپۍ} = ?$ $\quad$ $\text{انور روپۍ} = \frac{5 \times 4080Rs}{3+5} = \frac{20400}{8} = 2550$

$\text{د انور روپۍ} = ?$

ketabton.com - The Digital Library


پنځمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او تفاضل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو تفاضل د صورت او مخرج په تفاضل ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د عبدالهادي او عبدالباري د پیسو نسبت $\frac{6}{11}$ دی او د پیسو فرق یې 750 دی د هر یوه پیسې څو دي؟

نسبت $= \frac{6}{11}$

تفاضل $= 750$

عبدالهادي روپۍ $= ?$

عبدالباري $= ?$

عبدالهادي روپۍ $= \frac{6 \times 750}{11 - 6} = \frac{4500}{5} = 900$

عبدالباري روپۍ $= \frac{11 \times 750}{11 - 6} = \frac{8250}{5} = 1650$

شپږمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او د ضرب حاصل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د ضرب حاصل د صورت او مخرج په حاصل ضرب ویشو که د خارج قسمت جذر په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال:- د احمد او محمود د نسبت $\frac{5}{7}$ دی او د ضرب حاصل یې 2240 دی د هر یوه روپۍ پیدا کړئ؟

نسبت $= \frac{5}{7}$

د ضرب حاصل $= 2240$

د احمد روپۍ $= 5\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 5\sqrt{64} = 5 \times 8 = 40$

د محمد روپۍ $= 7\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 7\sqrt{64} = 7 \times 8 = 56$

ketabton.com - The Digital Library


اوومه قاعده - معکوس نسبتونه:

که دوه يا څو کسرونه ولرو چې د اول کسر مخرج د دويم کسر صورت په همدې ترتيب اخره وي دی کسروته معکوس نسبت وايي لکه $\frac{a}{b}$ او $\frac{b}{c}$ د معکوس نسبتود ضرب حاصل څخه د اول او اخر حد نسبت لاس ته راځي.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} = \frac{a}{e}$$

مثال: که د احمد محمود د پيسو نسبت $\frac{3}{4}$ دی د محمود او حامد د پيسو نسبت $\frac{5}{7}$ دی که د احمد روپۍ 300 وي د حامد روپۍ څو دی؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{دمحمودروپۍ}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{نسبت} = \frac{\text{محمود روپۍ}}{\text{حامد روپۍ}} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{محمود}} \times \frac{\text{محمود}}{\text{حامد}} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28}$$

$\text{احمد روپۍ} = 300Rs$ $\quad$ $\text{نسبت} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28}$ $\quad$ $\text{د حامد روپۍ} = 300 \div \frac{15}{28}$

$\text{حامد روپۍ} = ?$

$\text{دحامد روپۍ} = 300 \times \frac{28}{15} = 20 \times 28 = 560$

ketabton.com - The Digital Library


تمرين:

1- يو سړي 42 منه مميز د 70 منه نخودو سره ګډوي نسبت يې پيدا کړئ؟

2- د جوار او غنمو نسبت $\frac{3}{7}$ دی که مجموعاً 600 منه وي جوار څومره دي او غنم څومره دي؟

3- يو دکاندار دوه قسمه چای سره ګډوي چې نسبت $\frac{3}{8}$ دی که د ګډ شوي چای تفاضل 50 منه وي د چای د هر قسم مقدار پيدا کړئ؟

4- د ميو او وريجو نسبت $\frac{1}{5}$ دی که وريجې 50 منه وي مېوې به څومره وي او څومره مېوې زياتې شي چې نسبت يې $\frac{3}{8}$ شي؟

5- د احمد او محمود د پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی او د ضرب حاصل يې 36000 دي د هر يوه روپۍ څو دي؟

6- د بادامو او پستې د قيمتو نسبت $\frac{2}{3}$ دی د پيستې د يو من قيمت 12800 دی د بادامو من په څو دی؟

7- د احمد او اکرم د پيسو نسبت $\frac{3}{5}$ د اکرم او انور د پيسو نسبت $\frac{7}{8}$ دی که د احمد روپۍ 3000 وي د انور روپۍ به څو وي؟

ketabton.com - The Digital Library


## تناسب :

د دوه نسبتو مساوات ته تناسب وايي.

لکه $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يا $a:b::c:d$

اول او اخر حدو ته طرفين وايي دويم او دريم حدوته وسطين وايي.

$a$ او $d$ طرفين دي $b$ او $c$ وسطين دي.

## د تناسب خواص:

1- په تناسب کې د طرفينو د ضرب حاصل د وسطينو د ضرب د حاصل سره مساوي وي.

لکه:

$$\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$$
$$2\times 24=3\times 16$$
$$48=48$$

2- که په تناسب کې د طرفينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

3- که په تناسب کې د وسطينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

4- که په تناسب کې د صورت او مخرج ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

5- که په تناسب کې د صورتو مجموعه د مخرجو پر مجموعه وليکل شي نوی نسبت د تناسب د هر نسبت سره تناسب جوړوي.

6- که د صورت او مخرج مجموعه پر مخرج وليکل شي دتناسب خواص تغير نه خوري.

7- که د صورت او مخرج تفاضل پر مخرج وليکل د تناسب خواص تغير نه خوري.

## د تناسب اقسام:

د تناسب اقسام په دري حالتو کې مطالعه کوو.

ketabton.com - The Digital Library

1- د نسبتو د شمېر په لحاظ د تناسب اقسام:

د نسبتو د شمېر په لحاظ تناسب په دوه قسمه دي.

a- بسیط یا ساده تناسب b- مرکب تناسب

a- بسیط تناسب: هغه تناسب دی چې د نسبتونو شمېر يې دوه وي لکه $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

b- مرکب تناسب: که د تناسب د نسبتونو شمېر تر دوو زيات وي دې تناسب ته مرکب تناسب وايي.

لکه ...... ...... $\frac{5}{8} = \frac{35}{56} = \frac{45}{72}$

2- د حدو د ارتباط له کبله د تناسب اقسام:

د حدو د ارتباط له کبله تناسب په دوه قسمه دی.

a- مستقیم تناسب b- معکوس تناسب

a- مستقیم تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په ډېرېدو د بل نسبت مربوطه حد ډېرېدلو او په کمېدلو سره يې کمېدلو دی تناسب ته مستقیم تناسب وايي.

لکه 8 گزه رخت په 1600 روپۍ دی او 12 گزه رخت په 2400 روپۍ دي.

$$\frac{8}{12} = \frac{1600}{2400}$$

b- معکوس تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په کمېدو سره د بل نسبت مربوطه حد ډېرېدولو او په ډېرېدو سره يې کمېدلو دې تناسب ته معکوس تناسب وايي.

لکه 12 کسه یو کار په 18 ورځو کې کوي 6 کسه دا کار به 36 ورځو کې کوي

$$\frac{12}{6} = \frac{18}{36}$$

3- د حدو د ورکېدو له کبله دتناسب اقسام:

د حدو د ورکېدو له کبله تناسب په درې قسمه دی.

ketabton.com - The Digital Library



الف- څلورم تناسب: که په یوه تناسب کې یوه حد ورک وي دی تناسب ته څلورم تناسب وایي لکه:

$$\frac{5}{8}=\frac{45}{x}$$

د مجهول د لاس ته راوړلو لپاره د تناسب د اول خاصیت څخه استفاده کوو.

$$5x = 8 \times 45$$

$$5x = 360$$

$$\frac{5x}{5}=\frac{360}{5}$$

$$x = 72$$

ب- دریم تناسب: که په یوه تناسب کې وسطین مساوي وي دی تناسب ته دریم تناسب وایي.

مثال: د 5 او 30 دریم تناسب پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{30}=\frac{30}{x}$$

$$x=\frac{30\times 30}{5}=\frac{900}{5}=180$$

$$x = 180$$

ج- هندسي وسط: که په یو تناسب کې طرفین معلوم او وسطین معلوم نه وي دې تناسب ته هندسي وسط وایي.

مثال: د 5 او 180 هندسي وسط پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{x}=\frac{x}{180}$$

$$x^2 = 5 \times 180 \qquad x^2 = 900 \qquad \sqrt{x^2}=\sqrt{900}$$

$$x = 30$$

ketabton.com - The Digital Library

تمرین:

1- د $10kg$ غوښې قیمت $3500Rs$ دی وواياست $16kg$ غوښه به په څو روپۍ وشي؟

2- اته کسه يو کار په 20 ورځو کوي وواياست چې 12 کسه به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

3- احمد يو کار په 4 ورځو او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې دواړه به يې په شريکه په څو ورځو کې وکړي؟

4- احمد او محمود په شريکه يو کار په 3 ورځو کې کوي که احمد يې يوازې په 12 ورځو کې وکړي محمود به يې په څو ورځو کې وکړي؟

5-احمد يو کار په 6 ورځو کې محمود يې په 9 ورځو کې او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې ټول به يې په څو ورځو کې سرته ورسوي؟

6- 8 کسه د ورځې 6 ساعته کار کوي او يو کار په 15 ورځو کې خلاصوي ووايه چه 10 کسه د ورځې څو ساعته کار وکړي چې همدغه کار په 15 ورځو کې خلاص کړي؟

7- د 8 او 12 دريم تناسب پيدا کړئ؟

8- د 8 او 18 هندسي وسط څو دي؟

9- د 20 او 80 هندسي وسط پيدا کړئ؟

10- 12 کسه د ورځې 4 ساعته کار کوي او يوه ځمکه چې $200m$ طول او $150m$ سور لري په 10 ورځو کې اړوي. وواياست چې که 16 کسه د ورځو 3 ساعته کار وکړي او يوه ځمکه چې 180 متره طول او $120m$ سور لري په څو ورځو کې واړوي؟

ketabton.com - The Digital Library



# پنځم فصل

فیصد:

د 100 له قراره د يوې تجارتي معاملې د ګټې يا تاوان معلومولو ته فيصد وايي.

يا داچه په يوه مرکبه ماده، مخلوط يا محلول کې د 100 له قراره د هغوی د اجزاؤ د مقدار معلومولو ته فيصد وايي.

د فيصد فارمولونه دا دي.

$$ګټه = \frac{سرمايه \times نرخ}{100}$$

په مرکبه ماده يا مخلوط يا محلول کې د هغوي مقدار د سرمايې حيثيت لري د اجزاو فيصدي نرخ دی او په ټوله ماده کې د هغه جز مقدار د ګټې حيثيت لري.

$$نرخ = \frac{ګټه \times 100}{سرمايه}$$

$$سرمايه = \frac{ګټه \times 100}{نرخ}$$

مثال: 8000 روپۍ ګټه د 3 فيصد په نرخ پيدا کړئ؟

$$ګټه = \frac{3 \times 8000}{100} = 240$$

2- مثال: يو سړي په 12000 روپيو کی 960 روپۍ وګټلې نرخ کې څو دی؟

$سرمايه = 12000Rs$

$ګټه = 960Rs$

$نرخ = ?$

$$نرخ = \frac{100 \times 960Rs}{12000Rs} = 8$$

ketabton.com - The Digital Library



3- مثال: یو سړي 15000 روپۍ د 6% په نرخ ګټلي سرمایه یې پیدا کړئ؟

ګټه = 15000

نرخ = 6

سرمایه =?

$$\text{سرمایه} = \frac{100 \times 15000}{6} = 250000$$

$$\text{سرمایه} = 250000$$

4- د یوه سړي د ګټې او سرمایې مجموعه $28000Rs$ ده که نرخ یې 12% وي سرمایه او ګټه یې معلومه کړئ؟

حل:

ګټه او سرمایه = $28000Rs$

نرخ = 12

سرمایه =?

ګټه =?

$$100 + 12 = 112$$

$$\frac{100}{x} = \frac{112}{28000}$$

$$x = \frac{28000 \times 100}{112} = \frac{2800000}{112} = 25000$$

$$\text{سرمایه} = x = 250000Rs$$

$$\text{ګټه} = 28000 - 25000 = 3000$$

$$\text{ګټه} = 3000$$

پوښتنه:- په $40kg$ مخلوط کې 8% ممیز او نور نخود دي د ممیزو او نخودو مقدار پیدا کړئ؟

تخفیف:

تخفیف په لغت کې سپکولو ته وایي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې خرڅوونکي یې د جنس د اصلي قیمت څخه د معلوم نرخ له مخې اخیستونکي ته پریږدي. تخفیف بلل کیږي.

د تخفیف فارمولونه عیناً د فیصد د فارمولو غوندې دي خو د جنس اصلي قیمت د سرمایې په عوض او د ګټې یا تاوان په عوض تخفیف لیکل کیږي.

ketabton.com - The Digital Library



$$\text{تخفیف} = \frac{\text{اصلي قیمت} \times \text{نرخ}}{100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{تخفیف} \times 100}{\text{اصلي قیمت}}$$

$$\text{اصلي قیمت} = \frac{\text{تخفیف} \times 100}{\text{نرخ}}$$

اصلي قیمت –
تخفیف

فعلي قیمت

مثال: د یوه موټر اصلي قیمت $300000Rs$ دی خرڅوونکی اخیستونکی ته په 100 کې 8 روپۍ پرېښودی تخفیف او اصلي قیمت یې پیدا کړئ؟

اصلي قیمت $= 300000$

نرخ $= 8\%$

تخفیف $=?$

فعلي قیمت $=?$

$$\text{تخفیف} = \frac{8 \times 300000}{100} = 24000$$

تخفیف $= 24000$

فعلي قیمت $= 300000 - 24000 = 276000Rs$

2- د یوه اس اصلي قیمت $240000Rs$ دي که تخفیف یې $16800Rs$ وي نرخ یې پیدا کړئ؟

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 16800}{240000} = 7$$

نرخ $= 7$

3- د یوه موټر تخفیف $80000Rs$ دی نرخ یې 8 دی اصلي قیمت یې څو دی؟

تخفیف $= 80000R_s$

نرخ $= 8$

اصلي قیمت $= ?$

$$\text{اصلي قیمت} = \frac{\text{تخفیف} \times 100}{8} = \frac{80000 \times 100}{8} = 1000000R_s$$

ketabton.com - The Digital Library

احدیت:

په لغت کې تنهايي او يوازي والي ته وايي.

او په اصطلاح کې د ډېرو هم جنسو شيانو د مجموعي قيمت څخه د يوه شي د قيمت پيدا کولو ته احديت وايي.

طريقه يې داسې ده چې مجموعي قيمت د شيانو په شمېر ويشو.

$$\text{احدیت} = \frac{\text{مجموعي قيمت}}{\text{د شيانو شمېر}}$$

مثال: يو خياط په څلور ورځو کې 28 کميسونه وګنډل وواياست چې په يوه ورځ کې به يې څو کميسونه ګنډلي وي؟

| ورځې | کميسونه |
|---|---|
| | |

$$\frac{4}{1} = \frac{28}{x}$$

$$x = \frac{1 \times 28}{4} = 7$$

په يوه ورځ کې يې 7 کميسونه ګنډلي دي.

2- يو درجن قلمونه چې (12) دانې دي په $240Rs$ کيږي 7 دانې به په څو روپۍ وشي.

حل: که څه دغه رنګه سوالونه په تناسب کې ډېر اسنه حل کيږي خو د احديت په طريقه داسې حليږي اول د يو پنسل قيمت پيدا کوو بيا يې په 7 کې ضربوو.

$$\text{د پنسل قيمت} = \frac{240}{12} = 20$$

$$\text{د 7 پنسلو قيمت} = 7 \times 20 = 140$$

مثال: که 3 متره رخت قيمت 360 روپۍ وي د يو متر رخت قيمت څو دی او بيا د 5 مترو قيمت يې پيدا کړئ؟

$$\text{د يوه متر قيمت} = \frac{360}{3} = 120$$

$$\text{د 5 مترو قيمت} = 5 \times 120Rs = 600$$

ketabton.com - The Digital Library



## ربحه یا ربح

ربح په لغت کې سود یا ګټې ته وایي.

او په اصطلاح کې په یوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې د یوې سرمایې د ګټې د پیدا کولو طریقې ته ربح وایي. ربح په دوه ډوله ده.

1- ساده ربح 2- مرکبه ربحه

### 1- ساده ربحه:

هغه ربحه ده چه د مودې تر رسیدلو وروسته ګټه اخیستل کیږي او سرمایه بیا په ربحه اچول کیږي

د ساده ربحې فارمولونه څلور دي.

$$\text{ربح} = \frac{\text{سرمایه} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{ربح} \times 1200}{\text{موده} \times \text{سرمایه}}$$

$$\text{موده} = \frac{\text{ربحه} \times 1200}{\text{سرمایه} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{سرمایه} = \frac{\text{ربحه} \times 1200}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

مثال: د 20000 روپیو ربحه د 15٪ په نرخ په 8 میاشتو کې پیدا کړئ؟

$$\text{ربحه} = \frac{8 \times 15 \times 20000}{1200} = 2000 \qquad \text{ربحه} = 2000Rs$$

مثال: یو سړی د 8 میاشتو لپاره $20000Rs$ په مرابحه واچوي پس له 8 میاشتو یې ربحه $2000Rs$ شوه نرخ یې پیدا کړئ؟

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times 2000}{8 \times 20000} = \frac{120}{8} = 15 \qquad \text{نرخ} = 15\%$$

ketabton.com - The Digital Library

مثال: د 20000 روپیو ربحه د %15 په نرخ 2000 روپی ده موده یې پیدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 2000}{15 \times 20000} = \frac{120}{15} = 8 \qquad 8\ \text{میاشتې} = \text{موده}$$

مثال: یو سړي یوه سرمایه په مراجعه واچوله پس له 8 میاشتو یې د %15 په نرخ 2000 روپی ربحه واخیسته سرمایه یې پیدا کړئ؟

$$\text{سرمایه} = \frac{1200 \times 2000}{5 \times 15} = \frac{50 \times 2000}{5} = 20000Rs$$

$$\text{سرمایه} = 20000\text{Rs}$$

2- مرکبه ربحه :

که د مرابحې د وخت تر را رسیدلو وروسته ربحه او سرمایه بیا په ربحه واچول شي دې ربحې ته مرکبه ربحه وایي.

د مرکبې ربحې فارمول دی.

$$A = C(1+r)^n$$

$A$ د سرمایې او ربحې مجموعه ده $C$ اولنۍ سرمایه ده $r$ نرخ دی او $n$ د کلونو شمېر دی.

$C$ سرمایه او $Cr$ ګټه او $A$ د دواړو مجموعه ده.

$$A_1 = C + Cr$$
$$A_1 = C(1+r)$$
$$A_2 = C(1+r) + C(1+r)r$$
$$A_2 = C(1+r)(1+r) = c(1+r)^2$$
$$A_3 = C(1+r)^2 + C(1+r)^2 r$$
$$A_3 = C(1+r)^2(1+r) = C(1+r)^3$$

په همدې ډول کولای شو چې د $n$ کلو د سرمایې او ربحې مجموعه پیدا کړو.

په عمومي صورت لیکو چې:

$$A = C(1+r)^n$$

ketabton.com - The Digital Library



مثال: يو سړي $50000Rs$ د 5% په نرخ د 3 کلو لپاره په ربحه واچولې ګټه او سرمايه يې پيدا کړئ؟

$$A = 50000(1 + \frac{5}{100})^3$$

$$A = 50000(\frac{100 + 5}{100})^3$$

$$A = 50000\left(\frac{105}{100}\right)^3 = 50000\left(\frac{121550625}{1000000}\right)$$

$$A = \frac{5 \times 1157625}{100} = \frac{1157625}{20} = \frac{231525}{4}$$

$$A = 57881.25$$

تمرين:

1- د 10000 روپيو ربحه 8٪ په نرخ په 9 مياشتو کې څو ده ؟

2- د 50000 روپيو ګټه په 6 مياشتو کې 5250 روپۍ شوه نرخ يې پيدا کړئ؟

3- د 20000 روپيو ګټه د اوه مياشتو په موده کې 1750 روپۍ ده نرخ يې څو دی؟

4- د 18000 او ګټه د 18٪ په نرخ 1750 روپۍ ده موده يې پيدا کړئ؟

5- لوی سرمايې په 8 مياشتو کې د 15٪ په نرخ 3000 ګټې سرمايه څو ده ؟

6- احمد 5000 روپۍ د 20٪ په نرخ د 4 کلو لپاره په مرکبه ربحه واچولې ګټه او سرمايه يې څو ده؟

ketabton.com - The Digital Library

## تنزيل:

تنزيل په لغت کې کښته کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې هغه پيسې چې سند خرڅوونکي يې سند اخيستونکي ته په يوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې پريږدي تنزيل بلل کيږي.

د تنزيل فارمولونه دا دي.

$$\text{تنزيل} = \frac{\text{اصلي قيمت} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times \text{تنزيل}}{\text{موده} \times \text{اصلي قيمت}}$$

$$\text{موده} = \frac{1200 \times \text{تنزيل}}{\text{اصلي قيمت} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{1200 \times \text{تنزيل}}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{تنزيل} - \text{اصلي قيمت} = \text{فعلي قيمت}$$

مثال: د سند اصلي قيمت $300000Rs$ دی موده ته يې 9 مياشتې دي نرخ يې 15٪ دي تنزيل يې څو دي؟

$$\text{تنزيل} = \frac{15 \times 9 \times 300000}{12 \times 100} = 33750$$

2- د سند اصلي قيمت 50000 دی په 9 مياشتو کې يې تنزيل $3000Rs$ دی نرخ يې څو دی؟

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times 3000}{9 \times 50000} = \frac{40}{5} = 8 \qquad \text{نرخ} = 8$$

3- د 20000 د تنزيل د 15% په نرخ 1500 روپۍ وي موده يې پيدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 1500}{15 \times 20000} = 6 \qquad \text{شپږ مياشتې} = \text{موده}$$

ketabton.com - The Digital Library



4- د یوه سند تنزیل د 15% په نرخ چې موديې ته یې 6 میاشتې پاتې دي 3375 روپۍ شو د سند اصلي قیمت څو دی؟

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{1200 \times 3375}{6 \times 15} = 45000$$

$$\text{اصلي قيمت} = 45000Rs$$

تمرین:

1- د یوه سند اصلي قیمت $450000Rs$ موديې ته یې 6 میاشتې پاتې دي د 15% په نرخ یې تنزیل څو دی؟

2- د یوه سند اصلي قیمت $75000Rs$ دی د 4% په نرخ یې تنزیل $2250Rs$ شو موديې ته یې څومره وخت پاتې دی.

3- د یو سند اصلي قیمت $90000Rs$ دی موديې ته یې 8 میاشتې دی که تنزیل $3000Rs$ وي نرخ یې پیدا کړئ؟

4- د یوه سند تنزیل په 8 میاشتو کې د 7% په نرخ $5600Rs$ شوي اصلي قیمت یې څو دي.

مشارکت:

که څو کسه په یوه تجارتي معامله لاس پوري کړي ګټه او تاوان یې سره شریک وي دې تجارتي معاملې ته مشارکت وايي.

د شراکت د ګټې تقسیم په څلور حالتو کې مطالعه کوو.

اول حالت:

چې سرمایې او موديې یې مساوي وي. ګټه په نفرو ویشل کیږي.

مثال: احمد ، محمود او حامد هر یوه $500000Rs$لري د حمل په اول یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره پوري $900000Rs$ روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه څو ده.

حل:

$$\text{د هريوه ګټه} = \frac{900000}{3} = 300000Rs$$

ketabton.com - The Digital Library

دویم حالت:

چې مودې یې مساوي او سرمایې یې مختلفې وي ګټه د سرمایو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په سرمایه کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 40000 محمود 50000 او حامد $60000Rs$ لري په اول د حمل یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره یې $300000Rs$ روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ.

د احمد سرمایه $= 40000Rs$ 1/حمل

د محمود سرمایه $= 50000Rs$ 1/حمل

د حامد سرمایه $= 60000Rs$ 1/حمل

ګټه $= 300000Rs$

د هر یوه ګټه $=?$ $4 + 5 + 6 = 15$

$$\frac{300000}{15} = 20000$$

د احمد ګټه $= 4 \times 20000Rs = 80000Rs$

د محمود ګټه $= 5 \times 20000Rs = 100000Rs$

د حامد ګټه $= 6 \times 20000Rs = 120000Rs$

دریم حالت:

چې سرمایې یې مساوي او مودې یې مختلفې وي ګټه د مودو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په موده کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد $150000Rs$ لرلې د حمل په اول یې په تجارت شروع وکړه محمود د $150000Rs$ په سرمایه د اسد په اول ور سره شریک شو حامد د $150000Rs$ په سرمایه د عقرب په اول ور سره شریک شود کال تر اخره یې 500000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library



حل:

| | | | |
|---|---|---|---|
| احمد | 150000 | 1/ حمل/ | 12 |
| محمود | 150000 | 1/ اسد/ | 8 |
| حامد | 150000 | 1/عقرب/ | $\frac{5}{25}$ |

گټه $= 500000$

د هر یوه گټه $=?$

$$\frac{500000}{25} = 20000$$

$$\text{د احمد گټه} = 12 \times 20000 = 240000$$

$$\text{د محمود گټه} = 8 \times 20000 = 16000$$

$$\text{د حامد گټه} = 5 \times 20000 = 100000$$

## څلورم حالت:

چې مودې او سرمايې مختلفې وي.

د هر سرې موده د هغه به سرمايه کې ضربيږي د ضرب حاصلونه يې جمع کيږي گټه په دغه مجموعه ويشل کيږي. خارج قسمت چې د هر چا د مودې او سرمايې په حاصل ضرب کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 50000 افغانۍ لرلې د حمل په اول يې په تجارت شروع وکړه محمود د 80000 افغانيو په سرمايه د ميزان په اول ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 216000 افغانۍ وگټلې د هر يوه گټه څو ده؟

| | | |
|---|---|---|
| احمد | $= 50000$ | 1/حمل/ |
| محمود | $= 80000$ | 1/ميزان/ |
| گټه | $= 216000$ | |

د هر یوه گټه $=?$

ketabton.com - The Digital Library

$$5 \times 12 + 8 \times 6 = 60 + 48 = 108$$

$$\text{د قسط اندازه} = \frac{216000}{108} = 2000$$

$$\text{د احمد ګټه} = 2000 \times 60 = 120000$$

$$\text{د محمود ګټه} = 2000 \times 48 = 96000$$

تمرین:

1- څلور کسان هر يو 200000 روپۍ لرلی. په اول د حمل يې تجارت شروع کړ د کال تر اخره يې 800000 روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه څو ده؟

2- احمد 20000 روپۍ لرلی د حمل په اول يې تجارت شروع کړ محمود 20000 روپيو په سرمايه په اول دسنبله ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 120000 روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه پيدا کړئ؟

3- احمد 12000 روپۍ محمود 18000 روپۍ لرلی په اول د ثور يې تجارت شروع کړ د کال تر اخره يې 150000 روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه پيدا کړئ؟

4- احمد 8000 روپۍ لرلی په اول د جوزا يې تجارت شروع کړ ، محمود د 10000 روپيو په سرمايه په اول د ميزان ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 112000 روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه پيدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library



# شپږم فصل

## سيټ (Set):

سيټ يو انګليسي لفظ دی چې مفهوم يې د ټولګې ، صنف ، لښکر ، ګلې او رمې سره برابر دی.

په اصطلاح کې سيټ د هغو شيانو مجموعه يا ټولګه ده چې په کافي ډول د تشخيص وړ وي.

سيټ د الفباء د غټو توروپه واسطه ښودل کيږي لکه د A ، B ، C ، M ، ......... او داسې نور.

د سيټ نظريه د Gorge cantor ( 1845 – 1919 ) م په واسطه په رياضي کې داخل او معرفي شوه.

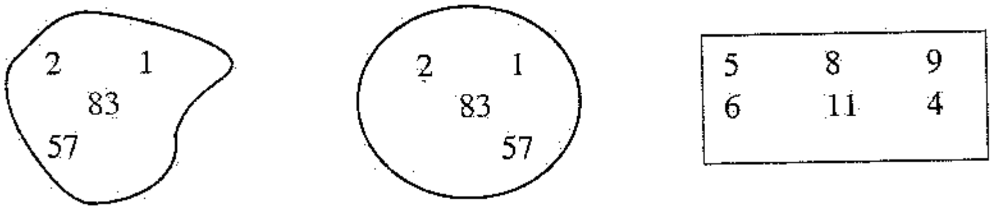
## د سيټ عناصر Element of set:

په سيټ کې شاملو شيانو ته د سيټ عناصر وايي. مثلاً $A = \{2,3,a,b\}$

چې 2، 3، a او b د سيټ عناصر دي.

## د سيټ نمايش:

Venn برطانوي عالم سيټ د هندسي او غير هندسي شکلو پواسطه رواج کړ چې دسيټ دغه نمايش Venn diagram وايي.




## د سيټ د ليکلو طريقې:

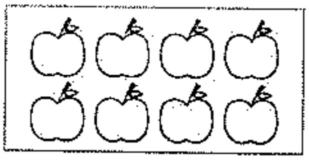
د سيټ د ليکلو طريقې څلور دي.

1- Picture Method:

پدې ميتود کې د سيټ د عناصرو شکلونه رسموي دا ميتود په کښته ټولګيو کې استعماليږي.

ketabton.com - The Digital Library

لکه:



2- د Descriptive Method:

که د سیټ د عناصرو په منځ کې یو صفت موجود وي نو د دغه سیټ د توصیفي میتود پواسطه لیکل کیږي یعنې د سیټ د عناصرو مشترک صفت د یوې جملې پواسطه لیکل کیږي

د $E$ ژبې د بې اوازه تورو سیټ په $A$ ښیو.

$A = \{$ د $E$ بې اوازه توری $\}$

$B = \{$حسابي ارقام$\}$

3- د Listing Method پواسطه:

که د سیټ عناصر محدود وي نو د قوس په داخل کې د عناصرو نومونه یا سمبولونه لیکي.

لکه:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{1,2,3,4,5\}$$

4- Set Builder Notation په طریقه:

په دې طریقه کې د سیټ عناصر په یو سمبول یا حرف مثلاً په $(x)$ ښیي فرضاً د $A$ د سیټ عناصر د 15 او 120 تر منځ واقع دي نو $x$ د 15 او 120 تر منځ لیکي او د $(<)$ او $(>)$ د علامو پواسطه یې سره بیلوي.

$$A = \{x/15 < x < 120\}$$

او داسې ویل کیږي چې د $A$ د سیټ عناصر $x$ دي داسې چې د 120 څخه کم او د 15 څخه زیات دي.

ketabton.com - The Digital Library



## د سیټ اقسام:

سیټ په څلور قسمه دي.

1- خالي سیټ
2- یو عنصره سیټ
3- معین سیټ
4- غیر معین سیټ

1- خالي سیټ: هغه سیټ چه عناصر نلري د خالي سیټ په نوم یادیږي لکه $A = \{\ \}$ خالي سیټ د $\phi$ د علامې پواسطه ښودل کیږي.

2- یو عنصره سیټ: که کوم سیټ یو عنصر ولري دې سیټ ته یو عنصره سیټ وایي. لکه $A = \{$لمر$\}$ یا $B = \{3\}$

3- معین سیټ: هغه سیټ چې عناصر یې د شمېرلو وړ وي لکه: د حسابي ارقامو سیټ.

$$A = \{0,1,2,3,,4,5,6,7,8,9\}$$
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

غیر معین سیټ:

هغه سیټ چې عناصرئې د شمېرلو وړ نه وي لکه: د طبعي اعدادو سیټ.

$A = \{IN$ د طبیعي اعدادو سیټ$\}$

$$B = \{IR\}$$

## د روابطو له مخې د سیټونو اقسام:

د ارتباطاتو له مخې سیټونه په 8 اته قسمه دي.

1- فرعي سیټ
2- کلي سیټ
3- مکمله سیټ
4- طاقت لرونکي سیټ
5- مساوي سیټونه
6- معادل سیټونه
7- منفصل سیټونه
8- غیر منفصل سیټونه

ketabton.com - The Digital Library

1- فرعي سيټ: که د $A$ او $B$ دوه داسې سيټونه ولرو چې د $B$ د سيټ هر عنصر د $A$ په سيټ کې شامل وي نو د $B$ سيټ د $A$ د سيټ فرعي سيټ بلل کيږي لکه

$B = \{4,6,8,10\}$ او د $A = \{x \epsilon IR/1 < x < 12\}$

څرنګه چې د $B$ د سيټ هر عنصر په $A$ کې شامل دی نو د $B$ سيټ د $A$ د سيټ فرعي سيټ دی او داسې ليکل کيږي. $B \subset A$

فرعي سيټ په دوه قسمه دی.

a- واقعي فرعي سيټ     b- غير واقعي فرعي سيټ

a- واقعي فرعي سيټ: که ديوه سيټ ټول عناصر په بل سيټ کې شامل وي او په دويم سيټ کې داسې عناصر وي چې په لمړی سيټ کې نه وي. لکه:

$B \subset A$ نو $B = \{3,4,5,6\}$ او د $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

b- غير واقعي فرعي سيټ: که دوه داسې سيټونه ولرو چې د اول سيټ ټول عناصر په دويم سيټ کې او د دويم سيټ هر عنصر په اول سيټ کې شامل وي دغه سيټونه يو دبل غير واقعي فرعي سيټونه دي. لکه:

$B \subseteq A$ او $A \subseteq B$ نو $B = \{10,8,2,6,4\}$ او $A = \{2,4,6,8,10\}$

2- کلي سيټ: که يو سيټ څو فرعي سيټونه ولري دې سيټ ته کلي سيټ وايي لکه $D = \{8,9,10\}$ او د $C = \{5,6,7\}$ او $B = \{3,4\}$ چې $A = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ فرعي سيټونه دي نو د $A$ سيټ کلي سيټ وي.

3- مکمله سيټ: که يو کلي سيټ يو واقعي سيټ ولري نو د کلي سيټ د پاتی عناصرو سيټ د فرعي سيټ مکمله سيټ دی.

مثلاً $B \subset A$ چې $B = \{2,3,4,5,6\}$ او $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ دوه سټيونه لرو چې دی نو د $B$ د سيټ مکمله سيټ چې په د $B'$ ښودل کيږي عبارت $B' = \{7,8,9,10,11,12\}$ دی.

4- طاقت لرونکی سيټونه: هر کلي سيټ د خپلو فرعي سيټونو طاقت لرونکي سيټ يا Power Set دی لکه $A_1 = \{\triangle\}$ او $A = \{\triangle, \odot, \boxdot\}$

ketabton.com - The Digital Library



$A_2 = \{\odot\}$ ، $A_3 = \{\boxdot\}$ ، $A_4 = \{\triangle,\odot\}$ ، $A_5 = \{\triangle,\boxdot\}$ ، $A_6 = \{\odot,\boxdot\}$ ،
$A_7 = \{\triangle,\odot,\boxdot\}$ او $A_8 = \{\}$

ستونه لرو چې $A$ سيټ ئې کلي سيټ او نور يې فرعي سيټونه دي.

يعني $P(A) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

د يوه سيټ د فرعي سيټونو شمېر د $2^n$ پواسطه پيدا کيږي $n$ د سيټ د عناصرو شمېر دی.

مثال: د $B$ د سيټ عناصر څلور دي د فرعي سيټونو شمېر يې پيدا کړئ؟

$n = 4$ $\qquad P(B) = 2^n$

$P(B) = ?$ $\qquad P(B) = 2^4 = 16$

$P(B) = 16$

5- مساوي سيټونه: که د $A$ او $B$ دوه داسې سيټونه ولرو چې د A د سيټ هر عنصر د $B$ په سيټ کې او د $B$ دسيټ هر عنصر د $A$ په سيټ کې شامل وي . نو دې سيټونو ته مساوي سيټونه وايي.

يعني که $A \subseteq B$ او $B \subseteq A$ نو $A = B$ دی.

6- معادل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د عناصرو شمېر يې مساوي او مختلف وي لکه $A = \{4,5,8\}$ او $B = \{E, F, G\}$

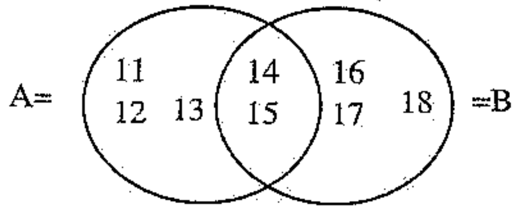
7- منفصل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د هر سيټ هيڅ عنصر په بل سيټ کې نه وي.

لکه $A = \{1,3,5,7,99,11,13\}$ او $B = \{2,4,6,8,10,12\}$

8- غير منفصل سيټونه: که د دوه يا څو سيټونو يو يا څو عناصر سره شريک وي دې سيټونو ته غير منفصل سيټونه وايي.

لکه $A = \{11,12,13,14,15\}$ او $B = \{14,15,16,17,18\}$ چې $\{14,15\}$ په دواړه کې شامل وي نو د $A$ او $B$ سيټونه غير منفصل دي.

ketabton.com - The Digital Library


د سیټونو عملیې:

په حساب کې د سیټونو عملیې درې دي.

1- د سیټونو اتحاد 2- د سیټونو تقاطع 3- د سیټونو تفاضل

1- دسیټونو اتحاد:

د دوه یا ډېرو سیټونو اتحاد د هغه عناصرو سیټ دی چې اقلاً هغه عناصر په دغه سیټونو کې یو وار شامل وي یعنې که بعضي په دوه یا درې سیټونو کې شامل وي د اتحاد په وخت کې یو وار لیکل کیږي. لکه:

$B = \{8,9,10,11,12,13\}$ او $A = \{4,5,6,7,8,9\}$

$A \cup B = \{4,5,6,7,8,9\} \cup \{8,9,10,11,12,13\} = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$

$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

2- د سیټونو تقاطع:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په دوه یا څو سیټونو کې شامل وي. لکه $A = \{3,4,5,6,7\}$ او $B = \{6,7,8,9,10\}$

$$A \cap B = \{6,7\}$$

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

3- د سیټونو تفاضل:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په مفروق منه کې وي او په مفروق کې نه وي.

$B = \{4,5,6,7,8,9\}$ او $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3\}$$

$$A - B = \{1,2,3\}$$

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

# الجبر

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library


# اول فصل

## الجبر

الجبر د جبر څخه اخیستل شویدی چې جبر د مات هډوکي ترلو ته وایي.

او په اصطلاح کې الجبر هغه علم دی چې د حساب د ناحله مسایلو د حل لپاره معادلې او فارمولونه جوړوي.

### د الجبر د علم موضوع:

د الجبر د علم موضوع د حقیقي اعدادو سیټ دی چې په $IR$ سره ښودل کیږي.

### د حقیقي اعدادو سیټ $IR$ :

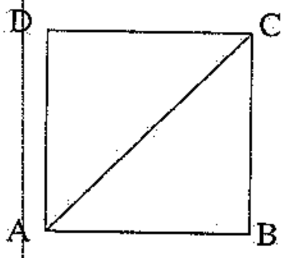
د $(-\infty)$ څخه تر $(+\infty)$ پورې د اعدادو سیټ ته د حقیقي اعدادو سیټ وایي.

$$IR = (-\infty, +\infty)$$

یا دا چې د ناطق او غیر ناطق عددونو سیټ ته د حقیقي عددونو سیټ وایي که ناطق عدد په $Q$ او غیر ناطق په $Q'$ وښیو نو $IR = [Q \cup Q']$

صحیح عددونه او کسري عددونه د عددو په کرښه کې په یوه نقطه کې مطابقت کوي.

مګر د غیر ناطقو عددونه لپاره نقطې د عدد په محور ندی پیدا شوي. مثلاً د $\sqrt{2}$ لپاره د عددو په کرښه کومه نقطه نده ټاکل شوی چه د $\sqrt{2}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د هندسي طریقې څخه استفاده کوو. $ABCD$ یوه مربع چې هره ضلع یې یو واحد ده داسې رسموو چې یو راس یې په مبداء واقع وي د دې مربع مساحت $1cm^2$ دي که د $A$ نقطه د $C$ سره وصل کړو نو $AC$ د مربع وتر لاس ته راځي چې.




$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1 + 1r$$

$$\overline{AC}^2 = 2 \qquad \overline{AC} = \sqrt{2}$$

ketabton.com - The Digital Library



د $\sqrt{2}$ د پاره د عددو په کرښه د نقطې پیدا کولو لپاره د $A$ نقطه مرکز نیسو او د $\sqrt{2} = \overline{AC}$ په اندازه د پرکار خوله خلاصوو او یوه دایره رسموو چه د عددو کرښه قطع کړی دغه د تقاطع نقطه د $\sqrt{2}$ مربوطه نقطه ده په همدې ترتیب کولای شو چې دغیر ناطقو عدد و نقطې د عددو په کرښه پیدا کړو.

مثلاً د $\sqrt{3}$ غیر ناطق عدد نقطې د پیدا کولو لپاره د $\sqrt{2}$ په نقطه کې د واحد په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوؤد پرکارخوله په همدغه شعاع خلاصووا و قوس وهو د $XX'$ د محور سره یې د تقاطع نقطه د $\sqrt{3}$ مربوطه نقطه ده.

د $\sqrt{5}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د $\sqrt{3}$ په نقطه کې د $\sqrt{2}$ په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوو او د پرکار خوله په همدغه اندازه خلاصوو او قوس وهو د $XX'$ د محور سره د قوس د تقاطع نقطه د $\sqrt{5}$ مربوطه نقطه ده.

## د الجبر د زده کړې غرض:

1- په حساب کې د عدد سره علامه نه لیکل کیږي مګر په الجبر کې عدد او علامه دواړه یو الجبري عدد دی.

مثلاً 19 حسابي عدد دی مګر 19− او 19+ الجبري عددونه دي.

2- په حساب کې حروف نه استعمالیږي مګر الجبري معادلې او فارمولونه د حروفو څخه جوړیږي.

لکه $4x - 5$ ، $7x^2 + 6x + 7 = 0$ ، $y = 3x - 4$ او داسې نور.

3- د حساب قوانین بشپړ شویدي زیادت نه قبلوي مګر الجبر د تمدن تابع دي د تخنیک او تکنالوژۍ د پرمختګ سره سم یې قوانین او فارمولونه د بریږي او انکشاف کوي.

## د الجبر اصطلاحات:

حد Term: الجبري عدد، حرف او د حرف او عدد د ضرب ، تقسیم ، جذر او طاقت حالتو ته حد وایي.

لکه: $-3$ ، $x$ ، $4x$ ، $\frac{6}{x}$ ، $\frac{x}{2}$ ، $x^3$ ، $\sqrt[3]{x}$ او $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{-5\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

مشابه حدونه: هغه حدونه دي چې د عین حروفو توانونه یې مساوي وي. لکه $7xy^2$ او $-15xy^2$ یا $7x^2y^2$ او $11x^2y^2$ یا $7x$ او $20x$ او داسې نور.

افاده: د حدونو د جمع او تفریق حالتو ته افاده وایي لکه $11x - 8$

یو حده افادې ته مونوم وایي لکه $20x$

دوه حده افادې ته بینوم وایي. لکه $19x - 20$

درې حده افدې ته ترینوم وایي.لکه $9x^2 - 10x + 7$

هغه افاده چې تر دریو زیات حدونه ولري کثیر الحده افاده ورته وایي. لکه $7x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 8x + 7$

په عمومي صورت دغه ټولو افادو ته پولینوم وایي.

پولینوم:

هغه افاده ده چې د حروفو توانونه یې تام عددونه وي کسري عددونه نه وي.

عمومي شکل یې دادی.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

د پولینوم د هر حد ضریب د همغه پولینوم د توان په نوم یادیږي.

لکه:

$$7x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 2x + 15$$

$a_5 = 7$ , $a_4 = -12$ , $a_3 = 13$ , $a_2 = 0$ , $a_1 = -2$ , $a_0 = 15$

پولینوم په اته قسمه دي.

1- کامل پولینوم: هغه پولینوم دی چې د کوچني توان څخه تر لوړ توان پورې ټول توانونه پکې موجود وي لکه $7 + 8x^4 - 8x^2 + 20x^3 - 7x$ پدې پولینوم کې کوچني توان صفر دی او لوړ توان یې (4) دی د صفر او (4) تر منځ عددونه 1 ، 2 ، 3 دي چې درې واړه پکې موجود دي نو پورتنې پولینوم کامل پولینوم دی.

ketabton.com - The Digital Library



2- ناقص پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان او لوړ توان تر منځ ټولو توانونه يکې موجود نه وي لکه .

$$7x^3 - 4x + 9$$

3- تام پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې يې حرف موجود نه وي. لکه:

$$7x^3 + 4x^2 + 11x + 8$$

$$\frac{3x^2 + 11x^2 - 20x + 17}{5}$$

4- کسري پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې حرف موجود وي لکه :

$$\frac{8}{x^2 + 3x - 1}, \frac{2x^2 + 41x + 1}{x + 3}, \frac{4x - 1}{x}$$

5- منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس په صعودي يا نزولي ډول ترتيب شوي وي.

لکه $2 - 4x + 11x^2 + 8x^3 + 8x^4$ په صعودي ډول منظم دي.

$7x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 12x + 5$ په نزولي ډول منظم شوي دي.

6- غير منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس ترتيب شوي نه وي.

لکه: $3x - 8x^3 + 7 + 3x^2$

7- ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې تر جذر لاندې نه وي لکه $7x^2 + 8x - 5$ او $7x^2 - 31x + \sqrt{2}$.

8- غير ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې کوم حرف يې تر جذر لاندې وي. لکه :

$$7\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$$

که په طاقت لرونکو عدد بدل شي توانونه يې کسري کيږي.

$$7x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6$$

غير ناطق پولينوم ته ملټي نوم هم وايي.

ketabton.com - The Digital Library


ملتي نوم: ملتي نوم هغه افاده ده چې کوم حرف یې ترجذر لاندې وي که دطاقت په شکل وليکل شي توانونه يې کسري کيږي.

د مونوم درجه: د يو مجهوله مونوم درجه د مجهول درجه ده لکه د $7x^3$ دريمه درجه مونوم دی.

د دوه مجهوله يا څو مجهوله مونوم درجه د حروفو د توانونو مجموعه ده.

لکه: $5x^3y^2$ يو $3+2=5$ درجه مونوم دی.

د پولينوم درجه: *Degree of a Polynome* د پولينوم درجه د هغه مونوم درجه ده چې هغه مونوم د پولينوم په ټولو حدو کې لوړه درجه ولري لکه $3xy^2+5x^2y^3+8x^3y^4$ چې اومه درجه پولينوم دی. $8x^3+5x^2-4x+2$ يو دريمه درجه پولينوم دی.

هوموجن: هغه افاده ده چې د ټولو حدونو درجې يې مساوي وي. لکه $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$

که په يوه هوموجن د کوم حد توان مجهول وي د مجهول قيمت د هغه حد د توان څخه پيدا کوو چې توان يې معلوم وي.

لکه $x^3+x^my+x^ny^2+y^3$

حل:

$m+1=3 \qquad m=3-1 \qquad m=2$

$n+2=3 \qquad n=3-2 \qquad n=1$

## د الجبري عددونو څلور ګوني عمليې

د الجبري عددونو جمع:

الجبري عددونه په افقي ډول او هم په عمودي ډول جمع کولای شو. هم علامه عددونه جمع کيږي او علامه يې شريکه علامه ليکل کيږي.

$$\begin{array}{r} -435 \\ -387 \\ \hline -822 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +215 \\ +416 \\ \hline +631 \end{array}$$

ketabton.com - The Digital Library


مختلف العلامه عددونه يو د بل څخه منفي کيږي او علامه د لوی عدد ليکل کيږي.

$$\begin{array}{r} +235 \\ \underline{-416} \\ -181 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +436 \\ \underline{-168} \\ +268 \end{array}$$

د الجبري عددونو تفريق:

مفروق د مفروق منه لاندي داسې ليکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي بيا د مفروق علامو ته تغير ورکوو. او د جمعې عمليه پرې اجراء کوؤ.

$$\begin{array}{r} +731 \\ \underline{\pm 263} \\ +468 \end{array} \quad \begin{array}{r} -216 \\ \underline{\mp 418} \\ +202 \end{array} \quad \begin{array}{r} -485 \\ \underline{\pm 316} \\ -801 \end{array} \quad \begin{array}{r} +465 \\ \underline{\mp 317} \\ +782 \end{array}$$

د الجبري عددونو ضرب:

د الجبري عددونو د ضربولو په وخت کې علامه په علامه کې او عدد په عدد کې ضربوو.

د علامو ضربول په يوه جدول کې مطالعه کوو.

| | |
|---|---|
| د عين علامو د ضرب حاصل مثبت دی. | $+ \times + = +$<br>$- \times - = +$ |
| او د مختلفو علامو د ضرب حاصل منفي دی. | $+ \times - = -$<br>$- \times + = -$ |

د $+ = - \times -$ ثبوت:

اول د $+ = - \times -$ ثبوت په عدد:

$$5 \times 8 = 40$$

$$(6-1)(9-1) = 40$$

$$54 - 6 - 9 \boxdot 1 = 40$$

$$54 - 15 \boxdot 1 = 40$$

$$39 \boxdot 1 = 40$$

که په خالي خانه کې + علامه وليکل شي د مساوات دواړه خواوي مساوي کيږي نو معلومه شوه چې:

$$(-1)(-1) = +1$$

ketabton.com - The Digital Library

دویم د $- \times - = +$ ثبوت په حروف:

$$(-a)(-b) = ab$$
$$(-a)(-b) = x \ldots\ldots\ldots\ldots I$$
$$(-a)(-b) - ab = x - ab$$
$$-a(-b + b) = x - ab$$
$$-a(0) = x - ab$$
$$0 = x - ab$$
$$ab = x$$

په $I$ رابطه کې د $x$ په عوض $ab$ وضع کوؤ.

$$(-a)(-b) = ab$$

ثابته شوه چې $- \times - = +$ کیږي.

د $+ \times - = -$ ثبوت:

$$(+3)(+4) = 12$$
$$(+3)(+3) = 9$$
$$(+3)(+2) = 6$$
$$(+3)(+1) = 3$$
$$(+3)(\ 0\ ) = 0$$
$$(+3)(-1) = -3$$
$$(+3)(-2) = -6$$

ثابته شوه چې $+ \times - = -$

مثال:

$$(+5)(+6) = 30$$
$$(-8)(-9) = 72$$
$$(-5)(+8) = -5$$
$$(+4)(-7) = -28$$

$$\begin{array}{r} -13 \\ \underline{-\ 5} \\ +65 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +3 \\ \underline{-4} \\ -12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -9 \\ \underline{+3} \\ -27 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +8 \\ \underline{+7} \\ +56 \end{array}$$

ketabton.com - The Digital Library


د الجبري عددونو تقسيم:

علامه په علامه او عدد په عدد ويشو لمړى د علامو خارج قسمت په يوه جدول کې مطالعه کوؤ.

$\frac{+}{+} = +$ $\frac{-}{-} = +$ $\frac{+}{-} = -$ $\frac{-}{+} = -$

$\frac{+18}{+3} = +6$ $\frac{-15}{-5} = +3$ $\frac{+12}{-6} = -2$ $\frac{-10}{+2} = -5$

## د پولينومونو څلور ګونې عمليې

1- د پولينومونو جمع:

د جمع عوامل داسې يو تر بل لاندې ليکو چې مشابه حدونه يو تر بل لاندې راشي بيا هم علامه مشابه حدونه جمع کوو او علامه يې شريکه علامه ليکو او مختلف العلامه مشابه حدونه يو د بل څخه منفي کوو علامه د لوى عدد ليکو.

$$\begin{array}{r} 7x^3 + 8x^2 - 11x + 8 \\ \underline{11x^3 + 9x^2 + 15x - 3} \\ 18x^3 + 17x^2 + 4x + 5 \end{array}$$

2- د پولينومونو تفريق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې مشابه حدونه يو د بل لاندې راشي بيا د مفروق علامو ته تغير ور کوؤ او د جمع عمليه پرې تطبيقوو.

مثال:

$$\begin{array}{r} 13x^4 - 15x^3 + 8x^2 - 20x + 8 \\ \underline{\pm 35x^4 \pm 9x^3 \pm 11x^2 \pm 9x \mp 16} \\ -22x^4 - 24x^3 - 3x^2 - 29x + 24 \end{array}$$

3- د پولينومونو ضرب:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو بيا علامه په علامه کې او عدد په عدد کې او حرف په حرف کې ضربوو په اخر کې مشابه حدونه جمع کوؤ د پولينومونو دضرب حاصل لاس ته راځي.

ketabton.com - The Digital Library


مثال:

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 5x^2 + 7x - 7 \\ 7x^2 - 8x + 9 \\ \hline 21x^5 - 35x^4 + 49x^3 - 49x^2 \qquad\qquad\quad \\ - 24x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 56x \qquad \\ 27x^3 - 45x^2 + 63x - 63 \\ \hline 21x^5 - 59x^4 + 116x^3 - 150x^2 + 119x - 63 \end{array}$$

4- د پولینومو تقسیم:

د مقسوم اول حد د مقسوم علیه په اول حد ویشو حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوونی د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو حد را کښته کوو نوی مقسوم جوړو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا یې درجه د مقسوم علیه د درجې څخه کمه شي دغې پاتې شوي برخې ته باقي وایي.

مثال:

$$\begin{array}{r|l} 72x^5 + 95x^4 - 39x^3 + 9x^2 + 64x - 21 & 8x^2 + 7x - 3 \\ \cline{2-2} \pm 72x^5 \pm 63x^4 \mp 27x^3 \qquad\qquad\qquad & 9x^3 + 4x^2 - 5x + 7 \\ \cline{1-1} 32x^4 - 12x^3 + 9x^2 \qquad\quad & \\ \pm 32x^4 \pm 28x^3 \mp 12x^2 \qquad\quad & \\ \cline{1-1} -40x^3 + 21x^2 + 64x \qquad & \\ \mp 40x^3 \mp 35x^2 \pm 15x \qquad & \\ \cline{1-1} 56x^2 + 49x - 21 & \\ \pm 56x^2 \pm 49x \mp 21 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

ketabton.com - The Digital Library



د باقي مانده دعوه :

د صحيح عددونو تقسيم ميزان په لاندې ډول دی

باقي + خارج قسمت × مقسوم عليه = مقسوم

که مقسوم په $P(x)$ اومقسوم عليه په $(x-a)$ اوخارج قسمت په $Q(x)$ او باقي په $R$ وښيونو ليکو چې:

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

که $x = a$ وي نو د $x$ په عوض $a$ وضع کوو نو :

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R$$

$$Q(a) = R$$

دی دعوی ته د باقيمانده دعوه يا $Remainder's\ Theorem$ وائي.

مثال: وښياست چه $x+2$ د $P(x) = 3x^2 + 5x^2 - 4x - 4$ د پولينوم جذر دی او که نه دی؟

حل: د $x+2$ جذر پيدا کوو.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

د $P(x)$ په پولينوم کې د $x$ په عوض $(-2)$ وضع کوو که $f(x) = 0$ شونو $(-2)$ د پولينوم جذر دی او $x+2$ د پولينوم فکتور دی.

$$P(-2) = 3(-\ 2)^3 + 5(-2)^2 - 4(-2) - 4$$

$$P(-2) = 3(-8) + 5(4) + 8 - 4$$

$$P(-2) = -24 + 20 + 8 - 4$$

$$P(-2) = -28 + 28$$

$$P(-2) = 0$$

$$R = 0$$

$x+2$ د $P(x)$ د پولينوم فکتور دی او $(-2)$ ئي جذر دی.

ketabton.com - The Digital Library


مثال: هغه افاده پيدا کړئ چه په $x-1$ باندی وویشل شي باقي ئي $(-3)$ شي او که په $x+2$ باندې وویشل شي باقي ئي $-9$ شي.

$p(x) = ax + b$

$p(1) = a.1 + b = -3$

$p(-2) = a(-2) + b = -9$

$a + b = -3$

$\mp 2a \pm = \mp 9$

$3a = 6$

$3a = 6 \Rightarrow a = 2$

$a + b = -3 \Rightarrow 2 + b = -3 \Rightarrow b = -3 - 2 = -5$

$b = -5$

مطلوبه افاده $(2x-5)$ ده.

تمرين:

1- جمع يې کړئ؟

a-
$$\begin{array}{r} 11x^3 - 11x^2 + 7x - 9 \\ 8x^3 + 16x^2 - 11x + 13 \\ 9x^3 - 4x^2 + x - 2 \\ \hline \end{array}$$

b-
$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x + 16 \\ 7x^2 - 20x + 8 \\ 5x^2 + 3x - 11 \\ \hline \end{array}$$

2- تفريق کړئ؟

a-
$$\begin{array}{r} 8x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 3x + 15 \\ 7x^4 - 20x^3 - 8x^2 + 9x - 20 \\ \hline \end{array}$$

b-
$$\begin{array}{r} 11x^3 - 13x^2 + 20x - 8 \\ 5x^3 + 15x^2 + 8x + 11 \\ \hline \end{array}$$

3- ضرب يې کړئ؟

a-
$$\begin{array}{r} 4x^3 - 8x^2 + 5x - 2 \\ 7x^2 - 8x + 6 \\ \hline \end{array}$$

b-
$$\begin{array}{r} 2x^2 - 4x + 7 \\ 3x^2 + 7x - 8 \\ \hline \end{array}$$

c-
$$\begin{array}{r} 6x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \\ 3x^3 - 8x^2 + 6x - 8 \\ \hline \end{array}$$

ketabton.com - The Digital Library



4- تقسیم یې کړئ؟

$$\frac{15x^5+16x^4-73x^3+101x^2-5x+6}{3x^2+8x-6} - a$$

$$\frac{21x^4+67x^3-58x^2-119x+77}{7x^2+6x-11} - b$$

$$\frac{35x^6-59x^5+36x^4+35x^3-74x^2+60x-24}{5x^3-7x^2+6x-3} - c$$

$$\frac{16x^4+96x^3y+216x^2y^2+216xy^3+81y^4}{2x+37} - d$$

## ترکیبي تقسیم *Synthetic Division*

هغه تقسیم دی چه د خارج قسمت د ضریبو د پیدا کولو لپاره د مقسوم ضریبونه ټول په یوه وار استعمالیږي.

طریقه یې داسې ده چه د مقسوم ضریبونه په یوه افقي کرښه کې لیکود کرښې په اخر کې په یوه کنج کې د قیمت لیکوبیا یوې کرښې ته ځای پریږدو او یو خط کشوو دمقسوم د پولینوم د اول حد ضریب بې له کوم تغیره راکښته کوو. د $x$ په قیمت کې یې ضربوو د دویم حد دضریب لاندې یې لیکو او ورسره جمع کوو یې. د جمع حاصل د $x$ په قیمت کې ضربوو. په همدې ترتیب تر اخره اجراات کوو. د خط لاندې اخرنې عدد د R قیمت دی. او نور عددونه د خارج قسمت ضریبونه دي د خارج قسمت درجه د مقسوم د درجې څخه یوه کمه ده.

که R=0 وي نو $x$-$a$ د مقسوم دپولینوم فکتور دی. او د قیمت د پولینوم جذر دي.

مثال:-د ترکیبي تقسیم پواسطه وښیاست چه $(x-2)$ د $P(x)=x^4+6x^3-8x^2-12x-8$ د پولینوم فکتور دي.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | +6 | -8 | -12 | -8 | 2 |
| | 2 | 16 | 16 | 8 | |
| 1 | 8 | 8 | 4 | 0 | |

$R=0$ نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او $(2)$ د پولینوم جذر دی او $q(x)=x^3+8x^2+8x+4$ د خارج قسمت پولینوم دي.

ketabton.com - The Digital Library

که بینوم د $(x-a)$ شکل لرلو و نو په زاویه کې $(+a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(x+a)$ شکل لرلوو نو په زاویه کې $(-a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(ax \pm b)$ شکل لرلو نو په زاویه کې $\left(\pm\frac{b}{a}\right)$ لیکل کیږي نوره طریقه کې کوم فرق نه لري.

## تمرین

1 : د باقیمانده دعوی پواسطه یي حل کړئ؟

کومه افاده ده چه که په $(x+3)$ وویشل شي باقي یي $(-24)$ شي او که په $(2x-3)$ وویشل شي باقي یي $(-6)$ شي

2 : د ترکیبي تقسیم پواسطه یي حل کړئ؟

$$a:\ \frac{x^4-6x^3+15x^2-6x-40}{x-3}$$

$$b:\ \frac{2x^4-13x^3+4x^2+24x-28}{2x+3}$$

$$c:\ \frac{6x^3+4x^2-84x-9}{x+4}$$

$$d:\ \frac{12x^4-x^3-20x^2+8}{3x-2}$$

ketabton.com - The Digital Library



# دويم فصل

## مساوات

د دوه افادو د عددي قيمتو برابرى ته مساوات وايي.

مساوات په دوه قسمه دى.

1- مطابقت 2- شرطيه مساوات يا معادله

### 1- مطابقت:

مطابقت هغه مساوات دى چې د مجهول په ټولو قيمتو باندې يې دواړه خواوي مساوي وي.

د اساتيا لپاره مطابقتونه په شپږو ګروپو کې مطالعه کوو.

1 ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a+b)^n$ شمکل ولري.

د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف $n+1$ حدونه لري د ټولو حدونو علامې يې مثبت دي په اول حد کې د $a$ توان $n$ د $b$ توان صفر دى په نورو حدو کې د $a$ د توان څخه يو کميږي $b$ ته ورکول کيږي تر څو چې د $a$ توان صفر او د $b$ توان $n$ شي د اول حد ضريب يو دى د دويم حد ضريب $n$ دى د نورو حدو د ضريبو د لاس ته راوړلو لپاره د مخکيني حد ضريب د $a$ په توان کې ضربوو د مخکينو حدو په شمېر يې ويشو.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$
$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$
$$(a+b)^9 = ?$$
$$(a+b)^{10} = ?$$
$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 + \dots\dots + nab^{n-1} + b^n$$

ketabton.com - The Digital Library

2- گروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a-b)^n$ شکل ولري:

د دې گروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې د اول گروپ د مطابقتو په څیر دي. صرف داول گروپ د ټول حدو علامې مثبت دی او د دویم گروب د هر مطابقت د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده په همدې ترتیب د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

$$(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$$

$(a-b)^9 = ?$

$(a-b)^{10} = ?$

$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 \ldots\ldots + nab^{n-1} - b^n$

3- دریم گروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n - b^n$ شکل لري:

د دې گروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي اول قوس د دواړه حدو د قاعدو تفاضل دی دویم قوس $n$ حدونه لري د ټول حدو علامې مثبت دي په اول حد کې د $a$ توان $n-1$ دی د $b$ توان صفر دی په نورو حدو کې د $a$ د توان څخه یو کمیږي $b$ ته ورکول کیږي تر څو چې د $a$ توان صفر او د $b$ توان $(n-1)$ شي.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

ketabton.com - The Digital Library


$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$
$a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$

|

|

|

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

4- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او $n$ طاق وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو مجموعه ده دویم قوس $n$ حدونه لري د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم حد علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي. په اول حد کې د $a$ توان $n-1$ دی د $b$ توان صفر دی په نورو حدو کې د $a$ د توان څخه یو کمیږي $b$ ته ورکول کیږي تر څو چې د $a$ توان صفر شي او د $b$ توان $n-1$ شي.

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^4 + b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$
$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
$a^6 + b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$
$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

$a^9 + b^9 = ?$

$a^{11} + b^{11} = ?$
$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$

5- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او $n$ جفت وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه مزدوجو قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي د هر قوس اول حد د دواړو حدودقاعدو مجموعه ده او دویم حد یې د دواړو حدو د قاعدو د حاصل ضرب د دوه چند جذر دی.

$a^2 + b^2 = (a + b - \sqrt{2ab})(a + b + \sqrt{2ab})$
$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = \left(a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2}\right)\left(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2}\right)$

ketabton.com - The Digital Library


$= (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$

$a^6 + b^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{2a^3b^3})(a^3 + b^3 + \sqrt{2a^3b^3})$

**شپږم گروپ:** هغه مطابقتونه چې د $(a + b + c)^2$ شکل ولري د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې شپږ حدونه لري دري لمړي حدونه يې مربعګاني دي دري وروستي حدونه يې د دوه حدو د حاصل ضرب دوه چند دي.

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

مثال: انکشاف ورکړئ؟

1: $(2x + 3y)^2 = (2x)^3 + 3(2x)^2 3y + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^2$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

2: $(4x - 5y)^4 = (4x)^4 - 4(4x)^3(5y) + 6(4x)^2(5y)^2 - 4(4x)(5y)^3 + (5y)^4$

$= 256x^4 - 1280x^3y + 2400x^2y^2 - 2000xy^3 + 625y^4$

3: $(2x + 3y + 5z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2 \times 2x \times 3y$

$+2 \times 2x \times 5y + 2 \times 3y \times 5z$

$= 4x^2 + 9y^2 + 25y^2 + 12xy + 20xz + 30yz$

2- مثال: تجزيه يې کړئ؟

1: $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$

5: $9x^4 + 36y^4 = (3x^2)^2 + (6y^2)^2 = \left(3x^2 + 6y^2 - \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}\right)$

$(3x^2 + 6y^2 + \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2})$

$(3x^2 + 6y^2 - 6xy)(3x^2 + 6y^2 + 6xy)$

تمرين:

انکشاف ورکړئ

1- $(3x + 5y)^2$    2- $(2x + 7y)^3$    3- $(4x + 5y)^4$

4- $(4x - 5y)^5$    5- $(3x - 7y)^4$    6- $(2x - 3y)^6$

ketabton.com - The Digital Library



$\frac{8}{125}x^3 - \frac{216}{1331}y^3$ -9 $\quad 8m^3 - 125n^3$ -8 $\quad 7x^2 - 9y^2$ -7

$\frac{125}{216}x^3 + \frac{729}{1728}y^3$ -12 $\quad 64m^3 + 1000n^3$ -11 $\quad 8x^3 + 27y^3$ -10

$\frac{81}{625}m^4 + \frac{1296}{2401}n^4$ -15 $\quad 16x^4 + 256y^4$ -14 $\quad 4x^2 + y^2$ -13

$(\frac{2}{8}x - \frac{4}{5}y - \frac{7}{8}z)^2$ -18 $\quad (3x + 2y - 5z)^2$ -17 $\quad (2x + 3y + 5z)^2$ -16

## تجزیه:

تجزیه په لغت کې ټوټه ، ټوټه کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوې افادې د ضربي عواملو د پیدا کولو طریقې ته تجزیه وایي.

1- د مشترک نیولو پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

که د یوې افادې په ټولو حدو کې کوم عدد یا حرف شامل وي دا شامل مشترک نیسو د قوس د باندې یې لیکو بیا د افادې هر حد په دې مشترک ویشو د قوس په داخل کې یې لیکو افاده تجزیه کیږی.

1: $3x^2 - 15 = 3(x^2 - 5)$

2: $5x^2 - 15x + 10 = 5(x^2 - 3x + 2)$

3: $4x^3 + 24x^2 - 36x = 4x(x^2 + 6x - 9)$

4: $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x(x - 3)$

2- د $a^2 - b^2$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

1: $4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2 = (2x - 5y)(2x + 5y)$

2: $\frac{4}{25}m^2 - \frac{9}{49}n^2 = \left(\frac{2}{5}m\right)^2 - \left(\frac{3}{7}n\right)^2 = \left(\frac{2}{5}m - \frac{3}{7}n\right)\left(\frac{2}{5}m + \frac{3}{7}n\right)$

3: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = \left(\frac{x}{6}\right)^2 - \left(\frac{y}{7}\right)^2 = \left(\frac{x}{6} - \frac{y}{7}\right)\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{7}\right)$

3- د $a^3 - b^3$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

1: $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

2: $64x^3 - 125y^3 = (4x)^3 - (5y)^3 = (4x - 5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2)$

3: $216m^3 - 343n^3 = (6m)^3 - (7n)^3 = (6m - 7n)(36m^2 + 42mn + 49n^2)$

ketabton.com - The Digital Library


4- د $a^3 + b^3$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

$$1:\ 8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

$$2:\ 216m^3 + 343y^3 = (6m)^3 + (7y)^3$$
$$= (6m + 7y)(36m^2 - 42my + 49y^2)$$

$$3:\ \frac{8}{27}x^3 + \frac{125}{216}y^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{5}{6}y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{9}xy + \frac{25}{36}y^2\right)$$

ترینوم:

درې حده افادې ته ترینوم وایي.

عمومي شکل یې $ax^2 + bx + c$ دی.

د ترینوم تجزیه:

د ترینوم تجزیه په دوه حالته کې مطالعه کوو.

1- چې $a = 1$ وي

2- $a \neq 1$ وي.

1- چې $a = 1$ وي ترینوم د $x^2 - bx + c$ شکل غوره کوي د ترینوم د دغه شکل د تجزیې لپاره داسې دوه عدده پیدا کوو چې د ضرب حاصل یې $c$ او د جمع حاصل یې $b$ شي. فرضاً $m$ او $n$ داسې دوه عددونه دي.

یعنې $b = m + n$ او $c = mn$ دي نو:

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

قوس خلاصوو

$$x^2 + mx + nx + mn$$

ګروپ بندي کوو یې:

$$x(x + m) + n(x + n)$$
$$(x + m)(x + n)$$

ketabton.com - The Digital Library



1- مثال:

$x^2 + 11x + 30$

$x^2 + 5x + 6x + 30$

$x(x+5) + 6(x+5)$

$(x+5)(x+6)$

2- مثال:

$x^2 - 11x + 30$

$x^2 - 5x + 6x + 30$

$x(x-5) - 6(x-5)$

$(x-5)(x-6)$

نوټ: که په ترینوم کې د $(c)$علامه $(+)$وه هغه عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي هم علامه دي بیا د $b$ علامی ته ګورو که د $b$ علامه $(+)$ وه عددونه دواړه مثبت دي او که د $b$ علامه منفي وه عددونه دواړه منفي دي.

1: $x^2 + 15x + 36$

$x^2 + 12x + 3x + 36$

$x(x+12) + 3(x+12)$

$(x+12)(x+3)$

2: $x^2 - 13x + 40$

$x^2 - 8x - 5x + 40$

$x(x-8) - 5(x-8)$

$(x-8)(x-5)$

2- که په ترینوم کې د $c$ علامه منفي وه نو عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي مختلف العلامه دي بیا د $b$ علامې ته ګورو که د $b$ علامه $(+)$ وه لوی عدد مثبت دی او که د $b$ علامه منفي وه لوی عدد منفي وي.

1: $x^2 + 5x - 66$

$x^2 - 6x + 11x - 66$

$x(x-6) + 11(x-6)$

$(x-6)(x+11)$

ketabton.com - The Digital Library

2: $x^2 - 5x - 66$

$x^2 - 11x + 6x - 66$

$x(x - 11) + 6(x - 11)$

$(x - 11)(x + 6)$

تمرين:

1- $x^2 + 15x + 44$　　2- $x^2 + 19x + 70$　　3- $x^2 + 29x + 180$

4- $x^2 - 16x + 55$　　5- $x^2 - 21x + 90$　　6- $x^2 - 13x + 36$

7- $x^2 + 6x - 135$　　8- $x^2 + 11x - 210$　　9- $x^2 + 31x - 630$

10- $x^2 - 7x - 170$　　11- $x^2 - 9x - 400$　　12- $x^2 - 25x - 186$

2- حالت چې $a \neq 1$ وي.

د ترينوم د دغه حالت د تجزيې لپاره داسې دوه عددونه پيدا کوو چې دضرب حاصل يې $ac$او د جمع حاصل يې $b$ شي؟

1. $3x^2 + 11x + 10$
   $ac = 3(10) = 30$
   $b = 11$
   $3x^2 + 6x + 5x + 10$
   $3x(x + 2) + 5(x + 2)$
   $(x + 2)(3x + 5)$
2. $5x^2 - 19x + 12$
   $ac = 5(12) = 60$
   $b = -19$
   $5x^2 - 15x - 4x + 12$
   $5x(x - 3) - 4(x - 3)$
   $(x - 3)(5x - 4)$
3. $7x^2 + 3x - 34$
   $ac = 7(-34) = -238$
   $7x^2 - 14x \quad x - 34$
   $7x(x - 2) + 17(x - 2)$
   $(x - 2)(7x + 17)$

ketabton.com - The Digital Library



4. $11x^2 - 23x - 30$
$ac = 11(-30) = 330$
$b = -23$
$11x^2 - 33x + 10x - 3$
$11x(x-3) + 10(x-3)$
$(x-3)(10x+10)$

تمرين:

لاندې ترينومونه حل کړئ؟

1- $5x^2 + 11x + 2$ | 2- $7x^2 + 24x + 9$ | 3- $3x^2 + 31x + 80$

4- $7x^2 - 19x + 10$ | 5- $5x^2 - 22x + 21$ | 6- $2x^2 - 17x + 35$

7- $3x^2 + 2x - 33$ | 8- $4x^2 + 7x - 57$ | 9- $7x^2 + 3x - 34$

10- $5x^2 - 10x - 54$ | 11- $7x^2 - 11x - 30$ | 12- $8x^2 - 23x - 85$

## د ګروپ بندۍ پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

که د يوې افادې حدونه تر دريو حدو زيات وه او په ټولو حدو کې يو کوم حرف يا عدد شامل نه ؤ مګر په بعضو حدو کې شامل ؤ دغسې افاده په ګروپو ويشو په هر ګروپ کې شامل مشترک نيسو تر مشترک نيولو وروسته بايد قوسونه مساوي وي قوسونه مشترک نيسو افاده په قوسو تجزيه کيږي.

$x^3 + 5x^2 + 3x + 15$
$x^2(x+5) + 3(x+5)$
$(x+5)(x^2+3)$

## د تجزيې د استعمال ځايونه:

تجزيه د څو افاده د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک د پيدا کولو لپاره استعماليږي.

لوی مشترک قاسم G.C.D:

د څو افادو لوی مشترک قاسم هغه افاده ده چې تر ټولو هغې په بله غټه افاده باندې راکړ شوي افادې تقسيم نشي لکه $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ چې په $x + 3$ باندې ويشل کيږي نو $x + 3$ د پورته افادو لوی مشترک قاسم وي.

ketabton.com - The Digital Library

کوچني مشترک مضرب L.C.M:

د څو افادو کوچنی مشترک مضرب هغه افاده ده چې تر هغې بله کوچنۍ افاده په راکړ شو افادو باندې تقسیم نه شي. لکه $x^3 + 14x^2 + 61x + 84$ چې په $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ باندې تقسیمیږي او تر دې بله کوچنۍ افاده په راکړ شوو افادو باندې نه تقسیمیږي دې افادې ته د راکړ شوو افادو کوچنی مشترک مضرب دی.

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

افادې تجزیه کوو په ضربي عواملوکې یې مشترک او غیرمشترک پیدا کووکه په مشترکو ضربي عواملوکې د (کوچني) توان والا ضربي عوامل ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي او که د لوړ توان والا ضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د لاندې افادو لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1: $(x^2 + 2x)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x$

حل:

1: $(x^2 + 2x)^2 = \{x(x+2)\}^2 = x^2(x+2)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(2x^2 + 3x - 2) = x^2(x+2)(2x-1)$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x = x(2x^2 - 3x - 14) = x(x+2)(2x-7)$

$G.C.D = x(x+2) = x^2 + 2x$

$L.C.M = x^2(x+2)^2(2x-1)(2x-7)$

تمرین:

لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب یې پیدا کړئ؟

1- $2ax^3 - 4a^3x - 6a^3$

2- $ax^2 + 2a^2x + a^3$

3- $3a^2(x+a)^2$

ketabton.com - The Digital Library

## الجبري کسرونه

الجبري کسر هغه افاده ده چې په مخرج کې یې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{x^2+3x-2}{x}\ ,\qquad \frac{3}{x+1}$$

الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

1- ناطق الجبري کسرونه 2- غیر ناطق الجبري کسرونه

### 2- ناطق الجبري کسرونه :

هغه الجبري کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې نه وي.

ناطق الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه کوچنۍ وي لکه $\frac{x}{x^2+5x+1}$ یا $\frac{2}{x+3}$

b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه زیا ته یا ورسره مساوي وي. لکه:

$$\frac{4x^2+5x-1}{x^2+3x-4}\ ,\ \frac{3x^2+5x+3}{x+5}$$

### 2- غیر ناطق الجبري کسرونه :

هغه کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې وي.

لکه $\frac{3\sqrt{x}+1}{x+2}$ ، $\frac{x+5}{\sqrt{x}+3}$\

### د الجبري کسرو خواص:

1- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده کې ضرب شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x+3}{x+7}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+7)(x-1)}=\frac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$$

ketabton.com - The Digital Library

2- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x^2+11x+24}{x^2+5x+6}=\frac{\frac{x^2+11x+24}{x+3}}{\frac{x^2+5x+6}{x+3}}=\frac{\frac{(x+3)(x+8)}{x+3}}{\frac{(x+3)(x+2)}{x+3}}=\frac{x+8}{x+2}$$

3- هر کسر درې علامې لري یوه د صورت علامه ده دویم د مخرج علامه ده او دریم د ټول کسر علامه ده که په دې درې علامو کې دوه علامو ته تغیر ورکړو په کسر کې تغیر نه راځي.

$$-\frac{-x}{-y}=-\frac{x}{y}=+\frac{x}{-y}=+\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}$$

## د الجبري کسرونو جمع:

د کسرونو مخرج مشترک پیدا کوو او د حسابي کسرونو په څیر عملیه پرې اجراء کوؤ.

1: $\frac{x}{x+5}+\frac{3x-1}{x+5}-\frac{x+3}{x+5}=\frac{x+3x-1-x-3}{x+5}=\frac{3x-4}{x+5}$

2: $\frac{x+3}{x^2-4}+\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+7}{x+2}=\frac{x+3+x^2+x-2+x^2+5x-14}{(x-2)(x+2)}$

$=\frac{2x^2+7x-13+1}{x^2-4}$

3: $\frac{x}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}=\frac{x(x+2)+(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x^2+2x+x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$

$=\frac{2x^2+6x+3}{x^2+3x+2}$

## د الجبری کسرونو تفریق:

که وغواړو چې د یوه الجبري کسر څخه بل الجبري کسر تفریق کړ د مفروق علامو ته تغیر ورکوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

د الجبري کسرونو ضرب:

صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

که د یوه کسر صورت د بل کسر د مخرج سره اختصاریدلو اختصاروو بیا یې ضربوو.

1: $\frac{x+3}{x+1}\times\frac{x-3}{x+5}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+5)}=\frac{x^2-9}{x^2+6x+5}$

ketabton.com - The Digital Library



$$2:\quad \frac{x^2-2x}{x+2}\times\frac{x^2+3x+2}{x^2+3x-10}=\frac{x(x-2)}{x+2}\times\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+5)}=\frac{x(x+1)}{x+5}$$
$$=\frac{x^2+x}{x+5}$$

## د الجبري کسرونو اختصار:

صورت او مخرج تجزيه کړو مساوي ضربي عوامل د صورت او مخرج څخه حذفوو.

$$1:\quad \frac{x^2+3x-28}{x^2+9x+14}=\frac{(x+7)(x-4)}{(x+7)(x+2)}=\frac{x-4}{x+2}$$

$$2:\quad \frac{x^2+3x}{x^2+11x+24}=\frac{x(x+3)}{(x+3)(x+8)}=\frac{x}{x+8}$$

## د الجبري کسرونو تقسيم:

د تقسيم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم عليه سرچپه کوو.

$$1:\quad \frac{x^2+13x+30}{x+5}\div\frac{x^2+8x+15}{x^2+6x+15}$$
$$\frac{x^2+13x+30}{x+5}\times\frac{x^2+6x+5}{x^2+8x+15}$$
$$\frac{(x+3)(x+10)}{x+5}\times\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+5)}=\frac{(x+10)(x+1)}{x+5}=\frac{x^2+11x+10}{x+5}$$

$$2:\quad \frac{x^2-11x+18}{x-3}\div\frac{x^2+7x-18}{x^2-9}$$
$$\frac{x^2-11x+18}{x-3}\times\frac{x^2-9}{x^2+7x-18}$$
$$\frac{(x-2)(x-9)}{x-3}\times\frac{(x-3)(x+3)}{(x+9)(x-2)}=\frac{(x-9)(x+3)}{x+9}=\frac{x^2-6x-27}{x+9}$$

## تمرين:

1- لاندې کسرونه جمع کړئ؟

1- $\frac{2x-3y}{6y^2}+\frac{18xy-9y^2}{9y^2}$ 2- $\frac{x+5}{x^2}+\frac{x-3}{x}-\frac{x+7}{x^3}$

ketabton.com - The Digital Library


3- $\frac{x+11}{x+3}+\frac{x-1}{x+2}$ 4- $\frac{2x+1}{x^2-16}+\frac{x+3}{x-4}+\frac{x-1}{x+4}$

5- $\frac{x}{x+5}+\frac{3x+1}{x+5}-\frac{x-2}{x+5}$ 6- $\frac{2}{x+7}+\frac{3}{x-7}$

2- لاندي کسرونه اختصار کړئ؟

1- $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$ 2- $\frac{x^2+5x-24}{x+8}$ 3- $\frac{x^2-7x-44}{x^2-9x-22}$

3- لاندي کسرونه ضرب کړئ؟

1- $\frac{x^2+5x+6}{x+5}\times\frac{x^2+7x+6}{x^2+x-6}$ 2- $\frac{x^2+x}{x-1}\times\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$

3- $\frac{x^2-3x-28}{x-7}\times\frac{x+5}{x+4}$ 4- $\frac{x^2+3x-40}{x+8}\times\frac{x-3}{x+5}$

4- لاندي کسرونه تقسیم کړئ؟

1- $\frac{x^2+13x+6}{x+5}\div\frac{x^2+11x+28}{x^2+12x+35}$ 2- $\frac{x}{x+1}\div\frac{x+1}{x}$

3- $\frac{x^2}{x-1}\div\frac{x}{x^2-1}$ 4- $\frac{x}{x+3}\div\frac{x^2}{x^2-9}$

5- $\frac{x+5}{x}\div\frac{x+5}{x}$

## د کسرونو ګویا کول:

د یوه کسر د صورت یا مخرج څخه د جذر د منځه وړلو ته د کسر ګویا کول وایي. معمول په ریاضي کې د مخرج ګویا کول دي.

د کسر د مخرج ګویا کول څلور حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې یو جذري حد وي او د جذر درجه یې $(2)$ وي. لکه $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ ، $\frac{3}{\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو.

$$\frac{3x}{\sqrt{x}}=\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{x}=3\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x}}=\frac{2\times\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\times\sqrt{2x}}=\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}^2}=\frac{2\sqrt{2x}}{2x}=\frac{\sqrt{2x}}{x}$$

$$\frac{3}{\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}\times\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}^2}=\frac{3\sqrt{x^3}}{x^3}$$

2- چې دکسر په مخرج کې یو جذري حل موجود وي او د جذر درجه یې د (2) څخه ډېره وي

لکه $\frac{x}{\sqrt[3]{3}}$ ، $\frac{3}{\sqrt[5]{x}}$ ، $\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو د گویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو. او د جذر د درجې او د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوو.

$$1-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x\times x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x}=\sqrt[3]{x^2}$$

$$2-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x\times x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^5}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{x}$$

$$3-\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x}\times\sqrt[7]{x^6}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x\times x^6}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x^7}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{x}=2x\sqrt[7]{x^6}$$

3- چې د کسر مخرج کې دوه جذري حدونه موجود وي او د جذر درجه یې (2) وي.

لکه $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ، $\frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}$ ، $\frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$ او داسې نور.

صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربوو.

$$1:\quad \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2}$$
$$=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$2:\quad \frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{(\sqrt{x}-\sqrt{11})(\sqrt{x}+\sqrt{11})}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{11}^2}$$
$$=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{x-11}=\sqrt{x}+\sqrt{11}$$

$$3:\quad \frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3}-\sqrt{x})(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3})^2-(\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{x^3-x}=\sqrt{x^3}+\sqrt{x}$$

ketabton.com - The Digital Library


4- چې د کسر په مخرج کې دوه حدونه موجود وي او د جذر درجې يې د $(2)$ څخه زياتي وي

لکه: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}$ ، $\frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}$

که د جذري حدو تر منځ علامه منفي وه د $a^n - b^n$ د مطابقت د تجزيې دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو او که د منځ علامه يې مثبت وه نو د $a^n + b^n$ د مطابقت د تجزيې دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو.

$$1:\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}} = \frac{1\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5x^2}-\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{x-5}$$

$$2:\quad \frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}} = \frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}\right)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}$$

$$= \frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\sqrt[5]{x^5}-\sqrt[5]{3x^4}+\sqrt[5]{9x^3}-\sqrt[5]{27x^2}+\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{3x^4}-\sqrt[5]{9x^3}+\sqrt[5]{27x^2}-\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{243}}$$

$$= \frac{(x+3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right.}{x+3}$$

$$= \sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}$$

تمرين:

د لاندې کسرو مخرجونه ګويا کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{x}}$  2- $\frac{x}{\sqrt{x}}$  3- $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$  4- $\frac{3x}{\sqrt{x}}$  5- $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

6- $\frac{2x}{\sqrt[4]{x}}$  7- $\frac{x+1}{\sqrt[5]{x}}$  8- $\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}}$  9- $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$  10- $\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

11- $\frac{x}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$  12- $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$  13- $\frac{x+2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{2}}$  14- $\frac{m-n}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$  15- $\frac{x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$

ketabton.com - The Digital Library



## قسمي کسرونه:

که د دوه کسرونو د مجموعې څخه یو واقعي کسر جوړ شي. دغه کسرونه د واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}=\frac{2(x+5)+3(x+1)}{(x+1)(x+5)}=\frac{2x+10+3x+3}{x^2+6x+5}=\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$$

$\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$ یو واقعي کسر دی د $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}$ څخه لاس ته راغلی دی نو $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{3}{x+5}$ کسرونه یې قسمي کسرونه دي.

## د یوه واقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول:

د قسمي کسرو د پیدا کولو لپاره د واقعي کسر مخرج تجزیه کوو د مخرج د ضربي عواملو شمېر د قسمي کسرونو شمېر ښیي. د مخرج د ضربي عواملو په لحاظ د واقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول په څلورو حالتو کې مطالعه کوو.

1- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غیر تکراري بینومونه وي هر بینوم د یوه کسر مخرج دی صورت یې د الفباء په غټو حروفو ښیو عملیې پرې اجراء کوو د حروفو قیمتونه پیدا کوو د هغوی په عوض یې وضع کوو د واقعي کسر قسمي کسرونه لاس ته راځي. $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه پیدا کړئ؟

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{8x+51}{(x+6)(x+7)}=\frac{A}{x+6}+\frac{B}{x+7}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{(x+6)(x+7)}$$

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{x^2+13x+42}$$

مخرجونه یې مساوي دي نو $8x+51=A(x+7)+B(x+6)$

د $A$ او $B$ د قیمتو د پیدا کولو لپاره دوه حالتونه موجود دي.

الف: د جذر پواسطه د $A$ او د $B$ قیمتونه پیدا کوو نو د هر قوس جذر پیدا کوو.

$$x+7=0$$
$$x=-7$$

$-7$ د $x$ په عوض وضع کوو.

ketabton.com - The Digital Library


$$8(-7)+51=A(-7+7)+B(-7+6)$$
$$-56+51=A(0)+B(-1)$$
$$-5=0-B$$
$$-B=-5 \qquad B=5$$
$$x+6=0 \qquad x=-6$$

6- په معادله کې د $x$ په عوض وضع کوؤ.

$$8(-6)+51=A(-6+7)+B(-6+6)$$
$$-48+51=A(1)+B(0)$$
$$3=A \qquad A=3$$

د $A$ په عوض 3 او د $B$ په عوض 5 وضع کوؤ.

$$\frac{3}{x+6}+\frac{5}{x+7}$$

پورتني کسرونه د $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه دي.

ب: د عينيت پواسطه:

$$8x+51=A(x+7)+B(x+6)$$
$$8x+51=Ax+7A+Bx+6B$$
$$8x+51=Ax+Bx+7A+6B$$
$$8x+51=(A+B)x+7A+6B$$

په عينيت کې د مشابه حدو ضريبونه مساوي وي.

$$A+B=8$$
$$7A+6B=51$$
$$7A+7B=56$$
$$-7A\pm 6B=\pm 51$$
$$B=5$$
$$A+B=8\rightarrow A=8-5=3$$
$$A=3$$

2- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري بينومونه وي.

ketabton.com - The Digital Library



مثال: $\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x^2+2x+1)}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$5x^2+12x+2=A(x^2+2x+1)+Bx^2+Bx+Cx$$

$$=Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx$$

$$=Ax^2+Bx^2+2Ax+Bx+Cx+A$$

$$5x^2+12x+2=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$

$$A+B=5$$

$$2A+B+C=12$$

$$A=2$$

$$A+B=5\rightarrow 2+B=5 \qquad B=5-2=3$$

$$B=3$$

$$2A+B+C=12$$

$$2\times 2+3+C=12$$

$$4+3+C=12$$

$$7+C=12$$

$$C=12-7$$

$$C=5$$

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}$$

3- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غير تکراري ترينومونه وي. او د تجزيې وړ هم نه وي هغه کسر چې مخرج يې ترينوم وي په صورت کې يې بينوم ليکو.

ketabton.com - The Digital Library



مثال: $\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}$ قسمي کسرونه پیدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5x+7}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

مخرجونه یې مساوي دي نو.

$$5x^2+20x+21=A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=(A+B)x^2+(5A+C)x+7A$$

$$A+B=5$$

$$5A+C=20$$

$$7A=21$$

$$A=3$$

$$A+B=5\Rightarrow 3+B=5\Longrightarrow B=5-3=2$$

$$B=2$$

$$5A+C=20$$

$$5\times 3+C=20$$

$$15+c=20 \qquad C=20-15$$

$$C=5$$

$$\frac{3}{x}+\frac{2x+5}{x^2+5x+7}$$

پورتني کسرونه د راکړ شوي واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

4- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري ترینومونه وي. لکه:

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}$$

قسمي کسرونه یې داسې پیدا کوو.

ketabton.com - The Digital Library



$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+3x+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$=\frac{(Ax+B)(x^2+3x+5)+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax^3+3Ax^2+5Ax++Bx^2+3Bx+5B+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو :

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+3Ax^2+Bx^2+5Ax+3Bx+Cx+D+5B$$

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+(3A+B)x^2+(5A+3B+C)x+D+5B$$

$$A=2$$

$$3A+B=7$$

$$3\times 2+B=7\Rightarrow 6+B=7\Rightarrow B=7-6$$

$$B=1$$

$$5A+3B+C=14$$

$$5\times 2+3\times 1+C=14$$

$$10+3+C=14$$

$$3+C=14$$

$$C=14-13$$

$$C=1$$

$$5B+D=5$$

$$5\times 1+D=5$$

$$5+D=5$$

$$D=5-5$$

$$D=0$$

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+5}+\frac{x}{(x^2+3x+5)^2}$$

ketabton.com - The Digital Library

# دریم فصل

## معادله یا شرطیه مساوات

معادله هغه مساوات دی چې د مجهول په بعضو قیمتو یې دواړه خواوې مساوي وي.

لکه $5x + 3 = 13$ چې د $x = 2$ لپاره یې دواړه خواوي مساوي دي.

دغسې مساوات ته شرطیه مساوات وایي.

### د معادلې اقسام:

معادله ډېر قسمونه لري.

1- یو مجهوله اوله درجه معادله
2- دوه مجهوله اوله درجه معادله
3- درې مجهوله اوله درجه معادله
4- څلور مجهوله اوله درجه معادله
5- یو مجهوله دویمه درجه معادله
6- یو مجهوله دریمه درجه معادله
7- یو مجهوله څلورمه درجه معادله
8- جذري معادلې
9- اکسپونېنيشل معادلې
10- لوګاریتمي معادلې
11- مثلثاتي معادلې

### اول: یو مجهوله اوله درجه معادله:

هغه معادله ده چې مجهول یې یو او د مجهول درجه یې هم یوه وي.

عمومي شکل یې دا دی $ax + b$ چه $a$ او $b$ ثابت عددونه دي او $x$ مجهول دی څرنګه چې د $x$ توان یو دی نو ځکه ورته یو مجهوله اوله درجه معادله وایي.

ketabton.com - The Digital Library



## د معادلې خواص:

1- که د معادلې د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي په معادله کې تغیر نه راځي.

2- که د معادلې د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي په معادله کې تغیر نه راځي.

3- که د معادلې دواړه خواوي په عین عدد کې ضرب شي په معادله کې تغیر نه راځي.

4- که د معادلې دواړه خواوي په عین عدد تقسیم شي په معادله کې تغیر نه راځي.

5- که د معادلې دواړه خواوي په عین توان رفع شي په معادلې کې تغیر نه راځي.

6- که د معادلې دواړه خواوي تر عین جذر لاندې شي په معادله کې تغیر نه راځي.

د یو مجهوله اوله درجه معادلې د حل طریقه:

که د معادلې دواړه خواو ته حدونه موجود وي نو معلوم عددونه د مساوات ښي خواته او مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو.

هر حد چې د مساوات د یوې خوا څخه بلې خوا ته وړل کیږي که مثبت وي منفي کیږي که منفي وي مثبت کیږي که د ضرب په حالت کې وي په بل طرف کې مخرج ته ځي او که په مخرج کې وي په بل طرف کې ضربیږي.

مثال:

1: $x+5=8 \qquad x=8-5 \qquad x=3$

2: $x-7=11 \qquad x=11+7 \qquad x=18$

3: $3x=36 \qquad \frac{3x}{3}=\frac{36}{3} \qquad x=12$

4: $\frac{x}{5}=4 \qquad 5\times\frac{x}{5}=4\times5 \qquad x=20$

5: $\frac{5}{x}-3=-2 \qquad \frac{5}{x}=-2+3 \qquad \frac{5}{x}=\frac{1}{1} \qquad x=5$

6: $\frac{3}{x}+\frac{7}{x}+\frac{2}{x}=36$

$$\frac{3+7+2}{x}=36$$

ketabton.com - The Digital Library

$\frac{12}{x} = 36$ $\frac{12}{x} = \frac{36}{1}$ $36x = 12$

$\frac{36x}{36} = \frac{12}{36}$ $x = \frac{1}{3}$

## جذري معادلې

هغه معادلې دي چې مجهول یې تر جذر لاندې وي

لکه $\sqrt{3x+30} + 11 = 17$

## د جذري معادلو د حل طریقه:

یو جذري حد د مساوات یوې خواته پرېږدو نور جذري او غیرجذري حدونه د مساوات بلې خواته وړو. بیا د مساوات دواړه خواوې د جذر په درجه رفع کوو جذر د منځه ځي که بیا هم په معادله کې جذر موجود وُ عملیه تکراروو.

1- مثال:

$\sqrt{5x-4} + 8 = 14$

$\sqrt{5x-4} = 14 - 8 = 6$

$\sqrt{5x-4} = 6$

$\left(\sqrt{5x-4}\right)^2 = 6^2$

$5x - 4 = 36$

$5x = 36 + 4 = 40 \Longrightarrow 5x = 40 \Longrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{40}{5} \Longrightarrow x = 8$

$x = 8$

2- مثال:

$\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x+6} = 10$

$\sqrt{3x-2} = 10 - \sqrt{5x+6}$

$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{5x+6}\right)^2$

$3x - 2 = 100 - 20\sqrt{5x+6} + 5x + 6$

ketabton.com - The Digital Library


$$2x+108=-20\sqrt{5x+6}$$
$$\frac{2x+108}{2}=\frac{-20\sqrt{5x+6}}{2}$$
$$x+54=-10\sqrt{5x+6}$$
$$(x+54)^2=\left(-10\sqrt{5x+6}\right)^2$$
$$x^2+108x+2916=100(5x+6)$$
$$x^2+108x+2916=500x+600$$
$$x^2+108x-500x+2916-600=0$$
$$x^2-392x+2316=0$$
$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=196^2-1\times(2316)$$
$$\acute{\Delta}=38416-2316=36100$$
$$\acute{\Delta}=36100$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{2a}=\frac{-(-196)\pm\sqrt{36100}}{2\times 1}=\frac{196\pm 190}{2}$$
$$x_1=\frac{386}{2}=193$$
$$x_2=\frac{196-190}{2}=\frac{6}{2}=3$$

3- مثال:

$$\sqrt{3x-1}-\sqrt{3x+4}=-1\ \sqrt{3x-1}=\sqrt{3x+4}-1$$
$$\left(\sqrt{3x-1}\right)^2=\left(\sqrt{3x+4}-1\right)^2$$
$$3x-1=3x+4-2\sqrt{3x+4}+1$$
$$2\sqrt{3x+4}=6$$
$$\left(2\sqrt{3x+4}\right)^2=6^2$$
$$4(3x+4)=36$$
$$12x+16=36\Rightarrow 12x=36-16\Rightarrow 12x=20\Rightarrow\frac{12x}{4}=\frac{20}{4}$$
$$3x=5\quad\Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

ketabton.com - The Digital Library


3- مثال:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-7}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}$$

$$\sqrt{x}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}\right)^2$$

$$x=\frac{441}{x-7}-2\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}\times\sqrt{x-7}\right)+x-7$$

$$\frac{441}{x-7}-49=0\Rightarrow 49x-343=441\Rightarrow 49x=441+343=784$$

$$49x=784$$

$$\frac{49x}{49}=\frac{784}{49}\quad\Rightarrow x=16$$

$$x=16$$

تمرين

لاندې جذري معادلې حل کړئ

1. $\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x+9}=0$ $\qquad x=1$
2. $\frac{2x^2-128}{\sqrt{3+x^2}}=0$ $\qquad x=8$
3. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\frac{91}{\sqrt{x+13}}$ $\qquad x=36$
4. $\frac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=4+\frac{\sqrt{ax}-1}{2}$ $\qquad x=\frac{81}{a}$
5. $\sqrt[5]{x+8}=\sqrt[10]{x^2+64x+36}$ $\qquad x=\frac{7}{12}$
6. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\frac{\sqrt{x}-1}{2}$ $\qquad x=81$
7. $\sqrt{x+13}-\sqrt{2x+1}=0$ $\qquad x=12$
8. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$ $\qquad x=\frac{16}{25}$

ketabton.com - The Digital Library



9. $\sqrt{x}+5=6-\sqrt{x+7}$ $\qquad x=9$

10. $2(x+2)=1+\sqrt{4x^2+9x+14}$ $\qquad x=\frac{5}{3}$

تمرین:

1. $\frac{5-x}{4}+\frac{x}{8}=1$
2. $\frac{2}{x}-3=\frac{3}{x}-8$
3. $\frac{4}{x-3}+\frac{5}{x-3}+\frac{7}{x-3}=6$
4. $\frac{x}{2}-\frac{2x-8}{5}+\frac{4}{5}=3$
5. $\frac{x-1}{4}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{2}+x-4=4$
6. $\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}=2$

ketabton.com - The Digital Library


# خلورم فصل

## دوه مجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې دوه مجهوله ولري او د هر مجهول توان یې یو وي عمومي شکل یې دا دی.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

$a_1$ ، $a_2$ ، $b_2$ ، $b_2$ ، $c_1$ او $c_2$ ثابت عددونه دي $x$ او $y$ مجهولونه دي څرنګه چې د هر مجهول توان یو دی نو ځکه ورته اوله درجه دوه مجهوله معادلې وايي.

مناقشه:

1- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ وي سیستم زیات حلونه لري.

2- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_1} \neq \frac{c_1}{c_2}$ وي سیستم حل نلري.

3- که $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ وي سیستم یو حل لري.

### د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

اوله درجه دوه مجهوله معادلې په (6) طریقو حلیږي.

1- د جمع یا افناء په طریقه:

په دواړو معادلو کې د یوه مجهول ضریبونه مساوي کوو. که هم علامه ود معادلې یو د بل څخه منفي کوو او که مختلف العلامه وه معادلې جمع کوو پدې ترتیب د دوه مجهوله معادلو سیستم په یو مجهوله معادله بدلیږي یو مجهوله معادله حلوو او د مجهول قیمت یې پیدا کوو بیا دا جذر د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د دویم مجهول قیمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سیستم حل کړئ؟

$$7x + 8y = 38$$
$$5x + 3y = 19$$

ketabton.com - The Digital Library


$$5(7x + 8y = 38)$$
$$7(5x + 3y = 19)$$
$$35x + 40y = 190$$
$$\pm 35x \pm 21y = \pm 133$$
$$19y = 57$$
$$y = 3$$
$$7x + 8y = 38$$
$$7x + 8 \times 3 = 38$$
$$7x + 24 = 38$$
$$7x = 38 - 24$$
$$7x = 14$$
$$x = 2$$

2- مثال:

$$3x - 5y = 2$$
$$4x + 2y = 20$$
$$2(3x - 5y = 2)$$
$$5(4x + 2y = 20)$$
$$6x - 10y = 4$$
$$20x + 10y = 100$$
$$26x = 104$$
$$x = 4$$
$$4(4) + 2y = 20$$
$$16 + 2y = 20$$
$$2y = 20 - 16$$
$$2y = 4$$
$$y = 2$$

ketabton.com - The Digital Library 

تمرین:

لاندې سیستمونه د افناء په طریقه حل کړئ؟

1- $$\begin{aligned} 5x + 4y &= 32 \\ 8x - y &= 29 \end{aligned}$$

2- $$\begin{aligned} 6x - 8y &= 4 \\ 7x - 2y &= 12 \end{aligned}$$

3- $$\begin{aligned} 6x + 3y &= 21 \\ 5x + 7y &= 26 \end{aligned}$$

4- $$\begin{aligned} 9x - 2y &= -3 \\ 4x + 3y &= 57 \end{aligned}$$

2- په تعویضي طریقه د دوه مجهوله معادلو حل:

د یوې معادلې څخه د یو مجهول قیمت د بل له جنسه پیدا کوو او په بله معادله کې یې د همغه مجهول په عوض وضع کوو د دوه مجهوله معادلو سیستم په یو مجهوله معادله بدلیږي یو مجهوله معادله حلوؤ د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دا قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

مثال:

$$3x - 11y = 10$$
$$4x + 2y = 30$$

$$x = \frac{11y + 10}{3}$$

$$4\left(\frac{11y + 10}{3}\right) + 2y = 30$$

$$44y + 40 + 6y = 90$$
$$50y = 50$$
$$y = 1$$
$$3x - 11y = 10$$
$$3x - 11 \times 1 = 10$$
$$3x - 11 = 10$$
$$3x = 10 + 11$$
$$3x = 21$$
$$x = 7$$

ketabton.com - The Digital Library



تمرين:

لاندې سيستمونه په تعويضي طريقه حل کړئ؟

-1 $\begin{aligned} 3x + 13y &= 25 \\ 2x + 2y &= 10 \end{aligned}$

-2 $\begin{aligned} 6x - 5y &= 20 \\ 7x + 3y &= 41 \end{aligned}$

-3 $\begin{aligned} 11x + 5y &= 53 \\ 8x - 9y &= -12 \end{aligned}$

-4 $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x + y &= 12 \end{aligned}$

3- د مساوات په طريقه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

د دواړو معادلو څخه د يو مجهول قيمت د بل مجهول له جنسه پيدا کوو او سره مساوي کوو يې د دوه مجهوله معادلو سيستم په اوله درجه يو مجهوله معادله بدليږي يو مجهوله معادله حلوو د مجهول قيمت يې پيدا کوو د مجهول دغه قيمت د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قيمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سيستم حل کړئ؟

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= 19 \\ 5x - 2y &= 18 \end{aligned}$$

$$3x + 7y = 19 \qquad\qquad 5x - 2y = 18$$

$$3x = 19 - 7y \qquad\qquad 5x = 18 + 2y$$

$$x = \frac{19 - 7y}{3} \ldots\ldots I \qquad\qquad x = \frac{18 + 2y}{5} \ldots\ldots II$$

څرنګه چې په $I$ او $II$ نمبر مساواتو کې چپ طرفونه مساوي دي نو ښي طرفونه يې هم مساوي دي نو ليکو.

$$\frac{19 - 7y}{3} = \frac{18 + 2y}{5}$$

$$3(18 + 2y) = 5(19 - 7y)$$

$$54 + 6y = 95 - 35y$$

$$6y + 35y = -54 + 95$$

ketabton.com - The Digital Library



$$41y = 41$$

$$\frac{41y}{41} = \frac{41}{41}$$

$$y = 1$$

$$3x + 7y = 19$$

$$3x + 7 \times 1 = 19$$

$$3x + 7 = 19$$

$$3x = 19 - 7$$

$$3x = 12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \quad , \quad x = 4$$

تمرين:

1- $\begin{matrix} 4x + 2y = 14 \\ 15x - y = 10 \end{matrix}$ 　　 2- $\begin{matrix} 7x - 3y = 5 \\ 8x - 4y = 0 \end{matrix}$

3- $\begin{matrix} 11x + 6y = 40 \\ 2x + 9y = 31 \end{matrix}$ 　　 4- $\begin{matrix} 9x - 3y = 21 \\ 8x + 7y = 38 \end{matrix}$

4-د ديترمينانت په طريقه د دوه مجهوله اوله درجه معادلو حل:

ديترمينانت په لغت کې ( معين يا ثابت ) ته وايي او په اصطلاح کې د اعدادو مربعي ترتيب ته د يترمينانت وايي لکه $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

د ديترمينانت پواسطه د دوه مجهوله معادلو حل :

د $x$ او $y$ د ضريبو ديترمينانت په $D$ ښيو او قيمت يې پيدا کوو . د $x$ د ضريبو په عوض ثابت عددونه ليکو په $D_x$ يې ښيو قيمت يې پيدا کوو بيا د $D$ په ديتر مينانت د $y$ د ضريبو په عوض ثابت عددونه ليکو په $D_y$ يې نيسو او قيمت يې پيدا کوو د $\frac{D_x}{D}$ څخه د $x$ قيمت لاس ته راځي د $\frac{D_y}{D}$ څخه د $y$ قيمت لاس ته راځي.

مثال: $\begin{matrix} 3x - 5y = 2 \\ 5x + y = 22 \end{matrix}$ د ديترمينانت پواسطه حل کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library



$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$D = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 3 \times 1 - 5(-5) = 3 + 25 = 28 \Rightarrow D = 28$$

$$D_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$D_x = 2 \times 1 - 22(-5) = 2 + 110 = 112 \qquad D_x = 112$$

$$D_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$D_y = 3 \times 22 - 5(2) = 66 - 10 = 56 \qquad D_y = 56$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{112}{28} = 4 \qquad x = 4$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{56}{28} = 2 \qquad y = 2$$

5- دګراف پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

په (      ) صفحه د تابع په بحث کې وګورئ

6- د متریکس پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

متریکس($Matrixes$):

او په اصطلاح کې د اعدادو مستطیلي ته وایي ترتیب ته متریکس وایي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{Bmatrix}$$

د متریکس په غټو حروفو ښودل کیږي او هغه اعداد یا حروف چې په متریکس کې لیکل کیږي د متریکس د عناصرو په نوم یادیږي.

هغه عناصر چې په افقي ډول لیکل شوي وي د متریکس د سطر په نوم یادیږي او هغه عددونه چې په عمودي ډول لیکل شوي وي د متریکس د ستن په نوم یادیږي د سطرونو شمیر په $i$ او د ستونونو شمیر په $j$ ښیئ چې $i$ او $j$ طبیعي عددونه دي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots \dots a_{mn} \end{Bmatrix}$$

ketabton.com - The Digital Library


د متریکس مرتبه:

که د متریکس د سطرونو شمېر $m$ او د ستونو شمېر یې $n$ وي دغه متریکس ته $m \times n$ مرتبه متریکس وایي.

او داسې لیکل کیږي $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$

مثال: لاندې متریکسونه حل کړئ؟

1- $(a_{ij})_{2\times2} = (i+j)_{2\times2}$ 2- $(a_{ij})_{3\times2} = (i+j)_{3\times2}$

حل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = i + j$ $a_{12} = 1 + 2 = 3$ $a_{21} = 2 + 1 = 3$

$a_{11} = 1 + 1 = 2$

$a_{22} = 2 + 2 = 4$

په نتیجه کې لاندې متریکس لاس ته راځي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

د متریکس ډولونه:

متریکس په اوه ډوله دی.

1- سطري متریکس: هغه متریکس چې یوازې یو سطر ولري لکه $A = [4 \quad 5 \quad 9]_{1\times3}$

2- ستوني متریکس: هغه متریکس دی چې یو ستون ولري لکه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}_{3\times1}$

3- صفري متریکس: هغه متریکس دی چې ټول عناصر یې صفر وي.

$$0_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4- مربعي متریکس: هغه متریکس دی چې د سطرونو شمېر یې د ستونو د شمېر سره مساوي وي.

ketabton.com - The Digital Library


لکه :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

مربعي يا مستطيلي متريکسونه دوه قطرونه لري . چې يوه ته اصلي قطر يا (Mean diagonal) او بل ته (*Minor diagonal*) فرعي قطر وايي.

$a_{11}, a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{nn}$ اصلي قطر دی او $a_{nn} \ldots\ldots\ldots a_{12}$ ، $a_{21}$ فرعي قطر دی.

لاندي متريکسونه څه ډول متريکسونه دي. $3 \times 1$ او $1 \times 4$

5- قطري متريکس: هغه متريکس دی چې د اصلي قطر څخه پـه غيـر نور عناصر يې صفرونه وي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6- سکالر متريکس: که د قطري متريکس د اصلي قطر عناصر مساوي وي دې متريکس ته سکالر متريکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7- واحد متريکس: که د قطري متريکس داسې قطر عناصر يو (1) وي نو دې متريکس ته واحد متريکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلثي متريکس: که د يوه متريکس د اصلي قطر لاندې او يا پورته عناصر صفرونه وي دې متريکس ته مثلثي متريککس وايي لکه.

پورتنی مثلثي متريکس په لاندې ډول دی.

ketabton.com - The Digital Library

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

لاندې مثلثي متريکس دی.

په انګليسي کې ورته *Upper Tringolar matrix* او *Lower Tringolar matrix* وايي.

## متقابل يا متضاد متريکس:

هغه متريکسونه چې عناصر يې يو د بل متضاد وي لکه: $A(a_{ij})_{m\times n} = A(-a_{ij})_{m\times n}$

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & +4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

د متريکسونو جمع:

د متريکسونو په جمع کې د متريکسو د مرتبې مساوات ضرور دي يعنې که $a_{ij}$ او $b_{ij}$ دوه متريکسونه ولرو کولای شو چې دغه دوړل متريکسونه جمع کړو $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ متريکسونه جمع کړئ؟

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

د متريکس تفريق:

په تفريق کې هم د متريکس د تفريقولو لپاره د متريکس د مرتبو مساوات ضرور دی.

که $a_{ij}$ او $b_{ij}$ وي نو

$$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$$

ketabton.com - The Digital Library



مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 04 \end{bmatrix}$ دوه متریکسونه راکړ شویدي $A - B$ متریکس پیدا کړئ؟

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-(-2) & -1-(-1) \\ 3-3 & 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & -1+1 \\ 3-3 & +1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## د متریکسونو د جمع او تفریق خاصیتونه:

1- د متریکسونو جمع د تبدیلی د قانون پیروي کوي مګر د متریکسونو تفریق د تبدیلی د قانون پیروي نه کوي. لکه

$$A + B = B + A$$

$$A - B \neq B - A$$

2- د متریکسونو جمع او تفریق د تبدیلی د خاصیت پیروي کوي.

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

3- د عینیت عنصر *Identity element*: په جمع کې صدق کوي مګر د متریکسونو په تفریق کې ی یې نه کوي.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

## په متریکسونو کې د سکالر ضرب:

په یوه متریکس کې کولای شو چې حقیقي عدد ضرب کړو یعنی که $A = a_{ij}$ او $K \in IR$ وي نو $KA$ د $C$ سره مساوي دی.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ او $k = 2$ وي $KA$ پیدا کړئ؟

$$KA = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1 & 2\times3 & 2\times6 \\ 2\times2 & 2\times1 & 2\times0 \\ 2\times1 & 2\times0 & 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ketabton.com - The Digital Library

## د دوه متریکسونو ضرب :

د متریکس د ضرب لپاره باید د یوه متریکس د سطرونو شمېر د بل متریکس د ستونو د شمېر سره مساوي وي یعنی که $A = (a_{ij})_{m\times n}$ او $B = (b_{ij})_{n\times p}$ وي کولای شو چې ضرب یې کړو.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

طریقه یې داسې ده چې د یوه متریکس لمړی سطر د دویم متریکس په ټولو ستونو کې په نوبت سره ضربوو او په اول سطر کې یې لیکو او په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو د متریکسونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

حل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 + 1(-1) \\ -1\times 1 + 0\times 0 + 0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 \\ -1+0+0 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2\times 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1\times 4 + 2(-3) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -6+4 & 8+3 \\ -3-8 & 4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{bmatrix}$$

### د متریکس د ضرب خواص:

1- د متریکس ضرب عملیه د تبدیلی د قانون پیروي نه کوي یعنې:

$$A \times B \neq B \times A$$

2- د متریکسونو ضرب د اتحادي خاصیت پیروي کوي:

$$(A \times B)C = A(B \times C)$$

ketabton.com - The Digital Library



3- د متریکسونو ضرب د توزیعي خاصیت پیروي کوي.

$$A(B+C) = AB + Ac$$

د یوه متریکس ترانسپوز متریکس:

که د یوه متریکس سطر په ستون او ستون یې په سطر بدل شي نوی متریکس ته ترانسپوز متریکس وایي.

که $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ وي نو $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ته ترانسپوز متریکس وایي په $A^T$ ښودل کیږي.

که $A = A^T$ وي نو پدې صورت کې $A$ ته متناظر متریکس وایي.

لکه $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ یو متناظر متریکس دی ځکه $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

د ترانسپوز متریکس خواص:

1- ترانسپوز متریکس د خپل لمړني متریکس سره مساوي وي.

$$(A^T)^T = A = \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ij})A$$

2- د دوه یا څو ترانسپوز متریکسو د جمع او تفریق حاصلونه د لمړنیو متریکسو د جمع د حاصلو او تفریق د حاصلو د ترانسپوزو سره مساوي دي.

$$(A \pm B \pm C \pm \ldots\ldots)^T = A^T + B^T + C \ldots\ldots\ldots$$

3- $(AB)^T = A^T \times B^T$

4- $(\alpha A)^T = \alpha \times A^T$

5- $(-A)^T = -A^T$

ketabton.com - The Digital Library

## دیترمینانت

مربعي متریکس ته دیترمینانت وايي.

لکه که $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ متریکس ولرو نو $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ يو دیترمینانت دي او په $|A|$ سره ښودل کیږي.

$a_{11}a_{22}$ اصلي قطراو $a_{12}a_{21}$ ته فرعي قطر وايي.

## د دیترمینانت محاسبه

د اصلي قطر څخه فرعي قطر منفي کوو $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

مثال: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$ قیمت پیدا کړئ

حل: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 7 \times 4 = 6 - 28 = -22$

## د دیترمینانت د حل طریقه

دیترمینانت په دوه طریقو حلیږي.

1- دساروس په طریقه 2- دکرامر په طریقه

1- دساروس د دیترمینانت په طریقه لول

اول ستون او دریم سطر د منځه وړواو پاتې $2\times 2$ مرتبې دیترمینانت محاسبه کوواو دتقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31}$$

دویم ستون او دریم سطر د منځه وړو او د تقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32}$$

ketabton.com - The Digital Library



دريم ستون او دريم سطر د منځه ورو. اودتقاطع په عدد کې يې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

په لاس راغلي عددونه جمع کوو د ديترمينانت قيمت لاس ته راځي

$$|A| = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

$$|A| = a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

مثال: د $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & +2 \\ 4 & -1 & +7 \end{vmatrix}$ ديترمينانت حل کړئ

1) $$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4\big(6 \times 2 - (-3 \times 1)\big) = 4(12 + 3) = 4 \times 15 = 60$$

2) $$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -1\{2 \times 2 - 5(-3)\} = -1(4 + 15) = -1(19) = -19$$

3) $$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 7(2 \times 1 - 6 \times 5) = 7(2 - 30) = 7(-28) = -196$$

$$|A| = 60 - 19 - 196 = 60 - 215 = -155$$

دويم- د کرامر په طريقه:

د ديترمينانت دوه لمړي ستونونه د ديترمينانت د باندي ليکو د اصلي قطرو د مجموعې څخه د فرعي قطرومجموعه منفي کوو د ديترمينانت قيمت لاس ته راځي.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\}$$

ketabton.com - The Digital Library

مثال:
$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{matrix}$$

$$|B| = \{2 \times 1 \times 7 + 6 \times 2 \times 4 + (-3) \times 5(-1)\}$$
$$-\{6 \times 5 \times 7 + 2 \times 2(-1) + (-3) \times 1 \times 4\}$$
$$|B| = (14 + 48 + 15) - (210 - 4 - 12) = 77 - (210 - 16) = 77 - 194$$
$$= -117$$
$$|B| = -117$$

## د دیترمینانت خواص

1-که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه سطر یا یوه ستون ټول عناصر صفر وي نو د دیترمینانت د صفر سره مساوي دی.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \text{او} \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{vmatrix} = 0$$

1- که د $A_{n\times n}$ متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي نو اړوند دیترمینانت یې صفر دي

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$$

2- که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه ستون یا یوه سطر عناصر د بل ستون یا سطر د عناصرو سره ګډ فکتور ولري نو $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

3- د $A$ د متریکس دیترمینانت د $A^T$ دمتریکس د دیترمینانت سره مساوي دی

د $2 \times 2$ مرتبې متریکس ضربي معکوس د معکوس متریکس سره د مربعي متریکس د ضرب حاصل (1) کیږي.

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = 1$$

ketabton.com - The Digital Library



که د متریکس قیمت $|A| = 0$ وي نودی متریکس ته $Singular\ Matrix$ وائي اوکه $|A| \neq 0$ وي نو دی متریکس ته $Non\ singular\ Matrix$ وایي.

هغه متریکسونه چې معکوس لري .

1- چې متریکسونه مربعي وي یعنی د $A_{n\times n}$ شکل ولري.

2- چې $|A| \neq 0$ وي.

مثال: $B = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ او $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ متریکسونه یو د بل معکوس دي .

حل:-

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لیدل کیږي چې $AB = BA = 1$ دي نو $A$ او $B$ یو د بل معکوس دي.

## الحاقي متریکس Adjoin of Matrix

که د یوه متریکس د اصلي قطر د عناصرو ځایونه بدل شي او د فرعي قطر د عناصرو علامی تغیر شي دغه متریکس ته الحاقي متریکس وایي.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

الحاقي متریکس د یوه متریکس د معکوس متریکس د لاس ته راوړلو لپاره استعمالیږي طریقه یې داسې ده چې دالحاقي متریکس د دیترمینانت دقیمت په معکوس کې ضربوو د راکړشوي متریکس معکوس متریکس لاس ته راځي.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}A}{|A|}$$

ketabton.com - The Digital Library


مثال :- د $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ معکوس متریکس پیدا کړئ؟

حل:- $|A| = -3(6) - (-2)(5) = -18 + 10 = -8$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

په عمومي ډول ویلای شوچې که د $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ په متریکس کې $|A| \neq 0$ وي نو دغه متریکس معکوس لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

## تمرین

د لاندې متریکسو معکوس متریکس پیدا کړئ

$a$:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

$b$:  $B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

## د متریکس پواسطه ددوه مجهوله معادلو حل

$$a_1x + b_1yc = c_1$$
$$\underline{a_2x + b_2y = c_2}$$

په پورته ډول د دوه مجهوله معادلو یو سیستم راکړ شوی دی غواړو چې دمتریکس پواسطه یې حل کړو د $x$ او $y$ د ضریبو متریکس په $A$ ښیو $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ د ثابت عددو متریکس په $B$ ښیې. او د $x$ او $y$ متریکس په $X$ ښیو.

ketabton.com - The Digital Library



$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ او } B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

نو ليکو چې:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B = (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow 1X = A^{-1}B$$

يا $X = A^{-1}B$

مثال: لاندې د دوه مجهوله معادلو سيستم د متريکس په طريقه حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 & -2 \times 7 \\ -1 \times 5 & 1 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x = 1$ & $y = 2$

## تمرين

لاندې د دوه مجهوله معادلو سيستمونه د متريکس په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

د ګوس Goose طريقه د افقاً طريقه ده.

په همدې ترتيب کولای شو چې څلورمجهوله،پنځه مجهوله او نورې څو مجهوله معادلې په مختلفو طريقو حل کړو.

ketabton.com - The Digital Library

# پنځم فصل

## دويمه درجه يومجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې يو مجهول ولري او د مجهول توان يې دوه وي. عمومي شکل يې دا دي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

په دغه عمومي شکل کې $b, a$ او $c$ ثابت عددونه دي $(x)$ مجهول دي ځرنګه چې د مجهول توان دوه دی نو ځکه ورته دويمه درجه يو مجهوله معادله وايي.

### خصوصي حالتونه

1- که b=c=0 وي معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 = 0$ ددغې معادلې دواړه جذرونه صفر دي يعنې :

$$x_1 = 0 \qquad \& \qquad x_2 = 0$$

2- که $c = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$ax^2 + bx = 0$$

$(x)$ مشترک نيسو اومعادله د دوه قوسو په حاصل ضرب بدلوو بيا هر قوس په نوبت سره دصفر سره مساوي کوواو د معادلې جذرونه پيدا کوو.

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$

$$x_2 = -\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$

مثال: $5x^2 + 11x = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$5\mathrm{x}^2 + 11\mathrm{x} = \mathrm{x}(5\mathrm{x} + 11) = 0$$

$$cx_1 = 0$$
$$5x + 11 = 0$$
$$5x = -11$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{-11}{5}$$
$$x_2 = -\frac{11}{5}$$

3- که $b = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 + c = 0$

د دغسې معادلو د حل کافي او لازمي شرط دادې چې $a$ او $c$ باید مختلف العلامه وي .او که نه نو د حقیقي اعدادو په سیټ کې حل نلري .د مختلطو اعدادو په سیټ کې حل لري.

مثال: $3x^2 - 12 = 0$ معادله حل کړئ

حل:

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 = 12$$
$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$
$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$
$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ؟

1: $5x^2 + 21x = 0$ 2: $11x^2 - 22x = 0$ 3: $2x^2 + 28x = 0$

4: $7x^2 - 63 = 0$ 5: $4x^2 + 16 = 0$ 6: $-7x^2 + 28 = 0$

## د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طریقې

دویمه درجه یو مجهوله معادلې په څلورو طریقو حلیږي.

1- د تجزیې پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

2- د تکمیل مربع پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلوحلول

ketabton.com - The Digital Library


3- د محمد بن موسی دفارمول پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

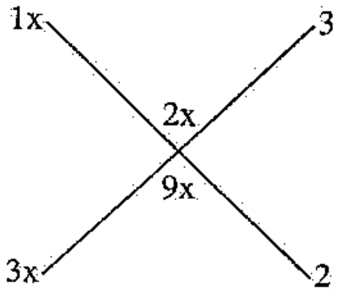
4- دګراف پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

1- د تجزيي پواسطه ديو مجهوله دويمه درجه معادلوحل:

$(a)$ او $(c)$ تجزیه کوو د ضربي عواملو څخه يي داسې يوه يوه جوړه ضربي عوامل راخلو چې د ضرب حاصلونو مجموعه يي $(b)$ شي بيا دغه ضربي عوامل په چارت کې ليکواو د چارت له مخې قوسونه جوړوو او د هر قوس جذر پيدا کوو د معادلې جذرونه لاس ته راځي

مثال:- $3x^2 + 11x + 6 = 0$ معادله د تجزيي پواسطه حل کړئ.

$$a = 3 = 1.3 = -1(-3)$$
$$c = 6 = 2.3 = 1.6 = -2(-3) = -1(-6)$$
$$b = 11$$




$$(x+3)(3x+2) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x_{1=-3}$$
$$3x + 2 = 0$$
$$3x = -2$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3} \qquad x_2 = -\frac{2}{3}$$

2- د تکميل مربع پواسطه د دويمه درجه يو مجهوله معادلو حل:

فرضاً د $5x^2 - 17x + 6 = 0$ معادله راکړشوې ده غواړو چې د تکميل مربع پواسطه يي حل کړو ټول حدونه د $x^2$ په ضريب ويشو.

ketabton.com - The Digital Library



$$\frac{5x^2}{5}-\frac{17x}{5}+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x=-\frac{6}{5}$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\left(\frac{17}{10}\right)^2=\left(\frac{17}{10}\right)^2-\frac{6}{5}$$

$$\left(x-\frac{17}{10}\right)^2=\frac{289}{100}-\frac{6}{5}=\frac{289-120}{100}=\frac{169}{100}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{17}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{100}}$$

$$x-\frac{17}{10}=\pm\frac{13}{10}$$

$$x=\frac{17}{10}\pm\frac{13}{10}=\frac{17\pm 13}{10}$$

$$x_1=3 \qquad x_2=\frac{2}{5}=0.4$$

3- د محمد بن موسى د فارمول پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

لمړې د محمد بن موسى فارمول ثبوتوو.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

داسانتیا لپاره $b^2-4ac$ په $\Delta$ ښیو:

$$\Delta=b^2-4ac$$

نو:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

د $(\Delta)$ په باب دری حالته موجود دي.

1- چې $\Delta>0$ وي معادله دوه جذرونه لري اوجذرونه يې

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

په واسطه پیدا کیږي.

2- چې $\Delta=0$ وي معادله یو جذر لري اوجذر يي د $x=\frac{-b}{2a}$ پواسطه پیدا کیږي.

3- چې $\Delta<0$ وي معادله دحقیقي اعدادو په سیټ کې جذر نه لري.

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$7x^2-13x-24=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\times 7\times(-24)$$

$$\Delta=169+672=841$$

ketabton.com - The Digital Library


$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)+\sqrt{841}}{2\times 7} = \frac{13+29}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)-\sqrt{841}}{2\times 7} = \frac{13-29}{14} = \frac{-16}{14} = -\frac{8}{7}$$

$$x_{1=3} \qquad x_2 = -\frac{8}{7}$$

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$9x^2 + 30x + 25 = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4\times 9\times 25 = 900 - 900 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله يوجذر لري.

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{30}{2\times 9} = -\frac{5}{3}$$

مثال: $2x^2 + 3x + 10 = 0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times 2\times 10 = 9 - 80 = -71$$

څرنګه چې $0 > \Delta$ دي نومعادله جذر نه لري.

تمرين

لاندې معادلې د تجزيې پواسطه حل کړئ.

1: $3x^2 + 5x - 42 = 0$ 2: $7x^2 - 29x + 4 = 0$ 3: $2x^2 + 3x - 14 = 0$

لاندې معادلې دتکميل مربع پواسطه حل کړئ.

1: $11x^2 - 17x - 48 = 0$ 2: $13x^2 + 7x - 360 = 0$ 3: $8x^2 - 65x + 102 = 0$

لاندې معادلې د محمد بن موسى د فارمول پواسطه حل کړئ.

1: $2x^2 + 3x - 65 = 0$ 2: $9x^2 - 43x + 48 = 0$

3: $25x^2 - 11x - 192 = 0$

ketabton.com - The Digital Library



## دمحمد بن موسی په فارمول کې اختصار

که $b$ جفت وي د $b$ نیمایي په $\acute{b}$ ښیو $\frac{b}{2}=\acute{b}$ او $b=2\acute{b}$ کیږي نو د محمد بن موسی په فارمول کې د $b$ په عوض $(2\acute{b})$ لیکو:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2\acute{b})\pm\sqrt{(2\acute{b})^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm\pm\sqrt{4\acute{b}^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2\acute{b}\pm\sqrt{4(\acute{b}^2-ac)}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm2\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{2a}=\frac{2\left(-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}\right)}{2a}$$

$$=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

داسانتیا لپاره $\acute{b}^2-ac$ په $\acute{\Delta}$ ښیو یعنې:

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac$$

د $\acute{\Delta}$ په باب هم درې حالته موجود دي.

1- که $\acute{\Delta}>0$ وي معادله دوه جذره لري اوجذرونه يې د $x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي.

2- که $\acute{\Delta}=0$ وي معادله یوجذرلري، اوجذر يې د $x=\frac{-\acute{b}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي

3- که $\acute{\Delta}<0$ وي معادله جذرنه لري

مثال:- $3x^2+14x-40=0$

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=7^2-3(-40)=49+120=169$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-14\pm13}{3}$$

$$x_1=-\frac{1}{3}\qquad x_2=-9$$

مثال:- $4x^2+12x+9=0$ معادله حل کړئ.

ketabton.com - The Digital Library


$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\acute{\Delta} = 0$$

معادله يو جذر لري.

$$x = -\frac{\acute{b}}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad so \quad x = \frac{3}{2}$$

مثال:- لاندې معادله حل کړئ؟

$$5x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = (-1)^2 - 5 \times 4 = 1 - 20 = -19$$

$$\acute{\Delta} = -19$$

$$\acute{\Delta} < 0$$

معادله جذر نه لري.

**تمرين**

1: $3x^2 + 8x - 28 = 0$

2: $11x^2 - 12x - 63 = 0$

3: $7x^2 + 14x - 56 = 0$

د يو مجهوله دويمه درجه معادلو د جذرو او ضريبو تر منځ ارتباط:

1: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2: $x_1 x_2 = \frac{b}{a}$

3: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = s^2 - 2p$

4: $x_1{}^3 + x_2{}^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

5: $x_1{}^4 + x_2{}^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$

1- د $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ثبوت

دمحمد بن موسى فارمولونه ليکو:

ketabton.com - The Digital Library

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف جمع کوو:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2- د $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ ثبوت

د دمحمد بن موسی فارمولونه لیکو:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف ضربوو:

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4aa} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

3: د $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$ ثبوت

$$x_1{}^2 + 2x_1x_2 + x_2{}^2 = (x_1 + x)^2$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

ketabton.com - The Digital Library


$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

4: د $x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$ ثبوت

$$x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{3abc}{a^3}$$

5: د $x_1^4 + x_2^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$ ثبوت

$$x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2}{a^4} - \frac{2c^2}{a^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2 - 2a^2c^2}{a^4}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$$

مثال: د لاندې معادلې د جذرونو مجموعه،د جذرونو د ضرب حاصل، دجذرو د مربعګانو مجموعه پيدا کړئ:

ketabton.com - The Digital Library

$$5x^2 + 7x - 34 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{7}{5}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-34}{5}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{7^2 - 2 \times 5 \times (-34)}{5^2} == \frac{49 + 340}{25} = \frac{389}{25}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{389}{25}$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times (-34) - 7^3}{5^3} = \frac{-3570 - 343}{125} = \frac{3913}{125}$$

## دجذرو له مخې د يو مجهوله دويمه درجه معادلې جوړول

که د يوې معادلې جذرونه راکړ شوي وي او وغواړو چې معادله يې پيدا کړو نو جذرونه د معادلې د جوړولو په فارمول کې وضع کوو د راکړشوو جذرو مربوطه معادله لاس ته راځي . د معادلې د جوړولو فارمولونه دوه دي:-

1: $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$

2: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

د $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$ ثبوت

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

مثال:- د يوې معادلې جذرونه په ترتيب سره $x_1 = 5$ او $x_2 = -7$ دي معادله يې پيدا کړئ

حل:

ketabton.com - The Digital Library



$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$
$$x^2-(5-7)x+(5)(-7)=0$$
$$x^2-(-2)x-35=0$$
$$x^2+2x-35=0$$

## تمرین

په لاندي ډول د معادلو جذرونه راکړ شوي دي معادلی حل معادلې په لاس راوړئ؟

1: $x_1=3$ & $x_2=\frac{3}{5}$ 2: $x_1=\frac{7}{3}$ & $x_2=5$

3: $x_1=\sqrt{3}$ & $x_2=2$

## د دويمه درجه يومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول

دجذرو علامی په یوه جدول مطالعه کوو

| | | |
|---|---|---|
| که $\Delta > 0$ وي<br>معادله دوه جذره لري | که $P>0$ وي<br>جذرونه هم علامه دي | که $S > 0$ وي<br>دواړه جذرونه مثبت دي |
| که $\Delta > 0$ وي<br>معادله دوه جذره لري | که $P>0$ وي<br>جذرونه هم علامه دي | که $S < 0$ وي<br>دواړه جذرونه منفي دي |
| که $\Delta > 0$ وي<br>معادله دوه جذره لري | که $P<0$ وي<br>جذرونه مختلف العلامه دي | که $S > 0$ وي<br>لوی جذر مثبت دي |
| که $\Delta > 0$ وي<br>معادله دوه جذره لري | که $P<0$ وي<br>جذرونه مختلف العلامه دي | که $S < 0$ وي<br>لوی جذر منفي دي |
| $\Delta = 0$ وي<br>معادله یو جذر لري | | که $S > 0$ وي<br>لوی جذر مثبت دي |
| $\Delta = 0$ وي<br>معادله یو جذر لري | | که $S < 0$ وي<br>لوی جذر منفي دي |
| $\Delta < 0$ وي | معادله جذر نه لري | |

ketabton.com - The Digital Library

مثال: د $3x^2 + 5x - 22 = 0$ دجذروعلامې مطالعه کړئ؟

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-22) = 25 + 264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$\Delta > 0$ معادله دوه جذره لري.

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-22}{3}$$

$p < 0$ جذرونه مختلف العلامه دي.

$$s = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3}$$

$s < 0$ لوی جذر يې منفي دی.

## د ديکارت قاعده

ديکارت ددويمه درجه معادلو د علامو تغير ته تحول وايي.

ديکارت وايي:

1- که دويمه درجه معادلو دعلامو دوه تحوله لرل دمعادلې دواړه جذرونه مثبت دي

2- که د علامو تحول يو ؤ د معادلې يو جذر مثبت دي.

3- که په معادله د علامو تحول نه ؤ نو معادله مثبت جذر نه لري دواړه جذرونه يې منفي دي.

لکه:

$5x^2 - 17x + 6 = 0$ دواړه جذرونه يې مثبت دي.

$3x^2 + 7x - 26 = 0$ يو جذر يې مثبت دي.

$x^2 + 169x + 4 = 0$ دواړه جذرونه يې منفي دي.

**دهغه معادلو حلول چې په دويمه درجه يو مجهوله معادلو بدليږي:**

شپږ قسمه معادلې په دويمه درجه يو مجهوله معادلو بدليږي.

ketabton.com - The Digital Library



1- دريمه درجه معادلې:

هغه دريمه درجه معادلې چې د $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ شکل ولري.دداسې معادلود حل لپاره $x$ مشترک نيسو.اومعادله د دوه فکتورو په حاصل ضرب بدلوو.هر فکتورد صفر سره مساوي کوو.د معادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال:- $5x^3 + 3x^2 - 14x = 0$

$$x(5x^2 + 3x - 14) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$5x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-14) = 9 + 280 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 17}{10}$$

$$x_2 = \frac{7}{5} \qquad x_3 = -2$$

2- څلورمه درجه معادلې:

هغه څلورمه درجه معادلې چې $ax^4 + bx^2 + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادله بدليږي.طريقه يې داسې ده چې $x^2$ په $y$ سره بدلوو.څلورمه درجه معادله په دويمه درجه معادله بدليږي.دلته څلور حالتونه موجود دي.

1- که دويمه درجه معادلې دوه مثبت جذرونه ولري نو څلورمه درجه معادله څلور جذرونه لري چې دوه يې مثبت او دوه يې منفي وي.

2- که د دويمه درجه معادلې يو جذر مثبت ؤ نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري چې يو يې مثبت اوبل يې منفي وي.

3- که دويمه درجه معادلې مثبت جذر نه لرلو نو څلورمه درجه معادله جذر نلري.

4- که دويمه درجه معادلې جذر نه لرلو نو څلورمه درجه هم جذر نه لري.

مثال:- لاندې څلورمه درجه معادله حل کړئ؟

$$3x^4 - 7x^2 - 20 = 0$$

ketabton.com - The Digital Library



حل : $x^2$ په $y$ ښيو نو $x^4 = y^2$ کيږي

$3y^2 - 7y - 20 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 49 + 240 = 289$

$\Delta = 289$

$\Delta > 0$

معادله دوه جذره لري يوجذر يي مثبت او بل يي منفي دي نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm 17}{6}$$

$y_1 = 4 \qquad y_2 = -\frac{5}{3}$

$x^2 = y = y_1 = 4$

$x^2 = 4 \qquad \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

## تمرين

لاندې معادلې حل کړئ

1- $4x^2 + 3x - 45 = 0$ 2- $7x^2 - 11x - 6 = 0$

3- $5x^2 + 13x + 6 = 0$ 4- $13x^2 + x - 14 = 0$

5- $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ 6- $7x^4 + 3x^2 - 594 = 0$

## 3- جذري معادلې :

هغه جذري معادلې چې د $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادلو بدليدلای شي طريقه يي داسې ده چې $\sqrt{x}$ په $y$ ښيو بيا دواړه خواوې مربع کوو چې $x = y^2$ کيږي او دويمه درجه معادله لاس ته راځي.

مثال :- $7x - 8\sqrt{x} - 12 = 0$ جذري معادله په دويمه درجه معادله بدله کړئ او حل يي کړئ؟

حل: $y = \sqrt{x}$ ښيو نو $x = y^2$ کيږي د $(x)$ په عوض $(y^2)$ او د $(\sqrt{x})$ په عوض $(y)$ وضع کوو.

ketabton.com - The Digital Library



$$7y^2 - 8y - 12 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac$$

$$\acute{\Delta} = (-4)^2 - 7(-12) = 16 + 84 = 100$$

$$\acute{\Delta} = 100$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{7} = \frac{4 \pm 10}{7}$$

$$x_1 = 2 \qquad \& \qquad x_2 = -\frac{6}{7}$$

۴- هغه معادلې چې توانونه يې کسري وي اود يو مجهول توان د بل مجهول د توان دوه چنده وي. لکه:

$$5x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 26 = 0$$

$x^{\frac{1}{3}}$ په $(y)$ ښيو بيا دواړه خواوې مربع کوو نو $\left(x^{\frac{2}{3}} = y^2\right)$ کيږي.

$$5y^2 + 3y - 26 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-26) = 9 + 520 = 529$$

$$\Delta = 529$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 23}{10}$$

$$y_1 = \frac{-3 + 23}{10} = \frac{20}{10} = 2 \qquad \therefore \quad y_1 = 2$$

$$y_2 = \frac{-3 - 23}{10} = \frac{-26}{10} = -2\frac{3}{5} \qquad \therefore \quad y_2 = -2\frac{3}{5}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 2 \qquad x^{\frac{1}{3}} = 2 \qquad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$

$$x_1 = 8$$

**تمرين:**

لاندې معادلې حل کړئ:

1- $x^{\frac{2}{5}} + 3x^{\frac{1}{5}} - 10 = 0$

2- $4x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 27 = 0$

3- $4x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

ketabton.com - The Digital Library

۵- هغه معادلی چې توانونه یي کسري وي:

هغه معادلی چې د $ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{m}{2n}} + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادله بدلیږي.

$x^{\frac{m}{2n}}$ په $y$ او $x^{\frac{m}{n}}$ په $y^2$ بنیو پورتنی معادله لاندې شکل غوره کوي $ay^2 + by + c = 0$

دغه معادله د محمد بن موسی په فارمول یا په کومه بله طریقه حلوو قیمتونه یي پیدا کوو د $y$

د قیمت له مخی د $x^{\frac{m}{2n}}$ قیمت پیدا کوو دمعادلی جذرونه لاس ته راځي.

مثال :- د $2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$ معادلی جذرونه پیدا کړئ؟

$x^{\frac{1}{3}} = y$ بنیو نو $x^{\frac{2}{3}} = y^2$ کیږي.

$$2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$$
$$2y^2 + 5y - 33 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times 2 \times (-33) = 25 + 264 = 289$$
$$\Delta = 289$$
$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm 17}{4}$$
$$y_1 = 3 \qquad y_2 = -\frac{11}{2}$$
$$\because \; x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 3 \qquad \therefore \; x^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3 \qquad \& \; x_1 = 27$$
$$\because \; x^{\frac{1}{3}} = y = y_2 = -\frac{11}{2} \qquad \therefore \; x^{\frac{1}{3}} = -\frac{11}{2},$$
$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(-\frac{11}{2}\right)^3 = -\frac{1331}{8}$$
$$x_2 = -\frac{1331}{8}$$

تمرین :

لاندې معادلی دویمه درجه معادلو ته واړوئ؟

1: $5x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} - 14 = 0$ 2: $4x^{\frac{2}{7}} + 3x^{\frac{1}{7}} - 22 = 0$

ketabton.com - The Digital Library



## عبارتي سوالونه

1: د $(A)$او $(B)$ ددوه ښارو تر منځ فاصله (450) کیلومتره ده یو موټر سهار په اوه بجي په یوسرعت د $(A)$ د ښار څخه د $(B)$ ښار ته حرکت وکړ او بل موټر سهار په اته بجي د $(x+15)$ کیلو مترو په سرعت حرکت وکړ دواړه په یو وخت کې د $(B)$ښار ته ورسیدل د هر یوه سرعت څو دي؟

حل:

$$\frac{450}{x}-\frac{450}{x+15}=1$$
$$\frac{450(x+15)-450x}{x(x+15)}=1$$
$$\frac{450x+6750-450x}{x(x+15)}=1$$
$$\frac{6750}{x(x+15)}=\frac{1}{1}$$
$$x^2+15x=6750$$
$$x^2+15x-6750=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(15)^2-4\times1\times(-6750)=225+27000=27225$$
$$\Delta=27225$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15\pm\sqrt{27225}}{2\times1}=\frac{-15\pm165}{2}$$
$$x_1=\frac{-15+165}{2}=\frac{150}{2}=75$$
$$x_2=\frac{-15-165}{2}=\frac{-180}{2}=-90$$

2- د یوه قایم الزاویه مثلث ضلعی په ترتیب سره $(x+1)$ ، $(x+2)$ او $(x+3)$ دي دمثلث ضلعی پیدا کړئ؟

حل:

$$(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2$$
$$x^2+2x+1+x^2+4x+4=x^2+6x+9$$
$$x^2=4$$
$$x_1=2 \qquad \& \qquad x_2=-2$$

ketabton.com - The Digital Library


۳- د دوه مثلثو قاعدی مساوي دي د یوه ارتفاع د قاعدی څخه یو متر او د بل ارتفاع دقاعدی څخه دری متره زیاته ده او د مساحتو تفاضل يي اوه مترمربع دی ذهر یوه مساحته قاعده او ارتفاع پیدا کړئ

حل:

$$\frac{x(x+3)}{2}-\frac{x(x+1)}{2}=7$$
$$\frac{x^2+3x-x^2-x}{2}=7\Rightarrow\frac{2x}{2}=7\Rightarrow x=7$$

قاعده $x=7$

ارتفاع د کوچني مثلث $x+1=8$

ارتفاع د لوی مثلث $x+3=10$

۴- د یوه عدد د طرفینو د ضرب حاصل (323) عدد پیدا کړئ؟

حل:

$$(x-1)(x+1)=323$$
$$x^2-1=323$$
$$x^2=323+1=324$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{324}$$
$$x=18$$

۵- دیوه مستطیل اوږدوالی تر سور دری متره زیات دی که مساحت يي (88) سانتي مترمربع وي سور او اوږدوالی يي پیدا کړئ؟

حل:

$$x(x+3)=88$$
$$x^2+3x-88=0$$
$$\Delta=x^2-4ac=3^2-4\times1\times(-88)=$$
$$9+352=361$$
$$\Delta=361$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-3\pm\frac{\sqrt{361}}{2\times1}=\frac{-3\pm19}{2}\Rightarrow x_1=8\Rightarrow x_2=-11$$

ketabton.com - The Digital Library



6- يو سړی د $(A)$ د ښار څخه د $(B)$ ښار ته په يوه سرعت روان شوبله ورځ يې په خپل سرعت کې دوه متره زيادت راوست نيم ساعت مخکې ورسېدو که د ښارو تر منځ فاصله (20) کېلومتره وي د نوموړي اولنی او اخرنی سرعت پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{20}{x}-\frac{20}{x+2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20(x+2)-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20x+40-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{40}{x^2+2x}=\frac{1}{2}$$
$$x^2+2x=80$$
$$x^2+2x-80=0$$
$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=1^2-1(-80)=1+80=81$$
$$\acute{\Delta}=81$$
$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{1}=-1\pm9=8$$

اولنی سرعت $x=8$

اخرنی سرعت $x+2=10$

7- د يوې دايرې مساحت (154) سانتي مترمربع دې شعاع يې څو ده؟

حل:

$$\pi r^2=154$$
$$\frac{22}{7}r^2=154$$
$$\frac{7}{22}\times\frac{22}{7}r^2=154\times\frac{7}{22}$$
$$r^2=49$$
$$\sqrt{r^2}=\sqrt{49}$$
$$r=7$$

ketabton.com - The Digital Library

## عبارتي سوالونه

1- د یوه مثلث ارتفاع د هغه د قاعدې څخه $(3cm)$ زیاته ده مساحت یې $27cm^2$ دی قاعده او ارتفاع یې پیدا کړئ؟

2- د یوه مستطیل طول د هغه د سور څخه $(5cm)$ زیات دی مساحت یې $(24cm^2)$ دی سور او طول یې پیدا کړئ؟

3- د یوې دایرې مساحت (616) سانتي مترمربع ده شعاع یې څو ده؟

4- د A او B د ښارو تر منځ فاصله $800m$ ده یو موټروان په یوه سرعت سره دا فاصله طی کوي د بېرته راتګ په وخت کې $5m$ په خپل سرعت کې تغیر راولي یو ساعت مخکې رارسیږي د تګ او راتګ سرعت یې پیدا کړئ؟

5- احمد د محمود څخه یوه روپۍ زیاته لري که د پیسو د ضرب حاصل یې (840) وي د هر یوه روپۍ پیدا کړئ؟

6- یو سړی په خپله ځمکه باندې دېوال تاووي د دېوال سور نیم متر دی که د دېوال تر تاوولو وروسته یې ځمکه $(29cm^2)$ کمه شي تر دېوال د مخه او وروسته به د ځمکې مساحت څو وي؟

7- د یوې دایرې مساحت د هغې تر محیط (5) واره زیات دی ضلعه یې پیدا کړئ؟

8- د یوه عدد او د هغه د معکوس مجموعه $\left(\frac{82}{9}\right)$ ده عدد پیدا کړئ؟

9- د کوم عدد مربع د هغه عدد (19) چنده ده؟

10- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي دیوه ارتفاع دقاعدې څخه د واحد په اندازه او د بل ارتفاع د قاعدې څخه د دوه واحدو په اندازه زیاته ده که مساحتونه یې جمع شي $(76cm^2)$ کیږي د مثلثو قاعدې او ارتفاعګانې پیدا کړئ؟

11- احمد دمحمود درې چنده کار کوي که دواړه په شریکه یو کار په (3) ورځو کې وکړي وواياست چه هر یو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

12- که د یوه عدد سره دهغه د معکوس دوه چنده جمع شي (3) کیږي عدد پیدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library



13- که د یوه سړي اجوره دهغه تر ورځو (5) ډېره وي که (50) روپۍ يې کټلي وي وواياست چه څو ورځې کار يې کړئ دئ؟

14- د یوه عدد څلورمه برخه د هغه عدد د معکوس سره مساوي ده عدد پيدا کړئ؟

15- د احمد او محمود د پيسو مجموعه (50) ده او د ضرب حاصل يې (609) ده د هر يوه پيسې څو دي؟

16- د احمد او محمود اجوره مساوي ده که د احمد اجوره (5) روپۍ زياتې او د محمود روپۍ (5)کمې شي د يوې ورځې د اجورې د ضرب حاصل يې (2475) روپۍ کيږي د هر يوه اجوره څو ده ؟

17- احمد او محمود په دوه مساوي کارونو لګيا دي احمد خپل کار تر محمود درې ورځې د مخه خلاصوي که په شريکه يې په دوه ورځو کې وکړي وواياست چه هر يو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

18- د مربع مساحت ($125316cm^2$)دی ضلعه يې پيدا کړئ؟

19- د يوه مثلث قاعده تر ارتفاع (15) سانتي متره زياته ده که مساحت يې ($675cm^2$) وي قاعده او ارتفاع به يې څو وي؟

20- يو موټر سهار په اته بجې حرکت کوي بل موټر يوساعت وروسته (10)کيلو متر سرعت په زيادت وريسې روان شوکه دواړه په يوه وخت کې مطلوب ته رسيږي که وهل شوی فاصله (900) کيلو متره وي د هريوه سرعت پيدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

# شپږم فصل

## غیرمساوات

د دوه افادو د عددي قیمتونه برابري ته غیرمساوات وايي.

د غیر مساوات علامه دا (>) یا دا (<) ده هره افاده چې ددی علامی مخی ته لیکل شوی وي لویه ده تر هغه افادی چې د علامی شاته لیکل شوی وي. لکه:

$$3x^2 + 12x > x^2 - 4x$$

یا لکه $18 < 45$ او داسې نور.

### د غیرمساوات خواص:

1- که د غیرمساوات د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي دغیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$11 < 19$$
$$11 + 8 < 19 + 8$$
$$19 < 27$$

2- که د غیرمساوات د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$13 > 9$$
$$13 - 10 > 9 - 10$$
$$3 > -1$$

3- که دغیرمساوات دواړه خواوی په مثبت عدد کی ضرب شي دغیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$12 > 4$$
$$+2(12) > +2(4)$$
$$24 > 8$$

4- که د غیرمساوات دواړه خواوي په منفي عدد کی ضرب شي دغیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$15 < 21$$

ketabton.com - The Digital Library



$$15(-2) > 21(-2)$$
$$-30 > -42$$

5- که د غیرمساوات دواړه خواوی په مثبت عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$9 < 15$$
$$\frac{9}{3} < \frac{15}{3}$$
$$3 < 5$$

که د غیرمساوات دواړه خواوی په منفي عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$30 > 24$$
$$\frac{30}{-2} < \frac{24}{-2}$$
$$-15 < -12$$

7- که د غیرمساوات دواړه خواوی معکوس شي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$5 < 7$$
$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

8- که د غیرمساوات دواړه خواوی د طاق عدد په توان رفع شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$2 > -9$$
$$(2)^3 > (-9)^3$$
$$8 > -729$$

9- که د غیرمساوات دواړه خواوی د جفت عدد په توان رفع شي دلته دری حالتونه موجود دي.

الف: که د غیرمساوات دواړه خواوی مثبت وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$5 > 3$$
$$5^2 > 3^2$$
$$25 > 9$$

ب: که د غیرمساوات دواړه خواوی منفي وي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

ketabton.com - The Digital Library


$$-2 > -5$$
$$(-2)^2 < (-5)^2$$
$$4 < 25$$

ج: که د غیرمساوات د یوی خوا عدد مثبت او د بلی خوا عدد منفي وي دلته دري حالته موجود دي.

a- که د مثبت عدد مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه قیمت څخه زیات وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$7 > -5$$
$$(7)^2 > (-5)^2$$
$$49 > 25$$

b- که د منفي عدد مطلقه قیمت د مثبت عدد د مطلقه څخه زیات وي دغیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$4 > -7$$
$$(4)^2 < (-7)^2$$
$$16 < 49$$

c- که د مثبت مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه سره مساوي وي غیرمساوات په مساوات بدلیږي. لکه:

$$6 > -6$$
$$(6)^2 = (-6)^2$$

## دغیر مساوات دحل سیټ:

د حقیقي اعدادو هغه سیټ چې په راکړشوی غیر مساوات کی صدق کوي د غیر مساوات د حل سیټ بلل کیږي.

## دغیرمساوات اقسام

په دی کتاب کی موږ دري قسمه غیر مساواتونه مطالعه کوو.

1- یومجهوله اوله درجه غیر مساوات

2- دوه مجهوله اوله درجه غیرمساوات

3- یومجهوله دویمه درجه غیرمساوات

ketabton.com - The Digital Library



## 1- يومجهوله اوله درجه غير مساوات:

هغه غيرمساوات دي چې مجهول يې يو او د مجهول درجه يې يوه وي عمومي شکل يې دا $ax+b\geq 0$ يا دا $ax+b\leq 0$ دی.

### ديومجهوله غيرمساوات د حل طريقه:

معلوم دغيرمساوات ښي خواته او مجهول د غيرمساوات چپې خواته وړولازمې عمليې پرې اجراء کوو په اخر کې د غيرمساوات دواړه خواوې د $x$ په ضريب ويشو د غيرمساوات دحل سيټ لاس ته راځي.

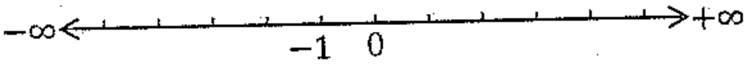
مثال: لاندې غيرمساوات حل کړئ.

$$3(4x+11)-2x+6\leq 15x+44$$
$$12x+33-2x+6\leq 15x+44$$
$$10x+39\leq 15x+44$$
$$10x-15x\leq 44-39$$
$$-5x\leq 5$$
$$\frac{-5x}{-5}\geq\frac{5}{-5}$$
$$x\geq -1$$

د حل سيټ يې عبارت دی له:

$$A=\{x/-1\leq x\leq\infty\}$$

د عددو په کرښه داسې ښودل کيږي.




تمرين:

لاندې غيرمساواتونه حل کړئ.

1: $8(3x-4)+7x-11\geq 9x+23$

2: $6x+14<8x-4$ 3: $x+5\geq 3x-1$

ketabton.com - The Digital Library


## مطلقه قیمت:

د یوه الجبري عدد حسابي برخی ته دهغه الجبري عدد مطلقه قیمت وایي.د مطلقه قیمت علامه دوه عمود خطونه دي هغه عدد چې مطلقه قیمت یې مطلوب وي د عمود خطونو تر منځ لیکل کیږي. لکه $|-15|$ یا $|+15|$ چې دغه دواړه د مطلقه قیمت معنی ورکوي او داسې لیکل کیږي.

$$|\pm 15| = 15$$

مثال: لاندې غیرمساوات حل کړئ؟

$$|3x - 11| > 19$$

حل: یو وار افاده د راکړشوي عدد څخه لویه او بیا یې دعدد د متناظر څخه کوچنۍ فرضوو.

$3x - 11 > 19$

$3x > 19 + 11$

$3x > 30$

$\frac{3x}{3} > \frac{30}{3}$

$x > 10$

$A = \{x/x > 10\}$

$3x - 11 < -19 \Rightarrow 3x < -19 + 11 \Rightarrow 3x < -8$

$\frac{3x}{3} < \frac{-8}{3} \Rightarrow x < -\frac{8}{3}$

$B = \left\{x/x < -\frac{8}{3}\right\}$

$C = A \cup B \left\{x/x > 10 \vee x < -\frac{8}{3}\right\}$

## دبینوم داشاری څېړل

د بینوم عمومي شکل$(ax + b)$ دې د بینوم داشاری د څېړلو لپاره $(a)$ مشترک نیسو د قوس د باندی یې لیکو د بینوم هر حد په دی مشترک وېشو او د قوس په داخل کی یې لیکو.دقوس جذر پیدا کوو.

ketabton.com - The Digital Library



$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

دلته د $(a)$ په باب دوه حالتونه موجود دي.

1- چې $a > 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a > 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x + \frac{b}{a}$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

دبینوم اشاره د جذر څخه کښته منفي اوپورته مثبت ده.

2- چې $a < 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a < 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x + \frac{b}{a}$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

د بینوم اشاره د جذر څخه کښته مثبت او پورته منفي ده.

ketabton.com - The Digital Library


مثال: د $(3x - 6)$ اشاره وټاکئ؟

حل: $3x - 6 = 0 \Rightarrow 3(x - 2) \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

| $x$ | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x - 2$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $3(x - 2)$ | $-$ | 0 | $+$ |

دجذر څخه کښته د بینوم اشاره منفي او پورته مثبت ده.

مثال: د $-5x + 15$ اشاره وټاکئ ؟

حل:

$$-5x + 15 = -5(x - 3)$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

| $x$ | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x - 3$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $-5(x - 3)$ | $+$ | 0 | $-$ |

دجذر څخه کښته د بینوم اشاره مثبت او پورته منفي ده.

تمرین:

د لاندې بینومونو اشارې وټاکئ؟

1- $2x - 12$    2- $3 - x$    3- $-4x + 12$

4- $4x - 20$    5- $-6x - 18$

## د هغه افادو داشارو ټاکل چې د څو بینومو د ضرب په شکل وي:

د هرې افادې اشاره پیدا کوو اوضربوو یې د حاصل ضرب اشاره لاس ته راځي

مثال: $(4 - x)(x + 4)$ اشاره وټاکئ؟

ketabton.com - The Digital Library



حل:

$4 - x = 0 \quad \Rightarrow -x = -4 \quad \Rightarrow x = 4$
$x + 4 = 0 \quad \Rightarrow x = -4$

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $+4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4 - x$ | | + | | + | 0 | − | |
| $x + 4$ | | − | 0 | + | | + | |
| $(4 - x)(x + 4)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |

دجذرو منځ کی د حاصل ضرب اشاره مثبت او په خارج کی منفي ده.

تمرین:

د لاندې بینومونه د حاصل ضرب په شکل راکړشوي دي اشاره يې وڅیړئ؟

1- $(2x - 12)(3 - x)$
2- $(3 - x)(x + 7)$
3- $(-4x + 12)(x + 8)$
3- $(-6x - 18)(x + 5)$

## دکسري افادو د اشارو څېړل:

د صورت او مخرج اشارې پیدا کوواو یو پر بل يې ويشو د کسر اشاره لاس ته راځي

مثال: د $\frac{x+4}{2x-6}$ اشاره وڅیړئ؟

$x + 4 = 0 \quad \Rightarrow x = -4$
$2x - 6 = 0$
$2x = 6 \quad \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow x = 3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x + 4$ | | − | 0 | + | | + | |
| $2x - 6$ | | − | | − | 0 | + | |
| $\frac{x+4}{2x-6}$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

دجذرو منځ کی د کسر اشاره منفي او په خارج کی مثبت ده.

ketabton.com - The Digital Library

تمرین:

د لاندې کسرو اشارې وڅیړئ:

1: $\frac{2x+6}{x-1}$ 2: $\frac{3x+4}{2-x}$

3: $\frac{x+2}{12x-18}$ 4: $\frac{-x-1}{1-2x}+3$

## دهغه غیرمساوات دحل دسیټ پیدا کول چې د بینومو د حاصل ضرب په شکل وي:

د بینومو اشاری پیدا کوو او سره ضربوو یې دحاصل ضرب اشاری لاس ته راځي.دغه اشاری د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو هره اشاره چې دغیرمساوات دعلامې سره موافق وه همغه یې د حل سیټ دي

مثال:

$$(x+3)(x-4) > 0$$
$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$
$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x-4$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x+3)(x-4)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x+3)(x-4)>0$ | د حل سیټ | | د حل سیټ نه وي | | د حل سیټ |

تمرین:

د لاندې غیرمساواتونو د حل سیټ پیدا کړئ:

1: $(x-8)(2-x)<0$ 2: $(3x-6)(12-x) > 0$

3: $(x-1)(1-x) \le 0$

ketabton.com - The Digital Library



## د هغه غیرمساوات د حل د سیټ پیدا کول چې د کسر په شکل وي:

دصورت او مخرج اشاري پیدا کوو دصورت اشاره د مخرج په اشاره ویشود کسر اشاري لاس ته راځي. دغه اشاري د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو د غیر مساوات د حل سیټ لاس ته راځي.

مثال: د لاندې کسري غیرمساوات د حل سیټ پیدا کړئ

$$\frac{x+4}{x-2}+1<0$$

$$\frac{x+4+x-2}{x-2}<0$$

$$\frac{2x+2}{x-2}<0$$

$$2x+2=0 \ \Rightarrow 2x=-2 \ \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{-2}{2} \ \Rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{2x+2}{x-2}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{2x+2}{x-2}<0$ | د حل سیټ نه دی | | د حل سیټ | | د حل سیټ نه دی |

تمرین:

د لاندې کسري غیرمساواتو د حل سیټ پیدا کړئ.

1: $\frac{2x+1}{x-1}+2>0$

2: $\frac{4x+7}{2x-3}-1<0$

3: $\frac{x-6}{x+2}-2\geq 0$

ketabton.com - The Digital Library

## دیو مجهوله غیرمساوات سیستم:

دوه یو مجهوله غیرمساواتو ته د یو مجهوله غیرمساوات سیستم وایي.

د هر غیر مساوات د حل سیټ پیدا کوو هغه سیټ چې په دواړو غیر مساواتو صدق کوي، د سیستم د حل سیټ دی.

مثال: د لاندي غیرمساوات سیستم حل کړئ.

$$3x - 6 < 0$$
$$5x + 8 < 0$$

حل:-

$3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow 3x = 6 \quad \Rightarrow x = 2$

$5x + 20 = 0 \quad \Rightarrow 5x = -20 \quad \Rightarrow x = -4$

| $x$ | $-\infty$ … $-4$ | $-4$ … $2$ | $2$ … $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $3x - 6 < 0$ | $-$ | $-$ | 0 $+$ |
| $5x + 20 < 0$ | $-$ | 0 $+$ | $+$ |
| | د حل سیټ | | |

تمرین:

په لاندي ډول دیو مجهوله غیرمساوات سیستمونه راکړ شویدي حل یې کړئ.

1- $7x - 11 > 0$ & $4x + 13 > 0$

2- 2: $13x + 2 > 0$ & $5x - 8 < 0$

ketabton.com - The Digital Library

## دوه مجهوله غېرمساوات

هغه غېرمساوات دی چې مجهولونه يي دوه او د هر مجهول درجه يي يوه وي عمومي شکل يي دا $ax + by \geq c$ يا دا $ax + by \leq c$ دې

د دغه رنګه غېرمساوات دحل د سيټ د لاس ته راوړلو لپاره دغېرمساوات ګراف رسموو ګراف مستوي په دوه برخو ويشي يوه برخه يي په غېرمساوات کی صدق کوي او بله برخه يي نه کوي دغه برخه يي کربښی، کربښی کوو بله برخه يي دغېر مساوات د حل سيټ دی.

مثال: $2y + 3x < 6$ دوه مجهوله غېرمساوات حل کړئ.

حل : غېرمساوات په مساوات بدلوو اوګراف يي رسموو.

$$2y + 3x = 6$$

1- $x = 0$ نو:

$$2y = 6 \quad \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

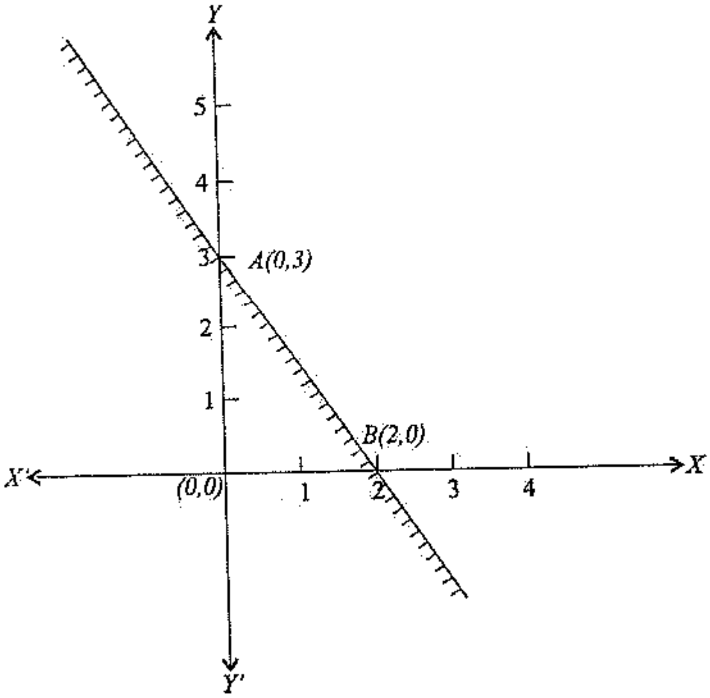
$$A(0,3)$$

2- $y = 0$ فرضوو نو:

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$B(2,0)$$



ketabton.com - The Digital Library


## ددوه مجهوله غیرمساوات سیستم:

په یوه کارتیزني مستوي کې دوه غیرمساواتو ته د غیرمساوات سیستم وایي.

لکه: $2x - 3y > 6$ او $3x + 5y < 15$

دغه دوه غیرمساواتو ته د غیرمساوات سیستم وایي.

## ددوه مجهوله غیرمساوات د سیستم د حل طریقه:

غیرمساواتونه په مساواتو بدلوو اود هر مساوات کرښه یعنی گراف رسموو هر گراف مستوي په دوه برخو ویشي چې یوه برخه یې په مربوطه غیرمساوات کې صدق کوي.دهر غیرمساوات د حل سیټ پیدا کوو. څرنگه چې د غیرمساواتو گرافونه مستوي په څلورو برخو ویشي چې یوه برخه یې په دوارو غیرمساواتو کې صدق کوي چې همدغه برخه د سیستم د حل سیټ دي.

-1

$$3x + 5y < 15 \qquad \Rightarrow 3x + 5y = 15$$

$x = 0$ فرضوو نو:

$$5y = 15 \qquad y = \frac{15}{5} = 3$$

$$A(0,3)$$

$$y = 0$$

$$3x = 15 \qquad x = \frac{15}{3} = 5$$

$$B(5,0)$$

-2

$$2x - 3y > 6 \qquad 2x - 3y = 6$$

$$x = 0$$

$$-3y = 6 \quad y = \frac{6}{-3} = -2$$

$$C(0,-2)$$

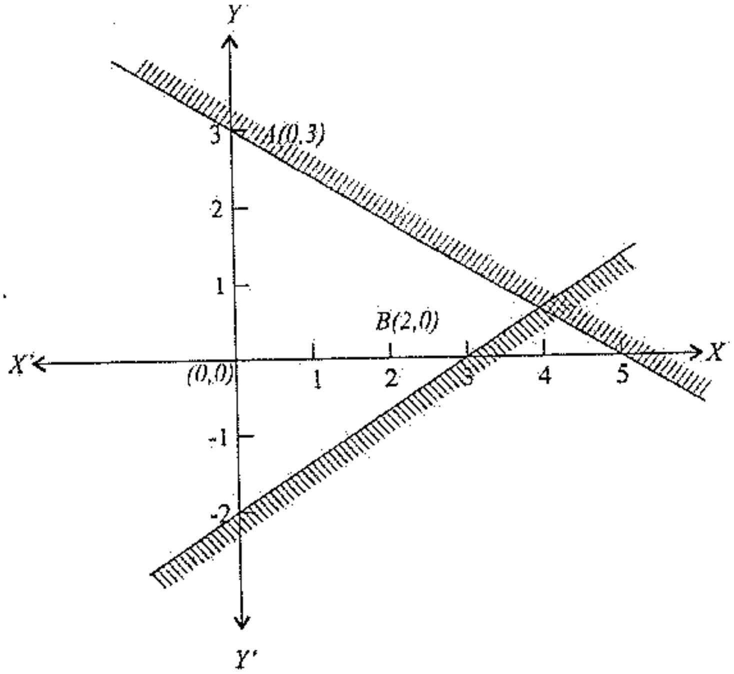
$$y = 0$$

ketabton.com - The Digital Library



$$2x = 6 \quad \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$D(3,0)$$




که درې دوه مجهوله غیرمساواتونه راکړ شوي وي د ګراف د ترسیم په وخت کې مثلث لاس ته راځي د څلور غیرمساواتونوڅخه څلور ضلعي په همدې ترتیب د دوه مجهوله غیرمساواتونو شمېر دمضلعګانو دضلعو شمېر راښیې.

## یو مجهوله دویمه درجه غیرمساوات

هغه غیرمساوات دي چې مجهول یې یو او د مجهول درجه یې دوه وي عمومي شکل یې دا $ax^2 + bx + c \geq 0$ یا دا $ax^2 + bx + c \leq 0$ دي

د غیرمساوات د حل څخه مطلب د هغه سیټ پیدا کول دي چې په غیرمساوات کې وضع شي او په غیرمساوات کې صدق وکړي.

ketabton.com - The Digital Library

## د دویمه درجه غیرمساوات د حل طریقه

که د غیرمساوات دواړو خواو ته حدونه موجود وي نو د غیر مساوات چپې خواته وروا اړمې عملیې پرې اجراء کوو او د ترینوم شکل ته یې راوړو او تجزیه کوو یې. د هر قوس جذر پیدا کوو

د حل سیټ یې په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- د جدول په طریقه        2- د سیټ بلډر په طریقه

### 1- د جدول په طریقه:

جدول جوړوو کوچنی جذر چپې خواته او لوی جذر ښی خواته لیکو که د $(a)$ علامه مثبت وه د جذر څخه کښته دقوس علامه منفي او پورته مثبت ده او که د $(a)$ علامه منفي وه نو د جذر څخه کښته د قوس علامه مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د لاندې دویمه درجه غیرمساوات د حل سیټ پیدا کړئ.

$$3x^2 + 13x - 38 < 0$$
$$3x^2 - 6x + 19x - 38 < 0$$
$$3x(x-2) + 19(x-2) < 0$$
$$(x-2)(3x+19) < 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow x = 2$$
$$3x + 19 = 0 \quad \Rightarrow 3x = -19 \quad \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-19}{3} \Rightarrow x = -\frac{19}{3}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{19}{3}$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $3x+19$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $(x-2)(3x+19)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x-2)(3x+19) < 0$ | د حل سیټ نه دی | | د حل سیټ | | د حل سیټ نه دی |

ketabton.com - The Digital Library



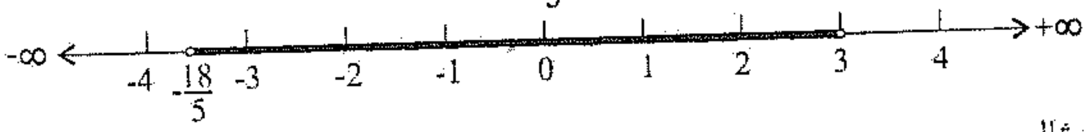
2- د سيټ بلډر په طريقه د دويمه درجه غير مساوات حلول:

تر تجزيه کولو وروسته د غير مساوات علامې ته ګورو که د غير مساوات علامه مثبت وه نو قوسونه هم علامه دي يو وار دواړه مثبت اوبل وار دواړه منفي فرضوو او که د غير مساوات علامه منفي وه نو قوسونه مختلف العلامه دي په نوبت سره يو مثبت او بل منفي فرضوو.

مثال: $5x^2 + 3x - 54 < 0$

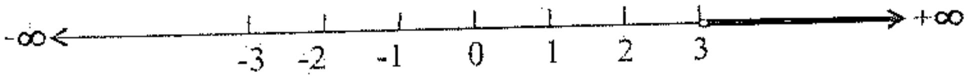
حل:

$$5x^2 - 15x + 18x - 54 < 0$$
$$5x(x-3) + 18(x-3) < 0$$
$$(x-3)(5x+18) < 0$$
$$x - 3 < 0 \ \Rightarrow x < 3$$
$$5x + 18 > 0 \ \Rightarrow 5x > -18 \ \Rightarrow \frac{5x}{5} > \frac{-18}{5} \Rightarrow x > -\frac{18}{5}$$
$$A = \{x \,/ -\frac{18}{5} < x < 3\}$$




مثال:

$$3x^2 - 13x + 12 > 0$$
$$3x^2 - 9x - 4x + 12 > 0$$
$$3x(x-3) - 4(x-3) > 0$$
$$(x-3)(3x-4) > 0$$
$$x - 3 > 0 \qquad \Rightarrow x > 3$$
$$3x - 4 > 0 \qquad \Rightarrow 3x > 4$$
$$\frac{3x}{3} > \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$
$$A = \{x \in I\mathcal{R} \,/\, x > 3\}$$



ketabton.com - The Digital Library


## تمرین

لاندي دويمه درجه غيرمساواتونه حل کړئ؟

1. $3x^2 - 11x + 1 > x^2 - 12$
2. $4x^2 + 3x - 22 \geq 0$
3. $\frac{3x+1}{x+2} \leq 2x + 3$
4. $7x^2 + \frac{x+5}{2} - 10 \leq 0$
5. $3x^2 - 17x + 13 > 3x - 15$
6. $\frac{x+1}{x} > 2$
7. $3x^2 + 7x - 48 \geq 0$
8. $11x - 4x^2 - 20 < 8 < x^2 + 3x + 12$
9. $13x - x^2 - 30 \geq 0$
10. $5(x^2 - 13x) \leq 6$
11. $9x + 5x^2 - 38 \leq 0$
12. $13x^2 + 5\left(\frac{2x+3}{3}\right) - 14 \geq 0$
13. $15x^2 + x - 12 \geq 4x^2 + 13x + 8$
14. $7x^2 + 3x \geq 0$
15. $9x^2 + x - 20 \leq 3x^2 + 3x + 2$

ketabton.com - The Digital Library



# اووم فصل

## پارامتریک معادلی

پارامتر په لغت کی معین غیر مشخص مقدار ته وایي

اوپه اصطلاح کی که په یوه معادله کی د اصلي متحول ځخه په غیر یو بل داسی حرف موجود وي چه د هغه حرف د قیمت په تغیر سره د معادلی په جذرو کی تغیر راشي دغه جرف ته پارامتر اودغې معادلی ته پارامتریک معادله وایي. لکه:

$$(m+3)x^2+3(m-3)x-19m-6=0$$

### د پارامتریک معادلی حلول:

پارامتریک معادلی په دوه طریقو حلیږي.

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول

2- د پرامتر د قیمت له جنسه د معادلی حلول

### 1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول:

که پارامتریک معادله د دویمه درجه معادلی د حلولوپه هره طریقه حلید له حلوو یي.

مگر ښه او اسانه طریقه یي د محمدبن موسی فارمول دی.

مثال: لاندي پارامتریک معادله حل کړئ؟

$$x^2+mx-(6m^2+10m+4)=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=m^2-4\{-(6m^2+10m+4)$$

$$\Delta=m^2+24m^2+40m+16$$

$$\Delta=25m^2+40m+16$$

$$\Delta=(5m+4)^2$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-m\pm\sqrt{(5m+4)^2}}{2\times 1}=\frac{-m\pm(5m+4)}{2}$$

ketabton.com - The Digital Library


$$x_1 = \frac{-m + 5m + 4}{2} = \frac{4m + 4}{2} = \frac{4(m + 1)}{2} = 2(m + 1) = 2m + 2$$

$$x_1 = 2m + 2$$

$$x_2 = \frac{-m - 5m - 4}{2} = \frac{-6m - 4}{2} = \frac{2(-3m - 2)}{2} = -3m - 2$$

$$x_2 = -3m - 2 = -(3m + 2)$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو جذرونه د $m$ له جنسه پیدا کړئ؟

$1: (2m + 1)x^2 + 2mx - (4m + 1) = 0$

$2: (m + 4)x^2 + 6mx - (7m + 4) = 0$

$3: (2m + 4)x^2 + 4mx - (2m + 4) = 0$

$4: x^2 + (2m + 5)x + m^2 + 5m + 6 = 0$

$5: x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$

2- د پارامتر د قیمت له مخې د مجهول د قیمت پیدا کول:

د یوه شرط له مخې د پارامتر قیمت پیدا کوو او په معادله کې یې وضع کوي یو مجهوله دویمه درجه معادله لاس ته راځي. د غه معادله حلوو د معادلې د اصلي مجهول قیمت لاس ته راځي.

1- مثال: د $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x - 5m = 0$ په معادله کې د جذرو مجموعه $\left(-\frac{7}{2}\right)$ ده په معادله د $(m)$ کړئ؟

حل:

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m + 1}{m - 1}$$

$$-\frac{2m + 1}{m - 1} = -\frac{7}{2}$$

$$7m - 7 = 4m + 2$$

$$7m - 4m = 2 + 7$$

$$3m = 9 \quad \Rightarrow \frac{3m}{3} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow m = 3$$

ketabton.com - The Digital Library



$$(m-1)x^2+(2m+1)x-5m=0$$
$$(3-1)x^2+(2\times 3+1)x-5\times 3=0$$
$$2x^2+7x-15=0$$
$$\Delta= b^2-4ac=7^2-4\times 2\times(-15)$$
$$\Delta= 49+120=169$$
$$\Delta= 169$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{2\times 2}=\frac{-7\pm 13}{4}$$
$$x_1=\frac{-7+13}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$
$$x_2=\frac{-7-13}{4}=\frac{-20}{4}=-5$$

2- مثال: د $(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$ معادلی دجذرو دضرب حاصل $(-15)$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$x_1x_2=-15$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a}=-15$$
$$\frac{c}{a}=\frac{-4m-3}{m-2}=-15 \Rightarrow -15m+30=-4m-3$$
$$-15m+4m=-3-30$$
$$-11m=-33$$
$$\frac{-11m}{-11}=\frac{-33}{-11}$$
$$m=3$$
$$(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$$
$$(3-2)x^2-(3-1)x-4\times 3-3=0$$
$$x^2-2x-15=0$$
$$\acute{\Delta}= \acute{b}^2-ac=(-1)^2-1(-15)=1+15=16$$

ketabton.com - The Digital Library


$$\acute{\Delta} = 16$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{16}}{1} = \frac{1 \pm 4}{1}$$

$$x_1 = \frac{1+4}{1} = \frac{5}{1} = 5 \qquad \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{1-4}{1} = \frac{-3}{1} = -3 \qquad \Rightarrow x_2 = -3$$

3- مثال: د $(m-3)x^2 - 3mx + 9m - 1 = 0$ په معادله کې $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$ رابطه کې معادله حل کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{-\frac{b}{a}}{+\frac{c}{a}} = \frac{-b}{+c} = \frac{-(-3m)}{9m-1} = \frac{+3m}{9m-1} = \frac{12}{35}$$

$$108m - 12 = 105m$$
$$108m - 105m = 12$$
$$3m = 12$$
$$\frac{3m}{3} = \frac{12}{3} \quad \Rightarrow m = 4$$

$$(m-3)x^2 - 3mx + 9n - 1 = 0$$
$$(4-3)x^2 - 3 \times 4x + 9 \times 4 - 1 = 0$$
$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = (-6)^2 - 1(35) = 36 - 35 = 1$$
$$\acute{\Delta} = 1$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{1}}{1} = 6 \pm 1$$
$$x_1 = 6 + 1 = 7 \quad \Rightarrow x_1 = 7$$
$$x_2 = 6 - 1 = 5 \quad \Rightarrow x_2 = 5$$

ketabton.com - The Digital Library



4- مثال: $(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$ معادلې جذرونه د $(3x_1-1)(3x_2-1)=70$ په رابطه کې صدق کوي د معادلې جذرونه پیدا کړئ؟

حل:

$$(3x_1-1)(3x_2-1)=70$$
$$9x_1x_2-3x_1-3x_2+1=70$$
$$9x_1x_2-3(x_1+x_2)+1=70$$
$$9\left(\frac{c}{a}\right)-3\left(\frac{-b}{a}\right)=70-1$$
$$9\left(\frac{5m}{m-1}\right)-3\left(\frac{-\{-(3m+1)\}}{m-1}\right)=69$$
$$\frac{45m}{m-1}-\frac{9m+3}{m-1}=69$$
$$\frac{45m-9m-3}{m-1}=69$$
$$\frac{36m-3}{m-1}=\frac{69}{1}$$
$$69m-69=36m-3$$
$$69m-36m=-3+69$$
$$33m=66 \qquad \Rightarrow m=2$$
$$(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$$
$$(2-1)x^2-(3\times 2+1)x+5\times 2=0$$
$$x^2-7x+10=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times 1\times 10=49-40=9$$
$$\Delta=9$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7\pm\sqrt{9})}{2\times 1}=\frac{7\pm 3}{2}$$
$$x_1=\frac{10}{2}=5 \quad\Rightarrow\ x_1=5$$
$$x_2=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2 \quad\Rightarrow x_2=2$$

ketabton.com - The Digital Library


5- مثال: د $(m-4)x^2 - mx - 5m + 1 = 0$ په معادله کې د معادلې یو جذر (8) دی د $m$ قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$(m-4)8^2 - m \times 8 - 5m + 1$$
$$(m-4)64 - 8m - 5m + 1 = 0$$
$$64m - 256 - 13m + 1 = 0$$
$$51m - 255 = 0$$
$$51m = 255 \quad \Rightarrow m = 5$$

7- مثال: د $m$ په کوم قیمت باندی $(m-2)x^2 - (m-3)x - 8m - 1 = 0$ معادله دوه مساوي مختلف العلامه جذرونه لري؟

حل:

$$-\{-(m-3)\} = 0$$
$$m - 3 = 0 \quad \Rightarrow m = 3$$

7- مثال: د $(m)$ قیمت د $(2m-1)x^2 - (2m+1)x + 2m - 4 = 0$ څخه داسې پیدا کړئ چه د معادلې یو جذر صفر وي؟

حل: هغه وخت د معادلې یو جذر صفر کیږي چه $c = 0$ شي

$$-(2m+1) = 0$$
$$2m - 4 = 0 \quad \Rightarrow 2m = 4 \quad \Rightarrow \frac{2m}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$m = 2$$

8- مثال: د $(m)$ په کوم قیمت $(2m+1)x^2 - (7m+2)x + 6m + 1 = 0$ معادله یو جذر لري؟

حل: کله چه $\Delta = 0$ شي.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = \{-(7m+2)\}^2 - 4(2m+1)(6m+1)$$
$$\Delta = 49m^2 + 28m + 4 - 48m^2 - 32m - 4$$
$$\Delta = m^2 - 4m$$
$$\Delta = 0 \quad \therefore \quad m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0$$
$$m_1 = 0$$
$$m - 4 = 0 \quad \Rightarrow m = 4$$

ketabton.com - The Digital Library


9- مثال: د پهm($m$)کومو قیمتو باندی $(m-1)x^2-(2m+2)x+2m-5=0$
معادله دوه معکوس جذرونه لري؟

حل: کله چه $a=c$ شي

$$m-1=2m-5$$
$$m-2m=-5+1$$
$$-m=-4 \quad \Rightarrow m=4$$

10- مثال: د($m$) په کومو قیمتونو باندی $(m+1)x^2-mx-4m=0$ معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه لري؟

حل:- کله چه $p<0$ وي

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-4m}{m+1}<0$$
$$(m+1)^2\left(\frac{-4m}{m+1}\right)<0\times(m+1)^2$$
$$-4m(m+1)<0$$
$$-4m<0$$
$$\frac{-4m}{-4}>\frac{0}{-4}$$
$$m>0$$
$$m+1>0 \quad \Rightarrow m>-1$$
$$A=\{m\in IR/m>-1\}$$

11- مثال: د ($m$) په کومو قیمتونو باندی $(m-3)x^2-(m-2)x-2m+8=0$
معادله دوه حقيقي جذرونه لري؟

حل:- کله چه ($\Delta>0$) تر صفر وي

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(m-2)\}^2-4(m-3)(-2m+8)$$
$$\Delta=m^2-4m+4+8m^2-32m-24m+96$$
$$\Delta=9m^2-60m+100=(3m-10)^2$$
$$\Delta>0$$

ketabton.com - The Digital Library

$$(3m - 10)^2 > 0$$
$$3m - 10 > 0$$
$$3m > 10 \quad \Rightarrow m > \frac{10}{3}$$
$$A = \{m \in IR \,/\, m > \frac{10}{3}\}$$

12- مثال: د $(m)$ په کوم قیمت د $(m-2)x^2 - (m-1)x - 5m = 0$ معادلې لوی جذر مثبت دي؟

حل:- کله چه $(b \;\&\; c)$ دواړه منفي وي

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = \{-(m-5)\}^2 - 4(m-2)(-6m)$$
$$\Delta = m^2 - 10m + 25 + 24m^2 - 40m$$
$$\Delta = 25m^2 - 50m + 25 = (5m-5)^2$$

$$\Delta = (5m-5)^2 \Rightarrow \Delta = 5m - 5 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 5m - 5 > 0 \Rightarrow 5m > +5 \Rightarrow m > 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\{-(m-5) \pm \sqrt{(5m-5)^2}}{2(m-2)} = \frac{m - 5 \pm (5m-5)}{2(m-2)}$$
$$x_1 = \frac{m - 5 + 5m - 5}{2(m-2)} = \frac{6m - 10}{2m - 4}$$
$$x_2 = \frac{m - 5 - 5m + 5}{2m - 4} = \frac{-4m}{2m - 4}$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو کې د $(m)$ قیمت داسې تعین چه معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه ولري.

1: $x^2 - 5x - 3m + 1 = 0$
2: $(2+3)x^2 - mx - 25m + 4 = 0$
3: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 15 = 0$
4: $mx^2 - (2m+1)x + m = 0$

ketabton.com - The Digital Library



د لاندې معادلو څخه د $(m)$ قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه حقیقي جذرونه ولري.

5: $x^2 - 2(m-3)x + m + 9 = 0$

6: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$

7: $3x^2 - 10x - 3m + 2 = 0$

8: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$

9: $(2m+1)x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$

10: $2x^2 - mx + 1 = 0$

د لاندې معادلو څخه د $(m)$ قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه موهومي جذرونه ولري.

11: $mx^2 - (2m+1)x + 2m = 0$

12: $4x^2 + 4mx - 3m^2 = 0$

ketabton.com - The Digital Library

# اتم فصل

## اکسپوننشل (نمائي) معادلی

اکسپوننشل معادلی هغه معادلی دي چه توان یې مجهول وي عمومي شکل یې دا دی:

$$a^x = y$$

د اکسپوننشل معادلو قاعده خلاف د (1) وي یعنی $(a \neq 1)$ وي که $(a > 1)$ وي معادله متزایده ده او که $(a < 1)$ وي معادله متناقصه ده.

داکسپوننشل معادلو د حلولو لپاره مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو او معلوم دمساوات ښی خواته وړو. لازمی عملیې پری اجراء کوو په د مساوات د دواړو خواو عددونه په داسی طاقت لرونکو عددو بدلوو چه قاعدی یې سره مساوي وي. نو توانونه یې هم مساویدي دلته څو حالتونه موجود دي

1- چه د مساوات په چپ طرف کی توان مونوم یا بینوم وي نو یو مجهوله اوله درجه معادله لاس ته راځي دغه معادله حلوو او جذرونه یې پیدا کوو

1- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$5 \times 3^x + 11 \times 3^x - 14 \times 3^x = 18$$

$$(5 + 11 - 14)3^x = 18$$

$$2 \times 3^x = 18 \quad \Rightarrow \frac{2 \times 3^x}{2} = \frac{18}{2} \quad \Rightarrow 3^x = 9 \quad \Rightarrow 3^x = 3^2$$

قاعدې یې مساوي دي نو توانونه یې هم مساوي دي.

$$x = 2$$

2- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$$

$$3^x \cdot 3 - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = 45$$

$$3^x(3 - 4 \cdot 3^{-1}) = 45$$

$$3^x\left(3 - \frac{4}{3}\right) = 45 \Longrightarrow 3^x\left(\frac{9-4}{3}\right) = 45 \Longrightarrow 3^x\left(\frac{5}{3}\right) = 45$$

د مساوات دواړه خواوې په $\frac{3}{5}$ کې ضربوو.

$$\frac{3}{5}\left\{3^x\left(\frac{5}{3}\right)\right\} = 45 \times \frac{3}{5}$$
$$3^x = 27 = 3^3$$
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$

2- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حده وي قاعدی يي مساوي اود يوه توان د بل د توان دوه چنده وي دغه ډول معادلی په دویمه درجه معادلو بدلوو. دغه معادلی حلوو اود جذرو له مخی يي د اکسپوننشل معادلی جذرونه پيدا کوو.

مثال:

$$3^{2x} - 3^x = 702$$
$$(3^x)^2 - 3^x = 702$$

$3^x = y$ وضع کوو.

$$y^2 - y - 702 = 0$$
$$(y - 27)(y + 26) = 0$$
$$y_1 = 27$$
$$x_2 = -26$$
$$y_1 = 3^x = 27 = 3^3$$
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$
$$y_2 = 3^x = -26$$

د اکسپوننشل معادلی دومین همیشه مثبت وي نود $(y_2)$ د قیمت څخه دمعادلی جذرنه پیدا کیږي.

3- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حدونه موجود وي او توانونه يي جذري حدونه وي دغه ډول معادلی هم په دویمه درجه یو مجهوله معادله بدلولای شو.

مثال:

$$27^{2\sqrt{x}} = 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} - 3$$
$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{3\sqrt{x}} + 3 = 0$$
$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$
$$\left(27^{\sqrt{x}}\right)^2 - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$

ketabton.com - The Digital Library

$27^{\sqrt{x}} = y$ وضع کوو.

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$
$$(y-1)(y-3) = 0$$
$$y_1 = 1 \quad \& \quad y_2 = 3$$
$$27^{\sqrt{x}} = 1 = 27^0$$
$$\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$27^{\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow 3^{3\sqrt{x}} = 3^1$$
$$3\sqrt{x} = 1 \quad \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$
$$x = \frac{1}{9}$$
$$S = \left\{x \in IR / x = 0 \vee x = \frac{1}{9}\right\}$$

4- چه دوه داسې اکسپوننشل معادلې راکړ شوېوي چه چپ طرف یې د دوه داسې طاقت لرونکوعددو د ضرب حاصل وي چه قاعدې یې مساوي او توانونه یې مختلف وي، دغسې معادلې په اوله درجه دوه مجهوله معادلو بدلوو.

مثال:

$$2^x \cdot 2^y = 16$$
$$2^{2x} \cdot 2^{3y} = 32768$$
$$2^{x+y} = 2^4$$
$$2^{x+y} = 2^4$$
$$\underline{2^{2x+3y} = 2^{15}}$$

$$x + y = 4$$
$$\underline{2x + 3y = 15}$$

$$2(x + y = 4)$$
$$2x + 2y = 8$$
$$\underline{\pm 2x \pm 3y = \pm 15}$$
$$-y = -7$$
$$y = 7$$
$$x + 7 = 4$$

ketabton.com - The Digital Library


$$x = 4 - 7 = -3$$
$$x = -3$$

## تمرين

1. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$
2. $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$
3. $9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$
4. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$
5. $\frac{1-2^x}{2^x} = 1$
6. $4 \cdot 3^{2x} + 3^x = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 198$
7. $5^{2y} - 5^y - 600 = 0$
8. $\begin{cases} 3^{2x} \cdot 3^{5y} = 19683 \\ 3^x \cdot 3^{3y} = 243 \end{cases}$
9. $9^x - 5 \cdot 3^x - 46 = 0$
10. $2^{x+3} + 2^{x-1} = 17$
11. $\begin{cases} 2^{3x+1} \cdot 2^{y+1} = 128 \\ 2^{x+5} \cdot 2^{y+2} = 1024 \end{cases}$
12. $\frac{3^{2x+3}}{3^x} \cdot \frac{3^{3y+1}}{3^y} = 2187$
13. $2^{3x-2} \cdot 2^{y+5} = 128$

ketabton.com - The Digital Library



# نهم فصل

## لوګاریتمي معادلی Logarithm's Equation:

لوګاریتم په لغت کی د متناسبو عددو شمېرلو ته وايي.

او په اصطلاح کی داکسپوننشل معادلو معکوسی معادلی ته لوګارتمي معادله وايي.

فرضاً ($b = a^x$) یوه اکسپوننشل معادله لرو معکوسه معادله يي لوګاريتمي معادله ده.

چه داسی لیکل کیږي.

$$log_a b = x$$

$a$ ته د $log\,b$ قاعده وايي .

کولای شو چه اکسپوننشل تابع په لوګاریتمي تابع او لوګاریتمي تابع په اکسپوننشل تابع بدله کړو.لکه ($x = 2^3$) یوه اکسپوننشل تابع ده لوګاریتمي تابع يي عبارت له ($log_2 x = 3$) څخه ده .

اوهمدا ډول ($log_2 8 = x$) یوه لوګاریتمي تابع ده اکسپوننشل تابع يي عبارت له ($8 = 2^x$) څخه ده.

د لوګاریتم خواص:

1- د (1) لوګاریتم د هر مثبت عدد په قاعده باندی صفر (0) کیږي.

$$\begin{pmatrix} log_b 1 = 0 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$$

2- د هر مثبت لوګاریتم په خپله قاعده باندی (1) کیږي. $\begin{pmatrix} log_b b = .1 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ دا ځکه چه ($b = b^1$) کیږي.

مثال:

$$log_x x = 1 \qquad log_8 8 = 1$$

3- د یوه طاقت لرونکي عدد لوګاریتم په خپله قاعده باندی د توان څخه عبارت دی. $\begin{pmatrix} log_b b^r = r \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ ځکه چه:

ketabton.com - The Digital Library


$$b^r = b^r$$

4- د یوه حاصل ضرب لوګاریتم په یوه قاعده باندی دضربي عواملو د لوګاریتمو د مجموعی سره مساوي دي په همغه قاعده باندی:

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N.$$

$$log_a M = x \qquad M = a^X$$

$$log_a N = y \qquad N = a^Y$$

اکسپونتشل معادلی طرف په طرف ضربوو.

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y$$

$$M \cdot N = a^{x+y}$$

دچپ طرف لوګاریتم نیسو.

$$log_a MN = x + y$$

$$log_a MN = log_a M + log_a N$$

1- مثال: $log_2(2x) = ?$ لوګاریتم پیدا کړئ

حل:

$$log_2(2x) = log_2 2 + log_2 x = 1 + log_2 x$$

2- مثال:لاندې لوګاریتم پیدا کړئ ؟

$$log_x(xy) = ?$$

$$log_x(xy) = log_x x + log_x y = 1 + log_x y$$

5- د یوه خارج قسمت لوګاریتم په یوه قاعده باندی د صورت او مخرج د لوګاریتمو د تفاضل سره مساوي دی په همغه قاعده باندی.

$$log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_A N$$

$$log_a M = x \qquad M = a^x$$

$$log_a N = y \qquad N = a^y$$

اکسپونتشل معادلی طرف په طرف یو پر بل ویشو.

ketabton.com - The Digital Library

$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

د چپ طرف لوګاریتم نیسو.

$$\log_a \frac{M}{N}=x-y=\log_a M-\log_a N$$

1- مثال: لاندې لوګاریتم حل کړئ؟

$$\log_2 \frac{x}{2}=?$$

$$\log_2 \frac{x}{2}=\log_2 x-\log_2 2=\log_2 x-1$$

2- مثال:

$$\log_x \frac{5x}{y}=\log_x(5x)-\log_x y=\log_x x+\log_x 5-\log_x y$$

$$\log_x \frac{5x}{y}=\log_x(5x)-\log_x y=1+\log_x 5-\log_x y$$

6- که د یوه طاقت لرونکي عدد لوګاریتم په بله قاعده ونیول شي لوګاریتم یې عبارت دي توان ضرب یې دهغه لوګاریتم په همغه قاعده.

$$\log_b M^r=r\log_b M$$
$$\log_b M=x$$
$$M=b^x$$
$$M^r=(b^x)^r \Longrightarrow M^r=b^{rx}$$
$$\log_b M^r=rx$$
$$\log_b M^r=r\log_b M$$

1- مثال:

$$\log_3 81^7=?$$
$$\log_3 81^7=7\log_3 81=7\log_3 3^4=4\times 7\log_3 3=28\times 1=28$$

2- مثال:

$$\log_3(3x)^5=?$$
$$\log_3(3x)^5=5\log_3(3x)=5(\log_3 3+\log_3 x)$$
$$=5(1+\log_3 x)=5+5\log_3 x$$

ketabton.com - The Digital Library



7- دیوه عدد لوګاریتم د یوه طاقت لرونکي عدد په قاعده باندی عبارت دي د قاعدی د توان معکوس ضرب يي دهغه عدد لوګاریتم د قاعدی دقاعدی په قاعده.

$$\log_{a^b} M = \frac{1}{b}\log_a m$$

$$x = \log_{a^b} M$$

$$(a^b)^x = M$$

$$(a^x)^b = M \qquad \Rightarrow \sqrt[b]{(a^x)^b} = \sqrt[b]{M} \Rightarrow a^x = \sqrt[b]{M}$$

$$x = \log_a M^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b}\log_a M$$

$$\log_{a^b} M = \frac{1}{b}\log_a M$$

مثال:

$\log_{16} 32 = ?$

$\log_{16} 32 = \log_{2^4} 32 = \frac{1}{4}\log_2 32$

$= \frac{1}{4}\log_2 2^5 = 5 \times \frac{1}{4}\log_2 2 = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$

$\log_{16} 32 = \frac{5}{4}$

دقاعدی د بدلولو فارمول:

که د یوه عدد لوګاریتم په یو ه قاعده غوښتل شوی وي مګر په دغه قاعده باندی د راکړ شوي عدد د لوګاریتم پیدا کول مشکل وي نو د راکړشوي عدد او د لوګاریتم د قاعدی لوګاریتم په یوه بله قاعده باندی پیدا کوو د عدد لوګاریتم د لوګاریتم د قاعدی په لوګاریتم ویشو د راکړ شوي عدد لوګاریتم په را کړشوی قاعده باندی لاس ته راځي.

مثلاً $\log_b M$ غوښتل شوی دی لوګاریتم يي د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

ثبوت: $\log_b M$ په $x$ ښیو.

$\log_b M = x \quad \Rightarrow M = b^x$

$\log_a M = \log_a b^x = x \log_a b$

ketabton.com - The Digital Library

$$\log_a M = \log_b M \log_a b$$
$$\frac{\log_b M \log_a b}{\log_a b} = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$
$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

1- مثال:

$$\log_{27} 81 = ?$$
$$\log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} = \frac{4 \log_3 3}{3 \log_3 3} = \frac{4 \times 1}{3 \times 1} = \frac{4}{3}$$

2- مثال:

$$\log_{32} 128 = ?$$
$$\log_{32} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 32} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^5} = \frac{7 \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{7 \times 1}{5 \times 1} = \frac{7}{5}$$

## د لوګاریتم اقسام

لوګاریتم د قاعدې له مخې په دوه قسمه دی.

1- اعشاري لوګاریتم یا معمولي لوګاریتم *Common logarithm*

2- طبعي لوګاریتم *Natural logarithm*

1- اعشاري لوګاریتم:

که د لوګاریتم قاعده (10) وه دی لوګاریتم ته اعشاري لوګاریتم وايي.

$$\log x$$

2- طبعي لوګاریتم:

هغه لوګاریتم دی چه قاعده يي $(e)$ وي.

څرنګه چه د دواړو قسمو قاعدې معلومې دي نو قاعده يي نه ليکل کيږي.

$$\ln x$$

ketabton.com - The Digital Library



## دیوه عدد د لوګاریتم پیداکول:

د طاقت لرونکو عددو څخه په غیر د نورو عددو لوګاریتم دوه برخې لري.یوه برخه یې صحیح او بله برخه یې اعشاري ده .صحیح برخې ته کرکترستیک (*Characteristic*) او اعشاري برخې ته یې مانتیس (*Mantesa*) وایي .کرکترستیک د محاسبې پواسطه او مانتیس د جدول او یا د حساب د ماشین پواسطه پیدا کیږي.که دطاقت لرونکي عدد قاعده لس وي یوازې کرکترستیک لري او مانتیس نه لري

1- مثال : ?= $log(1000000)$ څو دی؟

$$log(1000000) = log\,10^6 = 6$$

کرکترستیک د ارقامو د شمیر څخه یو کم وي.

2- مثال: ?= $log(0.000000001)$ څو دی؟

$$log(0.000000001) = log\,10^{-9} = -9$$

کرکترستیک یې د اعشاریې د علامې د دواړو خواو د صفرو د شمیر سره مساوي دی او علامه یې منفي ده.

که عدد طاقت لرونکی نه وُ نو دغه عدد مانتیس او کرکترستیک دواړه لري.لکه $log(4560000)$ د داسې عدد د لوګاریتم د پیدا کولو لپاره راکړشوی عدد په داسې اعشاري عدد بدلوو چه یو رقم یې صحیح او نور رقمونه یې اعشاري شي. د راکړشوي عدد د رقمونو شمیر ته ګورو عدد اوه رقمي دی نو په ($10^6 = 1000000$) کې یې ضربوو په دې ترتیب کولای شو چه کرکترستیک یې پیدا کړو.

$$log(4560000) = log(4.56 + 10^6) = log\,4.56 + log\,10^6 = log\,4.56 + 6$$

(6) د راکړشوي عدد کرکترستیک دی.مانتیس یې د ($log$ 4.56) څخه لاس ته راوړو. طریقه یې داسې ده چه (6) د درې رقمي عددو د لوګاریتمي دجدول په پورتنۍ کرښه کې پیدا کوواو (4.5) د جدول د چپ طرف په ستون کې پیداکوو او د مخکیني لیکل شوي عدد شاته یې لیکو بیا کرکترستیک ته ګورو که مثبت وُ نو د کرکترستیک په اندازه د جدول څخه د پیدا شوي عدد مخې ته صفرونه ږدو. اوکه کرکترستیک منفي وُ د پیدا شوي عدد شاته د اعشاریې د علامې دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

$$log(4560000) = log\,4.56 + 6 = 0.6590 + 6 = 6.6590$$
$$log(4560000) = 6.6590$$

ketabton.com - The Digital Library

### د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم:

د صفر او یوه تر منځ د راکړشوي کسر کرکترستیک منفي او مانتیس یې مثبت دی. که راکړشوی کسر عام وي په اعشار کسر یې بدلوو او د مخکیني سوال په څېر یې حلوو.

مثال: $log(0.00567)$ پیداکړئ؟

حل:

$$log(0.00567) = log(5.67 \times 10^{-3}) = log\,5.67 + log\,10^{-3}$$
$$= log\,5.67 - 3 = 0.3690 - 3$$

د راکړشوي عدد لوګاریتم $(0.3690 - 3)$ دی مګر که وغواړو چه د کرکترستیک او مانتیس څخه یو عدد جوړ کړو نود کرکترستیک پر سر منفي علامه لیکو چه علامه په دی دلالت کوي چه کرکترستیک منفي دی$(\bar{3}.3690)$ او که وغواړو چه مانتیس او کرکترستیک تر یو علامه لاندی کړو نو د کرکترستیک سره (1) جمع کوو او د مانتیس څخه یې منفي کوو نو:

$$(-2.6310)$$
$$log(0.00567) = 0.3690 - 3 = \bar{3}.3690 = -2.6310$$

### تمرین

د لاندی صحیح عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- 456000
2- $log\,5890000$
3- $log\,69200$
4- $log\,73400$

د لاندی اعشاري عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- $log\,0.00234$
2- $log\,0.0598$
3- $log\,0.000568$
4- $log\,0.008$

### د صفر لوګاریتم:

$$0 = \frac{1}{10^{\infty}} = 10^{-\infty}$$
$$log_{10}\,0 = -\infty$$

ketabton.com - The Digital Library



## انتي لوګاريتم:

هر عدد د خپل لوګاريتم انتي لوګاريتم دي.

مثلاً $(\log 1000 = 3)$ دی او $anti \log 3 = 1000$ دی.

## انتي لوګاريتم پيدا کول:

مانتيس په جدول کی پيدا کوو هغه عدد چه د مانتيس په ستون کی ليکل شوی دي ليکو بيا هغه عدد د مانتيس په کرښه کی دی په لسيز او سليز مرتبو کی ليکو کرکترستيک ته ګورو که مثبت ؤ کرکترستيک د عدد د ارقامو د شمير څخه يو کم دی يعنی تر کرکترستيک يو صفر اضافه ورکوو. او که کرکترستيک منفي و نو د عدد د شاته د کرکترستيک په اندازه د اعشاريي دوا پو خواو ته صفرونه پردو.

مثال:

$$antilog(2.3690) = ?$$
$$anti\ log(0.3690) = 2.338837239$$
$$anti\ log(2.3690) = 233.8837239$$

مثال:

$$anti\ log\ \bar{6}.3710 = ?$$
$$anti\ log\ 0.3710 = 2.35$$
$$anti\ log(\bar{6}.3710) = 0.00000235$$

تمرين:

1- $anti\ \ log(3.4581)$

2- $anti\ log(\bar{2}.6589)$

3- $anti\ log(-4.2907)$

4- $anti\ log(0.7551 - 4)$

د لوګ $(\log)$ اولن $(ln)$ پيدا کول يو د بل له جنسه:

د قاعدی د بدلولو فارمول ليکو:

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$
$$\log_b M \cdot \log_a b = \log_a M$$

د $(a)$ په عوض $(10)$ او د $(b)$ په عوض $(e)$ ليکو.

ketabton.com - The Digital Library

$$\log_e M \cdot \log_{10} e = \log_{10} M$$
$$\ln M \cdot \log 2.72 = \log M$$
$$\ln M \cdot 0.4343 = \log M$$

مثال: $(\ln 6.73 = 1.9066)$ دی $(\log 6.73)$ پیدا کړئ؟

حل:

$$\log M = \ln M \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = \ln 6.73 \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = 1.9066 \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = 0.8280$$

د $\log$ څخه د $\ln$ د پیدا کولو لپاره د مساوات دواړه خواوی په (0.4343) ویشو.

$$\frac{\ln M \cdot 0.4343}{0.4343} = \frac{\log M}{0.4343} = \frac{1}{0.4343}\log M$$
$$\frac{1}{0.4343} = 2.3026$$
$$\ln M = 2.3026 \cdot \log M$$

مثال:

$$\ln 563 = ?$$
$$\ln 563 = \log 563 \cdot 2.3026$$
$$\ln 563 = 2.7505 \cdot 2.3026 = 6.3$$

## انترپولېشن *Interpolation*:

انترپولېشن په نوي عبارت باندی د یوی موضوع بیانولو ته وايي.

او په اصطلاح کی انترپولېشن هغه عملیه ده چه د هغه عددو لوګاریتم پیدا کوي چه لوګاریتمي جدول یي ترتیب شوی نه وي طریقه یي داسی ده چه عدد لیکو مانتیس یي په یوه حرف بنیو د راکړشوي عدد څخه لاندی باندی عددونه په دری رقمي عدد کی پیدا کوو او لیکويي اومانتیس یي د جدول څخه لیکو په دی ترتیب شپږ عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي بیا د دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کوو په نتیجه کی څلور عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب په واسطه پیدا کوو او د کوچني عدد د مانتیس سره یي جمع کوود راکړشوي عدد مانتیس لاس ته راځي.

ketabton.com - The Digital Library



مثال:- $log$ 4567 پیدا کړئ؟

$$0.01\left[0.007\begin{pmatrix} log\,4.57 & 0.6599 \\ log\,4.567 & m \\ log\,4.56 & 0.6589 \end{pmatrix} d\right]0.0010$$

$$\frac{0.01}{0.007}=\frac{d}{0.0010}\Longrightarrow d=\frac{0.01\cdot 0.0010}{0.007}=\frac{10}{7000}=\frac{1}{700}=0.00143$$

$$d=0.00143$$
$$m-0.6589=0.00143$$
$$m=0.00143+0.6589=0.6603$$
$$log\,4567=3.6603$$

## دانتر پولیشن پواسطه د انتي لوګاریتم پیدا کول:

د انتي لوګاریتم د پیدا کولو لپاره مانتیس په جدول کې لټوو که په جدول کې نه ؤ نو د دغه مانتیس انتي لوګاریتم په یوه حرف ښیو د مانتیس څخه لاندې باندې مانتیسونه په جدول کې پیدا کوو په نتیجه کې شپږ عددونه لاس ته راځي چه یو به یې مجهول وي پیا د دوه، دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کوو شپږ عددونه په څلورو عددو بدلیږي. چه یو به یې مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب پواسطه پیدا کوو اود کوچني عدد د انتي لوګاریتم سره یې جمع کوو د راکړشوي لوګاریتم انتي لوګ لاس ته راځي.

مثال:- د یوه عدد لوګاریتم (3.7351) دې انتي لوګ یې پیدا کړئ؟

$$0.01\left[d\begin{pmatrix} 5.44 & 0.735 \\ m & 0.7352 \\ 5.43 & 0.7348 \end{pmatrix}0.0004\right]0.0008$$

$$\frac{0.01}{d}=\frac{0.0008}{0.0004}$$

$$d=\frac{0.0004\cdot 0.01}{0.0008}=\frac{4}{800}=\frac{1}{200}=0.005$$

$$m-5.43=d$$
$$m=d+5.43$$
$$m=0.005+5.43$$
$$m=5.435$$

## کولوګاریتم $Cologarthm$:

د یوه عدد د معکوس لوګاریتم ته د هغه عدد کولوګاریتم وایي.

ketabton.com - The Digital Library

مثلاً $(a)$ او $\left(\frac{1}{a}\right)$ عددونه یو د بل معکوس دي نو د $\left(\frac{1}{a}\right)$ لوګاریتم د $(a)$ د کولوګاریتم په نوم نوم یادیږي.

$$co\,log\,a = log\frac{1}{a} = log\,1 - log\,a = 0 - log\,a = -\,log\,a$$
$$co\,log\,a = -\,log\,a$$

نو معلومه شوه چه د یوه عدد کولوګاریتم دهغه عدد منفي لوګاریتم دي.

## د لوګاریتمي معادلو د حل طریقه:

د لوګاریتمي معادلو په حلولو کې د لوګارتم څخه استفاده کوو.

1- مثال:

$$log_a(x+6) - log_a(x+2) = log_a x$$
$$log_a\frac{x+6}{x+2} = log_a x$$
$$\frac{x+6}{x+2} = x$$
$$x^2 + 2x = x + 6$$
$$x^2 + 2x - x - 6 = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$
$$\Delta = 25$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_1 = 2$$
$$x_2 = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

2- مثال:

$$x^{2\,log\,x} = 10x$$
$$log\,x^{2\,log\,x} = log\,10x$$
$$2log\,x \times log\,x = log\,10x \Longrightarrow 2\,log^2 x = log\,10 + log\,x$$
$$2\,log^2 x - log\,x - 1 = 0$$
$$2y^2 - y - 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

ketabton.com - The Digital Library


$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$log\, x = y = y_1 = 1$$

$$log_{10}\, x = 1$$

$$x = 10^1 = 10 \qquad x_1 = 10$$

$$log_{10}\, x = y = y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$log_{10}\, x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3- مثال:

$$\frac{log(35 - x^3)}{log(5 - x)} = 3$$

$$3\, log(5 - x) = log(35 - x^3)$$

$$log(5 - x)^3 = log(35 - x^3)$$

$$(5 - x)^3 = 35 - x^3$$

$$125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35 - x^3$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

4- مثال:

$$log_5\left(log_{10}\sqrt{x^2 + 19}\right) = 0$$

$$log_{10}\sqrt{x^2 + 19} = 5^0 = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 19} = 10^1 = 10$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\left(\sqrt{x^2+19}\right)^2 = 10^2$$
$$x^2 + 19 = 100$$
$$x^2 = 100 - 19 = 81$$
$$x^2 = 81$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$$
$$x = \pm 9$$

5- مثال:

$$log_3 x + log_9 x + log_{27} x = 5.5$$
$$log_3 x + log_{3^2} x + log_{3^3} x = 5.5$$
$$log_3 x + \frac{1}{2} log_3 x + \frac{1}{3} log_3 x = 5.5$$
$$log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5.5$$
$$log_3 x \left(\frac{6+3+2}{6}\right) = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x \left(\frac{11}{6}\right) = \frac{11}{2} \quad \Longrightarrow \frac{11}{6} log_3 x = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}} = \frac{6 \times 11}{2 \times 11} = \frac{6}{2} = 3$$
$$log_3 x = 3$$
$$x = 3^3 = 27$$

6- مثال:

$$log_2(11x - 1) = 5$$
$$11x - 1 = 2^5$$
$$11x = 32 + 1 = 33$$
$$\frac{11x}{11} = \frac{33}{11}$$
$$x = 11$$

7- مثال:

$$log_3(2^x - 7) = 2$$
$$2^x - 7 = 2$$
$$2^x = 2 + 7 = 9 = 3^3$$

ketabton.com - The Digital Library


$x = 3$

8- مثال:

$$\log_{\sqrt[3]{x}} 25 = 18$$
$$25 = \sqrt[3]{x}^{18} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{18} = x^6$$
$$5^2 = (x^3)^2$$
$$x^3 = 5$$
$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{5} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{5}$$

9- مثال:

$$\log_{10}\sqrt{x+1} + \log_{10}\sqrt{x-1} - \log_{10} 5 = 0$$
$$\log_{10}\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 0$$
$$\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 10^0 = 1$$
$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = 5$$
$$\left(\sqrt{(x+1)(x-1)}\right)^2 = 5^2$$
$$x^2 - 1 = 25 \quad \Longrightarrow x^2 = 25 + 1 = 26$$
$$x^2 = 26 \quad \Longrightarrow x = \pm\sqrt{26}$$

10- مثال:

$$\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = \log 2$$
$$Log\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \log 2$$
$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 2 \quad \Longrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = 2 \qquad \Longrightarrow x - 1 = 2\ ,\ \ x = 3$$

11- مثال:

$$x^{\log_{10} x} = 10$$
$$\log x^{\log_{10} x} = \log 10$$
$$\log_{10} x \log_{10} x = 1 \quad \Longrightarrow \log^2{}_{10} x = 1 \quad \Longrightarrow x = 10$$

ketabton.com - The Digital Library


12- مثال:

$$log_3(x+1) - log_3(x-1) = 1$$
$$\frac{x+1}{x-1} = 3^1 \quad \Rightarrow x+1 = 3(x-1) \quad \Rightarrow x+1 = 3x-3$$
$$x - 3x = -3 - 1 \quad \Rightarrow -2x = -4 \quad \Rightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2} \quad \Rightarrow x = 2$$

13- مثال:

$$log_4(3x-3) = log_2 3$$
$$log_{2^2}(3x-3) = log_2 3$$
$$\frac{1}{2} log_2(3x-3) = log_2 3$$
$$log_2(3x-3)^{\frac{1}{2}} = log_2 3$$
$$\sqrt{3x-3} = 3 \quad \Rightarrow \sqrt{(3x-3)}^2 = 3^2$$
$$3x - 3 = 9 \quad \Rightarrow 3x = 9 + 3 = 12 \Rightarrow\Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4$$

14- مثال:

$$log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = log_2 4$$
$$log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = log_2 2^2 \Rightarrow log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2\, log_2 2 = 2 \times 1 = 2$$
$$log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2 \quad \Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = 3^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} = 9 - 2 = 7$$
$$\frac{1}{x} = 7 \Rightarrow 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

15- مثال:

$$log\sqrt{x} + log\, x^{\frac{3}{2}} = log\, 100$$
$$log\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3} = log\, 100 \Rightarrow log\sqrt{x \cdot x^3} = log\, 100$$
$$x^2 = 10^2 \Rightarrow x = 10$$

16- مثال:

$$log_{(x^2-x+4)}(x^2+5x-1) = 1$$
$$x^2 + 5x - 1 = x^2 - x + 4 \qquad \Rightarrow 5x - 1 = -x + 4$$
$$\Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

ketabton.com - The Digital Library



17- مثال:

$log_9 3 \cdot log_2 x = 1$

$log_{3^2} 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} log_3 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot log_2 x$

$= log_2 x^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$

x^(1/2)=2^1⟹x^(1/2)=2⟹(x^(1/2) )^2=2^2⟹ x=4

18- مثال:

$log_3 log_2(x-1) = 2$

$log_2(x-1) = 3^2 \Longrightarrow x - 1 = 2^9 \Longrightarrow x = 2^9 + 1$

$= 513 \Longrightarrow x = 513$

19- مثال:

$log_{10} x = \frac{log_3 12}{log_3 10}$

$log_{10} x = log_{10} 12$

$x = 12$

20- مثال:

$3^{log_4 16} = 27^x$

$3^{log_4 16} = 3^{3x}$

$log_4 16 = 3x \Longrightarrow 16 = 4^{3x} \Longrightarrow 2^4 = 2^{6x} \Longrightarrow 6x = 4 \Longrightarrow x = \frac{4}{6}$

$$x = \frac{2}{3}$$

تمرين:

لاندي معادلې حل کړئ؟

1) $x\, log\, 3 - 1 = 2\, log\, 3 - log\left(\frac{x}{3} + 1\right)$

2) $log \sqrt{2x^2} - 1 = \frac{1}{2}$

3) $log(x-3) = 1 - log\, x$

4) $ln(y+1) = ln(y-7) + ln\, 4$

5) $log_2 x + log_x 2 = 2$

ketabton.com - The Digital Library



6) $log_2 x + log_3 x = 1$

7) $log_3 x + log_5 x = log_{10} 15$

8) $log^2{}_2 (x-1)^2 - log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$

9) $\begin{cases} log_3 x + log_3 y = -3 \\ log_{10} x^3 - log_{10} y^2 = 7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^y + 5x = -4 \\ log_x 16 = y \end{cases}$

11) $\begin{cases} log_4 x - log_2 y = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

ketabton.com - The Digital Library

# لسم فصل

## توابع

تابع په لغت کې پیرو ته وایي.

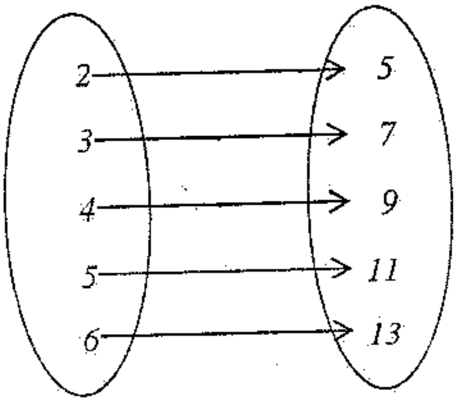
او په اصطلاح کې که د $(A)$ او $(B)$ دوه داسې سیټونه ولروچه د $(A)$ دسیټ هر عنصر د $(B)$ د سیټ د یوه عنصر سره تعلق ولري. دغسې تعلق یا رابطې ته تابع وایي.

لکه: $A = (2,3,4,5,6)$ او $B = (5,7,9,11,13)$

سیټونه د لاندې رابطې پیروي کوي.

$$y = 2x + 1$$

نو دغه ډول رابطې ته تابع وایي.




په تابع کې اول سیټ ته د تعریف ناحیه ،د قیمتونو سیټ اویا ډومېن$(Domain)$ وایي.

دویم سیټ ته د تصویرونو سیټ ، رنج$(Range)$ او کوډومېن$(Codomain)$ وایي.

رنج : د تعریف د ناحیې د عناصرو دتصویرونو سیټ ته رنج وایي.

کوډومین: د دویم سیټ د ټولو عناصرو سیټ ته کوډومېن وایي.

کله کله د ډومېن ټول عناصر د کوډومېن د ټولو عناصرو سره رابطه لري په دی صورت کې دویم سیټ هم رنج دی او هم کوډومېن دی.لکه پورتني سیټونه .

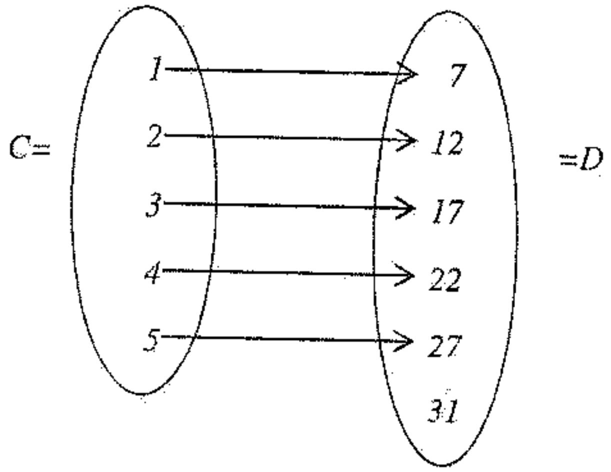
او که د دویم سیټ ټول عناصر د اول سیټ د عناصرو سره تعلق ونلري پدی صورت کې د دویم

ketabton.com - The Digital Library

سیټ هغه عناصر چه د اول سیټ د عناصرو سره تعلق لري د تصویرونو سیټ یا رنج بلل کیږي.
او د دویم سیټ ټول عناصر د کوډومېن په نوم یادیږي.

$C = (1,2,3,4,5)$

$D = (7,12,17,22,27,31)$




په دغه حالت کې د رنج او کوډومېن تر منځ لاندې رابطه موجوده ده.

$Range \subseteq Codomain$

## د تابع اقسام :

تابع په دوه قسمه ده.

1- ناطقه تابع　　　2- ترانسندنتل تابع

### 1- ناطقه تابع :

خطي تابع ، دویمه درجه تابع او هوموګرافیک تابعګانې ناطقې تابعګانې دي.

$a$- خطي تابع:

هغه تابع ده چه ګراف یې مستقیم خط وي. عمومي شکل یې دا دی.

$$y = ax + b$$
$$y = mx + b$$

$(a)$ او $(b)$ ثابت عددونه دي $(x)$ متحول دی $(y)$ د $(x)$ تابع دی. $a$ او $m$ دواړه یو شی دي.

ketabton.com - The Digital Library



## دخطي تابع د تعريف ناحيه :

د خطي تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی په $(IR)$ سره يي ښيي يعني:

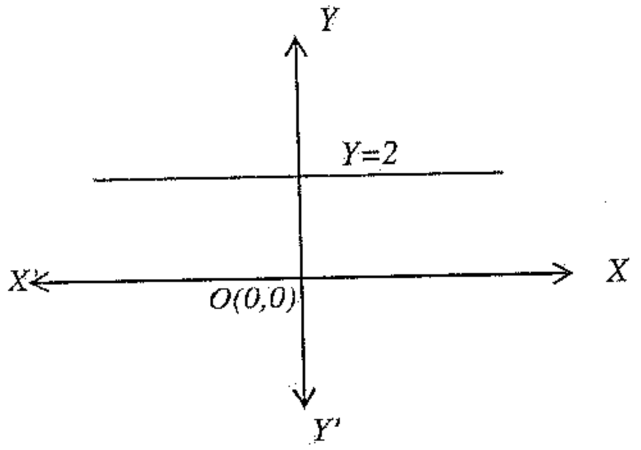
$$IR = (-\infty ، +\infty)$$

د خطي تابع مېل د $(x)$ ضريب يعني $(m)$ دی.

### خصوصي حالتونه:

1- که په يوه تابع کې $m = 0$ تابع لاندې شکل غوره کوي $(y = b)$ دی تابع ته ثابته تابع وايي.ګراف يي د $X\acute{X}$ د محورسره موازي دی.

مثال:- $Y = 2$ ګراف رسم کړئ؟




2- چه $m = 1$ او $b = 0$ وي تابع لاندې شکل غوره کوي.

$$y = mx + b \Rightarrow 1.x + 0 = x$$

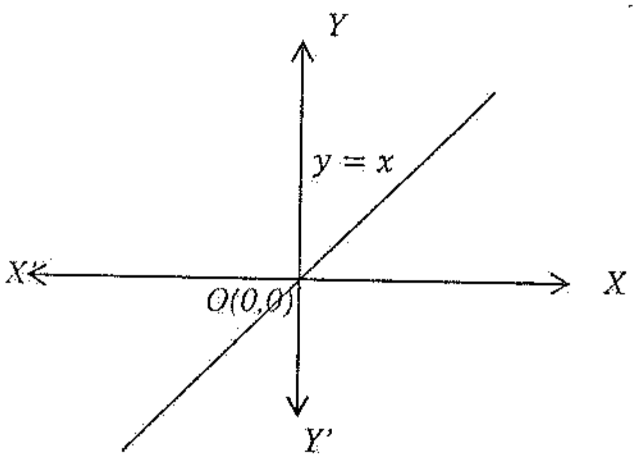
$$y = x$$

دغې تابع ته د عينيت تابع وايي ګراف يي اوله او دريمه ربعه نيمايي کوي.

مثال:- $y = x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |

ketabton.com - The Digital Library


## دخطي تابع د عمومي شكل د ګراف ترسيم:

1- د $X\acute{X}$ محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا كوو نو $y = 0$ فرضوو.

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا كوو نو $X = 0$ فرضوو.

پيدا شوي نقطې وصلوو د راكړشوي تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x + 6$ د تابع ګراف رسم كړئ

حل:

1- $x = 0$ فرضوو نو $y = 6$ كيږي نود $(YY')$ د محور سره د تابع د تقاطع نقطه عبارت له $A(0,6)$ څخه ده.

2- $y = 0$ فرضوو نو:

$$3x + 6 = 0$$

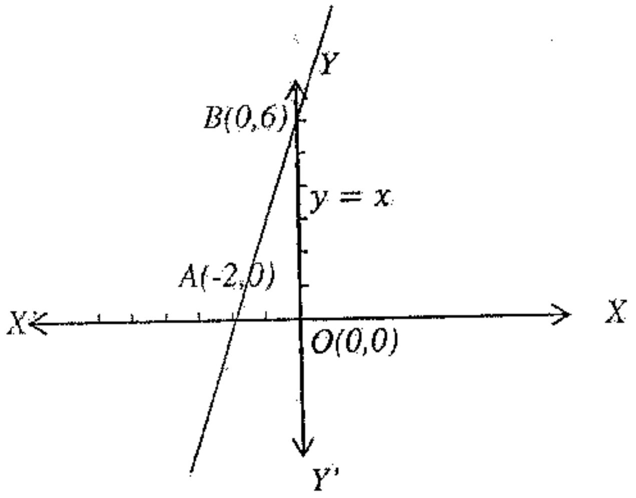
$$3x = -6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

$$B(-2,0)$$

دا نقطه د $(XX')$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده د وضعيه كميتونو د محورونو په مستوي كې يې د وضعيه كميتونو د محورونو پر مخ يې پيدا كوو او و صلوو يې غوښتل شوی ګراف لاس ته راځي.

ketabton.com - The Digital Library





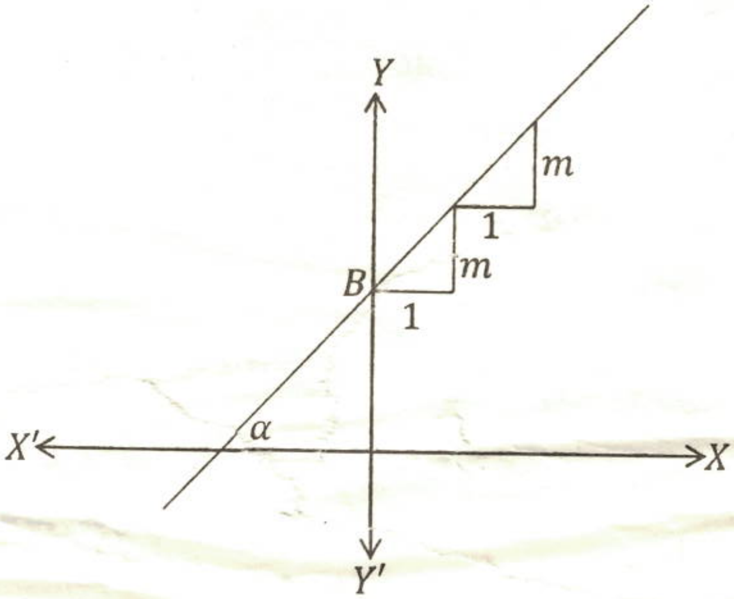

## د مستقيمې كرښې مېل:

د مستقيمې كرښې مېل د هغه زاويې تانجانت دی چه مستقيمه كرښه يې د $X\acute{X}$ د محور سره جوړوي.

په عمومي صورت د متحول ضريب د مستقيمې كرښې مېل دی.ددی خبری دثبوت لپاره د وضعيه كميتونو په مستوي كې د وضعيه كميتونو محورونه د $(\Delta)$د مستقيم پواسطه قطع كوو چه د $Y\acute{Y}$ محور د $B$ په نقطه كې قطع كړي او $X\acute{X}$ د محور سره د $(\alpha)$ په اندازه زاويه جوړه كړي بيا د $X\acute{X}$او $Y\acute{Y}$ د محورونو سره موازي خطونه رسموو په افقي خطو باندی د واحد په اندازه او په عمودي محورو باندی د $(m)$ په اندازه توټې را ببلو $\alpha$ او د $(\alpha)$ د زاويې تانجانت پيدا كوو چه همدغه تانجانت د مستقيمې كرښې مېل دی.

$$\tan\alpha = \frac{m}{1} = m$$

ketabton.com - The Digital Library

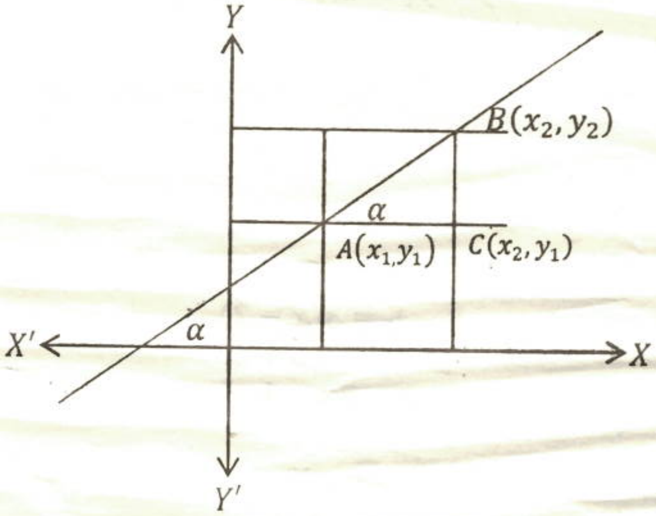

## دمېل معادله

فرضاً د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ نقطې د مستقیمې دوه نقطې دي

د $(A)$ او $(B)$ د نقطو څخه د $X\acute{X}$ او $Y\acute{Y}$ د محورو سره موازي خطونه رسموو چه یو

او $B(X_2, Y_2)$ بل د $C(x_1, y_2)$ په نقطه کې قطع کړي د $ABC$

په مثلث کې د $\alpha$ دزاویې تانجانت پیدا کوو.



ketabton.com - The Digital Library



$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan\alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: $A(5,9)$ او $B(-2,-5)$ دیوی مستقیمی کرښی دوه نقطی دي مېل يي پيدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-9}{-2-5} = \frac{-14}{-7} = 2 \Rightarrow m = 2$$

د هغه مستقیمی کرښې معادله چه مېل او یوه نقطه يي معلومه وي:

د مستقیمی کرښی عمومي معادله لیکو.

$$y = mx + b \ldots 1$$

فرضاً $A(x_1, y_1)$ د یوې مستقیمی کرښی یوه نقطه ده په عمومي معادله کې يي وضع کوو.

$$y_1 = mx_1 + b \cdots 2$$

(2) رابطه د (1) رابطی څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{c} y = mx + b \\ \underline{\pm y_1 = \pm mx_1 \pm b} \\ y - y_1 = mx - mx_1 \end{array}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمی کرښی معادله پیدا کړئ چه $m = 3$ وي او د $A(2,5)$ د نقطې څخه تېره شي؟

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 5 = 3(x - 2)$$
$$y = 3x - 6 + 5$$
$$y = 3x - 1$$

ketabton.com - The Digital Library

د هغه مستقیمی کرښی د معادلی پیدا کول چه دوه نقطی یې معلومې وي:

د هغه مستقیمی کرښی معادله لیکو چه مېل او یوه نقطه یې معلومه وي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د $(m)$ په عوض یې قیمت لیکو:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمی کرښی معادله پیدا کړئ چه دوه نقطی یې $A(-4,14)$ او $B(4,8)$ وي.

حل:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 14 = \frac{8 - 14}{4 - (-4)}\{x - (-4)\}$$

$$y = \frac{-6}{4 + 4}(x + 4) + 14$$

$$y = \frac{-6}{8}(x + 4) + 14$$

$$y = -\frac{3}{4}(x + 4) + 14 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\cdot 4 + 14 = -\frac{3}{4}x - 3 + 14$$

$$= -\frac{3}{4}x + 8$$

## محوري معادله

محوري معادله هغه معادله ده چه د محورونو سره یې د تقاطع نقطی معلومې وي.

معادله یې په لاندې ډول ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ثبوت: فرضاً د $XX$ دمحور سره یې د تقاطع نقطه $A(a,0)$ ده او د $YY$ سره یې د تقاطع نقطه $B(0,b)$ ده دا نقطی په هغه معادله کې وضع کوو چه دوه نقطی یې معلومې وي

ketabton.com - The Digital Library


$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$y = \frac{b}{-a}(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$-bx - ay = -ab$$

$$\frac{-bx}{-ab} - \frac{ay}{-ab} = \frac{-ab}{-ab}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال: د يوې مستقيمې کرښې دوه نقطې $A(5,0)$ او $B(0,10)$ دي معادله يې پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{2x + y}{10} = 1$$

$$y = -2x + 10$$

تمرين:

1- په لاندې ډول د کرښو نقطې راکړ شويدي مېل يې پيدا کړئ؟

1- $A(3,5)$ , $B(4,-11)$ 2- $C(9,3)$ , $D(2,7)$
3- $E(9,3)$ , $F(3,-5)$

2- په لاندې ډول د مستقيمې کرښې يوه نقطه او مېل راکړشوی دي معادله يې پيدا کړئ؟

1- $A(5,4)$ , $m = 4$ 2- $B(5,8)$ , $m = 2$

3- $C(-3,7)$ , $m = \frac{1}{2}$

3- په لاندې ډول د مستقيمې کرښې دوه نقطې راکړ شويدي معادله يې پيدا کړئ؟

1: $A(3,4)$ , $B(6,2)$ 2: $C(8,12)$ , $D(4,-7)$
3: $E(2,-1)$ , $F(3,-4)$

ketabton.com - The Digital Library

4- په لاندي ډول د محورېنوسره د مستقيمي کرښې د تقاطع نقطې راکړشويدي محوري معادلې يې پيداکړئ؟

1- $A(4,0)$ , $B(0,8)$ 2- $C(3,0)$ , $D(0,12)$
3- $E(8,0)$ , $F(0,24)$

جفته تابع :

که يوه تابع د او لپاره يو شان وي دی تابع ته جفته تابع وايي. لکه $y = x^2$ چې:

$$f(x) = x^2$$
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

يعنې:

$$f(x) = f(-x)$$

طاقه تابع :

هغه تابع ده چه او لپاره يو شان نه وي. لکه $y = x^2 + 5x$ چه د $(x)$ او لپاره يو شان نه ده يعني د $(x)$ لپاره $f(x) = x^2 + 5x$ او د $(-x)$ لپاره $f(-x) = x^2 - 5x$ ده نو $f(x) \neq f(-x)$ نو دغه تابع طاق تابع ده.

معکوسه تابع:

دوه تابعګانې هغه وخت يو د بل معکوسې دي چه د يوې ډومېن دبلې کوډومېن وي او کوډومېن دبلې تابع ډومېن وي .

د معکوسې تابع جوړول:

د تابع څخه د $(x)$ قيمت د $(y)$ له جنسه پيداکوو اوبيا د $(x)$ او $(y)$ ځايونه بدلوو معکوسه تابع لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x - 7$ معکوسه تابع پيدا کړئ.

حل:

$$3x - 7 = y$$
$$3x = y + 7$$
$$x = \frac{y + 7}{3}$$
$$y = \frac{x + 7}{3}$$

ketabton.com - The Digital Library



## مرکبه تابع:

هغه تابع ده چه متحول يي د بل متحول تابع وي يا دا چه د تابع ،تابع ته مرکبه تابع وايي.

که وغواړو چه د دوه تابعګانو څخه مرکبه تابع جوړه کړو نو يوه تابع په بله تابع کی د متحول په عوض وضع کوو. مرکبه تابع لاس ته راځي اوداسی ليکل کيږي.

$$fog$$

مثال: $f(x) = 3x - 5$ او $g(x) = 3x^2 - 1$ دوه تابعګانی راکړشويدي $fog$ او $gof$ پيدا کړئ؟

$$fog = f\{g(x)\} = f(3x^2 - 1) = 3(3x^2 - 1) - 5 = 9x^2 - 3 - 5 = 9x^2 - 8$$

$$fog = 9x^2 - 8$$

$$gof = g\{f(x)\} = g(3x - 5) = 3(3x^2 - 1)^2 - 5 = 3(9x^2 - 6x + 1) - 5$$

$$= 27x^2 - 18x + 1 - 5$$

$$gof = 27x^2 - 18x - 4$$

## د مرکبې تابع د تعريف ناحيه

د مرکبې تابع د تعريف ناحيه د اولی تابع د تعريف د ناحيي د هغه عناصرو سيټ دی چه په مرکبه تابع کې تصوير ولري.

مثال: $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ او $h(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ دوه تابعګانې لرو چې $domf(x) = \left[\frac{1}{3}, \infty\right]$ او $domh(x) = IR$ دی، $hof$ او $foh$ او ډومېنونه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$hof = h\{f(x)\} = h\left(\sqrt{4x - 1}\right) = \left(\sqrt{4x - 1}\right)^2 + \frac{1}{4} = 4x - 1 + \frac{1}{4} = 4x - \frac{3}{4}$$

$$hof = 4x - \frac{3}{4} \qquad ; \; domh\{f(x)\} = \left[\frac{1}{3}, \infty\right[$$

ketabton.com - The Digital Library

$$foh = f\{h(x)\} = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - 1} = \sqrt{4x^2 + 4 \times \frac{1}{4} - 1}$$

$$= \sqrt{4x^2 + 1 - 1}$$

$$foh = 2x \quad ; \quad domf\{h(x)\} = IR$$

تمرين:

د لاندې تابعګانو معکوسې تابعګانې پيدا کړئ؟

1- $y = 4x - 3$ 2- $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}$

3- $y = x - \frac{1}{2}$ 4- $y = 5x - 8$

د لاندې تابعګانو ترکيب او دومېنونه پيدا کړئ؟

1- $f(x) = 3x - 4$ , $g(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$

2- $f(x) = x^2 + 1$ , $h(x) = \sqrt{x}$

## پولينومي تابعګانې

څو شاخه اي تابعګانو ته پولينومي تابع وايي.لکه

$$y = \begin{cases} x + 1 & : x < -2 \\ x + 3 & : x > 2 \\ x - 1 & : x < 1 \end{cases}$$

حل:

$$y = x + 3 \quad : x > 2$$

| $x$ | 3 | 4 |
|---|---|---|
| $y$ | 6 | 7 |

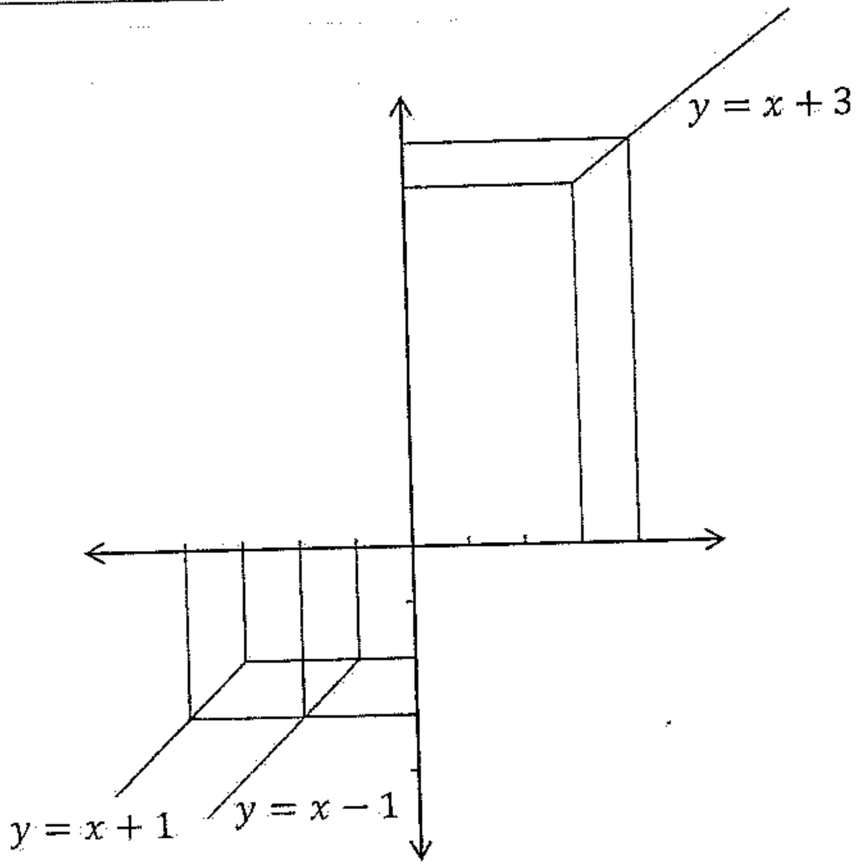
$$y = x + 1 \quad : x < -2$$

| $x$ | $-4$ | $-3$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $-2$ |

$$y = x - 1 \quad : x < 1$$

| $x$ | $-2$ | $-1$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $-2$ |

ketabton.com - The Digital Library


## تمرين

د لاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

1- $y = \begin{cases} x + 2 & : x > 3 \\ x - 2 & : x < 3 \end{cases}$

2- $y = \begin{cases} x - 1 & : x > 2 \\ x + 1 & : x < 2 \\ x + 2 & : x > 5 \end{cases}$

3- $y = \begin{cases} x + 4 & : x < 2 \\ x - 1 & : x > 0 \end{cases}$

4- $y = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & : x < 6 \\ \frac{x-2}{4} & : x > 6 \end{cases}$

5- $y = \begin{cases} x + 4 & " \quad x < 3 \\ x - 4 & " \quad x > 3 \end{cases}$

ketabton.com - The Digital Library

# يوولسم فصل

## دويمه درجه تابع

دويمه درجه تابع هغه تابع ده چه د متحول درجه يي دوه وي.

عمومي شكل يې دا دی.

$$\begin{pmatrix} y = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{pmatrix}$$

$a$، $b$ او $c$ ثابت عددونه دي او $(x)$ متحول دی او $(y)$ د $(x)$ تابع دی.

**د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه:**

د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی او په $IR$ سره يې ښيي. د تعريف ناحيي ته د قيمتونوسيټ او ډومېن $(Domain)$ هم وايي.

**د دويمه درجه تابع گراف:**

د دويمه درجه تابع گراف ته پارابول وايي.

که په دويمه درجه تابع کې $a > 0$ وي تابع گراف اصغري نقطه لري اود پارابول خوله پورته خواته خلاصيږي. او که $a < 0$ وي نو پارابول اعظمي نقطه لري او د پارابول خوله کښته خواته خلاصيږي.

اعظمي او اصغري نقطو ته د پارابول راس $(Vertex)$ وايي.

د دويمه درجه تابع د گراف ترسيم:

د دويمه درجه تابع د گراف ترسيم په دری حالتو کې مطالعه کوو.

1- د $y = ax^2$ د تابع د گراف ترسيم

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د گراف ترسيم

3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = ax^2 + bx \end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ

ketabton.com - The Digital Library



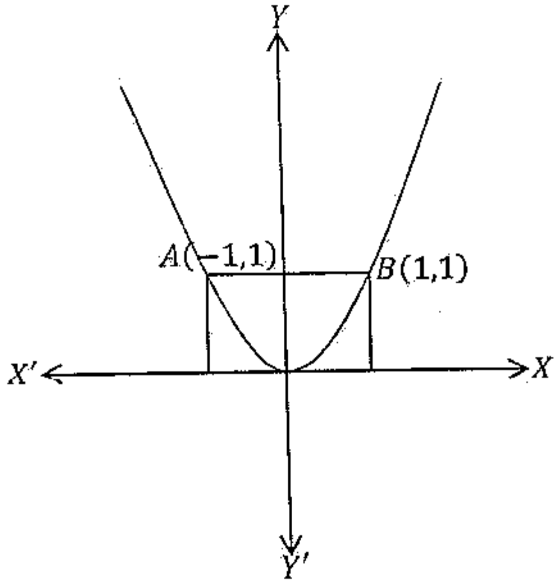
1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسيم:

$x$ ته څو قيمتونه ورکوو او د $(y)$ قيمتونه پيدا کوو. بيا د تابع د ګراف وضعيت په يوه جدول کې مطالعه کوو.

مثال:- د $y = x^2$ ګراف رسم کړئ؟

$x$ ته څو قيمتونه ورکوو او د $y$ قيمتونه پيدا کوو. او د تابع وضعيت په يوه جدول کې مطالعه کوو:

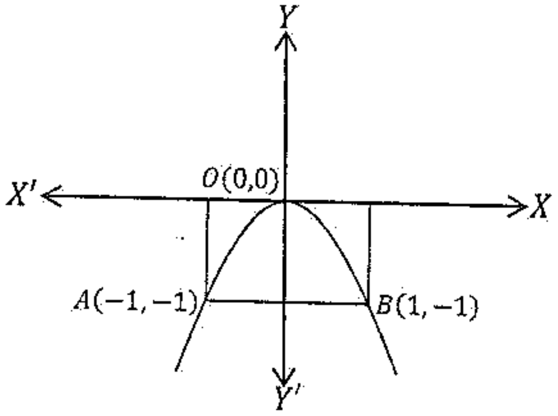
| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |



ketabton.com - The Digital Library


مثال:- د $y = -x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |




نوټ:

که $(a < 1)$ وي نو د تابع ګراف پلن او سورور وي او که $(a > 1)$ وي نو د تابع ګراف نري او کم سوری وي.

تمرین:

لاندې ګرافونه رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2$ 2- $y = 2x^2$ 3- $y = -4x^2$

4- $y = \frac{1}{2}x^2$ 5- $-\frac{2}{3}x^2$

## د ګراف انتقال:

د $(X\acute{X})$ او $(Y\acute{Y})$ په محورو باندې د تابع د ګراف حرکت ته د تابع د ګراف انتقال وايي.

1- د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع د ګراف انتقال :

که وغواړو چه د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع ګراف ته انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو او ګراف یې رسموو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (3) په اندازه چپې او ښې خواته انتقال ورکړئ؟

ketabton.com - The Digital Library

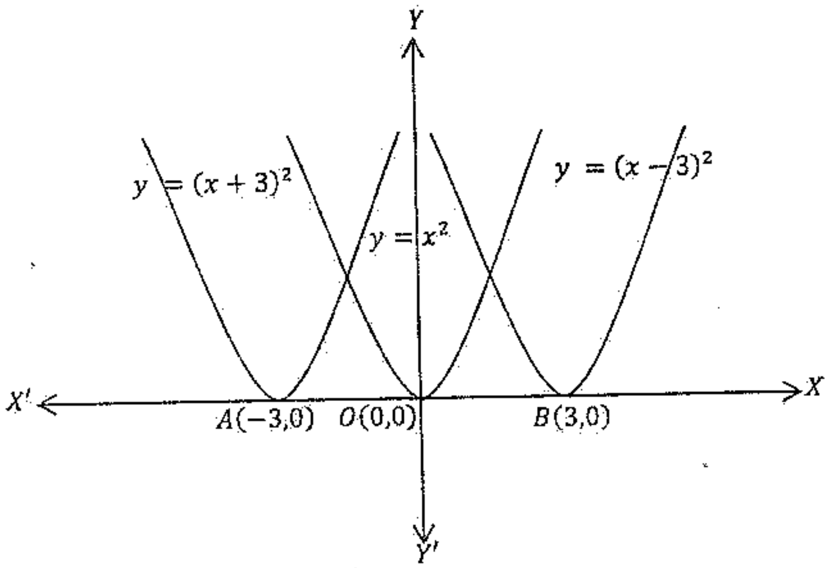


حل: چپې خواته د 3 په اندازه انتقال ورکوو نو 3 ورسره جمع کوو.

$$y = (x+3)^2$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$A(-3,0)$$

ښي خواته د انتقال لپاره (3) د متحول څخه منفي کوو:

$$y = (x-3)^2$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$




2- د $YY'$ په محور باندې د تابع د ګراف انتقال:

که وغواړو چه د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د $(y\acute{y})$ په محور باندې انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (2) په اندازه پورته او کښته خواته انتقال ورکړئ؟

حل:

که وغواړو چه (2) په اندازه ګراف ته پورته خواته انتقال ورکړو نو (2) د تابع سره جمع کوو.

$$y = x^2 + 2$$

ketabton.com - The Digital Library

... تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوونو $y = 0$ فرضوو.

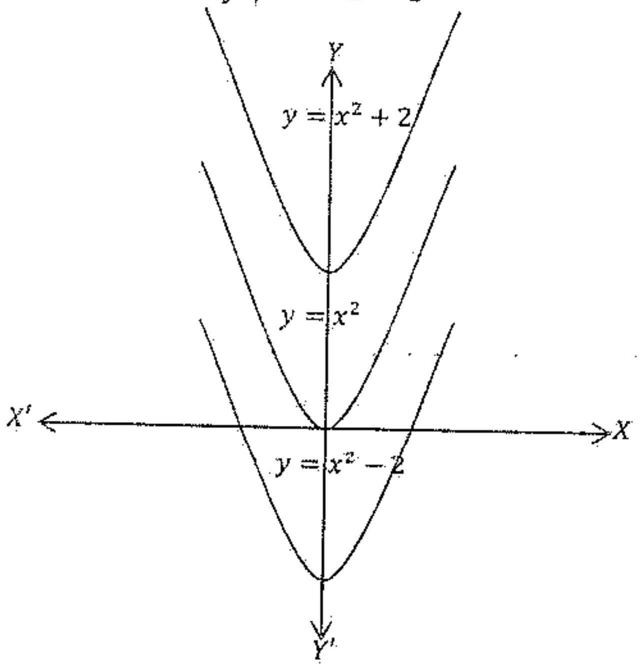
$$x^2 + 2 = 0$$
$$x^2 = -2$$

څرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.

د ګراف د ښه ترسيم لپاره $(x)$ ته څو قيمتونه ورکوو او د $(y)$ قيمتونه پيدا کوو

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $x = 0$ فرضوو په نتيجه کې $y = 2$ کيږي چه د $Y\acute{Y}$ دمحور سره د ګراف د تقاطع نقطه $A(0,2)$ ده.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 2 | 3 |




تمرين:

لاندې تابعګانې رسم کړئ؟

1- د $y = 2x^2$ تابع ګراف ته د (3) په اندازه ښي او چپې خواته انتقال ورکړئ؟

2- د $y = 3x^2$ تابع ګراف ته د $\left(\frac{3}{2}\right)$ په اندازه کښته او پورته خواته انتقال ورکړئ؟

ketabton.com - The Digital Library



2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسیم:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو د تقاطع نقطې یې عبارت دي.

$$A\left(+\sqrt{\frac{-c}{a}},0\right)$$

$$B\left(-\sqrt{\frac{-C}{A}},0\right)$$

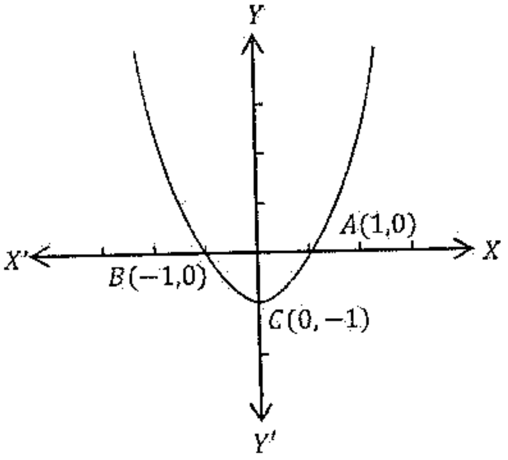
2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوو د تقاطع نقطه یې عبارت ده له $M(0,C)$ دغه نقطه د تابع د ګراف راس هم دی.

د $(A)$ نقطه د $(C)$سره او د $(C)$ نقطه د $(B)$ سره وصلوو د تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^2 - 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$



ketabton.com - The Digital Library

د $xx'$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطې عبارت دي

$A(1,0) \quad B(-1,0)$

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. چې $y = -1$ کیږي نو د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده له $C(0,-1)$ څخه

مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

څرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د $xx'$ د محور سره د تقاطع نقطه نلري.

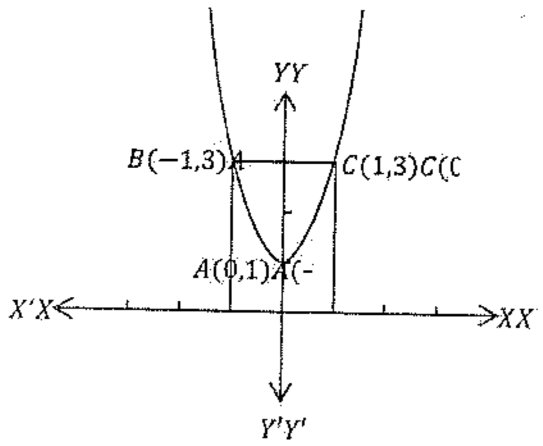
د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده.

$A(0,1)$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره $(x)$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمت پیدا کوو.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $0$ | $2$ |

$B(-1,2) \qquad O(0,1) \qquad C(1,2)$



ketabton.com - The Digital Library


مثال: د $y = -x^2 + 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

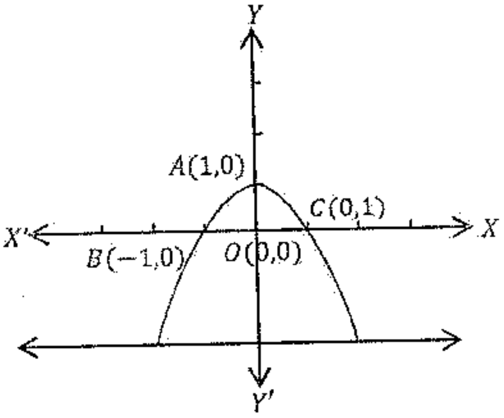
1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$-x^2 + 1 = 0$
$-x^2 = -1$
$x^2 = 1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$

$A(1,0) \quad B(-1,0)$

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د گراف نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. نو $y = 1$ کیږي د تقاطع نقطه يي عبارت ده.

$C(0,1)$




مثال: د $y = -x^2 - 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$-x^2 - 1 = 0$
$-x^2 = 1$
$x^2 = -1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$

ketabton.com - The Digital Library


ځکه چه منفي عدد جذر نلري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.

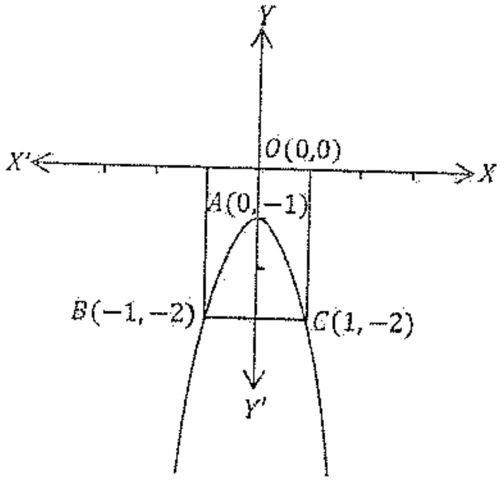
2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو $y = -1$ نو د $X$ د محور سره د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0,-1)$$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره $(x)$ ته ځو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمت پیدا کوو.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-2$ | $-1$ | $-2$ |

$B(-1,-2)$ $O(0,0)$ $C(1,-2)$




3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ د تابعګانو د ترسیم طریقه:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $(y = 0)$ فرضوو. په نتیجه کې $ax^2 + bx + c = 0$ دویمه درجه معادله لاس ته راځي . د دغه معادلې د حل لپاره د $(\Delta)$ قیمت پیدا کوو د $(\Delta)$ په باب دری حالته موجود دي.

a- که $\Delta > 0$ وي نو معادله دوه جذره لري او جذرونه يې د $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ پواسطه پیدا کیږي او د تقاطع نقطې يې عبارت دي له: $A(X_1,0)$ او $B(X_2,0)$

b- که $(\Delta = 0)$ وي معادله یو جذر لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي $x = \frac{-b}{a}$ نو د تقاطع نقطه يې عبارت ده له: $A(x,0)$

ketabton.com - The Digital Library



c- که $(\Delta = 0)$ وي معادله جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.په دغه حالت کې د پاره ددې چه د $(Y\acute{Y})$ د محور يوى او بلى خواته دګراف خط السير تعين شي نو $(x)$ ته يو منفي او يو مثبت قيمت ورکوو اود $(y)$ قيمتونه پيدا کوو د $(Y\acute{Y})$ د محور يوى او بلى خواته دوه نقطې لاس ته راځي چه د تابع د ګراف خط السير تعينوي.

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحورسره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوونو $x = 0$ فرضوود $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع دګراف دتقاطع نقطه عبارت ده له: $M(0, c)$

3- د تابع د ګراف د راس نقطه

$$y = ax^2 + bx + c \implies a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $a > 0$ وي

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0 \quad \therefore \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $x + \frac{b}{2a} = 0$ شي نو $x = -\frac{b}{2a}$ کيږي.نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

ketabton.com - The Digital Library


که $0 < a$ وي بيا هم $0 > \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ کيږي مګر $0 < a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ کيږي. دواړه خواو څخه $\frac{4ac-b^2}{4a}$ منفي کوو:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{4ac-b^2}{4a}<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$y<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

که $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ او $x=\frac{-b}{2a}$ شي نو $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ کيږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

مثال: د $y=2x^2-3x-2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د د قاطع نقطه پیدا کوو نو $y=0$ فرضوو.

$2x^2-3x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-2)=9+16=25$

$\Delta=1$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)\pm5}{2\times2}=\frac{3\pm5}{4}$

$x_1=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2 \quad \therefore\ x_1=2$

$x_2=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2} \quad \therefore\ x_2=\frac{-1}{2}$

نو د محور سره دګراف د د تقاطع نقطی عبارت دي:

$$A(2,0) \qquad B\left(\frac{-1}{2},0\right)$$

د $(X\acute{X})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y=0$ فرضوو. نو $y=6$ کيږي. نو

د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده. $C(0,-2)$

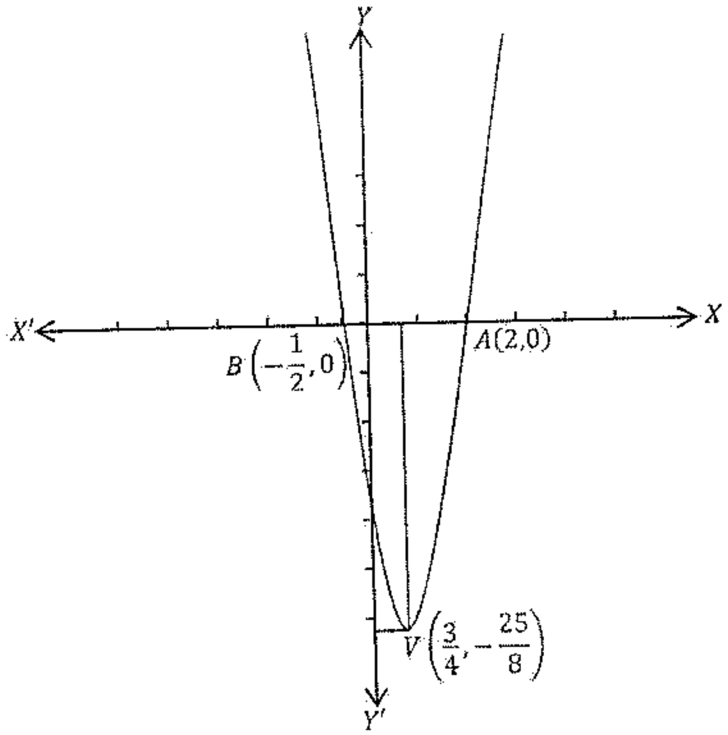
د تابع د ګراف د راس نقطه پیدا کوو.

ketabton.com - The Digital Library



$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{3}{4},\frac{4\times 2\times(-2)-(-3)^2}{4\times 2}=\frac{-16-9}{8}=-\frac{25}{8}\right)$$

$$V\left(\frac{3}{4},-\frac{25}{8}\right)$$

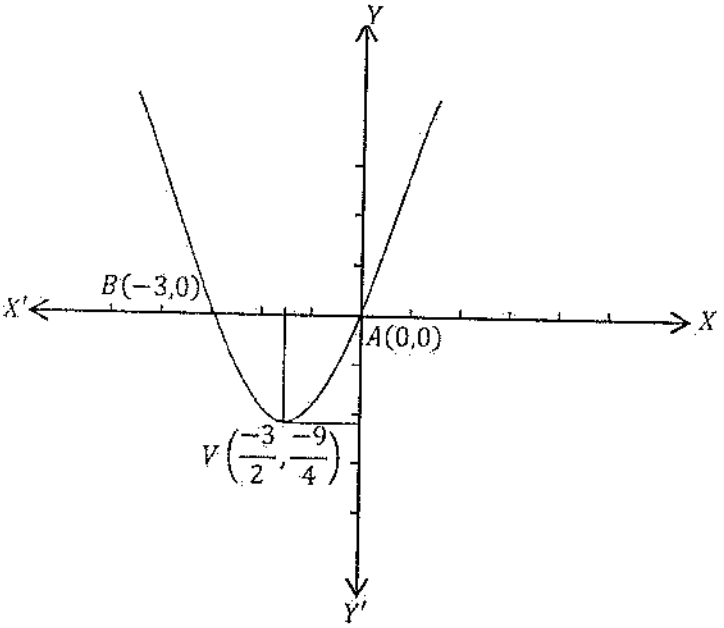



مثال: $y=x^2+3x$ گراف رسم کړئ؟

حل:

$y=0$
$x^2+3x=0$
$x(x+3)=0$
$x_1=0$
$x_2=-3$
$A(0,0)\quad B(-3,0)$

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{4\times 1\times 0-3^2}{4\times 1}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{-9}{4}\right)$$




مثال: $y = -x^2 + 4x - 3$ گراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y = 0$ فرضوو نو:

$-x^2 + 4x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4$

$\Delta = 4$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{-2 \times 1}$

$x_1 = \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad : \quad x_1 = 1 \qquad A(1,0)$

$X_2 = \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad : \quad x_2 = 3 \qquad B(3,0)$

2- $x = 0$ فرضوو نو:

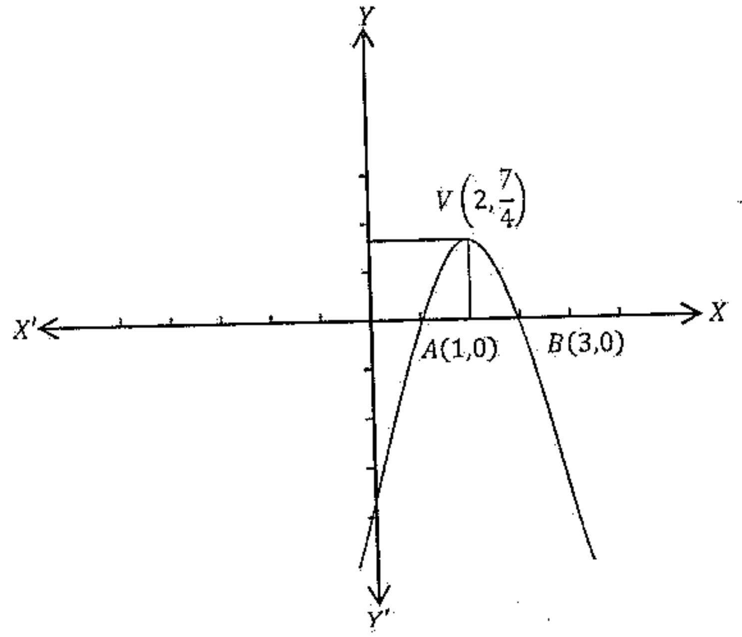
$y = -3 \qquad C(0, -3)$

ketabton.com - The Digital Library


اصغري او اعظمي ټکي یې پیدا کوؤ:

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-4}{-2},\frac{4(-1)(-3)}{4(-1)}\right)=\left(2.\frac{7}{4}\right)$$

$$V\left(2,\frac{7}{4}\right)$$




مثال: $y=x^2+2x+1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y=0$ فرضوو نو:

$$x^2+2x+1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times1=4-4=0$$

$$\Delta=0$$

معادله یو جذر لري

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$A(-1,0)$$

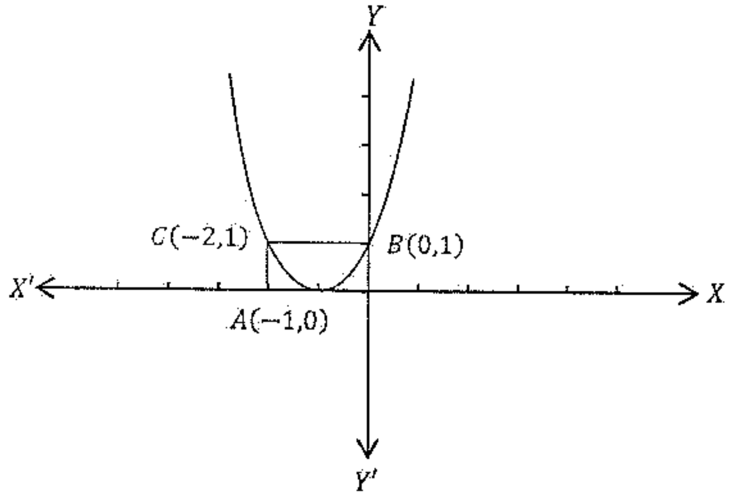
ketabton.com - The Digital Library

2- $x = 0$ فرضوو نو:

$$y = 1$$
$$B(0,1)$$

| $x$ | $-2$ |
|---|---|
| $y$ | $4$ |

$$C(-2,1)$$




## تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

| | |
|---|---|
| 1- $y = 3x^2 + 6x$ | 2- $5x^2 - 13x + 6$ |
| 3- $4x^2 - 4x + 1$ | 4- $-x^2 + 5x - 6$ |
| 5- $-2x^2 - 3x + 14$ | 6- $3x^2$ |
| 7- $4x^2 + 8x$ | 8- $6x^2 + x - 57$ |
| 9- $11x^2 - 13x - 18$ | 10- $2x^2 - 6x$ |
| 11- $2x^2 + x - 21$ | 12- $-x^2 + 4$ |
| 13- $11x^2 - 13x - 18$ | 14- $3x^2 - x - 10$ |
| 15- $5x^2 + 2x - 51$ | 16- $-9x^2 + 17x + 2$ |

ketabton.com - The Digital Library



## هوموګرافيک تابع

هغه تابع ده چه د ښنومو د نسبت څخه جوړه شوې وي عمومي شکل يې دا دې.

$$f(x) = \frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}}$$ زوړ نصاب

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$ نوی نصاب

$a$، $b$، $c$ او $d$ ثابت عددونه دي $(x)$ متحول دی او $(y)$ د $(x)$ تابع دی.

مجانب $Asymptotes$:

که د يو مستقيم او يوه منحني ترمنځ فاصله په لايتناهي$(\infty)$ کې صفرشي دا مستقيم د دی منحني مجانب دی.

مجانب په دری قسمه دی.

1- عمودي مجانب $Vertical\ Asymptotes$

2- افقي مجانب $Horizntil\ Asymptotes$

3- مايل مجانب $Slant\ or\ oblique\ Asymptotes$

1- عمودي مجانب :

هغه خط چه د $(x)$ په فاصله باندی د $(Y\acute{Y})$ د محور سره موازي رسميږي د تابع د ګراف عمودي مجانب بلل ميږي.

د عمودي مجانب فارمول:

مخرج د صفر سره مساوي کوود عمودي مجانب لاس ته راځي.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$cx + d = 0$$

ketabton.com - The Digital Library

$$cx = -d$$
$$x = \frac{-d}{c}$$

د عمودي مجانب فارمول دا دي:

$$x = \frac{-d}{c}$$

مثال:- د $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړئ؟

حل:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{-6}{3} = 2 \Longrightarrow x = 2$$

2- افقي مجانب :

هغه خط چه د$(y)$ په ترتیب د$(Y\acute{Y})$ د محور سره موازي رسمیږي د تابع د ګراف افقي مجانب دي.

د افقي مجانب فارمول:

د $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ په تابع کې صورت په مخرج ویشو خارج قسمت یې په $(m)$ښیو او باقي په $(p)$ ښیو نو لیکو چه:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = m + \frac{p}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

مخرجونه یې مساوي دي نو صورتونه یې هم مساوي دي.

$$ax+b = mcx+md+p$$
$$a = mc \Longrightarrow m = \frac{a}{c}$$

دباقي د پیدا کولو لپاره ثابت عدد د ثابت عدد سره مساوي کوو.

$$md+p = b \quad \Longrightarrow p = b - md = b - \frac{ad}{c} = \frac{bc-ad}{c}$$
$$p = \frac{bc-ad}{c}$$

ketabton.com - The Digital Library



مثال: د $h(x)=\frac{8x-3}{4x-9}$ تابع افقي مجانب او باقي مانده پيدا کړئ؟

حل:

$$m=\frac{a}{c}=\frac{8}{4}=2$$
$$m=2$$
$$p=\frac{bc-ad}{c}=\frac{-3\times 4-8(-9)}{4}=\frac{-12+72}{4}=\frac{60}{4}=15$$

3- مايل مجانب $Slant\ or\ Oblique\ Asymptotes$:

که د يوې تابع د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه زياته وي دغه ډول تابعګانې مايل مجانب لري او د مجانب د معادلې د لاس ته راوړلو لپاره صورت په مخرج ويشو.

مثال: د $g(x)=\frac{6x^2-24}{x+2}$ تابع عمودي مجانب ، افقي مجانب،مايل مجانب يې پيدا کړئ؟

حل: عمودي مجانب:

$$x=\frac{-d}{c}=\frac{-2}{1}=-2$$

افقي مجانب نلري، مايل مجانب معادله يې دا ده.

$$\frac{6x^2-24}{x+2}=6x-12$$

د هوموګرافيک تابع د ګراف ترسيم:

1- عمودي مجانب پيدا کوو او رسمووېي.

2- افقي مجانب پيدا کوو او رسموو يې.

3- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف دتقاطع نقطه پيدا کوو.

4- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو.

5- د ګراف د ښه دقيق ترسيم لپاره $(x)$ ته څو قيمتونه ورکوو او د $(y)$ قيمتونه پيدا کوو.

6- پيدا شوی نقطې دوضعيه کميتونود محورونو په مستوي کې پيدا کوو او وصلوو يې د راکړ شوی تابع ګراف لاس ته راځي.

ketabton.com - The Digital Library


مثال: د $f(x) = \frac{2x+4}{x-2}$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:عمودي مجانب:

$$x = -\frac{d}{c} = -\left(\frac{-2}{1}\right) = \frac{2}{1} = 2$$

افقي مجانب:

$$m = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$$

د $(X\acute{X})$ سره تقاطع پیدا کوونو $(y = 0)$ فرضوو:

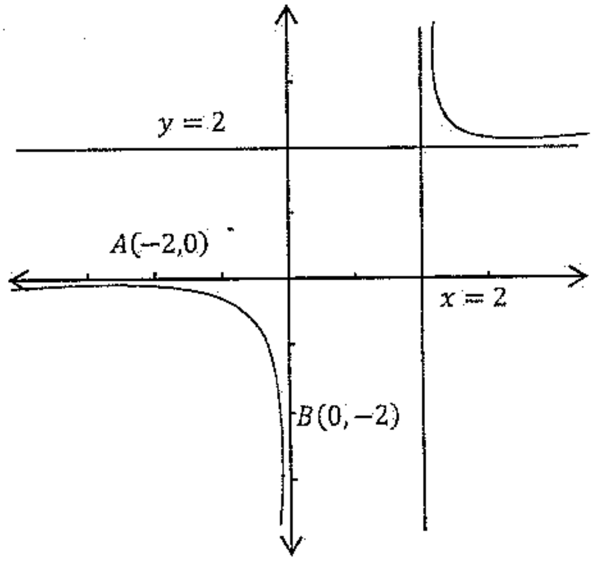
$$\frac{2x+4}{x-2} = 0$$
$$(x-2)\left(\frac{2x+4}{x-2}\right) = 0(x-2)$$
$$2x+4 = 0$$
$$2x = -4$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{-4}{2}$$
$$x = -2 \qquad \therefore \quad A(-2,0)$$

د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوو.

نو $y = -2$ کیږي او د تقاطع نقطه يې: $B(0,-2)$

ketabton.com - The Digital Library






تمرين:

دلاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ

$$1:\ G(x)=\frac{4x-3}{2x+1}\qquad 2:\ F(x)=\frac{2x-6}{3x+6}\qquad 3:\ h(x)=\frac{3x+9}{x-6}$$

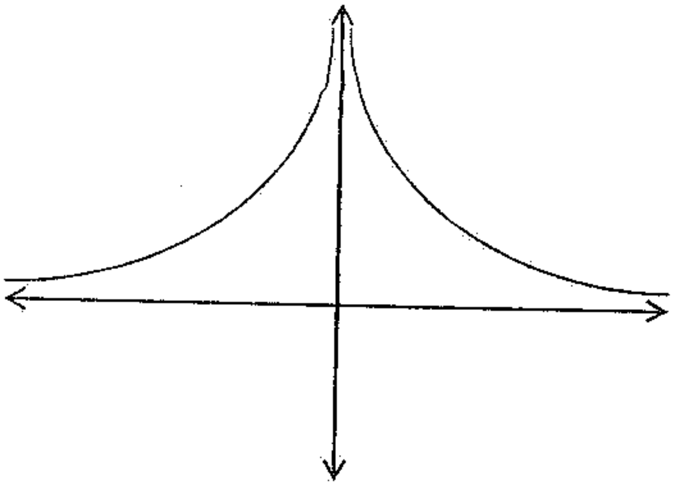
مثال: د $y=\frac{1}{x^2}$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{4}$ | $1$ | $1$ | $\frac{1}{4}$ |

$$A\left(-2,\frac{1}{4}\right)\quad B(-1,1)\quad C(1,1)\quad D\left(2,\frac{1}{4}\right)$$

ketabton.com - The Digital Library



تمرین:

د لاندې تابعگانو گراف رسم کړئ

1) $F(x) = 3x^2 + 7x - 10$
2) $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$
3) $h(x) = x^2 - 9$
4) $y = 6^x$
5) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

## اکسپوننشل تابع $Exponintiol\ function$:

اکسپوننشل تابع هغه تابع ده چه مجهول یي په توان کې وي. عمومي شکل یي دا دی.

$$y = a^x$$

$a$ ثابت عدد دی $(x)$ متحول دی او $(y)$ د $(x)$ تابع دی.

که $(a > 1)$ وي تابع متزایده ده او که $(a < 1)$ وي نو تابع متناقصه ده.

دتعریف ناحیه یي د حقیقي اعدادو سیټ دی او رنج یي د مثبت اعدادو سیټ دی. د گراف د ترسیم لپاره یي $(x)$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو. د او یوه جوړه قیمتونه د وضعیه کمیتونو په مستوي کې یوه نقطه تعینوي دا نقطې پیدا کوو او وصلوو یي د راکړشوی تابع گراف لاس ته راځي.

ketabton.com - The Digital Library

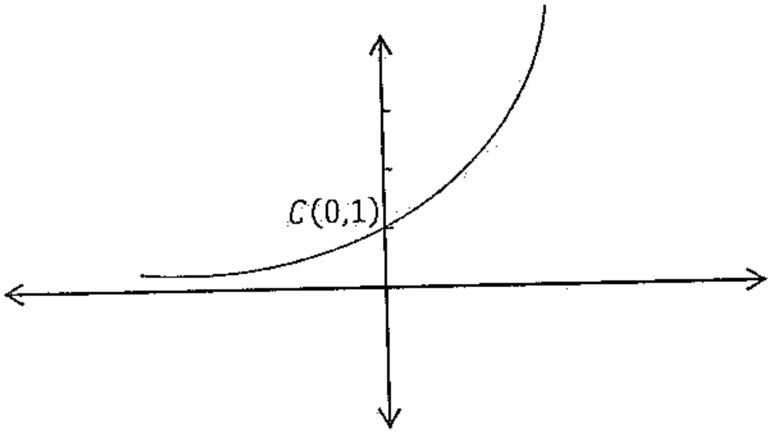


مثال: $y = 2^x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ |

$A\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ $B\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ $C(0,1)$ $D(1,2)$ $E(2,4)$



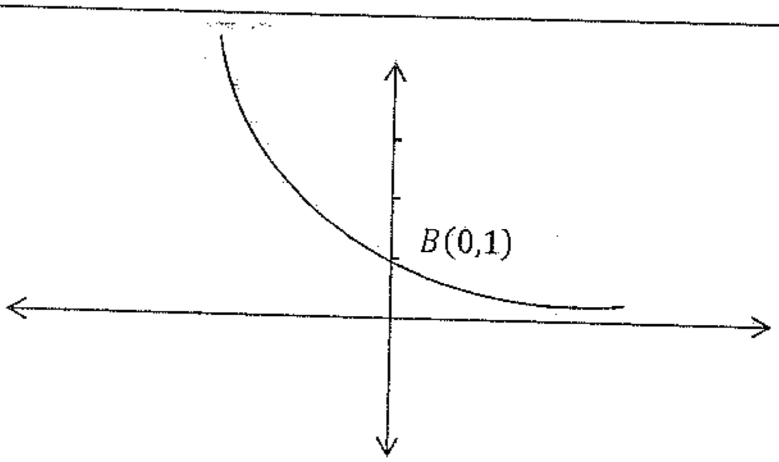

مثال: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

$A(-1,2)$ $B(0,1)$ $C\left(1,\frac{1}{2}\right)$ $D\left(2,\frac{1}{4}\right)$ $E\left(3,\frac{1}{8}\right)$

ketabton.com - The Digital Library




تمرين:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

$1\text{-}\ y = 3^x$ $2\text{-}\ y = 5^x$ $3\text{-}\ y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$4\text{-}\ \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$5\text{-}\ y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $6\text{-}\ y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ $7\text{-}\ y = 5^x$

$8\text{-}\ y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

## لوګاریتمي تابع $Logarithmical\ functions$:

لوګاریتمي تابع د اکسپوننشل تابع معکوسه تابع ده.

د تعريف ناحيه يې د مکمل اعدادو سيټ دې او د تصويرونو سيټ يې د حقيقي اعدادو سيټ دی ګراف يې په اوله او څلورمه ربعه کې رسميږي.

د ګراف د ترسيم لپاره $x$ ته څو قيمتونه ورکوو او د $y$ قيمت پيدا کوو.

مثال:- $\log_2 x = y$ ګراف رسم کړئ؟

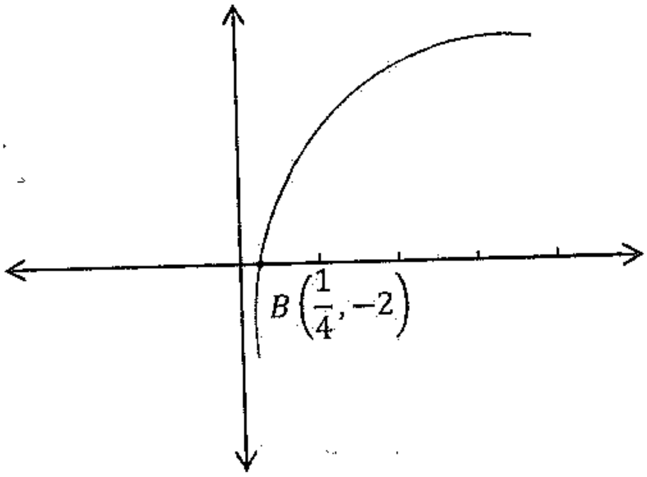
| $x$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |

ketabton.com - The Digital Library



| $x$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |

$A\left(\frac{1}{8},-3\right)$ $B\left(\frac{1}{4},-2\right)$ $C\left(\frac{1}{2},-1\right)$ $D(1,0)$ $E(2.1)$ $F(4,2)$




## تمرين

دلاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

1- $\log_3 x = y$

2- $log_2 x = y$

3- $log_4 x = y$

4- $\log_5 x = y$

5- $log_2 x = y$

6- $\log_8 x = y$

7- $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

8- $y = 3^{2x}$

9- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

ketabton.com - The Digital Library

# دولسم فصل

## ردیف یا تصاعد

ردیف په لغت کې په اس یا موټرسایکل باندې یو په بل پسې سپرېدلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوې قاعدې لاندې د اعدادو ترتیب ته ردیف وایي.

لکه: 2,7,12,17,22

یا لکه: 5,15,75,375,1875

که د ردیف حدونه معلوم وي معین ردیف ورته وائي. لکه:

7 , 21 , 63 ,189,567

او که د ردیف حدونه معلوم نه وي غیر معین ردیف ورته وائي. لکه:

1, 5, 9, 13, 17 ...

د غیر معین ردیف په اخر کې درې نقطې لیکي.

ردیف په درې قسمه دی.

1- حسابي ردیف Arithmetic Sequences

2- هندسي ردیف Geometrical Sequences

3- هارمونیکي ردیف Harmonecal Sequences

1- حسابي ردیف:

هغه ردیف دی چه هر وروستني حد یي د مخکیني حد سره د یوه ثابت د جمع کېدلو په نتیجه کې لاس ته راځي. او یا دا چه د دوه عددو تفاضل یي ثابت وي. لکه:

7, 15, 23, 31, 39

د حسابي ردیف فارمول:

اول حد په $(a_1)$ او مشترک تفاضل په $(d)$ او دحدونو شمېر په $(n)$ ښیو نو فارمول یي په لاندې ډول پیدا کوو.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d$$

ketabton.com - The Digital Library



که د ضریب ته متوجه شود $(d)$ ضریب د حدو تر شمېر یو کم دې نو که د حدونو شمېر $(n)$ وي نو د $(d)$ ضریب به $(n-1)$ وي فارمول یې په لاندې ډول دی.

$$a_1\ , a_1 + d\ , a_1 + 2d\ , a_1 + 3d\ , a_1 + 4d, \dots + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (30) دې مشترک تفاضل یې (17) دی (51) حد یې څو دی؟

$$a_1 = 30 \qquad a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$d = 17 \qquad a_{51} = 30 + (51-1)17 = 30 + 50 \times 17$$
$$n = 51 \qquad a_{51} = 30 + 850 = 880$$
$$a_{51} = ? \qquad a_{51} = 880$$

د $(d)$ ، $(a_1)$ او $(n)$ فارمولونه په لاندې ډول دي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$
$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

مثال: دیوه حسابي ردیف اول حد (15) دې (31) حد یې (585) دې مشترک تفاضل یې پیدا کړئ؟

$$d = \frac{585 - 15}{31 - 1} = \frac{570}{30} = 19$$

تبصره: د حسابي ردیف منځني حد دطرفینو اوسط دې.

مثال:- د یوه حسابي ردیف (50)ام حد (1973) دی مشترک تفاضل یې (40) دی اول حد یې څو دې؟

حل:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$a_1 = 1973 - (50-1)40 = 1973 - (49)40 = 1973 - 1960 = 13$$
$$a_1 = 13$$

ketabton.com - The Digital Library

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (17)او اخري حدیي (2117) دی او مشترک تفاضل یي (21) دی د حدونو شمېر یي پیدا کړئ؟

حل:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$n = \frac{2117 - 17}{21} + 1 = \frac{2100}{21} + 1 = 100 + 1 = 101$$

$$n = 101$$

## حسابي ردیف ته د حدونو داخلول

د حدونو د داخلولو لپاره مشترک تفاضل پیدا کوو یعنی په $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ کی د داخل شوي حدونه په $(m)$ ښیواودوه زاړه حدونه ورسره جمع کوو او د په عوض یي لیکو د $(d)$ قیمت لاس ته راځي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_n - a_1}{m + 2 - 1} \Longrightarrow d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

مثال:- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (3) او (35) څخه دي څلور نور حدونه یي منځ ته ورداخل کړئ.

حل:

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1} = \frac{35 - 3}{4 + 1} = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$d = 6.4$$

3 , 9.4 , 15.8 , 22.2 , 28.4 , 35

تمرین:

لاندې عبارتي سوالونه حل کړئ؟

1- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (4) او (324) دي (3) حدونه یي منځ ته ورداخل کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library


2- د يوه حسابي رديف دوه حدونه عبارت له (5) او (675) څخه دي شپږ نور حدونه يي منځ ته ورداخل کړئ؟

لاندې سوالونه حل کړئ؟

1) $a_1 = 9, d = 13, n = 65, a_n = ?$
2) $d = 5, n = 11, a_{11} = 53, a_1 = ?$
3) $a_1 = 27, n = 31, a_{31} = 267, d = ?$
4) $a_1 = 7, a_{91} = 727, d = 8, n = ?$
5) $a_1 = 5, a_3 = 19, a_n = 110, n = ?$

2- هندسي رديف:

هغه رديف دی چه هر وروستنی حد يي د مخکيني حد سره ديوه ثابت عدد د ضربيدو په نتيجه کې په لاس راغلې وي يا دا چه د دوه مسلسلو حدو تفاضل يي ثابت وي. لکه:

$$2,8,32,128,512 \ \ldots$$

د هندسي رديف اول حد$(a_1)$ په مشترک نسبت يي په $(r)$ ښيي.

د هندسي رديف فارمول:

هغه رديف دی چه هر وروستنی حد يي د مخکيني حد سره د يوه ثابت عدد د ضربېدو په نتيجه کې لاس ته راغلی وي او يا دا چه د دوه حدو تفاضل يي ثابت وي. لکه:

$$3, 12, 48, 192, 768$$

$$5, 10, 20, 40, 80, 160 \cdots$$

د هندسي رديف فامول:

اول حد يي په $(a_1)$ او مشترک فصل په $(r)$ او ورستنی حد په $(a_n)$ ښيو نو.

$$a_1, a_x r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4$$

که د $(r)$ توان ته ځير شو د $(r)$ توان د حدو د شمېرڅخه يو کم دې نوکه دحدونو شمېر $(n)$وي نو د $(r)$ توان به $(n-1)$ وي. نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \ldots \ldots a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ketabton.com - The Digital Library

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 2$ او مشترک نسبت یي $r = 3$ دي اوم حد $(a_7)$ یي څو دي؟

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 2 \times 3^6 = 2 \times 729 = 1458$$

د $(a_1)$ او $(r)$ قیمتونه د لاندی فارمولو پواسطه پیدا کیږي.

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اتم حد $(a_8 = 384)$ دي مشترک نسبت یي $(r = 2)$ دی اول حد یي څو دي؟

حل:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{384}{2^{8-1}} = \frac{384}{128} = 3$$

$$a_1 = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 8)$ دی اوم حد یي $(5832)$ دی مشترک نسبت یي پیدا کړئ؟

حل:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6]{\frac{5832}{8}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 10)$ دی $(n)$ ام حد یي $a_n = 1280$ دی مشترک نسبت یي $(2)$ دي د حدونو شمېر یي څو دی؟

حل:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$1280 = 10 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{1280}{10} = \frac{10 \times 2^{n-1}}{10} \Longrightarrow 128 = 2^{n-1} \Longrightarrow 2^7 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 7 \Longrightarrow n = 7 + 1 = 8 \Longrightarrow n = 8$$

ketabton.com - The Digital Library


1- د يوه هندسي رديف دوه لمړي حدونه (2) او (1) دي څويم حد يي $\frac{1}{16}$ دي؟

$a_1 = 2$ $\qquad a_1 r^{n-1} = a_n$

$a_2 = 1$ $\qquad 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2}$

$r = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$a_n = \frac{1}{16}$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$n = ?$ $\qquad n - 1 = 5 \Rightarrow n = 5 + 1 = 6 \quad \Rightarrow n = 6$

د هندسي رديف خصوصيات:

1- په هندسي رديف کې هر حد دطرفينو د حاصل ضرب جذردي.

مثال: (3, 6,12,24,24 ) د يوه هندسي رديف حدونه دي نو ليکو چه:

$$\sqrt{3(12)} = 6 \quad and \quad \sqrt{6(24)} = 12$$

2- که په يوه هندسي رديف کې اول او اخر حدونه ضرب شي او د حدو د شمېر په توان رفع شي او دويم جذر يي ونيول شي د رديف دټولو حدونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال :-لکه (2, 6, 18, 54) يو هندسي رديف دی نو د دويم خاصيت سره سم ليکو چه:

$$(2)(6)(18)(54) = \sqrt{\{2(54)\}^4}$$
$$11664 = 11664$$

3- که يو هندسي رديف طاق حدونه ولري نو د منځني حدمربع يي د اول او اخر حدو د حاصل ضرب سره مساوي ده. لکه: (5, 10, 20, 40, 80) يو هندسي رديف دی نو د دريم خاصيت سره سم ليکو:

$$(20)^2 = 5(80)$$
$$400 = 400$$

ketabton.com - The Digital Library

## په هندسي ردیف کې د حدو داخلول:

که د یوه هندسي ردیف حدونه دوه وي او وغواړو چه څو حدونه يې منځ ته ورداخل کړو نو د هندسي ردیف دفارمول څخه د $(r)$ قیمت پیدا کوو. د حدو تر دخول د مخه د حدونو شمېر $(n)$ اوتر دخول وروسته د حدو شمېر $(m+2)$ دی نو د $(n)$ په عوض په فارمول کې $(m+2)$ لیکو. نو $r = \sqrt[m+2-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$ لاس ته راځي.

مثال: د یوه هندسي ردیف دوه حدونه $(3)$ او $(96)$ دي څلور نور حدونه يې منځ ته ورداخل کړئ؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 96 \\ m = 4 \\ r = ? \end{cases} \qquad r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[4+1]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

3,6, 12 ,24 , 48 , 96

مثال: درې داسې عددونه پیدا کړئ چه دویم حد يې د اول حد څخه د $(3)$ په اندازه او دریم حد يې د دویم حد څخه د $(6)$ په اندازه زیات وي او یو هندسي تصاعد جوړ کړي؟

حل:

$$\begin{cases} x \\ x+3 \\ x+9 \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x} = \frac{x+9}{x+3} \Longrightarrow x(x+9) = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 9x = x^2 + 6x + 9$$

$$9x = 6x + 9 \Longrightarrow 9x - 6x = 9 \Longrightarrow 3x = 9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Longrightarrow x = 3$$

$$x = 3 \qquad x + 3 = 6 \qquad x + 6 = 9$$

### 3- هارمونیکي ردیف:

د حسابي ردیف معکوس ته هارمونیکي ردیف وايي. مثلاً لاندې ردیف یو حسابي ردیف دی لکه:

(2,4,6,8 ,10)

ketabton.com - The Digital Library



د دغه ردیف معکوس ردیف عبارت له $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10}$ څخه دی دغه ردیف ته هارمونیکي ردیف وايي.

مثال: په یوه هارمونیکي ردیف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ دی او مشترک تفاضل يې $d = -3$ دی ترادف يې جوړ کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{1}{4}-3\ ,\frac{1}{4}-6\ ,\frac{1}{4}-9\ ,\frac{1}{4}-12\ ,\cdots$$

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{1-12}{4}\ ,\frac{1-24}{4}\ ,\frac{1-36}{4}\ \cdots$$

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{-11}{4}\ ,\frac{-23}{4}\ ,\frac{-35}{4}\ \cdots$$

د هارمونیکي ردیف حسابي اوسط:

$\frac{1}{a_{n+1}},\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_{n-1}}$ د هارمونیکي ردیف درې حدونه دي د منځني حد د لاس ته راوړلو لپاره اول او دريم حدونو اوسط پيدا کوو.

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2a_{n+1}a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

مثال: د (2) او(8) هارمونیکي اوسط پيدا کړئ

حل: $a_n = \frac{2(2\times8)}{2+8} = \frac{32}{10} = 3.2$

ketabton.com - The Digital Library


سلسلی *Series*:

د ردیف د حدونو مجموعی ته سلسله وایي.

سلسلی په دوه ډوله دي.

1- حسابي سلسله *Arithmetc Series*

2- هندسي سلسله *Geometric Series*

1- حسابي سلسله :

د حسابي ردیف د حدونو مجموعی ته حسابي سلسله وایي.

د حسابي سلسلی فارمول:

د سلسلو مجموعه په $S_n$ ښیي، او داسې یې پیدا کوي.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) \cdots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

د عددونو مجموعه په منظم ډول داسی لیکو چه اخر حد یي په سر کی راشي بیا یي د اولنی مجموعی سره جمع کوو.

$$\begin{aligned} S_n &= \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-3)d\} + \cdots + a_1 \\ S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + \{a_1 + (n-1)d\} \\ \hline 2S_n &= \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \cdots + \{2a_1 + (n-1)d\} \end{aligned}$$

$$2S_n = n\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$\frac{2S_n}{2} = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

دغه فارمول د حسابي سلسلی عمومي فارمول دی.

که $(2a_1)$ بېل، بېل ولیکو نو لاندی فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{a_1 + a_1 + (n-1)d\} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: د یوه هندسي ردیف $(a_1 = 7)$ او $(d = 6)$ دی د $(20)$ حدو مجموعه یې پیدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library



حل:

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_{20} = \frac{20}{2}\{2 \times 7 + (20-1)6\} = 10\{14 + (19)6\} = 10(14 + 114)$$
$$S_{20} = 10(128) = 1280$$
$$S_{20} = 1280$$

مثال : د يوه حسابي رديف اول حد $(a_1 = 11)$ او يوپنځوسم حد يې $(a_{51} = 10761)$ دی د $(51)$ حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$S_{51} = \frac{51}{2}(11 + 311) = \frac{51}{2}(11 + 411) = \frac{51}{2}(422) = 51 \times 261 = 10761$$
$$S_{51} = 10761$$

د مسلسلو عددونو فارمول:

په مسلسلو عددونو کې $a_1 = 1$ او $(d = 1)$ دی دغه قیمتونه دحسابي په عمومي فارمول کې وضع کوو

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1)1\} = \frac{n}{2}(2 + n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: په یوه ټولګي کې 50 کسه شاګردان دي د اول شاګرد سره یوه دویم شاګرد سره دوه په همدې ترتیب تر اخره روپۍ دي وواياست چه د ټولو سره څو روپۍ دي؟

حل:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275$$

ketabton.com - The Digital Library

دجفتو عددو فارمول:

په جفتو عددو کې $a_1 = 2$ او $d = 2$ دی دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2\cdot 2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(4 + 2n - 2) = \frac{n}{2}(2n+2) = \frac{n}{2}\times 2(n+1)$$
$$S_n = n(n+1)$$

مثال: سل کسانو یوه مسجد ته اعانه ورکړه که اول سړي 2 روپۍ دویم سړي 4 روپۍ په همدې ترتیب تر اخره مرسته کړې وي ووایاست چه ټولو به څو روپۍ ورکړې وي؟

حل:

$$S_n = n(n+1)$$
$$S_{100} = 100(100+1) = 100 \times 101 = 10100$$

د طاق عددونو فارمول:

په طاق عددو کې اول حد (1) اومشترک تفاضل یې (2) دي دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو د طاق عددو فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2\cdot 1 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2}\cdot 2n = n^2$$
$$S_n = n^2$$

مثال: د (30) طاقو عددو مجموعه څو ده

حل:

$$S_n = n^2$$
$$S_{30} = 30^2 = 900$$

تبصره:

که د یوه حسابي ردیف حدونه طاق وي که منځني حد یې د حدونو په شمېرکې ضرب شي دحدونو مجموعه لاس ته راځي.

ketabton.com - The Digital Library



مثال : د يوه حسابي رديف د حدونو شمېر 41 او منځني حد يې 145 دې د حدونو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = n\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$S_{41} = 41(145) = 5945$$

دويمه تبصره:

همدا ډول د اول او اخر حدو مجموعه د منځني حد د دوه چند سره مساوي دي.

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

مثال: د يوه حسابي رديف $a_1 = 7$ او $a_9 = 47$ دی او منځني حديې $a_5 = 27$ دی د اول اخر مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$a_1 + a_9 = 2(a_5) = 2(27) = 54$$

دريمه تبصره:

کله، کله د څو اولو حدو او په همغه شمېر د اخرو حدو مجموعه معلومه وي اول او اخر حد معلوم نه وي. داول او اخر حدو مجموعه د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$a_1 + a_n = \frac{S_{m_1}+S_{m_2}}{m}$$

$m_1$ د شپږو اولوحدو مجموعه او $m_2$ د شپږو اخرو حدو مجموعه ده او $(m)$ د حدو شمېر دی.

مثال: يو حسابي رديف $n$ حدونه لري د 4 لمړيو حدو مجموعه يې 62 او د 4 وروستيو حدو مجموعه يې 482 ده د ټولو حدو مجموعه يې څو ده؟

ketabton.com - The Digital Library

حل:

$S_{m_1} = 62$

$S_{m_2} = 482$

$m = 19$

$S_{19} = ?$

$$a_1 + a_{19} = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m} = \frac{62 + 482}{4} = \frac{544}{4} = 136$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}(136) = 1292$$

$$S_{19} = 1292$$

2- هندسي سلسله *Geometric Series*:

د هندسي رديف د حدونو مجموعي هندسي سلسله وايي.

د هندسي سلسلې فارمول:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$

دواړه خواوې په $(r)$ کې ضربوو اوبيا (I) رابطه ورڅخه منفي کوو.

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \cdots + a_1 r^n \ldots\ldots\ldots II$$
$$\pm S_n = \pm a_1 \pm a_1 r \pm a_1 r^2 \pm a_1 r^3 \pm \cdots \pm a_1 r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$
$$rS_n - S_n = a_1 r^n - a_1$$

$$S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

$$\frac{S_n(r-1)}{r-1} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \Longrightarrow S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_n = \frac{a_1(r^2-1)}{r-1}$$

دغه سلسلې ته متزايده سلسله وايي.

مثال: د يوې هندسي سلسلې $a_1 = 5$ او مسترک نسبت يې $r = 3$ دې د $n = 7$ حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_7 = \frac{5(3^7-1)}{3-1} = \frac{5(2187-1)}{2} = \frac{5 \times 2186}{2} = 5 \times 1093 = 5465$$

$S_7 = 5465$

ketabton.com - The Digital Library



او که د $I$ رابطې څخه $II$ رابطه منفي کړو نو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

سلسله لاس ته راځي. دغه سلسلې ته متناقصه سلسله وايي.

مثال: د يوه هندسي رديف اول حد $a_1 = 8$ دی مشترک نسبت يې $r = \frac{1}{2}$ دی د (5) حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8\left(1-\frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{32-1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{248}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{496}{32}$$

$$S_5 = 15.5$$

مثال: د يوې هندسي سلسلې د څلورو حدو مجموعه 120 ده او اول حد يې 5 دی مشترک نسبت يې څو دی؟

حل:

$a_1 = 8$

$S_8 = 120$

$n = 4$

$r = ?$

$$120 = \frac{(r-1)(r^3+r^2+r+1)}{r-1} = 15$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 15$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 - 15 = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + r - 14 = 0$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | −14 | 2 |
| | 2 | 6 | 14 | |
| 1 | 3 | 7 | 0 | |

$$r = 2$$

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library


## د هندسي سلسلی پواسطه په عام کسر باندې داعشار کسر بدلول:

د متناقصې هندسي سلسلی فارمول لیکو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

په دغه فارمول کی $(r^n \to 0)$ صفر کیږي. نو $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ کیږي د دغه فارمول پواسطه کولای شو چه اعشار کسر په عام کسر بدل کړو.

مثال: $0.\overline{3}$ اعشارکسردی . په عام کسر يي بدل کړئ؟

حل:

$$a_1 = o.\overline{3} = \frac{3}{10}$$

$$r = \frac{1}{10}$$

$$n = \infty \qquad S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{10-1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{10\times 3}{10\times 9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$S_n = ? \qquad S_n = \frac{1}{3}$$

مثال: $0.8\overline{3}$ اعشار کسر دی په عام کسر يي بدل کړئ؟

حل:

$$a = \frac{8}{10}$$

$$a_1 = \frac{3}{100} \qquad S_\infty = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{10-1}{10}}$$

$$r = \frac{1}{10} \qquad = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{10\times 3}{100\times 9} = \frac{8}{10} + \frac{1}{30}$$

$$S_n = ? \qquad S_\infty = \frac{24+1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

ketabton.com - The Digital Library



## تمرين

1- د (20)او (800) تر منځ د هغه عددو مجموعه پیدا کړئ چه لمړی رقم یې (3) وي؟

2- یو دیوالي ساعت د ساعتو په شمېر زنګونه وهي ووایاست چه په شواروز کی څو زنګونه وهي؟

3- د یوه حسابي ردیف ددری حدومجموعه (33) او د ضرب حاصل یې (1287) دی عددونه یې پیدا کړئ؟

4- د یوه حسابي ردیف د څلورو حدومجموعه (26) او د مربعاتو مجموعه یې (214) ده عددونه پیدا کړئ؟

5- د یوه حسابي ردیف څلورو حدو دضرب حاصل (945) او مشترک تفاضل یې (2) دی عددونه پیدا کړئ؟

6- (3003) کسان په یوه ځای کی د مثلث په ډول ولاړ دي د مثلث په راس کی یو نفربیا دوه بیا دری........په همدی ترتیب تر اخره ولاړ دي ووایاست چه څو قطارونه جوړوي؟

7- د جفت عددو مجموعه د (40) څخه تر (540) پوری څو ده؟

8- د طاق عددونو مجموعه د (31) څخه تر (451) پوری څو ده؟

9- $a$ , $b$ او $c$ په کوم شرط په یوه حسابي ردیف کی شامل دي؟

10- د یوه ردیف د اول اخر حدو د ضرب حاصل (253) او د منځنیو حدو د ضرب حاصل یې(285) دی عدونه پیدا کړئ؟

11- (3) او (243) د یوه هندسي تصاعد دوه جملی دي دری حدونه پکی داخل کړئ؟

12- (221) په دری برخو داسی ووېشئ چه د دریم او اول حد تفاضل یې (136) وي؟

13- د یوه متوازي السطوح حجم (3375) دی اودابعادو مجموعه یې(65) ده ابعاد یې پیدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library


14- دوه کسه دیوه سړي سره مزدوران شول يو سړی د ورځې (20) اجوره لري اوبل سړی اول ورځ يوه روپۍ په دويمه ورځ دوه روپۍ په همدی ترتيب تراخره روپۍ اخلي ووايااست چه په څويمه ورځ به ددوی پيسې مساوي شي ؟

15- يو هندسي تصاعد اوه حدونه لري د شپږو اخرنيو حدو مجموعه يي دشپږو اولنيو حدو د مجموعې دوچنده دې که د اخرنيو شپږو حدو مجموعه يي(126) وي تصاعد معين کړئ؟

16- $0.\overline{123}$ ، $0.\overline{925}$، $0.\overline{27}$ کسرونه په عام کسر بدل کړئ؟

17- $0.1\overline{36}$ , $0.41\overline{6}$ , $0.6\overline{36}$ اعشار کسرونه په عام کسرو بدل کړئ؟

18- د يوه قايم الزاويه مثلث زاويي د هندسي تصاعد حدونه دي تصاعد پيدا کړئ؟

19- د يوې څلور ضلعي زاويي هندسي تصاعد دی که څلورمه زاويه د دويمې زاويي ( 9) برابره وي د هرې زاويي پراخوالی پيدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library


# دیارلسم فصل

## د رياضي استقراء Induction of Math

د ټولو طبعي عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته د رياضي استقراء وايي.

څرنګه چه د ټولو عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتول ډېر مشکل دي نو د يوه فارمول د ثبوتولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

1- د يو لپاره فارمول ثبوتوو.

2- د $(n)$ لپاره فارمول صحيح فرضوو.

3- د $(n+1)$ لپاره فارمول ثبوتوو

مثال: ثبوت کړئ چه $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی

حل: د $(1)$ لپاره يي ثبوتوو:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

د $(1)$ لپاره صحيح دی. د $(n)$ لپاره يي صحيح فرضوو.

د $(n+1)$ لپاره يي ثبوتوو.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\{(n+1)+1\}}{2}$$

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)+1\}$$

مثال: ثبوت کړئ چه $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.

ketabton.com - The Digital Library

حل: د (1) لپاره یې ثبوتوو.

$$1 = \frac{1(3 \times 1 - 1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د $(n)$ لپاره یې صحیح فرضوو، د $(n+1)$ لپاره یې ثبوتوو:

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) + \{3(n+1) - 2\} = \frac{n(3n-1)}{2} + \{3(n+1) - 2\}$$

$$S_n = \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 3n + 2n + 2}{2}$$

$$S_n = \frac{3n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{(n+1)\{3(n+1) - 1\}}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)\{3(n+1) - 1\}}{2}$$

مثال: ثابت کړئ چه لاندې مساوات د هر طبعي $(n)$ لپاره صحیح دی.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حل: د (1) لپاره پورتنی رابطه صحیح ده څکه چه:

$$1^2 = \frac{1}{6} \times 1(1+1)(2 \times 1 + 1) = \frac{1}{6}(2)(3) = \frac{1}{6} \times 6 = \frac{6}{6} = 1$$

د $(n)$ لپاره یې صحیح فرضوو. او د $(n+1)$ لپاره یې ثبوتوو

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6(n+1)^2}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 4n^2 + 5n^2 + 10n + 3n + 6}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{2n^2(n+2) + 5n(n+2) + 3(n+2)}{6} = \frac{(n+2)(2n^2 + 5n + 3)}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+2)(2n^2 + 2n + 3n + 3)}{6} = \frac{(n+2)\{2n(n+1) + 3(n+1)\}}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6} = \frac{1}{6}(n+1)\{(n+1)+1\}\{2(n+1)+1\}$$

ثابته شوه چه پورتنی مساوات د ټولو طبعي عددو لپاره صحیح دي.

ketabton.com - The Digital Library



مثال: ثبوت کړئ چه لاندی فارمول د ټولو طبعي عددو لپاره صحیح دی.

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a}{a-1}(a^n - 1) \quad , \quad a \neq 1$$

حل: د اول حد لپاره يې ثبوتوو.

$$a = \frac{a}{a-1}(a^1 - 1) = \frac{a(a-1)}{a-1} = a$$

د لپاره يې صحيح فرضوو.

د لپاره يې ثبوتوو.

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n + a^{n+1} = \frac{a}{a-1}(a^n - 1) + a^{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^n - 1) + a^{n+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{n+1} - a + a^{n+2} - a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2} - a}{a-1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^{n+1} - 1)}{a-1} = \frac{a}{a-1}(a^{n+1} - 1)$$

تمرين

لاندې فارمولونه د رياضي د استقراء پواسطه ثبوت کړئ

1) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2(n+1)^2 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

3) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$

4) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (n)^2 = \frac{1}{3} + n(2n-1)(2n+1)$

5) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

6) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

7) $4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n = \frac{4}{3}(4^n - 1)$

8) $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$

9) $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$

10) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \cdots + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

11) $2 + 5 + 10 + \cdots + (n^2 + 1) = \frac{n(2n^2+3n+7)}{6}$

12) $a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + \{a + (n-1)d\} = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

ketabton.com - The Digital Library

# خوارلسم فصل

## فکتوریل *Factorial*

د طبعي مسلسلو عددو د ضرب حاصل ته فکتوریل وایي.

د فکتوریل علامه دا ( ! ) ده.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times n$$

قضیه: $0! = 1$ کیږي

ثبوت: پوهیږو چه که یو فکتوریل په خپل اخري عدد تقسیم شي تر هغه د مخه فکتوریل لاس ته راځي. لکه:

$$\frac{5!}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 4!$$

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$\frac{1!}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 0! = 1$$

قضیه:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

په دغه قضیه کې باید د $n > k$ څخه کوچنی وي.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

د $\binom{n}{0} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

ketabton.com - The Digital Library


د $1 = \binom{n}{n}$ ثبوت:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n-1} = n$ کيږي؟

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,\{n-(n-1)\}!} = \frac{n!}{(n-1)!\,(n-n+1)!}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!\cdot 1} = n$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ کيږي؟

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{0!\,(n+1-0)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ کيږي؟

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot 0!}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,\{(n+1)-(n+1)\}!} = \binom{n+1}{n+1}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ کيږي؟

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,\{n-(k-1)\}!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(k-1)!\cdot k(k+1)!\cdots n}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{(n-k)!\,(n-k+1)\cdots n}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{k(k+1)\cdots n}{(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)\cdots n}{k!}$$

$$= \frac{k!\,\{k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot n\} + (n-k+1)!\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$= \frac{k!\cdot\{k(k+1)\cdot\ldots\cdot n\} + (n-k+1)!\cdot\{(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n\}}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

ketabton.com - The Digital Library


$$= \frac{k \cdot n! + (n-k+1) \cdot n!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(k+n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

د بينوم قضيه *Binomial Theorem*:

که چېرته $(a)$ او $b$ حقيقي عددونه او $(n)$ یو طبعي عدد وي نو

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n \cdots 1$$

د رياضي د استقراء پواسطه د پورتني قضيي ثبوت پورتنی قضيه د $(1)$ لپاره ثبوتوو.

$$(a+b)^1 = a^1 + b^1 = 1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$$

د $(n)$ لپاره يې صحيح فرضوو.او د $(n+1)$ لپاره يې ثبوتوو.

د $(1)$ مساوات دواړه خواوې په $(a+b)$ کې ضربوو.

$$(a+b)^n(a+b) = (a+b)\left\{\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n\right\}$$

$$= \binom{n}{0}(a^{n+1} + a^n b) + \binom{n}{1}(a^n b + a^{n-1}b^2) + \cdots$$
$$+ \binom{n}{k}\left(a^{n-k+1}b^k + a^{n-k}b^{k+1} + \binom{n}{n}(ab^n + b^{n+1})\right)$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right\}a^n b + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\}a^{n-1}b^2 + \cdots + \left\{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right\}a^{n+1-k}b^k$$
$$+ \cdots + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \cdots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

که دغه مجموعه په $\sum$ وښيونو ليکو چه

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

ketabton.com - The Digital Library



مثال: د دوه جمله يي د دعوى په اساس انکشاف وركړئ:

$(x+y)^5$

$$(x+y)^5=\sum_{n=1}^{5}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

$$(x+y)^5=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4y+\binom{5}{2}x^3y^2+\binom{5}{3}x^2y^3+\binom{5}{4}xy^4+\binom{5}{5}y^5$$

$$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

ثبوت كړئ چه $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ كيږي؟

ketabton.com - The Digital Library

# پنځلسم فصل

## لیمیټ limit

### انټروال *Interval*:

د دوو مختلفو نقطو تر منځ فاصلې ته انټروال وايي.

انټروال په درې قسمه دي.

1- تړلی انټروال *Closed Interval* :

هغه انټروال دی چه د دواړو انجامو نقطی پکی شاملی وي.

اوپه غټو قوسو ښودل کیږي. لکه:

$$A = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,]$$

او د سیټ په شکل داسی لیکل کیږي.

$$A = [x\epsilon IR/1 < x < 10]$$

2- نیم کښن انټروال *Half Open Interval*:

هغه انټروال دی چه د یوه انجام نقطه پکی شامله او د بل انجام نقطه پکی شامله نه وي. لکه:

$$A = [4, 5,6,7,8,9,10,11,12,13,14)$$

اود سیټ په شکل داسی لیکل کیږي. $A = [x\epsilon IR/4 \leq x < 14]$

3- خلاص انټروال *Open Interval*:

هغه انټروال دي چه د دواړو انجامو نقطی پکی شاملی نه وي. لکه:

$$A = (4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16)$$

او د سیټ په شکل داسی لیکل کیږي.

$$A = (x\epsilon IR/4 < x < 16)$$

### مجاورت *Vicinity*:

هر خلاص انټروال د خپلو ټولو شاملو عناصرو مجاورت دی. که یوه نقطه د یوه انټروال په وسطي نقطه کی واقع وي نو دا انټروال ددی نقطی متناظر مجاورت دی.

ketabton.com - The Digital Library


لکه (1)د (5)او (3) متناظر مجاورت دی. په یوه مجاورت کې هره نقطه زیات متناظر مجاورتونه لري.

د لیمیټ تعریف:

$Kart\ weierstras$ کارت ویرس ترس انګلیسي ریاضیدان چه په (1897 – 1815) م سنه کې اوسیده دلیمیټ تعریف داسی کړیدي.

دیوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی هغه عدد دي چه د دغه عدد د هر مجاورت لپاره د تابع د تعریف په ناحیه یو داسی مجاورت موجود وي چه د دغه مجاورت د هر عنصر تصویر د تابع د لیمیټ په مجاورت کی شامل وي.

یعنی د $F(x)$ دتابع لیمیټ د $(a)$ په نقطه کی $(b)$ دې په دی شرط چه د $(b)$ دهر مجاورت $(N)$ لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کی د $(D)$ یو داسی مجاورت موجود وي چه د$(D)$ دهر عنصر تصویر په $(N)$کی شامل وي. او داسی لیکل کیږي.

$$\lim_{x\to 0} F(x) = b$$

مثال: د $F(x) = 5x + 3$ تابع لیمیټ د1 $x \to$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(5x+3) = 5\cdot 1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

دپورته تابع د لیمیټ ثبوت په دوه طریقو کیږي.

1- د جدول پواسطه          2- د مجاورت په طریقه

1- د جدول په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

$(x)$ ته د دواړه خواوڅخه قیمتونه ورکوواو د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-12$ | $-7$ | $-2$ | 3 | 8 | 13 | 16 | 23 | 28 |

دپورته جدول څخه معلومیږي چه $(x)$ته په هره اندازه چه (1) ته نژدی قیمت ورکړشي په همغه اندازه د$(y)$قیمت (8) ته نژدی کیږي.

ketabton.com - The Digital Library


1- د مجاورت په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

د تابع لیمیټ (8) ته د (ε) په اندازه مجاورت ورکوو.

$$N = (8-\varepsilon, 8+\varepsilon)$$

د $(D)$ د مجاورت د پیدا کولو لپاره تابع د (8) د مجاورت په منځ کې لیکو

$$8-\varepsilon < 5x+3 < 8+\varepsilon$$
$$8-\varepsilon-3 < 5x < 8+\varepsilon-3$$
$$5-\varepsilon < 5x < 5+\varepsilon$$
$$\frac{5}{5}-\frac{\varepsilon}{5} < \frac{5x}{5} < \frac{5}{5}+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$1-\frac{\varepsilon}{5} < x < 1+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$D = \left(1-\frac{\varepsilon}{5}, 1+\frac{\varepsilon}{5}\right)$$

(ε) ته $\left(0.5 = \frac{1}{2}\right)$ قیمت ورکوو.

$$N = \left(8-0.5, 8+0.5\right)$$
$$N = (7.5, 8.5)$$
$$D = \left(1-\frac{\frac{1}{2}}{5}, 1+\frac{\frac{1}{2}}{5}\right) = \left(1-\frac{1}{10}, 1+\frac{1}{10}\right) = (0.9, 1.1)$$
$$D = (0.9, 1.1)$$
$$\lim_{x\to 0.9}(5x+3) = 5\times 0.9+3 = 7.5$$
$$\lim_{1.1}(5x+3) = 5.5+3 = 8.5$$

ثابته شوه چه (8) د (1) په نقطه کې د تابع لیمیټ دی.

مثال: ثبوت کړئ چه $\lim_{x\to 1}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 2$ کېږي؟

$$N = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$$
$$2-\varepsilon < 3-\frac{1}{x} < 2+\varepsilon$$
$$2-3-\varepsilon < -\frac{1}{x} < 2-3+\varepsilon$$

ketabton.com - The Digital Library


$$-1-\varepsilon < -\frac{1}{x} < -1+\varepsilon$$

$$\frac{1}{-(1+\varepsilon)} > -x > \frac{1}{-(1-\varepsilon)}$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < x < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}$$

$$N = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) = \left(2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}}, \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{1}{\frac{5}{4}}, \frac{1}{\frac{3}{4}}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{5}}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 3-\frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{1}-\frac{5}{4} = \frac{12-5}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 3-\frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{1}-\frac{3}{4} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$$

د لیمیټ د استعمال ځایونه *Utilization of limit*:

اسحق نیوټن (Isaac Newton) (1642 – 1727) م او لایبنز (Leibniz) په (1646 -1716) م کالونو کې د لیمیټ پواسطه د انټیګرال او ډیفرینسیال مسایل حلول یعنی دلیمیټ داستعمال ډېر مهم ځایونه د ډیفرینسیال اوانټیګرال د مسایلو حلول دي. او هم د مشتق تعریف دلیمیټ څخه په غېر ناممکن دی.

ارشمیدس د دایری دمحیط د اندازه کولو لپاره داسی محاطي مضلعګانی په دایره کی رسمولی چه ضلعی یې بې اندازه کوچنۍ وي په دې ترتیب یې د (2π) تقریبي قیمت پیداکړ.نوموړي هم د لیمیټ د استعمال څخه استفاده کړی وه.

ketabton.com - The Digital Library

د لیمیټ پیدا کول:

که وغواړو چه په یوه نقطه کی د یوی تابع لیمیټ پیدا کړو.نقطه په تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.

مثال : د $f(x) = 5x - 8$ دتابع لیمیټ د $(x \to 3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(5x - 8) = 5 \times 3 - 8 = 15 - 8 = 7$$

1- مثال: $g(x) = x$ د تابع لیمیټ $(x \to -3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} x = -3$$

2- مثال: د $h(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$ تابع لیمیټ په $x \to 3$ کی پیداکړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}\left(4 - \frac{5}{x+2}\right) = 4 - \frac{5}{3+2} = 4 - \frac{5}{5} = 3$$

## دصفر په نقطه کی د یوی تابع د لیمیټ پیدا کول

1- د صفر په نقطه کې د تامې تابع دلیمیټ پیدا کول:

که په تابع کی ثابت عدد موجود ؤ نو په صفر کی یي لیمیټ همدغه ثابت عدد دي.

مثال : $\lim_{x\to 0}(7x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = -5$

که په تابع کی ثابت عدد نه ؤ لیمیټ یي په صفر کی صفر دي.

مثال: $\lim_{x\to 0}(3x^3 + 11x^2 - 8x) = 0$

2- د صفر په نقطه کې د کسري تابع لیمیټ:

دلته څو حالتونه موجود دي.

الف: چه په صورت اومخرج دواړو کی ثابت عددونه موجود وي لیمیټ یي په صفر کی د همدغه ثابت عدد و نسبت دی.

مثال :

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3 + 7x^2 - 20x - 12}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

ketabton.com - The Digital Library



ب: چه په صورت کې ثابت عدد وي او په مخرج کې نه وي ليميټ يي په صفر کې لايتناهي دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-4x+7}{2x^2-3x}=\frac{7}{0}=\infty$$

ج: چه په صورت کې ثابت عدد نه وي او په مخرج کې وي ليميټ يي په صفر کې صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+7x}{2x^2+7x-11}=\frac{0}{-11}=0$$

د: چه په صورت او مخرج دواړو کې ثابت عدد نه وي دلته بيا څو حالتونه موجود دي.

a- چه دصورت اومخرج دټيټ حد درجې مساوي وي ليميټ يي په صفر کې د کوچني توان حدو دضريبونسبت دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3-6x^2+12x}{5x^3+3x^2-6x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2-6x+12)}{x(5x^2+3x-6)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2-6x+12}{5x^2+3x-6}=\frac{12}{-6}=-2$$

b- چه د کسر د صورت د ټيټ حد درجه د مخرج د ټيټ حد د درجې څخه ډيره وي ليميټ يي په صفر کې صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^4+5x^3-4x^2}{8x^3-4x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(11x^3+5x^2-4x)}{x(8x^2-4x-3)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^3+5x^2-4x}{8x^2-4x-3}=\frac{0}{-3}=0$$

چه د کسر د صورت د ټيټ حد درجه د مخرج دټيټ حد د درجې څخه کمه وي ليميټ يي په صفر کې ($\infty$) دی.

ketabton.com - The Digital Library


مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3+5x^2-4x}{2x^4+2x^3+5x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2+5x-4)}{x(2x^3+2x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+5x-4}{2x^3+2x^2+5x}$$

$$=\frac{-4}{0}=-\infty$$

په $(\infty)$ کې د يوی تابع ليميټ:

په $(\infty)$ د يوې تابع ليميټ په دوه حالته کی مطالعه کوو.

الف: په $(\infty)$ کی د تامی تابع ليميټ: د تامی تابع ليميټ په $(\infty)$ کی $(\infty)$ دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}(3x^3-7x^2+7x-17)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{17}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{\infty}+\frac{7}{\infty^2}-\frac{17}{\infty^3}\right)=\lim_{x\to\infty}3x^3=3\cdot\infty^3=\infty$$

ب: په $(\infty)$ کی د کسري تابع ليميټ: د کسري تابع ليميټ په $(\infty)$ کی په دری حالته کی مطالعه کوو.

a- که دکسر د صورت درجه دمخرج د درجی څخه ډېره وه ليميټ يي په $(\infty)$ کې $(\infty)$دي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-8x^2+6x-30}{2x^2+5x-21}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{21}{x^3}}=\frac{7-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{\frac{2}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}-\frac{21}{\infty^3}}=\frac{7}{0}=\infty$$

b- که د کسر د صورت درجه د مخرج د درجی سره مساوي وي نوليمټ يي په $(\infty)$ کی د لوړ توان والاحدود ضريبو نسبت دی.

ketabton.com - The Digital Library



مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-8x^2+6x-30}{2x^3+5x^2-21x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{21}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{8-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{2+\frac{5}{\infty}-\frac{21}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}}=\frac{8}{2}=4$$

c- که د کسر دصورت درجه دمخرج د درجی څخه کمه وي لیمیټ یې په ($\infty$) کې صفر دي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-8}{x^3+2x^2-3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

د لیمیټ قضیې *Theorms of limit*:

اوله قضیه:

د ثابتې تابع لیمیټ په یوه نقطه کې په خپله همغه عدد دی.

مثال:

$$\lim_{3} 12=12$$

دویمه قضیه:

د یوه عدد او یوې تابع د حاصل ضرب لیمیټ د تابع د لیمیټ او ثابت عدد د حاصل ضرب سره مساوي دی.

$$\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x)=kb$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}6x^2=6\lim_{x\to 2}x^2=6\times 2^2=24$$

ketabton.com - The Digital Library


دریمه قضیه:

ددوه تابعګانو د مجموعی لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د مجموعی سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=b+c$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}(5x^2+7x^3)=\lim_{x\to 2}5x^2+\lim_{x\to 2}7x^3$$
$$(5\cdot 2^2+7\cdot x^3)=5\cdot 2^2+7\cdot 2^3$$
$$(5\cdot 4+7\cdot 8)=5\cdot 4+7\cdot 8$$
$$(20+56)=20+56$$
$$(76)=76$$

څلورمه قضیه:

ددوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د حاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot h(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}h(x)=b\cdot c$$

مثال:

$$\lim_{x\to -1}(x-1)^2=\lim_{x\to -1}(x-1)\cdot\lim_{x\to -1}(x-1)$$
$$=(-1-1)^2=(-1-1)\cdot(-1-1)$$
$$(-2)^2=(-2)(-2)\Rightarrow 4=4$$

پنځمه قضیه:

د دوه تابعګانو د خارج قسمت لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د خارج قسمت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b}{c}$$

$$\left(\lim_{x\to a}g(x)=c\neq 0\right)$$

ketabton.com - The Digital Library



مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}4x-\lim\limits_{x\to 0}3}{\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

شپږمه قضيه:

د يوې جذري تابع ليميټ په يوه نقطه کې دتابع دليميټ دجذر سره مساوي دی په همغه نقطه کې:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{b}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8x^6}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}8x^6}=\sqrt[3]{8\cdot 2^6}=2\cdot 2^3=16$$

بې نهايت کوچنۍ تابع: که د يوې تابع ليميټ په يوه نقطه کې صفر شي دی تابع ته بی نهايت کوچنۍ تابع وايي. لکه:

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$

تبصره :

a- د بی نهايت کوچنۍ تابع ګانو مجموعه يوه بی نهايت کوچنۍ تابع ده.

b- د بی نهايت کوچنۍ تابعګانو دضرب حاصل هم يوه بی نهايت کوچنۍ تابع ده.

c- که $\varepsilon(x)$ تابع د $x\to a$ په صورت کې يوه بی نهايت کوچنۍ تابع وي نو:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$$

d- که چېرې $\varepsilon(x)$ يوه بی نهايت کوچنۍ تابع وي او $u(x)\neq 0$ وي نو $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

مثال: د (3) په نقطه کې د $\lim_{x\to 3}(x^2-9)$ تابع ليميټ پيدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=3^2-9=9-9=0$$

ketabton.com - The Digital Library


مثال: د $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع لیمیټ په $x\to\infty$ کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\cdot\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

1- د $\lim_{x\to a}f(x)=b$ ثبوت:

$\lim_{x\to a}f(x)=b+\varepsilon(x)$ فرضوو او دا چه $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ دي نو:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b$$

2- د $\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$ ثبوت:

$$\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1+\varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a}f(x_2)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)=\{b_1+\varepsilon_1\}+\{b_2+\varepsilon_2\}$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=b_1+b_2+\{\varepsilon_1+\varepsilon_2\}$$
$$\{\varepsilon_1+\varepsilon_2\}=0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=b_1+b_2$$

3- د دوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو دحاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$
$$\lim_{x\to a}f(x)=b_1+\varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a}g(x)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=b_1b_2+b_1\varepsilon_2+b_2\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2=0\quad\&\quad b_1\cdot\varepsilon_2=0\quad\&\quad b_2\varepsilon_1=0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=b_1b_2$$

4- د دوه تابعګانو د نسبت لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټود نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

ketabton.com - The Digital Library



$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

$$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

ثبوت:

$$f(x)=b_1+\varepsilon_1$$
$$g(x)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات د دواړو خواو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ منفي کوو.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$=\frac{b_1b_2+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1+b_1b_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

څرنګه چه $\varepsilon_1$ او $\varepsilon_2$ ډېر کوچني مثبت عددونه دي نوصفر کيږي. نو ثابته شوه چه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

اومه قضيه يا د ساندويچ قضيه:

که $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ درې تابعګانې ولرو چه $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ وي که:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b=\lim_{x\to a}h(x)$$

نو $\lim_{x\to a}g(x)=b$ کيږي.

مثال: که $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\leq u(x)\leq\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نو ? = $\lim_{x\to 0}u(x)$ دی.

ketabton.com - The Digital Library


$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=1=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نو دسانډويچ د قضيې سره سم د $u(x)$ قيمت پيدا کړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to a} u(x) = 1$$

تمرين:

لاندې ليميټونه حل کړئ؟

1- $\lim_{x\to 0}(x^2-2x^2+5x+3)$

2- $\lim_{x\to -1}(x^2-2x-5)$

3- $\lim_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4- $\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-4x^2+7x-14}{2x^2-11x+7}$

5- $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-21x}{3x^3+5x^2+7x}$

6- $\lim_{x\to 0}\frac{5x^3-4x^2}{7x^2-3x}$

7- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-3}{2x^2-3x+1}$

8- $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+5}{3x-1}$

9- $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-11}{2x^3+3x^2-4x+7}$

10- $\lim_{x\to\infty}(4x^3-3x^2+4x-12)$

11- $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-3x+7}{1+\frac{2-x}{x}}$

12- $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x-3}{x-5}+\frac{x}{x+5}+\frac{x+4}{x}\right)$

اتمه قضيه:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

په داسې حال کې چه $(n)$ يو طبيعي عدد او $(a)$ يو حقيقي عدد دي.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})$$

$$\lim_{x\to a}x^{n-1}+a\lim_{x\to a}x^{n-2}+a^2\lim_{x\to a}x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}\lim_{x\to a}x+\lim_{x\to a}a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a\cdot a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}\cdot a+a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}+a^{n-1}=na^{n-1}$$

ketabton.com - The Digital Library



دغه قضیه د ټولو جذري افادو د لیمیټ د پیدا کولو لپاره استعمالولای شو.

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}}{x-a}=\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}a^{\frac{-(n-1)}{n}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=?$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1-5}{5}}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{3^4}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=?$$

د دغه سوال د حل لپاره $(x=y^6)$ او $a=b^6$ بنیو:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{y\to b}\frac{\sqrt[3]{y^6}-\sqrt[3]{b^6}}{\sqrt{y^6}-\sqrt{b^6}}=\lim_{y\to b}\frac{y^2-b^2}{y^3-b^3}$$

$$=\lim_{y\to b}\frac{(y-b)(y+b)}{(y-b)(y^2+by+b^2)}$$

$$\lim_{y\to b}\frac{y+b}{y^2+by+b^2}=\frac{b+b}{b^2+b^2+b^2}=\frac{2b}{3b^2}=\frac{2}{3b}$$

$$\therefore\quad b^6=a\quad\because\quad b=\sqrt[6]{a}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$$

ketabton.com - The Digital Library


ابهام $Uncertainty$:

په اعدادو یا $(\infty)$ باندې د عملیو د نتایجو عدم قاطعیت یا نامعلومۍ ته ابهام وائي.

مبهم اشکال په لاندې ډول دي.

$$\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0},0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,\infty^0,1^0$$

د ابهام رفع کول:

د څلورو لمړیو شکلو یعنې $\left(\infty-\infty\ ,\ 0\cdot\infty\ ,\ \frac{0}{0}\ \frac{\infty}{\infty}\right)$ ابهام په څلورو طریقو رفع کیږي.

1- د تقسیم پواسطه

2- د مزدوج د ضربېدو پواسطه

3- د تجزئې پواسطه

4- د لوهسپیتال په طریقه

1- د تقسیم پواسطه د ابهام رفع کول:

که په یوه کسري تابع کې د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کې ابهام منځ ته راشي صورت او مخرج په هغه متحول ویشو چه درجه یې لوړه وي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{3}$$

2- د تجزیې پواسطه د ابهام رفع کول:

که یوه کسري تابع د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کې مبهم شکل غوره کړي او د تجزیې وړ وي تجزیه کوو یې.

ketabton.com - The Digital Library



مثال:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{4-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}$$

$$\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-6\cdot 2+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-4x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)-4(x-2)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

3- د مزدوج د ضربولو پواسطه د ابهام رفع کول:

که د یوی تابع ابهام د تقسیم او تجزیي پواسطه نه رفع کېدلو په مزدوج کی یي ضربوو.

مثال:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{\sqrt{16}-4}{16-16}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}^2-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

ketabton.com - The Digital Library


$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = ?$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}^2 - 4}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)$$

$$= \sqrt{3+1}+2$$

$$\sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = ?$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{10x-4x^2-4}{5(x^2+1)}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(-4x^2+10x-4)}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(-4x^2+2x+8x-4)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\{-2x(2x-1)+4(2x-1)\}}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-2(x-2)(2x-1)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-2(2x-1)}{5(x^2+1)} = \frac{-2(2\cdot 2-1)}{5(2^2+1)} = \frac{-6}{25}$$

ketabton.com - The Digital Library


د $\left(0^0 ، \infty^0 ، 1^\infty\right)$ اشکالو د ابهام رفع کول:

ددغه اشکالو د رفع کولو لپاره د $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ کار اخیستل کیږي. چه:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

د $2.718281828 = e$ عدد د یوه جرمني عالم ایولر $Euler$ پواسطه کشف شوېدی.

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

د پاره د دې چې پوښتنه د ایولر د فارمول شکل ته ورواړوو نو $\frac{1}{\alpha}$ په $x$ ښیو:

$$x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \because\ \alpha \to 0 \quad \therefore\ x \to \infty$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

مثال:ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

حل:

$$u = \frac{\alpha}{x} \quad \Rightarrow \therefore\ x \to \infty \quad \because\ u \to 0 \ \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{u} = x \Rightarrow u = \frac{1}{x} \quad \therefore\ u \to 0 \quad \because x \to \infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

مثال:ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$$

ketabton.com - The Digital Library

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}ln(1+x)\right\} = \lim_{x\to 0}\left\{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$\frac{1}{x} = u \Rightarrow x = \frac{1}{u} \qquad \therefore\ x\to 0 \quad \because\ u \longrightarrow \infty$$

$$= ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = ln\left\{\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right\} = lne = 1$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

د سوال د حل لپاره $(e^x-1)$ په $(y)$ ښيو:

$$e^x - 1 = y \Rightarrow e^x = 1 + y \Rightarrow \ln e^x = \ln(1+y) = x\ln e = \ln(1+y)$$

$$x = \ln(1+y)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y} = x \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ y\to 0 \quad \because\ x\to\infty$$

$$= \frac{1}{\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

تبصره:

که يوه تابع د $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ شکل ولري د ليميټ د لاس ته راوړلو لپاره يې طبعي لوګاريتم نيسو او د پورتنيو مبهمو شکلو څخه چې که هر شکل يې لرلو د $(0\cdot\infty)$ شکل ته ئي را اړوو او د مخکينيو څلورو حالتو څخه چه په هر حالت ئي ابهام د منځه تللو ابهام ئي د منځه وړو.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \ln\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\{g(x)\ln f(x)\}$$

ketabton.com - The Digital Library



د مبهم شکل عمومي حالت :-که $\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = 1^{\infty}$ وي په دی حالت کی $(\alpha)$ په $(u-1)$ ښيو:

$(\alpha = u - 1)$

$$\lim_{x\to a} u^{v} = \lim_{x\to a}(1+u-1)^{\frac{v}{u-1}\cdot u-1} = \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\cdot\alpha}\right\}$$

$$= \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چه $(\alpha = u - 1)$ دی نو که $(u \to 1)$ وګړي په نتيجه کی $(\alpha \to 0)$ کوي په نتيجه کی ليکو چي:

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = \left\{\lim_{x\to a}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim_{x\to a} v(u-1)} = e^{\lim_{x\to a} v(u-1)} = e^{p}$$

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = e^{p} \qquad , \qquad p = \lim_{x\to a}\{v(u-1)\}$$

1- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ پيدا کړئ؟

حل:

$$u = 1 + \frac{2}{x} \qquad , \qquad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = e^{p} \qquad , \qquad p = \lim_{x\to\infty}\left\{x\left(1+\frac{2}{x}-1\right)\right\} = \lim_{x\to a} x\left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = e^{p} = e^{2}$$

2- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}$ قيمت محاسبه کړئ؟

حل: لمړی د ليميټ بڼه ليکو:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^{p}$$

$$p = \lim_{x\to a} v(u-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(1+\frac{1}{x}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{5}{x}}{\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}=e^p=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

3- مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$u=\cos x \quad , \quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^p$$

$$p=\lim_{x\to 0}\{v(u-1)\}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}(\cos x-1)\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{cos^2x-1}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-sin^2x}{x(\cos x+1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=1\cdot\frac{0}{1}=1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+1)^{\frac{1}{x}}=e^p=e^0=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=?$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(1+\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{\infty}=1+0=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=?$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3}{x-1}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)$$

ketabton.com - The Digital Library



$$\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{4}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+8}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{8}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{8}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{4+\frac{8}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{4}{1}=4$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\cos 2x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2 x-1}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\sin x$$

$$=-2\cdot 1\cdot 0=0$$

مثال: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=?$

حل:

$$x-1=y\Rightarrow x=1+y$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y}=u\Rightarrow y=\frac{1}{u}\qquad \therefore\ y\to 0\quad \because\ u\to\infty$$

$$\frac{1}{\ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}}=e$$

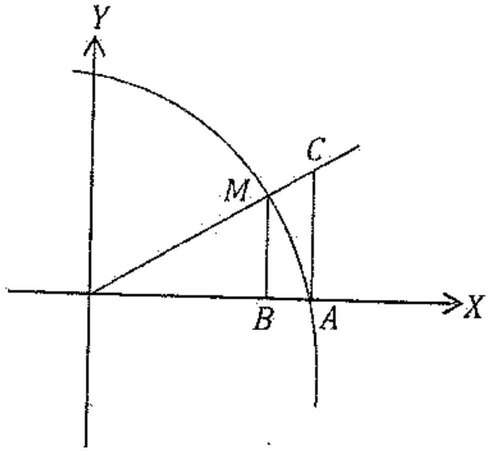
### د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ :limit of Trigono metrical Functions

د یوې زاویې د ساین اوهغه زاویې د نسبت لیمیټ په صفر کې (1) دي. یعنې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ketabton.com - The Digital Library


ثبوت:په یوه دایره کې یو داخلي او یو خارجي مثلثونه رسموو اوهم ددی مثلثو تر منځ یوه قطاع په نظر کې نیسو. مساحتونه ئي پیدا کوو او مقایسه کوویې.




$$A_{OBM} < A_{OAM} < A_{OAC}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{MB} < \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\widehat{AM} < \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}$$

$$\overline{OB} = \cos x \ , \quad \overline{MB} = \sin x \ , \quad \overline{OA} = 1 \quad , \widehat{AM} = x$$

$$\sin x \cos x < x < \tan x$$

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1 = \lim_{x\to 0}\cos x$$

د ساندویچ د قضیې سره سم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

ketabton.com - The Digital Library



1- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=?$

حل:

$$2x=\alpha \Longrightarrow x=\frac{\alpha}{2} \qquad \therefore\ x\to 0 \qquad \because\ \alpha\to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}}=2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=2\cdot 1=2$$

2- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10}{7}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

3- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2sin^2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+2sin^2x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{\frac{3x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\cos 3x}}{5x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

5- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}=?$

ketabton.com - The Digital Library


حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}$$

$$2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=10\cdot 1\cdot 1=10$$

6- مثال: $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-1-cosx+1}=\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-cosx}$$

$$=\sqrt{2(1^2)-1}=\sqrt{2\cdot 1-1}=\sqrt{2-1}=1$$

## د تابعګانو متمادیت (اتصال):

د اتصال له مخې تابع په دوه ډوله ده.

1- متمادي تابع      2- غیر متمادي تابع

### 1- متمادي تابع :

هغه تابع ده چه دګراف د ترسیم په وخت کې یې د پنسل څوکه د کاغذ څخه نه پورته کیږي یعنې ګراف یې پریکړون نه لري.په عمومي ډول خطي تابع، دویمه درجه تابع، اکسپونتشل تابع، لوګاریتمي تابع، د ساین او کوساین تابعګانې متمادي تابعګانې دي په دې شرط چه کومه نقطه ورڅخه وتلې نه وي .

### 2- غیر متمادي تابعګانې:

هغه تابعګانې دي چه ګراف یې څو ټوټې وي. لکه هوموګرافیک تابع، د تانجانت، کوتانجانت، سیکېنټ او کوسیکېنټ تابعګانې.

کولای شو چې متمادي تابګانې په غیرمتمادي تابګانو بدلې کړو مګر نشو کولای چې غیر متمادي تابعګانې په متمادي تابعګانو بدلې کړو.

ketabton.com - The Digital Library



د متمادیت شرطونه:

د متمادیت شرطونه دری دي.

1- د $(a)$ نقطه باید په $\lim_{x\to a} f(x)$ کی شامل وي.

2- $\lim_{x\to a} f(x)$ باید موجود وي.

3- د تابع لیمیټ په یوه نقطه کی باید د تابع د قیمت سره مساوي وي په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

که پورتني دری واړه شرطونه په یوه تابع کی موجود وه تابع متمادي ده او که د دغه دری شرطو څخه یو یکی موجود نه و تابع متمادي نه ده غیرمتمادي ده.

1- مثال: وښیاست چه $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تابع د $x \to 2$ په نقطه کی متمادي ده.

حل:

1- $2\epsilon domf(x) \because 2 \in IR$

2- $\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 1) = 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 7$

3- $f(2) = 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 7$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

نو تابع متمادي ده.

2- مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $(x = -1)$ په ټکي کی وڅیړئ؟

حل: څرنګه چه د تابع مخرج په $(-1)$ کې صفر کیږي او هر هغه عدد چه د تابع مخرج صفر کوي د تابع د تعریف په ناحیه کی شامل نه دی $(-1 \notin domf(x))$ نو تابع متمادي نه ده

د تابع د لیمیټ شرطونه :که دیوی تابع د ښي لاس لیمیټ د تابع دچپ لاس د لیمیټ سره مساوي وي نوتابع لیمیټ لري. اوکه د ښي لاس لیمیټ د چپ لاس د لیمیټ سره مساوي نه وٍ لیمیټ نه لري.

ketabton.com - The Digital Library


دښي لاس ليميټ :

د $(b)$ عدد د $(a)$ په نقطه کی د $f(x)$ د تابع د ښي لاس ليميټ دي په دی شرط چه د $(b)$ دهر مجاورت $(N)$ لپاره د تابع د تعريف په ناحيه کی د $(a, a+\delta)$ يو خلاص انټروال موجود وي چه ددی انټروال د هرعنصرتصويرد $(N)$ په مجاورت شامل وي او داسی ليکل کيږي.

$$\lim_{x \to a+} f(x)$$

د چپ لاس ليميټ:

د $(b)$ عدد د $(a)$ په نقطه کی د $f(x)$ دتابع د چپ لاس ليميټ دي پدی شرط چه د $(b)$ د هر مجاورت $(N)$لپاره د تابع دتعريف په ناحيه کی د $(-\infty - a, a)$ يو انټروال موجود وي چه ددی مجاورت د هر عنصر تصويرد $(N)$ په مجاورت کی شامل وي اوداسې ليکل کيږي.

$$\lim_{x \to a-} f(x)$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; \quad x < 2 \\ x^2 - 3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

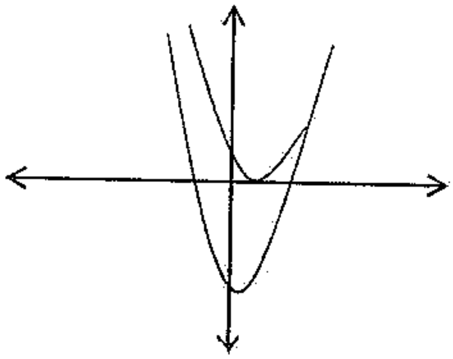
حل:

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (x^2 - 2x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (x^2 - 3) = 1$$

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} f(x)$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \exists$$



ketabton.com - The Digital Library



4- مثال: $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; & x\geq 1\\ 1-x & ; & x<1\end{cases}$ تابع په راکړ شوو ټکو کې يې متماديت وڅېړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1+}(2x+1)=3\\ \lim\limits_{x\to 1-}(1-x)=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$$

نو $\lim_{x\to 1} f(x)=\nexists$ تابع ليميټ نه لري.

نو تابع د $(x=1)$ په نقطه کې غېر متمادي ده.

تبصره:

1- که $g(x)$ تابع د $(x=a)$ په نقطه کې متمادي وي او $f(x)$ په $(x=g(a))$ کې متمادي وي نو $f(g(x))$ هم په $(x=a)$ کې متمادي ده.

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(g(a))$$

2- د يوې طاقت لرونکې تابع د ليميټ دپيدا کولو لپاره لمړی دتابع ليميټ پيدا کوو او بيا يې په همغه توان رفع کوو.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^a=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^a$$

3- د اکسپوننشل تابع د ليميټ دپيدا کولو لپاره قاعده دتابع دتوان دليميټ په توان ليکو.

$$\lim_{x\to a}(b)^{f(x)}=b^{\lim_{x\to a} f(x)}$$

4- د لوګاريتمي تابع ليميټ په يوه نقطه کې دتابع دليميټ دلوګاريتم سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\log_b f(x)=\log_b \lim_{x\to a} f(x)$$

5- د يوې مثلثاتي تابع ليميټ په يوه نقطه کې د هغه تابع دليميټ دمثلثاتي نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\sin f(x)=\sin \lim_{x\to a} f(x)$$

ketabton.com - The Digital Library


د متمادي تابعګانو خواص:

که د دوه تابعګانو څخه هره یوه په یوه نقطه کی متمادي وي نو ددوی مجموعه ،تفاضل ، حاصل ضرب او خارج قسمت هم په همغه نقطه کی متمادي دی.

مثال: که $f(x) = x^2 + 3$ او $g(x) = x^2 + 3x - 2$ دوه تابعګاني متمادي وي نو ثبوت کړئ چي $f(x) + g(x),\ f(x) - g(x),\ f(x) \cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ ; g(x) \neq 0$ هم متمادي دي.

حل:

$$1: Df(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$$
$$3: f(1) = (1^2 + 3) = 4$$

نو د $f(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کي متمادي ده.

$$1: Dg(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$$
$$3: g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$$

نو د $g(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کی متمادي ده.

اوس د تابعګانو دمجموعی او حاصل ضرب متمادیت څیړو.

الف:

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$
$$1: D\{f(x) + g(x)\} = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) + g(x)\} = \lim_{x\to 1}(2x^2 + 3x + 1) = 6$$
$$3: f(1) + g(1) = (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) = 2 + 3 + 1 = 6$$
$$\lim_{x\to 1}\big(f(x) + g(x)\big) = f(1) + g(1) = 6$$

ب: د او تابعګانو دحاصل ضرب متمادیت وڅیړئ؟

$$1: Df(x) \cdot g(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3) = 2 \cdot 4 = 8$$
$$3: f(1) \cdot g(1) = 2 \cdot 4 = 8$$

د تابعګانو حاصل ضرب هم متمادي دی.

ketabton.com - The Digital Library



## تمرین

د لاندې تابعګانو لیمیټ پیدا کړئ؟

1: $\lim_{x\to\infty}(x^2 - 2x + 17)$

2: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 6x + 3}{x + 1}$

3: $\lim_{x\to 1}(x^3 + 5x^2 - 11x + 1)$

4: $\lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

ketabton.com - The Digital Library


# شپاړلسم فصل

## مشتق

مشتق مفعوله صیغه ده د اشتقاق څخه اخیستل شوی ده.

او په اصطلاح کې په عربي ژبه کی د مصدر څخه د نورو افعالو او اسماؤ اخیستلو ته اشتقاق وایي. د مشتق څخه مقصد د دوه یمی درجی، دریمی درجی اوداسی نورو تابعگانو د میل پیدا کول دي.

### د خطي تابع میل:

په خطي تابع کی د مستقیم خط میل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ پواسطه پیدا کیږي.

مثال: $A(3,7)$ او $B(5,9)$ د مستقیمی کرښی دوه نقطی دي میل یې پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-7}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

خو څرنګه چه په منحني خطو کی دوه نقطی په یوه استقامت واقع نه وي نو له همدی امله دمنحني خطو دمیل د پیدا کولو لپاره د مستقیم خط د میل څخه استفاده کوي نو څکه د منحني میل ته مشتق وایي.

مثلاً $f(x) = x^2$ یوه تابع راکړشوی ده د میل ددغه تابع د ګراف دوه نقطی په یوه استقامت وجود نلري نو په تقریبي ډول دوه نقطی پیداکواو میل یې لاسته راوړو فرضاً $A(x, f(x))$ او $B(x+h, f(x+h))$ دمنحني خط دوه نقطی دي نود مستقیم خط د میل څخه استفاده کوونو لیکو چه:

$$m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

د منحني خط دهری اختیاري نقطی میل عبارت $\lim_{x \to a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ دی.

1- مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ تابع د ګراف میل د $P(3, -3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library



حل: څرنګه چې د $P(3,-3)$ په نقطه کې $x=3$ دی نو کولای شو چه د میل په فارمول کې د $(x)$ په عوض $(3)$ وضع کړو.

$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$m=\lim_{h\to 0}\frac{2(3+h)-(3+h)^2-(2\cdot 3-3^2)}{h}$$
$$m=\lim_{h\to 0}\frac{6+2h-(9+6h+h^2)-6+9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h-9-6h-h^2+9}{h}$$
$$m=\lim_{h\to 0}\frac{h(-4-h)}{h}=\lim_{h\to 0}(-4-h)=-4\Rightarrow m=-4$$

2- مثال: د $f(x)=x^3-1$ د تابع میل د $(x=-3)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$m=\lim_{x\to -3}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\lim_{x\to -3}\frac{\{(-3+h)^3-1\}-\{(-3)^3-1\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-27+27h-9h^2+h^3-1+27+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3-9h^2+27h}{h}$$
$$m=\lim_{h\to 0}\frac{h(h^2-9h+27)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2-9h+27)=27$$

منحنی یا وسطي تعبیر:

د متحرک پواسطه وهل شوی فاصله د وخت تابع ده. یعنې:

$$S=f(t)$$

د $t_1$ او $t_2$ په وختونو کې د وهل شوو فاصلو تفاضل او وختو د تفاض نسبت ته د متحرک وسطي سرعت یا متوسط سرعت وايي. یاداچه دتابع اومتحول دزیادت نسبت ته متوسط سرعت وايي.

$$\acute{v}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

د متوسط سرعت لیمیټ ته لحظوي سرعت وایي

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ketabton.com - The Digital Library


1- مثال: د $y = f(x) = x^2$ په تابع کی متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کی پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

2- مثال: د $f(t) = 5t^2 - 3t + 1$ د تابع متوسط سرعت د $[2,4]$ په انټروال کی پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1) - (5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1)}{4 - 2} = \frac{69 - 15}{2} = 27$$

د یوې تابع مشتق:

که $y = f(x)$ یوه تابع ولرو نو که $(x)$ د $(\Delta x)$ په اندازه زیادت وکړي نو $(y)$ د $(\Delta y)$ په اندازه زیادت کوي.

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

دغه لیمیټ ته مشتق وایي.

د مشتق په باب لمړنی تصور پیري فرماټ (Pierre fermat) فرانسوي عالم په (1601 – 1665)م کې کړی ؤ نوموړي خپلی لیکلنی د نړی ریاضیدانانو ته پېشنهاد کړلی. وروسته بیا اسحق نیوټن (1642 – 1727)م او جورج ویلیم لایبنز(1664 – 1715)م د مشتق د موجودیت ضرورت په ریاضي کی ثابت او د ساینسدانانو کمیسون ته یي پیشنهاد کړ او د مشتق د تعریف وضاحت یي په ډېر ښه ډول وکړ.

ketabton.com - The Digital Library



د مشتق تعریف:

د صفر په نقطه کې د تابع او متحول د زیادت د نسبت لیمیټ ته مشتق وايي. لکه $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$
او په $f(x)$ یا $\acute{y}$ ، $\frac{dy}{dx},\frac{df}{dx}$ ښودل کیږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=\acute{y}=\acute{f}(x)$$

1- مثال: د $f(x)=2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

2- مثال: د $f(x)=x^3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2\quad\Rightarrow\acute{f}(x)=3x^2$$

3- مثال: د $f(x)=\sqrt{x}\,;\,x\geq 0$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4- مثال: د $f(x) = 2x^2 + x$ د تابع مشتق د تعریف په مرسته وښیئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\}-(2x^2+x)}{\Delta x}$$

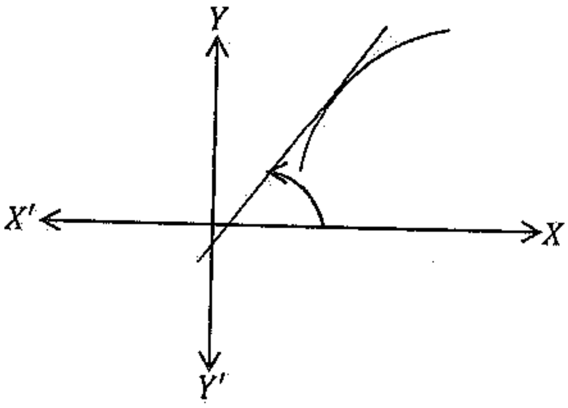
$$\lim_{\Delta\to x0}\frac{2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2+x+\Delta x-2x^2-x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(4x+2\Delta x+1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(4x+2\Delta x+1)=4x+1 \quad \Rightarrow \acute{f}(x)=4x+1$$

د مشتق هندسي تعبير

په يوه نقطه کې د يوه منحني خط مېل دهغه زاويي تانجانت دی چه مستقيمه کرښه يي د $(X\acute{X})$ د محور دمثبت جهت سره جوړوي.




1- مثال: د هغه مماس مېل او معادله پیدا کړئ چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحني باندې د $A(1,1)$ په نقطه کې رسمیږي.

حل:

ketabton.com - The Digital Library



$$m = \acute{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{2(x+\Delta x)^3 - 1\} - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2) = 6x^2$$

د $A(1,1)$ په ټکي کې د مماس میل $m = \acute{f}(x) = \acute{f}(1) = 6(1)^2 = 6 \cdot 1 = 6$ دی او معادله یې په لاندې ډول ده.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \quad \Rightarrow y = 6x - 6 + 1 = 6x - 5 \Rightarrow y = 6x - 5$$

2- مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماس میل د $x_0 = 2$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

3- مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع راکړشوی ده د $x = x_0$ په نقطه کې اوخصوصاً د $x_0 = 2$ په نقطه کې یې مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\acute{f}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library


4- مثال: د $f(x) = \frac{1}{x}$ د تابع مشتق د $(x_0)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$y = f(x_0)$$
$$y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$
$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{{x_0}^2} \quad \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{{x_0}^2}$$

5- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\{4(x + \Delta x)^2 - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3 - 4x^2 + 3}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(8x + 4\Delta x)}{\Delta x}$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x) = 8x$$

تمرین:

د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ؟

1- $f(x) = \sqrt{x + 1}$ 2- $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x}$

ketabton.com - The Digital Library



3- $f(x) = 1 - \frac{3}{x}$ 4- $f(x) = \frac{2}{x^2+5x-7}$

5- $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 6- $f(x) = 5x - 1$

## د مشتق قوانین:

### اوله قضیه:

د ثابت عدد مشتق صفر دی.

مفروض : $y = c$ یوه تابع لرو.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = 0$

ثبوت:

$$y + \Delta y = c \quad \Rightarrow \Delta y = c - y = c - c$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

### د يوې طاقت لرونکی تابع مشتق:

مفروض : $y = f(x) = x^n$ یوه طاقت لرونکی تابع ده.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = \acute{f}(x) = nx^{n-1}$

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 \cdots + x^{n-1}\}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}$$

$$\acute{y} = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

ketabton.com - The Digital Library


1- مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$$

2- مثال: د $f(x) = x^{-2}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

3- مثال: د $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق:

د دوه تابعګانو د مجموعې مشتق د تابعګانو د مشتقو د مجموعې سره مساوي دی.

مفروض: $(u)$ او $(v)$ دوه تابعګانې لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه $y' = u' + v'$

ثبوت: د تابعګانو د جمع حاصل په $(y)$ ښیو:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y' = u' + v'$$

ketabton.com - The Digital Library



## د دوه تابعګانو دتفاضل مشتق

د دوه تابعګانو دتفاضل مشتق د تابعګانو د مشتقو د تفاضل سره مساوي دی.

مفروض: $(u)$ او $(v)$ دوه تابعګانې لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$

ثبوت: د $(u)$ او $(v)$ تابعګانو تفاضل په $(y)$ ښيو.

$$y = u - v$$
$$y + \Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) - u + v$$
$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - u + v$$
$$\Delta y = \Delta u - \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u - \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$$

1- مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x \quad \& \quad v = 1$$
$$\acute{u} = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 = 2$$
$$\acute{v} = 0 \quad \because \ \acute{y} = 2$$

2- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$u = 4x^2 \ , \quad v = -3x \ , \ w = 5$$
$$\acute{y} = \acute{u} + \acute{v} + \acute{w}$$
$$\acute{y} = (4x^2)' - (-3x)' + 5'$$
$$\acute{y} = 8x - 3$$

د حاصل ضرب مشتق:

د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق مساوي دي د اولی تابع مشتق ضرب دويمه تابع جمع د دويمي تابع مشتق ضرب اوله تابع.

مفروض: د $(u)$ او $(v)$ دوه تابعګانی لرو او د حاصل ضرب تابع يي په $(y)$ ښيو.

$$y = u \cdot v$$

مطلوب: ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$

ثبوت:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v$$
$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$
$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = v\acute{u} + \acute{v}u + 0 \cdot \acute{v}$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$

1- مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$u = x^3 \quad \Rightarrow \acute{u} = 3x^2$$
$$v = x^2 - 3 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3x$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$
$$\acute{y} = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3)$$
$$\acute{y} = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2$$

2- مثال: د $f(x) = (2x^2 - 5x + 7)(3x - 15)$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library



حل:

$$u = 2x^2 - 5x + 7 \quad \Rightarrow \acute{u} = 4x - 5$$
$$v = 3x - 15 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{f}(x) = (4x - 5)(3x - 15) + 3(2x^2 - 5x + 7)$$
$$\acute{f}(x) = 12x^2 - 60x - 15x + 75 + 6x^2 - 15x + 21$$
$$\acute{f}(x) = 18x^2 - 90x + 96$$

د حاصل تقسیم مشتق:

د دوه تابعګانو د خارج قسمت مشتق عبارت دی دصورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع باندی.

مفروض: د $(u)$ او $(v)$ دوه تابعګانی لرود خارج قسمت تابع يي په $(y)$ ښيو. نو:

$$y = \frac{u}{v}$$

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim_{\Delta x \to 0}(v + \Delta v)}$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

ketabton.com - The Digital Library

1- مثال: د $y = \frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2 + 3x \quad \Rightarrow \acute{u} = 3$$
$$v = 1 - 2x \quad \Rightarrow \acute{v} = -2$$
$$y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$
$$\acute{y} = \frac{3(1-2x) - \{-2(2+3x)\}}{(1-2x)^2} = \frac{3 - 6x + 4 + 6x}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$$

2- مثال: د $f(x) = \frac{7x-15}{2x^2+3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 7x - 15 \quad \Rightarrow \acute{u} = 7$$
$$v = 2x^2 + 3x \quad \Rightarrow \acute{v} = 4x + 3$$
$$\acute{f}(x) = \frac{7(2x^2+3x) - (4x+3)(7x-15)}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{14x^2 + 21x - 28x^2 + 60x - 21x + 45}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{-14x^2 + 60x + 45}{(2x^2+3x)^2}$$

3- مثال: د $y = \frac{x^2}{3x+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \acute{u} = 2x$$
$$v = x + 1 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2}$$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \acute{u} = 2x$$
$$v = x + 1 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$
$$\acute{y} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

ketabton.com - The Digital Library



## د جذري تابع مشتق:

1- د هغه جذري تابع مشتق چې د جذر درجه يې دوه وي. لکه:

$$y = \sqrt{x}$$

مشتق يې عبارت دی د جذر د داخل مشتق پر دوه ضرب تابع .

فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مفروض: $y = \sqrt{u}$ يوه تابع راکړ شوی ده.

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} (\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} = \frac{\acute{u}}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مثال:- د $y = \sqrt{x}$ مشتق پيدا کړئ؟

د پورته تابع مشتق عبارت دی.

$$\acute{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ketabton.com - The Digital Library


ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y + \Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}\right]\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}\right]}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

ketabton.com - The Digital Library



$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

مثال: د $f(x)=\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}$ مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\frac{6x^2-6x+4}{2\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}}$$

## د مرکبې تابع مشتق:

مرکبه تابع هغه تابع ده چه متحول يې د بل متحول تابع وي يا دا چه دتابع ، تابع ته مرکبه تابع وايي.لکه که د $f$ تابع د $g(x)$ تابع وي او $g$ د $x$ تابع وي نودغه تابع ته مرکبه تابع وايي.

د مرکبې تابع د مشتق دفارمول د پيدا کولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

$$\Delta y=\Delta y\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\acute{y}_{(x)}\Rightarrow\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\acute{y}_{(u)}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\acute{u}_{(x)}$$

$$\acute{y}_{(x)}=\acute{y}_{(u)}\cdot\acute{u}_{(x)}$$

نو په دې اساس که $y=u^n$ وي مشتق يې $\acute{y}=nu^{n-1}\cdot\acute{u}$ دی.

او که $y=\sqrt[n]{u}$ وي نو:

$$\acute{y}=\frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

ketabton.com - The Digital Library



1- مثال :

$$y = (2x^2 - 1)^3$$
$$\acute{y} = 3(2x^2 - 1)^{3-1} \cdot 4x = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x$$
$$= (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x$$
$$\acute{y} = 48x^5 - 48x^3 + 12x$$

2- مثال:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3- مثال:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \quad , \quad \acute{y} = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}$$

څلورم مثال:

$$y = (x^2 - 2)^{-3}$$

حل:

$$\acute{y} = -3(x^2 - 2)^{-3-1} \cdot 2x = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x$$
$$= \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4}$$

نوټ:

که د $(f)$ تابع د $(x_0)$ په نقطه کې مشتق ولري نو $\acute{f}(x)$ دهغه مماس میل دی چه د $[x_0, f(x_0)]$ په نقطه په منحني باندې مماس وي.

مثال: د $f(x) = x^3$ د تابع میل د $x_0 = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library


حل: څرنګه چه $x_0 = 1$ دی نو $f(x_0) = 1$ کیږي نو $P(1,1)$ د تماس ټکی دی نو میل یې عبارت دی.

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

که یوه تابع د $x = x_0$ په نقطه کی د مشتق وړ وي نو دا تابع په دی نقطه کی متمادي ده مګر ممکن یوه تابع په یوه نقطه کی متمادي وي مګر مشتق دی ونلري.

مثال: د $f(x) = |x|$ دتابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کی پیدا کړئ

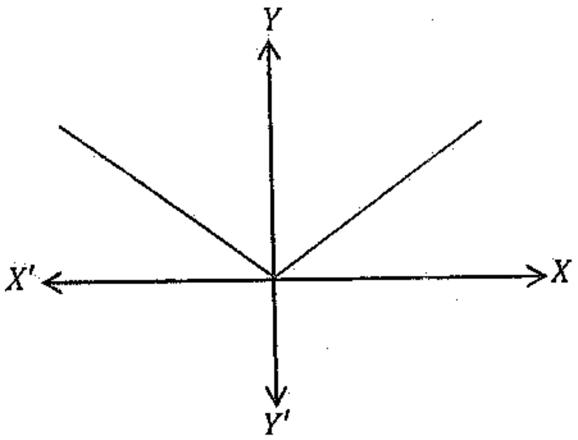
$$f'(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$$

لیمیټ نلري نو مشتق هم نلري.

$$f(x) = |x|$$



ketabton.com - The Digital Library


د مثلثاتي تابعگانو مشتق:

د $y = \sin x$ تابع مشتق:

د $y = \sin x$ مشتق عبارت دی له $y' = \cos x$ څخه

ثبوت:

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$= 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$
$$\acute{y} = \cos x$$

که $f(x) = \sin u$ وي او $(u)$ د $(x)$ تابع وي نو مشتق يي عبارت دی له:

$$\acute{f}(x) = \acute{u}\cos u$$

1- مثال: د $f(x) = \sin 4x$ مشتق پیدا کړئ؟

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sin 4x \\ u = 4x &\Rightarrow \acute{u} = 4 \\ \acute{f}(x) &= \acute{u}\cos u \end{aligned}\right| \qquad \acute{f}(x) = 4\cos 4x$$

2- مثال :- د $f(x) = x^3 \csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x}$$
$$g(x) = x^3 \Rightarrow \acute{g}(x) = 3x^2$$
$$h(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \acute{h}(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x + x^3 \cdot (-\cot x \csc x)$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x - x^3 \cot x \csc x$$

ketabton.com - The Digital Library



3- مثال: د $y = \frac{\sin x}{1+x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$$

$$v = 1 + x \Rightarrow \acute{v} = 1$$

$$\acute{y} = \frac{\cos x(1+x) - 1 \cdot \sin x}{(1+x)^2}$$

د $y = \cos x$ تابع مشتق:

د $y = \cos x$ تابع مشتق $\acute{y} = -\sin x$ دی.

ثبوت:

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2\sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = -2\sin \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\Delta y = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

$$y = \cos x \Rightarrow \acute{y} = -$$

پورتني مشتق په لاندې ډول هم ثبوتولای شو.

$$sin^2 x + cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1 - sin^2 x} = (1 - sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2}(1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}(-2 \sin x \cos x) = \frac{-2 \sin x \cos x}{2(1 - sin^2 x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{cos^2 x}}$$

$$= -\frac{\sin x \cos x}{\cos x} = -\sin x$$

1- مثال: $f(x) = \sin 2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

ketabton.com - The Digital Library

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = \acute{u}v + \acute{v}u$

$\acute{f}(x) = 2[\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)]$

$\acute{f}(x) = 2(cos^2x - sin^2x) = 2\cos 2x$

2- مثال: د $f(x) = x - \sin x \cos x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$y = x \Rightarrow \acute{y} = 1$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = 1 - \{\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\}$

$\acute{f}(x) = 1 - (cos^2x - sin^2x) = 1 - \cos 2x$

3- مثال: $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2 = ?$

$\acute{f}(x) = 2(2\sec 2x \tan 2x + 2sec^2 2x) = 4\sec 2x(\tan 2x + \sec 2x)$

د $y = \tan x$ تابع مشتق:

$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}$

$\acute{y} = \frac{1}{cos^2x} = sec^2x$

څلورم د $y = \cot x$ تابع مشتق

ثبوت:

$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$u = \cos x \Rightarrow \acute{u} = -\sin x$

ketabton.com - The Digital Library



$v = \sin x \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{sin^2 x} = \frac{-(sin^2 x + cos^2 x)}{sin^2 x}$$

$$\acute{y} = -\frac{1}{sin^2 x} = -csc^2 x \qquad \therefore \quad cot\acute{g}x = -csc^2 x$$

د $y = \sec x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$u = 1 \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{cos^2 x} = \frac{\sin x}{cos^2 x}$$

$$\acute{y} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

د $y = \csc x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$u = 1 \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \sin x \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \sin x - \cos x \cdot 1}{sin^2 x} = \frac{-\cos x}{sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x}$$

$$\acute{y} = -\cot x \csc x \ v$$

ketabton.com - The Digital Library

که په یوه تابع کې څو متحوله موجود وي او د ضرب یا تقسیم په حال کې وي نو کله چه د دغه ډول تابعګانو مشتق پیدا کوو نو په نوبت سره دیوی تابع مشتق نظر یوه متحول ته نیول کیږي بل متحول ثابت فرض کیږي دغه ډول مشتقاتو ته ضمني مشتقات وایي او مشتق یې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

لمړی مثال: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع ضمني مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

حل: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع مشتق د $y'_{(x)} = \frac{f'(x)}{f'(y)}$ رابطې څخه پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = y'_{(x)} - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_x - (1)_x = 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$f'_{(y)} = y'_y - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_y - (1)_y = 1 - \frac{x}{1}\cos\frac{x}{y} - 0 = 1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د $(x)$ او $(y)$ قیمتونه وضع کوو چه $y'(\pi, 1)$ په لاس راشي

$$y'_{(\pi.1)} = \frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1 + \pi\cos\frac{\pi}{1}} = \frac{\cos\pi}{1 + \pi\cos\pi} = \frac{-1}{1 - \pi} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$
$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

ketabton.com - The Digital Library


$$\acute{f}_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$\acute{f}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2}$$

دریم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = -2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

دپورتنی تابع ضمني مشتق په لاندی ډول هم لاس ته راوړلای شو.

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5\acute{y} - \acute{y} - 2x = 0$$

$$\acute{y}(6y^5 - 1) = 2x$$

$$\acute{y} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

## د تابع دویم ضمني مشتق:

که یوه دویمه درجه دوه مجهوله تابع راکړشوی وي او وغواړو چه دویم ضمني مشتق یي پیدا کړو نو اول ضمني مشتق یي د فارمول پواسطه پیدا کوو. او بیا د مشتق دفارمولو پواسطه دویم ضمني مشتق پیدا کوو.

مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ تابع دویم ضمني مشتق پیدا کړئ

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$\acute{f}_{(x)} = 2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = -2y$$

ketabton.com - The Digital Library


$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

اوس د $\acute{y}_{(x)}$ د رابطې $y''_{(x)}$ پیدا کوو

$$y''_{(x)} = \frac{\acute{x}y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = -\frac{1}{y^3}$$

دویم مثال: د $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ په معادله کې د $(y)$ مشتق نظر $(x)$ ته د $(1,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ او د منحني د مماس معادله پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = 2x + y$$
$$\acute{f}_{(y)} = x + 2y$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \quad \Rightarrow x + 2y \neq 0$$
$$\acute{y} = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 2 \cdot 1} = -\frac{2 + 1}{1 + 2} = -\frac{3}{3} = -1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

د پورته معادلې ضمني مشتق په لاندې ډول هم پیدا کولای شو

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$
$$2x + y + x\acute{y} + 2y\acute{y} = 0 \Rightarrow 2x + y + (x + 2y)\acute{y} = 0$$
$$\acute{y} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3 = 5y^3 + x$ ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$
$$\acute{f}_{(x)} = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$
$$\acute{f}_{(y)} = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0 = 3x^2y^2 - 15y^2$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

ketabton.com - The Digital Library



## متوالي مشتقات:

د مشتق مشتق ته متوالي مشتقات وايي کولای شو چه د يوی تابع دويم ،دريم، څلورم ··· او نور مشتقات ونيسو.ترڅو چه مشتق يي صفر شي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دريم مشتق ونيسئ؟

حل:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

$f'_{(x)} = 3x^2 - 6x + 4$

$f''_{(x)} = 6x - 6$

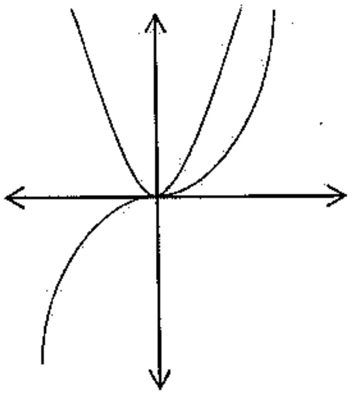
$f'''_{(x)} = 6$

دويم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف اود هغی دلمړی مرتبی مشتق پيدا کړئ؟ او ګراف يي رسم کړئ؟

حل:

$$y' = x^2 \qquad y = \frac{1}{3}x^3$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$$



دويم مثال: که $y = \sin x + \cos x$ وي نود $\left(y^{(9)}\right)^2 + y^2$ قيمت پيدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library


حل:

$y = \sin x + \cos x$
$\acute{y}_{(x)} = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$
$y''_{(x)} = -\sin x - \cos x$
$y'''_{(x)} = -\cos x - (-\sin x) = -\cos x + \sin x = \sin x - \cos x$
$\vdots$
$y'(9)_{(x)} = \cos x - \sin x$
$\left(y^{(9)}\right)^2_{(x)} + y^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$
$= cos^2x - 2\sin x \cos x + sin^2x + sin^2x + 2\sin x \cos x + cos^2x$
$= 2sin^2x + 2cos^2x = 2(sin^2x + cos^2x) = 2 \cdot 1 = 2$

## د مشتق د استعمال ځایونه:

د مشتق د استعمال موارد په لاندې ډول دي:

1- د توابعو دتزاید او تناقص لپاره.

2- د اعظمي نقطو، اصغري نقطو، اعظمي حجم، د لنډې فاصلې، اعظمي مساحت اوداسې نورو شیانو دپیدا کولو لپاره.

3- د لوړې درجې تابعګانو د ګراف د ترسیم لپاره.

4- د مبهمو اشکالو دلیمیت د پیداکولو لپاره.

لنډه دا چه د مشتق استعمال په فزیک، کیمیا، هندسه اونورو علومو کې زیات ګټور دی.

1- دتوابعو د تزاید او تناقص لپاره د مشتق استعمال:

که د $f(x)$ یوه تابع د $[a,b]$ په تړلې انټروال کې متمادي وي او په $(a,b)$ انټروال کې مشتق ولري نو که $\acute{f}(x) > 0$ وي نو تابع په دغه انټروال متزایده ده.او که $\acute{f}(x) < 0$ وي تابع متناقصه ده.

اول مثال: وښیئ چه د $f(x) = x^3 + 3x + 1$ تابع ګراف متزاید دی؟

حل: ځرنګه چه تابع تامه ده نو $domf(x) = IR$ دي مشتق یې په لاندې ډول دي:

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 3$$

ketabton.com - The Digital Library



که په مشتق کې د $(x)$ په عوض هر ډول عدد وضع کړو مثبت کیږي نو $\acute{f}(x) > 0$ دی په نتیجه کې تابع متزایده ده.

دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 5$ تابع په کوم انټروال کې متناقصه ده؟

حل: د $f(x)$ تابع متمادي ده اومشتق لري د تناقص د انټروال د معلومولو لپاره $\acute{f}(x) < 0$ پیدا کوو.

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3 < 0$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی نو تابع په همدی انټروال $(-1,1)$ کې متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅیړئ؟

حل:

$$D_{f(x)} = IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$\acute{f}(x) = 5 > 0$$

تابع متزایده ده.

څلورم مثال: د $y = x^2$ تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: که $\acute{y} < 0$ وي تابع متناقصه ده او که $\acute{y} > 0$ وي تابع متزایده ده.

$$y = x^2$$
$$\acute{y} = 2x$$

$\acute{y} < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$ د تناقص شرط

$\acute{y} > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$ د تزاید شرط

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\acute{y}$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | $+\infty$ ↘ | $4$ ↘ | $1$ ↘ | $0$ | $1$ ↗ | $4$ ↗ | $+\infty$ ↗ |

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library


## د یوې تابع بحراني ټکي

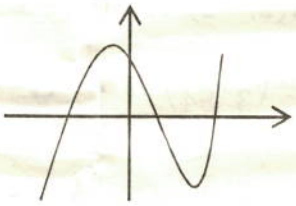
د یوې تابع اعظمي او اصغري ټکو ته بحراني ټکي وايي.

اعظمي نقطه *Maximum point* :

د تابع د ګراف تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي نقطه وايي.

اصغري نقطه *Minimum point* :

د تابع دګراف تر ټولو ټیټې نقطې ته اصغري نقطه وايي.



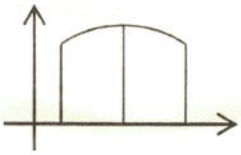
ثابته تابع :

هغه تابع ده چې مشتق يې صفر وي.

$y' > 0 \quad y' < 0$

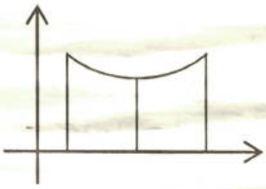
متزايده تابع :

که د $(a,b)$ په فاصله کې $\acute{y} > 0$ وي، تابع متزايده ده.



متناقصه تابع :- که د $(a,b)$ په فاصله کې $\acute{y} < 0$ وي تابع متناقصه ده.

$\acute{y} < 0 \ \acute{y} > 0$



ketabton.com - The Digital Library



## د انعطاف نقطه:

هغه نقطه ده چه په دی نقطه کی د تابع گراف خپل جهت ته تغیرور کوي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ یوه تابع راکړ شوی ده ووایاست چه ددی تابع گراف څو بحراني ټکي لري.

حل: د تابع لمړی مشتق پیدا کوو اود $(x)$ قیمتونه پیدا کوو.

$$f'(x) = 3x^2 - 7x + 2$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(3x-1)$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \therefore \quad A(2,-2)$$ اصغري نقطه ده
$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad B\left(\frac{1}{3},\frac{17}{54}\right)$$ اعظمي نقطه ده

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | | $\frac{17}{54}$ | | $-2$ | | $-2$ | | $+\infty$ |

دویم مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع بحراني نقطه یا نسبتي نقطه پیدا کړئ؟

حل: د تابع مشتق پیدا اوعلامی یي مطالعه کوو.

$$y = \frac{u}{v}$$
$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$
$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-2x) - (2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2} = \frac{(x^2-2x) - 2(x^2-1)}{(x^2-2x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2x^2 + 2}{(x^2-2x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2-2x)^2}$$

په اعظمي او اصغري نقطو کی د تابع مشتق صفر وي.

ketabton.com - The Digital Library


$-x^2-2x+2=0 \Leftarrow f(x)=0$

$\Delta = b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 2=4+8=12$

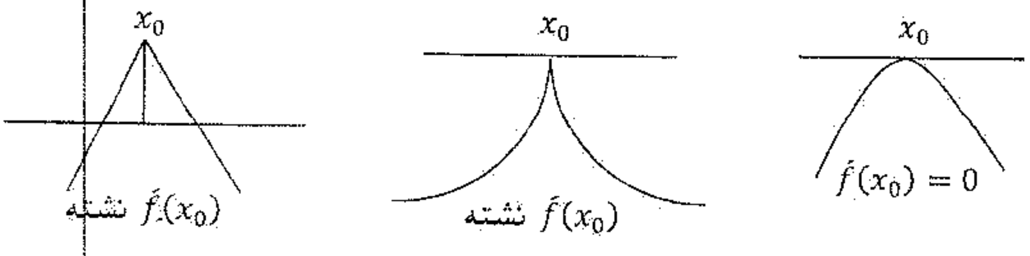
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{2(-1)}=\frac{2+\sqrt{3.4}}{-2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{-2}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{2(-1)}=\frac{2-\sqrt{3.4}}{-2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{-2}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{-2}=0.73$$

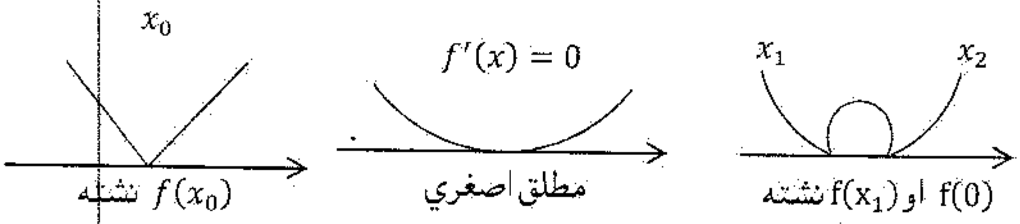
| $x$ | | $-3$ | | $-2.73$ | | $-1$ | | $0.73$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $\frac{2}{15}$ | ↘ | min | ↗ | $0$ | ↗ | max | ↘ | $-2$ | ↘ |

د کسر اشاره دجذرو منځ کې مثبت او په خارج منفي ده.

مطلق اعظمي $Maximum$: د $f(x)$ په تابع کې که د هر $(x)$ لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي نو $(x_0, f(x_0))$ ټکي ته مطلق اعظمي وايي.




مطلق اصغري $Minimum$: که د $f(x)$ د تابع دتعریف د ناحیې د هر $(x)$ لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي نو $(x_0, f(x_0))$ نقطې ته مطلق اصغري وايي.



ketabton.com - The Digital Library



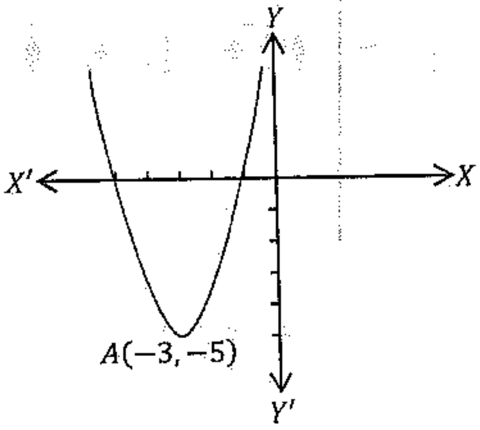
لمړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ تابع مطلق اصغري پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x) = x + 3 \quad \because f'(x) = 0 \quad \therefore \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = \frac{1}{2}(-3)^2 + 3(-3) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} = \frac{9 - 18 - 1}{2} = -5$$

$A(-3, -5)$




دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 2$ د تابع اعظمي او اصغري نقطې پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع مشتق صفر وي.

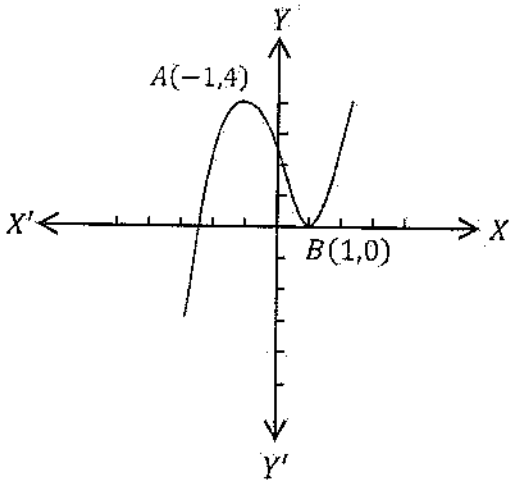
$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1$$

اصغري ده $x_1 = 1 \quad \Rightarrow A(1,0)$

اعظمي ده $x_2 = -1 \quad \Rightarrow B(-1,4)$

ketabton.com - The Digital Library


د تابع د ګراف د ترسیم طریقه:

1- د تابع اتصال مطالعه کوو.

2- د محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطی پیدا کوو.

3- د تزاید او تناقص د انټروال د معلومولو لپاره د مشتق اشاری مطالعه کوو.

4- د ګراف مجانبونه معلوموو.

5- د دقیق ترسیم لپاره $(x)$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو.

6- په جدول کی د تابع د ګراف وضعیت مطالعه کوو.

7- پیدا شوی نقطی د وضعیه کمیتونو په مستوي کی پیدا کوو او وصلوو یې.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\bar{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$2 + x - x^2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 \quad \Rightarrow \Delta = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \dfrac{-1 \pm 3}{-2}$

$x_1 = \dfrac{-1+3}{-2} = \dfrac{2}{-2} = -1 \;\;\&\;\; x_2 = \dfrac{-1-3}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

د $(X\bar{X})$ د محورسره د تابع دګراف د تقاطع نقطی $A(-1,0)$ او $B(2,0)$ دي.

ketabton.com - The Digital Library



2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو. نو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 2 + x - x^2 = 2 + 0 + 0^2 = 2$$

د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه $C(0,2)$ ده.

3- د تابع د ګراف اعظمي یا اصغري نقطې د پیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$\acute{y} = 1 - 2x$$

$$\acute{y} = 0 \quad \therefore \quad 1 - 2x = 0 \;\Rightarrow -2x = -1 \;\;\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

د $(x)$ دغه قیمت په تابع کې وضع کوو د $(y)$ قیمت لاس ته راوړو.

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8 + 2 - 1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه یا اعظمي ده یا اصغري ده.د تابع دویم مشتق پیدا کوو که $y'' > 0$ وي اصغري نقطه ده او که $y'' < 0$ ؤ نو اعظمي نقطه ده.

$y'' = -2$ څرنګه چه همېشه منفي دي نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه اعظمي نقطه ده.

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

د انعطاف د نقطې پیدا کول:

د تابع دویم مشتق نیسو او قیمت یې پیدا کوو بیا یې په معادله کې وضع کوو د انعطاف د نقطې وضعیه کمیات لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع د انعطاف نقطه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{y} = 3x^2 + 18x - 6$$
$$y'' = 6x + 18$$
$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 18 = 0 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow \frac{6x}{6} = \frac{-18}{6} \Rightarrow x = -3$$
$$f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)^2 - 6(-3) + 1 = -27 + 81 + 18 + 1 = 73$$

$A(-3,73)$ انعطاف نقطه ده.

ketabton.com - The Digital Library

د دويمه درجه تابع ګراف:

د دويمه درجه تابع عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی.

دومېن يې د حقيقي اعدادو سيټ دی. $D_f = (-\infty, +\infty)$ چه په دغه ساحه کی تابع متمادي ده. د تناظر محور يې د اول مشتق پواسطه پيدا کيږي.

$$f'(x) = 2ax + b$$
$$f'(x) = 0$$
$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{2a}$$

د تناظر محوردی.

د راس د نقطې د پيدا کولو لپاره د تناظر په محور کی د $x$ قيمت په تابع کی وضع کوو د راس د نقطېوضعيه کميتونه لاس ته راځي.

$$f(x) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د راس نقطه يې $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ده.

که $a > 0$ وّد تابع ګراف مقعر دی يعنی ګراف اصغري نقطه لري. که $a < 0$ وّد تابع ګراف محدب دي يعنی ګراف اعظمي نقطه لري.

لمړی مثال: د $f(x) = x^2 - 4x + 3$ د تابع تحولات مطالعه کړئ او ګراف يي رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

2- د $X\acute{X}$ د محور سره د تقاطع نقطه پيدا کوو:

$$y = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

ketabton.com - The Digital Library

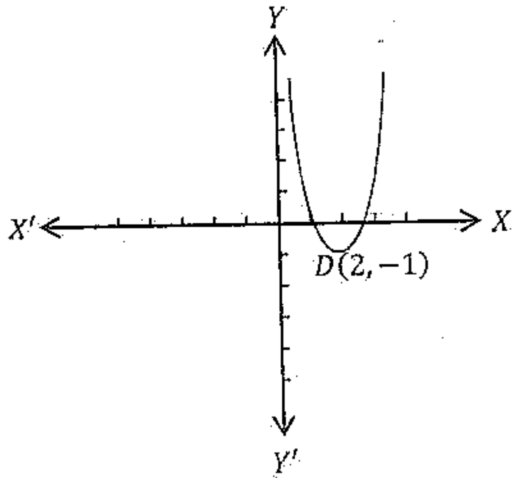

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$
$$A(1,0)\ ,\qquad B(3,0)$$

3- د $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع د تقاطع نقطه پیدا کوو.

$x=0$
$y=0-4\cdot 0+3$
$y=3$
$C(0,3)$

4- د بحراني نقطې دپیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو او د $(x)$ قیمت پیدا کوودا قیمت په تابع کې وضع کوو د $(y)$ قیمت لاس ته راځي د $(x)$ او $(y)$ یوه جوړه قیمتونه بحراني نقطه تعینوي بیا یې دویم مشتق پیدا کوو که $y''>0$ ؤ بحراني نقطه اصغري ده او که $y''<0$ ؤ نو بحراني نقطه اعظمي ده.

$f\acute{}(x)=2x-4 \Rightarrow x=2$
$f(2)=2^2-4\cdot 2+3=4-8+3=-1 \Rightarrow D(2,-1)$




دویم مثال: $f(x)=-x^2+2x+2$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف یې رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f=(-\infty,+\infty)$

ketabton.com - The Digital Library


2- د XX́ سره تقاطع:

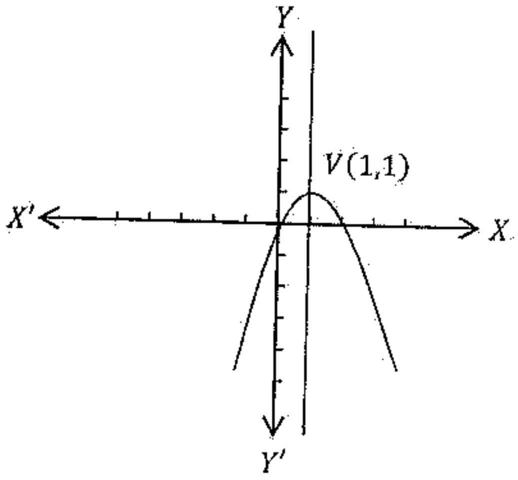
$f(x) = 0$
$-x^2 + 2x = 0$
$x(-x + 2) = 0$
$x_1 = 0$
$-x + 2 = 0$
$-x = -2 \Rightarrow x = 2$
$A(0,0)$ & $B(2,0)$

3- د YY' سره تقاطع:

$x = 0$
$f(x) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$
$C(0,0)$

4- بحراني نقطه يې پيدا کوو. لومشتق يې نيسو.

$f'(x) = -2x + 2$
$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$
$f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$
$V(1,1)$



ketabton.com - The Digital Library



## هوموګرا فیک تابع

هغه تابع ده چه د دوه بینومو د نسبت څخه جوړه شوی وي.عمومي شکل یي دادی

$$f(x) = \frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}} = \frac{ax+b}{cx+d}$$

مجانب:-$Asymptote$ : که د یوه مستقیم او یوه منحني تر منځ فاصله په لایتناهي کی صفر شي دا مستقیم ددی منحني مجانب دي.

مجانب د منحني لپاره لاربنود دي.

مجانب په دری قسمه دی.

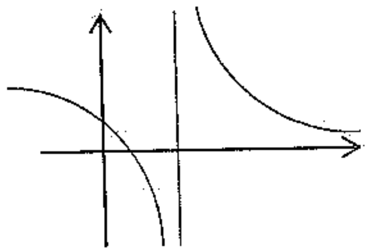
1- عمودي مجانب $(Vertical\ Asymptote)$

2- افقي مجانب $(Horizontal\ asymptote)$

3- مایل مجانب(Slant Asymptote)

1- عمودي مجانب :

که په یوه ثابت عدد کی د تابع لیمیټ $(\infty)$ شي هغه خط چه د دغه ثابت عدد په فاصله باندی د $Y\acute{Y}$ د محور سره موازي رسمیږي د تابع د ګراف عمودي مجانب دی. یعني که $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ وي نو $x = a$ عمودي مجانب دی.



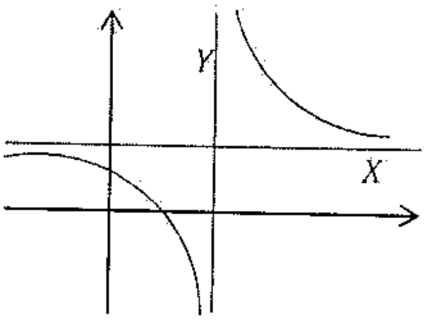
ketabton.com - The Digital Library

2- افقي مجانب:

که په لایتناهي کې دیوی تابع لیمیټ یو ثابت عدد ؤ نو هغه خط چه ددې ثابت عدد په ترتیب د
$YY'$ د محور سره موازي رسمیږي د راکړشوی تابع افقي مجانب دی. یعنی که:

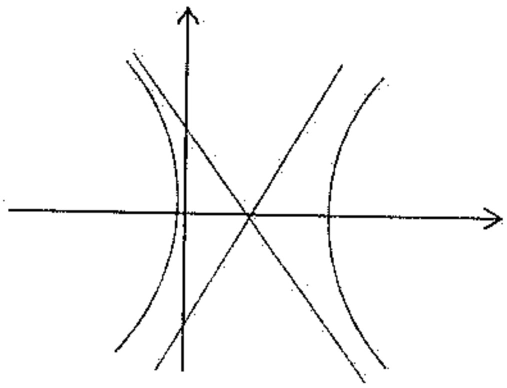
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

نو $y = b$ د تابع د ګراف افقي مجانب دی.




3- مایل مجانب $Slant\ Asymptote$:

په کسري تابعګانو کې که دصورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه لوړه وه نو
دغه ډول تابعګانی مایل مجانب لري دمایل مجانب دترسیم لپاره صورت په مخرج ویشو
خارج قسمت د مایل مجانب معادله ده.



لمړی مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library



حل:

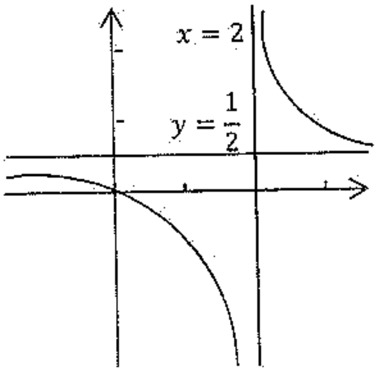
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{2x-4} = \frac{2+1}{2\cdot 2-4} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 2$ عمودي مجانب دی.

مايل مجانب يې پيدا کوؤ.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{x}} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{2-\frac{4}{\infty}} = \frac{1+0}{2-0}\frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}$ افقي مجانب دی.




دويم مثال: د $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ؟

حل: مايل مجانب:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{2} \Rightarrow y = x+2$$

عمودي مجانب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-1}{x} = \infty$$

نو $x = 0$ عمودي مجانب دی.

افقي مجانب نلري ځکه د هری تابع ګراف چه مايل مجانب و لري افقي مجانب نلري.

دريم مثال: د $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه پيدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library


حل:

عمودي مجانب

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$

بالاخره $x=-1$ او $x=2$ عمودي مجانبونه دي.

مایل مجانب نلري.

## د مجانب د ټاکلو عمومي لار:

1- که د $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ په هوموګرافیک تابع کی $(m)$ دصورت درجه او $(n)$ دمخرج درجه وي نو

الف: که $m<n$ وي نو د $(x)$ محورافقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي نو $y=b$ افقي مجانب دی $(b)$ د صورت اومخرج دمساوي درجووالا حدودضریبونو نسبت دې.

ج: که $m>n$ وي افقي مجانب نلري د مایل مجانب احتمال شته.

د: که د صورت درجه د مخرج ددرجی څخه د واحد په اندازه ډېره وي مایل مجانب لري او افقي مجانب نلري.

مثال: $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ د تابع د تزاید او تناقص په باب خپل نظر ولیکئ؟

حل:

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-1(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}=\frac{5}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

تابع متزایده ده.

ketabton.com - The Digital Library


انعطاف نقطه یې داسې پیدا کیږي.

$f'(x) = 0$

$3ax^2 + 2bx + c = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(x) = 0$

$$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6ax = -2b \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

$$y = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{9a^2}\right) - \frac{b^2}{3a} + c$$

$$y = \frac{ab^2}{9a^2} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2}{9a} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2 - 3b^2 + 9ac}{9a} = \frac{9ac - 2b^2}{9a}$$

$$M\left(-\frac{b}{3a}, \frac{9ac - 2b^2}{9a}\right)$$

1- مثال: د $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ؟

حل:

$f(x) = (x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$

$= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$

$f(0) = 0^3 + 3\cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow y_1 = -4$

$A(0,-4)$ اصغري نقطه ده.

$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$

$y_2 = 0$

$B(-2,0)$ اعظمي نقطه ده.

انعطاف نقطه پیدا کوو.

ketabton.com - The Digital Library



$f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0$

$6x + 6 = 0$

$x = -1$

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$

$C(-1, -2)$ انعطاف نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع: $y = 0$ فرضوو.

$y = 0$

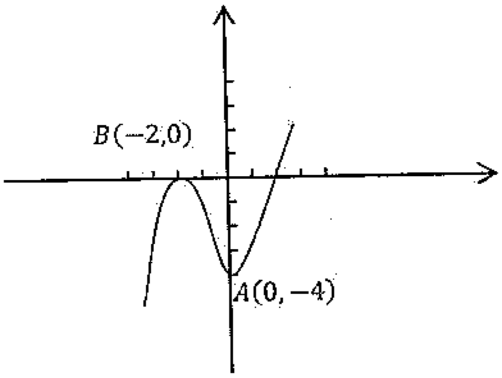
$(x - 1)(x + 2)^2 = 0$

$$\left.\begin{array}{c} x - 1 = 0 \\ x = 1 \\ C(1,0) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} (x + 2)^2 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x = -2 \\ D(-2,0) \end{array}\right\}$$

د $Y\acute{Y}$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 0^3 + 3 \cdot x^2 - 4 = -4$$

$$E(0, -4)$$




دویم مثال: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف يي رسم کړئ؟

حل:

$f(x) = -x^3 + 3x^2$

$\acute{f}(x) = -3x^2 + 6x$

ketabton.com - The Digital Library


$\acute{f}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 + 6x = 0 \quad \Rightarrow -3x(x-2)$

$-3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \Rightarrow x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$A(2,4)$ اعظمي نقطه ده او $O(0,0)$ اصغري نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع پيدا کوو $y = 0$ فرضوو.

$f(x) = 0$

$-x^3 + 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow -x^2(x-3) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$O(0,0) \quad \Rightarrow B(3,0)$

د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه $(x = 0)$ فرضوو.

$f(x) = -x^3 + 3x^2 = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$

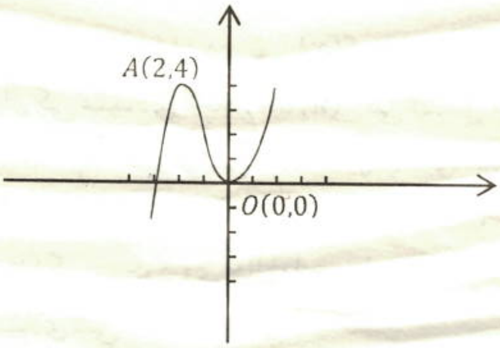
انعطاف نقطه پيدا کوو دويم جذر يي پيدا کوو.

$f''(x) = -6x + 6$

$x = 1$

$f(1) = 2$

$C(1,2)$

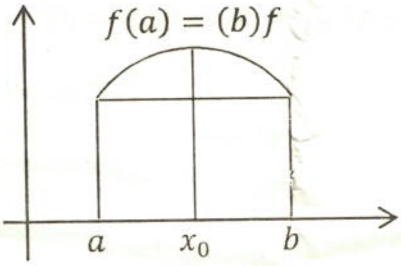



د رول قضيه: *Theorem of Rolle*:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ انټروال کې متمادي وي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي نود $a < x < b$ په انټروال کې $(x_0, f(x_0))$ يو تکی شته چه $\acute{f}(x) = 0$ وي

ketabton.com - The Digital Library






ثبوت: هره تابع چه متمادي وي او د مشتق وړ وي.نودغه تابع بحراني نقطه لري.

1- که تابع ثابته وي نو $\acute{f}(x) = 0$ دی.

2- که$f(x)$ تابع ثابته نه وي او $x_2, x_1 \in (a, b)$ او $f(x_1) > 0$ وي نوتابع په $x_0 \in [a, b]$ نقطه کې $Maximum$ لري چه $f(x_0) \geq f(x_1) \geq 0$ وي او $f(x_2) < 0$ وي نو تابع یوه اصغري نقطه لري په اعظمي او اصغري نقطو کې $\acute{f}(x_0) = 0$ وي.

لمړی مثال: د $f(x) = \cos x$ تابع راکړشوی ده د $[a, b] = [\pi, 5\pi]$ په انټروال کی د $Rolle$ قضیه پری تطبیق کړئ؟

حل: پوهیږو چه $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ دی نو $f(x)$ د هر $(x)$ لپاره د مشتق وړ ده نو دا تابع د $[\pi, 5\pi]$ په انټروال کی متمادي اوپه $(\pi, 5\pi)$ کی مشتق منونکی ده نود $Rolle$ د قضیي سره سم د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کی اقلاً د $(x_0)$ یوه نقطه باید موجود وي چه $(\cos x)' = -\sin x$ شي څرنګه چه $-\sin x = 0$ دی نو د $f(x) = \cos x$ د معادلی اقلاً یو حل باید په $(\pi, 5\pi)$ کی موجود وي حال دا چه دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ انټروال کی دری ځله دا قیمتونه اخیستلای شي.

دویم مثال: د $[a, b] = [-1,1]$ په انټروال کی د $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ په تابع باندی د $Rolle$ قضیه تطبیق کړئ؟

حل: دانټروال د پیل او انجام په نقطو کی تابع مشتق پذیره نده مګرد رول قضیه پری دتطبیق وړ ده ځکه چه $f(-1) = f(1) = 0$ او$f(0)$ تابع په $[-1,1]$ متمادي ده او د $[-1,1]$ په انټروال کی د $(x_0)$ یو عدد شته چه $\acute{f}(x_0) = 0$ شي اوهغه $x_0 = 0$ دی.

ketabton.com - The Digital Library

$\acute{y}(x) = \frac{\acute{u}(x)}{2\sqrt{u}}$ څخه استفاده کوو.

$$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \acute{f}(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

د متوسط قیمت قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د $(a,b)$ په انټروال کې دمشتق وړ وي نو د $(a,b)$ په انټروال کې د $(c)$ یو عدد شته چه لاندې رابطه تحقیق کړي.

$\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ یعنی $f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$ دی.

ثبوت :- $g(x)$ په $f(x) - \acute{f}(x) \cdot x$ ښیو:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b-a}$$

$$g(a) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \ldots\ldots\ldots I$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b-a}$$

$$g(b) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \ldots\ldots\ldots II$$

د (I) او (II) رابطې د مقایسې څخه څرګندیږي چه $g(a) = g(b)$ دی نو درول دقضیې سره سم د $[a,b]$ په انټروال کې د $(c)$ یوداسې عدد شته چه $\acute{g}(c) = 0$ دی نو لیکو چه

$$\acute{g}(x) = \acute{f}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \acute{g}(c) = \acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\acute{g}(c) = 0$$

$$\acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow \acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ په تابع کې دمتوسط قیمت قضیه د $[a,b] = [1,3]$ په انټروال کې وڅیړئ؟

ketabton.com - The Digital Library


حل: د $f(x)$ تابع د $[1,3]$ په انټروال کې متمادي ده او د $(1,3)$ په انټروال کې د مشتق وړ ده نو د متوسط قیمت د قضیي سره سم د $(1,3)$ په انټروال کې یو $(x_0)$ شته چه

$$f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18$$

د $(c)$ دپیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$f'(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow 6x^2 = 18 + 8 = 26 \Rightarrow x^2 = \frac{26}{6}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{26}{6}} = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}$$

$x = +\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1،3)$ په انټروال کې شامل دی نو $x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ده مګر $x = -\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1،3)$ په انټروال کې شامل نه دی نو د سوال حل نه بلل کیږي.

## د لوهپیتال قاعده:

که د کسري تابعګانو لیمیټ د $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$ مبهم شکل غوره کړي. نو د لوپیتهال په طریقه کولای شو چه لیمیټ یې پیدا کړو.

دیوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کې د تابع د مشتق دلیمیټ سره مساوي دی په همغه نقطه کې.که تر اول مشتق وروسته بیا هم ابهام موجود ؤ دویم مشتق یې نیسو په همدی ترتیب عملیه تر هغه وخته اجراء کووتر څو چه ابهام رفع شي.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots\cdots$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \frac{2\cdot 2^2 + 2 - 10}{2^2 - 4} = \frac{8 + 2 - 10}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2 - 4x + 5x - 10}{x^2 - 2^2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x(x-2) + 5(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2} = \frac{2\cdot 2 + 5}{2+2} = \frac{9}{4}$$

ketabton.com - The Digital Library

لمړی مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x+\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=\frac{3}{-1}=-3$$

دويم مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=4\cdot 3^3=4\cdot 27=108$$

دريم مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

## دبحراني ټکو تطبيق:

1- داسې دوه عددونه پيدا کړئ چه د جمع حاصل يې (20) او د ضرب حاصل يې اعظمي وي؟

حل:

اول عدد $= x$

دويم عدد $= 20 - x$

د ضرب حاصل $= f(x) = x(20-x) = 20x - x^2$

$$\acute{f}(x) = 20 - 2x$$
$$\acute{f}(x) = 0$$
$$20 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -20 \Rightarrow x = 10$$
$$f(10) = 20\cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$$
$$f(0) = 20\cdot 0 - 0^2 = 0$$
$$f(20) = 20\cdot 20 - 20^2 = 400 - 400 = 0$$

ketabton.com - The Digital Library



اعظمي نقطه $[10،100]$ ده او مطلوب عددونه $x_1 = 10$ او $x_2 = 10$ دي چه د ضرب حاصل یې (100) دي

-2 د يوه متحرک معادله $x = (t-2)(t-3)$ ده متوسط سرعت يې د $t_1 = 3$ او $t_2 = 4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د فارمول څخه استفاده کوو.

$$\text{منځنی سرعت} = \frac{x_{(t_2)} - x_{(t_1)}}{t_2 - t_1} = \frac{x_{(4)} - x_{(3)}}{4-3} = \frac{2-0}{4-3} = 2$$

-3 د کرې دحجم او سطحې تر منځ نسبت پيدا کړئ؟

حل:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(r)} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{د کرې مساحت} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2$$

$$\frac{v_{sphere}}{A_{Sphere}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

-4 د سانتي ګيرېډ او فارنهايټ تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ رابطه موجود ده د سانتي ګيرېډ او فارنهايټ تر منځ منځني نسبت پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د تعريف $V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ سره سم ليکو چه:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F) - CF}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32) - \frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

-5 د يوې مستطيلي ځمکې محيط (200) دی اعظمي مساحت يې پيدا کړئ؟

حل:

$\text{د مستطيل طول} = x$

$\text{د مستطيل عرض} = y$

$\text{د مستطيل مساحت} = S$

ketabton.com - The Digital Library

$$\text{محيط} = 2x + 2y = 200$$

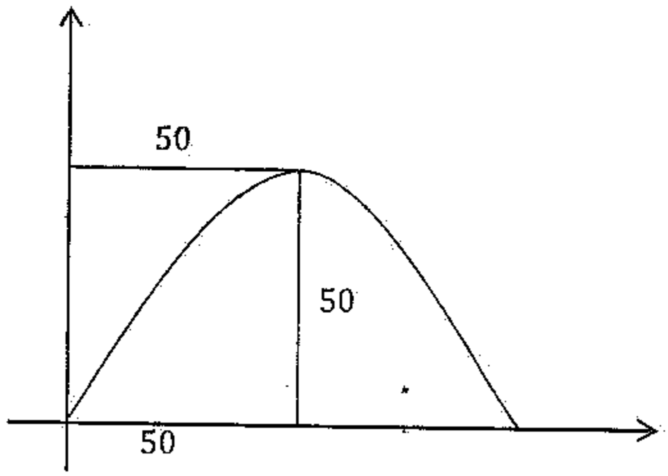
$$\text{محيط} = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$$

$$S = x \cdot y \Rightarrow x(100 - x) = 100x - x^2 \quad ,D_f = IR$$

د $[0.100]$ په انټروال کې دتابع اعظمي مساحت پیدا کوو.

$$\acute{S} = 100 - 2x$$

$$\acute{S} = 0 \Rightarrow 100 - 2x \Rightarrow -2x = 100 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$




6- د $(A)$ ټکی د $y = \frac{2}{x}$ دمنحني دپاسه حرکت کوي ووایاست چه څه وخت به د $(A)$ او مبداء ترمنځ فاصله اصغري شي؟

حل:

$$A\left(x, \frac{2}{x}\right)$$

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2{}_{(A)} + y^2{}_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} \Rightarrow \overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2$$

$$\acute{d}_{(x)} = (x^2)' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$$

$$\acute{d}_{(x)} = 0 \Rightarrow \frac{2x^4 - 8}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^4 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^4 = 8$$

ketabton.com - The Digital Library



$$= \frac{2x^4}{2} = \frac{8}{2} \quad \Rightarrow x^4 = 4 \quad \Rightarrow \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad \& \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$d_{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

يو مربع القاعده مكعب مستطيل لروچه د درى واړه بعدونو مجموعه يي (24)ده اعظمي حجم يي پيدا كړئ؟

حل: دقاعدى اوږدوالى په $(x)$او ارتفاع په $(y)$ ښيو.

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

$$y \geq 0 \quad \& \quad 0 \leq x \leq 12$$

$$V = x^2 \cdot y = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$\acute{V}(x) = 48x - 6x^2 \quad \because \acute{V}(x) = 0 \quad \therefore \quad 48x - 6x^2 = 0$$

$$x(48 - 6x) = 0 \quad , \quad x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 8$$

$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0$$

$$V(8) = 24 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^3 = 1536 - 1024 = 512$$

$$V(12) = 24 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^3 = 3456 - 3456 = 0$$

د مكعب مستطيل اعظمي حجم $(512cm^3)$ او هره ضلعه يي $(8cm)$ ده.

ketabton.com - The Digital Library

# اولسم فصل

## انتیګرال *Integral*

انتیګرال په لغت کی جامع ، مکمل او بشپړوونکي ته وائي.

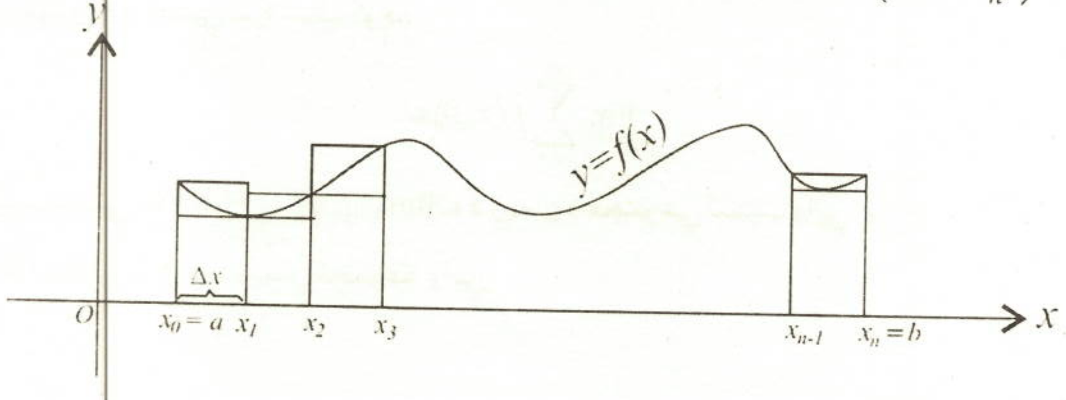
اوپه اصطلاح کی د مشتق دعملیي معکوسی عملیي ته انتیګرال وائي.یعنی د اولني تابع د پیدا کولو طریقی ته انتیګرال وایي.

ارشیمیدس چه په (287 – 212)ق م کی یي ژوند کاوه د سطحو ، ناحیو او دجامداتو دحجمودمحاسبی لپاره فارمولونه ترتیب کړل دنوموړي انتیګرال نیونه استثنائي او فوق العاده وه.ریمان (1866 – 1826) اولایبنز (1941 – 1875) معین انتیګرال کشف کړ.

دانتیګرال علامه لایبنز( ∫ ) لیکلی ده. چه د ریمان دمجموعی (sum)د لمړي توري غزېدلی شکل دی.غیر معین انتیګرال لیووبل (1882 – 1809)کشف کړی دي. ګانوس (1855 – 1777) دانتیګرال اولین جدول ترتیب کړي دي.د کمپیوټر د منځ ته راتلو سره سم د انتیګرال په باب زیات پرمختګ وشو.

## د ریمان مجموعه *Riemann's sum*:

فرضاً $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کی متمادي او تعریف شوی تابع ده.دهغه سطحی د مساحت دپیدا کولو لپاره چه د $X\acute{X}$دمحور او $y = f(x)$ تابع دګراف تر منځ واقع دي که منظم هندسي شکل یي لرلو نو هندسي فارمولو پواسطه یي مساحت پیدا کیږي.او هندسي شکل یي نه لرلو نو د $[a , b]$ ترلی انټروال په مستطیلو ویشو د هر مستطیل عرض د $\left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$ رابطی څخه لاس ته راځي.



ketabton.com - The Digital Library



د هرمستطیل دهر انټروال اوږدوالی د $i = 1,2,3,4,\cdots,n$ لپاره په لاندی ډول دی.

$$x_0 = a\,,\quad x_1 = a + \Delta x\quad,\quad x_2 = a + 2\Delta x,\quad x_i = a + i\Delta x,\cdots,x_n = b$$

$$[x_0, x_1]\ ,[x_1, x_2]\ ,[x_2, x_3],\cdots,[x_{i-1}, x_i],\cdots,[x_{n-1}, x_n]$$

په شکل کی د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1},)\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ ښیو نو لیکو چه:

$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونه مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که محصور شوي مساحتونه په $A$ وښیونو:

$$\sum_{i=1}^{n} f\,(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x$$

د رابطی د اطراف لیمیټ نیسو.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{N\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\,\Delta x$$

د ساندویچ د قضیي سره سم لیکوچه:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

لیمیټ یعني $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لیمیټ وایي.

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ ته د ریمان مجموعه وایي.

ketabton.com - The Digital Library

لومړی مثال: د $[0.2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وویشئ د $y = x^2 + 1$ د منحني او ($xx'$) د محور ترمنځ د سطحې مساحت پیدا کړئ؟

حل: د $[0،2]$ انټروال په څلورو برابرو برخو ویشو.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

د مستطیل د هر انټروال اوږدوالی عبارت دی له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \qquad x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = a + 4\Delta x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$[x_0, x_1] \ , \qquad [x_1, x_2] \ , \qquad [x_2, x_3] \ , \qquad [x_3, x_4]$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \ , \qquad \left[\frac{1}{2}, 1\right] \ , \qquad \left[1, \frac{3}{2}\right] \ , \qquad \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

د ګراف د ترسیم لپاره د $(x)$ قیمتونه په تابع کې وضع کوو او د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو.

$$f(x) = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1 \qquad , \ A(0,1)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4} = 1.25 \quad , \qquad B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = (0.5, 1.25)$$

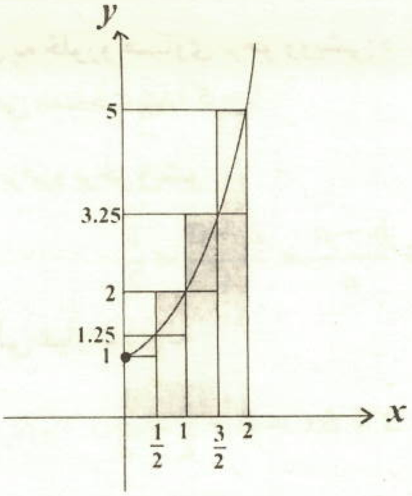
$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \qquad , \quad C(1,2)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{9+4}{4} = \frac{13}{4} = 3.25 \qquad D\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right) = (1.5, 3.25)$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \qquad E(2,5)$$

ketabton.com - The Digital Library






$$\text{د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 3.75$$
$$\text{د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2}$$
$$= 5.75$$
$$3.75 < A < 5.75$$

دويم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ريمان د مجموعی ليميټ د $[1,10]$ په انټروال کی پيدا کړئ؟

حل: پوهيږو چه:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$x_i = a + \Delta x_i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] \quad , \quad i = 0,1,2,3,4,5 \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\,\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\sum_{i=1}^{n}1 + \Delta x\sum_{i=1}^{n}x_i\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+x_i)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{9}{n}i\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\cdot n + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9n^2+9n}{2n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{11n^2+9n}{2n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{99n^2+81n}{2n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}\right] = 9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n} = 58.5$$

دويم مثال: د $[0,3]$ انټروال په شپږو مساوي برخو وويشئ او $y = 3x$ د مستقيم خط او د $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ؟

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$x_0 = 0 \quad , x_1 = a + 2\Delta x = 0 + 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \quad , x_2 = 3\Delta x = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{3}{2}$

$x_3 = 0 + 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x_3 = 2 \quad , x_4 = 0 + 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{5}{2}$

$x_5 = 0 + 6\cdot\frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x_5 = 3 \quad , x_6 = 0 + 7\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x_6 = \frac{7}{2}$

$[x_0, x_1] \quad , [x_1, x_2] \quad , [x_2, x_3] \quad , [x_3, x_4] \quad , [x_4, x_5] \quad , [x_5, x_6]$

$[0,1] \quad , \quad \left[1, \frac{3}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad , \quad \left[2, \frac{5}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{5}{2}, 3\right] \quad , \left[3, \frac{7}{2}\right]$

ketabton.com - The Digital Library


$f(0) = 0$ ,    $A(0,0)$,    $f(1) = 3(1) = 3$    $B(1,3)$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$    $, f(2) = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow D(2,6)$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow E\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$ $, f(3) = 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow F(3,9)$

## د انتیګرال مفهوم *Concept of Integral*:

انتیګرال دهغه تابع پیدا کول دي چه مشتق یې موجود وي یا د ریمان د مجموعی لیمیټ ته انتیګرال وایي. د انتیګرال علامه دا ( $\int$ )ده چه د ریمان دمجموعی *Sum* د لمړي توري غزېدلی شکل دی. لکه:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)\, dx$$

چه دلته $f(x)$ داتیګرال تابع ده او $dx$ نظر $(x)$ ته د $f(x)$ دتابع د انتیګرال متحول دي.

## د انتیګرال اقسام:

انتیګرال په دوه قسمه دی.

1- غیرمعین انتیګرال

2- معین انتیګرال

### 1- غیرمعین انتیګرال *Indefinite Integral*:

که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ د تابع یوه لمړنی تابع وي نود $F(x) + c$ دتابعګانو سیټ د $f(x)$ دتابع غیرمعین انتیګرال دی. اوداسی لیکل کیږي.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

لمړی مثال: $\int xdx$ پیدا کړئ؟

حل:

$$\int xdx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

ketabton.com - The Digital Library


دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx$ حساب کړئ؟

حل:

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx = \int x^{-\frac{3}{7}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + c = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \sqrt[8]{x^4} \cdot xdx = \int \sqrt[8]{x^6}dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{\frac{2}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{6}+1}}{\frac{2}{6}+1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}} \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} \cdot \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c = \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^4 \cdot x^4} + c$$

$$= \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^8} + c$$

## د غیر معین انتیګرال خواص:

لکه څرنګه چه د تابعګانو مشتق د خاصو قوانینو پواسطه نیول کېدلو په همدغه ډول غیر معین انتیګرال هم ځانګړي خواص لري چه بی د ثبوته منل شوي دي.

1- که $(k)$ یو ثابت عدد وي نو غیر معین انتیګرال یي داسی پیدا کیږي.

$$\int kdx = k\int dx = kx + c$$

مثال: د $\int 5dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + c$$

ketabton.com - The Digital Library



2- که چېرې $n \neq -1$ وي نو:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال: د $\int x^4 dx$ انتيګرال پيدا کړئ؟

حل:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$

3- که $a$ يو ثابت عدد او $f(x)$ يوه تابع وي نو:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

مثال: د $\int 2x^2 dx$ انتيګرال محاسبه کړئ؟

حل:

$$\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + c = \frac{2}{3}x^3 + c$$

4- که $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي د تابعګانو د مجموعې او تفاضل انتيګرال د تابعګانو د انتيګرالو د مجموعې او تفاضل سره مساوي دی.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثال:

$$\int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + c$$

مثال:

$$\int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + c$$

5- که چېرې د تابعګانو ترادف تر انتيګرال لاندې وي نو انتيګرال يې د ټولو حدونو د انتيګرالونو مجموعه ده.

ketabton.com - The Digital Library

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \cdots + \int f_n(x)\, dx$$

مثال:

$$\int (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 + \int 9xdx + \int dx$$
$$\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + c$$

6- د دوه تابعګانو دحاصل ضرب انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د حاصل ضرب سره مساوي نه دي

$$\int [f(x) \cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چیری $f(x) = x + 1$ او $g(x) = x - 2$ وي

الف : لمړی یې ضربوو بیایې انتیګرال نیسو.

$$\int [f(x) \cdot g(x)]dx = \int [(x+1)(x-2)]dx$$
$$= \int (x^2 - x - 2)dx = \int x^2 dx - \int xdx - 2\int dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

ب: د هری تابع انتیګرال پیدا او بیا یې ضربوو.

$$\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx = \int (x+1)dx \cdot \int (x-2)dx$$
$$= \left[\int xdx + \int dx\right]\left[\int xdx - 2\int dx\right]$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + c = \left(\frac{x^2 + 2x}{2}\right)\left(\frac{x^2 - 4x}{2}\right) + c$$
$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c \neq \left(\frac{x^2 + 2x}{2}\right)\left(\frac{x^2 - 4x}{2}\right) + c$$

7- د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

ketabton.com - The Digital Library



مثال: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ او $g(x) = x + 1$ تابعګانې راکړشوي دي.

ثبوتوو چې د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

$$\int (x^2 + 2x + 1)dx = \int x^2dx + \int 2xdx + \int dx$$

$$= \int x^2dx + 2\int xdx + \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$\int (1 + x)dx = \int dx + \int xdx = x + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^2 + x}{x + \frac{x^2}{2}}$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x+1} = \int (x+1) = \int xdx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} \neq \int \frac{(x+1)^2}{x+1}$$

8- د $\int (ax + b)^2 m + dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + c$ پواسطه د تابعګانو د انتیګرال پیدا کول.

مثال: د $\int (2x - 1)^5 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int (2x - 1)^5 dx = \frac{(2x-1)^{5+1}}{2(5+1)} + c = \frac{(2x-1)^6}{12} + c$$

مثال: $\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}} = 2\int (1-2x)^{-\frac{1}{5}}dx = 2 \cdot \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{5}+1}}{-2\left(-\frac{1}{5}+1\right)} + c = -\frac{(1-2x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$$

9- د $\int e^x dx = e^x + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول:

مثال: $\int 4e^x dx = 4e^x + c$

د $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول:

ketabton.com - The Digital Library

مثال:

$$\int 7^{4x-3}dx = ?$$

$$\int 7^{4x-3}dx = \int \frac{(7^4)^x}{7^3}dx = \frac{(7^4)^x}{7^3 \cdot \ln 7^4} + c = \frac{7^{4x-3}}{\ln 7^4} + c$$

## معین انتیګرال $Definite\ Integral$

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د $f(x)$ د تابع ریمان د مجموعې لیمیټ ته کله چه $n \to \infty$ او د فرعي انټروالونو اوږدوالی $\Delta x \to 0$ ته وکړي نو $x = a$ څخه تر $x = b$ پورې انټیګرال ته معین انتیګرال وايي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$(a)$ ته د انتیګرال لاندیني سرحد او $(b)$ ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2dx$ معین انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int_1^3 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

دویم مثال : د $y = 3$ مستقیم او د $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ د مضلع مساحت د $[-1,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

$\int_{-1}^{3} 3dx$ د مستطیل مساحت رابنیي

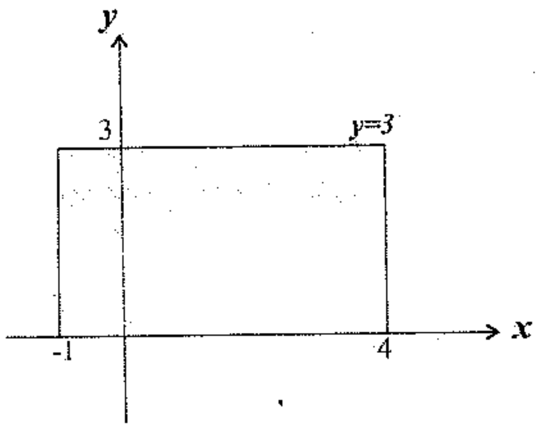
د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3 \cdot 5 = 15$

د انتیګرال پواسطه یې مساحت په لاندې ډول پیدا کوو.

$$\int_{-1}^{3} 3dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

ketabton.com - The Digital Library






دریم مثال: هغه سطحه چه د $y = x - 1$ مستقیم او $(X\acute{X})$ د محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کی جوړیږي محاسبه کړئ

$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = -\frac{1}{2}$

$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$

$$\int_0^3 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3\right] - 0 = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

څلورم مثال : د هغه سطحی مساحت پیدا کړئ چه د $y = -2x + 1$ او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ د $[1,2]$ په انټروال کی محصور وي؟

$A_1 = \frac{2(-1-3)}{2} = -4$

$A_2 = 1(-1) = -1$

$A = A_1 - A_2 = -4 - (-1) = -4 + 1 = -3$

$$\int_1^2 (-2x+1)dx = \left[-2 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = [-x^2 + x]_1^2$$
$$= (-2^2 + 2) + (-2 \cdot 1^2 + 1) = -2 - 1 = -3$$

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library


## د معین انتیګرال خواص $Properties\ of\ definite\ integral$:

1- د $[a,b]$ په انټروال کې د ثابتې تابع انتیګرال یعني $\int_a^b cdx$ عبارت دی.

$$\int_a^b Cdx = C\int_a^b dx = c[x]_a^b = c(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په $(n)$ مساوي برخو ویشویعنی $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ بیا د هر $(x_i)$ لپاره د $i-$ ام انټروال ځخه لرو.

$$f(x_i) = c \qquad , \qquad i = 1,2,3,\cdots n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$= C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \cdots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3 = 1$$

2- د یوه ثابت عدد اویوی تابع د حاصل ضرب انتیګرال د ثابت عدد او هغه تابع د انتیګرال د حاصل ضرب سره مساوي دي.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که د $[a,b]$ انټروال د $x_i$ چه $i = 1,2,3,4,\cdots,n$ وي په $(n)$ مساوي برخو وویشونو د ریمان دمجموعی او انتیګرال دتعریف سره سم لیکو چه:

$$\lim_{N\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} kf(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

ketabton.com - The Digital Library



$$= k \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = k \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k \int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{-2}^{2} 4dx = 4 \int_{-2}^{2} dx = 4[2-(-2)] = 4 \cdot 4 = 16$$

3- که د $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع یوه لمړنی تابع او په $[a,b]$ کې متمادي وي نو:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\{-F(b) + F(a)\}$$

$$= -\{F(a) - F(b)\} = -\int_b^a f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2xdx = -\int_3^2 2xdx$ انتیګرالونو مساوات پیدا کړئ؟

$$\int_2^3 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2}$$

$$= \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

ketabton.com - The Digital Library


$$\int_2^3 2x dx = -\int_3^2 2x dx$$

4- که د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې متمادي وي او $a = b$ وي نو انټيګرال يې صفر دی.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2 dx$ انټيګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_3^3 3x^2 dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- د دوه تابعګانو د مجموعې او تفاضل انټيګرال په يوه انټروال کې د تابعګانو د انټيګرالو د مجموعې او تفاضل د انټيګرالو سره مساوي دی په همغه انټروال کې.

مثلاً د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانو انټيګرال د $[a, b]$ په انټروال کې نيول شوی دي نو:

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) \pm g(x_i)\}\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x_i)dx$$

مثالونه:

$$\int_0^1 (4+3x^2)dx = \int_0^1 4dx + \int_0^1 3x^2dx$$

$$= 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1=5$$

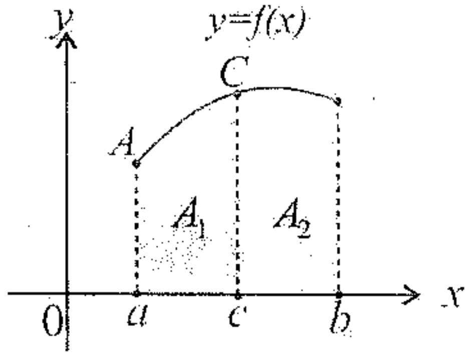
$$\int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2dx - \int_0^3 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6- که چېرته د $f(x)$ یوه تابع چه په یوه تړلي انټروال چه د $a$ , $b$ او($c$) ټکي پکی شامل وي او انټیګرال منونکي وي. نود ټول انټروال انټیګرال دانټروال د ټوټو د انټیګرالو د مجموعی سره مساوي دی.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال د $[a,c]$ او $[b,c]$ په دوه انټروالو ویشو.




$A = \int_a^b f(x)dx$ د هغې سطحی مساحت دی چه د $f(x)$ دتابع د ګراف او $(X\acute{X})$ دمحور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کی واقع دي.

ketabton.com - The Digital Library

$$A_1 = \int_a^c f(x)dx \quad \text{او} \quad A_2 \int_c^b f(x)dx$$

د تابع د ګراف د ټوټو مساحت دی. نو لیکو چه:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_x^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال:-که $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^{8} f(x)dx = 12$ وي نو ?= $\int_8^{10} f(x)dx$ محاسبه کړئ؟

$$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^{8} f(x)dx = 17 - 12 = 5$$

7- که $f(x) \leq g(x)$ تابعګانی په $[a,b]$ کی انتیګرال منونکي وي او $g(x) \geq f(x)$ او $\Delta x \geq 0$ وي نو د سلسلی هر حد مثبت دې پس لیمیټ یې هم مثبت وي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i) - f(x_i)]\Delta x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0$$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

مثال: که $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي د $x > 1$ لپاره وښیاست چه

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \leq \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow \int_a^b dx - \int_a^b \frac{x^2}{4}dx \leq \int_a^b dx + \int_a^b \frac{x^2}{2}dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \leq [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

$$(b-a) - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq (b-a) + \frac{1}{6}(b^3 - a^3)$$

ketabton.com - The Digital Library



اطراف په $(b-a)$ ويشو.

$$1-\frac{1}{12}(b^2-a^2)\le 1+\frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}(b^2-a^2)\le \frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}\quad \Rightarrow -1<2$$

8- که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او $(m)$ اصغري نقطه او $(M)$ اعظمي نقطه وي نو

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

ثبوت :

$$\int_a^b mdx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b Mdx$$
$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

دغه قضيه د انټيګرال د تخميني قضيي په نوم يادېږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}$ انټيګرال په تخميني توګه حساب کړئ؟

څرنګه چه د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=$ $e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري ده نو ليکو چه:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$
$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1(1-0)$$

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

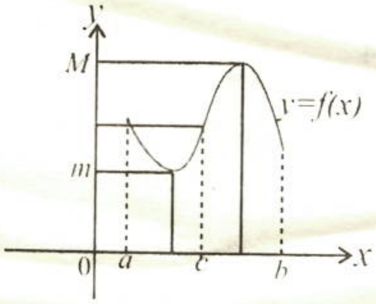

$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 1$$

$$\frac{1}{e} = 0.3679$$

$$0.3679 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$$

9- که $f(x)$ تابع په $[a,b]$ کې متمادي وي نو د $(c)$ يو عدد موجود دی چه $a < c < b$ دی نو:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$




ثبوت: د $a < b$ لپاره د $(m)$ او $(M)$ قيمتونه په ترتيب سره د $[a,b]$ په انتيروال کې د تابع اصغري او اعظمي نقطی دي او $c \in [a,b]$ دی

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

فرضوو چه $k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ دی نو $m \leq k \leq M$ دی او د هر $(c)$ حقيقي عدد لپاره $a \leq c \leq b$ دی نو لرو چه $k = f(c)$ نو:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

ketabton.com - The Digital Library



پورته رابطه د متوسط قيمت درابطى په نوم ياديږي. $f(c)$ طول او $(b-a)$ عرض دي او حاصل ضرب يي د مستطيل مساحت دی. يعنی:

$$A = f(c)(b-a)$$

مثال: د $[1,4]$ په انټروال کې د $f(x) = x^2$ تابع اولاندی رابطه راکړ شوی ده د $(c)$ قيمت په لاس راوړئ؟

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{64-1}{3}\right] = \frac{63}{3} = 21$$

د $(x)$ په عوض $(c)$ وضع کوواو د متوسط قيمت د قضيي څخه استفاده کوو.

$$\int_a^b x^2 dx = c^2(4-1) \Rightarrow 3c^2 = 21 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$a < c < b = 1 < \sqrt{7} < 4$$

$$f(c) = c^2 = \sqrt{7}^2 = 7$$

$$A = f(c)(b-a) = 7 \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

## دانتيګرال او مشتق اساسي قضيي:

### اوله قضيه:

که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی متمادي وي او $(x)$ په دی انټروال شامل وي که $x \in [a,b]$ نوليکلای شو چه:

$$\acute{F}(x) = f(x)$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(a) - F(x) - F(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x)\Big|_a^{x+h} - F(x)\Big|_a^x}{h}$$

د $F(x)$ په $F(t)$ بنيبو:

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F\left(t\Big|_a^{x+h} - F(t)\Big|_a^x\right)}{h}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه لیکو چه:

$$f(c) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

نو معلومه شوه چه $x < c < x + h$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$

مثال: د $f(x) = \int_2^{x^2+1}\frac{1}{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\acute{F}(x) = f(g(x))\cdot \acute{g}(x)$$

$$\acute{F}(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)' = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$\acute{F}(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

**دویمه قضیه:**

که $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع اولنی تابع او د $[a, b]$ په انټروال کی متمادي وي په دی صورت کی لیکلای شو چه:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

ketabton.com - The Digital Library



ثبوت: که $F(x)=\int_a^b f(t)dt$ وي نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره $\acute{F}(x)=f(x)$ دی د تابعگانو تفاضل په $(k)$ ښيو:

$$f(x)-F(x)=k \Rightarrow f(x)=F(x)+k$$

$$\acute{F}(x)=\int_a^b f(t)dt=f(x)=F(x)+k$$

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=k \cdots 1$$

د $(x)$ په عوض $(a)$ وضع کوو:

$$\int_a^b f(t)dt-F(a)=k \Rightarrow 0-F(a)=k \Rightarrow k=-F(a)$$

د $k$ قیمت په $(1)$ رابطه کې وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=-F(a)$$

د $(x)$ په عوض $(b)$ وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

اخري رابطه د $\int_a^b f(t)dt=[F(x)]_a^b$ شکل ښودل کیږي. دغه رابطه د اولنی تابع او $\int_a^b f(t)dt$ انتيګرال تر منځ رابطه ښيي چه د نيوټن (لايبنز) په نوم ياديږي.

مثال: $\int_0^1 x^2dx$ انتيګرال لاس ته راوړئ؟

$$\int_0^1 x^2\,dx=F(1)-F(0)=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3=\frac{1}{3}$$

ketabton.com - The Digital Library

## په تعویضي طريقې سره د انتیګرال نیول:

[illegible] انتګرال دلاس ته راوړلو لپاره يې
$u = g(x)$ او $\acute{F}(x) = f(x)$ بنیو $\frac{du}{dx} = \acute{g}(x)$ او $du = \acute{g}(x)dx$ بنیو:

$$\int_a^b f\{g(x)\}\,\acute{g}(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لمړی مثال: $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = 3 - 5x \quad , \quad \frac{du}{dx} = -5 \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow 3 - 5\cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5\cdot 2 = -7 \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{5}\right)du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{5}\left[\frac{2-7}{14}\right] = -\frac{1}{5}\left[\frac{-5}{14}\right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^3(1+2x^3)^5 dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = 1 + 2x^3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 6x^2 \quad , \quad x^2dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow 1 + 2\cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow u = 1 + 2\cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5 dx = \int_1^3 u^5\cdot\frac{1}{6}\cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{729-1}{6}\right] = \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

پورته فارمول په غېر معین انتیګرال کې هم د تطبیق وړ دي.

مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library



$$u = 1 - 4x^2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -8x \quad , \quad xdx = -\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot xdx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{8}du\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

دويم مثال: $\int x^3 \cos(x^4+2)\, dx$ انتيګرال حساب کړئ؟

$$u = x^4 + 2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 4x^3 \quad , \quad x^3dx = \frac{1}{4}du$$

$$\int x^3 \cos((x^4+2)dx) = \int cosux^3dx = \int cosu \cdot \frac{1}{4}du$$

$$= \frac{1}{4}\int cosudu = \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$\int x^3 \cos(x^4+2)\, dx = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

## قسمي انتيګرالونه:

د $\int f(x)g(x)dx$ په انتيګرال کې $f(x) = u$ او $g(x) = v$ نبيو او دحاصل ضرب مشتق يي پيدا کوو.

$$(u \cdot v)' = \acute{u}v + \acute{v}u \qquad \Rightarrow \acute{v}u = (u \cdot v)' - \acute{u}v$$

$$\int \acute{v}\, udx = u \cdot v - \int \acute{u}\, vdx$$

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

پورته رابطه په قسمي طريقه د غير معين انتيګرال فارمول دی.

که $(u)$ او $(v)$ تابعګانې د $[a,b]$ په انتروال کې تعريف شوی وي نود معين انتيګرال فارمول په قسمي طريقه په لاندی ډول دی.

ketabton.com - The Digital Library



$$\int_a^b \acute{v}\, u dx = u \cdot v|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\, dx \quad \text{V} \quad \int_a^b u dv = u \cdot v|_a^b - \int_a^b v du$$

لمړی مثال : د $\int x \sin x dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = x \quad , \quad du = dx$$

$$v = -\cos x \quad , \quad \frac{dv}{dx} = \sin x \quad \Rightarrow dv = \sin x dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = -x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \quad \Rightarrow du = -dx$$

$$v = e^x \quad \Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^x \Rightarrow dv = e^x dx$$

$$h \int_a^b \acute{v}\, u dx = uv|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\, dx$$

$$\int_0^1 -xe^x\, dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$

$$= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1 = -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 = -1$$

## دلوګاریتمي او اکسپوننشل تابعګانو مشتق:

1- که $f(x) = \ln x$ وي نو $\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$ کیږي.

ثبوت:

$$\acute{f}(x) = (\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$\frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{x}{h} \ln\left(\frac{x}{x} + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

ketabton.com - The Digital Library

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ کيږي او څرنګه چه $h\to 0$ تقرب وکړي نو $\infty\leftarrow u$ $u\to\infty$ ته تقرب کوي

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}$$

2- که $g(x)=a^x$ وي نومشتق يې دلاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$\acute{g}(x)=a^x\ln a$$
$$\ln y=\ln a^x=x\ln a$$
$$(\ln y)'=(x\ln a)'$$
$$\frac{\acute{y}}{y}=1\cdot\ln a+x\cdot 0=\ln a$$
$$\acute{y}=y\ln a=a^x\ln a$$

## د اعشاري لوګاريتم مشتق:

د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق عبارت دي له:

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$\acute{f}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ کيږي او کله چه $h\to 0$ تقرب وکړي نو $u\to\infty$ تقرب کوي.

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\frac{1}{x}\log_a e$$

غواړو چه ثبوت کړو چه:

$$\{\log_a g(x)\}'=\frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$
$$\acute{f}(x)=\{\log_a g(x)\}'=\{\log_a g(x)\}'\cdot\acute{g}(x)$$
$$=\frac{1}{g(x)}\log_a e\cdot\acute{g}(x)=\frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$

ketabton.com - The Digital Library

که $a = e$ وضع شي نو:

$$\{\log_e g(x)\}' = \{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

1- د $y = e^x$ مشتق

$$ln\, y = ln\, e^x = x\, ln\, e = x$$

$$(ln\, y)' = \acute{x} \quad \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 1 \Rightarrow \acute{y} = y \cdot 1 = y \Rightarrow \acute{y} = e^x$$

2- که $y = a^u$ وي کله چه $a > 0$ او $a \neq 1$ وي نو:

$$\acute{y} = \acute{u} \cdot a^u\, ln\, a$$

3- که په لوګاریتمي تابعګانو کې د لوګاریتم قاعده د طبعي لوګاریتم څخه اعشاري لوګاریتم ته بدله شي ټول لوګاریتمي عددونه دصورت څخه مخرج ته اویا د مخرج څخه صورت ته ځي لکه:

$$y = \log_a u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{\acute{u}}{u\log_e a} = \frac{\acute{u}}{u\ln a}$$

لمړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$g(x) = x^2 + 1 \;\Rightarrow \acute{g}(x) = 2x$$

$$\{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

$$\{\ln(x^2 + 1)\}' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دویم مثال:

$$f(x) = ln(x^2 - 5x + 4) \quad \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{x^2 - 5x + 4} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4}$$

ketabton.com - The Digital Library


دریم مثال:

$$f(x) = \log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \log_a \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\log_a \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1)\}$$

$$\acute{f}(x) = \left(\log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)' = \frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1)\}'$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\log_a e - \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\log_a e\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{2x}{x^2+1}\log_a e - \frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right\}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2-1}\right)$$

$$= x\log_a e\left(\frac{x^2-1-x^2-1}{x^4-1}\right) = \frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\{\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)\}$$

$$\acute{f}(x) = \left(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)' = \frac{1}{2}\{\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)\}'$$

$$= \frac{1}{2}[\{\ln(x^2+1)\}' - \{\ln(x^2-1)\}']$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{-2x}{x^4-1}$$

څلورم مثال: د $y = e^{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = (x^2+1)'\cdot e^{x^2+1} = 2x\cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y = \sqrt[x]{2}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y = \sqrt[x]{2}$$

$$\ln y = \ln\sqrt[x]{2} = \ln 2^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln 2$$

ketabton.com - The Digital Library


$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{x}\ln 2\right)'$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot (\ln 2)' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot 0 = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 + 0$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln 2 \Rightarrow \acute{y} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 \cdot y = -\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[x]{2} \cdot \ln 2$$

شپږم مثال : د $y = x^{2x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x} = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2\ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = 2(\ln x + 1) \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اوم مثال :

$$y = \log_{10}(x^4 + 1)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$x^4 + 1 = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_{10} e = \frac{4x^3}{x^4 + 1}\log_{10} e = \frac{4x^3}{(x^4 + 1)\ln 10}$$

اتم مثال:

$$y = \log_3(\log_2 x)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$\log_2 x = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{\frac{1}{x}\log_2 e}{\log_2 x}\log_3 e = \frac{1}{x\log_2 x \ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x\frac{\log_e x}{\log_e 2} \cdot \ln 2 \ln 3}$$

$$\acute{y} = \frac{1}{x\frac{\ln x}{\ln 2}\ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x \ln x \ln 3}$$

نهم مثال:

$$y = \log_{(x^2-1)}(x^2 + 1)$$

ketabton.com - The Digital Library


$\acute{y} = ?$
$x^2 + 1 = u$
$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{2x}{x^2+1}\log_{(x^2-1)} e$

## د معکوسو تابعګانو مشتق:

که دوه تابعګانی یو د بل معکوس وي نو مشتقونه یي هم یو د بل معکوس دي.

مثلاً که $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي نو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

یا:

$$\acute{y}_{(x)} = \frac{1}{\acute{x}_{(y)}}$$

نو د ضمني تابعګانو د مشتق له مخی لیکو.

$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ x = g(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = \acute{y}_y \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = 1 \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y}$$

مثال: د $y = a^x$ د تابع مشتق د هغې د معکوسی تابع له مخی پیدا کړئ؟

$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$
$$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\ln a = a^x \ln a$$

## د معکوسومثلثاتي تابعګانومشتق:

د معکوسو مثلثاتي تابعګانو مشتق دلاندی رابطو پواسطه پیدا کیږي.

1- $(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2- $(arc\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
3- $(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
4- $(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

ketabton.com - The Digital Library



-1

$$y = arc\sin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$(arc\sin x)' = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-2

$$y = arc\cos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$(arc\cos x)' = ?$$

$$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2y}} \Rightarrow (arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-3

$$y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y \Rightarrow (arc\tan x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2y}}$$

$$= cos^2y = \frac{cos^2y}{1} = \frac{cos^2y}{sin^2y + cos^2y}$$

$$= \frac{\frac{cos^2y}{cos^2y}}{\frac{sin^2y}{cos^2y} + \frac{cos^2y}{cos^2y}} = \frac{1}{tan^2y + 1} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

-4

$$y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{sin^2y}}$$

$$= -sin^2y = \frac{-sin^2y}{1} = \frac{-sin^2y}{sin^2y + cos^2y}$$

ketabton.com - The Digital Library



$$= \frac{\frac{-sin^2y}{sin^2y}}{\frac{sin^2y}{sin^2y}+\frac{cos^2y}{sin^2y}} = \frac{-1}{1+cot^2y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لمړی مثال:- د $y = (arc\tan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = 5(arctanx)^4\frac{1}{1+x^2}$$

دویم مثال:- د $y = \log_5(arc\tan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = \{\log_5(arc\tan x)\}' = \log_5 u = \frac{\acute{u}}{u\ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{arc\tan x\ln 5} = \frac{1}{(1+x^2)(arc\tan x\ln 5)}$$

دریم مثال:- د $y = arctane^x$ تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = (arc\tan e^x)' = (arc\tan u)' = \frac{\acute{u}}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$\acute{y}(0) = \frac{e^0}{1+e^{2\cdot 0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

قسمي کسرونه:

د یوه واقعي کسر قسمي کسرونه هغه کسرونه دي چه د هغوی دمجموعی څخه دغه واقعي کسر جوړشوی وي.دواقعي کسرد قسمي کسرو پیدا کول دری حالته لري.

اول حالت:

چه د واقعي کسرد مخرج ضربي عوامل غیر تکراري بینومونه وي.لکه

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} = \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(x^2+x-2)+B(x^2-3x-10)+C(x^2-6x+5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} = \frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

ketabton.com - The Digital Library


$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$4x^2-x-39=(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C$$

$A+B+C=4$
$A-3B-6C=-1$
$-2A-10B+5C=-39$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دويم حالت:

چه د کسر د مخرج په ضربي عواملو کې تکراري بېنومونه وي.

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$3x^2-6x+2=A(x^2-2x+1)+B(x^2-3x+2)+C(x-2)$$

$$3x^2-6x+2=Ax^2-2Ax+A+Bx^2-3Bx+2B+Cx-2C$$

$$3x^2-6x+2=(A+B)x^2-(2A+3B-C)x+A+2B-2C$$

$A+B=3$

$-2A-3B$

$+C=-6$

$A+2B-2C=2$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دريم حالت:

چه د کسرد مخرج ضربي عوامل غيرتکراري ترينومونه وي په صورت کې يي بېنوم ليکل کيږي.

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

ketabton.com - The Digital Library



$$= \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$= 5x^2+8x+9 = (A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C$$

$$A+C=5$$

$$A+B+2C=8$$

$$B+4C=9$$

$$A=3 \quad , \quad B=1 \quad , \quad C=1$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{3X+1}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x+1}$$

**د اکسپوننشل تابعګانو انتیګرالونه:**

د $f(x) = e^x$ طبعي اکسپوننشل تابع لپاره لرورچه

$$\int e^x dx = e^x + c$$

په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \quad a \neq 1 \ \& \ a \in IR$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$

$$u = 1 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 0 \quad , \quad du = 0 \cdot dx$$

$$v = a^x \quad , \quad \frac{dv}{dx} = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \quad dv = \frac{a^x}{\ln a} dx$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

لمړی مثال: د $f(x) = 2^{x-3}$ اکسپوننشل تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2^x$$

ketabton.com - The Digital Library


$$\int 2^{x-3}dx = \int \frac{1}{8}\cdot 2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال:

$$\int 3^{x+1}dx = ?$$

$$\int 3^{x+1}dx = \int 3^x \cdot 3dx = 3\int 3^x dx = 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C$$

## د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال:

که $f(x) = \ln x \quad (x \in IR^+)$ وي نو انتیګرال یې په لاندې ډول دی.

$$\int \ln dx = x\ln x - x + C$$

که $f(x) = \log_a x \ (x, a \in IR^+)$ وي نو انتیګرال یې داسې پیدا کوو.

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\,dx = \int \ln x dx = x\log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e) = x(\ln x - 1) + C$$

2- حالت:

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \ , \ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e \quad , du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$v = x \quad , \ \frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow dv = dx$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\cdot\frac{1}{x}\log_a e\,dx = x\log_a x - \log_a e\int dx$$

ketabton.com - The Digital Library



$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_A x dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیگرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \ln x dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x = x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

په تعویضي طریقه هم کولای شو چه د غیرمعین انتیگرال قیمت پیدا کړو.

لمړی مثال:

$$\int \frac{1}{2} e^{-2x-3}\, dx = ?$$

$$u = -2x - 3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -2 \quad , \quad dx = -\frac{1}{2} du$$

$$\int \frac{1}{2} e^u \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C$$

دویم مثال:

$$\int \frac{2dx}{x+2} = ?$$

$$x + 2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad , \quad du = dx$$

$$\int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

دریم مثال: د $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیگرال پیدا کړئ؟

$$\int f(xdx) = \int e^{2x} dx = ?$$

$$2x = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x)dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{e^u}{2} + C = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$$

څلورم مثال: د $f(x) = x \cdot \ln x^2$ انتیگرال حساب کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

$$\int f(x)dx = \int (x\ln x^2)dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$\int f(x)dx = \int x\ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \ln u du = \frac{1}{2}[u \cdot \ln u - u + C]$$

$$= \frac{1}{2}u \cdot \ln u - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2\ln x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

معین انتیګرالونه هم په تعویضي طریقه حلولای شو.

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = ?$$

$$u = 2x \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , \quad dx = \frac{1}{2}du$$

$$\begin{cases} x = -1 \ , & u = 2x = 2(-1) = -2 \\ x = 1 & , \ u = 2x = 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}[e^u]_{-2}^{2} = 3.627$$

دویم مثال:

$$\int_{1}^{2} 2x \cdot ln\, x^2 dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$x = 1 \quad , \quad u = x^2 = 1$$

$$x = 2 \qquad u = x^2 = 4$$

$$\int_{1}^{2} 2x\, ln\, x^2 dx = \int_{1}^{4} 2x \cdot ln\, u \cdot \frac{1}{2x}du = \int_{1}^{4} ln\, u du$$

$$= [u \cdot ln\, u - u]_{1}^{4} = [4 \cdot ln\, 4 - 4] - [1 \cdot ln\, 1 - 1] = 2.545$$

ketabton.com - The Digital Library



د قسمي کسروپواسطه دواقعي کسرد انتيګرال لاس ته راوړل که وغواړو چه د يوه واقعي کسر انتيګرال پيدا کړو نو لمړی يي قسمي کسرونه پيدا کوو بيا د قسمي کسرو انتيګرالونه پيدا کوو او جمع کوو يي.

لمړی مثال : $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}$ محاسبه کړئ؟

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$
$$=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}$$
$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$
$$7x-12=(A+B)x-4A-2B$$
$$A+B=7$$
$$-4A-2B=-12 \Rightarrow 4A+2B=12 \cdots\cdots\cdots 1$$
$$A=7-B \Longrightarrow 4(7-B)+2B=12$$
$$28-4B+2B=12$$
$$-2B=12-28=-16 \Rightarrow B=8$$
$$A=7-B=7-8=-1 \Rightarrow A=-1$$
$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$
$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int \frac{-1}{x-2}dx+\int \frac{8}{x-4}dx$$
$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int \frac{1}{x-2}dx+8\int \frac{1}{x-4}dx$$
$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$
$$=\ln\{(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\}=\ln\left\{\frac{(x-4)^8}{x-2}\right\}+C$$

ketabton.com - The Digital Library


# د منحني سطحی د مساحت پیدا کول

## Acconting area of curve plane

هغه مستوي چه د $(X\acute{X})$ د محور او د $Y = F(x)$ د تابع د ګراف او $x = a$ او $x = b$ د کرښو تر منځ محصور وي مساحت یې دلاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

که $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې مثبت اومتمادي وي یعنی $0 \leq y = f(x)$ وي پدې صورت کې د $f(x)$ دتابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه پورتني طرف کې پروت دی او که $y = f(x) \leq 0$ وي پدې صورت کې د $f(x)$ تابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه کښتني طرف کې پروت دی.

لمړی مثال: د $x = 4 - y^2$ د تابع د ګراف او د $(Y\acute{Y})$ د محور تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

د تابع د ګراف بحراني ټکی او د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع ټکي پیدا کوو.

$x = 4 - y^2$

$\acute{x} = 0 - 2y = -2y$

په بحراني نقطه دتابع مشتق صفر وي نو $\acute{x} = 0$ نو:

$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$

د $(y)$ قیمت په اوله معادله کې وضع کوود $(x)$ قیمت لاس ته راځي

$x = 4 - y^2 = 4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4$
$x = 4$

$A(4,0)$ نقطه بحراني نقطه ده.د $Y\acute{Y}$ دمحور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو او د $y$ قیمت لاس ته راځي

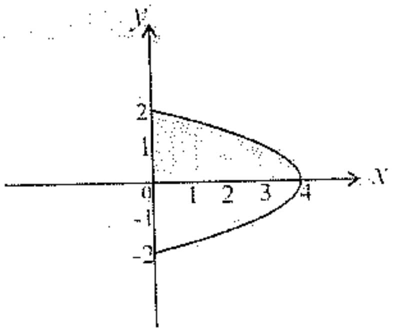
$x = 0$

$4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$B(0,2)$ $C(0,-2)$

ketabton.com - The Digital Library






$$A = \int_{-2}^{2} (4 - Y^2) dy = 2 \int_{0}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2 \left[ 4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$A = 2 \left[ \left( 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - 0 \right] = 2 \left( 8 - \frac{8}{3} \right) = 2 \left( \frac{24 - 8}{3} \right) = 2 \left( \frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

دويم مثال: د $(X\acute{X})$ دمحور او $Y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ دتابع دګراف پواسطه د محصورى سطحى مساحت محاسبه کړئ؟

$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$\acute{y} = -x$

$\acute{y} = 0 \qquad x = 0$

$y = 1 - \frac{1}{2}(0)^2 = 1$

$A(0,1)$ بحراني نقطه ده. اوس د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو. $Y = 0$ فرضوو.

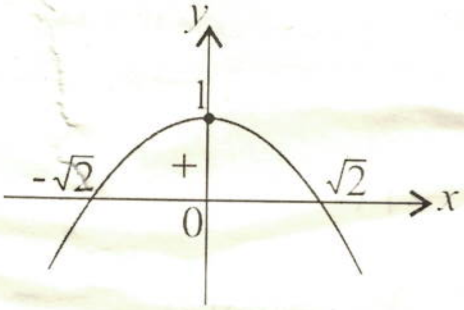
$y = 0$

$1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \qquad \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \qquad \Rightarrow x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}, 0) \qquad\qquad C(-\sqrt{2}, 0)$

ketabton.com - The Digital Library


$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\left(\left[x-\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{2}}\right)$$

$$A=2\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}^3}{6}-0\right)=2\left(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6}\right)=2\left(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{6}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

دريم مثال: د هغه سطحې مساحت پيدا کړئ چه د $y=x^2-3$ د تابع دګراف او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ محصوروي.

حل:

$y=x^2-3 \qquad , \qquad \acute{y}=2x$

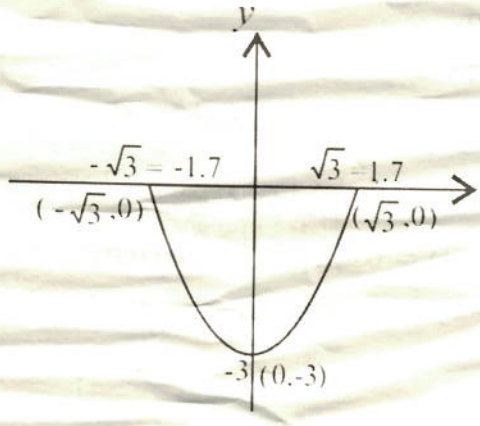
$\acute{y}=0 \qquad \therefore \quad x=0$

$y=0^2-3=-3 \qquad , \quad A(0,-3)$

$y=0$

$$x^2-3=0\Rightarrow x^2=3\Longrightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

$B(\sqrt{3},0) \qquad C(-\sqrt{3},0)$



ketabton.com - The Digital Library



څرنګه چه ګراف يي د $y = x^2 - 3$ د محور لاندی واقع دی نو انتيګرال يي منفي دی. او څرنګه چه $\sqrt{3}$ او $-\sqrt{3}$ متناظر دي نو مساحت يي د سر حداتو د نيمايي څخه پيدا کوو.

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx = -2\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)$$

$$= -2\left(\int_0^{\sqrt{3}} x^2dx - 3\int_0^{\sqrt{3}} dx\right) = -2\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} - [3x]_0^{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}\left[\sqrt{3}^3 - 0\right] - 3[\sqrt{3} - 0]\right) = -2\left(\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3 - 3\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3 + 6\sqrt{3} = \frac{2}{3}(1.7)^3 + 6(1.7)$$

$$= -\frac{2}{3}(4.913) + 10.2 = \frac{9.826}{3} + 10.2 = -3.2753 + 10.2 = 6.9247$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ د تابع ګراف رسم کړئ او د منحني او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ فاصله پيدا کړئ؟

$$y = x^2 - 3x$$
$$\acute{y} = 2x - 3 \;\Rightarrow \acute{y} = 0$$
$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$
$$y = x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9 - 18}{4} = \frac{-9}{4}$$

بحراني نقطه $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

څرنګه چه $y'' = 2 > 0$ دی نو بحراني نقطه اصغري نقطه ده.

د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف د تقاطع د نقطی د پيدا کولو لپاره $y = 0$ فرضوو

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \;\;, x_1 = 0 \;\;\;, O(0,0)$$
$$x - 3 = 0 \;\Rightarrow x = 3 \;\;\;, \;\; B(3,0)$$

ketabton.com - The Digital Library


$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 3x)dx - \int_{0}^{3} (x^2 - 3x)dx + \int_{3}^{4} (x^2 - 3x)dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{3}^{4}$$

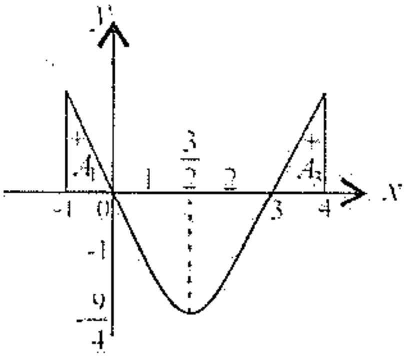
$$A = \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0\right) - \left\{\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2\right\}\right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0\right)\right] + \left[\frac{1}{3} \cdot (4)^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 - \left\{\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2\right\}\right]$$

$$= -\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9\right) + \left\{\left(\frac{1}{3} \cdot 64 - \frac{3}{2} \cdot 16\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{27}{3} + \frac{64}{3} - \frac{27}{3} + \frac{3}{2} + \frac{27}{2} - \frac{48}{2} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$




پنځم مثال:د $y = x^2 - 2x$ د منحني او $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت په داسې حال کې پیدا کړئ چه د $x = 2$ او $x = -1$ تر منځ واقع وي.

$\acute{y} = (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

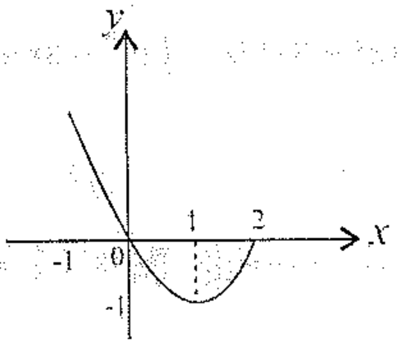
$y = x^2 - 2x = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$

$A(-1,1)$ بحراني نقطه

د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف د تقاطع تقطې پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.

ketabton.com - The Digital Library






$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$
$x_1 = 0 \quad , \quad O(0,0)$
$X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2 \quad , B(2,0)$

منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې د مبداء څخه تيريږي يوه برخه يي د $[-1,0]$ په انټروال کې د $(X\acute{X})$ د محور په پورتنۍ برخه کې پرته ده او انټروال يي مثبت دي. بله برخه يي د $[0,2]$ په انټروال کې د $(X\acute{X})$ دمحور په لاندينۍ برخه کې واقع دی او انټروال يي منفي دي.

$$A = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2} (x^2 - 2x) = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= \left\{0 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right)\right\} - \left\{\left(\frac{8}{3} - 4\right) - 0\right\} = -\left(-\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)$$
$$= -\left(\frac{-1-3}{3}\right) - \left(\frac{8-12}{3}\right)$$
$$= -\left(\frac{-4}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

د هغه سطحو دمساحت محاسبه چه دمنحني خطو پواسطه محاصره وي:

*Accounting of area bounded by tow curves*

د $y_1 = f(x)$ او $g(x) = y_2$دوه منحنيګانو پواسطه د محصور شوی سطحی دمحاسبی لپاره که $f(x) > g(x)$ وي يعنی که $f(x)$ تابع د $g(x)$ دتابع د پاسه واقع وي د پاسنۍ تابع د انتيګرال څخه د لاندينۍ تابع انتيګرال منفي کوو د محصور شوي سطحی مساحت لاس ته راځي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]d = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)$$

ketabton.com - The Digital Library

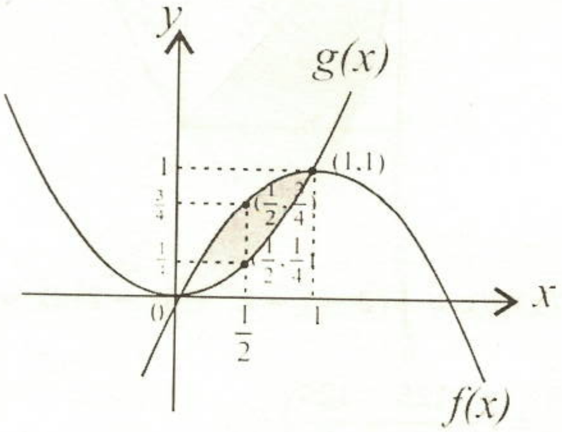

که د $G(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف د پاسه واقع وي نود محصورشوی سطحی مساحت په لاندی ډول پیدا کیږي.

$$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx$$

لومړی مثال: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحنیګانو د ګرافونو تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

حل:- اول د منحنیګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو.

$f(x)=2x-x^2$
$g(x)=x^2$
$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2\Rightarrow$
$2x-x^2-x^2=0\Rightarrow 2x-2x^2=0$
$2x(1-x)=0$
$2x=0\Rightarrow x_1=0$
$1-x=0\Rightarrow 1=x\Rightarrow x=1$




د منحنیګانو د تقاطع نقطی عبارت دي $A(1,1)$ او $O(0,0)$ دي.

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_0^1(2x-x^2-x^2)dx=\int_0^1(2x-2x^2)dx=$$

$$\left[x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^1=\left(1-\frac{2}{3}\right)-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

ketabton.com - The Digital Library



دويم مثال: د $f(x) = x^2 - 6x + 2$ او $g(x) = 2 - x$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت پيدا کړئ؟

$$\left.\begin{matrix} f(x) = x^2 - 6x + 2 \\ g(x) = 2 - x \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

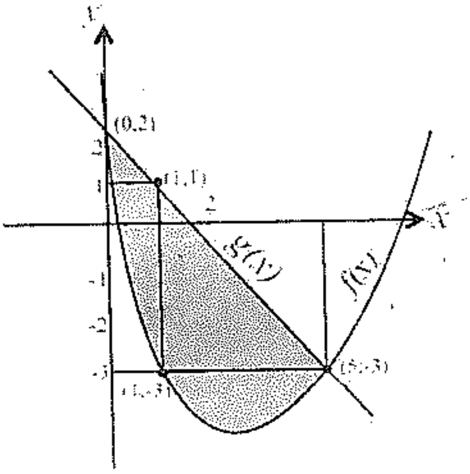
$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0 \quad , \quad x_1 = 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$y_1 = 2, \quad O(0,2)$$

$$y_2 = -3 \quad A(5,-3)$$




$$A = \int_a^b \{g(x) - f(x)\}dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right) - 0$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

دريم مثال:- د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$\left.\begin{matrix} f(x) = -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) = x^2 - 2x + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

ketabton.com - The Digital Library

$-x^2+4x+2=x^2-2x+2$

$-x^2+4x+2-x^2+2x-2=0$

$-2x^2+6x=0 \Rightarrow x(-2x+6)=0$

$\Rightarrow x_1=0 \quad , \quad -2x+6=0 \quad \Rightarrow -2x=-6 \Rightarrow x=3$

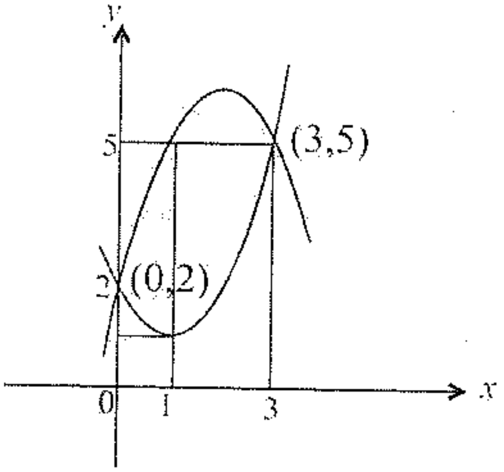
د منحنیګانود تقاطع نقطی عبارت دي $B(3,5)$ , $A(0,2)$

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

$$=\int_0^3 (-x^2+4x+2)dx-\int_0^3 (x^2-2x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4\cdot\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^3-\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_0^3$$

$$=-\frac{27}{3}+18+6-0-\frac{27}{3}+9-6+0=9$$



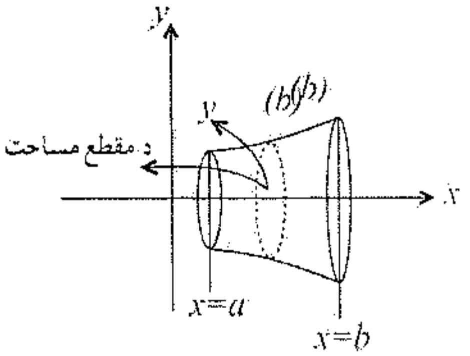
ketabton.com - The Digital Library



## دکروي اجسامو دحجمو محاسبه

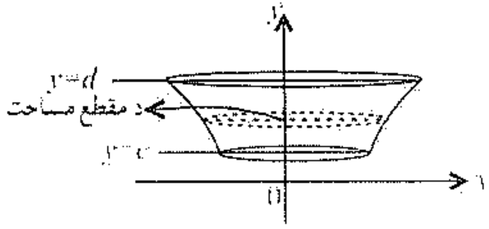
## Accounting volume of Spherical things

که د $y = f(x)$ دتابع ګراف منحني وي او د $x = a$ او $x = b$ دخطو منځ کی محصوروي د منحني خط د دوران په نتیجه کی استوانه لاس ته راځي چه ارتفاع يي $\Delta x = b - a$ ده د استوانی مقاطع دايروي سطحی دي چه مساحتونه يي $A_{(x)} = \pi r^2$ دي او د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي دي شعاع يي $y = r$ ده د حجم فارمول يي د ريمان د مجموعی سره سم په لاندی ډول دی.




$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(x)}\Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2$$

که $x = f(y)$ تابع دمنحني ګراف د $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور وي مساحت يي نظر د $(Y\acute{Y})$ محور ته د $A_{(Y)} = \pi r^2$ فارمول دی ارتفاع يي $\Delta y = d - c$ ده او شعاع يي $y = r$ ده حجم يي د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.



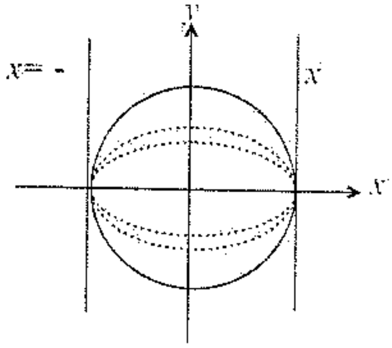

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(y)}\Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi y^2 dy = \int_a^b \pi\{f(y)\}^2 dy$$

ketabton.com - The Digital Library

## د انتیګرال پواسطه د کری د حجم پیدا کول

که نیمه دایره د قطر په اطراف وڅرخیږي کره لاس ته راځي. د دایری معادله دا $x^2 + y^2 = r^2$ ده د نیمی کری حجم د دایری د معادلی څخه پیدا کوو او دوه چنده کوو بیي د کری حجم لاس ته راځي.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$



$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$= 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right] - 0 = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3}\right) = 2\pi \left(\frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

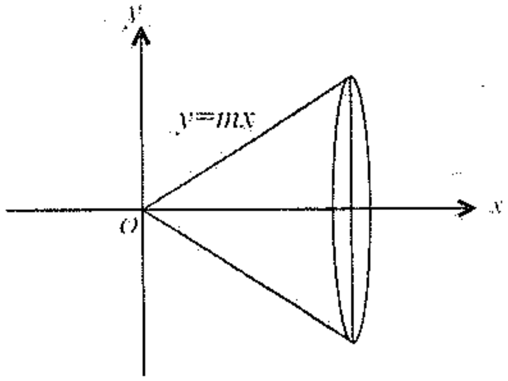
## د انتیګرال پواسطه د مخروط دحجم پیدا کول

که د مستقیم د یوانجام نقطه ثابته وي او مستقیم خط دهمدغه ثابتی نقطی په شاوخوا دوران وکړي مخروط لاس ته راځي نو

$$V = \int_{a}^{b} \pi y^2 dx$$

ketabton.com - The Digital Library






$$V = \int_a^b \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_a^b x^2 dx$$

$$y = mx$$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$$

د مخروط حجم $= V = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$

د پورته شکل څخه معلوميږي چه د مخروط قاعده دايروي ده او شعاع يي د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي ده يعنی $y//r$ اود مخروط ارتفاع $(h)$ ده چه د $(x)$ په محور باندی منطبق ده يعنی $(x = h)$ نود $y = mx$ په رابطه کی يي قيمت ليکو:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

$$V = \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

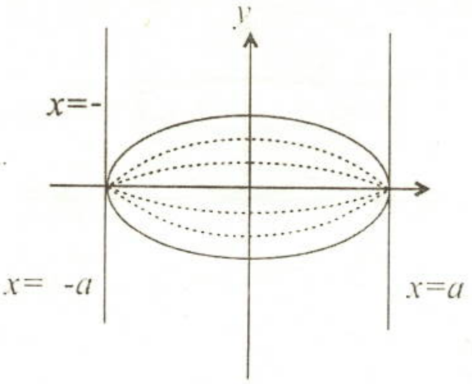
## د انتيگرال پواسطه دبيضوي دحجم پيدا کول:

هغه بيضوي چه مرکز يي د وضعيه کميتونو په ميداء واقع وي معادله يي عبارت ده له:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

دنيمی بيضوي حجم پيدا کوو او دوه چنده کوو يي د ټولی بيضوي حجم لاس ته راځي.

ketabton.com - The Digital Library




$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{a^2}=1-\frac{x^2}{b^2}\Rightarrow y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx=2\pi\left[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$=2\pi\left[\left(b^2a-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}\right)-0\right]=2\pi\left[b^2a-\frac{b^2a}{3}\right]$$

$$=2\pi\left[\frac{3ab^2-ab^2}{3}\right]=2\pi\left[\frac{2ab^2}{3}\right]$$

$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

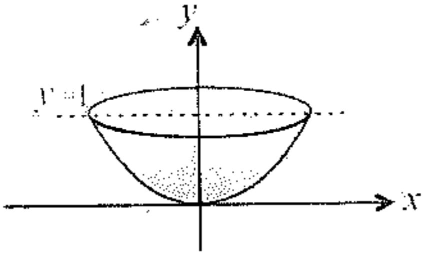
که چېرته د الپس محراقونه د $(Y\acute{Y})$ د محور پر مخ پراته وي حجم يې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$V=\frac{4}{3}\pi a^2b$$

لمړی مثال: د جسم حجم چه د $y=x^2$ او $y=1$ کرښی تر منځ پروت وي او د $(Y\acute{Y})$ د محور په شاوخوا دوران کوي پیدا کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library

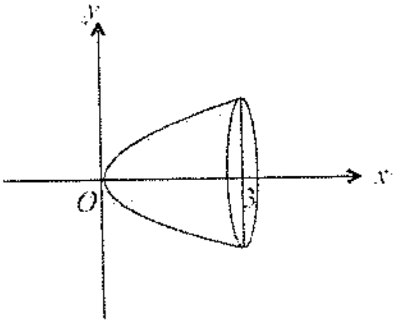





$$V=\int_a^b \pi x^2 dy=\pi\int_0^1 y dy$$

$$=\frac{1}{2}\pi y^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\pi=\frac{\pi}{2}$$

دويم مثال: د $y=\sqrt{2x}$ او $y=3$ تر منځ د څرخول شوي جسم مساحت پيدا کړئ؟




$$V=\int_a^b \pi y^2 dx=\int_0^3 \pi\left(\sqrt{2x}\right)^2 dx=\pi\int_0^3\left[\sqrt{2x}\right]^2 dx=\pi\int_0^3 2x dx$$

$$V=2\pi\int_0^3 x dx=2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3=9\pi$$

تبصره:

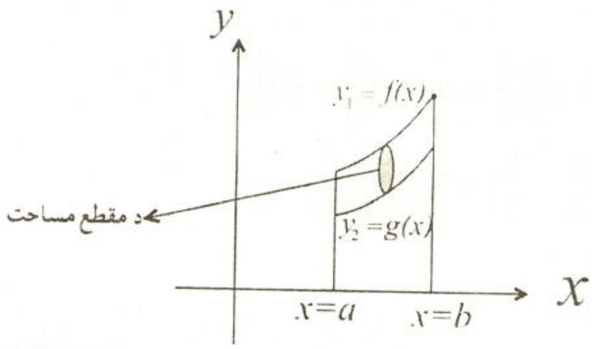
که $y_1=f(x)$ او $y_2=g(x)$ تابعګانې $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي دهغه جسم حجم چه د $f(x)$ او $g(x)$ منحنيګانو او د $x=a$ او $x=b$ کرښو تر منځ دوران کوي د لاندې فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$\Delta x=$ د استوانې ارتفاع

$A(x)=\left(\text{استوانې د مقطع مساحت}\right)=\pi y_1-\pi y_2=\pi(y_1-y_2)$

ketabton.com - The Digital Library

د هغه استوانی د جحم د فارمول پیدا کول چه د $f(x)$ دتابع گراف د $g(x)$ د تابع د گراف څخه پورته پروت وي

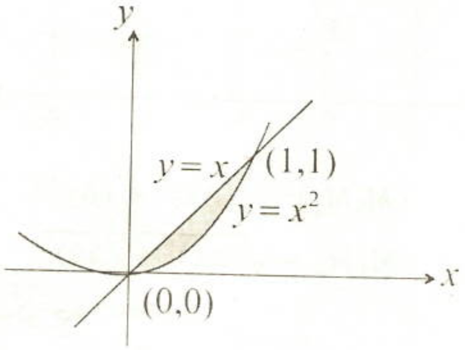



$$V = \int_a^b \pi({y_1}^2 - {y_2}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_1}^2 - {y_2}^2)dx$$

د هغه استوانی دحجم دفارمول پیدا کول چه د $g(x)$ دتابع گراف د $f(x)$ دتابع د گراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_2}^2 - {y_1}^2)dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چه د $y = x^2$ د منحني او $y = x$ د کرښې تر منځ د $(x)$ د محور په شاوخوا تر منځ د دوران څخه لاس ته راځي.




$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f(x) = x^2 \\ y_2 = g(x) = x \end{array}\right\} \Rightarrow y_2 > y_1 \quad , \quad g(x) > f(x)$$

ketabton.com - The Digital Library


$$= \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (-x^2)^2)dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx$$

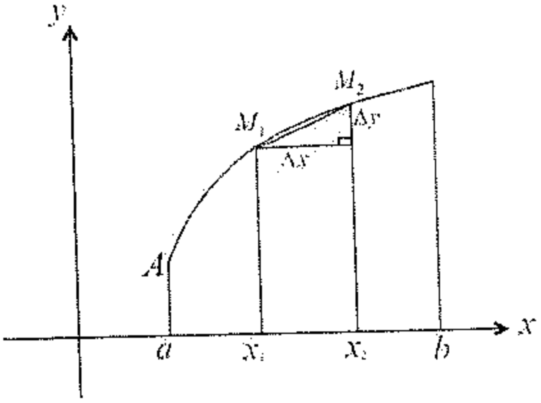
$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{5} - 0\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \pi \left(\frac{5-3}{15}\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{2\pi}{15}$$

## د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د $AM_1$ او $M_1M_2$ او $M_2B$ په دری ټوټو ویشو د $A, M_1, M_2$ اود $B$ د نقطو څخه په $(X\acute{X})$ عمودونه رسموو بیا $M_1$ د $M_2$ سره په یوه روښانه خط نښلوود $M_1$ څخه پر $M_2X_2$ عمود رسمووا و دتقاطع نقطه په $H$ ښیو او $\Delta x = M_1H$ او $M_2H = \Delta y$ وضع کوود فیثاغورث دقضیې سره لیکو




$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق د فارمول سره سم لیکو چه:

$$\acute{f}(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \acute{g}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \acute{f}(x)\Delta t \qquad \Delta y = \acute{g}(x)\Delta t$$

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library


$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\acute{f}(t)\Delta t\right)^2 + (\acute{g}(t)\Delta t)^2}$$

$$M_1M_2 = \sqrt{\left[\acute{f}(t)\right]^2 + [\acute{g}(t)]^2} \cdot \Delta t$$

د ریمان د مجموعی څخه لیکو چه:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\acute{f}(t)\right)^2 + \left(\acute{f}(t)\right)^2} \cdot \Delta t$$

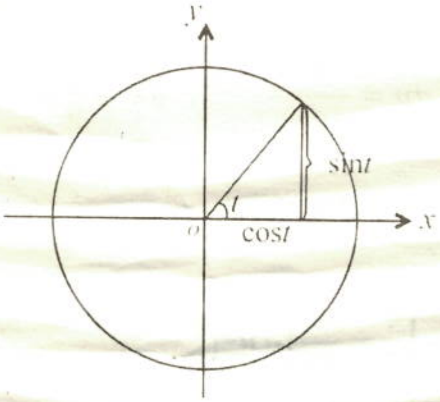
لومړی مثال: د $x^2 + y^2 = r^2$ دایری محیط محاسبه کړئ؟

د دایرې پارامتریک معادله په لاندی ډول ده.

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$

که $0 \le t \le \pi$ نو د دایری نیمایي محیط پیدا کړئ؟

$$P = \int_0^\pi \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2} \cdot dt$$




$$P = \int_0^\pi \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} \cdot dt$$

$$P = \int_0^\pi \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2} \cdot dt$$

ketabton.com - The Digital Library



$P = [rt]_0^{\pi} = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r$ د دايرې نيمايي محيط

د دايرې مکمل محيط $= 2\pi r$

تبصره :

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انتروال کې راکړشوی ده د $(x)$ دپارامتر په پام کې نيولو سره د منحني د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ دمنحني دقوس اوږدوالی په $0 \le x \le 4$ انتروال کې پيدا کړئ؟

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \qquad , \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \cdot dx$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \qquad , du = \frac{9}{4dx} \qquad , \quad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u}\frac{4}{9}du \Rightarrow$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{4}{9}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{u^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1\right]$$

$$L = \frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

ketabton.com - The Digital Library


2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کی راکړ شوی دې د $(y)$ دپارامتر په پام کی نیولو سره لیکو:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ دمنحني د قوس اوږدوالي د $[1,4]$ په انټروال کی حساب کړئ؟

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \cdot dy$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du \quad , \quad u = \frac{9}{4}y + 1 \Rightarrow du = \frac{9}{4} dy$$

$$L = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{9}{4}y + 1\right)^3}\right]_1^4 \quad , \quad dy = \frac{4}{9} du$$

$$L = \frac{8}{27} \left[\sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}\right] = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}}\right]$$

## تفاضلي معادلې (Differential Equations):

هر هغه مساوات چه د یوی تابع مشتق او یویاخو مستقل اوغیرمستقل متحوله پکی موجود وي تفاضلي معادلی بلل کیږي. لکه

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$$(4x + y)dx + xdy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$$

ketabton.com - The Digital Library



دغه تفاضلي معادلی ته معمولي تفاضلي معادلې هم وايي.
که په يوه تفاضلي معادله کی ديوه غيرمستقل متحول معمولي مشتق نظرمستقل متحول ته ونيول شي دغسې تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادله وايي.

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \quad , \quad (4x + y)dx + xdy = 0 \quad , \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9x = 0$$

که د مستقل متحول مشتق نظر زياتومستقلومتحولو ته ونيول شي دغسې ډيفرينشيال معادلی ته جزئي يا يوطرفه ډيفرينشيال معادلې وايي لکه:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 8u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 5\frac{\partial u}{\partial y}$$

د ډيفرينشيال ترتيب:

ديوی افادی دمشتق نيولو شمېرې ته د ډيفرينشيال معادلی ترتيب وايي.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 4x$$

خرنګه چه دافادی څلورم مشتق نيول شوی دی نو د ډيفرينشيال ترتيب (4) ده مشتق نيول د $(d)$ دتوان څخه معلوميږي

د ډيفرينشيال معادلی درجه :

د مشتق دلوړ ترتيب توان ته د ډيفرينشيال معادلی درجه وايي.

که د ډيفرينشيال معادلی توان کسري وي. توان يي بايد په صحيح عدد بدل شي.

$$(y''')^{\frac{2}{3}} = 4 + y'$$

$$\left\{(y''')^{\frac{2}{3}}\right\}^3 = (4 + y')^2 \Rightarrow (y''')^2 = (4 + y')^2$$

ketabton.com - The Digital Library

د پورتني معادلې درجه (2) ده.

د $y''' = \sqrt{4+y'}$ يا $y'''' = \sqrt{5x+3y}$ معادلو درجه يوه ده.

کله کله يوه ديفرينشيال معادله درجه نلري. لکه:

$$6x^2\frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x)\frac{d^2y}{dx^3} - \cos xy = 0$$

دپورته معادلې درجه معلومه نه ده.ځکه چه د $(y)$ نامعلومه تابع د $\cos xy$ ترانسندنتل تابع په مناقشه کې ده نو نه شو کولای چه دپولينوم په شکل يي وليکواونه يي مشتق پيدا کيږي.

## خطي ديفرينشيال معادلې Linear Differential equation

هغه ديفرينشيال معادله ده چه د $(y)$اول مشتق يي موجود وي او د $(y)$ او $(y')$ دضرب حاصل يي معدوم وي. لکه:

$$2\frac{d^2y}{dx} + 5\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - x^2y = 3x$$

هغه ديفرينشيال معادلې چه خطي نه وي د غيرخطي معادلو يا $(non - linear\ equation)$ په نوم يادېږي. لکه:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4y^2 = 0 \qquad (\text{د } y \text{ توان} \neq 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\cdot\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin xy = 0$$

$$5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 3y = 0$$

ځرنګه چه د دغه معادلو پروګرام د لېسې د سويئي څخه لوړ دی د عالي رياضياتو په مستقل کتاب کې د ديفريشيال معادلو د تفصيل تصميم شته د پاک الله جل جلاله څخه توفيق غواړو.

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

# احصائیه

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

# اتلسم فصل

## احصائیه

احصائیه په لغت کی سرشماری ته وایي.

او په اصطلاح احصائیه هغه علم دی چه د اجتماعي ژوند واقعات بررسي کوي. قاعده يي داده چه نفوس ، حاصلات،او نور شیان محاسبه کوي او بیایي د عددو په شکل لیکي.

احصائیه ډېر قسمونه لري لکه اقتصادي احصائیه ،اخلاقي احصائیه ،سیاسي احصائیه ،د نفوسو احصائیه او داسی نور.

داتا Data:

راټول شوو معلوماتو ته داتا وایي.

### د اطلاعاتو د راټولو طریقه:

اطلاعات معمولاًپه څلورو طریقو راټولیږي

1- د پوښتنو پواسطه

2-دلیکنو پواسطه

3- د لیدنی پواسطه

4- د تجربې پواسطه

1- د پوښتنو پواسطه د اطلاعاتو راغونډول:

که وغواړو چه د یوی کورنی د عایداتو اطلاعات لاس ته راوړو نو که عایدات لږ وي کولای شو چه د شفاهي پوښتنو پواسطه اطلاعات لاس ته راوړو.

2- د لیکنی پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که د یوی کورنی عایدات زیات وي په ذهن کی یي حفظ مشکل وي نودلیک پواسطه یي دعایداتو اطلاعات راټولوو اوپه راجستړ کی یي لیکو.چه د عایداتو اطلاعات وسائل شي او د منځه لاړ نه شي.

ketabton.com - The Digital Library



3- د ليدنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که وغواړو چه د يوه شاګرد نمرو په هکله اطلاعات لاس ته راوړو. نو ښه طريقه داده چه نتايج يا اطلاعنامه وکتل شي او دنومورې د نمرو په باب ښه معلومات حاصل شي.

4- د تجربې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

مثلاً د يوه مرکب جسم داجزاؤ د ښه معلومات لپاره تجربه ضرور ده.

ټولنه او جامعه *Population and sample*:

هغه خلک چه د اړتيا وړ اطلاعات ترې لاس ته راځي. جامعه بلل کيږي.

پوښتنه: د جامعې د هر تن څخه د اطلاعاتو لاس ته راوړلو ته پوښتنه وايي.

نمونه: دجامعې هغه برخه ده چه د جامعې د اطلاعاتو د لاس ته راوړلو لپاره ترې پوښتنې کيږي او د جامعې خواص پکې موجود وي. لکه يو موټې وريجې د يو ګدام وريجو نمونه ده.

تصادفي نمونه:

د يه يوه صفت موصوف شيانو څخه د يوې برخې ټاکل تصادفي نمونه ده.

دغه برخه بايد لاندې درې صفات ولري.

1- د نمونې دغړي په توګه د يوه شي يا يوه کس ټاکل بايد امکان ولري.

2- تر ټاکنې د مخه بايد د نمونې د غړو په هکله قضاوت ناممکن وي.

3- د نمونې ټول غړي بايد په نمونه کې برابره برخه ولري که نمونه تصادفي وي او که نه. مثلاً که د دولت په مامورينو کې د ښوونکو معاش دوه چنده شي نودا پېښه يوه تصادفي پېښه ده.

تصادفي متحول او ډولونه يې:

که په يوه ټولنه کې د يوې موضوع په باب راټول شوي معلومات يا اطلاعات د يوه غړي څخه بل غړي ته د انتقال وړ نه وي دغه موضوع يوه تصادفي اطلاع ده.

تصادفي متحول په دوه ډوله دی.

ketabton.com - The Digital Library

1- کیفي تصادفي متحول
2- مقداري تصادفي متحول

## 1- کیفي تصادفي متحول:

چه معلومات یي په توصیفي ډول بیانیږي عدد ته ضرورت نه لري لکه د کارګرانو د سواد اندازه ، یا د یوه کلي دینداره خلک

## 2- مقداري تصادفي متحول :

هغه متحول دی چه د اطلاعاتو معلومات یي په شمېر سره کیږي. او په دوه ډوله دي.

الف: متصل مقداري تصادفي متحول ب: منفصل مقداري تصادفي متحول

الف- متصل مقداري تصادفي متحول :چه معلومات یي په عدد سره کیږي او د پرلپسی عددو تر منځ یي عدد پیدا نه شي.

ب- منفصل مقداري تصادفي متحول: چه د پرلپسی عددو تر منځ یي عدد موجود وي.

## دفریکونسي جدول $Table\ of\ frequncy$:

هغه جدول دی چه د داتاګانو معلومات پکي ترتیب شوی وي. که جدول په عمودي ډول ترتیب شوي وي دجدول د چپ طرف ستون داتاګاني یا معلومات ښیي او دښي طرف ستون یي د داتاګانو فریکونسي ښیي.لکه درنګونوجدول چه چپ طرف رنګونه یا داتا ښیي اوښي طرف فریکونسي ښیي.او که جدول په افقي ډول ترتیب شوی وي اول سطر د داتاګانو نمایندګي کوي اودویم سطر د هری داتا فریکوئسي ښیي.

| دکورنی غړي | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | مجموعه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| دکورنی شمېر | 4 | 7 | 9 | 8 | 6 | 2 | 3 | 1 | 40 |

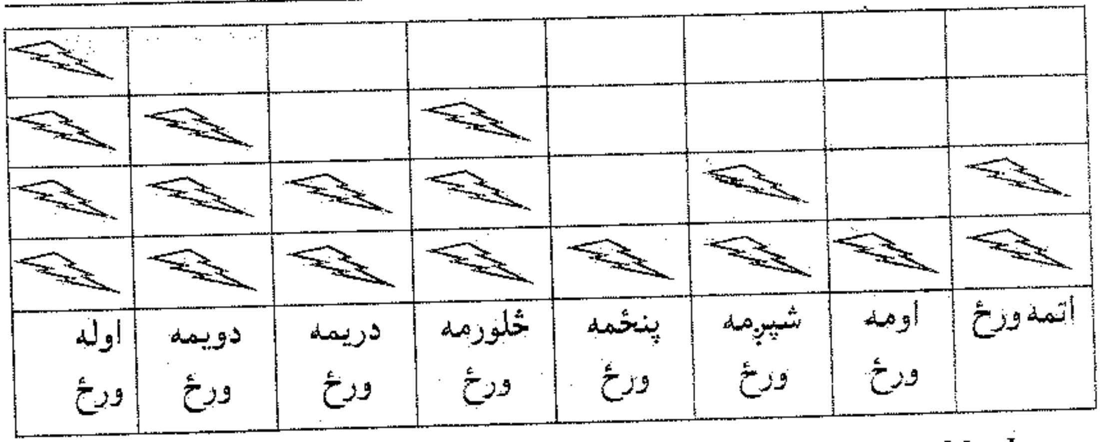
## انځوریز ګراف یا تصویري ګراف

که په راکړشوو معلوماتو باندی د ښې پیژندګلوی لپاره شکلونه یا سمبولونه په یوه جدول کی استعمال شي دغه ګراف د انځوریز ګراف په نوم یادیږي.

دشکل ځخه معلوم کړئ چه دکاندار په کومه ورځ زیاتی اری خرځی کړي دي.

ketabton.com - The Digital Library






موډ $Mode$:

د راټول شوو معلوماتو زياتي فريکونسي ته موډ وايي.

موډ د مالونو په خرڅولو کې ، د رايو په اچولو کې ، د امتحان په نمرو او داسې نورو شيانو کې استعماليږي.

اوسط $Mean$:

د اعدادو د مجموعې او شمېر نسبت ته اوسط وايي.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

مثال: يو دکاندار په اوله ورځ څلور کتابونه په دويمه ورځ پنځه کتابونه په دريمه ورځ شپږ کتابونه خرڅ کړي دي وواياست چه په اوسط ډول يي د ورځې څو کتابونه خرڅ کړيدي؟

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{4+5+6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

ketabton.com - The Digital Library

## د مجزا داتا ګانو د کثرت جدول:

هغه جدول دي چه په هره طبقه کی د داتاګانوشمېر راښيي.

مثلاً دیوه ټولګي د شاګردانو د رياضي دمضمون نمري په یوه جدول کی ليکل شوي دي دا نمري په ګروپو ويشو او په هرګروپ کی دشاملو نمرو شمېرليکو په دغه شمېرکی زيات عدد ته د داتا کثرت وايي . اودی جدول ته د داتاګانو دکثرت جدول وايي که په جدول کی د داتاګانو دکثرت عدد کوچني يا صفر وي. دجدول جوړول فايده نه کوي.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 42 | 25 | 30 | 35 | 48 | 67 | 59 | 51 | 58 | 78 |
| 62 | 77 | 48 | 56 | 75 | 78 | 72 | 71 | 56 | 43 |
| 54 | 53 | 57 | 63 | 72 | 70 | 42 | 55 | 47 | 20 |
| 59 | 40 | 62 | 12 | 75 | 26 | 76 | 72 | 63 | 56 |

جدول يي داسي جوړيږي.

| نمري | شمېر |
|---|---|
| 0 - 9 | 0 |
| 10 – 19 | 1 |
| 20 - 29 | 3 |
| 30 - 39 | 2 |
| 40 - 49 | 7 |
| 50 - 59 | 11 |
| 60 - 69 | 5 |
| 70 - 79 | 11 |

## د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصيتونه:

په یوه طبقه کی کوچني عدد ته ټيټ سرحد اوغټ عدد ته لوړسرحد وايي.هغه داتاګانی چه په یوه طبقه کی راځي د طبقی د وسعت په نوم یادیږي.د یوی طبقی د وسعت دپيدا کولو دطبقی سرحدات یو دبل څخه منفي کوو.

ketabton.com - The Digital Library



| | |
|---|---|
| $50 - 0 = 50$ | د لمړی طبقې وسعت |
| $60 - 50 = 10$ | د دویمې طبقې وسعت |

ډله ایز (تجمعي) کثرت:

د ټولو طبقود کثرتو مجموعی ته تجموعي کثرت وايي.

مثلاً که د کال د هری میاشتې د رخصتی ورځو ته کثرت ووایو نود ټول کال د رخصتیو مجموعه ډله ایز کثرت یا تجموعي کثرت دی.

نسبي کثرت:

د دوه ډلو د مطلق کثرت او تجموعي کثرت نسبت ته نسبي کثرت وايي.

$$\text{نسبي کثرت} = \frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{د ټولو داتاګانو کثرت}}$$

مثال: په یوه ازموینه کی د دوه ټولګیو نمری په لاندی جدول کی راوړل شوي دي دا ټولګي د نمرو په لحاظ پرتله کړئ؟

| مطلق کثرت | د الف ټولګی |
|---|---|
| 6 | 10-30 ضعیف |
| 10 | 50- 30 متوسط |
| 4 | 70- 50 ښه |

| مطلق کثرت | د ب ټولګی |
|---|---|
| 19 | 30- 10 ضعیف |
| 25 | 50- 30 متوسط |
| 16 | 70- 50 ښه |

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library


حل: د دواړو ټولګیو نسبي کثرت پیدا کوو

| د الف ټولګی | مطلق کثرت | نسبي کثرت | د نسبي کثرت فیصدي |
|---|---|---|---|
| 10- 30 | 6 | $\frac{6}{20}$ | 30% |
| 30-50 | 10 | $\frac{10}{20}$ | 50% |
| 50- 70 | 4 | $\frac{4}{20}$ | 20% |

| د ب ټولګی | مطلق کثرت | نسبي کثرت | د نسبي کثرت فیصدي |
|---|---|---|---|
| 10-30 | 19 | $\frac{19}{60}$ | 31.6% |
| 30-50 | 25 | $\frac{25}{60}$ | 41.6% |
| 50=70 | 16 | $\frac{16}{60}$ | 26.6% |

## میله اي ګراف

که د هری طبقی ګراف داسې رسم شي چه هر واحد یي یوه مربع وښودل شي اومربعګانی یو پر بل کېښودل شي دغه ګراف ته میله یي ګراف وایي.

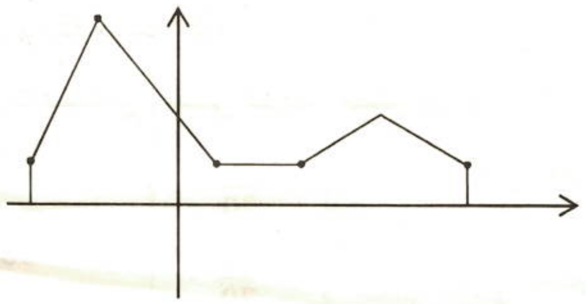
مثلاً دځو کلونو دپنبی د حاصلاتو ګراف یا درنګونو ګراف چه هره مربع په یوه رنګ خوښوونکي دلالت وکړي.

## دمنکسری کرښی ګراف:

داتا ګانی د ټکو پواسطه د وضعیه کمیتونو پر مخ وښیو که دغه نقطی په یوه استقامت نه وی او وصل یي کړو منکسر خط لاس ته راځي چه دغه ګراف ته د منکسری کرښی ګراف وایي

ketabton.com - The Digital Library





### د گسسته یا غیر متصلو داتا گانو اوسط:

داتاگانی جمع کوو اود داتاگانو په شمیر یي ویشود داتاگانو اوسط په لاس راځي.د داتاگانو دتکرار په صورت کی د مکرری داتاگانی په فریکونسي کی ضربوو او جمع کوو یي د داتاگانو په شمیر یي ویشود داتاگانو اوسط په لاس راځي.که د داتاګانولمړی گروپ په $x_1$ او فریکونسي یي په $f_1$ وښیو او اوسط په $\acute{x}$ وښیو نود اوسط فارمول په لاندی ډول دی

$$\acute{x} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{n}$$

مثال :د یوه شرکت دعایداتو اندازه په لاندی ډول ده.

| دنده | د افغانیو په حساب میاشتنی عاید |
|---|---|
| رئیس | 50000 |
| دوه مرستیالان | 40000 |
| منشي | 20000 |
| دری متخصصان | 30000 |
| پنځه مامورین | 25000 |
| دوه خانه سامانه | 10000 |

د شرکت مدیر وایي چه بایداوسط عایدباید 30000 وي ووایاست چه دادعا درسته ده

| job | $f$ | $x$ | $f \times x$ |
|---|---|---|---|
| رئیس | 1 | 50000 | $1 \times 50000 = 50000$ |
| مرستیال | 2 | 40000 | $2 \times 40000 = 80000$ |

ketabton.com - The Digital Library


| | | | |
|---|---|---|---|
| منشي | 1 | 20000 | $1 \times 20000 = 20000$ |
| متخصصین | 3 | 30000 | $3 \times 30000 = 90000$ |
| مامورین | 5 | 25000 | $5 \times 25000 = 125000$ |
| خانه سامان | 2 | 10000 | $2 \times 10000 = 20000$ |

د کارکوونکو شمېر $n = 1 + 2 + 1 + 3 + 5 + 2 = 14$

$$\acute{x} = \frac{50000 + 80000 + 20000 + 90000 + 125000 + 20000}{14}$$

$$= \frac{385000}{14} = 27500$$

د مدیر ادعا سمه نه ده .

## د جدول په مرسته د نښتو داتاګانو اوسط:

د هم جنسه شیانو داتاګانو ته نښتی داتاګانی وایي.که د دغه داتاګانوفریکونسیانی مختلفی وي.هغه داتاګانی چه فریکونسیانی یي نژدی وي په یوه ګروپ کی لیکواو د ګسسته داتاګانو د فارمول په څېر یي اوسط پیداکوو.

مثال: یوه بزګر الوګانو په بوریو کی واچول اوویي ویل چه د بوریو وزن په اوسط ډول اوه منه دي.د ښاروالی له خوا بوری بیا وتلل شولی چه نتیجه یي په لاندی جدول کی درج ده.

| د هری بوری وزن | د بوریو شمېر |
|---|---|
| 6 - 6.5 | 11 |
| 6.5 - 7 | 14 |
| 7 - 7.5 | 12 |
| 7.5 - 8 | 8 |

د هر ګروپ اوسط د بوریو په شمېر کی ضربوو.اوسط یي پیدا کوو.

| دبوریو وزن | دبوریو شمېر |
|---|---|
| 6.25 | 11 |

ketabton.com - The Digital Library



| | |
|---|---|
| 6.75 | 14 |
| 7.25 | 12 |
| 7.75 | 8 |

$x = 6.25 \times 11 + 6.75 \times 14 + 7.25 \times 12 + 7.75 \times 8$ د بوريووزن

$x = 68.75 + 94.5 + 87 + 62 = 312.25$

$n = 11 + 14 + 12 + 8 = 45$ د بوريو شمېر

$\acute{x} = \frac{312.25}{45} = 6.93\overline{8}$ په اوسط ډول د بوريو وزن

## د داتاګانو د ګېډۍ کولو طريقه

که د داتاګانو د اعضاؤ شمېر سره نژدې ؤ کولای شو چه د داتاګانو څخه ګېډۍ جوړه کړو.

لکه:

115 140 118 120 128 143 117 127

115 − 120

120 − 128

128 − 143

وسعت:

د لوئي داتا او کوچنۍ داتا تر منځ فاصلې ته وسعت وايي.

## د ګېډۍ اوږدوالی:

که د داتاګانو وسعت د ګېډيو په شمېر ووېشل شي د ګېډۍ طول يا اوږدوالی لاس ته راځي.

## ميله ئي ګراف:

که مربعګانې يا مستطيلونه سر په سر کېښودل شي .ميله ئي ګراف لاس ته راځي.

## د متصلو داتاګانو دسته بندي:

هم جنسه داتاګانو ته متصلې داتاګانې وايي . د دسته بندۍ لپاره يي هغه داتاګانې چه د واحداتو اندازه يي نژدې وي په يوه ګېډۍ کې ليکو.

د (15) ذده کوونکواوږدوالی په لاندې ډول ليکل شوی دي

ketabton.com - The Digital Library

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 153 | 148 | 151 | 138 | 136 |
| 142 | 131 | 141 | 141 | 139 |
| 152 | 159 | 139 | .132 | 146 |

پورته داتاګانو څخه ګېډۍ جوړې کړئ.

| دذده کوونکو شمېر | د ذده کوونکو دونی اوږدوالی |
|---|---|
| 6 | 130 − 140 |
| 5 | 140 − 150 |
| 4 | 150 − 160 |

وزني اوسط یا منځنی قیمت:

وزني اوسط هره داتا په مربوطه ضریب کې ضربوو او د داتاګانو په مجموعه یې ویشو.

$\acute{x} = \frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$ وزني اوسط

مثال : د ځینو پوهنتونونو نمرې د تورو په اساس ورکول کېږي .لکه A, B. C, D, F چې $A = 4$ او $B = 3$ او $C = 2$ او $D = 1$ او $F = 0$ ارزښت لري یو محصل لاندې لمبرې اخیستې دي.

| مضمون | نمرې | د کریدیتونو شمېر |
|---|---|---|
| ریاضیات | $B$ | 3 |
| فزیک | $A$ | 3 |
| کیمیا | $C$ | 2 |
| بیولوژي | $D$ | 3 |
| ژبه | $F$ | 1 |

د محصل د نمرو اوسط څو دی؟

حل:

| مضمون | حرفي نمرې | $x =$ د کریدیتوشمېر | $w =$ عددي لمبرې | $w \cdot x$ |
|---|---|---|---|---|
| ریاضیات | $B$ | 3 | 3 | $3 \times 3 = 9$ |
| فزیک | $A$ | 3 | 4 | $4 \times 3 = 12$ |

ketabton.com - The Digital Library



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| کیمیا | $C$ | 2 | 2 | $2\times 2=4$ |
| بیولوژي | $D$ | 3 | 3 | $3\times 3=9$ |
| ژبه | $F$ | 1 | 4 | $4\times 1=4$ |

د کریډیټونو شمېر $= n = 12$

$$\text{د نمرو اوسط} = \bar{x} = \frac{9+12+4+9+4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

## مستطیلي ګراف

په مستطیلي ګراف کې د مستطیل قاعده د ډاټاګانو اتصال یا پیوستون راښیي. مساحت د ګېډې کثرت راښیي. که د ګېډېو اوږدوالي مساوي وي نو د مساحتو په عوض کثرت لیکو په دې حالت کې اوږدوالی د کثرت عمودي محور دی.

مثال: په یوه ټولګي کې د ذده کوونکو وزن په لاندې ډول دی.

| د ذده کوونکو وزن په کېلوګرام | $40-45$ | $45-50$ | $50-60$ | $60-70$ | $70-90$ |
|---|---|---|---|---|---|
| دذده کوونکو شمېر | 4 | 6 | 12 | 8 | 8 |

وزن د $(X\acute{X})$ په محور ښيو او څرنګه چه $5kg$ د ټولو منځ کې مشترک دي نو د $(X\acute{X})$ محورټول وزنونه په یوه واحد اندازه کوو $(40-45)$ په یوواحدښيو.د مستطیلو د ارتفاعګانو د پیدا کولو لپاره کثرت په اوږدوالي وېشو

$$40-50 \to \frac{4}{1} = 4 \to \frac{4}{5} = 0.8$$

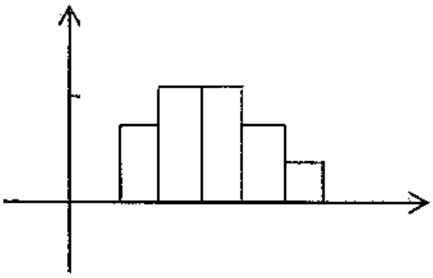
$$45-50 \to \frac{6}{1} = 6 \to \frac{6}{5} = 1.2$$

$$50-60 \to \frac{12}{2} = 6 \to \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60 \to 70 \Rightarrow \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \frac{4}{10} = 0.4$$

$$70 \to 80 \Rightarrow \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \frac{2}{20} = 0.1$$

ketabton.com - The Digital Library



## دایروي ګراف:

د دایرې په مرسته د ناڅاپي متحول د داتاګانو ښودلو ته دایروي ګراف وایي.

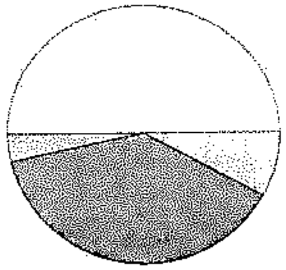
د کثرت ددرجې دلاس ته راوړلو لپاره د داتاګانو کثرت د ټولو داتاګانو په شمېر لیکواو په (360°) کې يې ضربوو دهرې ګټې ی مرکزي زاویه لاس ته راځي.

$$\text{د کثرت د درجې له جنسه} = \frac{\text{د داتاګانو کثرت}}{\text{د ټولو داتاګانو شمېر}} \times 360^\circ$$

مثال:- د یوې مؤسسې دکارکوونکو شمېر (200) کسه دي وظیفې یې د تحصیل د درجې له جنسه وېشلې دي.

| د تحصیل درجه | کثرت | مرکزي زاویه د درجې له جنسه |
| --- | --- | --- |
| ډاکټر | 5 | $\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9$ |
| ماشتر | 10 | $\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18$ |
| لیسانس | 100 | $\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180$ |
| څوارلسم پاس | 45 | $\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81$ |
| دولسم پاس | 40 | $\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72$ |

ketabton.com - The Digital Library

### میانه Median:

د داتاګانو د تحول وسطي عدد ته میانه وایي.

لکه: (4 1 5 3 2) د اعدادو د سیټ په څېر يي ترتيبوو.

(5 4 3 2 1) وسطي عدد يي (3) دی.که د داتاګانو شمېر جفت وي.د منځنيو دوه داتاګانواوسط د داتاګانو میانه ده.لکه (10 4 3 9 6 2) چه میانه يي داسې پيدا کيږي.(10 9 [4 6] 3 2) چه $\frac{4+6}{2}=5$ یعنی میانه يي (5) ده.

### د تحول ساحه Evolution of field:

که د متحول د اوږدوالي تغیر په يوه ساحه کی ممکن وي دغه ساحی ته د تحول ساحه وايي.

په ټولنه کی د ساحی وسعت د ټولنې پراګنده ګي ښيي.په هره اندازه چه دا توپیر کم وي پراګنده ګي کمه ده او دټولنی د وګړو تر منځ نږدېکت زيات دي. که د تحول ساحه صفر وه نودټولنی د څېړنی ځانګړتياوی برابری دي اوټولنه متجانسه ده.

مثال : په څلور میاشتنی ازموینه کی د دوه ذده کوونکو لمبری په لاندی ډول دي.

39 38 37 36 35 33 32 25 21 20
39 35 34 34 35 35 35 34 33 20

د دواړو سیټونو د تحول ساحه پیدا کړئ او ووایاست چه په کومه ګېډۍ کی پراګنده ګي زیاته ده ؟

حل:- د لوړو سرحدو څخه ټيټ سرحدونه منفي کوو.

$$39-20=19$$

د دواړو د تحول ساحه مساوي ده مګر په اول ګروپ کی پراګنده ګي زیاته ده.

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library


## د انحراف اوسط *Average deviation*

د داتاګانو او اوسط د تفاضل اوسط ته د انحراف اوسط وايي

د داتاګانو د اوسط انحرافونو مجموعه صفر وي نو له همدی امله د اوسط انحرافونو د جمع کولو په وخت کی د هغوی مطلقه قیمتونه جمع کوي.او په لاندی ډول جمع کیږي.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1-\acute{x}|+|x_2-\acute{x}|+\cdots+|x_n-\acute{x}|}{n}$$

مثال: د (40) تنو شاګردانو لمبری په لاندی جدول کی راکړشوي دي.

| نمری | کثرت |
|---|---|
| 0 − 10 | 2 |
| 10 − 20 | 7 |
| 20 − 30 | 4 |
| 30 − 40 | 5 |
| 40 − 50 | 10 |
| 50 − 60 | 12 |

د انحراف اوسط يي پيدا کړئ؟

$$\acute{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

| $f$ = کثرت | د داتاګانو اوسط | $f \cdot x$ | $x - \acute{x}$ | $f(x-\acute{x})$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 10 | $5 - 37.5 = -32.5$ | $2 \times (-32.5) = -65$ |
| 7 | 15 | 105 | $15 - 37.5 = -22.5$ | $7(-22.5) = -157.5$ |
| 4 | 25 | 100 | $25 - 37.5 = -12.5$ | $4 \times (-12.5) = -50$ |
| 5 | 35 | 175 | $35 - 37.5 = -2.5$ | $5 \times (-2.5) = -12.5$ |
| 10 | 45 | 450 | $45 - 37.5 = 7.5$ | $10 \times 7.5 = 75$ |
| 12 | 55 | 660 | $55 - 37.5 = 17.5$ | $12 \times 17.5 = 210$ |
| $\frac{1}{n = 40}$ | | 1500 | | |

$$f(x-\acute{x}) = -65 - 157.5 - 50 - 12.5 + 75 + 210 = 0$$

ketabton.com - The Digital Library



ليدل كيږي چه د جمع حاصل يي صفر دې نود انحرافونو د اوسطونو مطلقه قيمت په نظر کی نيسو.

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40}$$

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{65 + 157.5 + 50 + 12.5 + 75 + 210}{40} = \frac{570}{40} = 14.25$$

## د څوضلعي فريکونسي ګراف

د څوضلعي فريکونسي ګراف د متصلو داتاګانو د پاره استعماليږي.

مثلاً که څو کلاسونه ولرو چه سرحدات يي معلوم وي او وغواړو چه ګراف يي رسم کړو د هرکلاس مرکز (منځني نقطه) په افقي محور او فريکونسي يي په عمودي محور ښيو

د کلاس مرکزاوفريکونسي د وضعيه کميتونو په مستوي کی يوه نقطه تعينوي دغه نقطی وصلوو منکسر خط لاس ته راځي که د کلاسونو په اول کی $(x_1 - c, 0)$ نقطه او کلاسونو په اخر کی $(x_n + c, 0)$ نقطه اضافه کړو نو دڅو ضلعي فريکونسي ګراف لاس ته راځي.

مثال: په لاندی جدول کی د داتا څو ضلعي او مستطيلي ګراف رسم کړئ.

| $cl$ =د کلاسونو حدود | $11-16$ | $16-21$ | $21-26$ | $26-31$ | $31-36$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ = مطلقه فريکونسي | 3 | 5 | 8 | 7 | 2 |
| $x_i$ =د کلاسونو مرکز | 13.5 | 18.5 | 23.5 | 28.5 | 33.5 |

$c = 5$ دی نو د دوه اختياري نقطو د پيدا کولو لپاره په لاندی ډول اجرائت کوو.

$(x_1 - 5{,}0) = (13.5 - 5{,}0) = (8.5{,}0)$

$(x_2 + 5{,}0) = (33.5 + 5{,}0) = (38.5{,}0)$

ketabton.com - The Digital Library


داتا په صعودي ډول ترتیبوو. او د یو څخه تر $(n)$ پورې کود ورکوو د $(p = 1,2,3)$ موقعیت دلاندې رابطې پواسطه پیدا کیږي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

مثال: په (140 100 120 80 85 90) دیټا کې داولې ربعې او دریمې ربعومقادیر پیدا کړئ؟

حل:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | د دیټا شمېره |
| 80 | 85 | 90 | 100 | 120 | 140 | |

د لمړۍ اودریمې ربعو ځایونه عبارت دي.

$$c_{q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$c_{q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

$q_1 = 85$ & $q_2 = 120$

## صندوقچه يي ګراف:

صندوقچه يي ګراف هغه ګراف دي چه د نورو ګرافونو په نسبت د دېټا تیت والي زیات روښانه ، کوي د دېټا ګراف د لاندې اندازو په بنیاد روښانه کوي.

الف- تر ټولو کوچنۍ دېټا

ب- لمړۍ څلورمه

ج- میانه

د - دریمه څلورمه

ج- لويه دېټا

مثال : په یوه ښارکې په (15) ورځو کې د ترافیکي پېښو شمېر په لاندې ډول دې صندوقچه يي ګراف ئي رسم کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

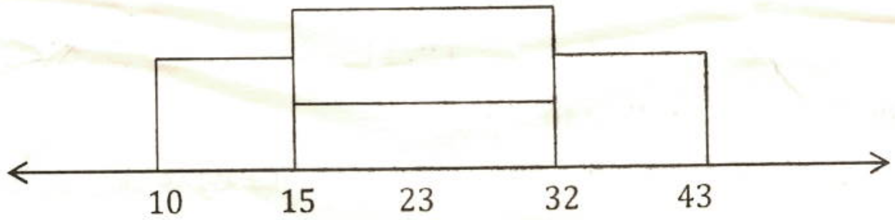


| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 10 | 15 | 23 | 14 | 27 | 16 |
| 34 | 41 | 43 | 32 | 18 | 25 | 31 |

پورتنۍ داتا په ترتیب لیکو .

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 18 | 23 |
| 25 | 27 | 31 | 32 | 34 | 41 | 43 |

تر ټولو کوچنۍ داتا $(q_1 = 10)$ ده اوتر ټولولویه داتا$(q_n = 43)$ ده میانه $(med = 23)$ده
لمړۍ ربعه $q_1 = 15$

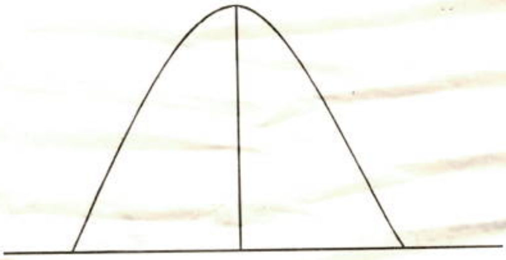


پورتنۍ ګراف صندوقچه يي ګراف دی چه 50% داتا د صندوق په داخل کې ده دلمړۍ او ځلورمی ربعو په منځ کې ده 25% د 10 او15 تر منځ ده او 75% د 32 او 43 ترمنځ ده.

## د نارمل منحني د مرکزي ټاکونکو پرتله کول

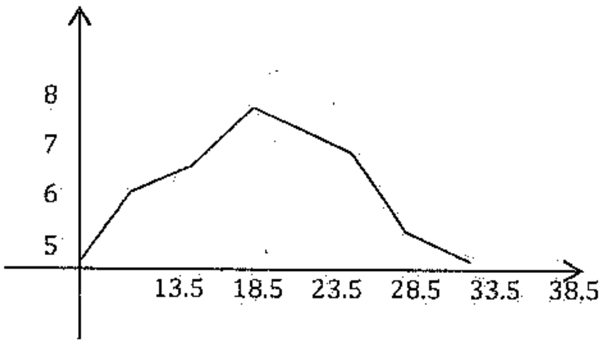
نارمل منحني يو متناظر منحني دې چه ديوه زنګ په ډول شکل لري او زياتی طبعي پېښې د همدغه منحني په واسطه ښودل کيږي.اوسط ، ميانه او موډ يي په مرکزي برخه کې قرار لري نوځکه ورته د نارمل منحني ټاکونکي وايي.

که منحني متناظر وي نواوسط په ميانه منطبق دی اوځرنګه چه يوه اعظمي نقطه لري نو ځکه يي موډ هم د اوسط اوميانې سره مساوي دی.

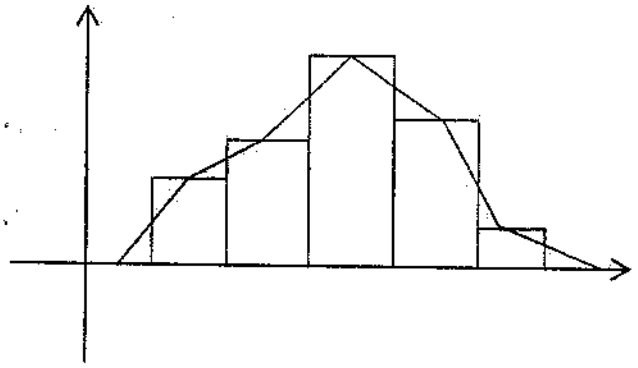


$\acute{X} = mod = med$

ketabton.com - The Digital Library


مستطیلي ګراف اود فریکونسي څو ضلعي ګراف:



د فریکونسي څو ضلعي دګراف راسونه د فریکونسي داړونده جدول د مستطیلو د پورتنۍ ضلعي په نیمایي منطبق دي دفریکونسي څو ضلعي مساحت دمستطیلو د مساحت سره مساوي دي.

د ساقې او پاڼې ګراف *Grph of stem and wrench*:

په دوه رقمي عدد کی د لسیز رقم ساقه او د یویز رقم پاڼه ده.

مثال : د سانتي متر په حساب د شل نوو پیدا شوو ماشومانود تنی اوږدوال په لاندې ډول انتخاب شوی دي.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 46 | 47 | 43 | 49 | 40 | 42 | 46 | 45 | 43 |
| 43 | 43 | 48 | 49 | 47 | 49 | 48 | 49 | 47 | 45 |

پورتنۍ داتاګانې په صعودي ډول ترتیب کړئ او څرنګه چه د(4) رقم یعنی دلسیز رقم یکی مشترک دی نو داتاګانې په لاندي ډول ترتیبوو.

ketabton.com - The Digital Library



$4+(0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)\cdots\cdots\cdots 1$

د صفر څخه تر (9) پورې د رقمو تکرار دپاڼو شمېر ښيي.پورتني رقمونه په لاندې ډول هم ليکلای شو.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | 3 | 3 | 3 |
| 5 | 5 | 5 | |
| 6 | 6 | | |
| 8 | 8 | | 9 |
| 9 | 9 | 9 | |

که د (1) شمارې د جدول څخه ګراف جوړ کړود ساقې او پاڼې ګراف لاس ته راځي چه (4) به يې قاعده او دقوس په منځ کې رقمونه به يې پاڼې وي.که پورتني جدول ته د $90^{\circ}$ په اندازه دوران ورکړو. ميله يې ګراف لاس ته راځي.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | | 9 | | |
| 3 | 5 | | 7 | | 9 | | |
| 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | |
| 0 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

ربعي $Quarters$:

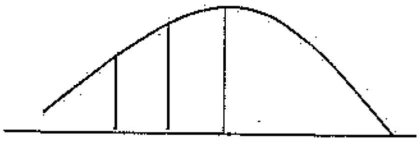
د يوه شي څلورمې برخې ته ربع وايي.

يعنې که يو شی په څلورو برابرو برخو وويشو برخې يې د اولي ربعي،دويمی ربعي، دريمی ربعي او څلورمی ربعي په نوم يادېږي.

اوله ربعه د شي 25% دويمه ربعه دشي 50% اودريمه ربعه دشي 75% وي.که داتا په صعودي ډول ترتيب شي د داتا ميانه د($Q_2$)سره مساوي ده د داتا داولی نيمايي ميانه ($Q_1$)ده او د دويمی نيمايي ميانه ($Q_3$) ده.

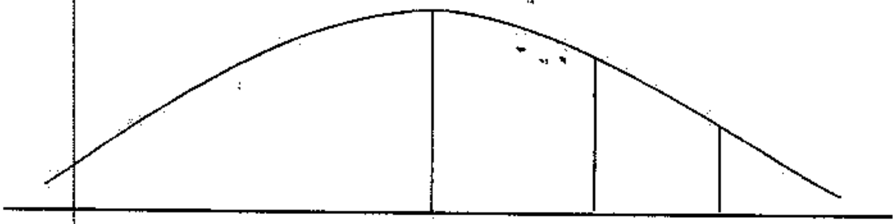
ketabton.com - The Digital Library

که اوسط اومیانه مساوي وي نو تر اوسط او میانی د مخه داتاګانی اوداوسط او میانی د وروسته دېتاګانو سره مساوي دي.اوکه اوسط د میانی کینې خواته پروت وي نو دهغه داتاګانو شمېر چه داوسط ښي خواته پرتې دي زیات دی تر هغه دېتاګانو دشمېر څخه چه د اوسط چپې خواته پرتې دي.



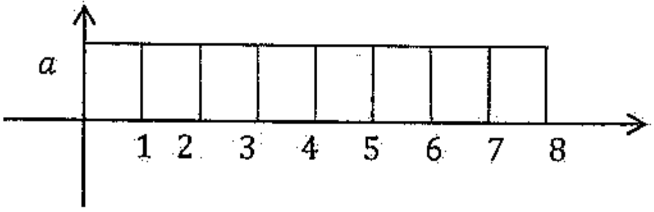
$\acute{X} = mod = med$

او که اوسط دمیانی ښی خواته پروت وي نود هغه داتاګانوشمېر چه د اوسط چپې خواته پرتې دي زیات دېد هغه داتاګانوتر شمېر چه د اوسط ښی خواته پرتې دي



$mod > med > \acute{x}$

مثال: په لاندی ګراف کی اوسط او میانه پیدا کړئ؟




$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\acute{x} = \frac{a\cdot 1 + a\cdot 2 + a\cdot 3 + a\cdot 4 + a\cdot 5 + a\cdot 6 + a\cdot 7 + a\cdot 8}{a+a+a+a+a+a+a+a} = \frac{36a}{8a}$$

$$\acute{x} = \frac{9}{2} = 4.5$$

ketabton.com - The Digital Library



## ربعي انحراف

ربعي انحراف يو له هغه تاکونکو څخه دی چه د ډېټا تيت والی ښکاره کوي.

مثلاً 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په منځ کی پرته ده په هره اندازه چه دا فاصله لږ وي په همغه اندازه ډېټا نژدې وي يعنی تيتوالی يې کم وي.

کله کله دځلورمو انحراف په $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ شکل ښيي چه دی ته د ځلورمي د نيمايي لمن وايي.

مثال: د لاندی عددونو د ځلورمو انحراف پيدا کړئ.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 22 | 22 | 23 | 24 | 25 | 29 | 30 | 31 | 35 | 36 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33 + 2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$Q_3 = 30.75$$

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11 + 2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$Q_1 = 22.25$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

## واريانس (*Variance*):

واريانس په لغت کی اختلاف ته وايي.

اوپه اصطلاح کی که څو داتاګانی ولرو دهری داتا اوسط پيدا کړود داتاګانو دهغوی د اوسطونودتفاضل د مربعګانود مجموعی اوسط ته واريانس وايي.

د انحرافونو د مربعګانو مجموعه عبارت ده.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \acute{x})^2 = (x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2$$

ketabton.com - The Digital Library

پورتنی مجموعه په ($n$) ویشواو په ($s^2$) یې بڼه واریانس لاس ته راځي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \acute{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2}{n}$$

د واریانس د پیدا کولو لپاره د لاندې فارمول څخه هم ګټه اخلي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \acute{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: دلاندې ډېټا وریانس د دواړو فارمولو په مرسته پیدا کړئ

1   5   6   7   9

الف: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ دفارمول پواسطه:

$$x' = \frac{1+5+6+7+9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$s^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (1.6)^2 + (2.6)^2 + (4.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{21.16 + 0.36 + 2.56 + 6.76 + 21.16}{5} = \frac{52}{5} = 10.4$$

ب: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} - \bar{x}^2$ فارمول څخه استفاده کول:

ketabton.com - The Digital Library


$$s^2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2}{5} - \acute{x}^2$$

$$s^2 = \frac{1 + 25 + 36 + 49 + 91}{5} - (5.6)^2 = \frac{192}{5} - 31.36 = 38.4 - 31.36$$

$$s^2 = 7.04$$

یادونه:

که دځو کلاسو دېټاګانې $x_1, x_2, \ x_3, \cdots x_n$ وي او فریکونسي ګانې يي په لاندې ډول وي $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ واریانس يي د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_1 (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ دی

د متحول دمربع واحد د واریانس واحد دی.

## معیاري انحراف (مطلق تیتوالی):

د واریانس مربع جذر ته معیاري انحراف وايي په $(s)$ سره يي ښيي اود لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \acute{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

واحد يي د متحول واحد دی.

ثبوت:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \acute{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2 - 2\acute{x}x_i + \acute{x}^2) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2x\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \acute{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2n\acute{x}^2 + n\acute{x}^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\acute{x}^2\right)$$

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library


$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right\} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right\}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

مثال:- د (5) ناروغانو د بدن د حرارت درجه په لاندې ډول راکړ شوې ده.

38 39 39 40 41

د حرارت د درجې معیاري انحراف یې پیدا کړئ.

حل:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{38 + 39 + 39 + 40 + 41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$s^2 = \frac{(38 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (40 - 39.4)^2 + (41 - 39.4)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{1.96 + 0.16 + 0.16 + 0.36 + 2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$s^2 = 1.04 \quad \Rightarrow s = \sqrt{1.04} = 1.0198$$

$$s = 1.0198$$

پاملرنه:

د فریکونسیو د جدول څخه معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول هم لاس ته راځي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \acute{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i {x_i}^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \acute{x}^2}$$

چه $\acute{x}$ د ډېټا اوسط ، $x_i$ د کلاس مرکز او $f_i$ د کلاس فریکونسي ده.

ketabton.com - The Digital Library



## دبدلون ضريب يانسبي پراګنده ګي:

د بدلون ياتغير ضريب د معياري انحراف او مطلق اوسط نسبت دى مطلق اوسط واحد نلري.

$$\text{د بدلونونو يا تغيراتو ضريب} = \frac{\text{معياري انحراف}}{\text{اوسط}}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\acute{x}}$$

که د تغيراتو ضريب په 100 کی ضرب کړودتحول ضريب لاس ته راځي.

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\acute{x}}$$

د بدلون ضريب دمثبتو دېتاګانو لپاره دی.که دېتاګانی مساوي وي د بدلون ضريب صفر دی.که ټولی دېتاګانی په يوه مثبت عدد کی ضرب شي د بدلون ضريب تغير نه کوي.

که دهری دېتاسره يو مثبت عدد ورزيات شي د بدلون ضريب کوچنی کيږي.

مثال: د $(1،3،5)$ دېتا د بدلون ضريب محاسبه کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}{3}$$

$$s^2 = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{2.67} \Rightarrow s = 1.6$$

$$c \cdot v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1.634013464}{3} = 0.545$$

دويم مثال: د تلويزون د تصويري لامپونو توليدوونکې د$(A)$ او $(B)$ دوه ډوله لامپونه توليدوي د $(A)$ متوسط عمر $(1495)$ ساعته او د $(B)$ متوسط عمر $(1875)$ ساعته دې معياري انحرافونه يي په ترتيب سره $(280)$ او $(310)$ دي دکوم لامپ دضريب بدلون زيات دی.

ketabton.com - The Digital Library


حل:

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\%$$

$$C \cdot V_B = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\%$$

څرنګه چه $C \cdot V_A > C \cdot V_B$ دی نو لامپ ډېره پراګنده ګي لري ولی تینګښت یې کم دی.

## په نورمال منحني کی تیتوالی:

دنورمال منحني په دواړو خواو کی د$(\acute{x} - s, \acute{x} + s)$ اویاد $(\acute{x} - 2s, \acute{x} + 2s)$ پواسطه پراګنده ګي یا تیتوالی پیدا کیږي.

مثال: د یوی موسسی د معاش اوسط (12500) او معیاري انحراف یي (700) دی.

**الف**: په نورماله توزیع کي د فیصدی په نظر کی نیولو سره د معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: ایا ویلای شئ چه (14000) افغانی معاش غېر عادي معاش دی؟

حل: لمړي $\acute{x} \pm s$ او $\acute{x} \pm 2s$ او $\acute{x} \pm 3s$ قیمتونه په لاس راوړو.

| فیصدي | فاصله د افغانیو له مخی | فاصله د $(s)$ له مخی |
|---|---|---|
| 68% | 11800 − 13200 | $\acute{x} \pm s$ |
| 96% | 11100 − 13900 | $\acute{x} \pm 2s$ |
| 99.6% | 10400 − 14600 | $\acute{x} \pm 3s$ |

$$\acute{x} = \frac{11800 + 11100 + 10400 + 13200 + 13900 + 14600}{6}$$

$$= \frac{75000}{6} = 12500$$

$$14000 - \acute{x} = 14000 - 12500 = 1500$$

$$\frac{1500}{700} = 2.14$$

نو(14000) افغانی معاش غېرعادي معاش دی ځکه چه د $(2S)$ داندازی څخه زیات اوهم د $(\acute{x})$ داندازی څخه ډېر دي.

ketabton.com - The Digital Library



## د نورماله توزیع مشخصات:

د نورمال په دواړو خواو کې د نورمال په نسبت د منحني د ټیټوالي، جګوالي او نژدیکت عامل ته شاخص وایي. شاخص په دوه ډوله دي.

### 1- د خلمېدلو شاخص *Skewness* :

هغه توزیع چه د اوسط په دواړو خواو کې متناظره نه وي خلمېدل نومیږي. د لاندې دوو ضریبونو پواسطه ښودل کیږي.

الف- د خلمېدلو ضریب: د خلمېدلوضریب هغه شاخص دی چه د خلمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره استعمالیږي. فارمول یي په لاندې ډول دی.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2}{s^2}$$

که $\alpha_3 = 0$ وي نوتوزیع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي د منحني د توزیع خلمېدل مثبت دي *Possitive Skewness* یعنی خمېدل یي ښي خواته دي.

او که $\alpha_3 < 0$ وي د منحني دتوزیع خلمېدل منفي *Negative Skewness* دي یعنی چپې خواته خلمیږي. که چېرته دکثرت جدول موجود وي خلمیدلو(عدم تناظر) یي د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^3}{\sum s^a}$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

ب- د پیرسون دخلمیدو ضریب: د پیرسون د خمېده ګۍ ضریب په لاندې ډول دی.

$$sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{s}$$

### 2- د پړسوب *kurtosis* شاخص:

دا شاخص ښیي چه څه وخت منحني جګوالی او څه وخت ټیټوالی لري فارمول یي په لاندې ډول دی‌ یک

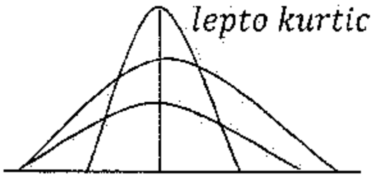
$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

که دکثرت جدول موجود وي نو دپړسوب فارمول په لاندې ډول دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

په دی فارمول کی $(s)$ معیاري انحراف دی.دغه شاخص دپرتله کېدلو لپاره استعمالیږي. د توزیع په ځای او پراګنده ګی.پوری اړه نلري.

مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.د ضریب دری ډوله خلمېدل او پړسوب ښیې.




حل : په نورمالي توزیع کی $\alpha_4 = 3$ دی ځکه که $\alpha_4 > 3$ شي نو پړسوب یي د نورمال منحني څخه ډېریږي.او که $\alpha_4 < 3$ وي نو پړسوب یي کم دی.

## څومتحوله ټولنې:

که په یوه کلاس کی یوازې دشاګردانو دونې په باب خبری کیږي نو په دغه ځای کی متحول یو دی.او که دشاګردانو د چاغښت په باب هم خبری وشي نو په دي صورت کی متحولونه دوه کیږي.د دغسی متحولونو تر منځ ریاضیکي اړیکي د قایمو مختصاتو په سیستم کی جوړیږي.لمړی د متحولونو معادلې جوړوو بیا د متحولونو په باب معلومات په مستوي کی په نخښه کوواو وصلوو یې.

مثال: یو متخصص د غذائي موادو تاثیر په یو شمېر موږکانو باندی وڅېړل.دغذاء تر تطبیق دمخه یې د هر موږک وزن اندازه کړ او بیا یې د عملیي تر تطبیق وروسته د هر موږک وزن اندازه کړاو لاندې دېټا ګانې یې په لاس راوړلی.

$$(1.8).\ (2.3).\ (1.7).\ (3.5).\ (2.4)$$

په هره جوړه کی لمړی مختصه د موږکانو د غذاء ترتطبیق دمخه وزن او دویمه مختصه د غذائي موادو تر تطبیق وروسته وزن دی.

ketabton.com - The Digital Library



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| د موږکانو شمېر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| د موږکانو لمړنی وزن | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| د غذائي موادو تر تطبيق وروسته د موږکانو وزن | 8 | 3 | 7 | 5 | 4 |

پورتنی جدول په ستوني ډول جوړ کړئ.

| دموږکانوشمېر | د موږکانولمړنی وزن | دغذائي رژيم ترتطبيق وروسته د موږکانووزن |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 8 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 7 |
| 4 | 3 | 5 |
| 5 | 2 | 4 |

پورتنی دېټاګانی دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

## دپراګنده ګی ګراف *Scatter Diagram*:

د دېټا داندازه کولولپاره په يوه مستوي کی پاشل شوی نقطی د پراګنده ګراف په نوم يادېږي.

لاندې مرتبې جوړې راکړشوي دي .

$$(1،2)،(2،3)،(3،4)،(4،5)$$

پورته دېټا د ښهر او خط دېټا ده.که سکه پورته خواته وغورزول شي او د ښهر مخ کښته خواته وي نود $(y)$ په محور يو ډېرېږي.

د موږکانو د غذائي رژيم دېټا په لاندی ډول ده.

$$(2،4)،(1،8)،(2،3)،(3،5)،(1،7)$$

په دغه دېټا کی د هری نقطی تابع ببله ده. نو له همدغه جهته ځو متحوله ټولنه ورته وائي.

## پېوستون او دپېوستون ضريب:

د يوه مستقيم او نقطو تر منځ دفاصلی د پيدا کولو فارمول ته دپېوستون ضريب وائي او په $(r)$ سره يي ښيي .او د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.

ketabton.com - The Digital Library

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y}$$

لاندې دېټا دموږکانو دغذائي رژیم دېټا ده.

| دموږکانو شمېر | لمړنی وزن$(x)$ | وروستني وزن $(y)$ | $xy$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 8 | 8 |
| 2 | 2 | 3 | 6 |
| 3 | 1 | 7 | 7 |
| 4 | 3 | 5 | 15 |
| 5 | 2 | 4 | 8 |
| | $\sum 9$ | $\sum 27$ | $\sum 44$ |

دموږکانود غذائي رژیم د وزنونو تر منځ دپیوستون ضریب محاسبه کړئ؟

لمړي وزنونه په $(x)$ او وروستني وزنونه په $(y)$ ښیو دموږکانو شمېر $n = 5$ دی.

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \quad , \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$s_x{}^2 = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$s_y{}^2 = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\text{د ضرب د حاصل مجموعه } x \text{ او } y}{\text{د دېټا شمېر}} = \frac{\sum x + \sum y}{n}$$

$$= \frac{(1 \cdot 8) + (2 \cdot 3) + (1 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (2 \cdot 4)}{5}$$

$$= \frac{8 + 6 + 7 + 15 + 8}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته راځي.

$$\text{د پیوستون ضریب} = r = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\sqrt{3.44}} = \frac{8.8 - 9.72}{1.36} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

ketabton.com - The Digital Library



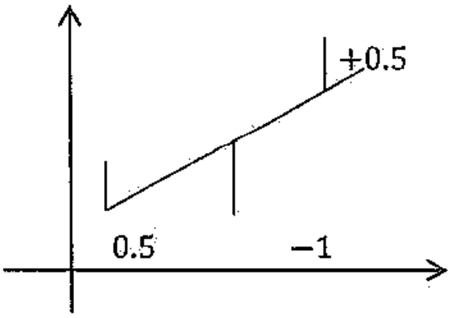
## د خطي مېلان معادله:

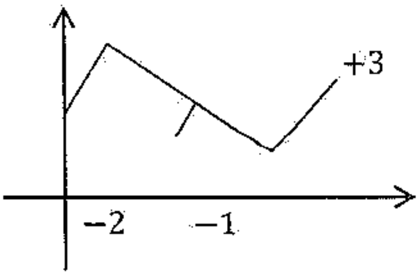
$y = ax + b$ د مستقيم خط معادله ده. چه دمستقيم خط مېلان دی که $a > 0$ وي کرښه متزايده ده. اوکه $a < 0$ وي نو کرښه متناقصه ده که $(x, y)$ جوړه د $y = ax + b$ په معادله کی صدق وکړي.

نونقطه په خط پرته ده . که دنقطی په مستوي داسی پاشلی وي چه کرښی ته نژدی وي نود پيوستون ضريب به $(-1)$ او$(+1)$ ته نژدي وي که يوه داسی کرښه چه معادله يي $y = ax + b$ وي د ټکو له منځه داسی تېره کړو چه ټولو ټکو ته نژدي وي نو د دغه کرښی د ترسيم لپاره بايد يوه داسی معادله جوړه کړو دفارمول تر جوړولو دمخه لاندې مثال په نظر کی نيسو.

| $x$ | 1 | 5 | 9 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 6 | 5 | 7 |

د دغه دېټا لپاره لاندې شکلونه رسموو اود کرښو خطاوی يي دمشاهدی څخه معلوموو.




په پورته دواړو حالتونو کی د کرښو د خطاګانو الجبري مجموعه صفر ده .

د الف حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2)$ = دکرښی د خطاګانو الجبري مجموعه

د ب حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5)$ = د کرښی دخطاګانو الجبري مجموعه

څرنګه چه په دواړو حالتو د جمعی حاصل صفر دی نومناسبه کرښه نه معلومېږي.نو دپاره ددی چه مثبت او منفي علامی يو اوبل دمنځه يونسي نووروسته تر مربع کولو يي جمع کوو.

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2$ = د خطاګانو ددويم توان جمع

ketabton.com - The Digital Library

$$\text{د خطاګانو د دویم توان جمع} = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = 1.5$$

هغه کرښه چه د مربعګانو مجموعه یي (1.5) مناسبه کرښه ده دغسی کرښو ته ریګریشن کرښی وایي.د رګریشن اومشاهداتوتوپیرپه وښیو نو د دویم توانونو دلاکوچني والي په خاطر لیکو.

$$\text{د خطاګانو ددویمو توانونو مجموعه} = \sum(y-\bar{y})^2 = \sum\{y-(ax+b)\}^2$$

$$= \sum(y-b-ax)^2$$

$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2$$

په دې حالت کی $(x)$ او $(y)$ ثابت عددونه دي $(a)$ او $(b)$ متحولین دي

$$b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

د $(a)$ او $(b)$ دمحاسبی دغه لارد لږکیو مربعګانو دتګلارې په نوم یادیږي.

نتیجه :-د ریګریشن کرښه هغه کرښه ده چه دیوه متحول د مقدار دمعلومولو دبل متحول د مقدار څخه استفاده کیږي.

مثال :- لاندی دېتاپه نظر کی ونیسئ.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

د ریګریشن کرښه نظر ته پیدا کړئ؟

حل : څرنګه چه

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$s_x{}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}$$

ketabton.com - The Digital Library



$$= \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sqrt{{s_x}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_1 - \bar{y})^2}{n}$$

$$= \frac{(4-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2}{5}$$

$$= \frac{\mathbf{4 + 1 + 0 + 1 + 4}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{5}} = \mathbf{2}$$

$${s_y}^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{{s_y}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot 1) + (5 \cdot 0)}{5}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4 + 6 + 6 + 4 + 0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{4 - 3 \cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b \cdot 3 \Rightarrow 4b = 2 \Rightarrow b = 0.5$$

$$a = r\frac{s_y}{s_x} = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$y = ax + b = -x + 0.5$$

ketabton.com - The Digital Library


## د احتمال د تابع توزیع

هغه تصادفي متحول چه په احصائیه او احتمالاتو کی څېړل کیږي.عبارت د هغه تابع څخه دی چه د تعریف ناحیه یې نمونه یې فضاء او د قیمتونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ وي.

که $\{x_n, f(x_n)\}_{n=1,2,3,4,..}$ ولرو نو لیکو چه

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \cdots (x_n, f(x_n))$$

دغه مرتبو جوړو ته مجزا (گسسته) احتمال تابع وایي.

د تجمعي اوپیوسته احتمال تابع د $F(x) = P(X \leq x)$ په شکل لیکل کیږي.

که چیری $f(x)$ د احتمال تابع او $(x)$ تصادفي متحول وي په دی صورت کی د دی احتمال چه $(x)$ د $(k_1)$ او $(k_2)$ په منځ کی وي دلاندی رابطی سره برابر دی.

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)dx$$

که چیری $(x)$ پیوسته ناځاپي متحول وي او $(k_1 < k_2)$ وي په دی صورت کی لیکو چه،

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

که چیری ناځاپه مجزا (گسسته) متحول وي په دی حالت اوسط $(Expected\ Value)$ د تصادفي مجزا متحول چه د $E(x)$ په شکل ښودل کیږي.د لاندی رابطی سره برابر دي

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots\cdots\cdots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د $(x)$ اوسط دی په $(\bar{x})$ سره هم ښودل کیږي که $(x)$ تصادفي گسسته متحول وي په دی صورت کی د $(x)$ وریانس چه د $(s^2)$ په شکل ښودل کیږید لاندی رابطی سره برابر دی.

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

ketabton.com - The Digital Library

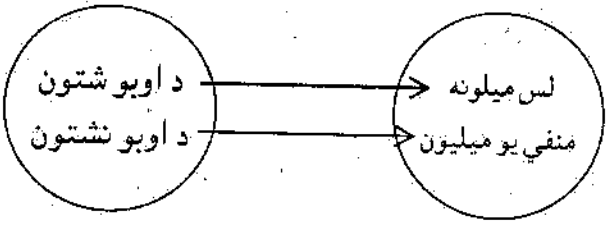


مثال: يو شخصي شرکت غواړي د يوې غونډۍ په سر يوه څاه وکني د اوبو څاه په يوميلون افغانۍ تماميږي . که څاه اوبه وکړي د شرکت مالک لس ميلونه افغانۍ اخلي او که اوبه ونه کړي يو ميلون تاوان ورکوي.

الف :-دا موضوع د يوې تابع په شکل وښيئ.

ب:-که د اوبو احتمال (0.2) وي او د اوبو د نه ورکولو احتمال (0.8) وي په دې صورت کې د احتمال تابع ،اوسط (*Expected Value*) ، وريانس او د تصادفي متحول معياري انحراف پيدا کړئ؟

د الف حل:




د ب حل: تصادفي متحول، داحتمال تابع ،اوسط ،وريانس، او معياري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

| معياري انحراف | واريانس | دتصادفي متحول دمربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه | اوسط | د تابع احتمال | تصادفي متحول |
|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | $s^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$ | $[x_i - E(x)]^2$ | $E(x) = \sum x_i f(x_i)$ | $f(x_i)$ | $x_i$ |
| 4.4 | $4.84 \cdot 0.8 = 3.872$ <br> $77.44 \cdot 0.2 = 15.488$ | $(-1-1.2)^2 = 4.84$ <br> $(10-1.2)^2 = 77.44$ | $-1 \cdot 0.8 = -0.8$ <br> $10 \cdot 0.2 = 2$ | 0.8 <br> 0.2 | −1 <br> 10 |
| | $\sum s^2 = 19.360$ | | 1.2 | 0.1 | |

ketabton.com : The Digital Library

## د دوه جمله يي توزيع او د برنولي ازماينبت:

د احتمال دوه جمله يي توزيع يوه مجزا (گسسته) توزيع ده چه د مختلفو پيښود توصيف لپاره استعماليږي.

د برنولي ناڅاپي ازماينبت په برياليتوب او نابرياليتوب په دوه دستودسته بندي کيږي.

د برنولي توزيع کولای شوچه په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ بنه وښيو.

$(P)$ د برياليتوب او $q=I-P$ دنابرياليتوب احتمال دی.

که يو ازماينبت $(n)$ ځله تکرار شي ترادف لاس ته راځي.چه دهرازماينبت دبرياليتوب احتمال په $(P)$ او دنابرياليتوب احتمال په $(q)$ښيو $(n)$ ځله ازماينبت څخه د $(m)$ ځلي برياليتوب احتمال عبارت دی له:

$$P(x\le m)=\binom{n}{m}P^mq^{n-m}\qquad ,0\le m\le n$$

د دوه جمله يي دتوزيع اوسط په $\bar{x}=np$ اومعياري انحراف يي په $s=\sqrt{npq}$ ښودل کيږي.

مثال: د شکري د مرض څخه د يوه مريض د جوړېدلو احتمال(0.4) دی که چېرته د ناروغانو شمېر (15) وي څومره احتمال شته چه پنځه تنه ښه شي او يا د (3) څخه تر (4) تنو پوری جوړشي.

حل:

$n=15\quad ,\quad m=5\quad ,\quad P=0.4\quad .\ q=0.6$

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5\cdot(0.6)^{15-5}$$

$$=\frac{15!}{5!\,(15-5)!}\times 0.01024\cdot 0.00604661760=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}$$

$$=(3^{15})(0.4\,)^3(0.6)^{15-3}+(4)^{15}(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

ketabton.com - The Digital Library



$$= \frac{15!}{3!\,(15-3)!} \cdot (0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!\,(15-4)!} \cdot (0.0256)(0.6)^{11}$$

$$= \frac{2730}{6}(0.000139264) + \frac{3270}{24}(0.0000928512) = \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24}$$

$$= 0.063365 + 0.012650 = 0.07601$$

## د پواسن داحتمال توزيع:

د پواسن د احتمال دتوزيع فارمول دا $P(x = m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ دی $\lambda = n$

او $e = 2.718281 \cdots$ دی.

مثال: (200) کسانو دطیاري ټیکټ اخیستی دی که د مسافرینود نه راتګ احتمال (0.01) وي ددی احتمال چه (3) کسه رانشي څو دي؟

حل:

$n = 200 \quad , \quad P = 0.01$

$$P(x - m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \qquad , \lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^2} \cdot 8}{6} = \frac{\frac{8}{7.389046158}}{\frac{6}{1}}$$

$$P(3) = \frac{8}{44.33427695} = 0.180447287$$

دا احتمال د دوه جمله يي په فارمول محاسبه کوو.

$$P(x = m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ P = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.09$$

$$P(x - m) = P(3) = \binom{200}{3} (0.01)^3 (0.09)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3!\,(200-3)!} (0.01)^3 (0.09)^{197} = 0.1814$$

د دواړو فارمولو جوابونه معادل دي.

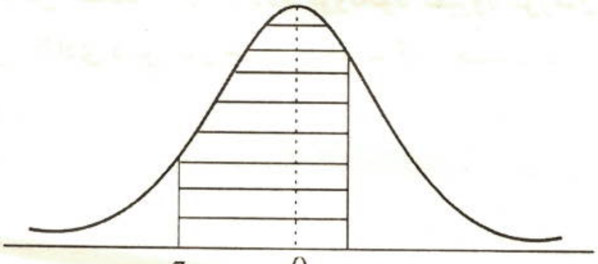
ketabton.com - The Digital Library


د جدول دجوړولو شکل د احصائيوي دېټا د ستېنډرډ کولو پواسطه حل کړو.

$z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ چه $(z)$ د ستېنډرډ نورمال متحول او منحني ته دستېنډرډ نورمال منحني يا د نورمال احتمال منحني په نوم يادېږي. د نورمال منحني او افقي محور تر منځ فاصله د واحد سره برابره وي.

لاندې مساحت د منحني د يوې برخې مساحت دی او $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ سره يې تر بدلولو وروسته په لاندې ډول وښيو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-z^2}{2}} dx = \int_{z_1}^{z_2} N(z,0,1)\, dz$$




د ستېنډرډ نورمال د توزيع احتمال دجدول د استعمال له لارې کولای شو. د جدول په عمودي ستون د $(z)$ د مقدا ردوه لمړي رقمونه د اعشاريي دعلامې دواړو خواوته رقمونه د منحني ارتفاع راښئي اوپورتنی سطرد اعشاريي دعلامی سليز رقم د منحني دواحد قاعده راښئي.

مثال: که $(z = 1.56)$ وي د منحني مساحت پيدا کړئ؟

حل: د $(z)$په ستون کی $(1.5)$ او په سطر کی $(0.06)$ پيدا کوو ګوروچه د$(1.5)$ دعددپه کرښه او د $(0.06)$ دعدد په ستون کی واقع دی $(0.9406)$ دی چه همدغه دمنحني مساحت دي.

لمړی مثال: د جوسو د بوتلونو دستګاه داسی تنظيم شوی ده چه که$(952)$ملي لېتره مايع په بوتل کی واچوي معياري انحرا ف يي $(4)$ ملي لېتره کيږي که مايع د $(952)$ او $(956)$ ملي ېترو تر منځ وي معياري انحراف يي څو دی؟

حل : لمړې د له جنسه پيداکوو.

ketabton.com - The.Digital Library


یاداشت:
که د پواسن په فارمول کې د ($\lambda$) سره (t) ضرب شي په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال رانښيي.

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانګ د مراجعینو په متوسط ډول وي ددې احتمال چه څلور تنه به په لمړیو دریو دقیقو کې راغلي وي څومره وي؟

حل:

$$\lambda=60 \quad , \quad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \quad , \quad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}\cdot 3^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}\cdot 3^4}{4!}$$

$$=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{\frac{81}{20.0854}}{\frac{24}{1}}=\frac{1\cdot 81}{24\cdot 20.0854}=\frac{27}{8\cdot 20.0854}$$

$$=\frac{27}{160.6832}=0.168032$$

## د نورمال توزیع:

د نورمال د توزیع ریاضیکي معادله چه د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکې ده په لاندې ډول ده.

$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

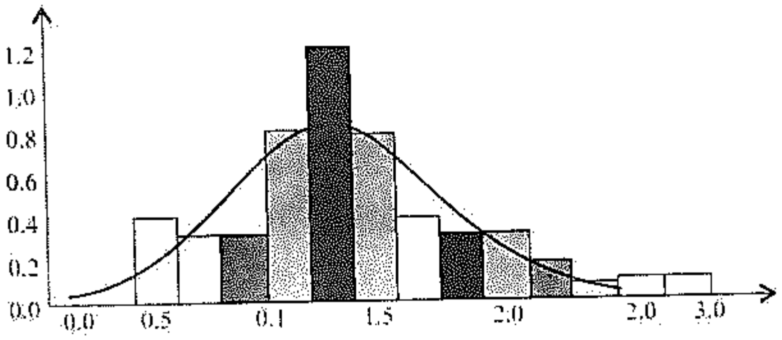
$x$ پیوسته تصادفي مقدار ($s$)معیاري انحراف او $f(x)$ د منحني جګوالی دي.

د نورمال توزیع د پیوسته توزیعګانو څخه ده.

ketabton.com - The Digital Library



مثال: د موټر ماشین دتېلو دسوځولو په وخت کې یوه اندازه مضرلوګی خارجوي د هغه مضر لوګي مقدارچه د (46) موټرانو څخه تولیدیږي په (1980) میلادي کې دیوه فزیکدان پواسطه چه لوزنن نومېده وڅېړل شو. لوګی یوه اندازه $N_2$ او $(O_2)$ لري لاندي مستطیلي ګراف د $N_2$ او $O_2$ اندازه چه واحد یې $^{gr}/_{mil}$ دي او په(46) موټرانوکی دتېلو د سوځېدوڅخه تولیدیږي ددغه موټرانو نورمال احتمال توزیع ، اوسط او وریانس راښئي.د هرمستطیل مساحت د مستطیل دقاعدی او ارتفاع دحاصل ضرب څخه لاس ته راځي.مثلاً په څلورم ستون کی چه د (1) څخه شروع او تر (1.2) پوری یې د قاعدی طول دی مساحت یې په لاندی ډول لاس ته راځي $\frac{4}{46} \times 0.2 = 0.01739 \approx 0.0174$

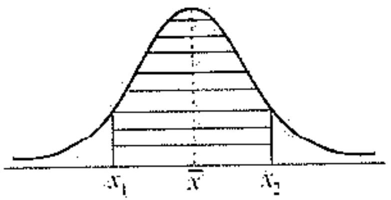



## د نورمال توزیع منحني لاندی مساحت اود هغه ستېنډرډ کول:

کله چه $(x)$پیوسته تصادفي متحول د $x_1$ او $x_2$ تر منځ قیمت واخلي نوباید د $(x)$ داحتمال دتوزیع له تابع څخه انتیګرال ونیول شي.

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \overline{x, s})dx$$



ketabton.com - The Digital Library



$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نوپه دی اساس د دتعریف ناحیه د ځخه تر پوری ده اود دتعریف ناحیه د صفر ځخه تر (1) پوری ده. د جدول ځخه معلومیږي چه $P(0 \leq z \leq 1) = 0.8413$

معلومه شوه چه هغه بوتلونه چه (84.13%)ډک شوي وي د (952) ځخه تر (956) پوری مایع لري.

دویم مثال : په یوه خاص مضمون کی د ذده کوونکود نمبرود نورمال توزیع اوسط (70) اومعیاري انحراف یي (8)دی د نورمال جدول ځخه په ګټه اخیستوسره د(54)ځخه تر (84) پوری فیصدي پیدا کړئ؟

حل:

$$z_1 = \frac{54 - 70}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

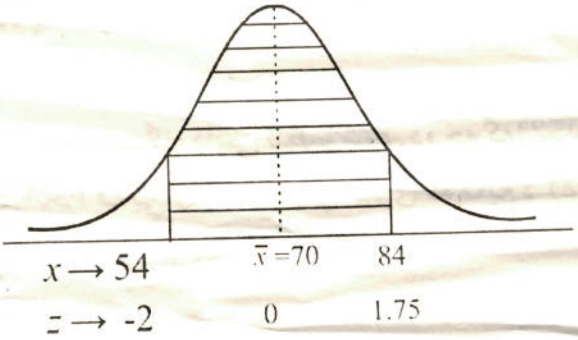
$$z_2 = \frac{84 - 70}{8} = \frac{14}{8} = 1.75$$

$$P(-2 \leq z \leq 0) = P(0 \leq z \leq 2) = 0.9772$$

$$P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9599$$

پورته مساحتونه جمع کوو.

$$P(-2 \leq z \leq 0) + P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9772 + 0.9599 = 1.9371$$



ketabton.com - The Digital Library


## نمونه اخیستل

**ناڅاپه نمونه اخیستنه:**

که دټولنی ټول عناصر په ټاکل کېدلو کی هم چانسه وي.

**سیستماتیک نمونه اخیستنه:**

د ټولنی په ټولو عناصرباندی یو ډول کود وهل کیږي.

طبقه یي نمونه اخیستنه:

په دی نمونه اخیستنه کی ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

خوشه یي نمونه اخیستنه:-که ټولنه ډېره لویه وي هغه په بیلابیلو ځانګو ویشو او له هری ځانګی څخه یوه نمونه اخلو.

تبصره:

دهری ټولنی عددي خصوصیاتو ( اوسط ، معیاري انحراف)ته د ټولنی پارامتر وائي.

د هری ټولنی د عددي نمونه ګیری خصوصیاتو(اوسط معیار انحراف) ته آماره وایي.

د $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ ناڅاپه متحولونو ته د $(x)$ یوه ناڅاپي نمونه وایي.که چېرته یي تابع په دی ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n)$$

مثال: فرضوو چه په یوه قطی (5) سپینې او(7) توری ګلولی شته د قطی د منځ څخه (5) ګلولی یوه یوه ځای په ځای کوو دیوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز دي.د ټاکل شوو ناڅاپه نمونو د تصادفي متحولینو په ژبه بیان کړئ.

حل: د (0) عدد دتوری ګلولی لپاره اود (1) عدد د سپینی ګلولی لپاره انتخابوو.

د $(x_1, x_2, x_3)$ ناڅاپه متحولونه د برنولي نا خاپه متحولین دي. د $P = \frac{5}{12}$ او د $i = 1,2,3$ د مقدارونو لپاره لروچه:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

ketabton.com - The Digital Library



$$f(0) = \left(\frac{5}{12}\right)^0 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-0} = 1 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{12}$$

$$f(1) = \left(\frac{5}{12}\right)^1 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-1} = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{144}$$

$$f(2) = \left(\frac{5}{12}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-2} = \frac{25}{144} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{-1} = \frac{25}{144} \cdot \frac{12}{7} = \frac{25}{84}$$

$$f(3) = \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{-2} = \frac{\frac{125}{1728}}{\left(\frac{7}{12}\right)^2} = \frac{144 \cdot 125}{1728 \cdot 49} = \frac{125}{12 \cdot 49} = \frac{125}{588}$$

$$f(4) = \left(\frac{5}{12}\right)^4 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-4} = \frac{\frac{5^4}{12^4}}{\frac{7^3}{12^3}} = \frac{12^3 \cdot 5^4}{12^4 \cdot 7^3} = \frac{5^4}{12 \cdot 343}$$

$$f(5) = ?$$

## د نمونې د اوسط توزيع:

$f(x)$ د احتمال تابع او $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ناڅاپي نمونې وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې د احتمال توزيع عبارت ده.

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots x_n$ |
|---|---|---|---|
| $(x)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\cdots \frac{1}{n}$ |

د $\bar{x}$ دمتحول اوسط $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ دمتحول وريانس $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نمونه يي وريانس $s_n^2 = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونه يي وريانس اوسط $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چه $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونه يي اوسط $\mu$ دټولنې اوسط $\delta^2$ د ټولنې ريانس وي او $s^2$ دنمونې وريانس وي.

ketabton.com - The Digital Library

# احتمالات

ketabton.com - The Digital Library


# نولسم فصل

احتمالات $Probability$:

که د یوې پېښې وړاندیز د عددونو یا رقمونو پواسطه د اټکل وړ وي د ناڅاپي پېښې یا احتمال په نوم یادیږي. د ناممکنې پېښې احتمال صفر دی. او د ممکنې پېښې احتمال یو دی.

مثلاً دمعارف رئیس بې سواده دې نو احتمال یې صفر دی.

لمر د ختیځ له خوا راخیژي احتمال یې یو دی.

چانس:

که د یوې پېښې دوړاندیز لپاره اعداد یا ارقام نه استعمالېدل دغې پېښې ته چانس وایي.

په چانس کې دممکن ، ناممکن، خامخا او داسې نورې کلیمې استعمالیږي.

تصادفي پېښه :

هغه پېښه چه نتیجه یې معلومه وي. تصادفي پېښه، نا څاپي ازمایښت یا تصادفي تجربه ورته وایي. لکه احمد د بامه راولوید لو پښه یې ماته شوله.

تجربوي احتمال:

هغه احتمال چه د یوې تجربې په سرته رسولو کې په عملي ډول ولیدل شي تجربوي احتمال ورته وایي.

لکه د $(Cl_2)$ او $(2Na)$ څخه مالګه لاس ته راځي.

نظري احتمال:

د تصادفي پېښو د شمېر او د تجربو د نتیجو دشمېر نسبت ته نظري احتمال وایي.

$$\text{تصادفي پېښې احتمال} = \frac{\text{د تصادفي پېښو دحالتونو شمېر}}{\text{د تجربې دټولو حالتونو شمېر}}$$

ketabton.com - The Digital Library



## نسبي کثرت او احتمال:

احتمال د پېښې تر پېښېدلو د مخه وړاندېز ته ویل کېږي. مګر نسبي کثرت د ازمایښت تر نتیجه وروسته د ارقامو په اساس حسابېږي په ناڅاپي پېښو کې د تجربې احتمال د پېښې د نسبي کثرت سره مساوي وي د نسبي کثرت مجموعه ( 1 ) ده.

مثال: تېر کال د لیندۍ (10) ورځې په پرلپسې ډول باران اورېدلو.

الف: اورښت او د ورېځو دورځو نسبي کثرت د لیندۍ په میاشت کې پیدا کړئ؟

ب: دراتلونکي لیندۍ په باب خپل وړاندېز ولیکئ.

ج: ایا دا قطعي ده چه هر کال به دلیندۍ په دغه لسو ورځو کې باران اوري؟

حل:

الف: $30\% = \frac{1}{3} = \frac{10}{03} =$ نسبي کثرت

ب: په راتلونکي کال کې به هم ممکن د تېر کال په څېر نسبي کثرت (30%) وي.

ج: د هر کال لپاره وړاندېز قطعي نه دی.

## په نمونه یي فضا کې برابر او نابرابر چانس:

د ناڅاپي پېښې په درشل کې ددې امکان شته چه هر ممکن حالت منځ ته راشي دغه پېښې ته ناڅاپي یا اتفاقي پېښه وایي.

احتمال په $(P)$ او $P(A)$ د $(A)$ د ناڅاپي پېښې احتمال دی که یوه نمونه یي فضا $(n)$ غړي ولري په دې صورت کې دهرې لمړنۍ پېښې احتمال مساوي $P(E) = \frac{1}{n}$ سره دی.

لمړی مثال: یوه داسې سکه په نظر کې نیسو چه دواړه مخونه یي شېر وي لاندې سوالونو ته جوابونه ووایي.

الف: چه پېسه شېر راشي.

ب: چه پېسه خط راشي.

ج: ایا دشېر او خط د اتفاقي پېښو احتمال برابر دي؟

ketabton.com - The Digital Library


حل:

الف: $P\left(\text{شپر}\right) = \frac{1}{1} = 1$

ب: $P\left(\text{خط}\right) = \frac{0}{1} = 0$

ج: $1 \neq 0$

مثال: د یوه نورمال رمل اچول په نظر کی نیسو ځرنګه چه د نمونی فضا $S = (1,2,3,4,5,6)$ ده نو له همدی کبله:

$$P(E) = P(6) = P(5) = P(4) = P(3) = P(=) = P\left(1 = \frac{1}{6} = 0.17 = 17\%\right)$$

د یوې نمونه یي فضا ناخاپي پېښـه:

د $(S)$ د نمونه یي فضا هرفرعي سیټ یوه اتفاقي پېښه ده چه په $(E)$ سره ښودل کیږي. که د غړو شمېر یي $(n)$ وي داتفاقي پېښو ټول شمېر $(2^n)$ دی.

د ښار په ګڼه ګوڼه کی د ورځی د $(10)$ او $(12)$ بجو په شاوخوا کی د احمد د جیب ښتوه غلا شوی ده د پولیسو تر پلټنی وروسته معلومه شوله چه دری ګڼکپان په دغه سیمه کی لیدل شوي دي دپېښی نمونه یي فضاده د احتمالاتو له مخی د غلو په باب څېل معلومات وليکئ؟

مثال: د اتفاقي پېښو نمونه یي فضا $S = (x, y, z)$ ده کلي سیټ یي پیدا کړئ؟

$E_1 = (x)$ یوازی غل دی.

$E_2 = (y)$ یوازی غل دی.

$E_3 = (z)$ یوازی غل دی.

$E_4 = (x, y)$ $(x, y)$ دواړه غله دي.

$E_5 = (x, z)$ $(x, z)$ دواړه غله دي.

$E_6 = (y, z)$ $(y, z)$ دواړه غله دي.

$E_7 = (x, y, z)$ $(x, y, z)$ دري واړه غله دي.

$E_8 = \{\ \} = \phi$ یو هم غل نه دی.

ketabton.com - The Digital Library


## د احتمال قاعدې:

1- د يوې اتفاقي پېښې احتمال تل د $(0)$ او $(1)$ تر منځ وي که اتفاقي پېښه $(E)$ وي نو:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

2- که چېرې $(S)$ د يوه ازمايښت نمونه يي فضا وي نو $P(S) = 1$ د $(S)$ ناڅاپي پېښه د داېمنۍ پېښې په نوم يادېږي.

3- د ناشونې پېښې لپاره لرو:

$$P(\phi) = 0$$

مثال: د دوه سکو د اچولو نمونه يي فضا $S = (TT, TH, HT, HH)$ ده $T =$ خط او شېر $= S$ دې لاندېني احتمالات پيدا کړئ؟

الف: دواړه سکې شېر دي.
ب: لږ ترلږه يوه سکه شېر ده.
ج: دواړه سکې يو شان دي.
د: دواړه سکې يو شان نه دي.
ها: د سکو يوه هم خط نه دی.

حل:

$$E_1 = \{H, H\} \qquad \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

$$P(E_3) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_4) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_5) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

ketabton.com - The Digital Library


## ونه ایز دیاګرام

کولای شو چه هر ناڅاپي ازمایښت د ونه ایز دیا ګرام پواسطه رسم کړو طریقه یې داسې ده چه د ازمایښت دپېل څخه دیاګرام پېل کووبیا د هرې نتیجې څخه څانګې شروع کوویه هره څانګه کې نتیجې د پاڼو په شکل لیکو دغه ډول ګراف ته ونه ایز دیاګرام وایي د احتمالونو د جمع حاصل د هرې څانګې د نښرېدو په ټکي کې د (1) سره مساوي دي همدا ډول دټولو پېښو د احتمالاتو د جمع حاصل هم د (1) سره مساوي دي.

مثال: په یوه کڅوړه کې څلور توپونه پراته دي دوه توپونه په سره رنګ(r) درې توپونه په شنه رنګ (g) او یو توپ په تور رنګ (b) رنګ شوي دي توپونه د لیدو لپاره راایستل کېږي او بیا بېرته اېښودل کېږي مربوطه احتمالات یې پیدا کړئ؟

حل:-

| $w$ | $rr$ | $rg$ | $rb$ | $gr$ | $gg$ | $gb$ | $br$ | $bg$ | $bb$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(w)$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

په پورته جدول کې ټول کسرونه متماثل دي د پېښو احتمالات د صورتو څخه څرګندیږي

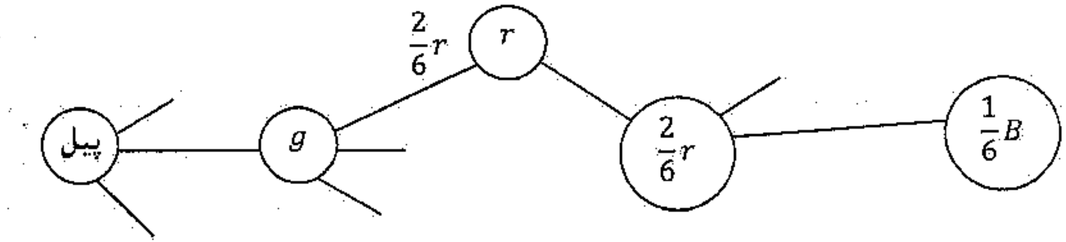
### د ضرب د حاصل لومړۍ قاعده:

د یوې لومړنۍ پېښې احتمالات عبارت دي د پېښې د پېل څخه د پېښې تراخره پورې د احتمالاتو د ضرب د حاصل څخه. په دغه موضوع باندې د ښه پوهېدلو لپاره د یوې کورنۍ شجره لیکو هر شاخ بیل بیل ضربوو او جمع کوو یې د ټولې کورنۍ د غړو شمېر لاس ته راځي.

مثال:- په یوه کڅوړه کې سرې مرۍ درې شنې مرۍ او یوه توره مرۍ اېښودل شوي دي مرۍ د کڅوړې څخه داسې راوباسو چه ترکتلو وروسته بیاکڅوړې ته اچول کېږي اوپېل (شنې ،سرې، تورې) څخه وي.

حل:

ketabton.com - The Digital Library


$$P(w) = P(grrb) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$$

$$P(w) = 0.0092 = 0.92\%$$

يعنى د (شنى، سرې ،تورې)مريو د وتلو احتمال 0.92% دى

## د ناڅاپي پېښو اتحاد

1- كه د (S)په يوه نمونه يي فضا كې د $(A)$ او $(B)$ دوه داسې ناڅاپي پېښې وي چه $A \subseteq B$ وي نو: $A \cup B = B$

2- كه د$(S)$ په نمونه يي فضا كې $(A)$ او $(B)$ دوه ناڅاپي پېښې يود بل سره فرق ونه لري نو:

$$A \cup B = B \cup A$$

3: كه د$(S)$ په نمونه يي فضا كې د$(A)$ يا$(B)$ يوه پېښه رامنځ ته شي نو د $(A \cup B)$ پېښه هم را منځ ته شوي ده چه:

$$A \subseteq A \cup B \text{ او } B \subseteq A \cup B$$

4-كه د $(A)$ پېښه د $(S)$ په نمونه يي فضا كې پېښه شوي وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cup \phi = A$$

5- د $A \cup B$ پېښه په دې معنى ده چه اقلاً د $(A)$ يا $(B)$ پېښه، پېښه شوې ده.

مثال: كه د $(C)$ پېښه د $(A)$ او $(B)$ دوه بيلا بيلې پېښې په ځان كې ولري نو په دې صورت كې د $A \cup B$ ناڅاپي پېښه هم په ځان كې لري.

حل:فرضاً $A = \{1,2\}$ او $B = \{2,3\}$ وي او $C = \{1,2,3,4\}$ وي ليدل كيږي چه $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$ دي ځكه چه:

$$A \cup B = B \cup A = \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\} \Longrightarrow A \cup B \subseteq C$$

ketabton.com - The Digital Library

## دناخاپي پېښو تقاطع

1- په یوه نمونه یي فضا کې د دوه یا څو ناخاپي پېښو تقاطع د تبدیلي د قانون پیروي کوي.

فرضاً د $(A)$او $(B)$ او $(C)$ ناخاپي پېښې دي نو $A \cap B = B \cap A$ رابطه صحیح ده.

2- که په یوه نمونه یي فضا کې دوه ناخاپي پېښې واقع شي نود دوی تقاطع دهری ناخاپي پېښې فرعي سیټ دی.

فرضاً د $(A)$ او $(B)$ دوه ناخاپي پېښې دي نو $A \cap B \subseteq A$ او $A \cap B \subseteq B$

3- که د$(S)$ په یوه نمونه یي فضا کې د $(A)$ ناخاپي پېښه وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cap S = A, A \cap \phi = \phi$$

4- که $A$ او $B$ دوه ناخاپي پېښې وي او $A \subseteq B$ وي نود دواړو پېښو تقاطع کوچنۍ پېښه ده.

$$A \cap B = A$$

مثال: دیوه ښوونځي دفوټبال دټیم څخه دری تنه د والیبال په ټیم کې هم شامل دي که دفوټبال دټیم غړي په (A) اود والیبال د ټیم غړي په (B) وښیو او ددواړو ټیمونو ګډ غړي په (C) وښیو نو دټیمونو تر منځ اړیکه د سیټ تیوري په شکل ولیکئ.

حل:

$$A \cap B = C \Rightarrow A \cap B \subseteq A \ \& \ A \cap B \subseteq B$$

## کلي او مکمله سیټ

د څو فرعي سیټونو مجموعي سیټ ته کلي سیټ وایي. که په یوه کلي سیټ کې دوه سیټونه موجود وي نودا سیټونه یو د بل مکمله سیټونه دي.

که $(S)$ یوه نمونه یي فضا وي او$(A)$ یوه ناخاپي پېښه وي او $(\acute{A})$ یوه بله ناخاپي پېښه وي چه د $(A)$ سره په یوه وخت کې پېښه شوی نه وي. $(S)$ د دغه دواړه سیټونو کلي سیټ دي او $(\acute{A})$د $(A)$ مکمله سیټ دی.

الف: $A \cup \acute{A} = S$

ب: $P(A \cup \acute{A}) = P(S) = 1$

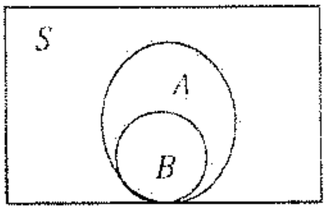
ketabton.com - The Digital Library

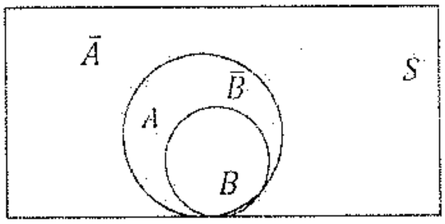


ج: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

که د $(S)$ په يوه نمونه يي فضا کې د $(A)$ ناڅاپي پېښه د $(B)$ ناڅاپي پېښه په بر کې ولري په ګرافيکي ډول وښيي چه د $(\bar{A})$ ناڅاپي د $(\bar{B})$ يوه ناڅاپي پېښه په بر کې لري

حل: څرنګه چه $B \subseteq A$ ده نو د شکل څخه معلومېږي چه:




## د سيټونو او مډل جوړونه:

د سيټ تيوري په واسطه د احتمالاتو مسايل حليږي يعنې د ناڅاپي پېښو د پېښېدو د مسايلو حل اوس د سيټ تيوري په واسطه حليږي چه په دې اساس د سيټ تيوري د فعاليت ساحه نوره هم پراخه شوه

مثال: د په نمونه يي فضا کې د او ناڅاپي پېښې په لاندې دياګرام کې راکړشوي دي د پېښېدو احتمال مطلوب دی

a: د دې احتمال چه د $(A)$ يا $(B)$ حادثه ناڅاپي پېښه شي.

b: د دې احتمال چه د $(A)$ پېښه ، پېښه شي.

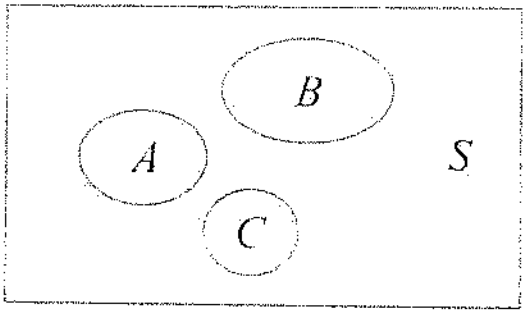
c: د دې احتمال چه د $(C)$ پېښه پېښه نه شي

حل:

a: د $(A)$ يا $(B)$ احتمال په حقيقت کې د $A \cup B$ احتمال دی څرنګه چه دا پېښې يو د بل څخه بېلې دي نو يعنې $A \cap B = \phi$ دي نو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ketabton.com - The Digital Library


b. د دی احتمال چه د$(A)$ پیښه ناڅاپه پیښه شي د $(\acute{A})$ د پیښی څخه عبارت دی چه د $(\acute{A})$پیښه نه دد پیښه شوی د $(\acute{A})$ پیښه د $(B)$ او $(C)$ د پیښو اتحاد دي یعنی دغه دواړه پیښی نه دي پیښی شوي نو $P(\tilde{A}) = P(C \cup B)$ څرنګه $P(A) = 1 - P(\acute{A})$ نو

$$P(A) = 1 - P(C \cup B) = 1 - P(C) - P(B)$$

c. د پاره ددی چه د $(C)$ پیښه ناڅاپه پیښه نه شي هغه پیښی دپیښیدلو د احتمال سره برابره ده چه د $(A)$ او$(B)$ پیښي. پیښې شي یعنی$(A \cup B)$ دپیښی د پیښیدلو څخه عبارت دی نو.

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

## د شمیرنی اصل:

د دوه سیټونو د شمیرنی اصل په ترکیب او ترتیب پوری اړه لري

1- د دوه سیټونو دعناصرو دشمیرنی لپاره عناصر سره ضربوو مجموعه یې د سیټونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموعه ده.

2- که د یوه سیټ عناصر$(m)$ اودبل سیټ عناصر$(n)$ وي نو $(m \times n)$ یې د حاصل ضرب مجموعه ده.

مثال د$\left(0.1.2.3.4\right)$ رقمونو څخه څو دوه رقمي عددونه جوړیږي او څو عددونه په $(2)$ پوره ویشل کیږي

حل $(4 \times 5 = 20)$ دوه رقمي عددونه ور څخه جوړیږي او $(3 \times 4 = 12)$ عددونه په $(2)$ پوره ویشل کیږي

ketabton.com - The Digital Library



پرموټېشن(ترتیب) $Permotaion$:

که څو شیان ولرو او ددی شیانو څخه جوړې جوړی کړوپه دغه جوړو کی د شیانو بدلولو ته ترتیب وایي.

$(a, b, c, d)$ څلور حروف راکړشوي دي غواړو چه دوه ،دوه یي جوړه کړو نو په لاندی ډول یي جوړه کوو.

$(ab, ac, ad, bc, bd, cd)$ نو که څلور شیان دوه،دوه جوړه کړو نو شپږ جوړی ورڅخه جوړیږي.

فکټوریل:

د مثبتو مسلسلو عددونوضربولوته فکتوریل وایي. او په (!) سره ښودل کیږي.

$1 = 0!$ او همدا ډول $1 = 1!$ دی. ثبوت یې په (277) صفحه کې وګورئ.

(n) مسلسل عددونه په$(P_n)$ ښیي $(P_n = n!)$ دی.

ترکیب $(Combinatuin)$:

هغه روش چه د هغه پواسطه د بینوم ضریبونه پیدا کیږي د ترکیب په نوم یادیږي. اوپه لاندی ډول لیکل کیږي.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$0 \le k \le n$ او $\binom{n}{k}$ داسی ویل کیږي. (k)دپاسه $(n)$

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

د کمبېنیشن علامه او فارمول دادی.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال: $\binom{7}{4}$ قیمت پیدا کړئ؟

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4(1\cdot2\cdot3)} = \frac{5\cdot6\cdot7}{6} = 35$$

ketabton.com - The Digital Library


## وریشن(تبدیل) *Variation*:

په تبدیل اوترتیب کی د جوړو شمیر ته تبدیل وایي.

وریشن یا تبدیل په $(V^n_k)$ ښيي. د لاندی فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$$V^n_k = k!C^n_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: په (30) کسانو کی (4) کسه یو ځان د ریاست لپاره دویم ځان داول معاونیت لپاره دریم ځان د دویم معاونیت لپاره او څلورم د منشي په توګه ځان کاندیدوي. د امکاناتو شمیر یي پیدا کړئ؟

حل:

$$V^{30}_4 = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{26!\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{26!}$$
$$= 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30 = 657520$$

پورتني معومات په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

| د ټاکنو ډول $k$ غړي د $n$ غړو څخه | دامکاناتو شمیر | |
|---|---|---|
| | پرته له تکرار څخه $k \le n$ | سره له تکراره $k \le n$ |
| ترتیب یا پرموټیشن | $P(n,k) = n!\,, n = k$ | $P(n,k) = \frac{n!}{k!}$ |
| ترکیب یا کمبیمیشن | $C^n_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ | $C^n_k = \binom{n+k-1}{k}$ |
| تبدیل یا وریشن | $V^n_k = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ | $V^n_k = n^k$ |

مثال: د یوی سکي په اچولو کی چه د راتګ امکان یي په یا خط کی ممکن دی او د هری خوا دراتګ احتمال یي د $\frac{1}{2}$ سره مساوي دي که سکه (2) ځلي،(3) ځلي، (6) ځلي،(8) ځلي،(16) ځلیوغورځول شي د هم چانسو لمرنیوپیښو په نمونه یي فضا کی یو ونه ایزګراف لاس ته راځي.

$$S = \text{شیر} \quad \text{او} \quad T = \text{خط}$$

ketabton.com - The Digital Library



په پورتني مثال کې د شېر او خط د راتګ احتمال په يو ،دوه،درې،ځلور ځلي غورځولو کې په لاندې جدول کې را ټول شوي دي

| ځلور ځله | | درې ځله | | دوه ځله | | يو ځل | | هيڅ ځل | | د سکې غورځول |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| احتمال | خط | احتمال | خط | احتمال | خط | احتمال | خط | احتمال | خط | |
| $\frac{1}{16}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 0 | |
| $\frac{4}{16}$ | 1 | $\frac{3}{8}$ | 1 | $\frac{2}{4}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 | | | |
| $\frac{6}{16}$ | 2 | $\frac{3}{8}$ | 2 | $\frac{1}{4}$ | 2 | | | | | |
| $\frac{4}{16}$ | 3 | $\frac{1}{8}$ | 3 | | | | | | | |
| $\frac{1}{16}$ | 4 | | | | | | | | | |

که جدول ته ښه په غور سره وګورو نو د هر وارد احتمال د کسرونو په صورت کې يو نظم موجود دی چه د بينوم په انکشاف کې د حدونو ضريبونه دي . دغه عددونه اول وار د پاسکال فرانسوي په واسطه په يوه جدول کې ترتيب شوي وه کولای شو چه د بينوم په انکشاف کې ترې استفاده وکړو

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

ketabton.com - The Digital Library


$$(a+b)^0 = \textcircled{1}$$

$$(a+b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$$

$$(a+b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$$

$$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$

$$(a+b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^4$$

$$(a+b)^5 = \textcircled{1}a^5 + \textcircled{5}a^4b + \textcircled{10}a^3b^2 + \textcircled{10}a^2b^3 + \textcircled{5}ab^4 + \textcircled{1}b^5$$

$$(a+b)^6 = \textcircled{1}a^6 + \textcircled{6}a^5b + \textcircled{15}a^4b^2 + \textcircled{20}a^3b^3 + \textcircled{15}a^2b^4 + \textcircled{6}ab^5 + \textcircled{1}b^6$$

عمومي شکل يې دا دی.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د خط راتلو احتمال په مرتبه کی عبارت دی

$$P\left(\text{د خط راتک}\right) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

د بينوم قضيه:

د بينوم قضيه مخکی ويل شوی ده تکرار ته ضرورت نشته

تبصره.

که د يوی ناڅاپي پيښی پيښيدلو ته (1) او نه پيښيدلو ته يي (0) ووايو لاندی جدول د $n = 2$ لپاره بشپړ کړئ

ketabton.com - The Digital Library



| $k$ | ممکنې پایلې | احتمال | د بینوم د ضریبونو ارایه |
|---|---|---|---|
| 0 | | $(1-P)^2$ | $\binom{2}{0}P^0(1-P)^2$ |
| 1 | 10 | $2P(1-P)$ | |
| 2 | 11 | | $\binom{2}{2}P^2(1-P)^2$ |
| | | $\{P+(1-P)\}^2$ | $\sum\binom{n}{k}P^{k}(1-P)^{n-k}=?$ |

که یوه تجربه په مساوي احتمالاتو تکرار شي په $(n)$ ځله تکرار کې د بینوم دانکشاف $(k)$ ام حد لاندې احتمال لري.

$$\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

پورتنې بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کیږي او د برنولي د پرابلم د احتمال په نوم یادیږي او داسې لیکل کیږي.

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-kb}$$

د دوه جمله يي احتمال:

که یوه نمونه يي فضا دوه غړي ولري نو که د یوه غړي احتمال يي $(P)$ وي نو د بل حالت احتمال يي $(1-P)$ دی چه بايلل ورته وايي که دا ډول تجربه ځلي تکرار شي نو ام ځلي وړل په ځلي تکرار کې او د بايللو احتمال په ښودل کیږي.

$$k-\text{ام ځلي وړل په n ځلي تکرار کې}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

مثال: که په یوه تجربه کې د وړلو احتمال$\left(\frac{1}{2}\right)$ او د بايللو احتمال هم $\left(\frac{1}{2}\right)$ وي محاسبه يي په لاندې ډول کیږي.

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$= \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

دویم مثال: په یوه پنځه اولاده فامیل کې ددې احتمال چه دوه تنه هلکان او پاتې انجونې دي څو دي؟

حل:

$$P = \frac{1}{2}$$

نو

$$q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{\frac{5!}{2!\,(5-2)!}}{2^5} = \frac{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}}{32} = \frac{10}{32} = 0.3125 = 31.25\%$$

دریم مثال: درمل یوه دانه (6) واره غورځووددې احتمال پیدا کړئ چه په (4) واره غورځولو کې راغلي خالونه د (3) څخه لږ وي؟

حل: د (3) څخه لږ راتلل وړل وګڼو نو

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$$

$$Q = 1 - P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3} = 0.6666 = 66.66\%$$

$$= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2} \cdot \frac{4}{729} = \frac{60}{729}$$

$$= 0.0823 = 8.23\%$$

څلورم مثال: د یوې سکې د خط د راتلو احتمال $\frac{1}{3}$ دې که څلور واره وغورځول شي د دې احتمال چه شپږ (3) واره راشي مطلوب دی؟

حل:

$$1 - P = \frac{1}{3} P$$

ketabton.com - The Digital Library


$$P = \frac{3}{4} \qquad , \quad Q = \frac{1}{4}$$

$$= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256} = 0.05078 = 5.08\%$$

پنځم مثال: يوه نورماله سکه څو واره وغورځول شي چه لږ ترلږه د خط دراتلو احتمال 0.99 څخه زيات شي

حل: سکه واره غورځوو.

$$T = 1 - S$$

$$= 1 - \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

په دې ډول د دې شرط:

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0.99 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2^n} < 0.01 \qquad \text{so} \qquad 2^n > 100 \quad \Rightarrow n \geq 7$$

## متمادي او غير متمادي فضاګانې:

د يوې ناڅاپه تجربې نمونه يي فضايو معين يا غير معين سيټ دی. يعنې که د فضا عناصر معين ($Countable$) وي نمونه يي فضا معينه ده. چه پرېکړې فضا هم ورته وايي او که د فضا عناصر معين نه وي نو فضا غير معينه ده چه نښتې يا متمادي فضا هم ورته وايي

مثال: د لاندې فضاګانو څخه کومه يوه متصله او کوم يوه پرېکړې ده؟

الف: د دوو زرمل دانو اچول

ب: د (8) او (12) ترمنځ د يوه حقيقي عدد ټاکل

ج: د (30) ذده کوونکو څخه د (3) تنو ټاکل

د: د يوې د کرې د حرارت د درجې لوړېدل د (100) درجو د سانتي ګيرېد څخه تر (1000) درجو د سانتي ګيرېد پورې.

هـ: د (30°) او (45°) درجو ترمنځ د يوې زاويې ټاکل

ketabton.com - The Digital Library

حل: څرنګه چه د (الف او ج) نمونه يي فضاګاني د محدودو عناصرو د شمېر شحخه جوړې شوي دي نو پربکړې فضاګاني دي او (ب ، د او ها) فضاګاني د نامحدودو عددو څخه جوړې شوي دي نو نبتي بامتمادي فضاګاني

ورته وايي.

دويم مثال: عبداله د خپل کور د ګلانو د اوبولو لپاره يو واټرپمپ وا خيستلو د واټر پمپ عمر د ساعت له مخې پيدا کړئ؟

حل: { } خالي سيټ د واټر پمپ د ورانېدو وخت دی او $0 \le t$ ؛ $S = \{t \in \mathbb{R}$ د واټر پمپ د عمر اوږد والی دی.

## هم چانسه پېښې

هغه ساده پېښې چه د هغوی د پېښېدلو چانس په يوه تجربه کې برابر وي د هم چانسه پېښو په نوم ياديږي

که چېرې $S = (e_1, e_2, \cdots e_n)$ يوه نمونه يي فضا وي نو $(e_i)$ د هر $i = 1,2,3,\cdots n$ لپاره يوه ناڅاپه لمړنی پېښه ده په دې شرط چه $0 \le P(e_i) \le 1$ وي

د لمړنيو پېښو داحتمالاتو مجموعه د يوه سره مساوي ده

$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1$$

مثال: څلور کسه په يوه لوبه کې اشتراک کوي د هر يوه نمونه يي فضا هم چانسه ده د هر يوه د ګټلو احتمال پيدا کړئ؟

حل: که چېرې $S = (a, b, c, d)$ نمونه يي فضا وي نو د هرې ناڅاپه لومړنی پېښی احتمال $\left(\frac{1}{4}\right)$ دی نو ليکو چه

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

لومړنی پېښی هم چانسه دي

ketabton.com - The Digital Library



## د متمادي فضاګانو احتمال:

پیوسته نمونه يي فضا ګانې د لایتناهي ټکو مجموعه ده چه شکل يي د اعدادو په محور ، سطحه او د اجسامو په حجمونو کې لیدل کیږي. د دغه ډول ټکو شمودنه ممکنه نه ده مګر د احتمال د نسبت لپاره يي خطونه ،سطحې او حجمونه په توټو وېشو. د اعدادو د محور څخه د یوه حرف لکه $(x)$ او په سطحو کې د دوه تورو لکه $(x, y)$ څخه او په احجامو کې د درې تورو څخه لکه $(x, y, z)$ څخه استفاده کوو

لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0.3)$ په انټروال کې د یو ټکی وټاکئ چه:

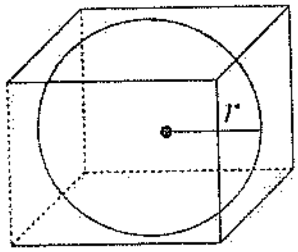
$$1 < x < 2.5$$

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

دویم مثال: یوه کره په یوه مکعب کې محاط ده د مکعب ضلعه (2) واحده ده په مکعب کې یوه نقطه ټاکو ایا ددې احتمال شته چه دا نقطه د کرې پر مخ پرته وي؟

$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$ دکرې شعاع

$$P(A) = \frac{A_{globe}}{A_{CUB}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{\pi}{6}$$




## مشروط احتمال:

که $S$ نمونه يي فضا او $(A)$ او $(B)$ په دغه نمونه يي فضا کې دوه ناڅاپي پېښې وي په داسې حال کې چه $P(B) \neq 0$ وي نو مشروط احتمال د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ یعنې د $(A)$ د پېښې احتمال نظر د $(B)$ ناڅاپي پېښې ته مشروط احتمال بلل کیږي.

ketabton.com - The Digital Library


د پورته فارمول څخه لیکو چه:

1-

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$
$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

2-

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې:

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

3- که پورته فارمول ته عمومیت ورکړو نو لیکو چه:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) + \cdots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_n}(A)}$$

لومړی مثال: یو شاګرد ښوونځي د تللو لپاره (50%) هره ورځ دګاډی څخه کټه اخلي چه (70%) په ټاکلیوخت ښوونځي ته رسیږي په منځني ډول نوموړی (60%) په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضریږي که چیری پېښې:

1- د ګاډی پواسطه راتلل

2- په ټاکلي وخت رسیدل اوپه دې صورت کې د $(A)$ مشروط احتمال نظر $(B)$ ته $P_B(A)$ مطلوب دي ؟

حل:

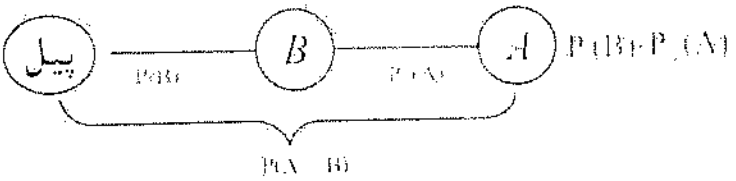
$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_B(A)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = \frac{3.5}{6} = 0.58\dot{3} = 58.33\%$$

## د حاصل ضرب اصل

د په نمونه يي فضا کی د او د دوه ناخاپي پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف سره سم لیکو چه:

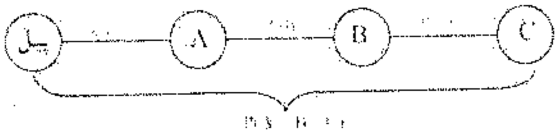
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مسئله د ونه ایز دیاګرام پواسطه هم لاس ته راوړلای شو.




$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مطلب د او او دري پېښو لپاره هم د تطبیق وړ دی

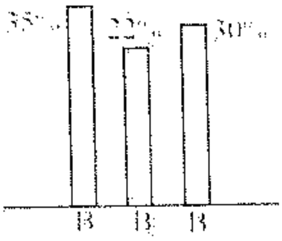



$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

مثال - د $B_1$، $B_2$ او $B_3$ په دري ولایتونو کی په پارلماني ټاکنو کی د ګډون کوونکو فیصدي او د جمهوري ګوند فیصدي برخه ورکړشوی ده.

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکو او یا رائي اچوونکو جمهوري ګوند ګټلی شي.

ناخاپي په لاندی ډول تعریفوو



V: هغه رايي ورکوونکي چه جمهوري ګوند يي ټاکلی وي.

$B_i$ د ولایت رايي ورکوونکي

ketabton.com - The Digital Library

| ولایت | د رایو ورکوونکو فیصدي | جمهوري ګوند ته رای ورکوونکي |
|---|---|---|
| $B_1$ | 33.2% | 35 |
| $B_2$ | 46.5% | 22 |
| $B_3$ | 20.3% | 30 |

1- $B_i$ دوه په دوه یو د بل څخه مستقل عناصر نه لري.

2- د $(S)$ نمونه يي فضا لپاره $S = B_1 \cap B_2 \cup B_3 = \bigcup_{i=1}^{3} B_i$ دی نو:

$B_i \cap \mathbb{V}(i = 1,2,3,)$ يو له بل سره مستقل صورت نيسي

$$V = \bigcup_{i=1}^{3} (B_1 \cap V)$$

د دوارو خواو د احتمال لپاره ليکو:

$$P(V) = P\left\{\bigcup_{i=1}^{3} (B_i \cap V)\right\} = \sum_{i=1}^{3} P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P_{B_i}(V)$$
$$= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V)$$
$$= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3$$
$$= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 = 0.2794$$
$$P(V) = 27.94\%$$

تعریف:

که چېرې د $B_1, B_2 \cdots, B_n$ رای ورکوونکي وي او $P(B_i) \neq 0$ وي $i = 1 \cdots n$ پېښو عمومي حالت د $(S)$ په نمونه يي فضا کې يوه پېښه وي نو $P(A)$ د کامل احتمال په نوم يادېږي او د $(A)$ اختياري ناڅاپي پېښې لپاره لرو:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د $B_i$ چه $i = 1 \cdots n$ د $(S)$ نمونه يي فضا د يوې پېښې لپاره چه $P(B_i) \neq 0$ د $(A)$ ناڅاپي پېښې احتمال چه $P(A) \neq 0$ وی د $(Bayex)$ بائيزفارمول پواسطه لاس ته راځي

ketabton.com - The Digital Library



$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i-1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

د بائيز فارمول زيات استعمال لري لکه $n = 2$ لپاره $B_2 = \bar{B}$ ، $B_1 = \bar{B}$ په پام کی ونيسو په حقيقت کی $B_1$ او $B_2$ د $(S)$ دنمونه يي فضا پيښنی دي

$$P_A(B) = \frac{P(B \cdot P_B(A))}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

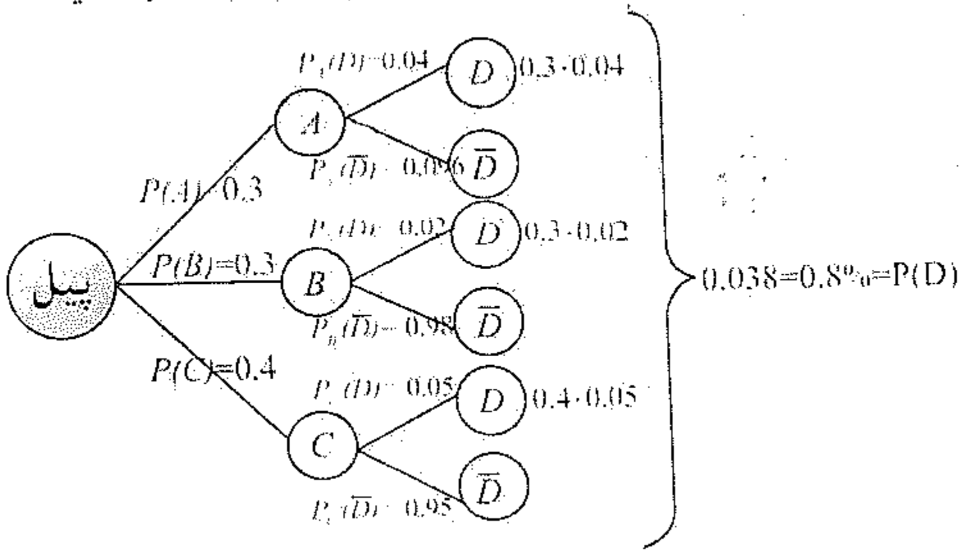
پورتنی فارمول د لپاره د بائيز له فارمول څخه عبارت دی

مثال په يوه فابريکه کی د $A$ ، $B$ او $C$ دری ماشينونه په ترتيب سره 30%، 30% او 40% د برق ګروپونه توليدوي که چيرته په ماشينونو کی دګروپونو د خرابيدو کچه په ترتيب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي مطلوب دی

a: ددی احتمال چه يو اخيستل شوی ګروپ وران دی

b: په کوم احتمال خراب شوی ګروپ د $C$ په ماشين پوری اړه لري

c: يو نوی توليد شوی ګروپ لرو په کوم احتمال سره به د په ماشين پوری اړه ولري




د $b$ جز حل

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

ketabton.com - The Digital Library


د $C$ جزء:

$$P_D(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

## د ناڅاپه پېښو استقلالیت:

د ناڅاپي پېښو استقلالیت لاندې خواص لري

1- که د دوه ناڅاپي پېښو د ضرب حاصل د هغوی د تقاطع د سیټ سره مساوي وي نو دغه دوول ناڅاپي پېښو ته مستقلې پېښې وايي یعنې پېښې استقلالیت لري.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2- که د $A$ او $B$ پېښې ګډ ټکي ونه لري نو:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: که چېرې د یوه ښوونځي ذده کوونکي د سترګو رنګ او ذکاوت د اغېزې پرته فرض شوي وي لاندې پېښو ته ځواب ور کړئ.

الف: ټاکل شوی ذده کوونکی یو هوښیار ذده کوونکی دی

ب: ټاکل شوی ذده کوونکی توری سترګې لري

حل: څرنګه چه $P_B(H) = P(H)$ اوسربېره پردې $P_B(H) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ناڅاپي پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې یو له بلې سره تړلې دي.

نتیجه:

1- $A \cap B$ ، $A \cap \bar{B}$ ، $\bar{B} \cap \bar{A}$ ، $\bar{B} \cap A$ د پېښو دغه تقاطع په جدول کې هم پیدا کولای شو

ketabton.com - The Digital Library



| | $B$ | $\bar{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $P(A\cap B)=a\cdot b$ | $P(A\cap \bar{B})=a(1-b)$ | $a$ |
| $\bar{A}$ | $P(A\cap B)=b(1-a)$ | $P(\bar{A}\cap \bar{B})=(1-a)(1-b)$ | $1-a$ |
| | $b$ | $1-b$ | 1 |

2- د $A$ ، $B$ او $C$ درې ناځاپه پېښې چه یو د بل څخه مستقلې دي نولرو چه:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

دویم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځایونه ډک کړئ؟

| | $B$ | $\bar{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0.12 | $P(A\cap \bar{B})=$ ? | ? |
| $\bar{A}$ | $P(\bar{A}\cap B)=?$ | $P(\bar{A}\cap \bar{B})=$ ? | ? |
| | ? | 0.6 | |

حل: څرنګه چه $P(\bar{B})=0.6$ نو $P(B)$ داسې پیدا کوو

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-0.6=0.4$$
$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$
$$P(\bar{A})=1-P(A=1-0.3=0.7)$$

نو د پېښو د تقاطع څخه لرو چه:

$$P(A\cap \bar{B})=P(A)P(\bar{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$
$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$
$$P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

که پیدا شوي عددونه په جدول کې په خپلو ځایو کې ولیکو جدول تکمیلیږي.

ketabton.com - The Digital Library



# شلم فصل

## موهومي عددونه Imaginary Numbers

منفي عددونه جفت جذر نه لري نو له همدی کبله کله چه په دویمه درجه معادلو کی $\Delta< 0$ شي نو معادله جذر نه لري ترڅو چه په (1795) میلادي کال یوجرمني ساینسدان چه Friedrich Gouss نومېدلو $(-1 = i^2)$ وضع کړ چه د نوموړي په دغه ابتکار سره دهغه معادلود حل لپاره لاره خلاصه شوه چه $(\Delta< 0)$ وه.

موهومي عدد (Imaginary Numbers) یو عدد دی چه په روزمره ژوند کی په راکړه ورکړه کی نه استعمالیږي. مګر دعلمي مسایلو د حل لپاره د زیات اهمیت وړ دی لمړی حرف يي د ایوتا (iota) یوناني کلمی څخه اخیستل شوی دی

مثال:- $\sqrt{-36}$ جذر پیدا کړئ؟

حل:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = \sqrt{36i^2} = \pm 6i$$

دویم مثال: دا $x^2 + y^2 = 0$ معادله حل کړئ؟

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-y^2}$$
$$x = \sqrt{(-1)y^2} = \sqrt{i^2y^2} = \pm iy$$

### د موهومي عددونو طاقت:

څرنګه چه $i = \sqrt{-1}$ او $i^2 = -1$ کیږي نو کولای شو چه د دغه ابتکار په واسطه د موهومي عددونه ساده کړو. مګر د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$1:\ i = \sqrt{-1}$ $2:\ i^2 = -1$ $3:\ i^3 = -i$ $4:\ i^4 = 1$
$5:\ i^5 = i$ $6:\ i^6 = -1$

په عمومي صورت د موهومي عددونو طاقت په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i\ , i^{4n+2} = -1\ , i^{4n+3} = -i$$

هغه موهومي عددونه چه توانونه يي منفي وي د پورته جدول پواسطه حلیږي.

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1\cdot i}{i\cdot i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

ketabton.com - The Digital Library


$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$
$i^{-3} = i^{-2} \cdot i^{-1} = (-1)(-i) = i$
$i^{-4} = i^{-3} \cdot i^{-1} = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$
$i^{-5} = i^{-4} \cdot i^{-1} = 1(-i) = -i$

لاندې موهومي عددونه د طاقت ښخه وباسئ:

$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
$i^{89} = i^{88} \cdot i = 1 \cdot i = i$

## د اعدادو سيټونه:

1- د طبعي اعدادو سيټ *Set of Natural Numbers*:

د(1) څخه تر لايتناهي ($\infty$) پورې د اعدادو سيټ ته د طبعي اعدادو سيټ وايي په (IN) سره يي ښيي.

$$\mathrm{IN} = (1،2،3،4،5 \cdots \infty)$$

2- د مکمل اعدادو سيټ *Set of Whole Numbers*:

د (0) څخه تر ($\infty$) پورې داعدادو سيټ ته د مکمل اعدادو سيټ وايي په (w) سره يي ښيي.

$$w = (0،1،2،3،4، \cdots \infty)$$

3- د تام اعدادو سيټ *Set of Integer Numbers*:

د ($-\infty$) څخه تر ($+\infty$) پورې د اعدادو سيټ ته د تام اعدادو سيټ وايي او په (I) سره يي ښيي.

$$\mathrm{I} = (-\infty، \cdots ، -3،2،1،0،1،2،3 \cdots \infty)$$

4- د ناطق اعدادو سيټ *Set Of Rational Numbers*:

صحيح عدد، مختوم کسر، غير مختوم متوالي کسر ته ناطق عدد وايي او په ($Q$) سره يي ښيي.

ketabton.com - The Digital Library


$$Q = \left(1, 2, 15, 109, \frac{4}{5}, \frac{2}{3} \cdots\right)$$

5- د غیرناطق اعدادو سیټ *Set Of Irrational Numbers*:

غیرمختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چه پوره جذر نه لري غیرناطق عدد بلل کیږي او په $(\bar{Q})$ سره ښودل کیږي

$$\bar{Q} = \left(\frac{11}{47}, \frac{13}{49}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{3}\right)$$

په [illegible] د حقیقي اعدادو د سیټ په نوم یادیږي او په (IR) سره یې ښیي

$$\mathrm{IR} = (Q + \bar{Q}) = \left(-\infty, -3, +6, \sqrt{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{13}{49} \cdots \infty\right)$$

6- موهومي عددونه *Set Of Imaginary Numbers*:

هغه عددونه چه یوازې د $(i)$ حرف پکې موجود وي او د حقیقي عددو سره د جمع یا تفریق په حال کې نه وي موهومي عددونه بلل کیږي لکه $\left(-i, 11i, \frac{2}{3}i, \sqrt{5i^3},\right)$

## دموهومي عددونو څلورګوني عملیې:

1- د موهومي عددونو جمع اوتفریق:

هم علامه عددونه جمع کوو علامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف العلامه عددونه یو دبل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو

$1:\ 15i - 31i = 16i$ $\qquad$ $2:\ 14i - i = 13i$

2- د موهومي عددونو ضرب:

علامه په علامه کې ،عدد په عدد کې ضربوو. توانونه یې جمع کوو.

اول مثال:

$$(7i)(-5i) = -35i^2 = -35(-1) = 35$$

دویم مثال:

$$(11i)(-3i^2) = -33i^3 = -33 \cdot i^2 \cdot i = -33(-1)i = 33i$$

ketabton.com - The Digital Library



3- د موهومي عددونو تقسيم:

علامه په علامه عدد په عدد ویشو او توانونه يو دبل څخه منفي کوو.

مثال:

$$\frac{12i^3}{2i} = 6i^2 = 6(-1) = -6$$

7- مختلط عددونه $Complex\ Numbers$.

هغه عددونه دي چه د حقيقي عدد او موهومي عدد د مجموعي يا تفاضل څخه لاس ته راغلي وي لکه ( $5 + 11i$ , $8 - 20i$ ) او داسي نور. مختلط عدد په $(z)$ سره ښيي $z = 3 \pm 21i$ او داسي نور.

صفري مختلط عدد:

هغه عدد دی چه حقيقي او موهومي دواړه برخې يې صفر وي.

مثال:- که په $z = a + bi$ کې $a = 0$ او $b = 0$ وي نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ کيږي دغه عدد ته صفري مختلط عدد وايي.

مثال: لاندي ($i - 3, 4, 2i, 2i - 3$) عددونه په معياري شکل وليکئ؟

| مختلط عددونه | معياري شکل $(z = a + bi)$ |
|---|---|
| $i - 3$ | $-3 + i$ |
| $4$ | $4 + 0i$ |
| $2i$ | $0 + 2i$ |
| $2i - 3$ | $-3 + 2i$ |

د مختلطو عددونو څلورګونی عمليې:

د مختلطو عددونو جمع:

حقيقي عدد د حقيقي عدد سره او موهومي عدد د موهومي عدد سره جمع کوو. د موهومي عددونو د جمع حاصل بیا هم يو موهومي عدد دی.

ketabton.com - The Digital Library


$$\begin{array}{r} 17+45i \\ \underline{28-106i} \\ 45-61i \end{array}$$

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي نو $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$ کيږي

$z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وي نو $z_1 + z_2$ پيدا کړئ

$$Z_1 + Z_2 = (2-3i) + (3+4i) = (2+3) + (-3i+4i) = 5 + i$$

د مختلط عددونو د جمعی دعمليي خنثی عنصر (0) دی. همدا ډول د $a + bi$ د عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی.

$$(a+bi) + (-a-bi) = (a-a) + (b-b)i = 0 + 0i$$

د مختلطو عددونو تفريق:

حقيقي عدد د حقيقي عدد څخه او موهومي عدد د موهومي عدد څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{r} 29-18i \\ \underline{\pm 35 \pm 67i} \\ 64+49i \end{array}$$

$$(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$$

د مختلط عددونو ضرب:

علامه په علامه کی عدد په عدد کی ضربوو او توانونه يې سره جمع کوو.

مثال:- $z_1 = a + bi$ , $z_2 = c + di$ دوه مختلط عددونه راکړشوي دي دضرب حاصل يې پيدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac + (ad+bc)i + bd(-1)$$
$$= ac + (ad+bc)i - bd = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

اول مثال: $z_1 = 3 - 5i, z_2 = 8 + 5i$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي $z_1.z_2$ پيدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (3-5i)(8+5i) = 24 + 15i - 40i - 25i^2$$
$$= 24 - 25i - 25(-1) = 24 - 25i + 25$$
$$z_1 \cdot z_2 = 49 - 25i$$

ketabton.com - The Digital Library



## د مختلط عدد مزدوج (Cnjugate of Complex Number):

د يوه مختلط عدد مزدوج د بينوم د مزدوج په څېر دی .او په $\bar{z}$ سره يي ښيي .مثلاًکه $(z)$ يو مختلط عدد وي نو مزدوج يي $(\bar{z})$ دی. فرضاً $z = x + yi$ يو مختلط عدد دې او مزدوج يي $\bar{z} = x - yi$ دې.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2$$
$$= x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2$$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ چه دغه قاعدی ته نورم , $Norm$ (ميزان، ماخذ ،هنجار، نمونه) وايي.

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \qquad ,2xRel(z)$$
$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = x - x + yi + yi = 2yi \quad , \qquad 2yiIm(z)$$

## د مختلط عدد ضري معکوس:

فرضاً $a + bi$ يو مختلط عدد راکړ شوی دې د ضربي معکوس دلاس ته راوړلو لپاره يي د $\frac{1}{a+bi}$ صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کی ضربووك

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$
$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ د $\frac{1}{a^2+b^2}$ ضربي معکوس دې.

مثال: د $2 - 3i$ ضربي معکوس پيدا کړئ؟

$$\frac{1}{2 - 3i} = \frac{2}{2^2 + 3^2} + \frac{3}{2^2 + 3^2}i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

مثال: $x^2 + 4$ افاده تجزيه کړئ؟

$$x^2 - (-1)4 = x^2 - 4i^2 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

## د دوو مختلطو عددونو وېش:

په يوه مختلط عدد باندی د بل مختلط عدد د وېشلو لپاره مقسوم او مقسوم عليه دواړه د مقسوم عليه په مزدوج کی ضربوو.

ketabton.com - The Digital Library

مثال:- د $\frac{4+3i}{2+5i}$ خارج قسمت لاس ته راوړئ؟

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-25i^2}$$
$$=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}=\frac{8-14i+15}{4+25}$$
$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

## د یوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت:

1- د دوه مختلطو عددو د مجموعی مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د مجموعی سره مساوي دي.

2- د دوه مزدوجو عددو د تفاضل مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي.

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3- د دوه مزدوجو عددو د حاصل ضرب مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو دتفاضل سره مساوي دي او هم د تبدیلی د قانون پیروي کوي.

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

4- د دوه مزدوجو عددو د خارج قسمت مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د خارج قسمت سره مساوي دي.

5- د یوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج مجموعه د حقیقي برخی دوه چند دی.

$$z+\bar{z}=2x$$

6- د یوه مختلط عدد اود هغه د مزدوج تفاضل د موهومي برخی دوه چند دی.

$$z-\bar{z}=2yi$$

7- د یوه مختلط عدد دمزدوج ،مزدوج د مختلط عدد سره مساوي دی.

$$\bar{\bar{z}}=z$$

مثال که $z_1=4+5i$ او $z_2=-3+2i$ وي ثبوت کړئ چه $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ او $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ کیږي؟

ketabton.com - The Digital Library



حل:

$z_1 + z_2 = (4+5i) + (-3+2i) = 1+7i \quad \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$

$z_1 + z_2 = (4-5i) + (-3-2i) = 1 - 7i$

ثابته شوه چه:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)(-3+2i) = -12 + 8i - 15i + 10i^2$
$= -12 - 7i + 10(-1)$
$z_1 \cdot z_2 = -12 - 7i - 10 = -22 - 7i$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$
$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4-5i)(-3-2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2$
$= -12 + 7i + 10(-1)$
$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$

په نتيجه کي:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

## د مختلطو عددونو په ساحه کی د دویمې درجې يو مجهوله معادلې حل:

د دويمی درجی معادلی عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی او $\Delta = b^2 - 4ac$ ده که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري. که $\Delta = 0$ وي معادله يو جذر لري او که $\Delta < 0$ وي دغه ډول معادلی د حقيقي اعدادو په سيټ کی حل نلري مګر په موهومي اعدادو کی حل لري.

مثال: $x^2 - 10x + 26 = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 100 - 104 = -4$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-10) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{10 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \dfrac{10 \pm 2i}{2}$

$x_{1,2} = \dfrac{2(5 \pm i)}{2} = 5 \pm i$

$x_1 = 5 + i, x_2 = 5 - i$

مثال: $4x^2 + 4ix + 15 = 0$ معادله حل کړئ؟

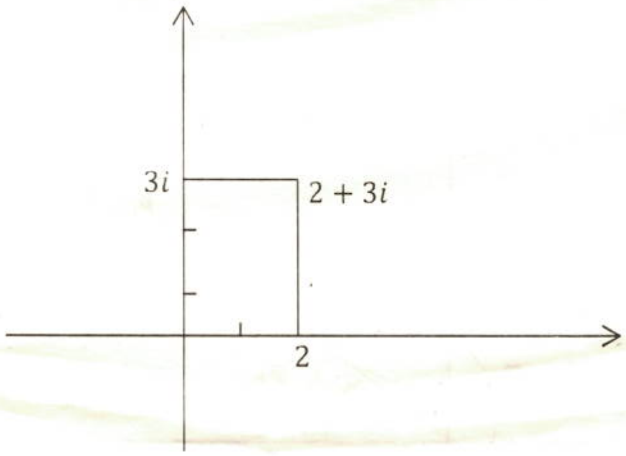
ketabton.com - The Digital Library


حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16i^2 - 240$$
$$= 16(-1) - 240 = -16 - 240 =$$
$$\Delta = -256$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{-256}}{2 \cdot 4} = \frac{-4i \pm \sqrt{256(-1)}}{8} = \frac{-4i \pm \sqrt{256i^2}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{-4i \pm 16i}{8}$$
$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{8} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = \frac{-20i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

په مختلط عددونو کی حقیقي برخه په افقي محور او موهومي برخه په عمودي محور پیدا کیږي.په دی ترتیب کولای شو چه دګوس داعدادو په مستوي کی مطلوب نقاط پیدا کړو د نقطو دوصلیدو څخه خط لاس ته راځي.او د خطودترسیم په نتیجه کی مختلف اشکال رسمولای شو.

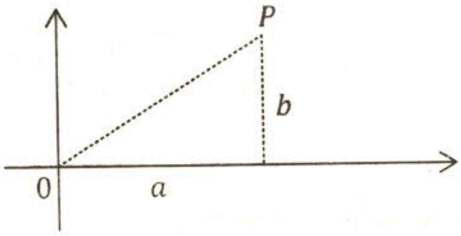
مثال:- د $(2 + 3i)$ نقطه پیدا کړئ




که یوه نقطه چه وضعیه کمیتونه یي مختلط اعداد وي او وغواړو چه د محورونو د مبداء څخه یي فاصله کړو نونقطه د مبداء سره وصلوو.مطلقه قیمت یي د مبداء څخه فاصله ده .چه د فیثاغورث د قضیي سره سم یي هم فاصله پیدا کیږي.

ketabton.com - The Digital Library





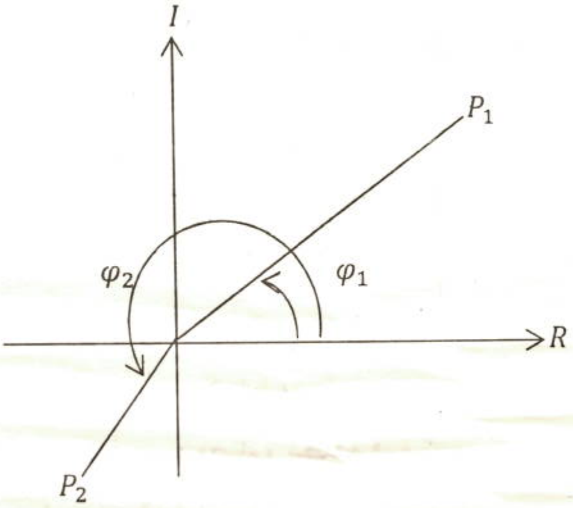

مثال: د $(P)$ د نقطې وضعيه كميت $(4+3I)$ دى مطلقه قيمت يې د مبداء څخه څو دى؟

$$4+3i=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

دمزدوجو مختلطو عددونو مطلقه قيمتونه مساوي وي او فاصله يې د محورونو د مبداء څخه مساوي ده .

| | |
|---|---|
| $-5+12i$ | $-5-12i$ |
| $=\sqrt{(-5)^2+12^2}$ | $=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}$ |
| $=\sqrt{169}$ | $=\sqrt{169}$ |
| $=13$ | $=13$ |

د $(\varphi)$ هغه زاويه چه د $(\overline{OP})$ خط يې د افقي سره جوړوي د مختلطو اعدادو د $(Argument)$ په نوم ياديږي حركت يې د ساعت د عقربې خلاف وي يعنى دا زاويه همېشه مثبت وي.



ketabton.com - The Digital Library


# یوویشتم فصل

## د ریاضي منطق

### د ریاضي استدلال:

د ریاضیکي بیان د سمون لپاره چه کومې علامې اوطریقې استعمالیږي د ریاضي د استدلال په نوم یادیږي.

شهودي درک یا مشاهدات:-هغه مفاهیم چه د حواسو پواسطه درک شي اوقبلېدل يي استدلال ته ضرورت و نه لري. مشاهدات یا شهودي درک ورته وایي.

لکه موازي خطونه، نه قطع کوي. متقابل براس زاویې مساوي وي.او داسې نور.

### تمثیلي استدلال:

هغه استدلال دې چه د یوریاضیکي بیان د وضاحت لپاره مثالونه وویل شي او د هغوی د ورته والي له کبله نتایج لاس ته راوړل شي.

لکه په عامیانه ډول [مار خوړلی د پړي نه ډاریږي] دا یو قیاسي استدلال دی.

### استقرائي استدلال :

استقراء کلي په کلي ګرځېدلو ته وائي.

او په اصطلاح کی د ټولو طبعي عددونو ،ټولو جفتو عددونو یا ټولو طاقو عددونو لپاره د یوه فارمول ثبوتولو ته استقراء یا استقرائي استدلال وایي.

د ټولو طاقوعددونو مجموعه د $S_n = n^2$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو جفتوعددونو مجموعه د $S_n = n(n+1)$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو مسلسلوعددونو مجموعه د $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

داستقرائي استدلال ثبوت

دغه ثبوتونه د ریاضي په استقراء کی ثبوت شوي دي.

لاندی جدول کی خالي ځایونه ډک کړئ

ketabton.com - The Digital Library


| د متوالي عددونو شمېر | دمتوالي طبعي عددونومکعبونه | دمکعبونومجموعه | دمجموعې فارمول |
|---|---|---|---|
| 1 | $1^3$ | | $1^2$ |
| 2 | $1^3+2^3$ | | |
| 3 | $1^3+2^3+3^3$ | 36 | |
| 4 | $1^3+2^3+3^3+4^3$ | | $10^2$ |
| $n$ | $1^3+2^3+3^3+\cdots n^3$ | | $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ |

مثال: ثبوت کړئ چه $P(n)=4^{2n}-1$ په (5) باندی د وېش وړ دی؟

حل: د (1) لپاره يي ثبوتوو.

$$P(1)=4^{2\cdot 1}-1=16-1=15$$

(15) په (5) باندی وېشل کيږي.

په $(n)$باندې يې د وېش وړ فرضوو.

ثبوتوو چه په $(n+1)$ باندی هم د وېش وړ دی.

ثبوت:

$$P(n)=4^{2n}-1=5r$$
$$4^2\cdot(4^{2n}-1)=5r\cdot 4^2\Rightarrow 4^{2n+2}-4^2=5r\cdot 16$$
$$4^{2(n+1)}-1=15+16\cdot 5r=5(3+16r)$$

د مساوات ښی خوا په (5) وېشل کيږي. نو چپ طرف يي هم وېشل کيږي.نو اخرنی مساوات عبارت دی:

$$P(n+1)=4^{2(n+1)}-1$$

ثابته شوه چه که په راکړ شوي فارمول کی د $(n)$ په عوض هر طبعي عدد وضع شي په (5) وېشل کيږي.

ketabton.com - The Digital Library


## استنتاجي استدلال

که د یوی عملیی نتیجه همېشه ثابته وي او ښه په ډاډ سره یي په صحت حکم وشي دغه استدلال ته استنتاجي استدلال وایي.لاندی جدول ته وګورئ

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 12 | 19 | 23 |
| 15 | 19 | 26 | 30 |
| 30 | 38 | 52 | [illegible] |
| 18 | 26 | 40 | 48 |
| 9 | 13 | 20 | 24 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

په پورته جدول کی د عدد سره (7) جمع شوي دي.دجمع حاصل یي دوه چند شوی دي.بیا ببرته (12) ورڅخه منفي شوي دي د تفریق حاصل یي نیمایي شوی دي په دغه عددو کی هرعدد د اولني عدد څخه د(1) په اندازه زیات شوی دي.چه دغسی عمل ته استنتاجي استدلال وایي.

## دحکم د نفی کولو استدلال:

دغیرناطقو عددونو د جمع حاصل یو غیر ناطق عدد وي.

د دغه حکم د معلومات لپاره چه دا حکم همېشه صحیح دی. نو$(x)$ او$(y)$ دوه مجهول عددونه په نظر کی نیسو چه دجمع حاصل یي $(x+y)$ دی بیا دغه عددونو ته قیمتونه ورکوو. مثلاً $x=1+\sqrt{2}$ او $y=1-\sqrt{2}$ دي دواړه عددونه طرف په طرف جمع کوو.

$$x+y=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$$

ګورو چه $(x+y=2)$ یو ناطق عدد دي.غیر ناطق عدد نه دي.نو ثابته شوه چه د دوه غیرناطقو عددو د جمع حاصل همېشه غیرناطق عدد نه وي.

## د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

دقضیي د عکس ثبوت ته غیر مستقیم ثبوت وایي.

قضیه: که د یوه عدد مربع جفت وي نو عدد هم جفت دی.

مفروض: که $n^2$ جفت وي .

مطلوب: ثبوتوو چه $(n)$ هم جفت دي.

ketabton.com - The Digital Library



ثبوت: $n = 2k + 1$ فرضوو نو ليکو چه:

$$n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

د پورته رابطې څخه څرګنده شوه چه $(n^2)$ طاق دی او دا د فرضيې خلاف ده نو داچه $(n)$ يو جفت عدد دی صحيح نه دی.

## د رياضي منطق او د بيان استنتاج:

بيان يوه خبري جمله ده چه د (هو) او (نه) دواړو احتمال ولري.

که بيان په (P) او د بيان صحت په (T) او غلطي يي په (F) وښيو او(~P) د (P) دبيان نفي وي نو د صحت جدول يي په لاندې ډول جوړيږي.

| $P$ | $\sim P$ |
|---|---|
| $T$ | $P$ |
| $F$ | $T$ |

### د بيانونو ترکيب:

1- $P \wedge Q$ کې $(\wedge)$ د (او) معنی ورکوي.

2- $P \vee Q$ کې $(\vee)$ د (يا) معنی ورکوي.

3- $P \Rightarrow Q$ کې $(\Rightarrow)$ د (په نتيجه کې) معنی ورکوي.

4- $P \Leftrightarrow Q$ کې $(\Leftrightarrow)$ د دوه ارتباط معنی ورکوي

مثال: د ثحت په جدول کې وښياست چه $p \vee (p \Rightarrow q)$ بيان په کوم وخت کې صحيح دی.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \vee (p \Rightarrow q)$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |

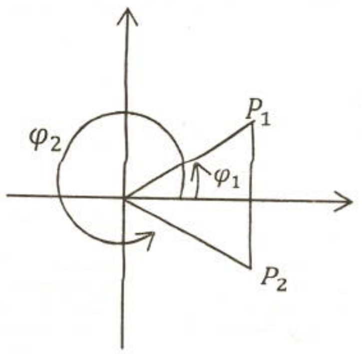
تمت بالخير

په 1394/4/23 نيټه چه د روژې د مبارکې مياشتې د اوه ويشتم سره سمون خوري د جلال اباد په ښار کې د تالاشي چوک د حاجي زرخان په پلازه کې پای ته ورسېدلو .

سردار محمد (خوږياڼی)

ketabton.com - The Digital Library


ددوه مزدوجو مختلطو عددونو د ارګومینټونو د جمع حاصل مکمل دوران ($360^\circ$) وي.




## دمختلطو عددونود دویم جذر پیدا کول:

دمختلط عدد دویم جذر د لاندې فارمول په واسطه پیدا کېږي.

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

ثبوت:

$$\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2 = a+bi+2\sqrt{a+bi}\cdot\sqrt{a-bi}+a-bi \ldots\ldots 1$$

$$= 2\sqrt{a^2+b^2}+2a$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots\ldots 2$$

$$\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots\ldots 3$$

$$\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(-\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} = i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \ldots\ldots 4$$

دریمه او څلورمه معادله طرف په طرف جمع کوو.

$$\frac{2\sqrt{a+bi}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}+i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}}{2} \ldots\ldots 5$$

ketabton.com - The Digital Library



$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\ \dots\dots\dots 6$$

$$\sqrt{a-bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\ \dots\dots 7$$

اول مثال: د $\sqrt{-5+12i}$ دویم جذر پیدا کړی؟

$$\sqrt{-5+12i}=\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}=3+2i$$

دویم مثال:

$$\sqrt{-2i}=\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}+0}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}-0}{2}}=1$$

ketabton.com - The Digital Library

# د ځینو کاشفینو انځورونه

بینارډ ریمان

کارل فریډ ریچ

اریتوستنس

جورج کانتور

اسحاق نیوټن

ارشمیدس

محمد بن موسی

پیرک اندرویس

ketabton.com - The Digital Library

فارما

وین ستهندریو

لایبینز

کووشی

وایرس ترس

هرمت

ketabton.com - The Digital Library

## چاپ شوي کتابونه

* عمومي رياضي ( نوی نصاب )
* عمومي فزيک ( نوی نصاب )
* ابتدائيه رياضي او هندسه (نوی نصاب)

## تر چاپ لاندې کتابونه

* د فزيک د تمريناتو حل ( نوی نصاب)
* د رياضي د تمريناتو حل ( نوی نصاب)
* د عمومي رياضي ( فارسي ترجمه)
* عمومي هندسه
* د عمومي هندسې ( فارسي ترجمه )
* عمومي مثلثات
* عمومي رياضي ( فارسي ژباړه)
* عمومي فزيک ( فارسي ژباړه)


## سپين غر تعليمي مرکز

ميهن خپرندويه ټولنه

0321-9895621-03005981425
0788529194 - 0773535420

## Thank you for reading

Find more e-books and articles on Ketabton - your multilingual digital library.

**www.ketabton.com**

*Ketabton - Pashto, Farsi, Arabic & English*