د پوهنې وزارت

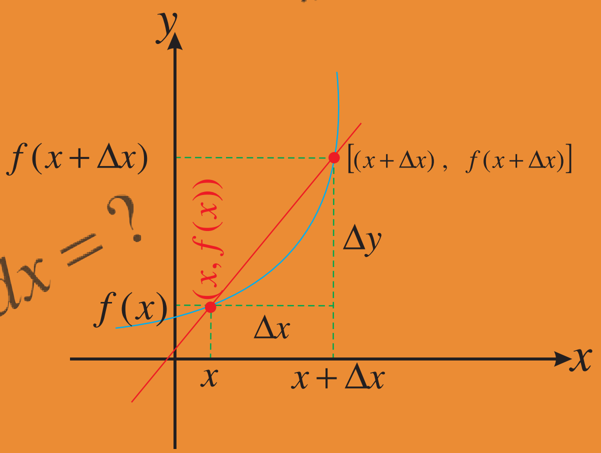
د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساینس د مرکز معینیت

د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

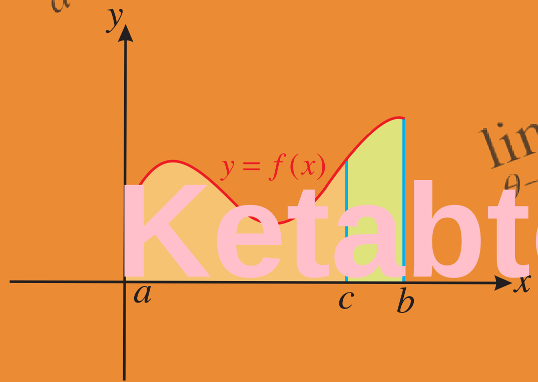
رياضي ۱۲

ټولګی

$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$



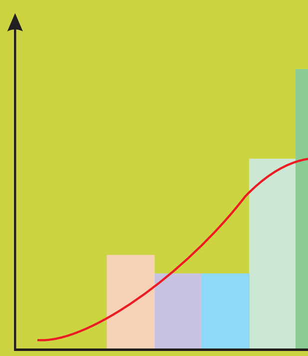
$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$



$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$

د چاپ کال: ۱۳۹۰

رياضي ۱۲ ټولګی



د پوهنې وزارت
د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساینس د مرکز معینیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف
لوی ریاست

ریاضي ۱۲ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ . ش.

ليکوالان:

- پوهيالی حمدالله شيرزی ورگ د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړی
- مؤلف مهناز توخي د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړې
- پوهنمل طلاباز حبيب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړی
- پوهندوی خالقداد فيروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړی
- سرمؤلف ميرنقيب الله د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی

علمي او مسلکي ايډيټ:

- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوی رياست کې.
- سرمؤلف نظام الدين د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی
- د مؤلف مرستيال رحيمه هدايت‌زی د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړې

د ژبې ايډيټ:

- محمدقدوس ذکوخيل د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی

ديني، سياسي او کلتوري کميټه:

- مولوي عبدالوکيل د اسلامي تعليماتو علمي غړی.
- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوی رياست کې.

د څارنې کميټه:

- دکتور اسدالله محقق د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزنې او د ساينس مرکز معين
- دکتور شېر علي ظريفي د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستيال عبدالظاهر گلستاني د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوی رئيس

طرح او ډيزاين:

وليد «نويد» نسيمي


بسم الله الرحمن الرحیم

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی   دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې   هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی   د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو   د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي   پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي   هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي   لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به   لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر   وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم

د پوهنې د وزیر پیغام

ګرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختیا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعلیمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختګ او ټولنې د اړتیاوو له مخې رامنځته کیږي. څرګنده ده چې علمي پرمختګ او ټولنیزې اړتیاوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعلیمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښایي چې تعلیمي نصاب د سیاسي بدلونونو او د اشخاصو د نظریو او هیلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتیب شوی دی. علمي ګټورې موضوعګانې پکې زیاتې شوې دي. د زده‌کړې په بهیر کې د زده‌کوونکو فعال ساتل د تدریسي پلان برخه ګرځېدلې ده.

هیله من یم دا کتاب له لارښوونو او تعلیمي پلان سره سم د فعالې زده‌کړې د میتودونو د کارولو له لارې تدریس شي او د زده‌کوونکو میندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکیفیته ښوونه او روزنه کې پرله پسې ګډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هیلې ترسره شي او زده‌کوونکو او هېواد ته ښې بریاوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ ګران ښوونکي د تعلیمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤولیت په ریښتوني توګه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زیار کاږي چې د پوهنې تعلیمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دین له بنسټونو، د وطن دوستی د پاک حس په ساتلو او علمي معیارونو سره سم د ټولنې د څرګندو اړتیاوو له مخې پراختیا ومومي.

په دې ډګر کې د هېواد له ټولو علمي شخصیتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده‌کوونکو له میندو او پلرونو څخه هیله لرم چې د خپلو نظریو او رغنده وړاندیزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تألیف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتیب کې یې مرسته کړې، له ملي او نړیوالو درنو مؤسسو، او نورو ملګرو هېوادونو څخه چې د نوي تعلیمي نصاب په چمتو کولو او تدوین او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې یې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفیق

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

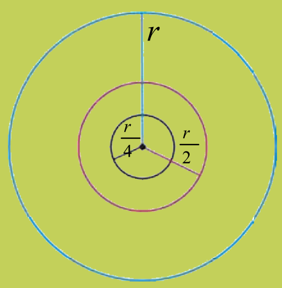
لړلیک

سرلیک | مخونه

لومړی څپرکی
لیمیټ

د لیمیټ مفهوم

په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاعګانې یې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې ته نور څو ځلې دوام ورکولای شئ؟



فعالیت

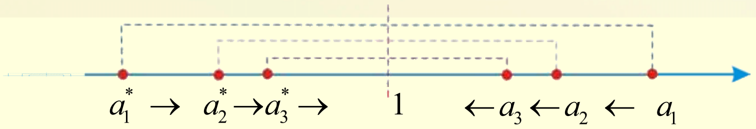
د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د a_1 او a_1^* موقعیت(ځای) وښیئ.
- ویلای شئ، چې د a_2 او a_2^* قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا دباندې پراته دي.
- د a_1، a_1^* او a_2، a_2^* منحنی ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ، چې د a_3 او a_3^* د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ، چې د n د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د a_n او a_n^* ردیفونه کومو قیمتونو ته نږدې کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله:لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لیمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

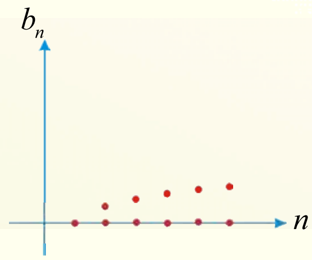
مثال: لاندې ورکړل شوي ردیفونه د n د تر ټولو لویو قیمتونو لپاره کوم قیمت ته تقرب کوي یا نږدې کېږي، موضوع په ګرافیکي ډول تشریح کړئ، په داسې حال کې چې:

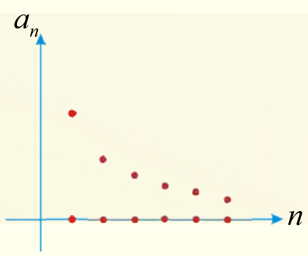
$$a_n = \left(\frac{2n+3}{n}\right) \ \dots (i) \qquad b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \ \dots (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \ \dots (iii)$$

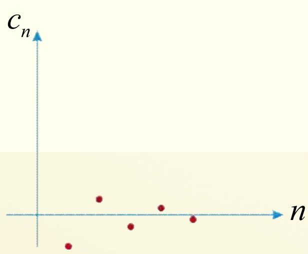
حل: پوهېږو چې د n د بېلابېلو قیمتونو لپاره ګرافیکي ښودنه په لاندې ډول ده.

n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\to 1$

n	1	2	3	4	5	6	7	$\to \infty$
a_n	5	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{7}$	$\to 2$







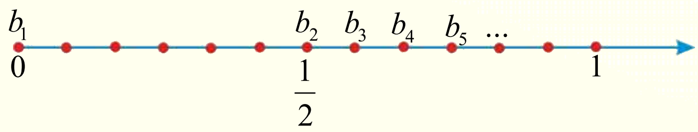
n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
c_n	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\to 0$

له پورتینو ګرافونو څخه لیدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د n د قیمتونو په زیاتېدو سره د ترادفونو قیمت یوه ټاکلې عدد ته نږدې کېږي، لکه د a_n ترادف د 2 عدد ته د b_n ترادف د 1 عدد ته او د c_n ترادف صفر ته تقرب کوي، چې ترادف ته د ډېرو لویو قیمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانۍ سره روښانه کېږي.

د ترادف د قیمتونو له جدول څخه د لیمیټ قیمت څرګندېږي، د لیمیټ په شته والي کې ردیف یوه ټاکلې عدد ته نږدې کېږي. دغه ټاکلې عدد ته لیمیټ (limit) وایي. چې په lim سره ښودل کېږي.

ددې لپاره د $b_n = \frac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نیسو، لرو چې:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	...



او یـــــا کـــــه چیـــــري $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$ .... I , $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}$ .... II او $2, 4, 6, \ldots, 2n$ .... (III) د عددونو ترادفونه په پام کې ونیسو، لیدل کېږي چې که n د بې نهایت لورې ته نږدې شي، نـو د I تـرادف صـفر تـه نـږدې کېـږي د II تـرادف د (1) عـدد تـه نـږدې کېـږي د III تـرادف د بې‌نهایت(∞) ته نږدې کېږي.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x پـه اختیـاري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی یا پـه لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0: |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a} x = a \quad \text{یا} \quad x \to a \quad \text{یا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چیرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجـود وي پـه داسـې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کیڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چیرې د x د قیمتونو یو متزاید تـرادف موجـود وي پـه داسـې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

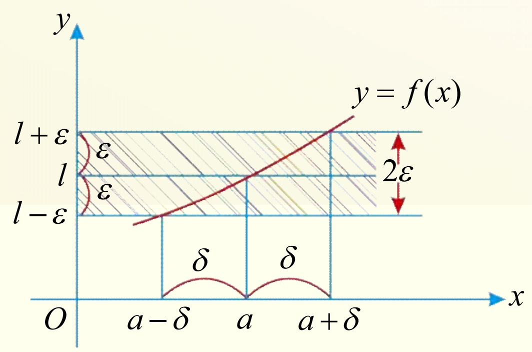
$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

لومړی بېلګه: د x متحول د 9 عدد ته نږدې کړئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

حل:

$$x: 9.1 \ , 9.01 \ , 9.001 \ , 9.0001 \ , \ldots \ \to 9^{+}$$
$$x: 8.9 \ , 8.99 \ , 8.999 \ , 8.9999 \ , \ldots \to 9^{-}$$

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر ترلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کیدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې یې لیکو: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ یا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \ (|x - a| \to 0 \Rightarrow |f(x) - l| \to 0)$$

پوښتنه

د $f(x) = 2x$ تابع کې په ګرافیکي ډول وښیئ چې که x د (3) عدد ته نږدې شي $f(x)$ له (6) سره مساوي کېږي.

د ښي او کيڼ خوا لیمیټونه

مخامخ تصویر ته پاملرنه وکړئ ووایئ چې مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نږدې کېدای شو.

فعالیت

په لاندې جدول کې د $x \neq 1$ ، $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ته ځینې قیمتونه ورکړل شوي.

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$

- د تابع ګراف رسم کړئ.
- که x د (1) عدد ته نږدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نږدې کېږي.

د پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

د ښي خوا لیمټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د ښي لوري l_1 لیمیټ لري که چیرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو کوچنی عدد د $\delta > 0$ موجود وي داسې چې که: $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$ یا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l_1$$

د کیڼ خوا لیمیټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د کیڼ لوري l_2 لیمیټ لري که چیرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ یو عدد پیدا شي داسې چې $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$ یا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ ته نږدې شي د l لیمیټ لري، یعنې: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

دویمه بېلګه: و ښیئ چې $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کیڼي خوا لېمیټونه تر څېړنې لاندې نیسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

لیدل کېږي چې د ښی خوا او کیڼې خوا لېمیټونه سره مساوي دي، نو $6=\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}$ دي.

دویمه طریقه: د لېمیټ د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \ : \ |x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta \quad \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لېمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لېمیټ لري، یعنې: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

پوښتنه

وښیئ چې د $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لېمیټ نه لري.

د لیمیټ خاصیتونه (Properties of Limit)

د مخامخ مساوات دلیمیټونو دواړه خواوې کله چې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$

فعالیت

ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که x د 2 عدد ته نږدې شي، نو د $f(x) = x+2$ تابع لیمیټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لیمیټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \pm \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \div \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x\to a} f(x) = A$ او $\lim_{x\to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x\to a} Kf(x) = K\lim_{x\to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x\to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}\,,\ \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}\,,\ \lim_{x\to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

بې نهایت کوچنی تابعګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نږدې شي بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که چیرې $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$ وي.

1- ددې لپاره چې $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د یوه ثابت عدد b او یوې بې نهایت کوچني تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په حیث وښودل شي، یعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چیرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نږدې شي، بې نهایت کوچنۍ تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهایت کوچنۍ تابعګانو مجموعه بیا هم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

3- د بې نهایت کوچنیو تابعګانو د ضرب حاصل بیا هم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

4- که چیرې $\varepsilon(x)$ یوه بې نهایت کوچنۍ تابع او $u(x)$ داسې یوه تابع وي چې لېمیټ یې صفر نه وي، نو د $v(x)=\dfrac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

مثال:

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\dfrac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نږدې شي بې نهایت کوچنۍ تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

مثالونه: د تېرو خاصیتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$$

$$2)\ \lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}4x-\lim\limits_{x\to 0}3}{\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

د پورتنیو مثالونو له حل څخه د لېمیټ یو خاصیت داسې بیان او ثبوو:

1. د څو تابعګانو د مجموعې لېمیټ د نومورو هرې تابع د لېمیټونو له مجموعې سره مساوي دي، یعنې: که چیرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابعګانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

ثبوت: که $\lim\limits_{x\to a}f(x_2)=b_2$ ، $\lim\limits_{x\to a}f(x_1)=b_1$ او ε_1 او ε_2 بې نهایت کوچنۍ تابعګانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1\ \ .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2\ \ .....\ II \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

خرنگه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهایت کوچنیو تابعگانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهایت کوچنیو تابعگانو مجموعه او تفاضل بیاهم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

2. **د دوو یا څو تابعگانو د ضرب د حاصل لیمیټ د نومړو تابعگانو د لیمیټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:**

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1 \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2 \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

خرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچنی عددونه دي، نو د ضرب حاصل یې د b_1 او b_2 سره او همداشان په خپلو کې بې‌نهایت کوچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابعگانو د نسبت لیمیټ د هغو تابعگانو د لیمیټونو له نسبت څخه عبارت دی؛ لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\quad,\quad g(x)=b_2\neq 0$$

ثبوت:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b_1+\varepsilon_1 \\ g(x)=b_2+\varepsilon_2 \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفریق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

خرنګه چې ε_1 او ε_2 ډېرې کوچنۍ مثبت عددونه($0 < \varepsilon < 1$ چې)دي، نو کله چې $x \to a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي، چې:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$$

د ساندویچ قضیه: که چیرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابعګانې د هر x لپاره په یوه غیر ترلې انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x \to a} h(x) = b = \lim_{x \to a} f(x)$ وي، نو $\lim_{x \to a} g(x) = b$ دی.

مثال: که د $u(x)$ تابع دغه خاصیت($1 - \frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1 + \frac{x^2}{2}$) ولري، نو $\lim_{x \to a} u(x)$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې $\lim_{x \to 0}(1 + \frac{x^2}{2}) = 1 = \lim_{x \to 0}(1 - \frac{x^2}{4})$ نو د ساندویچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x \to 0} u(x) = 1$$

قضیه: که چیرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابعګانې وي چې $f(x) < g(x)$ نو د لیمیټ د شتون په صورت کې یې لمیټ $\lim_{x \to a} g(x) \le \lim_{x \to a} f(x)$ سره دی.

مثال: د $f(x) = \frac{15x - 4}{5x + 6}$ او $g(x) = \frac{15x + 4}{5x - 6}$ تابعګانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې $f(x) < g(x)$ دی، د $x > 1$ لپاره لرو:

حل:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{15x - 4}{5x + 6} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{15x + 4}{5x - 6} = \frac{15}{5} = 3$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

1) $\lim_{x \to 0} 6x^3 - 2x^2 + 5x + 3$

2) $\lim_{x \to -1} x^7 - 2x - 5$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{(9x + 2)^2 - 4}{x}$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{5x^2 + 7x}{(2x - 5)^2 - 9}$

5) $\lim_{x \to 2} \sqrt{x - 2}$

6) $\lim_{x \to 1} \frac{2x}{x^2 - 4x + 1}$

د نسبتي تابعگانو لیمیټونه

آیا پوهیږئ چې مخامخ اریکې په څه نامه یادیږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$
$$\infty - \infty$$
$$0 \cdot \infty$$

فعالیت

- د $y = x^2 - 1$ تابع لیمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله

- د ځینو تابعگانو لیمیټ مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- د ځینو تابعگانو لیمیټ مبهم شکلونه لري؛ لکه $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ ... چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لیمیټ لاسته راځي، چې په لاندې ډول یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- د $\frac{0}{0}$ بڼه:

فعالیت

- د $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قیمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع لیمیټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آیا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره یو معین قیمت ولري؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چیرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لیمیټ د پیداکولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل(خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لیمیټ قیمت په لاس راوړو.

مثال:لاندې لېمیټونه پیداکړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad,\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\quad,\quad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

څرنګه چې پاسنې لېمیټونه د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د تجزیې په مرسته یې وروسته له ساده کولو څخه د لېمیټ قیمت په لاندې ډول په لاس راورو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

حل: بیا هم لېمیټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

حل: لیدل کېږي چې نوموړی لېمیټ بیا هم د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د لېمیټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

پوښتنې

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\qquad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لیمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

فعالیت

- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ د تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وخیږئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ د تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وخیږئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ د تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وخیږئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لیمیټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لیمیټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لیمیټ د پیداکولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول، چې تر ټولو لوی توان ولري وېشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لیمیټ په لاس راځي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیداکړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

خرنگه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په x^2 باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

دويم مثال: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پيداکړئ.

حل: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$

خرنگه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

دريم مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پيداکړئ.

حل: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$

خرنگه چې پوښتنه $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

يادونه: هغه تابعگانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عمليه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې

ډول د هغوی لېميټ په لاس راورو:

د $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ که چیرې ($x\to\infty$) کړی وي؛ نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نومورې کسر لیمیټ عبارت دی له $\dfrac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نومورې کسر لیمیټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نومورې کسر لیمیټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

څلورم مثال: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}\qquad 2)\ \lim_{x\to3}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}\qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

حل:

1- څرنګه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- څرنګه چې $m<n$ دی، نو د نومورې تابع لیمیټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- څرنګه چې $m>n$ دی، نو د نومورې تابع لیمیټ مساوي له ∞ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

یادونه: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي ځوابونه په کورکې د عملیې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.

پوښتني

لاندې لېمیټونه پیدا کړئ؟

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{6}{x^2 - x}$

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + x^2 - x + 9}{x^4 + x^2 - x + 5}$

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{x^3 - x + 5}$

5) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

III- د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لېمیټونو قیمتونو پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$

فعالیت

- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لېمیټ پیدا کړئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لېمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابعګانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.

مثال: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 1}(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1})=?$ 2) $\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

حل 1:

$$\lim_{x\to 1}(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1})=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

څرنګه چې نومړی لېمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري نو لیکلای شو، چې:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

حل2:

$$\lim_{x\to1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=(1-1)(\frac{1}{1^2+2-3})=0\cdot\frac{1}{3-3}=0\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\infty$$

ليدل کېږي چې نوموړی لېمیټ د $(0\cdot\infty)$ شکل لري، نو:

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$$

پوښتنې

لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim\limits_{x\to5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

د $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ شکلونه

د مخامخ لیمیټ مبهم شکل وټاکئ؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

فعالیت

- د $y = x^{x}$ تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ لیمیټ بنه په هغه صورت کې وټاکئ چې $x \to \infty$ وکړي.
- د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ شکلونه په ضرب بدل شو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چیرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه ځانته غوره کړي هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0 \cdot \infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعنې:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$$

یادونه:

I- که چیرې $n \to \infty$ وکړي د $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n}$ ترادف $e = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکاریږي:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^{n}$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

نو $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دی چې ... $e = 2.71$ عدد ته د Euler عدد وايي.

II-

1) $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ 2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$ 4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

ثبوت: پوهېږو چې څلور واړه پوښتنې د 1^∞ مبهم شکلونه لري.

1) $x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}\ ,\ \alpha \to 0 \Rightarrow x \to \infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}\ ,\ x \to \infty \Rightarrow u \to 0$$

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$$

$$x = \frac{1}{u} \to u = \frac{1}{x}\ ,\ u \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\ ,\ x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x}\ ,\ x \to 0 \Rightarrow u \to \infty$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$$

$$4)\ y=e^x-1 \Rightarrow e^x=1+y \Rightarrow x=\ln(1+y)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}\ ,\ y=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{y}\ ,\ y\to 0\Rightarrow x\to\infty$$

$$=\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

د 1^∞ مبهم شکل عمومي حالت: که چیرې د اکسپوننشیل تابع لیمیټ یعني $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د 1^∞ مبهم شکل ځانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha=u-1$ سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x\to a}u^v=\lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1}=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right]=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چې $\alpha=u-1$ دی که چیرې $u\to 1$ **نو $\alpha\to 0$ ته نږدې کېږي په پایله کې :**

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^P\quad ,\quad P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

لومړی مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ لیمیټ قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو معلومېږي چې لیمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u=1+\frac{2}{x}\quad ,\quad v=x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P\quad ,\quad P=\lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right]=2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P=e^2$$

دویم مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ قیمت محاسبه کړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=1^\infty$

څرنګه چې معلومېږي نوموړی لېمېټ د 1^{∞} مبهم شکل لري نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}$$

$$u=1+\frac{1}{x}\quad,\quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل: **د تېر په شان بیاهم لومړی د لېمېټ بنه ټاکو،** $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$

څرنګه چې معلومېږي لېمېټ د 1^{∞} مبهم شکل لري د فورمول په مرسته يې محاسبه کوو:

$$u=\cos x\quad,\quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^{2}x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^{2}x-\sin^{2}x-\cos^{2}x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}=e^{0}=1$$

پوښتنې

لاندې لېمېټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$

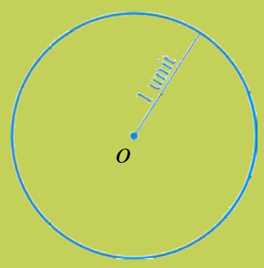
4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^{2}})^{n^{2}}$

5) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

د مثلثاتي تابعګانو لېمېټ

Trigonometric functions limits

که د يوې دايرې شعاع يو واحد ($1unit$) وي، نوموړې دايرې ته څه ډول دايره وايي.



فعاليت

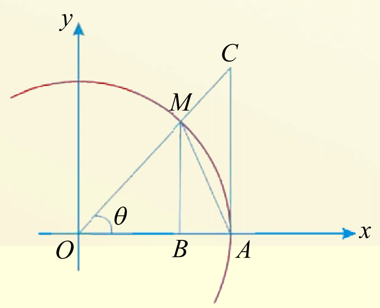
- دوضعيه کمياتو په سيستم کې د $C(o,r)$ په مثلثاتي دايره کې د θ مرکزي زاويه رسم کړئ.
- د C له بهرني ټکي څخه په دايره باندې د ox پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د C ټکی د دايرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاويې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعاليت څخه قضيه داسې بيان او ثبوتوو:

قضيه: د يوې زاويې د ساين او د هغې زاويې د نسبت لېمېټ مساوي په (1) دي، کله چې زاويه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

ثبوت: په لاندې شکل کې د MOA او COA د مثلثونو او OMA د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:



د MOA مثلث مساحت $=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM}=\frac{\overline{BM}}{2}\cdot r$

د $O\overset{\frown}{A}M$ قطاع مساحت $=\frac{1}{2}\theta r^2$

د θ د زاويې پراخوالی بايد په راديان لاسته راوړو.

د $C\overset{\Delta}{O}A$ مساحت $=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$

د MOA او COA مثلثونو مساحتونه د OMA د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2}r\,\overline{BM}<\frac{1}{2}\theta r^2<\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta < \theta < \tan\theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to 0} 1$$

د سانډویچ د قضیې پر بنسټ معلومېږي چې $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ او همدارنګه $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ دی، نو $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ دی.

پوهېږو چې د هرې زاویې ساین د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د سانډویچ د قضیې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left.\begin{array}{l} -\lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \\ \lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} = 0$$

په پایله کې ویلای شو چې د یوې زاویې ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمیټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاویه بې‌نهایت ته نږدې شي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x = \alpha$ نو $x = \frac{\alpha}{2}$ کېږي، څرنګه چې $x \to 0$ کړی دی، نو $\alpha \to 0$ کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 2\cdot 1 = 2$$

دویم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}$ حل کړئ.

حل:

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\frac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

دریم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ حل کړئ.

حل: پوهیږو چې $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پیدا کړئ:

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\frac{\frac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

پنځم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

حل: پوهیږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

که $y = 5x$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$= 10\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 10\cdot 1\cdot 1 = 10$$

پوښتني

لاندې لېميټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$　2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$　3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x}$　5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$　6) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cos 3x$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$　8) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$　9) $\lim\limits_{x\to 1}(\cos^2 x + \sin^2 x)$

د تابعګانو متمادیت

Continuity of functions

شکلونو ته پام وکړئ.

لومړي او دویم پلونه څه توپیر لري، خپل نظر بیان کړئ.

د تابعګانو ګرافونه مختلف شکلونه لري، چې ځینې یې په یوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې یا متمادي تابعګانې بلل کېږي او ځینې یې په یوه قلم نه شي رسمېدلای یعنې د رسم په وخت کې باید د قلم څوکه یو ځل یا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، څکه په یوه برخه کې یې ګراف غوڅ وي، دغه ډول تابعګانې په نوموړې ټکي کې غیر متصلې یا غیر متمادي تابعګانې بلل کېږي.

فعالیت

- د $f(x) = x^2 + 4x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لیمیټ د $x = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قیمت د $x = 1$ په نقطه کې پیدا او وروسته داوړه اړیکې سره پرتله کړئ.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکي کې متمادي بلله کېږي، چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د a په ټکي کې تعریف شوې وي.

2- راکړل شوې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري.

3- د $f(a)$ قیمت باید د $f(x)$ له لیمیټ سره مساوي وي: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

حل:څرنګه چې د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، نو د متمادیت له شرطونو څخه لیکلای شو:

$$1)\ 2\in Dom\ f(x)=IR$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7 \\ 3)\ f(2)=2^2+4-1=7 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=7$$

څرنګه چې د متمادیت درې واړه شرطونه په کې حقیقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

دويم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع د تعریف ساحه عبارت ده؛ له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

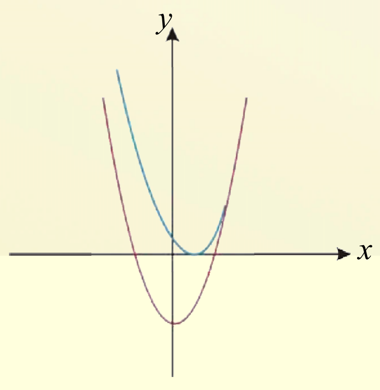
څرنګه چې لیدل کیږي -1 د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د -1 په ټکي کې متمادي نه ده.

دریيم مثال: د $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1\ ;\ x<2 \\ x^2-3\ \ \ \ \ \ \ \ ;\ x\geq 2 \end{cases}$ د تابع متمادیت د $x=2$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د ښي او کيڼي خوا لیمتونه څېړو:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)\quad\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

په پایله کې ویلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې لیدل کیږي.



څلورم مثال: که $f(x)=\begin{cases}2x+1\ ;\ x\geq 1\\ 1-x\ \ ;\ x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متماديت وڅیړئ.

حل:

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1-x=0\\ f(1)=0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

پایله: که چیرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\alpha}\quad ,\quad \alpha\in IR$

2) $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim\limits_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

4) $\lim\limits_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

پنځم مثال: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

حل: څرنګه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د -3 عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

غیر متمادیت: که چیرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې f په a کې غیر متمادي ده او a یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

لومړی ډول: د f تابع د a په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه ولري خو مساوي نه وي.

دویم ډول: کم تر کمه یو له دوو لیمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه) څخه موجود نه وي.

دریم ډول: که چیرې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري خو a د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

پوښتني

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

$a)\ f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

$b)\ f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$

$c)\ h(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$

$d)\ f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$

$e)\ f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$

$f)\ g(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$

$g)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 3 & ; \quad x=2 \end{cases}$

$h)\ f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$

د متمادي تابعګانو خاصیتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقیقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \; g(x) \neq 0$$

- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابعګانو متمادیت وڅېړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

پایله: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابعګانو څخه یې هره یوه په $x = c$ یا یوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابعګانو جمع $f(x) + g(x)$

2- د تابعګانو تفریق $f(x) - g(x)$

3- د تابعګانو ضرب $f(x) \cdot g(x)$

4- د تابعګانو تقسیم $\dfrac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

لومړی بېلګه: **که** $f(x) = x^2 + 3$ **او** $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو:**

1- f او g د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ، چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

ب) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

حل:لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x) = IR$

2) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(x^2+3) = 4$

3) $f(1) = (1^2+3) = 4$

نو د f **تابع د** $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $Dg(x) = IR$

2) $\lim\limits_{x\to1} g(x) = \lim\limits_{x\to1}(x^2+3x-2) = 1^2+3\cdot1-2 = 2$

3) $g(1) = (1^2+3\cdot1-2) = 2$

په همدې شان د g تابع د $x=1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابعگانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېړو:

الف)

$f(x)+g(x) = x^2+3+x^2+3x-2 = 2x^2+3x+1$

1) $D(f(x)+g(x)) = IR$

2) $\lim\limits_{x\to1}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to1}(2x^2+3x+1) = 6$

3) $f(1)+g(1) = (1+3+1+3-2) = 6$

$\lim\limits_{x\to1}[f(x)+g(x)] = f(1)+g(1) = 6$

$(f+g)(x) = x^2+3+x^2+3x-2 = 2x^2+3x+1$

1) $D[(f+g)(x)] = IR$

2) $\lim\limits_{x\to1}[(f+g)(x)] = \lim\limits_{x\to1}[2x^2+3x+1] = 6$

3) $(f+g)(1) = (2x^2+3x+1)(1) = 6$

$\lim\limits_{x\to1}[(f+g)(x)] = (f+g)(1) = 6$

په پایله کې د متمادي تابعگانو د جمعې حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي دی.

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot1^3+1^2+9\cdot1-6=8$

3) $\lim\limits_{x\to1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim\limits_{x\to1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پایله کې د متمادي تابعگانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

دویمه بېلگه: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وخېږئ، چې آیا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

حل:

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}(x+1)=3$

3) $f(2)=x+1=3$

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)=3$

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to2}g(x)=3x-2=3\cdot2-2=4$

3) $g(2)=3x-2=3\cdot2-2=4$

$\lim\limits_{x\to2}g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim\limits_{x\to2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim\limits_{x\to2}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=(f\cdot g)(2)=12$

په پایله کې لاس ته راغلي چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

پوښتنې

1- وښیئ چې لاندې تابعګانې په ورکړ شویو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x)=x^3-2(x+1)^5 \quad ; \quad x=2$

2) $g(x)=\dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \quad ; \quad x=-1$

3) $h(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x=4$

2- تشریح کړئ، چې ولې د $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ تابع په $x=0$ کې غیرمتمادي ده.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x پـه اختیاري ډول د a عدد ته نږدی کېږي، یعني د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta$ يا $\lim\limits_{x\to a} x = a$ يا $x \to a$ يا $|x-a| \to 0$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^{+}$) که چیرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي پـه داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدی شي.

$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to\ a^{+}$

له کیڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^{-}$) که چیرې د x د قیمتونو یو متزاید تـرادف موجـود وي پـه داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدی شي.

$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to\ a^{-}$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعني:

$x \to a \iff (x \to a^{+}\ ,\ x \to a^{-})$

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې شامل وي کیدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدی شـي نـو د $f(x)$ تـابع د l عـدد تـه نږدی کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد تـه تقرب وکړي نو داسې یې لیکو: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ يا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$

د لیمیـــټ ځانګړتیـــاوې: کـــه f او g دوې تابعګـــانې وي، C,L او M حقیقـــي عددونـــه وي داســـې چې $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ او $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$ ، نو لاندې رابطې لیکلای شو:

1) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = L+M$

2) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x) = L-M$

3) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x) = L\cdot M$

4) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\ ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim\limits_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to c} f(x)} = \sqrt{L}$

بې نهايت کوچنی تابعګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نږدې شي بې نهايت کوچنی بللې کېږي، که چيرې $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ وي.

د ساندوېچ قضيه: که چيرې د $f(x), g(x)$ او $h(x)$ تابعګانې د هر x لپاره په يوه غير تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a} f(x)=b=\lim_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x)=b$ دی.

- که چېرې يوه تابع د $\frac{0}{0}$ بڼه ولري، د لېميټ د پيداکولو لپاره يې لومړی تابع د تجزيې په مرسته ساده کوو او بيا يې لېميټ په لاس راوړو.
- $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ ...\ +a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ ...\ +b_n}$ د تابع د لېميټ د پيداکولو لپاره چې $x\to\infty$ وکړي، عبارت دی له:

  1. د $m=n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت دی له $\dfrac{a_0}{b_0}$
  2. د $m<n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت له صفر څخه دی.
  3. د $m>n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت دی له $\pm\infty$
- د هغو تابعګانو چې $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ بڼه ولري د لېميټ د پيداکولو لپاره يې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ يا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته يې لېميټ په لاس راوړو.
- هغـــــه تابعګـــــانې چـــــې د 1^{∞} مـــــبهم شـــــکلونه لـــــري لـــــه دې فورمـــــول څخه $P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$ ، $\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} \overset{1^{\infty}}{=} e^{P}$ يې د لېميټ د پيداکولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta\to 0$ وکړي همېشه سمه ده.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

- د $y=f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکی کې متمادي بلل کېږي، کله چې:
  1. د a د $f(x)$ د تابع په دومين کې شامل وي.
  2. راکړل شوی تابع د a په نقطه کې لېميټ ولري.
  3. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي سم ځواب په نښهٔ کړي.

1- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin x}{x}$

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

2- $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

3- $\lim\limits_{x\to 1.4}(2x+0.3)$

a) 1 b) 3 c) 0 d) هيڅ يو

4- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

5- $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

6- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

7- لاندې لیمیتونه پیداکړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{3+x}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6}{x^2-7}$

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim\limits_{x\to -2}(\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x^2+2x})$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a x^2}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

23) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

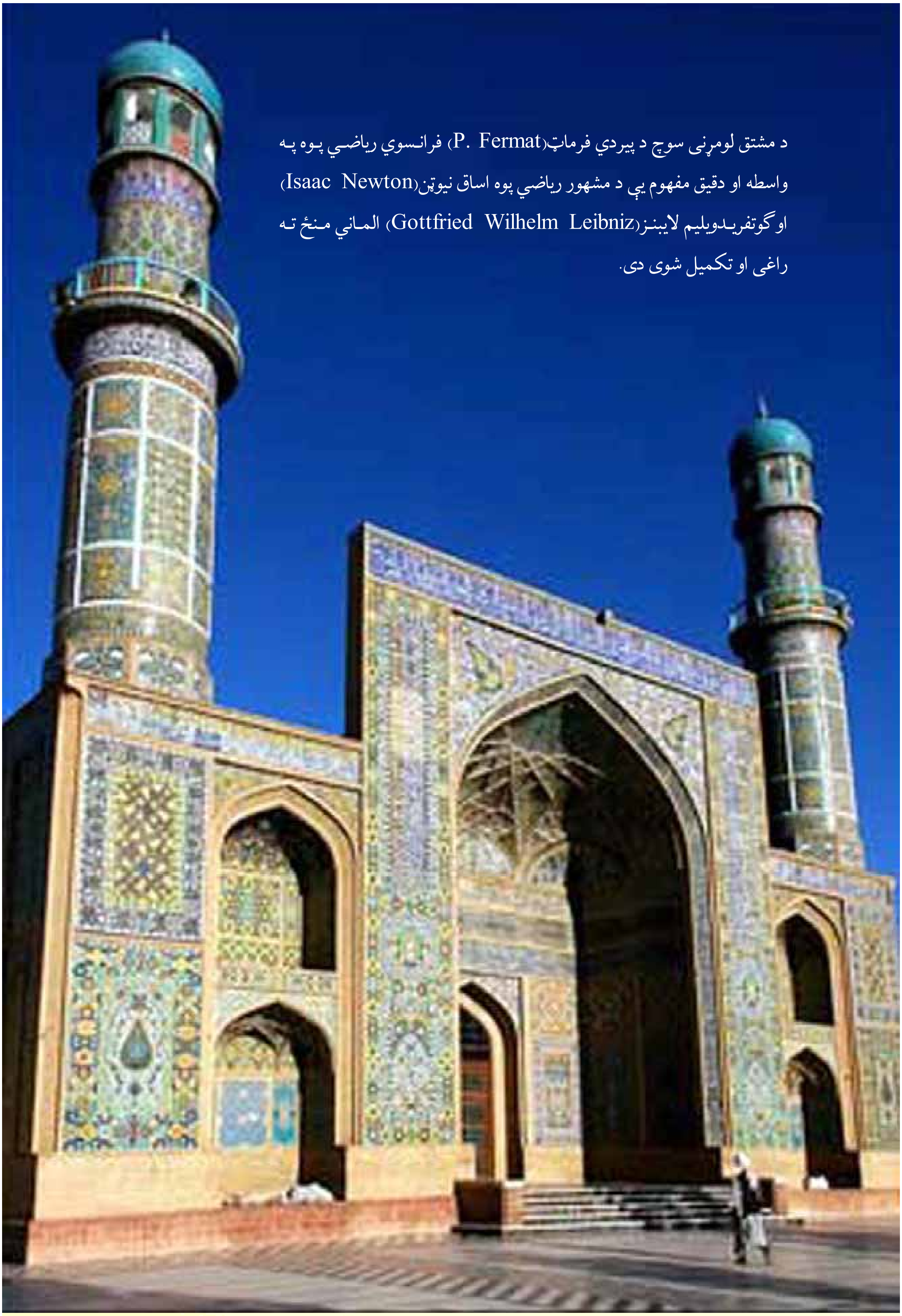
24) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

25) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

26) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

دویم څپرکی

مشتق


د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرماټ(P. Fermat) فرانسوي رياضـي پـوه پـه
واسطه او دقيق مفهوم يې د مشهور رياضي پوه اساق نيوټن(Isaac Newton)
او گوتفريـدويليم لايبنـز(Gottfried Wilhelm Leibniz) المـاني مـنځ تـه
راغی او تکميل شوی دی.

مشتقات

Derivatives

د $f(x)=x^2-1$ تابع په پام کې ونیسئ د مخامخ کسر لیمیټ پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

د یوه منحني میل

- که د یوه مستقیم خط دوه ټکي $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقیم خط میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آیا د یوه مستقیم خط میل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آیا د مستقیم خط میل د هغې زاویې سره اړه لري، چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت لوري سره جوړوي؟
- آیا د مستقیم خط او منحني میلونه یو شان پیدا کیږي؟

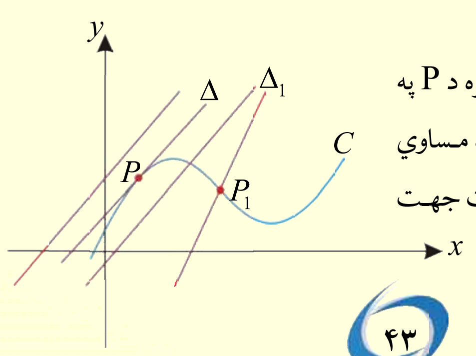
له پورتنیو پوښتنو څخه څرګندیږي چې د منحني میل په اسانۍ سره نشو پیدا کولای ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسیر ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل میلونه لري، نو له دې کبله لومړی د یوه منحني خط میل د هغه په یوه ټکي کې تعریفوو او بیا یې د محاسبې لپاره یو فورمول په لاس راوړو.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او P_1 دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د P_1 په ټکي کې د Δ_1 قاطع او د p په ټکي کې د Δ مماس رسم کړئ.
- که د P_1 ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي، چې د p ټکی ته نږدې شي، په پایله کې د Δ_1 مستقیم خط له Δ مستقیم خط سره څه اړیکه پیدا کوي؟

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

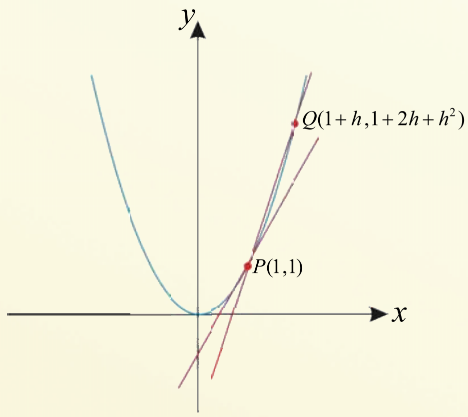
د Δ د مستقیم خط میل چې د C له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاویې له (tan) سره مساوي دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.



لومړی مثال: د $y = f(x) = x^2$ د منحني سره د مماس میل د $P(1,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د منحني میل د مماس له میل سره د P په ټکي کې برابر دي، نو ددې مماس میل لـه هغې فورمول څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي، نشو پیدا کولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوي دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخمیني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي، پیدا کړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکي د P ټکي ته نږدې شي د PQ د مماس میل 2 تـه تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي:

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{\overline{PQ}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نږدې ده په $1+h$ ښودلای شو، چې h یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

نو دا $(1+h \;,\; 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h, 1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تیرېږي، میل یې عبارت دی له:

$$m_{PQ} \frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چیرې په شکل کې $h \to 0$ نو $Q \to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کېږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وایي؛ یعني: $\overline{PQ} = \lim\limits_{h \to 0}(2+h) = 2$

د لیمیټ دا عملیه موږ ته دا امکان په لاس راکوي چې د $y = x^2$ د تابع د منحني میل په یوه اختیاري ټکي $P(x,y)$ کې په لاس راوړو. که د Q د ټکي اختیاري مختصات $\left[x+h,(x+h)^2\right]$ وي که د PQ میل ته m او د P په ټکي کې د مماس میل په m_T سره وښیو لرو، چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

$$m_T = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه لیکلای شو، که چېرې $Q[x+h\ , f(x+h)],\ P[x, f(x)]$ د نوموړي منحني دوې اختیاري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، لیکلای شو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

په حقیقت کې دا د هغه مستقیم خط میل دی چې د P او Q له ټکو څخه تیرېږي.

او د منحني میل د هغې په هر اختیاري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

دویم مثال: د $f(x) = x - x^2$ د منحني سره د مماس میل د $P(2,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د Newton خارج قسمت تشکیل او د $x = 2$ په ټکي کې د منحني میل حسابوو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-(2+h)^2-2+2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-4h-h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(1-4-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-3-h) = -3$$

منحنی یا وسطي تعبیر

که یو جسم د یوه مستقیم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبیعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده یعني $S = f(t)$ د t_1 او t_2 دوو وختونو خارج قسمت $\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ د جسم د وسطي سرعت په نامه یادېږي او سرعت د t_0 په وخت کې عبارت له هغه حد یا لیمیت څخه دی چې لحظوي سرعت بلل کیږي. $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

د پورتنی رابطې لېمیټ د t او t_0 په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ویلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالی خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(s_2)-f(s_1)}{t_2-t_1}$$

مثال: د $y=f(x)=x^2$ په تابع کې د f متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_1=2$ او $x_2=5$ دي، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$

پوښتنې

1) د لاندې تابعګانو د x د متحول لپاره د یو Δx او Δy تزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په غوښتل شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x^2-4$, (0)

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x-x^2$, (3)

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=3x^2-5x+4$, $(2,-1)$

2) د $f(t)=5t^3-3t+1$ د تابع متوسط تغییرات د $[2,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

د يوې تابع مشتق

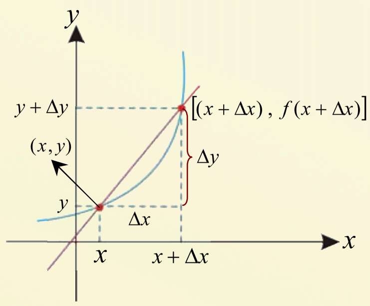
مخامخ لېميټ څه را ښيي آيا په بل ډول يې ليکلای شو؟

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

فعاليت

- که چيرې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي، که د x متحول د Δx په اندازه زياتوالی پيدا کړئ آيا تابع تزايد کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زياتوالي رابطه وليکئ.
- د تابع تزايد د متحول پر تزايد $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ داسې وليکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دواړو خواوو څخه لېميټ ونيول شي، په هغه صورت کې چې Δx صفر ته تقرب وکړي، د دې حد يا لېميټ د څه په نامه يادېږي؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:



$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \quad / \quad \div \Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

تعريف: د تابع او د متحول د بدلون د لېميټ نسبت ته کله چې د متحول تزايد صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کېږي؛ لکه: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ يا y' ، $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x$ وي، د دې تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: د مشتق د تعریف ځخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو، چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow f'(x)=2$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2$$

دریم مثال: د $x\geq 0$, $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق پیداکړئ.

حل: مخکې له حل ځخه $x\geq 0$ حالت په پام کې نیسو:

الف: که $x>0$ وي؛ نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

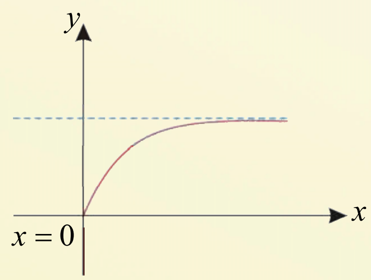
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب: که $x=0$ شي نو $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی، نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه وي لکه چې په شکل کې لیدل کیږي؛ یعنې که x ډېر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نږدې کیږي او د $x=0$ په ټکي کې د مماس میل ډېر لوییږي، چې مماس په یوه عمود $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ خط بدلیږي.



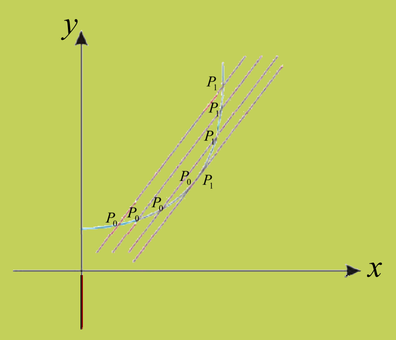
پوښتنې

دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیداکړئ.

1) $f(x)=x-x^2$ 2) $f(x)=-2x^2$ 3) $f(x)=2x^2+x$

د مشتق هندسي تعبير

په مخامخ شکل کې څه وينئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.



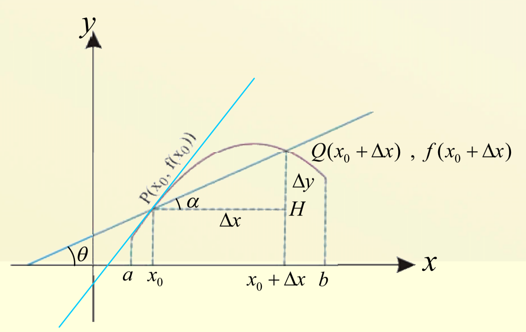
فعاليت

- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د C منحني يا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ متمادي وي گراف رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\,,\, f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د Δ مستقيم خط داسې رسم کړئ، چې د منحني د P او Q له ټکو څخه تېر شي.
- آيا ويلای شئ چې د Δ مستقيم خط د x د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي؟
- ووايئ چې د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ يا $\dfrac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه ياديږي؟
- که د Q ټکی د P ټکي ته ډېر نږدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د Δ مستقيم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې يې وښيئ.
- د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ لېميټ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړئ، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې وڅېړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی؛ يعنې:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_\Delta$$



تعريف: د مماس ميل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع د مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، يا په بل عبارت د هغې زاويې د ټانجنټ څخه عبارت دی چې د Δ مستقيم خط يې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

لومړی مثال: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $m = \tan\alpha = f'(x)$ دی، نو لیکلای شو؛ چې:

$$f(x) = 2x^3 - 1$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + (\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [6x^2 + 6x(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m = f'(x) = f'(1) = 6x^2 = 6 \cdot 1^2 = 6$

نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \Rightarrow \quad y = 6x - 5$$

دویم مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماسل میل قیمت د $x_0 = 2$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2(\Delta x)x_0 + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + (\Delta x)) = 2x_0$$

$$m = y' = 2x_0 = 2 \cdot 2$$

$$y' = m = 4$$

دریم مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع ورکړل شوې ده، غواړو د $x = x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0 = 2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړو:

$$x = x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

اوس د حد د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

څرنګه چې $x_0 = 2$ دی، نو $f'(2) = 2\cdot 2 = 4$ یعنې د $x_0 = 2$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنی چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

څلورم مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^{\ 3} + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د x_0 په ټکي کې برابر دي له: $f'(x_0) = 3x_0^2$

پنځم مثال: د x_0 په ټکي کې د $f(x) = \dfrac{1}{x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - f(x_0)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}$$

$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0+0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ټکي کې د $f(x)$ مشتق دی.

د مشتق تابع يې $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$

پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 5x^2 - 2$ 2) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

2. په ورکړل شویو ټکو کې د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 4x^2 \quad , \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$ 2) $f(x) = 3x - 1 \quad , \quad x_0 = -1$

د مشتق قوانین

آیا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزاید له لارې په بله طریقه پیدا کړئ؟

$$f(x) = 2x^2$$

1- د یوه ثابت عدد مشتق:

د $y = C$ تابع، (C ثابت عدد) په پام کې ونیسئ.

- تابع ته د Δx په اندازه بدلون(تزاید) ورکړئ، د تابع د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د بدلون(تزاید) نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساوتو له دواړو خواوو لېمیټ ونیسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د هرې ثابتې $f(x) = C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع ګراف یوه افقي کرښه ده چې میل یې صفر دی.

ثبوت:

$y = C$ $y + \Delta y = C$ $\Delta y = C - y$ $\Delta y = C - C$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$ $y' = 0$

مثال: د $f(x) = \pi^4$ او $y = 100$ تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې π^4 او 100 ثابت عددونه دي؛ نو:

$$f(x) = C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = \pi^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = 100 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

2- د یوې طاقت لرونکي تابع مشتق:

فعالیت

د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام کې ونیسئ.

- متحول ته د Δx په اندازه تزاید ورکړئ، آیا تابع هم تزاید کوي که تزاید کوي په کومه اندازه اړیکه یې ولیکئ؟
- د پورته اړیکې څخه د Δy قیمت پیدا کړئ، د متحول او تابع د تزاید نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې لیمټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

که چېرې $f(x) = x^n$ راکړل شوی وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره کېږي.

ثبوت:

$$y = x^n$$
$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x+\Delta x)^n - y$$
$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$$
$$\Delta y = (x+\Delta x - x)[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$
$$\Delta y = \Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$
$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{n \text{ ځلې } x^{n-1}}$$
$$y' = nx^{n-1}$$

لومړی مثال: د $f(x) = x^5$ د تابع مشتق د $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې وټاکئ.

حل:

$$f(x) = x^5 \ \Rightarrow f(x)' = 5x^{5-1} \ \Rightarrow \ f'(x) = 5x^4$$
$$f(\frac{1}{2}) = 5\cdot(\frac{1}{2})^4 = 5\cdot\frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

3- د حاصل جمع مشتق:

فعالیت

د u او v مشتق منوونکي تابعګانې په پام کې ونیسئ.

- آیا د $y=u+v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y=u+v$ په تابع کې $u(x)$ ته د Δu په اندازه او $v(x)$ ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ، د y د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه ولیکئ.
- لومړی د تابع تزاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په Δx وویشئ او وروسته یې لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y=u+v$$
$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-y$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-u-v$$
$$\Delta y=\Delta u+\Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ او $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$ دی، نو: $\quad y'=u'+v'$

4- د حاصل تفریق مشتق

که $y=u-v$ وي، نو $y'=u'-v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

لومړی مثال: د $y=2x+1$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې $u=2x$ او $v=1$ دی، نو:

$$u'=1\cdot 2x^{1-1}=2x^0$$
$$u'=2$$
$$v'=0$$

بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

دويم مثال: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پيداكړئ.

حل: په دې تابع كې $u=4x^2$, $v=3x$ او $w=5$ دى چې $u'=8x$, $v'=3$ او $w'=0$ كېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

دريم مثال: د لاندې تابعګانو مشتقونه پيداكړئ:

1) $y=12x-7$
$y'=(12x)'-(7)'$
$y'=12$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$
$f'(x)=18x-12$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$
$f'(x)=18x^2-4x+6$

5- د حاصل ضرب مشتق:

فعاليت

كه د u او v توابع مشتق منونكي وي، نو $u \cdot v$ هم مشتق منونكي دي، د $y=u \cdot v$ تابع په پام كې ونيسئ.

- **په پورتنى تابع كې u ته Δu په اندازه، v ته Δv په اندازه تزايد وركړئ او د تابع تزايد پيداكړئ.**
- د Δy د تزايد له پيداكولو وروسته د مساوات اطراف په Δx وويشئ.
- د پورتنى رابطې د دواړو خواوو څخه په هغه صورت كې لېميټ ونيسئ، چې $\Delta x \to 0$ وكړي.

له پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=u \cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \quad \Rightarrow \quad \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u \cdot v+u \cdot \Delta v+v \cdot \Delta u+\Delta u \cdot \Delta v-u \cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u \cdot \Delta v+v \cdot \Delta u+\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}=v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v \cdot u'+u \cdot v'+0 \cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

لومړی مثال: د $y = x^3(x^2-3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو، چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{aligned} u = x^3 &\Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 &\Rightarrow v' = 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y' &= u'v + v'u \\ y &= x^3(x^2-3) \\ y' &= 3x^2(x^2-3) + 2x(x^3) \\ y' &= 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{aligned}$$

دویم مثال: د $y = (5x-1)^2$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د y تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x-1)^2 = (5x-1)(5x-1)$$

$$\left.\begin{aligned} u = 5x-1 &\Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x-1 &\Rightarrow v' = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y' &= u'v + v'u \\ y' &= 5(5x-1) + 5(5x-1) \\ y' &= 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{aligned}$$

6- د حاصل تقسیم مشتق:

فعالیت

که د u او v تابعګانې مشتق منونکې وي؛ نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکی ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- u او v ته په ترتیب سره Δu او Δv په اندازه تزاید ورکړې او د y تابع تزاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په Δx وویشئ.
- د پورتنې رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړې، لېمیټ ونیسې.

د پورتنې فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v}\ \Rightarrow\ y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}\ \Rightarrow\ \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot v\Delta}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

لومړی مثال: د $y=\dfrac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق يې عبارت دی له:

$$\left.\begin{array}{l} u=2+3x\ \Rightarrow u'=3\\ v=1-2x\ \Rightarrow v'=-2\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} y=\dfrac{u}{v}\qquad\Rightarrow y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}\\ y'=\dfrac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2}\\ \quad=\dfrac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\dfrac{7}{(1-2x)^2}\end{array}$$

یادونه: که چیرې وغواړو چې د یوې تابع مشتق په یوه ټاکلي نقطه لکه په x_0 کې پیدا کړو وروسته د تابع د مشتق څخه ټاکلی قیمت په هغه کې وضع کوو چې د تابع مشتق په هغه نقطه کې پیدا کړو، لکه:

دويم مثال: د $f(y)=\dfrac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پيدا کړئ:

حل: د تابع د حاصل تقسيم د مشتق څخه لرو:

$$\left.\begin{array}{l} u=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y \\ v=1-3y \Rightarrow v'=-3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} f'(y)=\dfrac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)}{(1-3y)^2}=\dfrac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2} \\ f'(y)=\dfrac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2} \\ f(0)=\dfrac{-6(0)^2+4(0)-9}{1+0} \\ f(0)=-9 \end{array}$$

دريم مثال: د $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: پوهيږو چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري نو د $y=\dfrac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخيستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{u}{v} \Rightarrow y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ u=-3 \Rightarrow u'=0 \\ v=2t-1 \Rightarrow v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(t)=\dfrac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\dfrac{6}{(2t-1)^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ:

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$ 2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$ 3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$ 5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$ 6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$ 8) $f(x)=7x+3$

7- د يوې مربع جذري تابع مشتق:

فعالیت

د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونیسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د Δx په اندازه تزاید ورکړئ د تابع تزاید پیدا کړئ.
- د لاس راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لیمیټ په هغه صورت کې ونیسي، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$
$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to o}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x} \Rightarrow u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1 \Rightarrow v'=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x} \\ f'(x)=\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\dfrac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ \qquad =\dfrac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

8- د $\sqrt{u}$ تابع د جذري مربع مشتق

فعالیت

- که چیرې y د u او u د x تابع او مشتق منوونکي وي د y اړیکه u ته او u، x ته څه فکر کوئ.
- د u متحول ته د Δu په اندازه تزاید ورکړئ د Δy د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړو خواوو څخه لېمېټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y+\Delta y=\sqrt{u+\Delta u}$$
$$\Delta y=\sqrt{u+\Delta u}-\sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{u+\Delta u}-\sqrt{u})(\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u})}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$$
$$\Delta y=\frac{u+\Delta u-u}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لېمېټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0\Rightarrow \Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$$
$$y'=\frac{u'}{\sqrt{u}+\sqrt{u}}=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

د ویم مثال: د $h(x)=(x^2+x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2+x \quad\Rightarrow u'=2x+1 \\ v=\sqrt{x} \qquad\Rightarrow v'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h'(x)=(2x+1)\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+x) \\ h'(x)=2x\sqrt{x}+\sqrt{x}+\dfrac{x^2+x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x)=\dfrac{4x^2+2x+x^2+x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5x^2+3x}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

دریم مثال: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ د تابع د مشتق قیمت د $x=8$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ د تابع د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\left.\begin{aligned} u=\sqrt[3]{x}-1 &\Rightarrow u'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3 &\Rightarrow v'=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)&=\frac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{aligned}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ نقطه کې پیداکوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$

پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

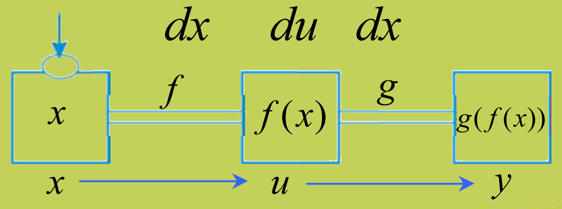
$$f(x)=\frac{1}{x+1} \quad , \quad y=3x^{-3} \quad , \quad f(x)=x^2+3$$

2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابعګانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ. $[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g)' \quad g\neq 0]$

د مرکبو تابعګانو مشتق(زنځيري قاعده)Chain Rule

د مخامخ اړيکي او شکل په اړه خپل نظر بيـان کړئ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$



فعاليت

که چيرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- ووایاست چې y د u او u له x سره څه اړيکه لري؟
- آیا د $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقيقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړي خواوې په Δx وويشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځايونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې ليميټ ونيسي چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پايله يې په لاندې ډول ده.

ثبوت:

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د دې زنځيري قاعدې پر بنسټ لاندې پايلې ليکلای شو:

1- که $y=u^n$ وي؛ نو $y=nu^{n-1}\cdot u'$ کېږي.

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي؛ نو $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

مثال: د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$ 　 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 　 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 　 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

حل: د زنځیري قاعدې په مرسته لیکلای شو؛ چې:

1) $y=\underbrace{(2x^2-1)^3}_{u}$

$$\left.\begin{aligned} &u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x\\ &y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} &y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}\\ &y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x\\ &\quad=(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x\\ &\quad=12x(4x^4-4x^2+1)\quad=12x(2x^2-1)^2\end{aligned}$$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

$$\left.\begin{aligned} &u=1-x^2\ \Rightarrow\ u'_{(x)}=-2x\\ &y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

لیدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري نو:

$$y=u\cdot v\ \Rightarrow\ y'=u'v+v'u$$

3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

$$\left.\begin{aligned} &u=(x^2-3)^2\\ &u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x)\\ &v=2x^3\Rightarrow\ v'_{(x)}=6x^2\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} &y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2\\ &y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2\\ &\quad=8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2\\ &\quad=8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9)\\ &\quad=8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2\\ &\quad=14x^6-60x^4+54x^2\end{aligned}$$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$

$$\left.\begin{aligned} &u=x^2-2x^3\\ &u'_{(x)}=2x-6x^2\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} &y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}\\ &y'=\frac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}}\end{aligned}$$

5) $y=(x^2-2)^{-3}$

$$\left.\begin{aligned} &u=x^2-2\\ &u'_{(x)}=2x\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} &y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u'\\ &y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\frac{-6x}{(x^2-2)^4}\end{aligned}$$

يادونه:

I. که چيرې د f تابع د (x_0) په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس ميل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني يا د تابع له ګراف سره رسمېږي.

مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع ميل د $x_0=1$ په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_0=1$ دی؛ نو: $f(x_0)=1$ سره کېږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، ميل يې عبارت دی، له:

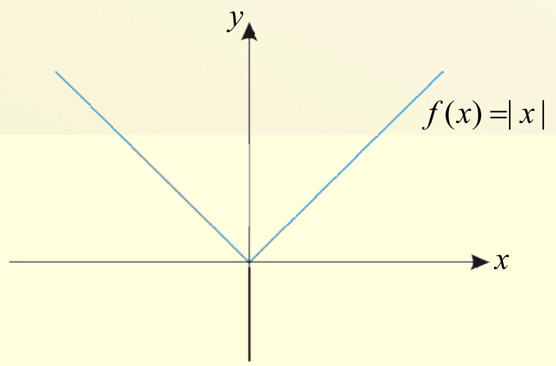
$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3 \quad\Rightarrow\quad f'(1)=3$$

II. که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د x_0 په ټکي کې پيوسته يا متمادي ده، خو برعکس يې ټيک نه ده، يعنې کيدای شي، يوه تابع په يوه ټکي کې متمادي يا پيوسته وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

مثال: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د $x=0$ په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې مشتق په حقيقت کې د نيوټن د نسبت د لېميټ محاسبه ده چې د ښي او کيڼ اړخ لېميټونه يې په صفر کې سره وڅېړل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$
$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$



ليدل کېږي، چې $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ دی، نو تابع په $x=0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې پيوسته يا متمادي ده.

پوښتنې

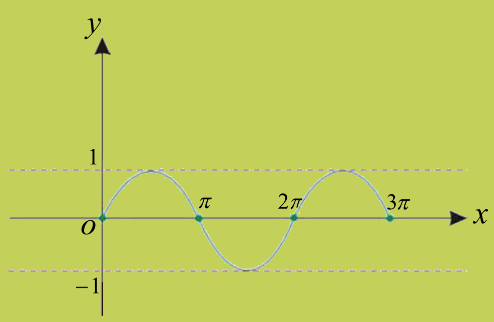
د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ.

1) $y=(x^2+2)^2$ 2) $f(x)=(x^3-4x^2+1)^{-4}$ 3) $y=(1-2x^3)^4$

4) $h(z)=\sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$ 5) $f(t)=\sqrt[3]{3t+1}$ 6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$

د مثلثاتي تابعګانو مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



فعالیت

- مثلثاتي دايره او راديان تعريف کړئ.
- آيا دا $-1 \le \sin x \le 1$ اريکه حقيقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونيسئ متحول د Δx په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونيسئ.
- د $\sin(x+\Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطي ته انکشاف ورکړئ؟
- وروسته د انکشاف له پورتني رابطي څخه $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:

1- د $y = \sin x$ **تابع مشتق:**

ثبوت:

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$\Delta y = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$

$$y' = \cos x$$

$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

که چیرې $f(x)=\sin u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$f(u)=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sin 4x$ مشتق پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin 4x \\ u=4x \Rightarrow u'=4 \\ f(x)=\sin u \Rightarrow y'_u=\cos u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=\sin u \Rightarrow f'(x)=u'\cos u \\ f(x)=\sin 4x \Rightarrow f'(x)=4\cos 4x \end{array}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3\cdot\csc x$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x=x^3\cdot\dfrac{1}{\sin x} \\ u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ v=\dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow v'=\dfrac{-uv'}{v^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x \\ f'(x)=3x^2\cdot\csc x+\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\cdot x^3 \\ \quad =3x^2\csc x-\cot x\cdot\csc x\cdot x^3 \\ \quad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x \end{array}$$

پوښتنې

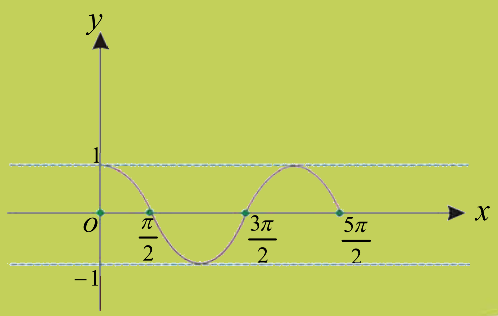
د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

$a)\ y=\sin 5x$ $\qquad b)\ y=\dfrac{\sin x}{1+x}$

$c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$

د $y=\cos x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع را ښيي؟



- د $y=f(x)=\cos x$ په تابع کې متحول ته Δx او تابع ته د Δy په اندازه تزاید ورکړئ.
- د $\cos(x+\Delta x)-\cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنۍ انکشافي رابطې په مرسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکیل او له اطرافو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

2- د $y=\cos x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y=\cos x$$
$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$$
$$\Delta y=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$$
$$\Delta y=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\cdot 1$$

$$\boxed{y=\cos x \quad\Rightarrow\quad y'=-\sin x}$$

یا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$(\cos x)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-2\sin x\cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$ چې سره دی، نو:

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}(-2\sin x\cdot\cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$$

که چیرې $y=\cos u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$\boxed{y=\cos u\Rightarrow y'=-u-\cdot\sin u}$$

لومړی مثال: د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$ 2) $f(x)=x-\sin x\cos x$

حل: پوهېږو چې $y=u\cdot v\ \Rightarrow\ y'=u'\cdot v+v'u$ دی، نو:

1) $f(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$

$f'(x)=(2\sin x)'\cos x+(\cos x)'\cdot 2\sin x=2\cos^2 x-2\sin^2 x$

$f'(x)=2(\cos^2 x-\sin^2 x)\Rightarrow y'=2\cos 2x$

2) $f(x)=x-\sin x\cos x$

$f'(x)=(x)'-(\sin x\cdot\cos x)'=(x)'-[(\sin x)'\cdot\cos x+(\cos x)'\cdot\sin x]$

$f'(x)=(x)'-[\cos x\cos x+(-\sin x\sin x)]=1-\cos 2x$

پوښتنې

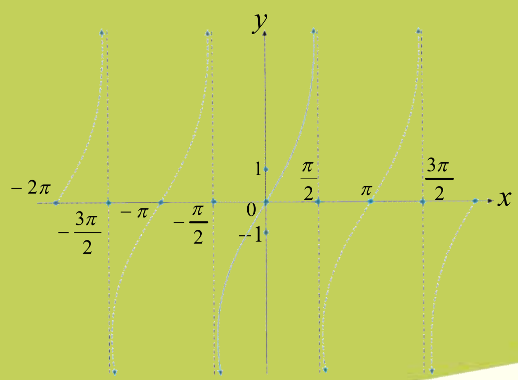
د لاندې تابعګانو لومړی مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=(\sec 2x+\tan 2x)^2$ 2) $f(x)=\sin^2 x$ 3) $f(x)=\sec x$

4) $f(x)=\csc x$ 5) $f(x)=\dfrac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

د $y = \tan x$ تابع مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع راښيي.



- د $y = \tan x$ تابع د نسبت په شکل ولیکئ.
- د پورتني نسبت څخه مشتق ونیسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

3- د $y = \tan x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده‌کوونکو ته پرېږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y = \tan^3 x$$

حل: پوهېږو چې که $y = u^n$ وي نو مشتق یې $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{aligned} u &= \tan^3 x \\ u' &= \sec^2 x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= \tan^3 x \\ y' &= 3\tan^2 x \sec^2 x \end{aligned}$$

دويم مثال: د $y = \sec x \cdot \cot x$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: خرنګه چې تابع شکل د $y = u \cdot v$ شکل لري، نو:

$$y = \sec x \cdot \cot x$$
$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad u' = \sec x \tan x$$
$$v = \cot x \quad \Rightarrow \quad v' = -\csc^2 x$$

د u, v, u' او v' قيمتونه د $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$y' = \sec x \tan x \cdot \cot x + \sec x(-\csc^2 x)$$
$$= \sec x \tan x \frac{1}{\tan x} - \csc^2 x \sec x$$
$$= \sec x - \csc^2 x \sec x$$

پوښتني

د لاندې تابعګانو مشتق پيدا کړئ.

$a)\ \ y = \tan x \cot x$

$b)\ \ y = (x^2 + x - 1)\tan^2 x$

$c)\ \ y = \dfrac{1}{\tan x}$

$d)\ \ y = \tan x \sec x - \cot x$

ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره وليکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

فعاليت

- د $y = 2x^2 - 4$ د تابع مشتق پيدا کړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ او ګراف يې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پيدا کولای شئ.

د يوه منحني خط معادله د وضعيه کمياتو په سيستم کې په عبارت له $y = f(x)$ ښخه ده، له دې ځايه $y - f(x) = 0$ کېږي او $y - f(x)$ يوه دوه متحوله تابع د x او y له جنسه ده، که $F(x,y) = y - f(x)$ تابع په پام کې ونيسو، نو د دې منحني معادله د $F(x,y)$ شکل غوره کوي؛ د مثال په ډول: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نو د $F(x,y) = 0$ له معادلې ښخه لیکلای شو، چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ يا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو پېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي. په عمومي ډول د $F(x,y) = 0$ معادله کيدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y يو له بل څخه جلا وي، نو مشتق يې په آساني پيدا کولای شو، ولې په ځينو رابطو کې y له x سره يو ځای بيان شوی وي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نيولو کې که د x له جنسه مشتق نيسو، نو y يو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نيسو x ثابت فرضوو لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy+1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy+1}$$

په عمومي حالاتو کې که ضمني رابطه د $f(x,y)=0$ په شکل تعریف شوی وي؛ نو $y'(x)$ په لنډ ډول داسې محاسبه کېږي:

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته(} y \text{ ثابت دی)}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته(} x \text{ ثابت دی)}}$$

لومړی مثال: د $y=\sin\frac{x}{y}+1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi,1)$ په ټکي کې پیداکړئ.

حل: د $y-\sin\frac{x}{y}-1=0$ رابطې څخه $y'_{(x)}=\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پیداکوو.

$$y-\sin\frac{x}{y}-1=0$$

$$\left.\begin{aligned} f'_{(x)}&=y'_x-(\sin\frac{x}{y})'_x-(1)_x\\ &=0-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-0=\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}\\ f'_{(y)}&=y'_y-(\sin\frac{x}{y})'_y-(1)_y\\ &=1-\frac{x}{1}\cos\frac{x}{y}-0=1-x\cdot\cos\frac{x}{y}\end{aligned}\right\}\Rightarrow y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1-x\cdot\cos\frac{x}{y}}=\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1-x\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi,1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)}=\frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1+\pi\cos\frac{\pi}{1}}=\frac{\cos\pi}{1+\pi\cos\pi}=\frac{-1}{1-\pi}$$

دویم مثال: د $x^2y+2y^3=3x+2$ رابطې ضمني مشتق پیداکړئ.

حل:

$$x^2y+2y^3=3x+2$$
$$x^2y+2y^3-3x-2=0$$
$$f'_{(x)}=2xy+0-3-0=2xy-3$$
$$f'_{(y)}=x^2+6y^2-0-2=x^2+6y^2-2$$
$$f'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy-3}{x^2+6y^2-2}=\frac{3-2xy}{x^2+6y^2-2}$$

دريم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پيداکړئ.

حل:

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

او يا په بله طريقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دويم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دويمې مرتبې د مشتق د پيداکولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اړيکې لومړی مشتق پيداکوو او بيا له دې رابطې څخه مشتق نيسو.

لومړی مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دويمه مرتبه مشتق $y''_{(x)}$ پيداکړئ.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او يا په بله طريقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه مشتق نيسو $y''_{(x)}$:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y}\cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

دویم مثال: د $x^2+xy+y^2-3=0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکی کې پیدا او پر منحنی د مماس معادله یې ولیکې.

حل: څرنګه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي نو نوموړی ټکی د منحنی پرمخ واقع دی؛ د $y'_{(x)}$ د پیداکولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې لیکلای شو:

$$f'_{(x)}=2x+y$$
$$f'_{(y)}=x+2y$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y}\quad,\qquad x+2y\neq 0$$
$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$
$$y-y_1=m(x-x_1)\ \Rightarrow\ y-1=-(x-1)\ \Rightarrow\ y=-x+2$$

او یا په بله طریقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$
$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$
$$2x+y+(x+2y)y'=0$$
$$(x+2y)y'+2x+y=0$$
$$(x+2y)y'=-2x-y$$
$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3=5y^3+x$ ضمني تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$
$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$
$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$

پوښتنې

1- د $x\sin y+y\cos x=5$ د رابطې ضمني مشتق پیداکړئ.

2- د $x^3+xy^2+y=3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

3- د $x^2+y^2=4x+4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

لوړې مرتبه(متوالي) مشتقات

د مخامخ تابع درې ځلې مشتق ونیسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونیسئ؟

$$f(x)=\sin x$$
$$f(x)=\cos x$$

فعالیت

- د $y=2x^4-3x^3-2x-1$ تابع مشتق پیداکړئ.
- د پورته تابع دویم مشتق پیدا کړئ.
- د پورتني مشتق د تابع دریم ځل مشتق ونیسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نیولی شو؟
- د پورتنی تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که د $y=f(x)$ مشتق منونکی وي، لومړی مرتبه مشتق یې په $y'=f'_{(x)}$، دویمه مرتبه مشتق یې په $y''=f''_{(x)}$ دریمه مرتبه مشتق یې په $y'''=f'''_{(x)}$ … په کلي ډول $n-$ام مرتبه مشتق د $y=f(x)$ تابع په $y^{(n)}=f^{(n)}_{(x)}$ علامت ښیو.

لومړی مثال: د $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$ تابع دریم مشتق په لاس راوړئ.

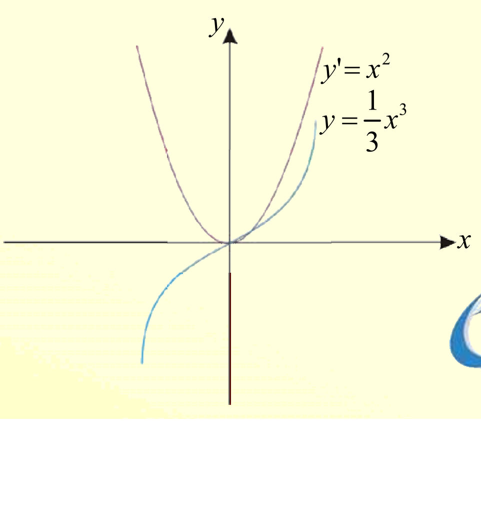
حل:

$$y=x^3-3x^2+4x-1$$
$$y'=3x^2-6x+4$$
$$y''=6x-6$$
$$y'''=6$$

دویم مثال: د $y=\frac{1}{3}x^3$ د تابع ګراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

$$y=\frac{1}{3}x^3$$
$$y'=\frac{3}{3}x^2=x^2$$
$$y'=x^2$$



دریم مثال: که $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قیمت پیداکړئ.

حل: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق یا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$\begin{aligned}(y^{(9)})^2+y^2&=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2\\&=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\\&=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2\end{aligned}$$

څلورم مثال: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه ځلي مشتق پیداکړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

یادونه: که چیرې $n-$ام درجه‌يي څو جمله‌يي تابع $f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n \quad c_n\neq 0$ راکړې شوې وي $n-$ام مشتق يې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{n(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ \dots\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{n(x)}=2c_2+6c_3x+\ \dots\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{n(x)}=6c_3+12c_4x+\ \dots\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^{n}_{n(x)}=n(n-1)(n-2)x\ \dots\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول که $k>n$ وی، نو: $f^{k}_{n(x)}=0$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو تر هغې مشتق پیداکړئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$ 2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ 4) $y=\sin x$

د خپرکي مهم ټکي

– که چېرې د $P(x, f(x))$ او $Q(x+h, f(x+h))$ ټکی د $f(x)$ تابع دوه اختیاري ټکي وي، نو لاندې اړیکه د Newton خارج قسمت په نامه یادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحني میل په یوه اختیاري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د یوې تابع مشتق: د تابع او متحول د تزاید، د نسبت لیمیټ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړئ، د مشتق په نامه یادېږي او په $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د (x_0) په یوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس میل د منحني سره د $(x_0, f(x))$ په ټکي کې دی.

که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په x_0 کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده؛ یعنې کېدای شي یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه دی.

د $f(x)$ د تابع مشتق د C پر منحني $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې د یوه منحني سره د مماس میل د هغې تابع د مشتق په نوم یادېږي.

که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو یوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د f تابع د $(x_0-r\ , x_0+r)$ په فاصله کې($x_0=x$ په شاوخوا) کې تعریف شوی وي او د هغې لیمیټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې یو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منحني د $x=x_0$ په ټکي کې رسم کړو، د دې مماس میل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

مشتق قوانین:

$$1)\ f(x)=C \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$$

$$2)\ f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$$

$$3)\ f(x)=u\pm v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'\pm v'$$

$$4)\ f(x)=u\cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+v'u$$

$$5)\ f(x)=\frac{u}{v} \quad , \quad v\neq 0 \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$6)\ f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$7)\ f(x)=\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$8)\ f(x)=\sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع گانو مشتق:

$$1)\ y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x \quad , \quad y=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$

$$2)\ y=\cos x \Rightarrow y'=-\sin x \quad , \quad y=\cos u \Rightarrow y'=-u'\sin u$$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول n - ام ځلي مشتق يې $y^{(n)}=f^{(n)}_{(x)}$ دی.

د دويم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x)=x^2-x$ منحني ميل د $P(3,0)$ په ټکي کې عبارت دی له:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- د $f(x)=2x^2$ په تابع کې د f متوسط بدلون د $[3,4]$ په انټروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- د $y=2x^2-3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=4x^2+3$ $b)\ y'=4x+\frac{1}{2}x$ $c)\ y'=4x+\frac{3}{x^2}$ $d)\ y'=4x$

4- د $f(x)=\sqrt{x-1}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5- د $f(x)=2x^2+x$ تابع د $x=1$ په ټکي کې د مماس خط معادله عبارت دی له:

$a)\ y=5x-5$ $b)\ y=x-3$ $c)\ y=5$ $d)\ y=5x$

6- د $y=\frac{2x}{-x+4}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-4x+8$ $b)\ y'=-2$ $c)\ y'=\frac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y'=\frac{8}{(-x+4)^2}$

7- د $y=(2-x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-6x^5+2x^3-24x$ $b)\ y'=3(2-x^2)^2$ $c)\ y'=3(-2x)^2$ $d)$ هيڅ يو

8- د $y=\sin x$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\sin x$ $b)\ y'=\cos x$ $c)\ y'=-\sin x$ $d)\ y'=-\cos x$

9- د $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y'=-\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y'=-4x^3$ $d)$ هيڅ يو

10- د $y=\frac{\cos}{1-\cos x}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

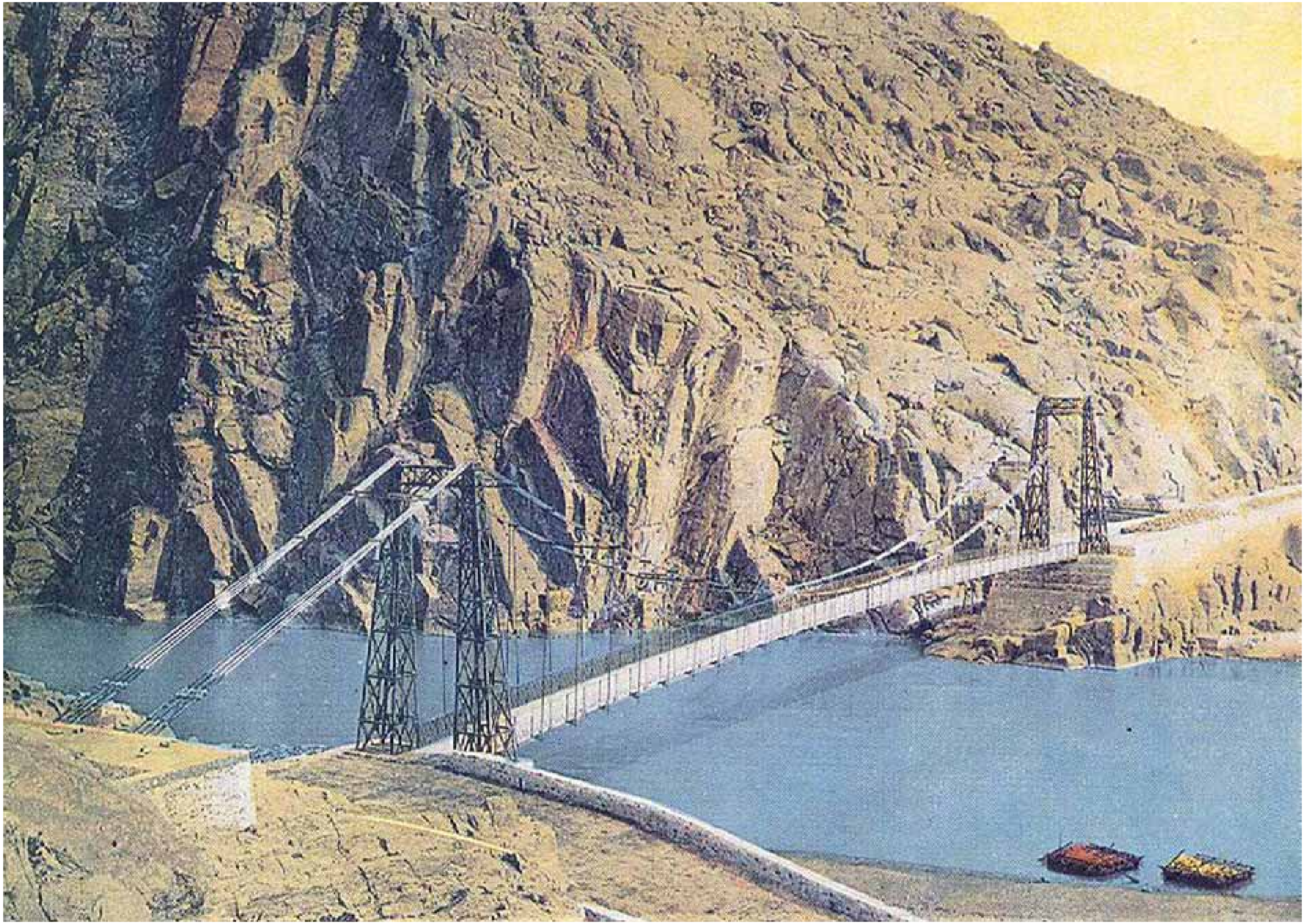
$a)\ y'=\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $b)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ $c)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $d)$ هيڅ يو

لاندې پوښتنې مفصل حل کړئ.

1. د $f(x)=\frac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟
2. د $f(x)=\frac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟
3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\frac{\pi}{4}$ په ټکي کې پیدا کړئ.
6. د $f(x)=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
7. د $y=\cos x$ تابع اتمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.
8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.
9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

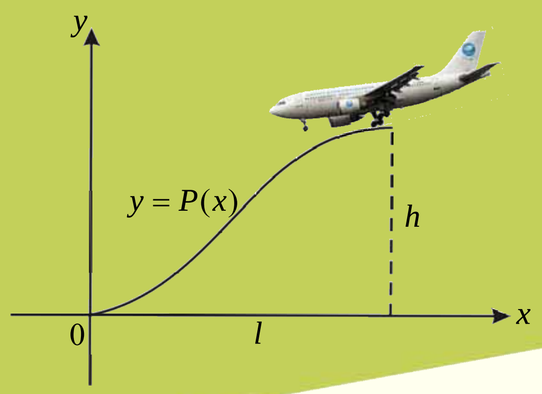
دریم څپرکی

د مشتق د استعمال ځایونه



د مشتق د استعمال ځایونه

د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بیان کړئ.

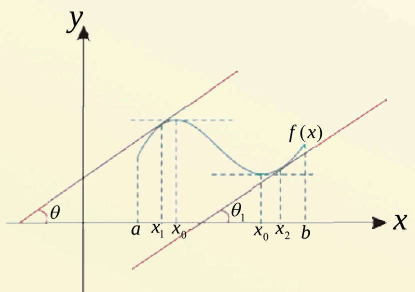


له مشتق څخه په ډیرو ځایونو کې لکه: (په فزیک کې د حرکت، سرعت او تعجیل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره حلېږي همدارنګه په کیمیا کې هم، د تابع د تحولات، د ځینو لیمیټونو په پیدا کولو کې) کار اخیستل کیږي چې ځینې ځایونه یې دلته تر څېړنې لاندې نیسو.

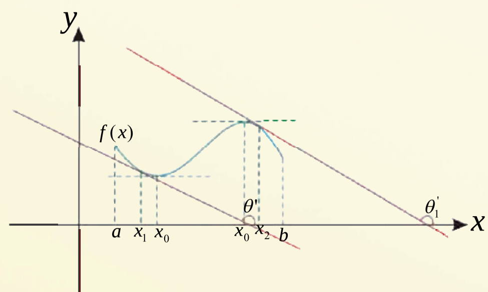
I-د یوې تابع تحولات:

فعالیت

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:



(1)



(2)

- متزایدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- په (1) شکل د (a,b) په انټروال کې د x_0، x_1 او x_2 په ټکو کې د رسم شویو مماسونو میلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو جګ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی په ګوته کړئ.

- په پورته شکلونو کې وښيي چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څيړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په (a,b) انتروال کې د مشتق وړ وي، نو که چيرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x)>0$ وئ، تابع په هغه انتروال کې متزايده بلل کيږي.

2- که چيرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او د (a,b) په انتروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کيږي.

يادونه: د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع د تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قيمت په زياتېدو سره د y يا تابع قيمت کم يا ثابت پاتې شي.

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع ګراف متزايد ده.

حل: څرنګه چې تابع کسري بڼه نه لري نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کيدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزايد شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$

$$f'(x)=3x^2+3$$

ليدل کيږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی نو د x د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې (+3) ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی نو تابع متزايده ده.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انتروال کې متناقصه ده؟

حل: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په هره انتروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، يعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$

$$f'(x)=0$$

$$3x^2-3=0$$

$$3x^2=3$$

$$x=\pm1$$

لیدل کېږي چې د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی نو تابع په همدې انټروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د تعریف ساحه پیدا او وروسته د تابع د تزاید شرط په کې څېړو:

$$D_f \to IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$f'(x) = 5 > 0$$

څرنګه چې $f'(x) > 0$ نو د ټولو قیمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزایده ده.

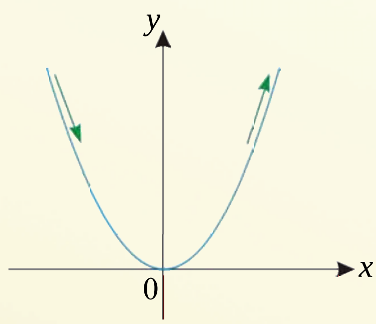
څلورم مثال: د $y = x^2$ د تابع ګراف ته څیر شئ او وښیئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y' < 0$ او که تابع متزایده وي $y' > 0$ څخه دی، نو لیکلای شو چې:

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x$$

$y' < 0$ د تناقص شرط $\Rightarrow 2x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$

$y' > 0$ د تزاید شرط $\Rightarrow 2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$



x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
y	$+\infty \searrow$	$4 \searrow$	$1 \searrow$	$0 \nearrow$	$1 \nearrow$	$4 \nearrow$	$+\infty$

د تابع له ګراف څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0, +\infty)$ په انټروال کې متزایده ده.

پوښتنې

1- د $f(x)=ax+b$ د تابع تحولات وښئ؟

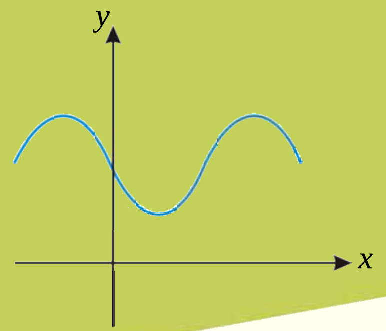
2- د $y=\frac{-3}{4}x-1$ د تابع تحولات وښيئ؟

3- وښيئ چې د $f(x)=2x^2+3x+1$ تابع د $x=1$ په نقطه کې متزايده ده؟

4- د $y=x^2+3x+2$ د تابع د تزايد انتروال و ټاکئ؟

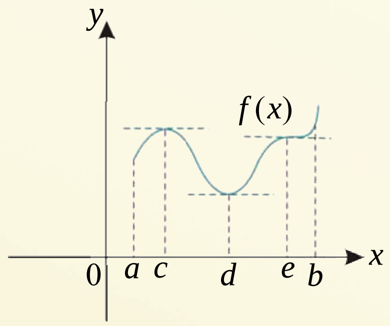
د يوې تابع بحراني (Extreme) ټکي (اعظمي Maximum او اصغري Minimum)

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او ووايئ چې دا ټکي د څه په نامه يادېږي؟



فعاليت

که په لاندیني شکل کې د $f(x)$ تابع د (a,b) په انټروال کې د مشتق وړ وي.



- د متحول د قيمت په زياتوالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت لوييږي.
- د متحول د قيمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت کمېږي.
- د تابع تحولات په (c,d) او (d,e) انټروال کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ د تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

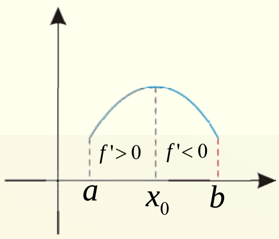
د يوې تابع په ګراف کې د y پر محور تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي (maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته د تابع اصغري (minimum) وايي، د x د هغو قيمتونو لپاره چې تابع اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د بحراني (Extreme) نقطو په نامه يادېږي.

تعریف:

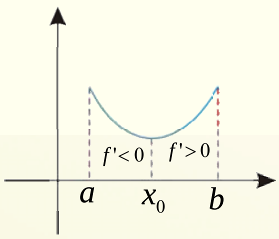
1- **ثابته تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق همیشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وایي.

2- **متزایده تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزایده بلل کېږي، یعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.

3- **متناقصه تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې منفي وي یعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.



(1)



(2)

1- **اعظمي ټکی**: که چیرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تزاید له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اعظمي(maximum) په نامه یادېږي.

2- **اصغري ټکی**: که چیرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزاید حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اصغري (minimum) په نامه یادېږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چیرې مشتق خپله اشاره د x_0 په یوه معین ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بیا مثبت ته یا له منفي څخه صفر او بیا منفي ته بدله کړي x_0 د انعطاف د نقطې په نامه یادېږي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ راکړل شوی ده دا تابع خو د (Extreme) ټکي لري.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)}=3x^2-7x+2$$

$f'(x)=0$

$3x-1=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$

$x-2=0\Rightarrow x_2=2$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{17}{54}$	$\searrow$	-2 -2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
			Max				*Min*		

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او (2) په دوو نقطو کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني(Extreme) ټکي لري.

دویم مثال: د $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع موضعی Extreme ټکي یا نستبي ټکي مشخص کړی.

حل: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کیږي چې تابع د $y=\frac{u}{v}$ شکل لري، نو $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x)=0 \quad\Rightarrow -x^2-2x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=12$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{-2}=0.73$$

x		-3		-2.73		-1		0.73		1	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{2}{15}$	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$	0	$\nearrow$	*Max*	$\searrow$	-2	$\searrow$

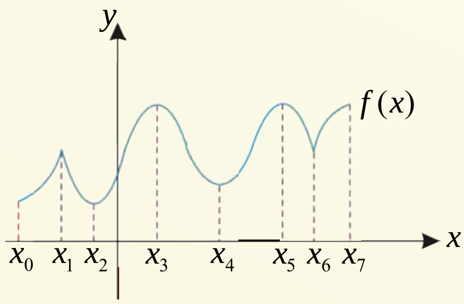
په جدول کې ښکاري چې f' د x_1 او x_2 دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه د Extreme ټکي لري، یعنې تابع اعظمي او اصغیر ټکي لري.

اعظمي او اصغري مطلق ټکي

کیدای شي یوه تابع په یوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په یوه تړاکلي انټروال کې تابع یوازې یوه مطلقه اعظمي او یوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې یې وښیئ؟

فعالیت

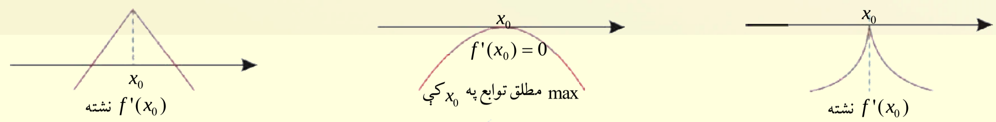
لاندیني شکل ته ځیر شي:



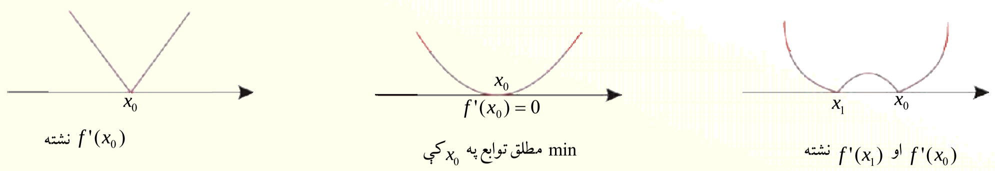
- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښیئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په ګوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

مطلق اعظمي *Maximum*: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکي مطلق اعظمي بلل کیږي، که چیرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \leq f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وایي لاندې شکلونه وګورئ.



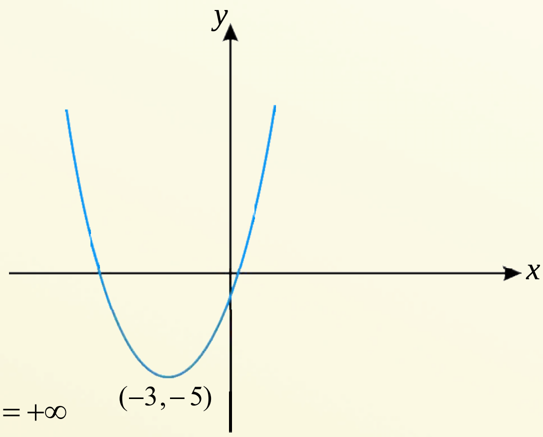
مطلق اصغري ***Minimum***: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کيږي، کـه چيـرې د f د تعريف په ساحه کې د هر x لپـاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نـو پـه دې حالـت کـې $f(x_0)$ تـه مطلقـه اصغري وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپـاره تـابع يـا اعظمـي او يـا اصـغري قيمتونـه اخلـي د x دغـه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.



لومړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغری پيداکړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راورو:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$
$$f'(x) = x + 3$$
$$f'(x) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$f(-3) = -5$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} x^2 + 3\lim_{x\to\infty} x - 1\lim_{x\to\infty} - \frac{1}{2} = +\infty$$

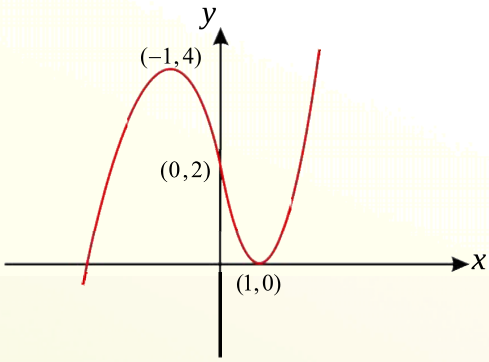


x	$-\infty$	-4	-3	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{9}{2}$ ↘	-5 (Min) ↗	3 ↗	$\frac{15}{2}$ ↗	$+\infty$

په پايله کې د $x = -3$ په ټکي کې چې د تـابع قيمـت (-5) دی او تـابع پـه $(-3,-5)$ ټکـي کـې مطلـق اصغري لري.

دویم مثال: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیدا او رسم یې کړئ.

حل: د اعظمي او اصغري ټکو د پیداکولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پیدا او بیا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.



$$f(x)=x^3-3x+2$$
$$f'(x)=3x^2-3$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x^2=1$$
$$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$$
$$f(1)=1^3-3\cdot1+2=1-3+2=0$$
$$f(0)=0-3\cdot0+2=2$$
$$f(2)=2^3-3\cdot2+2=4$$
$$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(2)=4$$
$$Max\ f(2)=4 \qquad\qquad Min\ f(1)=0$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	−		−	0	+		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{5}{6}$	↗	4	↘	2	↘	0	↗	4	↗	$+\infty$
					Max				Min				

له جدو څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونوکې مطلقه متزایده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطخ اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د یوې تابع د ګراف رسموولو لپاره لاندې ټکي باید په پام کې ونیسو:

1. د تابع متمادیت او نامتمادیت مطالعه کړو.
2. د قایمو محوراتو سره د ګراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزاید او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پیداکول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتیبول او د هغوی په مرسته د ګراف رسمول.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د x او y له محورونو سره پیداکؤو:

د y له محور سره د ګراف تقاطع د ټکو د پیداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$$x = 0 \qquad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی ګراف د y محور په $(0,2)$ نقطه کې قطع کوي.

د x د محور سره د ګراف د پرېکړې د ټکو دپیدا کولو لپاره y مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمت پیداکوو:

$$y = 0 \ , \ 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$$

نو پورتنی ګراف د x محور په $(-1,0)$ او $(2,0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دویم مشتق څیړو.

$$y = 2 + x - x^2$$

څرنګه چې د تابع په اعظمي او اصغري په نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0 \ ، \ 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \ \Rightarrow \ 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپېژندنې له پاره دتابع دویم مشتق پـه $x = \frac{1}{2}$ ټکو کې څیړو:

$$y'' = -2 < 0$$

څرنګه چې y'' تل منفي دی نو په $x = \frac{1}{2}$ کې هم منفي دی ځکه نو تابع په $x = \frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي قیمت لري څرنګه چې د $x = \frac{1}{2}$ لپاره $y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده: $(\frac{1}{2} ، 2\frac{1}{4})$

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري ځکه چې دهر x لپاره $y'' < 0$ دی.

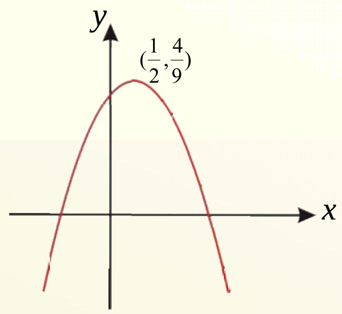
3- په $\pm\infty$ کې دگراف څیړل:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}(2+x-x^2) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2) = -\infty$$

د زیاتې روښانتیا لپاره لاندې جدول ترتیب شوی، او دتابع تول بدلونو نه په هغو کې په‌گوته کوو او وروسته نوموړی گراف رسموو.

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$



پوښتنې

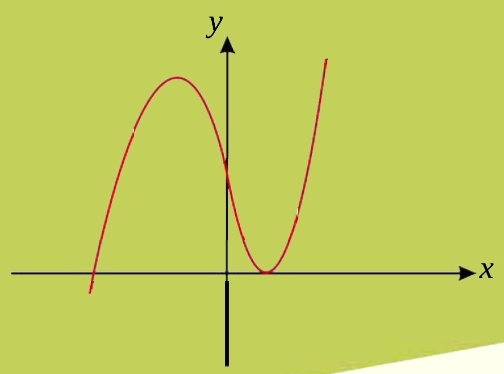
1- د لاندې توابعو موضعي Extreme و ټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2 - 3x + 2$ $\quad b)\ f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$ $\quad c)\ y = 3x^2 - 4x + 1$

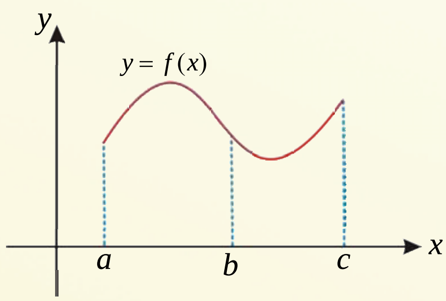
2- د $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ د تابع مطلقه min پیدا کړئ.

د انعطاف د نقطي ټاکل

هغه ټکي چې د يوې تابع گراف په هغې کې خپل محدبيت، مقعريت ته او يا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه يادېږي؟ آيا په دې ټکي کې د دويم مشتق علامه او قيمت څرګنداى شئ؟



لاندينی شکل په پام کې ونيسی.

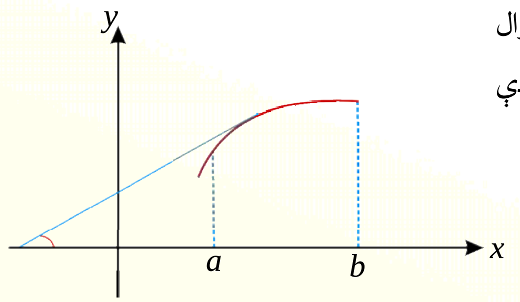


- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (a,b) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کيږي؟
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (b,c) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کيږي؟
- د (a,b) په انټروال کې په منحني يو مماس رسم کړئ او له هغه مماس سره يې پرتله کړئ چې د (b,c) په انټروال کې په منحني رسمېږي.

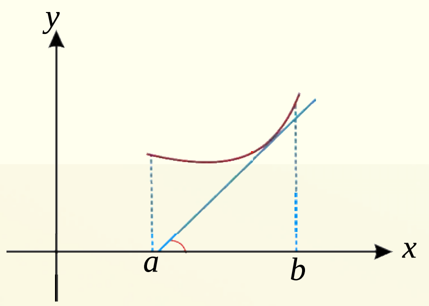
د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

1. د $y = f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې پرسيدلی يا محدب بلل کېږي، که چيرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه يا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دويم مشتق منفي $y''<0$ په لاس راځي.

په دې ډول که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې منفي وي، نو د تابع ګراف یا منحني په دې انټروال کې محدب پاتې کېږي.



2. د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې ننوتې یا مقعره بلل کېږي، که چیرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني نه لاندې یا ښکته خوا پروت وي، که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې مثبت $y''>0$ وي، منحني په دې انټروال کې مقعر بلل کیږي.



تعریف: هغه ټکي چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا ددې پر عکس په کې جهت بدلوي، د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کېږي.

که د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ټکي کې چې د تابع دویم مشتق صفر شي ($f''(x_0)=0$) وي تابع د $x = x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې پر عکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

لومړی مثال: د $f(x) = x^2 - 5x + 4$ د تابع ګراف رسم محدبیت او مقعریت یې وڅېړئ.

حل: تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

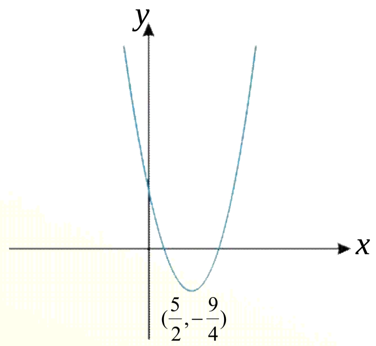
1- د y له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

2- د x له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-5x+4=(x-4)(x-1) \Rightarrow x_1=4 \quad , \quad x_2=1$$

د x له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.



x	$-\infty$	0		1		$\frac{5}{2}$		4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$ min	$\nearrow$	0	$\nearrow +\infty$

د ګراف، مقعریت او محدبیت د څیړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راوړو:

$$f(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow y'=2x-5$$
$$f''(x)=2>0$$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پایله کې ویلای شو چې منحني ننوتي یا مقعر دی.

دويم مثال: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب یا مقعر وي.

حل:

$$y=x^3+9x^2-6x+1$$
$$y'=3x^2+18x-6 \Rightarrow y''=6x+18$$
$$y''<0 \Rightarrow 6x+18<0$$
$$6x<-18 \Rightarrow x<-3$$
$$y''>0 \Rightarrow 6x+18>0$$
$$6x\geq-18$$
$$x>-3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$ محدب	انعطاف	$\cup$ مقعر

څرنګه چې لیدل کیږي د تابع دویم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي نو دا ډول ګراف په لومړی انټروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی.

دریم مثال: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

حل:

$$f(x)=x^5-5x^3 \Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2$$
$$f''(x)=20x^3-30x$$
$$f''(x)=0$$
$$20x^3-30x=0$$
$$x(20x^2-30)=0$$
$$x_1=0$$
$$20x^2-30=0$$
$$x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	-13.65	$\cup$		$\cap$	$-6\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cup$	

لیدل کیږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x=0$ ، $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دویم مشتق صفر دی یا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسمیدلی شي، چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.

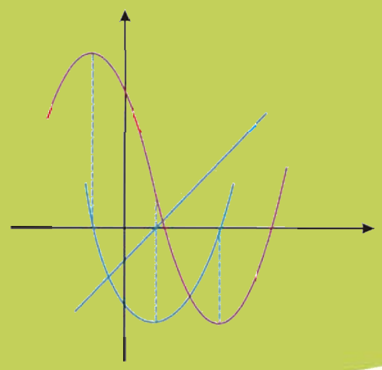
پوښتنې

1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبیت او مقعریت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.

د منحني‌ګانو رسمول

د دويمې درجې تابعګانو ګراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.



فعاليت

- د $f(x)=x+1$ د تابع ګراف د $f(x)=-x+1$ د تابع له ګراف سره پرتله کړئ.
- د $y=ax^2+bx+c$ د تابع د تعريف ساحه و ټاکئ آيا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړې تابع لومړی مشتق پيدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور يې وټاکئ.
- د تابع ليميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x\to\pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتيب او نوموړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- د تابع د تعريف ساحه: ليدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره ټاکلې ده، يعنې:

$$D_f\to(-\infty,+\infty)$$

نو تابع د خپل تعريف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x)=2ax+b=0$$
$$f'(x)=0$$
$$2ax+b=0$$
$$2ax=-b$$
$$x=\frac{-b}{2a}$$

د $x = \frac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c \Rightarrow a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$y = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د $(-\frac{b}{2a} , \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکی بحراني یعني اعظمي یا اصغري دی.

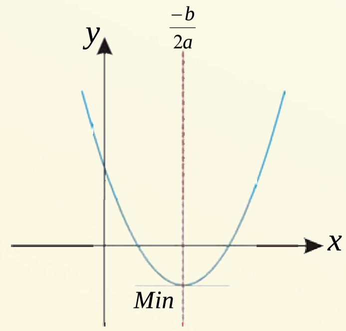
الف: که $a > 0$ وي، نو: $a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Min لري.

ب: که $a < 0$ وي، نو: $a < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Max لري.

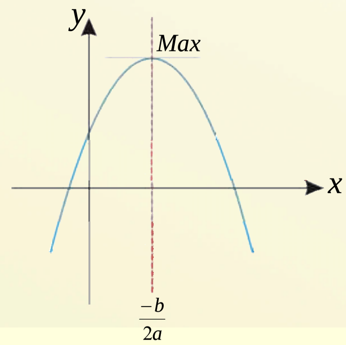
3- د ګراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او ګراف یې رسموو:



$a > 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$-\infty$

خرنګه چې $a > 0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.



$a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$-\infty$

خرنګه چې $a < 0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2-4x+3$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

1- د تابع د تعریف ساحه $(-\infty,+\infty)$ تابع د ټولو حقیقي قیمتونو لپاره تاکلې ده، نو تابع په دې انټروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &y=0\\ &x^2-4x+3=0\\ &(x-1)(x-3)=0\\ &x-1=0 \Rightarrow x=1\\ &x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{aligned}\right\}\quad (1,0)\ ,\ (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &x=0\\ &y=0-4\cdot 0+3\\ &y=3 \end{aligned}\right\}\quad (0,3)$$

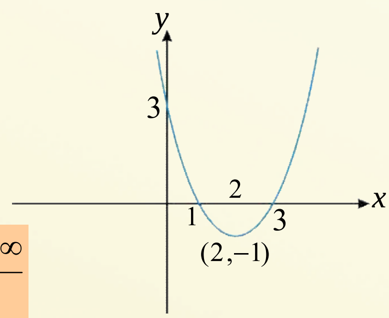
4- د تابع د extreme ټکو د پیداکولولپاره د لومړی مشتق صفري ټکي پیدا او جدول يې ترتیبوو:

$$f'(x)=2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

$$\left.f(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1\right\} \Rightarrow V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \Rightarrow f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$



x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1 (Min)	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

دویم مثال: د $f(x)=-x^2+2x$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

حل: لیدل کیږي چې تابع د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوې ده، نو:

1- د تابع د تعریف ساحه عبارت دی له: $(-\infty,+\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

-2 د تابع د منحني د تقاطع ټکی د x له محور سره:

$f(x)=0$

$-x^2+2x=0$

$x(-x+2)=0$ — د تقاطع ټکی

$x_1=0 \qquad (0,0)$

$-x+2=0$

$x_2=2 \qquad (2,0)$

-3 د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$x=0$

$f(x)=-x^2+2x$

$f(x)=0+2\cdot 0$

$f(x)=0 \qquad (0,0)$

-4 د تابع د extreme نقطو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$D_f \to (-\infty,+\infty)$

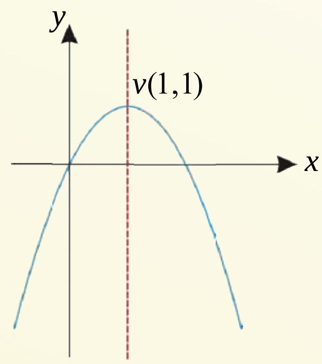
$f(x)=-x^2+2x$

$f'(x)=-2x+2=0$

$-2x+2=0$

$-2x=-2$

$\left.\begin{matrix} x=1 \\ f(1)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$



x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	1 (Max) $\searrow$	$0 \searrow$	$-\infty$

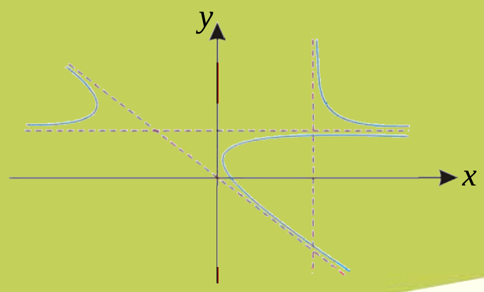
په جدول کې لیدل کیږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

پوښتنې

1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع ګراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د ګراف بدلونونه وڅیړئ او ګراف یې رسم کړئ.

د توابعو د ګرافونو مجانبونه

شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه یې واخلئ.



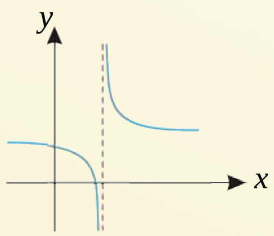
فعالیت

- مجانبونه څه دول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګان په کومو ټکو کې قطع کوي؟

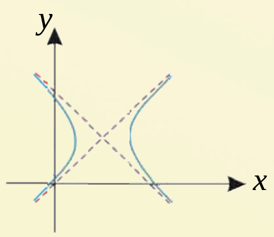
د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

مجانبونه: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني لپاره د لارښود حیثیت لري او د منحني کرښه غوځه کړي، هغه تابعګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي مجانبونه لري او په درې ډوله دي.

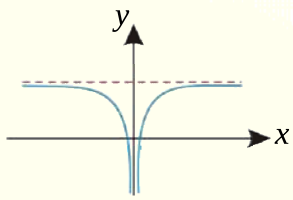
1- **عمودي مجانب**: د $y = f(x)$ تابع هغه عمودي مجانب لري چې $x \to a$ او $y \to \infty$ وکړي، یعنې $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابعګانو کې چیرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي نوموړې تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.



2- **مایل مجانب**: د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y = ax + b$) لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکې وي، یعنې د متحول د صورت درجه او د متحول د مخرج درجه له درې څخه لوړه وي.



په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چیرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.



3- **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده، چې که $x \to \infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې کـه $x \to \infty$ وکړي، نـو $y \to c$ ته تقرب کوي، یعني $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c$ شي.

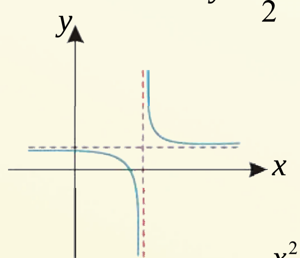
لومړی مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي مجانب پیدا کړئ.

حل: د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

افقي مجانب عبارت دی له: $y = \frac{1}{2}$

x	-1	0	$+1$
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1



دویم مثال: د $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ د تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- مایل مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج وېشو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x+2$$

2- عمودي مجانب: د دې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

3- افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

دریم مثال: د $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2=2 \end{array}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پیداکولو لپاره د تابع لیمیټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنګه چې د تابع د صورت له وېش څخه پر مخرج د $y=ax+b$ خطي معادله پیدا نه شوه، نو تابع مایل مجانب نه لري.

د مجانبو د ټاکلو عمومي لاره:

که چیرې د $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې m او n په ترتیب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

الف: که $m<n$ وي، نو د x محور افقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې b د m او n د درجو د حدودو د ضریبونو نسبت دی.

ج: که چیرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مایل مجانب احتمال یې شته.

د: که چیرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د یوه واحد په اندازه له مخرج څخه لویه وي) تابع هرو مرو مایل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.

پوښتنې

د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

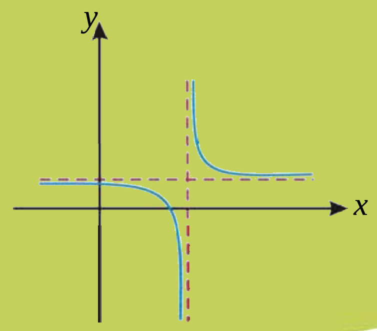
1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$

2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

د هوموګرافیک تابع ګانو ګراف

شکل تـه پاملرنـه وکـړئ دا شـکل د څـه ډول تـابع ګـراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه يې وښيئ.



فعالیت

- هوموګرافیک تابع څه ډول تابع ده، په یوه مثال کې یې واضح کړئ.
- د $y=\frac{1}{x}$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پیدا او بیا یې رسم کړئ.
- د تابع دګراف تقاطع د x او y له محورونو سره پیدا کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

هغه تابعګانې چې د $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموګرافیک تابعګانې بلل کېږي، داسې چې $c \neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب یې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} \Rightarrow y=\frac{a}{c}$$

2- عمودي(قایم) مجانب یې:

$$cx+d=0 \Rightarrow cx=-d \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

1. خرنگه چې د تابع مخرج د $x = 3$ په قیمت کې صفر کېږي نو تابع پرته د $x = 3$ څخه د متحول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعنې د تابع د تعریف ساحه ټاکو: $Domain = IR \setminus \{3\}$

2. د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ 2x-1 = 0 \\ 2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} (\frac{1}{2}, 0)$$

3. د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$\left. x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2\cdot 0 - 1}{0-3} = \frac{1}{3} \right\} (0, \frac{1}{3})$$

4. د مجانبونو ټاکل:

الف- افقي مجانب: $y = 2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-1}{x-3} = 2$ یا $f(x) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{2}{1} = 2$

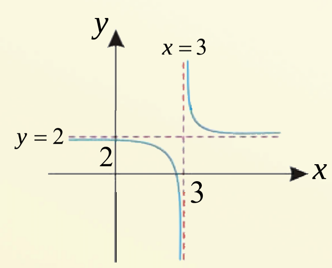
ب- عمودي مجانب: $x = 3 \Leftarrow x - 3 = 0$ یا $x = -\dfrac{d}{c} = -\dfrac{-3}{1} = 3$

5. د تابع د extreme ټکي پیدا کوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$f'(x) = \frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2} < 0$$

$$f''(x) = \frac{0\cdot(x-3)^2 - (-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10}{(x-3)^3}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	نه دی تعریف شوی	$+\infty$



دویم مثال: د $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ د تابع د ګراف بدلونونه و څېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

1- د تابع د تعریف ساحه $D_f \to IR \setminus \{-1\}$ یعني تابع په $x = -1$ ټکي کې تعریف شوې نه ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

الف- عمودي مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

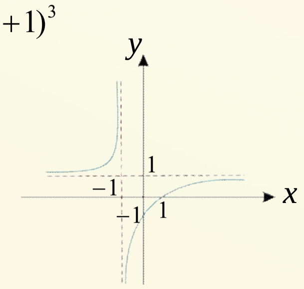
5- د تابع extreme نقطې پيدا کوو، جدول يې ترتيب او ګراف يې رسموو:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$ $\quad -1$	
$f'(x)$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$1 \nearrow$ نه دی تعریف شوی	$\nearrow 1$



دريم مثال: غواړو د $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ تابع ګراف رسم کړو.

حل:

1- د تابع د تعريف ساحه تر څېړنې لاندې نيسو ليدل کېږي چې تابع پرته د $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قيمتونو لپاره معينه ده، يعنې: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محورونو سره د تقاطع ټکي

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوي نه ده، نو د y محور سره تقاطع نه لري.

3- **مجانبونه**:

الف- عمودي مجانب: څرنګه چې په مخرج کې یوازې x موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د y محور کېږي.

ب- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x-5}{x}\right]=2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پیداکول: د بحراني ټکو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو

$$f(x)=\frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}$$

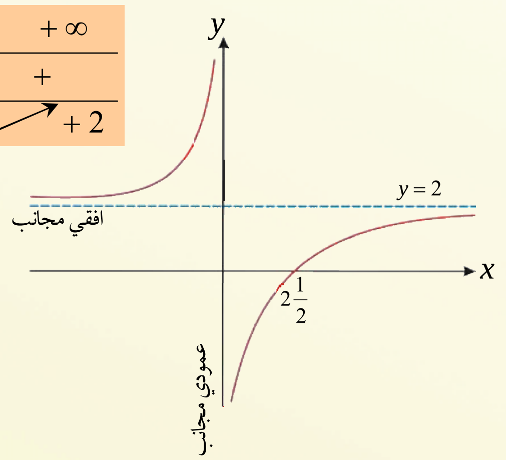
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

څرنګه چې $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزایده ده.

دګراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

x	$-\infty$		0		2.5	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$
$f(x)$	2	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow +2$

نه دی تعریف شوی



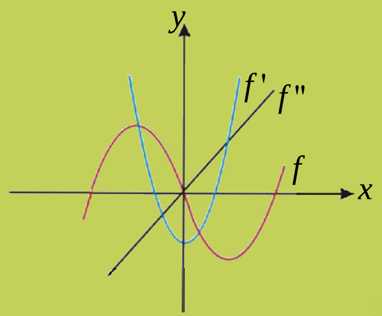
پوښتني

1. د $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅیړئ او رسم یې کړئ.

2. د $f(x)=\frac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅیړئ او رسم یې کړئ.

د دريمې درجې يو مجهوله تابع ګراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$

مخامخ شکل د ځينو توابعو ګرافونه راښيي تاسې د هرې تابع د ګراف په هکله خپل نظر بيان کړئ.



- د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووايئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
- د نومړي تابع ضريبونه او ثابت حد وليکئ.
- د نومړي تابع دويم مشتق پيدا کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

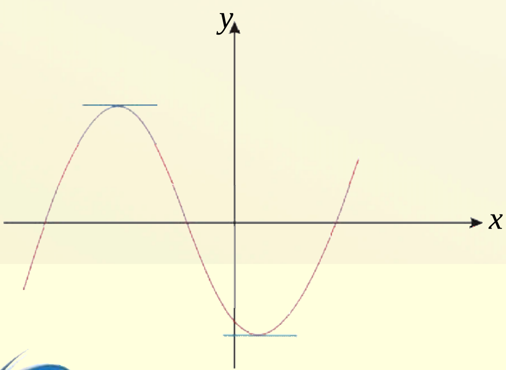
1. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دريمه درجه تابع کې چې $a > 0$ وي داسې په پام کې نيسو که چيرې د تابع لومړی مشتق پيدا کړو دويمه درجه تابع په لاس راځي، نو د $f'(x) = 0$ لپاره د دويمې درجې د معادلې حل په پام کې نيسو او Δ يې مطالعه کوو که چيرې د معادلې Δ له صفر څخه لوی $(\Delta f' > 0)$ وي، نو معادله(د تابع مشتق) دوه حله لري، که چيرې $a > 0$ وي منحني له کين لوري څخه ښي لوري ته يوه نسبي اعظمي نقطه(Maximum) او يوه نسبي اصغري(Minimum)لري.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a > 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$

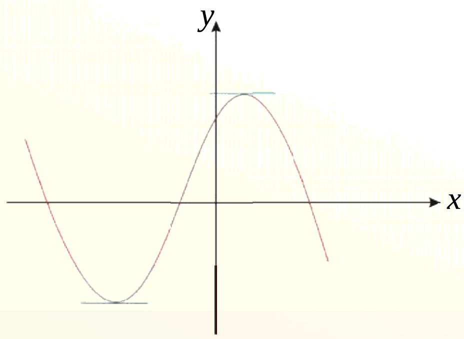
x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$		$\searrow$		$\nearrow +\infty$



2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، په تابع کې چې $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادله دوه جذرونه لري، که چیرې $\Delta f'>0$ نو منحني دکین لوري څخه ښی لوري ته یوه نسبي اصغری(Minimum) او یوه نسبي اعظمي(Maximum) نقطه لري.

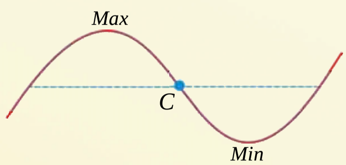
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$a<0 \Rightarrow \Delta f'>0$$

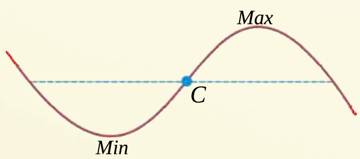
x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \searrow$		$\nearrow$		$\searrow +\infty$



3. که د دریمې درجې تابع منحني نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme دټکو د منځني ټکي یا د انعطاف د نقطې مختصات یې:

$$I(x_c,y_c)=\left(\frac{x_{max}+x_{min}}{2},\frac{y_{max}+y_{min}}{2}\right)$$



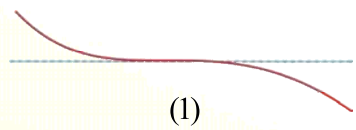


4. د دریمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

$$f'(x)=0$$
$$3ax^2+2bx+c=0$$

چې د تناظر ټکي یې وروسته د نوموړي معادلې د حل څخه د تناظر مرکز $x=-\dfrac{b}{3a}$ په لاس راځي.

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې که $a<0$ وي او $f'(x)=0$ سره وضع شي او $\Delta f'(x)=0$ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\le 0$ وي، نو په دې صورت تابع متناقصه ده او که چیرې $f'(x)\ge 0$ وي نو په دې صورت کې تابع متزایده ده.


(1)


(2)

لومړی مثال: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته ګورو چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده د محورونو سره د تقاطع ټکي پیداکوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیداکولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې ګراف رسموو: $f(x)=x^3+3x^2-4$

$$f'(x)=3x^2+6x$$
$$3x^2+6x=0$$
$$x(3x+6)=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \;\Rightarrow\; x_2=-2$$
$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$$
$$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$$
$$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$$
$$=-8+12-4=0$$
$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 6x+6=0$$
$$6x=-6$$
$$x=-1$$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$$

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

د محورونو سره تقاطع:

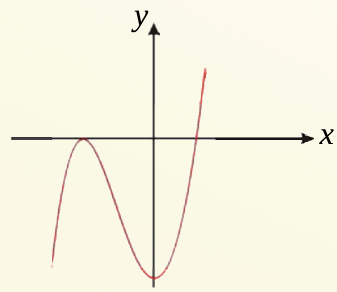
الف- د x له محور سره تقاطع:

$$y=0$$
$$(x-1)(x+2)^2=0$$
$$\left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x_2=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,0)\ ,\ (-2,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$x=0$$
$$y=0^3+3\cdot 0^2-4=-4 \Rightarrow (0,-4)$$

x	$-\infty$	-2		-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f''(x)$	$-$		$-$		$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow +\infty$
		max				min	



دویم مثال: د $f(x)=-x^3+3x^2$ د تابع تحولات وڅیړئ او ګراف رسم کړئ.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو او وروسته یې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راورو.

-1

$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f'(x)=-3x^2+6x$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow -3x^2+6x=0 \Rightarrow x(-3x+6)=0$$
$$x_1=0\ ,\ -3x+6=0 \Rightarrow -3x=-6 \Rightarrow x_2=2$$

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \\ f(2)=-2^3+3\cdot 2^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\ (2,4)$$

2- د محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ -x^3+3x^2=0 \\ x^2(-x+3)=0 \\ x_1=0\ ,\quad -x+3=0 \\ \qquad\qquad x_2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\quad ,\qquad (3,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

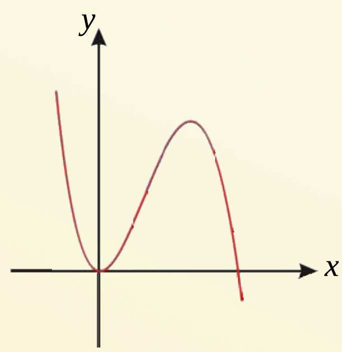
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

3- د انعطاف د نقطې د پیداکولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x)=-6x+6=0$$
$$x=1$$
$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f(1)=2\ \Rightarrow\ I(1,2)$$

4- اوس یې جدول ترتیبوو او ګراف یې رسموو:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$
			نسبي Min				نسبي Max		



دریم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې د تناظر مرکز د $x = \frac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x = \frac{-b}{3a} = \frac{-(-3)}{3 \cdot 1} = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 1 + 1 = 0$$

$C(1,0)$ د تناظر د مرکز مختصات

پوښتنې

1. د لاندې تابعګانو د تحولاتو جدول ترتیب او ګرافونه یې رسم کړئ.

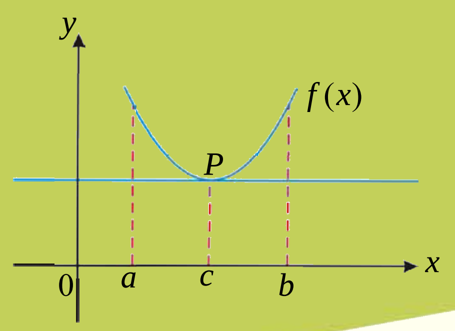
$a)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1 \quad , \quad b)\ f(x) = -(x-1)^3$

2- د $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$ د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

د رول قضيه

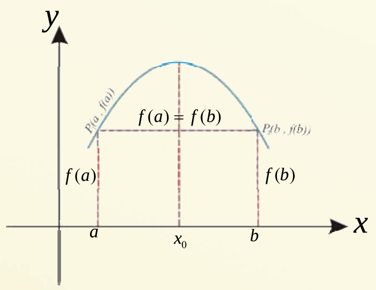
Rolle Theorem

په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د Δ مستقيم خط يو له بل سره څه اړيکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دى.



فعاليت

- په مخامخ شکل کې د (a,b) په انټروال کې د $f(x)$ په منحني داسې ټکي شته چې له هغو څخه په منحنى داسې مماس رسم شي چې د x له محور سره موازى وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړ ده.
- که چيرې $f(a)=f(b)$ وي، نو د x_0 ټکي په (a,b) انټروال کې وځيرئ.



د پورتني فعاليت څخه لاندې قضيه بيانولاى شو:

قضيه: که چيرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a<x<b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a)=f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د x_0 يو ټکى په $a<x<b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0)=0$ شي.

ثبوت: څرګنده چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوى انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکي لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1) > 0$ وي، نو تابع په $[a,b]$ کې یو $x_0 \in [a,b]$ Maximum قیمت لري چې $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2) < 0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

څرنګه چې په Extreme نقطوکې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0) = 0$ کیږي.

لومړی مثال: د رول قضیه د $f(x) = \cos x$ د تابع لپاره په $[a,b] = (\pi, 5\pi)$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: څرنګه چې $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ سره وي نو د $f(x)$ تابع د هر x لپاره د مشتق وړ ده نو د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi, 5\pi)$ کې لږ تر لږه یو x_0 موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $(\cos x)' = 0$ شي. څرنګه چې $(\cos x)' = -\sin x$ دی، نو باید $-\sin x = 0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi, 5\pi)$ کې موجود وي.

$-\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ کې درې حله $4\pi, 3\pi, 2\pi$ قیمتونه اخیستلای شي.

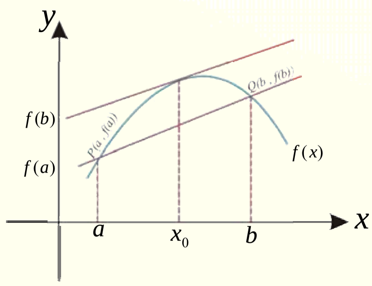
دویم مثال: د رول قضیه د $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ تابع په $[a,b] = [-1,1]$ فاصله کې تطبیق کړی.

حل: لیدل کیږي چې تابع د پیل او پای په ټکوکې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(-1) = f(1) = 0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ کې متمادي ده او په $[-1,1]$ کې د x_0 یو عدد شته چې $f'(x_0) = 0$ شي او هغه $x_0 = 0$ دی.

د $y'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

د متوسط قیمت قضیه(لاگرانژقضیه):



مخامخ شکل په پام کې و نیسئ:

- د یوې مستقیمې کرښې میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کرښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتنی فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

قضیه: که چیرې $f(x)$ د $[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د (a,b) په فاصله کې د مشتق وړ وي د (a,b) د انټروال څخه د c یو عدد شته دی داسې چې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یعنې: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کیږي چې: $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{.........} \ \mathrm{I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{.........} \ \mathrm{II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د c عدد د (a,b) انټروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قيمت قضيه په $[a,b]=[1,3]$ کې وڅيړئ.

حل: ليدل کېږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قيمت له قضيې سره سم په $(1,3)$ کې يو x_0 شته داسې چې:

$$f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پيداکولو لپاره لرو:
$$f'(x_0)=6x^2-8=18 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$$

څرنگه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې گډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

پوښتنې

1- که چيرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوې وي د x_0 قيمت داسې پيداکړئ چې د رول قضيه په پورتني تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوې وي د x_0 قيمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضيه په هغې کې صدق وکړي.

3- د هوپیتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بیانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

فعالیت

- د $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کی پیدا کړئ چې $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\frac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا قاعده بیانو:

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چیرې $\frac{f(x)}{g(x)}$ د لېمیټ نسبت $x\to a$ قیمت کې د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل او یه $x\to\infty$ کې د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لېمیټ د پیدا کولو لپاره د $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي مشتق نیولو ته ادامه ورکوو ...n تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}=0$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

یا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

مثال: د لوپیتال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره د لاندې توابعو لیمیتونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x} \qquad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3} \qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$$

لومړی ځواب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

دویم ځواب:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

دریم ځواب:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

پوښتنې

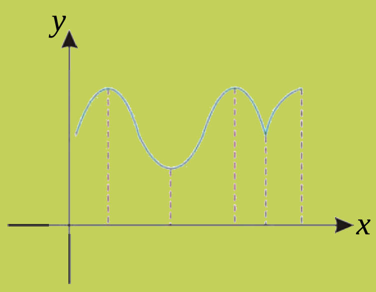
د لوپیتال د قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې لیمیتونه پیدا کړئ.

$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, $b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$

$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}$, $d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{3x^3}$

د بحراني ټکو تطبيق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او دا ټکی د څه په نامه ياديږي.



1- دوه عددونه پيدا کړئ چې مجموعه يې 20 او د ضرب حاصل يې لوی ممکن قيمت ولري.

حل: که لومړی عدد ته x ووېل شي، نو دويم عدد $20-x$ دی او د ضرب حاصل يې د تابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ ليکو، څرنګه چې د x عدد په $[0,20]$ انټروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قيمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot 10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot 0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot 20-20^2=400-400=0$$

ليدل کېږي چې (10 ، 100) د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل يې 100 دی.

2- د يوه خوځنده جسم د حرکت معادله د $x=(t-2)(t-3)$ په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ.

حل: د منځنی سرعت د تعريف په مرسته ليکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

3- دکرې د حجم او سطحې تر منځ منحنی نسبت پیداکړئ.

حل:

$$\text{دکرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{دکرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4- د سانتي ګراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر منځ منحنی نسبت وټاکئ.

حل: د منحنی سرعت د تعریف $(V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F)-C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32)-\frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیداکړئ.

حل: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په x او سور یې په y وښیو، نو لیکلای شو:

$$\text{میحط} = 2x+2y = 200$$

$$\text{میحط} = x+y = 100 \quad \Rightarrow y = 100-x$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y$$

$$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$$

$$x>0 \quad , \quad y>0 \Rightarrow 100-x>0 \quad \Rightarrow x<100$$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې انټروال کې $0<x<100$ د تابع اعظمي مساحت داسې پیداکوو:

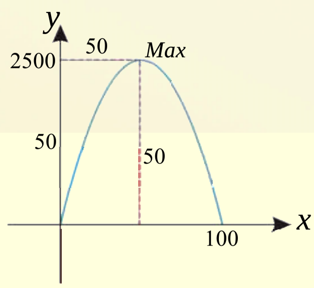
$$S' = 100-2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100-2x = 0 \quad \Rightarrow x = 50 \quad \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} S(x) = 0$$

x	0		50		100
S'		+	0	−	
S	0	↗	2500	↘	0



په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

حل: که چیرې دا عددونه x او y وي، نو $x+y=200$ اوکه x ، $x^2+y^2=T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)}=x^2+y^2$$
$$=x^2+(200-x)^2$$
$$=x^2+x^2-400x+(200)^2$$
$$=2x^2-400x+40000$$
$$T'_{(x)}=4x-400$$
$$T'_{(x)}=0$$
$$4x-400=0$$
$$x=100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنی مجموعه عبارت دی له: $T_{(100)}=20000$

7- د A ټکی د $y=\frac{2}{x}$ د منحني له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انتروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

حل: د $y=\frac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x,\frac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2{}_{(A)}+y^2{}_{(A)}}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$
$$\overline{OA}^2=x^2+\frac{4}{x^2}=d^2 \Rightarrow d'_{(x)}=(x^2)'+(\frac{4}{x^2})'=2x-\frac{8x}{x^4}=2x-\frac{8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=\frac{2x^4-8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=0$$
$$2x^4=8$$
$$x_1=\sqrt{2} \quad , \quad x_2=-\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2+\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2+\frac{4}{2}=\frac{8}{2}=4$$
$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدا څخه 2 واحد مربع ده.

8- يو مكعب مستطيل چې قاعده يې مربع ده، په پام کې نيسو، که د درېو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پيدا کړئ.

حل: که د مکعب مستطيل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته يې y وويل شي، نو:

$$x+x+y=24 \Rightarrow y=24-2x$$

څرنګه چې $y \ge 0$ دی، نو $0 \le x \le 12$ کېږي او د مکعب مستطيل حجم عبارت دی له:

$$V=x^2 \cdot y \Rightarrow V=x^2(24-2x)=24x^2-2x^3$$

$V=24x^2-2x^3$	$V(0)=24\cdot 0^2-2\cdot 0^3$
$V'(x)=48x-6x^2$	$=0-0=0$
$V'(x)=0$	$V'(0)=0$
$48x-6x^2=0$	$V(8)=24\cdot(8)^2-2\cdot(8)^3$
$x(48-6x)=0$	$=1536-1024=512$
$x_1=0$	$V(8)=512$
$48-6x=0$	$V(12)=24\cdot(12)^2-2\cdot(12)^3=3456-3456=0$
$-6x=-48$	$V(12)=0$
$x=8$	

نو د مکعب مستطيل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.

پوښتنې

1- د $y=x^3+x^2+x+1$ د تابع تحولات پيدا او منحني يې رسم کړئ.

2- دوه داسې عددونه پيدا کړئ چې د جمعې حاصل يې 20 او د ضرب حاصل يې تر ټولو لوی ممکن قيمت ولري.

3- که د اوسپنې له يوې تختې څخه چې هره ضلعه يې $1m$ طول لري يو سر خلاص بکس جوړېږي د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربعګانې پرې کړئ او بيا هغه قاط کړئ کوچنی مربعګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

4- د $y=x^2$ ګراف ته ډېره نژدې نقطه له $A(0,3)$ نقطې سره پيدا کړئ.

د څپرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متزایده بلل کېږي، چې د $[a,b]$ په انټروال کې پیوسته او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي، چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د تابع له تزاید څخه مطلب دا دی چې د x د متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت زیات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت کم شي.
- په یوه تابع کې تر ټولو جګې نقطې ته موضعي اعظمي(Local Maximum) او تر ټولو ټیټې نقطې ته موضعي اصغري(Local Minimum) وایي، د x هغه قیمتونه چې د هغوی لپاره تابع یا اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د Extreme په نامه یادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چیرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وایي.
- مطلق Minimum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چیرې $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وایي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې محدب بلل کېږي، که چیرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دویم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چیرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دویم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف(Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابعګانې چې د $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموګرافیک تابعګانو په نامه یادېږي، په دې شرط چې $c \neq 0$ وي.

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ ترلږه د x_0 یو ټکی په $a < x < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0) = 0$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادیږي.
- که چیرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د (a,b) په خلاصه فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي د x_0 یو عدد د a او b ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کیږي.

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چیرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لیمیټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لیمیټ د پیدا کولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي مشتق نیولو ته دوام ورکوو ...n تر څو د ابهام شکل ختم شي.

د دریم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که یوه تابع په $[0,b]$ انټروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزاید ده چې :

$a)\ f'(x)=0 \quad b)\ f'(x)<0 \quad c)\ f'(x)>0 \quad d)\ f'(x)\geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو جګې نقطې ته:

a) Minimum وايي b) Infliction وايي c) Maximum وايي d) هيڅ يو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکی عبارت دی له:

a) دوه ټکي b) يو ټکی c) درې ټکي d) نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعريت څخه محدبيت ته بدلوي:

a) د اعظمی ټکی دی b) دانعطاف ټکی دی c) اصغری ټکی دی d) هيڅ يو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعريف ساحه عبارت له :

$a)\ (-\infty, +\infty) \quad b)\ (-\infty, 0) \quad c)\ (0,-\infty)$ d) هيڅ يو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

$a)\ x=1 \quad b)\ x=2 \quad c)\ x=-1 \quad d)\ x=-2$

7- د هوموګرافيک تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

$a)\ y=\dfrac{a}{c} \quad b)\ x=-\dfrac{d}{c} \quad c)\ y=\dfrac{c}{a} \quad d)\ y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقی مجانب عبارت دی له:

$a)\ 4 \quad b)\ 6 \quad c)\ -6 \quad d)\ -4$

9- لاندې کومه الجبري اړيکه حقيقت لري:

$a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \quad b)\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f'(x) \quad c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ d) هيڅ يو

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x)=x^2-x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.
2. د $f(x)=-x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انټروال کې د منحنی د بدلون ټکي پیدا کړئ.
3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x$ 2) $f(x)=3x^2-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

4. د لاندنیو تابعګانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-1$, $x_0=-1$ 2) $f(x)=x^2$, $x_0=2$

5. د لاندې تابعګانو د مشتق تابع پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-4x^2$ 2) $f(x)=3x^3-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابعګانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x)=7x^2-3x$, $x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1$, $x_0=\frac{1}{2}$

7. د $f(x)=3x^5-4x^2-3x$ د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې ګراف رسم کړئ.
8. د $x^2y+6y^3=x-3$ د تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.
9. د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=x^3\sec x$ 2) $f(x)=\sin(3x-1)$ 3) $f(x)=\cos^2 2x$

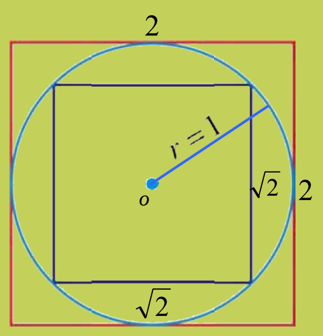
10. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟
11. د $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.
12. د $f(x)=\frac{4x^2}{x^2+1}$ تابع ګراف رسم کړئ.
13. د $f(x)=\sin x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.
14. د $f(x)=\tan x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

څلورم څپرکی

انتیګرال

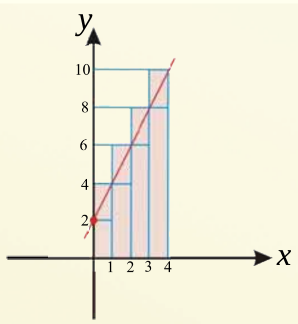
د ریمان مجموعه

Riemann's Sum



په مخامخ شکل کې چې د دایرې شعاع یو واحد دی، د دایرې د محیطي او محاطي څلور ضلعي ګانو مساحت حساب کړئ او وواياست چې ددې دایرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي ګانو سره څه اړیکه لري؟

فعالیت



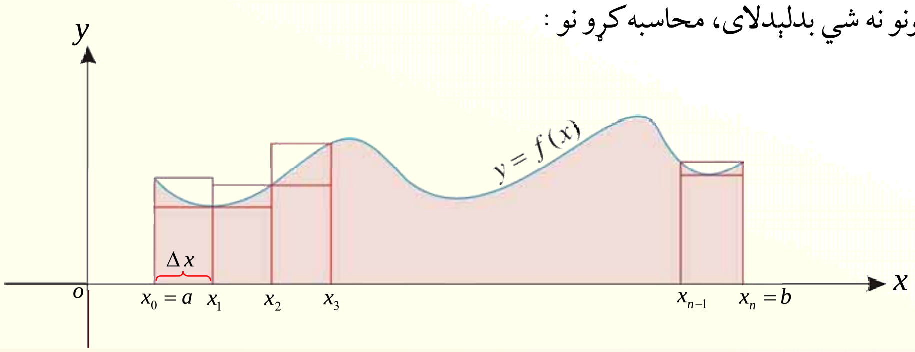
- هغه مساحت چې د x د محور او $f(x)=2x+2$ د تابع د ګراف په منځ کې د$[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y=2x+2$ تابع په ګراف کې د څلورو لاندینیو او پورتنیو مستطیلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوي دي پیدا کړئ.
- د پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه، او د لاندینیو مستطیلونو د مساحت مجموعه د تابع د ګراف د لاندینی مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړیکه لري؟
- د پورته په څېر فعالیت د اتو مساوي لاندینیو مستطیلونو او د اتو مساوي پورتنیو مستطیلونو لپاره تکرار کړئ او پایله یې د ګراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چیرې د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او لاندینیو مستطیلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په ګراف کې د فاصلې ویش زیات کړو د پورتنیو او لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه کوم قیمت ته نږدې کیږي.

---

[1] - که چیرې د x په محور د فاصلو تقسیمات زیات کړو او یا که چیرې په یوه فاصله کې د مستطیلونو شمیر زیات شي په هم هغه اندازه د ګراف لاندې مساحت د قیق په لاس راځي.

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاسته راځي:

تعريف: فرضوو چې د $y = f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترلي انټروال کې متمادي او تعريف شوې وي که چيرې د ناحيې مساحت چې د x د محور او $y = f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو نو:



د $[a,b]$ ترلي انټروال چې په n مستطيلو نو وېشو، څرنګه چې د هر مستطيل عرض د $(\Delta x = \dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی تابع قيمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطيلونو د هر انټروال اوږدوالی د $i = 1,2,3,\ \dots\ ,n$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x \dots, x_i = a + i\Delta x,\ \dots\ , x_n = b$$

$$[x_0, x_1]\ ,\ [x_1, x_2]\ ,\ [x_2, x_3],\ \dots\ ,[x_{i-1}, x_i],\ \dots\ ,[x_{n-1}, x_n]$$

کـه پـه شـکل کـې د لانـدينيو مـستطيلونو مـساحت پـه $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيـو مـستطيلونو مـساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ \dots\ + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$

د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ \dots\ + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چيرې محصور شوی مساحت په A وښيو نو: $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چيرې د رابطې له اطراف څخه ليميټ ونيسو نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

د ساندویچ د قضیې پر بنسټ لیکلای شو؛ چې: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = A$

نو $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ریمـان مجموع او ددې مجموعې لیمیټ یعنې $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ریمـان د مجموعې لیمیټ وایي.

لومړی مثال: د $[0,2]$ انټروال په څلور مساوي برخو ووېشئ، د $y = x^2+1$ منحني، او x محور تر منځ مساحت پیدا کړئ.

حل: که چیرې $[0,2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو ووېشو؛ نو د مستطیلونو عرض داسې په لاس راځي:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

ددې مستطیلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دي له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a+\Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a+2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a+3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3], \ldots\ldots\ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

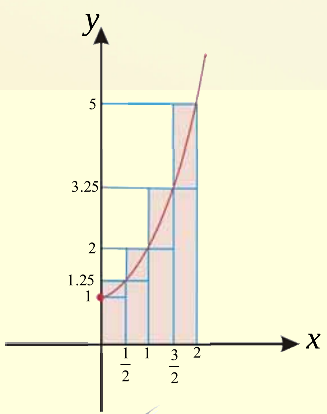
$$[0, \tfrac{1}{2}] \ , \ [\tfrac{1}{2}, 1] \ , \ [1, \tfrac{3}{2}] \ , \ [\tfrac{3}{2}, 2]$$

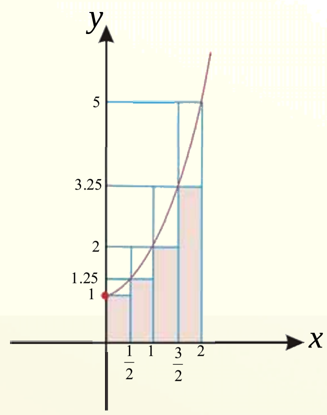
د تابع د ګراف د رسمولو لپاره تابع ته قیمتونه ایږدو او د مستطیلونو طول لاس ته راځي:

$$f(x) = x^2+1 \ , \ f(0) = 1$$

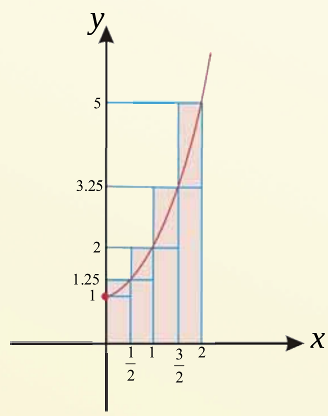
$$f(\tfrac{1}{2}) = 1.25 \ , \ f(1) = 2$$

$$f(\tfrac{3}{2}) = 3.25 \ , \ f(2) = 5$$





د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $= 1\times\frac{1}{2}+1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}=3.75$



د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $=1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2}=5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

دویم مثال: د $f(x)=1+x$ تابع د ریمان د مجموعې لېمیټ په $[1,10]$ انټروال کې پیدا کړئ.

حل:

باید په یاد ولرو:

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = 1 + [\frac{9}{n}]\, i \quad , \quad i = 0,1,2, \ \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\Delta x \sum_{i=1}^{n}(1+x_i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} x_i]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n}(a+\Delta x i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{9}{n}i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\cdot n + \frac{9}{n}(n + \frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(n + \frac{9n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(\frac{11n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99n^2+81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n}]$$

$$= 9 + \frac{99}{2} = 58.5$$

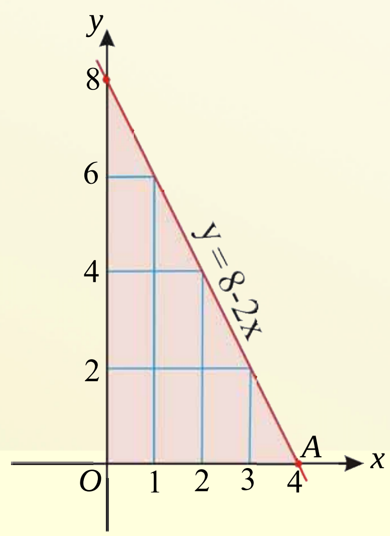
پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له ویشلو څخه وروسته د $y=3x$ مستقیم خط او د x د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x=0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د $y=8-2x$ تابع ګراف د لاندې OA مثلث مساحت د $[0,4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیت څخه په ګټه اخیستنې سره پیدا کړئ.



د انتیگرال مفهوم

Concept of Integral

خرنگه چې پوهېږئ د شکلونو لاندیني او پورتني مساحتونه د انتیگرال په واسطه محاسبه کېږي.

آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیگرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعی لېمیټ ته انتیگرال وایي دا ($\int$) د انتیگرال علامه ده، د sum د کلیمې یا د ریمان د مجموعې د S توري غزېدلی حالت دی، لکه: $\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ چې دلته $f(x)$ تابع او dx د $f(x)$ تابع د انتیگرال متحول نظر x ته دی.

انتیگرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیگرالونه، هغه انتیگرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- غیرمعین انتیگرال *Indefinite Integral*

- که د $F(x) = 2x^2 - 1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیگرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیگرال له لومړنی تابع سره پرتله کړئ او ووایئ چې (-1) په نوموړي تابع کې د څه په نامه یادېږي.
- که په پورتني تابع کې (-1) په C ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنی فعالیت د $F(x) = x^6 + 1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووایئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترلی انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنی تابع وي. د $F(x)+C$ تابعگانو سټ په داسی حال کې چې C یو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غیرمعین انتیگرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

لومړی مثال: $\int x\,dx$ پیدا کړئ.

حل: $\int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

دويم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\,dx$ حساب کړئ.

حل: $$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\,dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\,dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C$$

دريم مثال : $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx$ پیدا کړئ.

حل: $$\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$$

پوښتني

لاندې انتيګرالونه محاسبه کړئ:

$a)\ \int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

$b)\ \int \frac{1}{x^4}\,dx$

$c)\ \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$d)\ \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

$e)\ \int \sqrt[8]{x^4}\cdot x\,dx$

د غیرمعین انتیگرال خواص

Properties of indefinite integral

تاسې د لېمیټ او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیر معین انتیگرال کې هم وي؟

$$\left.\begin{array}{l} \int \quad dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\, dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)]\, dx \\ \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx \quad , g(x) \neq 0 \end{array}\right\} = ?$$

فعالیت

د مشتقاتو د خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتنې فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنګه چې د تابعګانو د مشتق د پیداکولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخېستل کېږي، غیرمعین انتیګرالونه هم د داسې خواصو لرونکې دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که   یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: $\int \quad dx = \quad \int dx = \quad x + C$

مثال: د $\int 5dx$ انتګرال پیدا کړئ.

حل: $\int 5dx = 5 \int dx = 5x + C$

2- که چیرې $n \neq -1$ وي، نو: $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

مثال: د $\int x^4dx$ **انتیگرال** پیدا کړی.

حل: $\int x^4dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

3- که چیرې a یو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو**:

$$\int a\, f(x)\, dx = a\int f(x)\, dx$$

مثال: **د** $\int 2x^2\,dx$ **انتیگرال** محاسبه کړئ.

حل: $\int 2x^2dx = 2\int x^2dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$

4- که چیرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعګانې وي په دې صورت کې د تابعګانو د جمع او تفریق د حاصل انتیګرال مساوی دی په:

$$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثالونه:

$a)\quad \int(2x^2+3)dx = \int 2x^2dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$

$b)\quad \int(8-2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + C$

5- که چیرې دتابعګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتیګرال مساوی دی په:0

$$\int[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

مثال:

$$\int[x^3 - 6x^2 + 9x + 1]dx = \int x^3dx - \int 6x^2dx + \int 9xdx + \int dx$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعګانې وي، په دې حالت کې د تابعګانو د ضرب د حاصل انټيګرال مساوی نه دی د انټيګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، يعنې:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چېرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

حل الف: لومړی په تابع ګانو د ضرب عمليه تطبيق کوو او وروسته يې انټيګرال په لاس راوړو:

$$\begin{aligned}\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx &= \int[(x+1)(x-2)]\,dx = \int(x^2-2x+x-2)\;dx\\ &= \int(x^2-x-2)\,dx\\ &= \int x^2dx - \int x\,dx - \int 2\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\end{aligned}$$

حل ب: اوس د هرې تابع انټيګرال بيل بيل محاسبه کوو او وروسته يې سره ضربوو په لاس راغلې قيمتونه سره پرتله کوو.

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx &= \int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\;dx = (\int x\,dx+\int dx)(=\int x\,dx-\int 2\,dx)\\ &= (\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C) = (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\\ &\Rightarrow \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C \neq (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\end{aligned}$$

په پايله کې څرګنده شوه، چې نوموړی مساوات حقيقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسيم د حاصل انټيګرال مساوی نه دی د هرې تابع د انټيګرال له حاصل تقسيم سره، يعنې: $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

مثال: که چېرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

د الف جزء حل: لومړی د تابع ګانو د تقسيم د حاصل انټيګرال په لاس راوړو.

$$\begin{aligned}\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx &= \int[(x+1)(x-2)]\,dx = \int(x^2-2x+x-2)\;dx\\ &= \int(x^2-x-2)\,dx\\ &= \int x^2dx - \int x\,dx - \int 2\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\end{aligned}$$

د ب جزء حل: اوس د صورت او مخرج د تابعگانو انتیگرالونه بېل بېل په لاس راوړو او وروسته يې سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx = \int (x+1)\,dx \cdot \int (x-2)\,dx = \left(\int x\,dx + \int dx\right)\left(\int x\,dx - \int 2\,dx\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x+C\right)\left(\frac{x^2}{2}-2x+C\right) = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)+C$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C \neq \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)+C$$

په پایله کې څرګنده شوه چې مساوات حقیقت نه لري.

پوښتني

د انتیګرال د خاصیتونو څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int -17\,dx = ?$

b) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x}\,dx = ?$

c) $\int 2x^4\,dx = ?$

d) $\int \frac{1}{x^5}\,dx = ?$

e) $\int (2x^2+4x^3-5x+9)\,dx = ?$

f) $\int (2x+3)^6\,dx = ?$

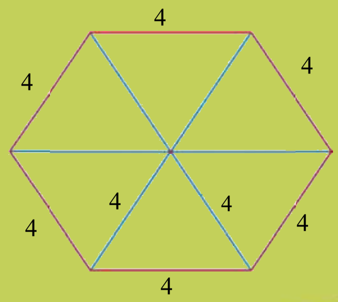
g) $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2}\,dx = ?$

h) $\int (2+x)\,dx = ?$

معین انتیګرال

Definite Integral

د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره یې پرتله کړئ.



فعالیت

- **د $f(x)=2x$ د تابع ګراف د $[2,5]$ په انټروال کې د $n=5$ لپاره رسم کړئ او د ګراف لاندینی مساحت پیدا کړئ**
- په شکل کې د ګراف لاندینی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی نو د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته کله چې n بې‌نهایت ته نږدی شی او د فرعي انټروالونو (Δx) لوی اوږدوالی صفر ته نږدی شي، د $f(x)$ تابع له $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې د معین انتیګرال په نوم یادیږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

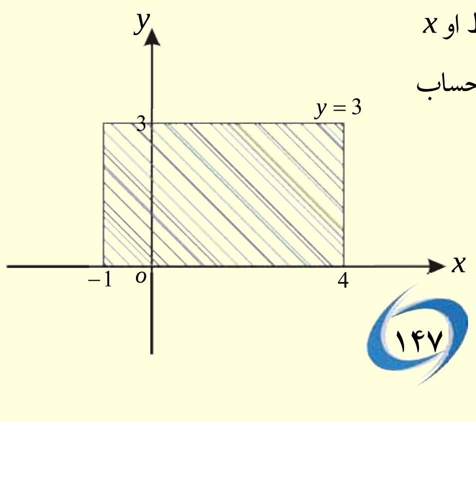
چې a ته د انتیګرال لاندینی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2\,dx$ ټاکلي انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړي د $F(x)$ لومړنی تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انتیګرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2dx=[\frac{x^3}{3}]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

دویم مثـال: هغه مساحت چې د $y=3$ خط او x محور ترمنځ په $[-1,4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړی.



حل: د $\int_{-1}^{4} 3\,dx$ معین انتیګرال د یوه مستطیل مساحت رابښیي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

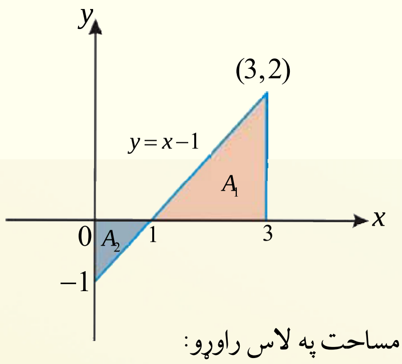
ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3\cdot 5 = 15$

د انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\,dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

دریم مثال: هغه مساحت چې د $y = x-1$ مستقیم خط او x محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کې محصور دی په لاس راوړئ.



حل:

له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2\cdot 2) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

د کوچنی مثلث مساحت عبارت دی له:

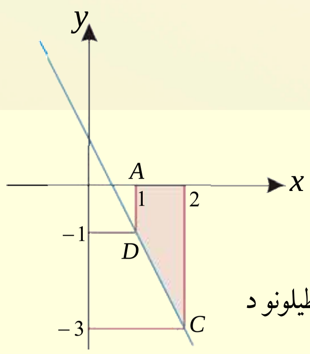
$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

د A_1 او A_2 د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیګرال قیمت عبارت دی له: $\int_0^3 (x-1)\,dx = [\frac{x^2}{2} - x]_0^3 = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$

پوښتني



1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y=-2x+1$ د مستقیم خط او د x د محور ترمنځ محصور دی په لاس راوړئ.
2. د $f(x)=x^2$ تابع د لاندینیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مسطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انټروال کې د $n=4$ لپاره په لاس راوړئ.

د معين انتيګرال خواص

Properties of definite integral

آيا کولای شو چې د غيرمعين انتيګرال د ځانګړونو څخه په ګټه اخيستنې سره مخامخ اړيکې پوره کړو.

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b c\,dx \\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx \\ \int_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\} = ?$$

فعاليت

- د $\sum_{=1}^{4} 3^{\;2}$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x\,dx$ د انتيګرال قيمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پيدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1+3x)\,dx$ ټاکلی انتيګرال محاسبه کړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

د ځينو انتيګرالونو محاسبه د قيمت په وضع کولو سره امکان لري او ځينې يې امکان نه لري، دې ته اړتيا پيدا کيږي، ترڅو ټاکلي انتيګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتيګرال د $[a,b]$ په انټروال کې يعنې $\int_a^b Cdx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په n مساوي برخو يعنې $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ ويشو او د هر x_i لپاره د i - ام انټروال څخه لرو: $i = 0,1,2,\ldots,n$ $\qquad f(x_i) = C$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \ldots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$= C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b Cdx = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ ټاکلی انتیگرال حساب کړئ.

حل: $\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3=1$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتیگرال منونکی وی او   یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_a^b \quad f(x)dx = \quad \int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که چیري د $[a,b]$ انټروال د x_i ، $i=1,2,...,n$ په n مساوي برخو وویشو نو د ریمان د مجموعې او انتیګرال د تعریف له مخې لیکلاي شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \quad f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \quad f(x)dx = \quad \int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4\,dx$ ټاکلي انتیگرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_{-2}^{2}4dx = 4\int_{-2}^{2}dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) = 4\cdot 4 = 16$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنی تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = -(-F(b)+F(a))$$

$$= -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$ انتیگرال مساوات پیدا کړئ.

حل: لومړی د کېڼ لوری انتیګرال او وروسته د ښي خوا انتیګرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx=[\frac{2x^2}{2}]_2^3=\frac{2(3)^2}{2}-\frac{2(2)^2}{2}=\frac{2(9)}{2}-\frac{2(4)}{2}=\frac{18}{2}-\frac{8}{2}=\frac{18-8}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$\int_3^2 2x\,dx=[\frac{2x^2}{2}]_3^2=\frac{2(2)^2}{2}-\frac{2(3)^2}{2}=\frac{2(4)}{2}-\frac{2(9)}{2}=\frac{8}{2}-\frac{18}{2}=\frac{8-18}{2}=-\frac{10}{2}=-5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx=-\int_3^2 2x\,dx$$

4- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو، چې: $\int_a^a f(x)\,dx=0$

ثبوت: **څرنګه چې** $\Delta x=0$ **دی، نو:**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^a f(x)\,dx=F(a)-F(a)=0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx=0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2\,dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_3^3 3x^2dx=[\frac{3x^3}{3}]_3^3=[x^3]_3^3=[3^3-3^3]=27-27=0$

5- که $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې په $[a\ ,b]$ انتروال کې انتیګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\ dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)\pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\pm\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\pm\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$$

مثالونه:

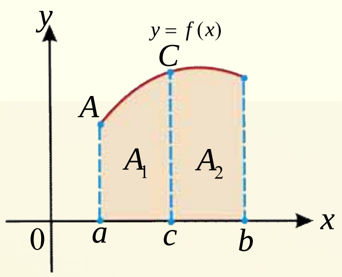
حل:

$$a)\ \int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2\,dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1=5$$

$$b)\ \int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه تړلې انټروال کې چې د a، b او c ټکې پکې شامل دي انتیګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



ثبــوت: دلتـه د $[a,b]$ انټـروال پـه دوو انټروالونـو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقـسیموو، وروسـته د $f(x)$ تـابع انتیګـرال پـه نومـوړي انټروالونو کې په پام کې نیسو.

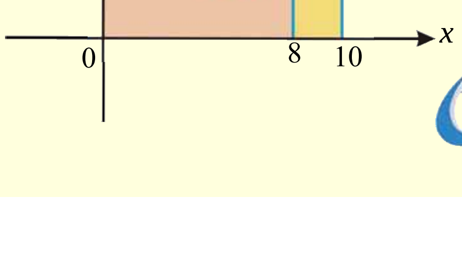
د انتیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A=\int_a^b f(x)dx$ په حقیقت کې د هغې سطحې مساحت دی چې د $f(x)$ د تابع د ګراف او x د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغه سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د x د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده

او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له: $A_2 = \int_c^b f(x)\,dx$ ، $A_1 = \int_a^c f(x)\,dx$

په پایله کې ویلای شو چې : $A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

مثال: که چیرې $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx=12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

حل:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$$

اوس د $\int_8^{10} f(x)\,dx$ انتيګرال قيمت په لاس راوړو:

$$\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چيرې د $f(x) \le g(x)$ تابعګانې په $[a,b]$ انټروال کې انتيګرال منومنکي وي؛ نو لرو:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x) - f(x)]\,\Delta x$$

نو څرنګه $g(x) - f(x) \ge 0$ او $\Delta x \ge 0$ دی نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېميټ هم منفي نه دی يعنې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\,\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \ge 0$$

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \ge \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال: که چيرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نو د $x > 1$ لپاره وښاياست چې $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ دی.

حل:

$$\int_a^b (1 - \frac{x^2}{4})\,dx \le \int_a^b (1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_a^b 1\,dx - \int_a^b \frac{x^2}{4}\,dx \le \int_a^b 1\,dx + \int_a^b \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

پوهېږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3) \qquad /\div(b-a)$$

$$1-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le 1+\frac{1}{6}(b^3-a^3)$$

$$-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le +\frac{1}{6}(b^3-a^3) \qquad /\div(b^3-a^3)$$

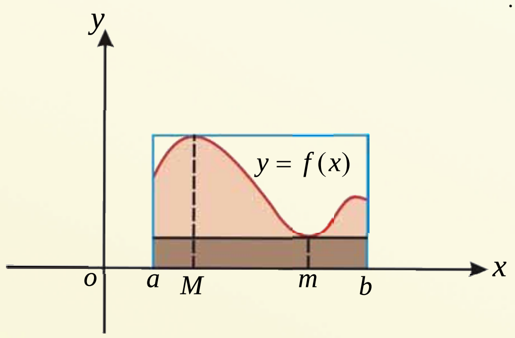
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6} \Rightarrow -1<2$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او M, m قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قیمتونه په نوموړی انټروال کې وی، نو $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

ثبوت: څرنګه چې $m\le f(x)\le M$ دی نو لرو چې:

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$



چې دا وروستنی اړیکه د انتیګرال د تخمیني قضیې په نامه یادېږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انتیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ.

حل: څرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1(1-0)$$

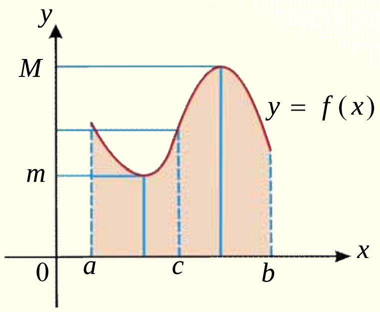
$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0{,}3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

په پایله کې د انتیګرال تخمیني قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د c یو حقیقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a<b$ لپاره m او M قیمتونه په ترتیب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د $[a,b]$ په انټروال کې وي، لکه مخامخ شکل د انتیګرال د تخمیني قضیې څخه په کار اخیستنې د $c \in [a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad \Rightarrow \quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

فرضوو $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =$ وي، نو $\le M$ $m \le$ دی او د هر c حقیقي عدد لپاره، $a \le c \le b$

لرو چې: $= f(c)$ نو: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادېږي خرنګه چې $f(c)$ د تابع متوسط قیمت په $[a,b]$ انټروال کې دی.

مثـــال: د $f(x)=x^2$ تـابع پـه $[1,4]$ انټـروال کـې پـه پـام کـې ونیـسئ آیـا کـولای شـئ

$$\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3}-\frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$$ دی.

حـــل: خرنګه چې $f(x)=x^2$ تـابع ده اوس کـه د x پـه ځـای د c قیمـت پـه تـابع کې وضـع کـړو نو: $f(c)=c^2$ سره کېږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د c قیمـت داسې په لاس راځي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

اوس په پورتنی رابطه کې یې قیمت ایږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2\,dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$= f(c) \quad , \quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 \quad , \qquad = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع یو قیمت مساوي په   او $1 < \sqrt{7} < 4$ دی.

له مخکې څخه پوهېږو چې د مستطیل مساحت د طول او عرض د اوږدوالي د ضرب سره برابر دی نو د متوسط قیمت په فورمول کې $f(c)$ طول او $b-a$ عرض دی نو د منحني لاندې مساحت په $[1,4]$ انټروال کې مساوي له هغه مستطیل سره دی چې اضلاع یې 7 او 3 دی.

پوښتني

1. لاندې معین انټیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx = ?$

$b)\ \int_{2}^{5}7x\,dx = ?$

$c)\ \int_{-2}^{4}(-x)\,dx = ?$

$d)\ \int_{-1}^{3}(2|x|-3x)\,dx = ?$

$e)\ \int_{-2}^{3}3x\,dx$

$f)\ \int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g)\ \int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h)\ \int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$

2. د $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ انټیګرال قیمت د $[-1,4]$ په انټروال کې داسې پیدا کړئ، چې $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ او $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x) = x$ تابع په $[0,2]$ انټروال کې په نظر کې ونیسئ او د c قیمت په لاس راوړئ.

10- د انټیګرال او مشتق اساسي قضیې

یو موټر په $72\frac{m}{sec}$ چټکتیا سره په حرکت کې دی، دریور برک ته فشار ورکوي او موټر وروسته له 6 ثانیو ودرېږي په دې وخت کې وهل شوې فاصله پیدا کړئ.

$$S(t)=v_0 \cdot t$$

فعالیت

- د مشتق د تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره د $f(x)=x^2$ د تابع مشتق د $h=0$ په ټکي کې پیدا کړئ.
- د په لاس راغلي تابع انټیګرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه په لاس راځي، چې:

د انټیګرال او مشتق تر منځ یوه منطقي اړیکه شته چې له دې اړیکې څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د انټیګرال اصلي او اساسي قضیې په لاندې ډول ثبوت کړو:

1- د انټیګرال او مشتق لومړۍ اساسي قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پایله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انټیګرال منوونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعریف مطابق لیکو او بیا د x متحول ته د h په اندازه تزاید ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x)=f(x)$$

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(a)+F(a)-F(x)}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(a)-(F(x)-F(a))}{h}=\lim_{h\to0}\frac{F(x)\big|_a^{x+h}-F(x)\big|_a^{x}}{h}$$

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\Big|_a^{x+h}-F(t)\Big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر دریم خاصیت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ چې c د x او $x+h$ تر منځ واقع دی، نوکله چې h صفر ته تقرب وکړي c، x ته تقرب کوي، همدارنګه د f تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پایله کې: $F'(x)=f(x)$

مثال: د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \text{ یا } F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

د زنځیري قاعدې له مخې لرو:

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

2- د انتيګرال او مشتق دويمه اساسي قضيه:

که چيرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

ثبـــوت: د مخکينــی قـضيې څخـه پـوهېږو چـې کــه $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ دی لــه دې ځايــه د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف يو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F(x) = \quad \Rightarrow f(x) = F(x) +$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) +$$

$$\int_a^x f(t)\ dt - F(x) =$$

که د x په ځای په پورتنی رابطه کې a وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\ dt - F(a) = \qquad , \qquad 0 - F(a) = \quad \Rightarrow \quad = -F(a)$$

که د قيمت په لومړی رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$

که د x په ځای په دې رابطه کې b وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

چې اخيری رابطـه پـه $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ پـه شـکل ښــودل کېــږي دغــه وروســتی اړيکــه د لــومړنی تــابع او $\int_a^b f(t)\,dt$ انتيګــرال تــرمنځ اړيکــه ښــيي، چــې د نيوټن"لايبنز" رابطې په نوم هم يادېږي.

يادونه:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$$

مثال: د $\int_0^1 x^2 dx$ انتيګرال حاصل پيداکړئ.

حل: $\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$

پوښتنې

1. **لاندې مشتقات پيداکړئ.**

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

$b)\ F(t) = \int_{0}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2} dy$

$d)\ F(x) = \int_{1}^{x} \frac{\sin t}{t} dt$

2. **که په** $f(t) = t$ **تابع کې** $F(0) = 2$ **وي، د** $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \dots, 1$ ټکوکې پيداکړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ پيداکړئ.

11- په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیونه

ـ آیا کولای شئ چې مخامخ انتیګرال د نامعین انتیګرال له خواصو څخه په کار اخېستنې سره حل کړئ.
ـ که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په یوه متحول سره عوض کړئ او بیا هغه حساب کړئ او ووایئ چې په انتیګرال کې د وضع کولو دا طریقه په څه نوم یادېږي.

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

فعالیت

- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده په u سره عوض کړئ.
- د u مشتق ونیسي او د dx قیمت پیدا کړئ.
- څرنګه چې نومړی انتیګرال یو معین انتیګرال دی، نو د $u=2x+1$ په معادله کې د $x=0$ او $x=4$ قیمتونه وضع او د انتیګرال سرحدونه د u له جنسه په لاس راوړی، وروسته د انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې وي، $u=g(x)$ او $F'(x)=f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لومړی مثال: د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو:

$$u=3-5x\ ,\quad du=-5\,dx \qquad dx=-\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases}x=1\\ u=3-5x \Rightarrow u=3-5\cdot 1=-2 \Rightarrow u=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2\\ u=3-5x \Rightarrow u=3-5\cdot 2=3-10 \Rightarrow u=-7\end{cases}$$

$$\int_1^2\frac{dx}{(3-5x)^2}=\int_{-2}^{-7}\frac{1}{u^2}(-\frac{1}{5})\,du=-\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7}=\left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7}=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو.

$$u=1+2x^3\quad ,\quad du=6x^2\,dx \Rightarrow x^2dx=\frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases}x=0\\ u=1+2x^3 \Rightarrow u=1+2\cdot 0=1 \Rightarrow u=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1\\ u=1+2x^3 \Rightarrow u=1+2\cdot 1=3 \Rightarrow u=3\end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx=\int_1^3 u^5\,\frac{1}{6}\cdot du=\frac{1}{6}\int_1^3 u^5du=\frac{1}{6}[\frac{u^6}{6}]_1^3=\frac{1}{6}[\frac{3^6}{6}-\frac{1}{6}]$$

$$=\frac{1}{6}[\frac{729}{6}-\frac{1}{6}]=\frac{1}{6}[\frac{728}{6}]$$

$$=\frac{728}{36}=\frac{182}{9}=20.\overline{2}$$

فعالیت

- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتیگرال کې د جذر لاندې افاده د u په متحول سره تعویض کړئ.
- له u څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلې قیمت په لومړنی انتیګرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

- د پورته څخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونیسئ او د هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u = g(x)$ د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري له زنځیري قاعدې څخه په کاراخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

لومړی مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ.

حل: د جذر لاندې افاده په u سره عوض کوو.

$$u = 1-4x^2\ ,\ du = -8x\,dx$$

$$xdx = -\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{8}\,(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}) + C$$

$$= -\frac{1}{8}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}) + C = -\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}) + C = -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

دویم مثال: $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ حساب کړئ.

حل: که چېرې $u = x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u = x^4+2\ ,\ du = 4x^3dx\ ,\ x^3dx = \frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx = \int \cos u\cdot\frac{1}{4}du$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه د تعویض له لارې محاسبه کړئ.

$a)\ \int \cos 3x\, dx = ?$

$b)\ \int_1^2 x\sqrt{x-1}\ dx = ?$

$c)\ \int_0^7 \sqrt{4+3x}\ dx = ?$

$d)\ \int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\, dx = ?$

$e)\ \int 2x(x^2+3)^4\, dx = ?$

$f)\ \int_0^5 \frac{x\,dx}{x^2+10} = ?$

$g)\ \int \sqrt{\cos x}\ \sin x\ dx = ?$

12- قسمي انتيګرالونه

د ميتوز د سلول وېش، د مور د هر سلول څخه، وروسته د ميتوز د سلولي وېش څخه، دوه نور سلولونه جوړېږي

د حجروي وېش په وخت کې يوه حجره په دوو يا څو حجرو وېشل کېږي. ايا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شيانو کې لکه: تبره، شګه او نورو کې ووينو که څواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه يادېږي.

فعاليت

- د $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتيګرال قيمت په تعويضي طريقه پيدا کړئ.
- **آيا کولای شی چې د** $\int x^2 \sin xdx$ انتيګرال په تعويضي طريقه وشمېرئ.

له پورتني فعاليت څخه دې پايلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)\,dx$ په انتيګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکې تابعګانې دي چې يوه له بلې سره د ضرب ور وي يا نه وي، خو د انتيګرال محاسبه يې اسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق يې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$ دی.

له پورتنی رابطې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتيګرال نيسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\ dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\ dx \quad \text{يا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنی رابطې ته د غيرمعين انتيګرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

که د u او v تابعګانې په $[a,b]$ انتروال کې تعريف شوې وي، لاندې فورمول د معين انتيګرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

لومړی مثال: د $\int x\sin x\,dx$ انتیگرال پیداکړئ.

حل:

$$u = x \quad , \quad du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x\,dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل:

یادونه: $\int e^x\,dx = e^x + c$

$$u = -x \quad , \quad du = -dx \quad , \quad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v'\cdot u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot u'\,dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0$$
$$= -1$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه حساب کړئ.

$a)\ \int \theta\cos\theta\,d\theta = ?$

$b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = ?$

$c)\ \int x^5\cos(x^3)\,dx = ?$

$d)\ \int_0^1 xe^x\,dx = ?$

د څېړکي مهم ټکي

د ريمان مجموعه: فرضوو د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او تعريف شوى وي او د ناحيې مساحت چې د x محور او د $y = f(x)$ منحني ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال چې په n مستطيلو نو تقسيموو خرنګه چې د هر مستطيل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی د تابع قيمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطيلونو انټروالونه د n, ... $i = 1,2,3,$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a \quad , \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \; \dots \; , x_i = a + i\Delta x, \; \dots \; , x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \; , \; [x_1, x_2] \; , \; [x_2, x_3], \; \dots \; , [x_{i-1}, x_i], \; \dots \; , [x_{n-1}, x_n]$$

که د لاندينيو مستطيلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په A وښيو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

نامعين انتيګرالونه: که چيرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ يوه لومړنی تابع وي. د $F(x)+C$ توابعو سټ چې c يو ثابت عدد وي د غيرمعين انتګرال په نامه يادېږي او داسې ليکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د نامعين انتيګرالونو خواص (ځانګړتياوې):

$$\int dx = \int dx = x + C$$

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots + \int f_n(x)dx$$

$$\int [f(x) \cdot g(x)]\, dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx} \quad , \quad g(x) \neq 0$$

معین انتیګرال: د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې n بې‌نهایت ته نږدې شي د Δx فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نږدې کېږي، چې د $f(x)$ تابع ټاکلی انتیګرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم یادېږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

a ته د انتیګرال لاندینی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وايي.

د معین انتیګرال خواص(ځانګرتیاوې):

$$\int_a^b C\,dx=C(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x)\quad\Rightarrow\quad\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)\quad\Rightarrow\quad f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

د انتیګرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

د انتیګرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

- که چیرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او د $u=g(x)$ متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري. د زنځیری قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق منونکي وي، او $u=g(x)$ همدارنګه $F'(x)=f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتیګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکي تابعګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیګرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چیرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

له پورتني اړیکې څخه $v' \cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتیګرال نیسو:

$$\int v' \cdot u \; dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \; dx \quad \text{یا} \quad \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

چې اخیرې اړیکې ته د غیر معین انتیګرال فورمول په قسمي طریقه وایي.

- که د u او v تابګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعریف شوي وي لاندې فورمول، د معین انتیګرال فورمول په قسمي لاره(طریقه) بلل کیږي:

$$\int_a^b v'u \, dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v u' \, dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې ټاکلو انټیګرالونو قیمت پیدا کړئ.

$a)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ $\qquad b)\ \int_{-4}^{4}[2x^2-\frac{1}{8}x^4]dx$ $\qquad c)\ \int_{2}^{4}\frac{1}{x^2}dx$

$d)\int_{0}^{3}4dx$ $\qquad e)\ \int_{1}^{3}\sqrt{x}\ dx$ $\qquad f)\ \int_{1}^{2}(x^2-x^5)dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\qquad h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}]dx$ $\qquad i)\ \int_{2}^{3}(x^3+x^2)dx$

$)\ \int_{-2}^{2}[x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4]dx$ $\qquad)\ \int_{0}^{\pi}\sin x dx$ $\qquad l)\ \int_{1}^{2}x^2\ dx$

2- لاندې غیر معین انټګرالونه حل کړئ.

$a)\ \int[\sin x+8x^3]dx$ $\qquad b)\ \int[x^5+\frac{4}{x^4}+x^3+\frac{2}{x^2}+x]dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)dx$ $\qquad d)\ \int\sin x\,dx$

$e)\ \int\frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ $\qquad f)\ \int\frac{(1-x)^2}{1-x}dx$

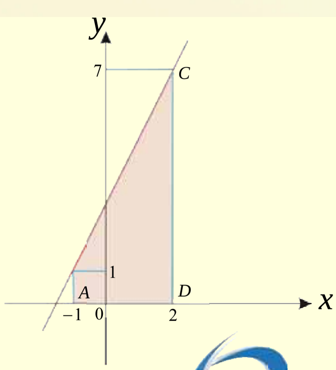
$g)\ \int\sqrt[5]{x^3}\ dx$ $\qquad h)\ \int\frac{3x^2+8x}{x}dx$

$i)\ \int\left(2x^2+3\right)dx$ $\qquad)\ \int\frac{1}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$)\ \int\frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx$ $\qquad l)\int(3x^2+4x-1)\ dx$

3- د لاندې محصور شوي سطحې مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$\int_{-1}^{2}(2x+3)dx$



4- لاندې انتيګرالونه د تعويضي طريقې په مرسته پيدا کړئ.

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\,dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\,dx$

$c)\ \int \frac{2\,dx}{x+2}$

$d)\ \int (3x+6)^3\,dx$

$e)\ \int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

$f)\ \int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

$g)\ \int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\ \int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\ dx$

$i)\ \int \frac{1}{(x-10)^7}dx$

$)\ \int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

$)\ \int (4-3x)^7 dx$

$l)\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انتيګرالونه د قسمي طريقې په مرسته پيدا کړئ.

$a)\ \int x\cos x\,dx$

$b)\ \int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$d)\ \int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\ \int x\sqrt{1+x}\ dx$

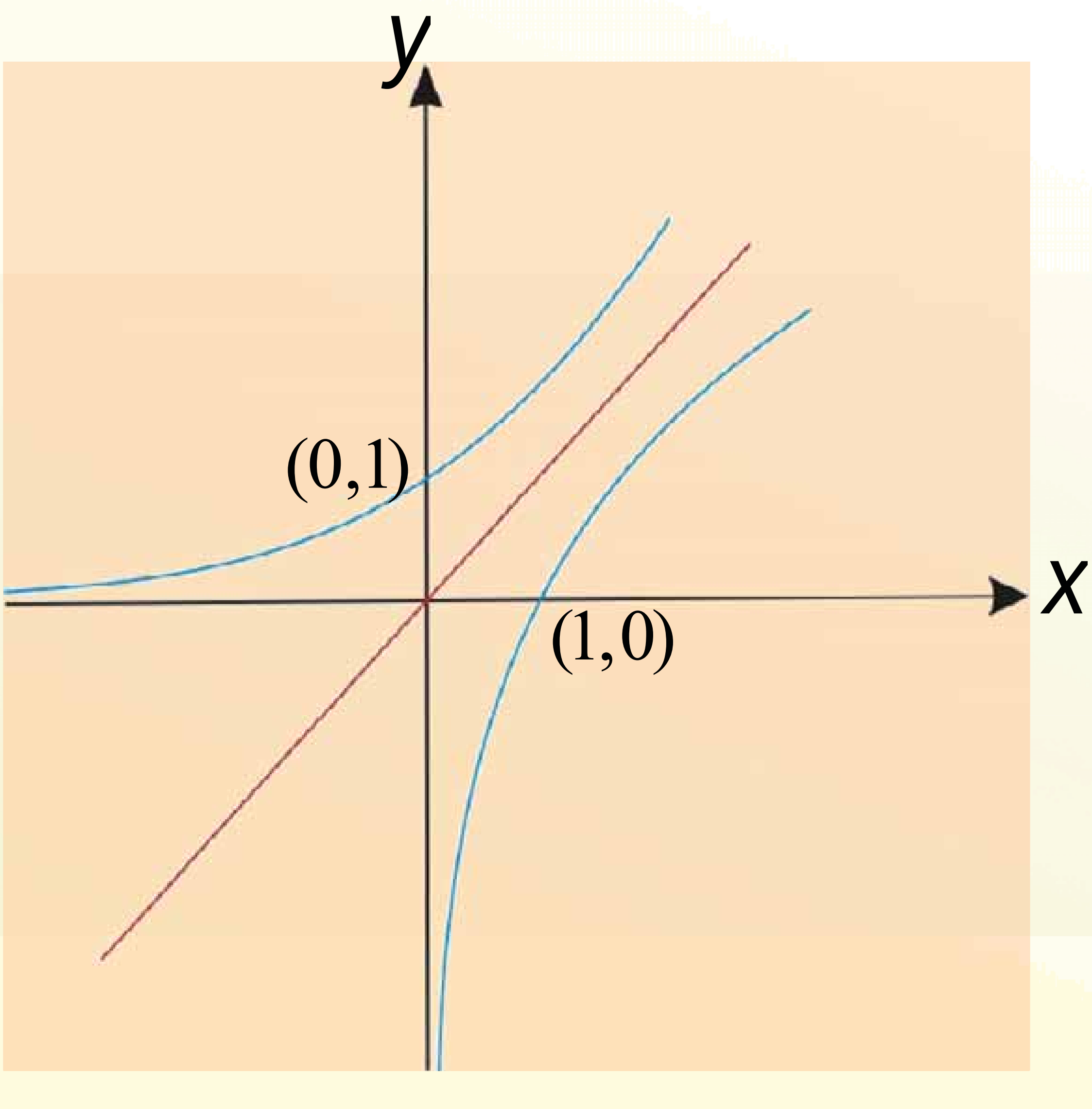
$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\,dx$

$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

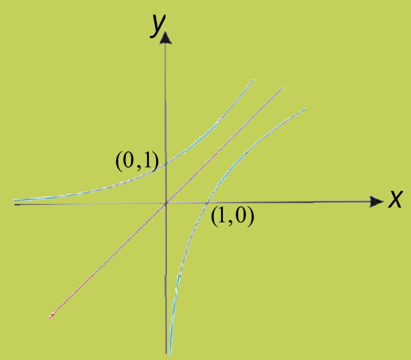
پنځم څپرکی

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق او انتیګرال


y
x
(0,1)
(1,0)

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابعګانو ګراف راښیي، نومونه یې واخلئ.



فعالیت

- لوګاریتم تعریف او خواص یې ولیکئ.
- لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
- که $\log_b x$ یوه متصله تابع وي، نو $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y = f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسئ، اړیکه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په عمومي ډول که $f(x) = \ln x$ او $g(x) = a^x$ وي؛ نو $g'(x) = a^x \ln a$ او $f'(x) = \frac{1}{x}$ دی.

ثبوت:

-1

$$y = g(x) = a^x$$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر x ته مشتق نیسو:

$$\frac{y'}{y} = x' \ln a + x(\ln a)'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a + 0$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln a$$

$$y' = y \ln a \quad \Rightarrow \quad g'(x) = a^x \ln a$$

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x})\ =\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ دی څرنګه چې $h\to 0$ تقرب وکړي نو $u\to\infty$ ته نږدی کېږي، لیکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u}=\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهېږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

قضیه

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي؛ نو مشتق یې $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$

2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

ثبوت:

-1

$$f(x)=\log_a x\quad\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\frac{x}{h}=u$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، یعنې:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=\frac{1}{x}\log_a e$$

2- غواړو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

د زنځيري قاعدې له مخې:

$$f'(x) = (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)}\log_a e \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$$

که $a = e$ وضع شي؛ نو لرو:

$$(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

پايله:

1- د Exponential تابعګانو مشتق د لوګاريتم په مرسته کولای شو په اسانی سره په لاس راوړو.

که $y = e^x$ وي ددې تابع مشتق $y' = e^x$ دی ځکه که د $y = e^x$ رابطې څخه طبيعي لوګاريتم ونيسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \quad \Rightarrow \ln y = x\ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \quad \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \quad \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که $y = e^u$ او u تابع د x وي، نو: $y' = u'e^u$

3- که $y = a^u$ کله چې $a > 0$ او $a \neq 1$ وي، نو: $y' = u'a^u \ln a$

4- د لوګاريتمي تابعګانو د مشتق پيدا کولو لپاره په بېلابېلو قاعدو سره له دې اړيکې څخه ګټه اخلو:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u}\log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \quad \Rightarrow y' = \frac{(\ln u)'}{\ln a} = \frac{u'}{u\ln a}$$

لومړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2+1)$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: که $g(x) = x^2+1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \quad \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$$

دویم مثال: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x^2-5x+4) \\ g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array}$$

دریم مثال: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

حل: پوهیږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

څلورم مثال: د $y = e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې که $y = e^u$ وي نو $y' = u'e^u$

$$y = e^{(x^2+1)} \Rightarrow y' = (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y = \sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې که چیرې $y = a^u$ وي نو $y' = u'a^u \ln a$ سره دی، نو:

$$y = \sqrt[x]{2} = (2)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = (\frac{1}{x})' \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2$$

شپږم مثال: د $y = x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x}$$

$$\ln y = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اووم مثال: د $y = 10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$ دی، نو:

$$y = 10^x$$

$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

اتم مثال: د $y = e^{3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که $u = 3x$ وضع شي، نو: $u'(x) = 3$

$$y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$

$$y' = 3e^{3x}$$

نهم مثال: د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = \log(x^4+1)$ 2) $y = \log_3(\log_2 x)$ 3) $y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$

حل: پوهېږو چې د لوګارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضيې څخه په ګټه اخېستنې سره په لاس راوړو:

$$y=\log_a u$$

$$y'=(\log_a u)'=\frac{u'}{u}\log_a e=\frac{u'}{u\log_e a}=\frac{u'}{u\ln a}$$

1) $y=\log(x^4+1) \Rightarrow y'=\dfrac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$

2) $y=\log_3(\log_2 x) \Rightarrow y'=\dfrac{(\log_2 x)'}{\ln 3\log_2 x}=\dfrac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x}=\dfrac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$

$$=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}}=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}}=\frac{1}{\ln 3\,x\ln x}$$

3) $y=\log_{x^2-1}x^2+1=\dfrac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)}=\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$

پوهېږو چې $y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \Rightarrow y=\dfrac{u}{v}$ دی؛ نو لرو:

$$y'=\frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1)-\frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{[\ln(x^2-1)]^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

a) $f(x)=\ln\sin 3x$

b) $f(x)=\ln\sqrt{3x^2+7}$

c) $f(x)=\ln(5x^2-6x+5)$

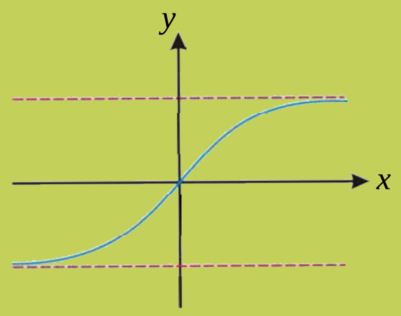
d) $f(x)=\log_{10}3x^2$

e) $f(x)=y=x^x$

f) $y=\dfrac{(x+1)^2(\sqrt{x}-1)}{(x+4)^3e^x}$

د معکوسو تابعگانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګراف راښيي؟



کــه چیــرې f او g یــوه د بلــې دوې معکوســې تابعگــانې وي، یعنــې $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$ وي، نــو: $\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{dy}{dx}$ یا $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$ دی، ځکه چې د تابع او ضمني تابعگانو له مشتق څخه ليکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x)\\ x=g(y)\end{array}\right\}\Rightarrow y'_x\cdot x'_y=y'_y \quad\Rightarrow y'_x\cdot x'_y=1 \quad\Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

مثال: د $y=a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پیدا کړئ.

حل:

$$y=a^x \quad\Rightarrow x=\log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e}=\frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a=y\log_e a$$

$$y'=a^x\ln a$$

د مثلثاتي معکوسو تابعگانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابعگانو مشتق د لاندې اریکو په مرسته لاسته راوړو:

1) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2) $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ 4) $(arc\cot x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$

ثبوت:

1) $y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(\arcsin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(\arccos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

دکسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ویشو:

$$(\arctan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

دکسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ ویشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لومړی مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیداکړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

دویم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیداکړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = \log_5 u = \frac{u'}{u\ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \ln 5} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

دریم مثال: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پیداکړئ.

$$y' = [arc\ \tan e^x]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

پوښتنې

1. د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (arc\sin x)^3$

2) $y = \log_2(arc\cos x)$

قسمي کسرونه

د یو کسر تجزیه کول په قسمي کسرونو:

پوهېږو چې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعې حاصل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آیا کولای شئ چې له دې کسر څخه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

فعالیت

- د $\frac{7}{x+1}$, $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونود جمعې حاصل، بېرته په لومړنیو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعریف یې کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: د یوه واقعي کسر هغه کوچنې کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوی وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه یادېږي.

د یوه واقعي کسر د تجزیه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نیسو:

لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ($P_n(x)$) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوی وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{}{x-x_n}$$

(A, C, ... حقیقي عددونه دي)

لومړی مثال: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د مخرج پولینوم په لومړنیو ضربي عواملو تجزیه کوو، نو په لاس راځي:

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

ليدل کېږي، چې نوموړی کسر له دريو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه يې A , C ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+\quad(x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+\quad x^2-3\quad x-10\quad+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+\quad+C)x^2+(A-3\quad-6C)x+(-2A-10\quad+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

ليدل کېږي، چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو بايد صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضريبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره ليکو:

$$\begin{cases}A+\quad+C=4\\A-3\quad-6C=-1\\-2A-10\quad+5C=-39\end{cases}$$

د پورته سيستم له حل څخه وروسته $=3, A=2$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دويم مثال: د $\dfrac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

حل: لومړی نوموړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بيا پورتنی طريقه پرې تطبيقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}\Rightarrow\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+\quad(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+\quad)x+(2A-4\quad)}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+\quad=4\\2A-4\quad=-1\end{array}\right\}\Rightarrow A=\frac{5}{2}\quad,\quad=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

دویم حالت:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{\;}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{\;}{(x-x_0)^n}$$

لومړی مثال: د $\dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

حل: د مخرج د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{\;}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+\quad(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+\quad)x^2+(-2A-3\quad+C)x+(A+2\quad-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+\quad=3 \\ -2A-3\quad+C=-6 \\ A+2\quad-2C=2 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} A=2 \\ \quad=1 \\ C=1 \end{array}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

که د مخرج ضربي عوامل دریمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم د یو قسمي کسر $\dfrac{Ax+\quad}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

لومړی مثال: د $\dfrac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د مخرج پولینوم ضربي عوامل عبارت دي له:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

څرنګه چې د x^2+2x+4 درې جمله‌یي د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزیې وړ نه ده له دې امله لیکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+\ \ }{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+\ \ )(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+\ \ +2C)x+(\ \ +4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+C=5 \\ A+\ \ +2C=8 \\ \ \ +4C=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=3 \\ \ \ =1 \\ C=2 \end{array} \Rightarrow \frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

پوښتنې

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

-1

$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ $c)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

$a)\ \frac{1}{x^4(x+1)}$ $b)\ \frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ $c)\ \frac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$d)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $e)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

$a)\ \frac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ $b)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

$c)\ \frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ $d)\ \frac{x^5}{x^4-1}$

د اکسپوننشل تابعگانو انتیګرالونه

مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$
$$a^x = b$$

فعالیت

- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم يې واخلئ.
- د لوګاریتمي تابع یوه بېلګه ولیکئ.
- د $\log_a x = C$ اړیکه په اکسپوننشیل ډول ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لیکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبیعي اکسپوننشیل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \; a \neq 1 \quad , \; a \in IR^+$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$
$$u = 1 \quad \Rightarrow \; du = 0 \cdot dx$$
$$dv = a^x \quad \Rightarrow \; v = \frac{a^x}{\ln a}$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

لومړی مثال: د $f(x)=2^{x-3}$ اکسپوننشیل تابع انتیګرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx=\int\frac{1}{8}2^x dx=\frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

دویم مثال: دلاندې اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 3^{x+1}dx=?$ 2) $\int 6^{x-1}dx=?$

حل:

1) $\int 3^{x+1}dx=?$

$$3^{x+1}=3^x\cdot 3$$

$$\int 3^x\cdot 3\,dx=3\int 3^x dx=3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

2) $\int 6^{x-1}dx=?$

$$6^{x-1}=\frac{6^x}{6}=\frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int\frac{1}{6}6^x dx=\frac{1}{6}\int 6^x dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+C$$

پوښتنې

د لاندې اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرالونه محاسبه کړئ.

a) $\int 3^{x-1}dx$ b) $\int 2^{-x}dx$ c) $\int a^{x+b}dx$

d) $\int\frac{1}{a^x}dx$ e) $\int 2^x\cdot 3^x dx$ f) $\int\frac{2^x}{3^x}dx$

g) $\int\frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ h) $\int\frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ i) $\int(1+2^x)dx$

د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال

وښیئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$

فعالیت

- لوګاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابعګانو ګراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال ونیسو؟

د پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوګاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ $f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوګاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي، نو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \;,\quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \;,\quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\,\log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیگرال غواړو پیدا کړو:

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یادونه:

(I) د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیگرال حل پیدا کړو.

لومړی مثال: لاندې انتیگرالونه پیدا کړئ.

حل:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

دویم مثال: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ:

حل:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

دریم مثال: د $f(x)=x\cdot\ln x^2$ انتیګرال حساب کړئ.

حل:

$$f(x)=x\cdot\ln x^2 \Rightarrow \int f(x)dx=\int(x\cdot\ln x^2)dx=?$$

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int\ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x^2-\frac{1}{2}x^2+C$$

(II) معین انتیګرالونه هم د بدلون(تعویض) له لارې حل کیږي.

لومړی مثال: د $\int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$ انتیګرال پیدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=-1,\ u=2x & \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\ u=2x & \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

دويم مثال: د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2dx$ انتيگرال قيمت پيدا کړئ.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx\Rightarrow dx\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1\ ,\ \ u=x^2=1 \\ x=2\ ,\ \ u=x^2=4 \end{array}\right\}\Rightarrow \int_1^2 2x\cdot\ln x^2dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4 \ln u\,du$$

$$=[u\cdot\ln u-u]_1^4=[4\cdot\ln 4-4]-[1\cdot\ln 1-1]\approx 2.545$$

پوښتنې

لاندې انتيگرالونه حل کړئ.

$a)\ \int \ln 2x^3dx$ $\qquad b)\ \int \ln\sqrt{x}dx$ $\qquad c)\ \int \log\frac{x}{2}dx$

$d)\ \int 3\log\frac{1}{x}dx$ $\qquad e)\ \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx$

د قسمي کسرونو په مرسته د انتيګرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پيدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزيه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابعګانو انتيګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونيسو.

لومړی مثال: $\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

حل: د قسمي کسرونو د تجزيې په مرسته ليکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{\quad}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+\quad(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+\quad x-2\quad}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+\quad)x-4A-2\quad}{(x-2)(x-4)}$$

$A+\quad=7$

$-4A-2\quad=-12$

$A=7-\quad$

$-4(7-\quad)-2\quad=-12$

$-28+4\quad-2\quad=-12$

$-28+2\quad=-12$

$2\quad=16 \Rightarrow \quad=8$

$A=7-8=-1$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو ليکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

دويم مثال: د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتيگرال محاسبه کړئ.

حل: مخرج په فکتورو تجزيه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{\quad}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+\quad(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+\quad x-2\quad}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+\quad)x+3A-2\quad}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+\quad)x+3A-2\quad=-5x+9$$

$$A+\quad=-5\Rightarrow A=-5-\quad$$

$$3A-2\quad=-5x+9$$

د A او عددي قيمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-\quad)-2\quad=9$$

$$-15-5\quad=9$$

$$-5\quad=24$$

$$\quad=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

پوښتني

لاندې انتيگرالونه د قسمی کسرونو په طريقه حل کړئ.

a) $\int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ b) $\int\frac{x-2}{x^2-6x+13}dx$ c) $\int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

د خپرکي مهم ټکي

- که $f(x)=e^x$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^x$ دی.
- که $f(x)=a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د يوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل ليکل شوی دی که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چيرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د کسري پولينوم مخرج ($P_n(x)$) د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدليدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{}{x-x_n}$$

- که د لومړۍ درجه پولينوم مخرج ضربي عوامل چې ځينې يې تکرار راغلی وي، يعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې تکرار شوی وي، نو ليکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دويمه درجه پولينوم د تجزيې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولينوم يو ټوټه کسر $\frac{Ax+}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشيل تابعګانو انتيګرال لپاره ليکلای شو:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^+ \ , \ a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انتيګرال لپاره ليکلای شو:

$$\int \ln dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int \log_a x\,dx=x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- ځينې تابعګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، ليکو:

$$f(x)=e^x \Rightarrow \int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$$

د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیداکړئ.
2. د $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیداکړئ.
3. د $y=2x^{2x}$ تابع مشتق پیداکړئ.
4. د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیداکړئ.
5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$　　2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$　　3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیداکړئ.

1) $\int 5t^7dt$　　2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$　　4) $\int \sqrt{\cos x}\sin xdx$

5) $\int xe^{-x}dx$　　6) $\int (\frac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

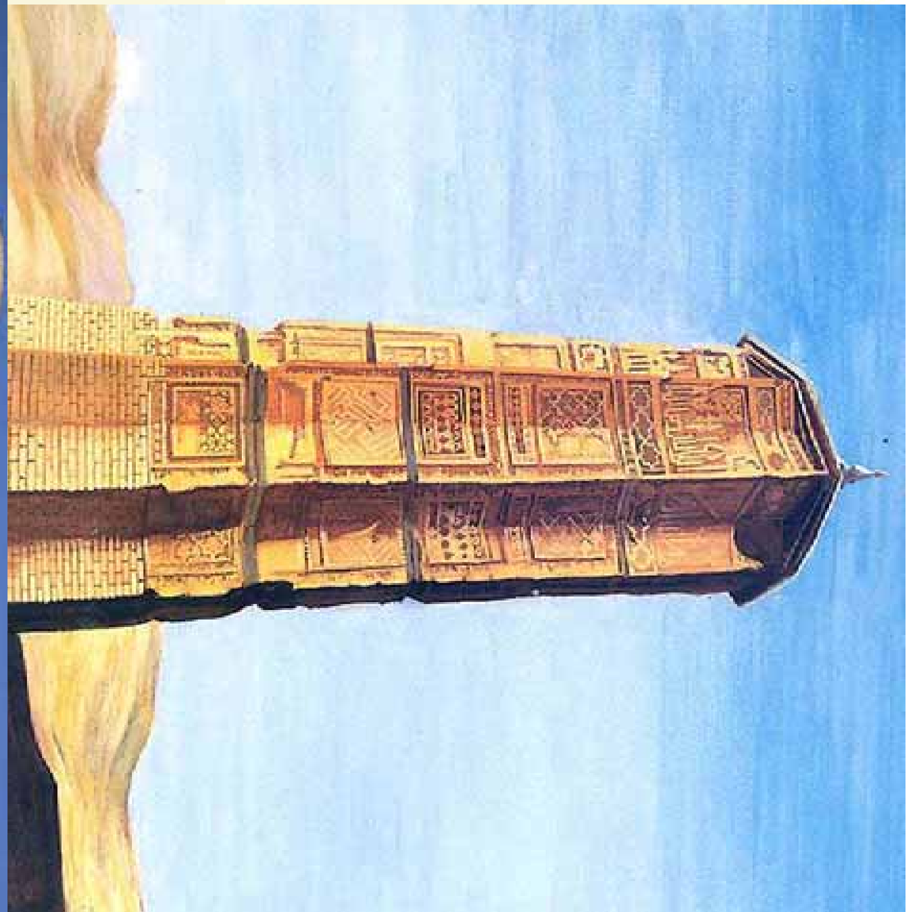
7 – د لاندې تابعګانو مشتق پیداکړئ.

a) $y=\ln(x^2+x+1)$　　b) $y=\ln(\sin x)$

c) $y=e^{x^2+1}$　　d) $y=\sqrt[x]{2}$

شپږم څپرکی

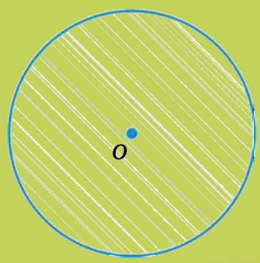
د انتیگرال تطبیقات



د يوې منحني د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by one curve

د مخامخ شکل مساحت چې يوه سطحه د يوې منحني په واسطه ترل شوې دايره ده د مساحت فورمول يې ووياست.



فعاليت

د $y=1-x^2$ تابع په پام کې ونيسئ.

- د تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي او د x محور سره د تقاطع ټکي پيدا او ګراف يې رسم کړئ.
- د $y=1-x^2$ تابع او x محور تر منځ د سطحې د مساحت قيمت د انتيګرال په مرسته پيدا کړئ.
- پورتنی فعاليت د $y=-x^2+2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحني او د x د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

_ $\int_a^b f(x)\,dx = F(a)-F(b)$ انتيګرال د يوې سطحې د مساحت قيمت راښيي چې د $y=f(x)$ منحني او د x محور او د $x=a$, $x=b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

_ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ ترلی انټروال کې مثبت او متمادي وي، يعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع ګراف تل د x محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع ګراف د x محور لاندې خواته واقع ده او منفی دی.

لومړی مثال: د $x=4-y^2$ تابع د منحني او د y د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیداکړئ.

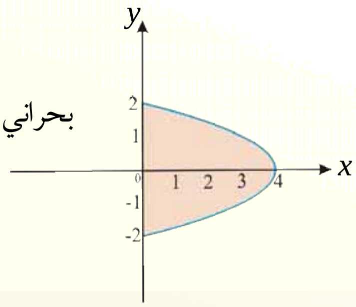
حل: لومړی د تابع بحراني ټکي او د y محور سره د پرېکړې ټکي پیداکوو، وروسته یې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیداکولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره یې مساوي کوو او د محورو سره د پرېکړې ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.

$$x=4-y^2 \Rightarrow x'=-2y=0$$
$$x'=0 \Rightarrow y=0$$

$y=0\,,\quad x=4-y^2 \Rightarrow x=4-0 \Rightarrow x=4 \quad\Rightarrow (4,0)$ بحراني ټکی

$x=0\,,\quad 4-y^2=0 \Rightarrow y^2=4$

$y=\pm 2 \quad\Rightarrow (0,2)\,,\quad (0,-2)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي



څرنګه چې د $x=4-y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر x محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمایي مساحت په پام کې نیولو سره، د انټیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A=\int_{-2}^{2}(4-y^2)\,dy=2\int_{0}^{2}(4-y^2)dy=2[4y-\frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A=2\,[(4\cdot 2-\frac{2^3}{3})-0]=2\,(8-\frac{8}{3})=2\,(\frac{24-8}{3})=2\,(\frac{16}{3})=\frac{32}{3}$$

دویم مثال: د x محور او د $y=1-\frac{1}{2}x^2$ تابع منحنی د محصور شوی سطحې مساحت محاسبه کړئ.

حل: د محصور شوی سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکی او د x محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

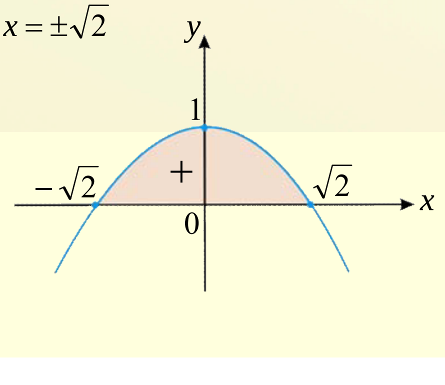
$$y=1-\frac{1}{2}x^2\,,\ y'=-x$$
$$y'=0 \Rightarrow x=0$$

$x=0,\ y=1-\frac{1}{2}x^2=1 \Rightarrow y=1-\frac{1}{2}0^2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0,1)$ بحراني ټکی

$y=0,1-\frac{1}{2}x^2=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2=-1 \Rightarrow x^2=2,\ x=\pm\sqrt{2}$

$x_1=\sqrt{2}\quad,\quad x_2=-\sqrt{2}$

$(\sqrt{2},0)\,,\ (-\sqrt{2},0)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي



$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

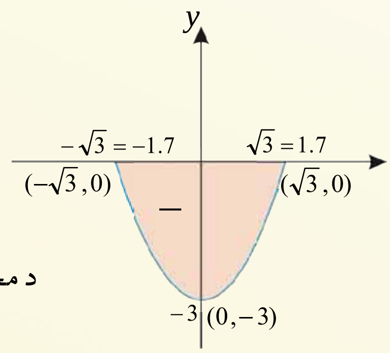
$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

دریم مثال: د $y=x^2-3$ تابع ګراف د x له محور سره یوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع ګراف رسموو او د تابع بحراني ټکی او د تقاطع ټکی په لاس راوړو:



$$y=x^2-3\Rightarrow y'=2x$$

$$y'=0\Rightarrow x=0$$

$$x=0\,,\ y=x^2-3\Rightarrow y=0^2-3$$

$\Rightarrow y=-3\Rightarrow(0,-3)$ بحراني ټکی

$$y=0\ ,\ \ x^2-3=0\Rightarrow x^2=3$$

$x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow(\sqrt{3},0)\ ,\ (-\sqrt{3},0)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي

څرنګه چې د $y=x^2-3$ تابع په $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د پرېکړې ټکي متناظر قیمتونه لري نو ګراف یې د x محور څخه لاندې دی او انټیګرال یې منفي دی، نو د ټول مساحت څخه د انټیګرال د سرحدونو نیمایي مساحت پیدا کوو او په 2 کې یې ضربوو:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_{0}^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_{0}^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ تابع ګراف رسم د منحني او x محور تر منځ د سطحې مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

حل: لومړی د منحني بحراني ټکی او له محورونو سره د پرېکړې ټکي پيدا کوو:

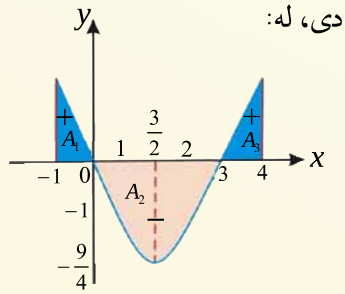
$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3\ ,\ x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}\ ,\quad y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}\ ,\quad (x,y) = (\frac{3}{2},-\frac{9}{4})$$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2},-\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکی دی او د تقاطع ټکي يې د x له محور سره عبارت دي، له:



$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$
$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0\ ,\quad x_2 = 3$$

$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)\,dx - \int_{0}^{3}(x^2 - 3x)\,dx + \int_{3}^{4}(x^2 - 3x)\,dx$$

$$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$$
$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

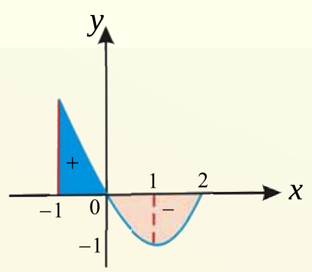
پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ منحني د x محور او $x = 2$ ، $x = -1$ کرښو تر منځ مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی بحراني ټکي وروسته د x محور سره د تقاطع ټکی په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$
$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$
$$x = 1 \;,\; y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1,-1)$$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د x محور سره یې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 \;,\; x_2 = 2$$



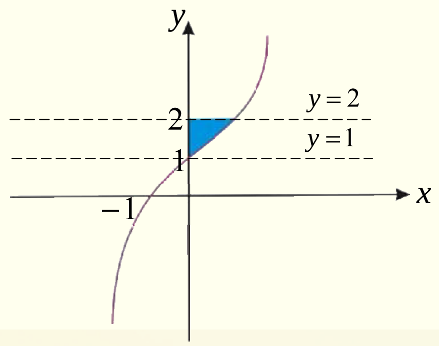
څرنګه چې منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې لـه مبدأ څخه تیرېږي او د منحني یوه برخه د $[-1,0]$ په انټروال کې د x محور پورته خواته او بله برخه یې د $[0,2]$ په فاصله کې د x محور ښکته خواتـه پرتـه ده انتیګرال یې منفي دی:

$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$
$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$
$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

پوښتنې

1- د $f(x)=\sin x$ منحني او د x محور تر منځ مساحت په $[-2\pi, 2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y=x^3+1$ تابع منحني او $y=1$ ، $y=2$ کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.

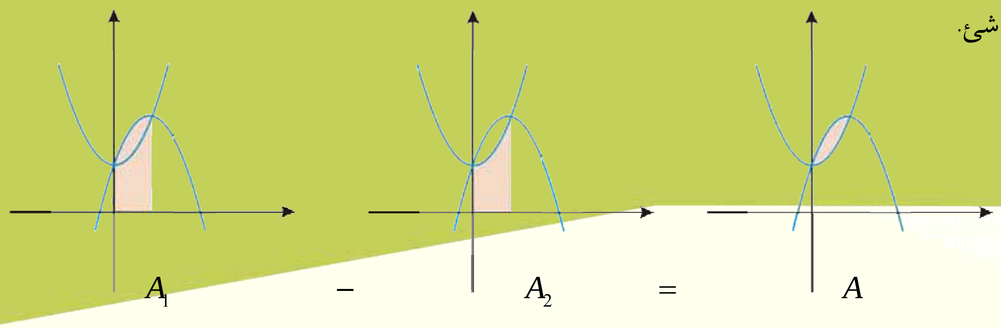


3- د $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منحني او د $x=0$ او $x=1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

د دوو محصور شويو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by tow curves

لاندې شکلونه په پام کې ونيسئ د $A = A_1 - A_2$ اړيکې د سموالي په اړه څه ويلای شئ.



فعاليت

که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابعګانې راکړل شوې وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې څخه د x قيمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قيمتونو په پام کې نيولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د y_1 تابع ګراف د y_2 تابع د ګراف څخه لوړ دی نو د تابعګانو د انتيګرال د تفريق حاصل $(y_1 - y_2)$ د x په ټاکل شوي انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعاليت د $y = x^2$ تابع د منحني او $y = x + 2$ د کرښې لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوي سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتنی فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

ـ که چيرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحني ګانو د محصور شوي سطحې د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، يعنې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع دپاسه واقع وي نو لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پيدا کوو وروسته د پاسني او لاندينې منحني د x د محور سره مساحت په $[a,b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

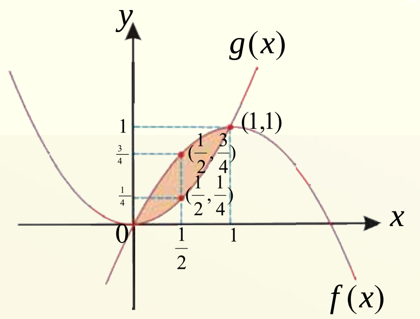
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

ـ که چیرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

لومړی مثال: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحنې ګانو د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل: لومړی د دواړو منحنې ګانو د تقاطع ټکی پیداکوو:



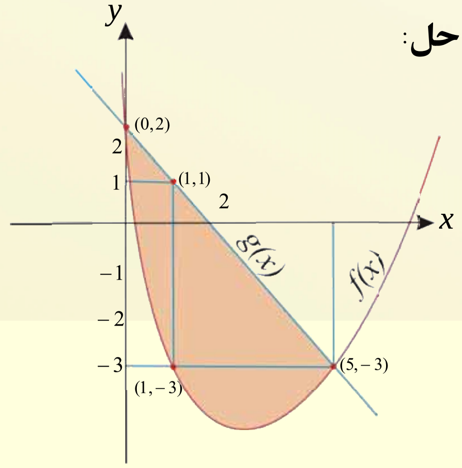
$$f(x)=2x-x^2\ ,\ g(x)=x^2$$
$$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2$$
$$2x-x^2-x^2=0$$
$$2x-2x^2=0$$
$$2x(1-x)=0$$
$$2x=0\quad\Rightarrow x_1=0$$
$$1-x=0\quad\Rightarrow x_2=1$$

لیدل کېږي چې ددواړو منحنې ګانو تقاطع (1،1) او (0،0) ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیداکوو.

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]=\int_0^1[2x-x^2-x^2]dx=\int_0^1[2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$
$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل:



$$\left.\begin{array}{l}f(x)=x^2-6x+2\\ g(x)=2-x\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$x^2-6x+2=2-x\Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$$
$$x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0$$
$$x_1=0\ ,\ x_2=5$$

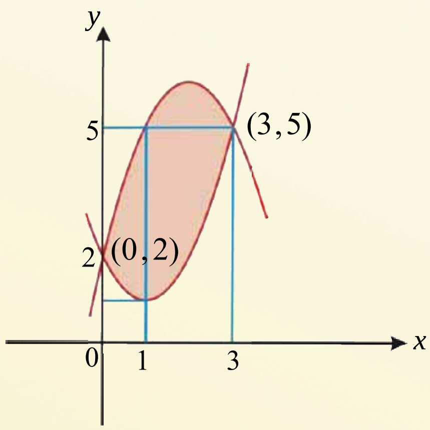
$\Rightarrow (0,2)\ ,\ (5,-3)$ د کرښې او منحنې د تقاطع ټکي

له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کرښې گراف د $f(x)$ گراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنی چې $g(x) > f(x)$

$$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^5(2-x-x^2+6x-2)dx$$
$$=\int_0^5(-x-x^2+6x)\,dx=\int_0^5(-x^2+5x)\,dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}]_0^5=(-\frac{125}{3}+5\cdot\frac{25}{2})-0=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}$$
$$=\frac{-250+375}{6}=\frac{125}{6}$$

دریم مثال: د $f(x)=-x^2+4x+2$ او $g(x)=x^2-2x+2$ تابعگانو د گرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې د دواړو گرافونو د تقاطع ټکي د انتیگرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولو لپاره $f(x)=g(x)$ وضع کوو:



$$\left.\begin{aligned}f(x)&=-x^2+4x+2\\ g(x)&=x^2-2x+2\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$-x^2+4x+2=x^2-2x+2$$
$$\Rightarrow -x^2+4x+2-x^2+2x-2=0$$
$$-2x^2+6x=0\Rightarrow x(-2x+6)=0$$
$$\Rightarrow x_1=0 \quad , \quad -2x=-6\Rightarrow x_2=3$$

د دواړو منحني گانو د تقاطع ټکي $(0,2)$, $(3,5)$

د x محور سره د تقاطع ټکي عبارت له $(5،3)$، $(2،0)$ دی اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د $g(x)$ گراف د $f(x)$ له گراف څخه پورته واقع دی نو لرو:

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_0^3(-x^2+4x+2)dx-\int_0^3(x^2-2x+2)dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x]_0^3-[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+2x]_0^3$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot 27+2\cdot 9+6-0-\frac{1}{3}\cdot 27+9-6+0$$
$$=-9+18-9+9$$
$$=9$$

پوښتني

1- د $y=x^2$ او $y=-x^2+4x$ منحني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پيدا کړئ.

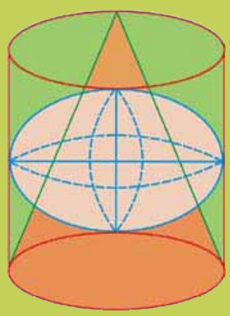
2- د $y^2=2x-2$ پارابول او $y=x-5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

3- د $y^2=2x+6$ منحني او $y=x-1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.

د دوراني جسمونو د حجمونو محاسبه

Accounting of rounding things Volume

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پيدا کړئ.

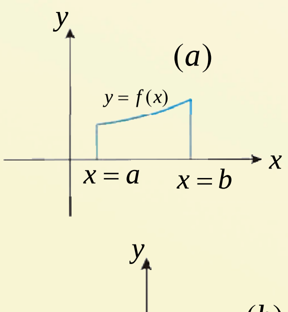


په مخکنيو ټولګيو کې مو د جسمونو حجم پيدا کړی وو پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معين انتيګرال څخه په ګټه اخيستنې سره ثبوتوو.

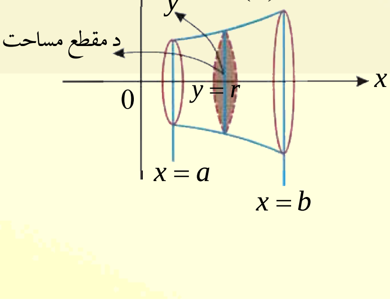
- يو ټکی او يوه کرښه په فضا کې داسې په پام کې ونيسئ چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د يوې مستقيمې کرښې له دوران څخه د يوه ټکي په شاوخوا له څرخېدو وروسته جوړيږي نوم يې واخلئ.
- د نوموړي جسم د حجم فورمول وليکئ او ووايئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

- که چيرې د $y = f(x)$ متمادي تابع د منحني مساحت نظر (a) شکل

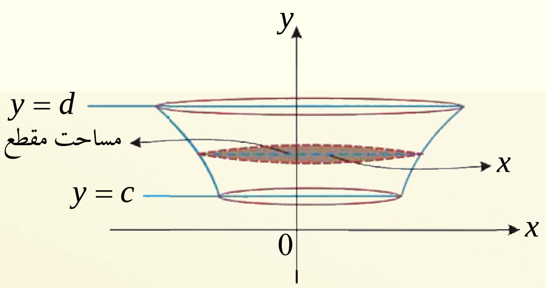


د $x = a$ او $x = b$ کرښو او منحني په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقريباً استوانه يې شکل لري، لکه د (b) شکل.



چې ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دايروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دايرې مساحت نظر x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د y محور سره موازي ده؛ نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول يې نظر ريمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\, dx = \int_a^b \pi y^2\, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$$



- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع يې $\Delta y = d - c$ او شعاع يې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\, dy = \int_a^b \pi x^2\, dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2\, dy$$

د دوراني جسمونو حجم د انتيګرال په مرسته په لاس راځي لکه:

1- د انتيګرال په مرسته د کرې حجم پيدا کړئ.

ثبوت: پوهېږو چې که چيرې نيمه دايره د خپل قطر په شاوخوا وڅرخي کره لاس ته راځي او د دايرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نيمې دايرې حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو، چې د دايرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$V=\int_{-r}^{r}\pi y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx$$

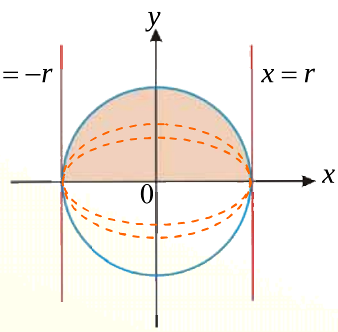
$$=2\pi\int_{0}^{r}(r^2-x^2)\,dx=2\pi[r^2x-\frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$=2\pi[(r^3-\frac{r^3}{3})-0]$$

$$=2\pi(\frac{3r^3-r^3}{3})$$

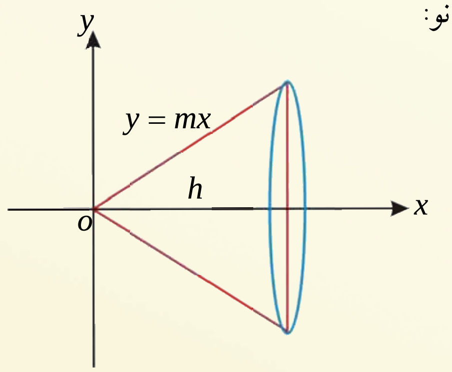
$$=2\pi(\frac{2r^3}{3})$$

$$V(\text{د کرې حجم})=\frac{4}{3}\pi r^3$$



2- د انتیګرال په مرسته د مخروط حجم پیداکړئ.

ثبوت: څرنګه چې مخروطي سطح د $y=mx$ کرښې له دوران څخه د x د محور په چاپیریال په لاس راځي نو:



$$V=\int_0^h\pi y^2dx$$

$$=\int_0^h\pi m^2x^2dx=\pi m^2\int_0^h x^2dx$$

$$=\pi m^2[\frac{x^3}{3}]_0^h=\pi m^2(\frac{h^3}{3})$$

$$=\frac{\pi h}{3}(mh)^2$$

له پورته شکل څخه لیدل کیږی چې د مخروط قاعده دایروی بڼه لری اوشعاع یې د h محور سره موازی ده، یعنې $y//r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع (h) د x په محور باندې منطبق ده، $(x=h)$ نو د $y=mx$ په اړیکه کې یې قیمت وضع کوو:

$$y=mx\quad\Rightarrow\quad r=mh$$

$$=\frac{\pi h}{3}\quad r^2$$

$$V=\pi r^2\times\frac{h}{3}$$

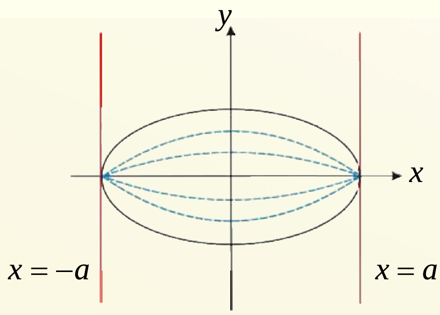
ثرنګه چې د مخروط قاعده دایروي ده، د دایرې مساحت πr^2 دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ د منحني او x محور په چاپیر د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

ثبوت: د الپس د نیمايي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو، چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx = \pi\int_{-a}^{a}[b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$= 2\pi\int_{0}^{a}[b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2x - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$= 2\pi[(b^2a - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}) - 0] = 2\pi[b^2a - \frac{b^2a}{3}]$$

$$= 2\pi[\frac{3b^2a - b^2a}{3}] = 2\pi[\frac{2b^2a}{3}]$$

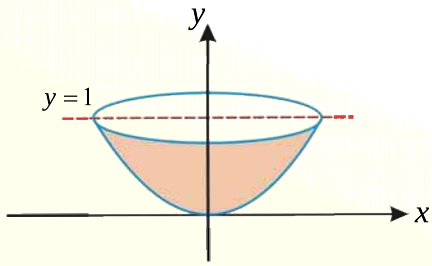
$$V = \frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

که چیرې د الپس محراقونه د y په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

لومړی مثال: د هغه جسم حجم چې د $y = x^2$ او $y = 1$ کرښې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران څخه د y په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

حل: لومړی شکل رسموو وروسته یې مساحت حسابوو:

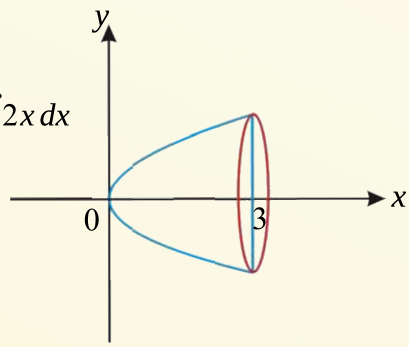


$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}\pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ تابع او $y = 3$ کرښې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیدا کړئ.

حل:



$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi[\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 2x\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x\, dx = 2\pi [\frac{x^2}{2}]_0^3$$

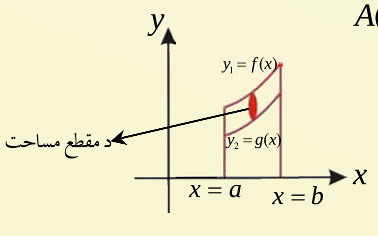
$$V = 9\pi$$

یادونه: که د $y_1 = f(x)$ او $y_1 = g(x)$ تابعګانې په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی د هغه دوراني جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحني ګانو او د $x = a$ ، $x = b$ کرښو تر منځ جوړېږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

$=\Delta x$ د استواني ارتفاع

$A(x) =$ (د استواني د مقطع مساحت) $= \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

د هغې استواني د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع ګراف څخه پورته قرار لري.



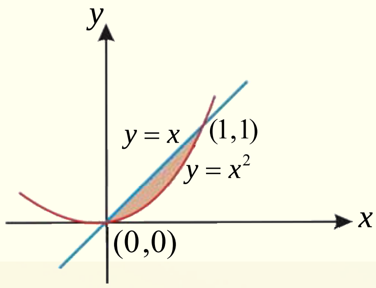
$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$$

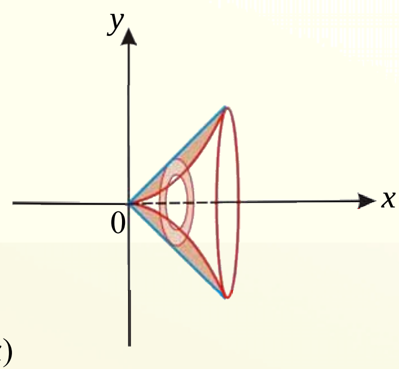
د هغې استواني د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع گراف ، د $f(x)$ گراف څخه پورته واقع وي.

$$V=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پيدا کړئ چې د $y=x^2$ منحني او $y=x$ کرښې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د x محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

حل:





$$\left.\begin{array}{l} y_1=x^2=f(x) \\ y_2=x=g(x) \end{array}\right\}\Rightarrow y_2>y_1\ ,\ g(x)>f(x)$$

$$=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\int_0^1 \pi(x^2-(x^2)^2)dx$$

$$=\pi\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx=\pi[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$=\pi[(\frac{1}{3}-0)-(\frac{1}{5}-0)]=\pi[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}]$$

$$V=\pi[\frac{5-3}{15}]=\pi[\frac{2}{15}]=\frac{2\pi}{15}$$

پوښتنې

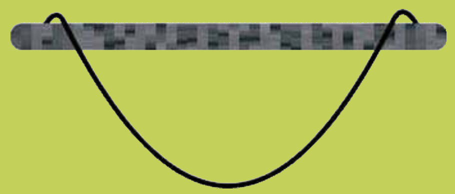
1. د هغه جسم حجم چې د $y=\sin x$ تابع او د $x=0$ او $x=\pi$ دوو کرښو تر منځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د x د محور په چاپير جوړېږي پيدا کړئ.

2. د هغه جسم حجم پيدا کړئ چې د $y=x^3$ منحني او $y=8$ ، $x=0$ کرښو ترمنځ محصور شوي مساحت له دوران څخه د y د محور په چاپير جوړېږي حساب کړئ؟

د قوس د اوږوالی محاسبه

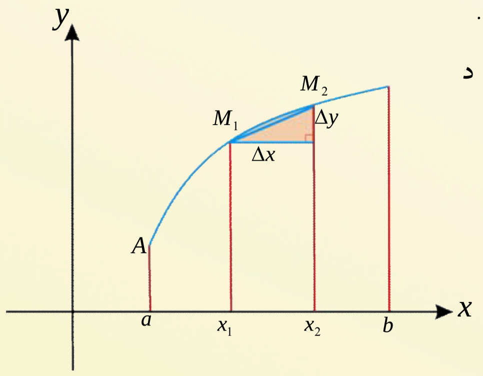
Accounting the Length of Arc

څرنګه کولای شو چی د مخامخ پرې اوږدوالی پیداکړو؟



فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال پـه پـام کې ونیسئ او هغې تـه $\overset{\frown}{A}$ ووایې، داسې چې تابع په نومړې فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په دریو مساوي برخو ویشو او د x_1 او د x_2 د قوس اوږدوالی په M_1 او M_2 ښیو.
- د M_1 له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د M_2 په ټکي او یوه بله کرښه، د هغې پـه مخامخ کرښـه رسـمو او د دوارو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی ونوموئ.
- د M_1 د کرښې فاصلې ته Δx او M_2 ته Δy وایې او د $M_1 \quad M_2$ د قایم الزاویه مثلـث د مخامخ قوس اوږوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.



له پورتني فعالیت څخه کولای شو، چې د $M_1 \quad M_2$ مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.

ثبوت:

له قایم‌الزاویه $M_1 \quad M_2$ مثلث څخه په ګټې اخیستنې سره لرو چې:

$$(M_1 M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f'(t)\cdot\Delta t \quad , \quad \Delta y = g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

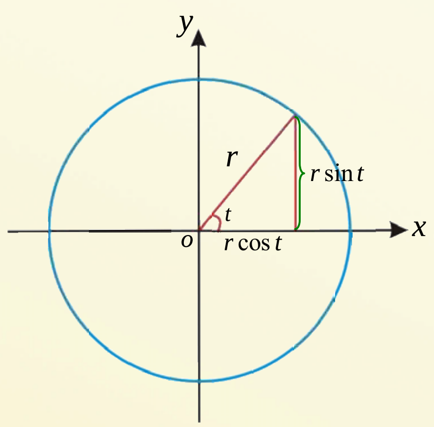
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

لومړی مثال: د $x^2+y^2=r^2$ د دایرې محیط محاسبه کړئ:

حل: څرنګه چې د دایرې پارامتري معادله په دې ډول $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ ده.

که چیرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دایرې نمایي محیط پیدا کړئ.



$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\,dt$$

$P=[rt]_0^{\pi}=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi r$ د دایرې نیمايي محیط

د دایرې مکمل محیط $=2\pi r$

يادونه:

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د x د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسی محاسبه کوو: $= \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0 \le x \le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

حل: $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$= \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2} \cdot dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \int_0^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9}du = \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$u = 1+\frac{9}{4}x$$

$$= \frac{4}{9}[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_0^4 = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{u^3}]_0^4$$

$$du = \frac{9}{4}dx$$

$$= \frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}\cdot 4)^3}-1] = \frac{8}{27}(\sqrt{10^3}-1)$$

$$dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د y د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو، چې: $= \int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\,dy$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $1 \le y \le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

حل:

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$=\int_a^b\sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4\sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$

پوښتني

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيګانو د قوس اوږدوالی د $1\le x\le 2$ د فاصلې تر منځ پيدا کړئ.

2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحني د قوس اوږدوالی د $0\le x\le 1$ د فاصلې تر منځ پيدا کړئ.

د ښېرکي مهم ټکي

- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی راښیي چې د $y=f(x)$ منحني او د x د محور او د $x=a$ او $x=b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع ګراف د x د محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د x د محور لاندې خواته واقع او انتیګرال یې منفي دی.

د دوو منحنيګانو په واسطه د محصور شوې مساحت محاسبه:

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع دګراف په پورتنۍ برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

- که چیرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنۍ برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx$$

د دوراني جسمونو د حجم مساحت:

- که چیرې د $y=f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x=a$ او $x=b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع له منحني د دوران څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه‌یي شکل لري.

چې ارتفاع یې $\Delta x=b-a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهېږو چې د دایرې مساحت نظر د x محور ته $A(x)=\pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د y له محور سره موازي دی؛ نو $y=r$ کېږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په لاندې ډول دی:

$$v=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x=\int_a^b \pi r^2\,dx=\int_a^b \pi y^2\,dx=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

- که د $x=f(y)$ تابع مساحت د $y=c$ ، $y=d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر y محور ته $A(y)=\pi r^2$ چې ارتفاع یې $\Delta x=d-c$ او شعاع یې $x=r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران د مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y=\int_a^b \pi r^2\,dy=\int_a^b \pi x^2\,dy=\pi\int_a^b [f(y)]^2\,dy$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د اوږدوالی د محاسبې فورمول: $= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$

(1 $= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$

(2 $= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(y)}\, dy$

د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د $y^2 - x - 5 = 0$ منحني او د y د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y = \sin x$ منحني په $[0, 2\pi]$ انټروال کې او د x د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د $y = x^2 - 2x$ او $y = 6x - x^2$ منحنيګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y = -x^2 + 4x - 3$ منحني او x محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ او $y = x^2 - 4x$ منحنيګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y = \sin x - \cos x$ منحنـي او $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ کرښـو د x محـور پـه شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سـطحې حجـم چې د $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ منحنـي د تـابع لـه دوران څخـه د x د محور پرشـاوخوا پـه $[0, 4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې رابندې شوې مسطحې د جسم حجم چې د $y = x^2$ منحنـي او د $x^2 + y^2 = 2$ دايـرې لـه دوران څخه د x محور په شاوخوا جوړ شوې وي پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y = \frac{1}{2}x + 1$ کرښې دوران او د x محور په $[2, 6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y = -x + 4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2 \le x \le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږدوالی په $2 \le x \le 5$ انټروال کې پیدا کړئ.

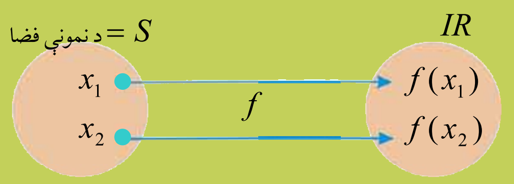
اووم څپرکی

احصائیه

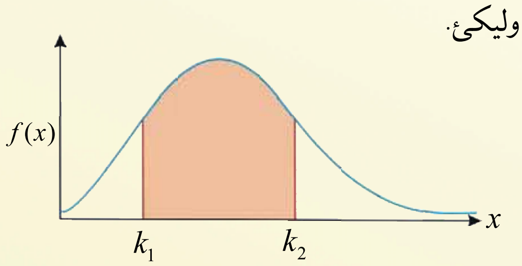
موږ ټول افغانان یو.

د احتمال د تابع توزیع

د تصادفي ازمايښت، نمونه‌يي فضا او ناځاپه متحول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.



- هغه تصادفي متحول چې په احصائيه او احتمالاتو کې ترې ګټه اخلي، له هغه متحول سره چې په الجبر کې مو لوستي دی څه توپير لري؟
- که $x_1, x_2 \ldots x_n$ د يوه سټ عناصر او $P(x=x_i)=f(x_i)$ تابع ولرو، هغه مرتبې جوړې چې د نوموړی تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بيا يې وليکئ.
- مخامخ شکل ته په کتنې سره د k_1 او k_2 مقدارونو ترمنځ او د $f(x)$ منحنی لاندینی محدود شوی مساحت د انتيګرال په شکل وښيئ.



- د لاندې جدول په پام کې نيولو سره د $[E(x=x_i)]=\sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$ ، $[x_i - E(x_i)]^2$ او $[x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تر څېړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغه تابع څخه دی، چې د تعریف ناحیه یې نمونه‌یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي.

ـ که $P(x = x_i) = f(x_i)$ ولرو نو د $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \ldots, [x_n, f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا(گسسته) احتمال تابع وایي.

- د تجمعي او پیوسته احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x) = P(X \le x)$ وښیو.
- که چیرې $f(x)$ د احتمال تابع او x تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)\,dx$$

- که چیرې x پیوسته ناځاپه (تصادفي) متحول او $k_1 < k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

- که چیرې x ناځاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط (*Expected Value*) د x تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots\ldots\ldots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د x اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\bar{x}$ ښیي همدارنګه که چیرې x گسسته تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د x وریانس چې د S^2 په شکل ښودل کېږي برابر دی له:

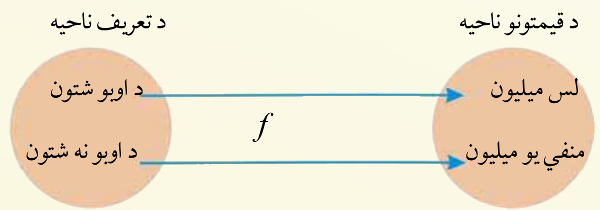
$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډۍ پر سر د اوبو یوه څاه وکني، د اوبو څاه په یو میلیون افغانۍ تماميږي که نوموړی څاه اوبه ورکړي د شرکت مالك لس میلیونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې بـه د څاه دکېندلو یو میلیون افغانۍ مصرف په زیان ورکړي.

الفـ دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښیئ.

بـ که د دې احتمال چې کیندل شوی څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال یې 0.8 وي، پـه دې صـورت کې د احتمـال تـابع، اوسـط ($Expected\ Value$) ، وریـانس او د x تـصادفي متحـول معیـاري انحراف پیدا کړي.

د الف حل:



د ب حل: د تصادفي متحول احتمال تابع، اوسط، وریانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښـودل شوی دی:

تصادفي متحول	د تابع احتمال	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واریانس	انحراف معیار
x_i	$f(x_i)$	$E(x)=\sum x_i f(x_i)$	$[x_i-E(x)]^2$	$S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1	0.8	$-1\cdot 0.8=-0.8$	$(-1-1.2)^2=4.84$	$4.84\cdot 0.8=3.872$	4.4
10	0.2	$10\cdot 0.2=2$	$(10-1.2)^2=77.44$	$77.44\cdot 0.2=15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2=19.360$	

پوښتنې

فرض کوو چې د يوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د پېرودل شوو موټرو شمېر	0	1	2	3

د x تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پيدا کړي.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخېستنې سره ووايئ چې په يوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

د دوه جمله‌يي توزيع او د برنولي ازمويښت

يو ګډون کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزموينه کې د 160 سؤالونو څخه 100 سؤالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې دا ګډون‌کوونکی په آزموينه کې بريالی کېږي او يا بې نتيجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جمله‌يي توزيع يوه مجزا توزيع ده چې د مختلفو پېښو د توصيف لپاره په کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.

د لاندې آزموينتي پېښو د شرطونو څخه څه ډول پايلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه يې له 7 څخه کوچنۍ شي.
- د يوې جعبې څخه څو ځلې د يوې مرۍ(مهره) اخېستل چې د تورو او سپينو مرۍ لرونکې ده.
- د يوې جعبې څخه چې د تورو او سپينو مريو لرونکې ده څو ځلې يوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوې مرۍ سپينه وي(چې اخېستل شوې مرۍ بيا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې m بريالیتوب د n آزمايښت څخه($m<n$) چې ترتيب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه يادېږي او فورمول يې وليکئ.
- که د m شکلونو د بريـاليتوب احتمـال د n ازمايښت څخه پـه P او $n-m$ شکلونو د ناکامې احتمال د n آزمايښت څخه په q وښودل شي نو د m کاميابي احتمال د آزمايښت د n شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو ځلور ځوابه آزموينې د پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض وکړئ که د (سم ځواب) بريالیتوب په T او (ناسم ځواب) نه بريالیتوب د F په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر يوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتني فعاليت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمايښت يو ناڅاپه ازمايښت دی، چې کولای شو پايله يې پـه دوو حالتونو بريالیتوب او نابريالیتوب دسته بندي کړو.

د برنولي توزيع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښيو پـه داسې حـال کې چې P د برياليتوب احتمال او $q=1-p$ د نابرياليتوب احتمال دی.

که چيرې يو ازمايښت n ځلې تکرار کړو، يو ترادف په لاس راځي، داسې چې کـه د هـر آزمايـښت د برياليتوب احتمال P او نابرياليتوب احتمال q وي، په دې صورت کې د n ځلې آزمايښت څخه د m ځلې برياليتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$ $\qquad P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$

پورتني اړيکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښيو،

د پورتنی فورمول په پام کې نيولو سره کولای شو، د دوه جملـه‌يي د توزيع اوسط پـه $\bar{x}=np$ او د دوی توزيع معياري انحراف د $S=\sqrt{npq}$ په بڼه وښيو.

مثال: د يوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شکرې لـه ناروغی څخه 0.4 دی، که چيرې 15 تنه پـه دې نـاروغی اخته وي، ددې خومره احتمال شته چې پنځه تنه ښۀ شي او همدا شان پيداکړی چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

حل: څرنګه چې $n=15 \quad , \quad m=5 \quad , \quad q=0.6 \quad , \quad P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$

$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.0060466176 0=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$

$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$

$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$

$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$

پوښتنې

په يوه کلي کې 200 کورنی اوسېږي که هره کورنی 4 ماشومان ولري ددې احتمال پيداکړئ چې هره کورنی

- حد اقل يو زوی لري.
- يوازې دوه زامن لري.
- يوه يا دوې لوڼې ولري.

د پواسن د احتمال توزیع

که چیرې د برنولي دوه جملهیي توزیع فورمول په پام کې ونیسو، ایا ویلای شئ که چیرې د برنولي په دوه جملهیي توزیع کې د P قیمت صفر ته تقرب وکړي او د n قیمت لایتناهي ته تقرب وکړي؛ نو د برنولي دوه جملهیي توزیع څه سره مساوي کیږي.

$$1)\ b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^x q^{n-x}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} b(x,n,p)=\frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$3)\ P(x,\lambda)=\frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

فعالیت

کــه $p=0.1, n=5$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ قیمتونــه پــه داســې حــال کــې چــې $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$ او $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او له پاسنیو توابع قیمتونه سره یې پرتله کړئ، ویلای شي چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي، چې د m شکلونو د کامیابي احتمال د n آزمایښتونو څخه کله چې n لوی او د کامیابي احتمال P کوچنی وي، د تقریبي محاسبې لپاره وکارول کیږي.

دا فورمول عبارت دی له: $P(X=m)=\frac{e^{-x}\lambda^m}{m!}$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دی.

په یاد ولرئ چې د پواسن په توزیع کې اوسط او هم وریانس له λ سره برابر دی.

مثال: 200 تنو مسافرينو د يوې الوتکې ټکټ اخېستلی دی د مخکنيو تجاربو په اساس که د هغه مسافرينو چې ټکټ يې رانيولی دی د نه راتګ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرين واپس را نه شي څومره دی.

حل: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کاميابي ده او همدارنګه ليدل کېږي چې $n=200$ ډېر لوی او $P=0.01$ يعنې د کاميابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^m}{m!} \qquad \lambda=n\,p=200\cdot 0.01=2$$

$$P(3)=\frac{(2.71828)^{-2}\cdot 2^3}{3!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^2}\cdot 8}{6}=\frac{\frac{1}{7.3890461584}\cdot 8}{6}$$

$$=\frac{0.13533\cdot 8}{6}=\frac{1.08268}{6}=0.1804$$

اوس که چيرې دا احتمال د دو جمله‌يي په فورمول محاسبه کړو، لرو چې:

$$P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\;q^{n-m}$$

$$\left.\begin{aligned}n&=200\\ p&=0.01\end{aligned}\right\}\Rightarrow q=0.99$$

$$P(3)=P(X=3)=\binom{200}{3}(0.01)^3(0.099)^{200-3}$$

$$=\frac{200!}{3!\cdot 197!}(0.01)^3(0.099)^{197}=0.1814$$

څرنګه چې ليدل کېږي دواړه ځوابونه سره معادل دي نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

یادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښیو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتني فورمول کې t د بدلېدونکي وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شوی وي، m د ورتللو شمېر د t په واحد وخت کې، λ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې څلور تنه په لومړیو دریو دقیقو کې راغلي وي څومره دی.

حل:

$$\lambda=60 \quad , \quad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \quad , \quad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

پوښتنې

د چاپ د یوه ماشین د جوړولو لپاره په یوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

الف: د ماشین د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزیع په یوه کال کې حساب کړئ.

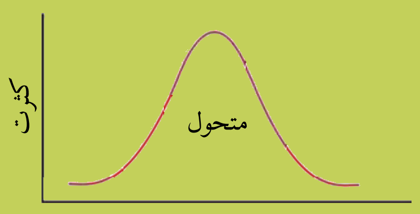
ب: د توزیع اوسط او معیار انحراف څومره دی؟

ج: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشین د جوړولو مصرف پیدا کړئ؟

د: ددې احتمال چې په هر کال کې دیوه ماشین د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره دی؟

د نورمال توزیع

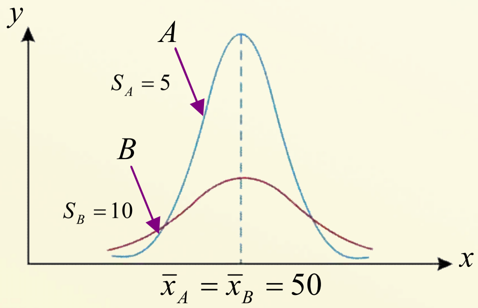
پوهیږو چې د نورمال منحني شکل مشابه او متناظر له زانګولې سره ده، په نورمال منحني کې د پراګندګی مرکزي شاخصونه(معیاري انحراف او اوسط) څه ډول ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.



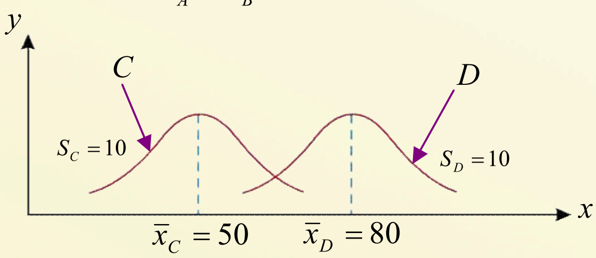
فعالیت

د نورمال بېلابېل توزیعات د بېلابېلو اوسط او معیار انحرافونو لرونکی دی.

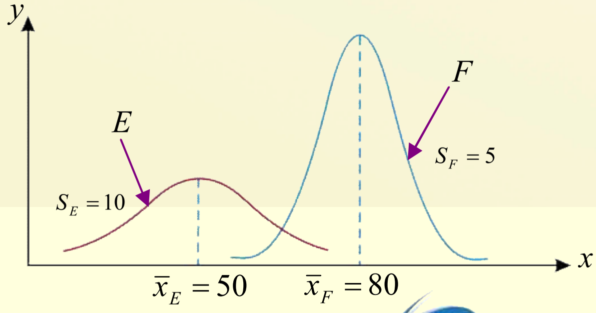
څو د نورمال توزیع له بېلابېلو اوسطحو او معیار انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.



الف شکل



ب شکل



ج شکل

لاندینی فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخیستنې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

- د الف په شکل کې د A او B د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې C او D توزیع د څه ډول معیار انحراف او اوسط لرونکی دی؟
- د ج په شکل کې د E او F توزیع د څه ډول معیار انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته تر کوم ځایه غزیدلي دي؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزیع کیدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

او یا

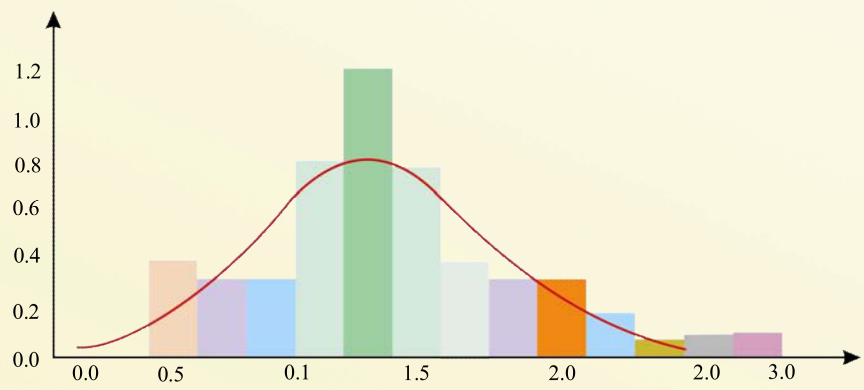
$$f(x)=N(x,\bar{x},s)$$

په داسې حال کې چې $e=2.71828$ او π هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، s معیار انحراف x، پیوسته تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی راښیي.

د نورمال توزیع له پیوسته توزیعګانو څخه ده. د نورمال توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توګه سره نږدې کړو.

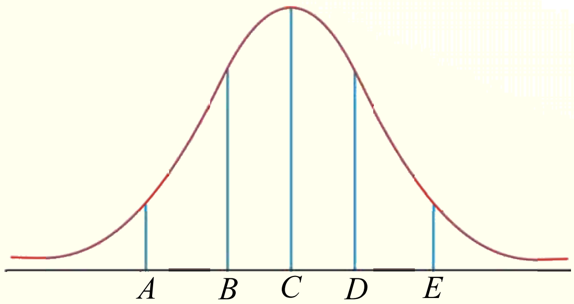
مثال: د موټرونو ماشین د تیلو سوزولو په وخت کې یوه اندازه مضر لوګی تولیدوي، د هغه مضر لوګی مقدار چې له 46 موټرونو تولیدېږي، چې د یوه تن په واسطه چې لورنزن نومېده په 1980 کال کې وڅېړل شو.یوه اندازه لوګی د نایتروجن اوکسایدونه لري. لاندې مستطیلي ګراف د نایتروجن اوکساید میزان د $(\frac{gr}{mil})$ د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزیع اوسط او وریانس چې د نوموړي کس له خوا تر څېړنې لاندې نیول شوی. ددې مستطیلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونه‌یي شمېر له اندازه‌ګیرۍ سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

د مثال په ډول په څلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870 \cdot 0.2 = 0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی ځکه 8 دیټا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.



پوښتنه

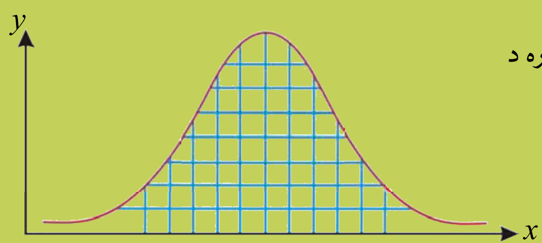
لاندینی شکل په پام کې ونیسئ د A, B, C, D او E ټکو موقعیت د معیار انحراف د اوسط له جنسه پیدا کړئ.



د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول

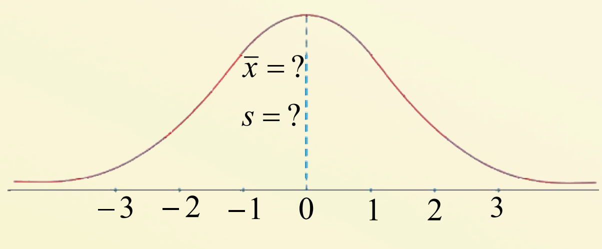
مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

د $y = f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د خه ډول لارو ورانديز کوئ.

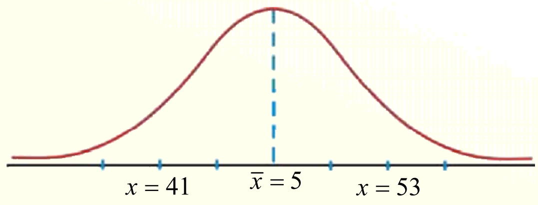


فعالیت

- که چیرې د x تصادفي پیوسته متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\bar{x}$ او معیار انحراف یې s وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ کمیت غوره کړي د انتیګرال په بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انتیګرال محاسبه په ساده کار وي.
- که چیرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \dfrac{x - \bar{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ تابع د احتمال توزیع برابر له څه سره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیار انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دي؟



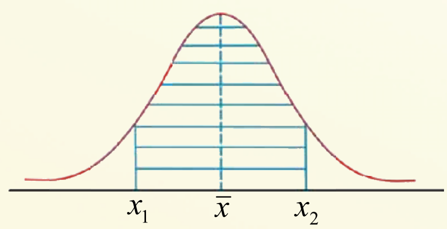
- كه په لاندې شكل كې چې د $x=41$ او $x=53$ قيمتونه په نورمال ډول د $\bar{x}=50$ اوسط او $S=5$ معيار انحراف ښودل شوي دي نو د $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.



له پورتنى فعاليت څخه دا پايله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د x پيوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ يو كميت ونيسئ، نو بايد د x د احتمال د توزيع له تابع څخه انتگرال ونيسو او د منحنى لاندې سطحه د x_1 او x_2 فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه كړو:

$$f(x_1<x<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} N(x,\bar{x},s)dx$$



د نورمال توزيع احتمال محاسبه ساده كار نه دى، د نورمال توزيعگانو د منحنى لاندې مساحت محاسبه اوږدو جدولونو ته اړتيا لري چې عملاً دا كار گران دى، كولاى شو چې د جدول د جوړولو شكل د احصائيوي data د ستنډرډ كولو په واسطه حل كړو.

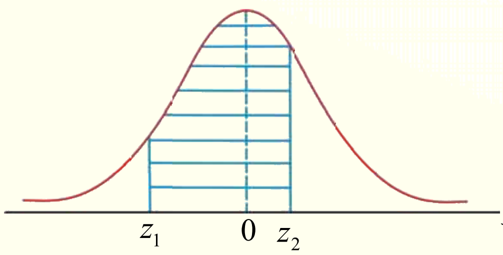
په دې معنا چې كولاى شو په x پورې اړوند تصادفي متحول چې د نورمال توزيع لرونكى دى، د لاندې اړيكې په واسطه ستنډرډ كړو.

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

دلته z د ستنډرډ نورمال متحول په نامه او منحنى ته د ستنډرډ نورمال منحنى په نامه يا د نورمال احتمال منحنى نومول كېږي، په ياد ولرئ چې د z ستنډرډ وي، متحول تل د صفر اوسط لرونكى او يو معيار انحراف يې دى، همدارنگه د نورمال منحنى او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاكل شوي واحد سره برابر وي.

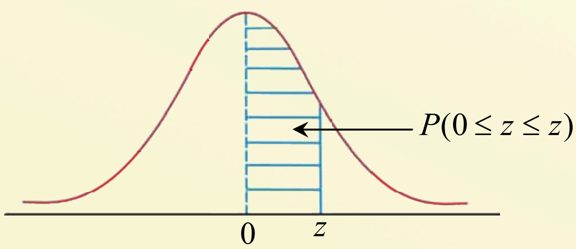
لاندې مساحت د یوه منحني یوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقیم تناسب لري او کولای شو چې د $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ بدلولو سره یې په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \int_{z_1}^{z_2} N(z,0,1)\, dz$$

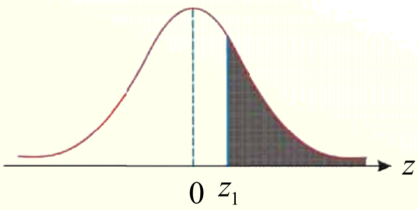


د x متحول منحني لاندې مساحت چې د $x = x_1$ او $x = x_2$ ترمنځ واقع دی، د z متحول له منحني مساحت سره چې د $z = z_1$ او $z = z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. په پایله کې کولای شو چې د نورمال د توزیع سټنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزیع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قیمت لپاره په لاس راوړای شو.

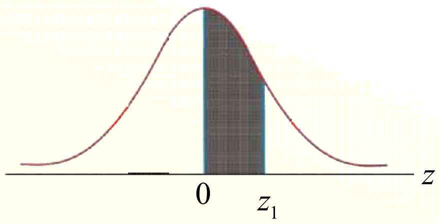
د سټنډرډ نورمال د توزیع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو، په لنډ ډول توضیح کړو. هغه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د سټنډرډ نورمال توزیع اړوند په احتمالاتو کې ګډون لري. لاندې جدول ددې لوست یوه برخه د جدول پای راښیي، هغه ارقام چې د جدول دپاسه لیکل شوی دی، راښیي چې z د مثبتو مقدارونو لپاره تنظیم شوی دی چې د منحني لاندې مساحت له صفر ټکي څخه تر z پورې راښیي.



جدول(1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997



جدول(2)

z	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰/۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۸۰	۰/۰۱۲۰	۰/۰۱۶۰	۰/۰۱۹۹	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۷۹	۰/۰۳۱۹	۰/۰۳۵۹
۰/۱	۰/۰۳۹۸	۰/۰۴۳۸	۰/۰۴۷۸	۰/۰۵۱۷	۰/۰۵۵۷	۰/۰۵۹۶	۰/۰۶۳۶	۰/۰۶۷۵	۰/۰۷۱۴	۰/۰۷۵۴
۰/۲	۰/۰۷۹۳	۰/۰۸۳۲	۰/۰۸۷۱	۰/۰۹۱۰	۰/۰۹۴۸	۰/۰۹۸۷	۰/۱۰۲۶	۰/۱۰۶۴	۰/۱۱۰۳	۰/۱۱۴۱
۰/۳	۰/۱۱۷۹	۰/۱۲۱۷	۰/۱۲۵۵	۰/۱۲۹۳	۰/۱۳۳۱	۰/۱۳۶۸	۰/۱۴۰۶	۰/۱۴۴۳	۰/۱۴۸۰	۰/۱۵۱۷
۰/۴	۰/۱۵۵۴	۰/۱۵۹۱	۰/۱۶۲۸	۰/۱۶۶۴	۰/۱۷۰۰	۰/۱۷۳۶	۰/۱۷۷۲	۰/۱۸۰۸	۰/۱۸۴۴	۰/۱۸۷۹
۰/۵	۰/۱۹۱۵	۰/۱۹۵۰	۰/۱۹۸۵	۰/۲۰۱۹	۰/۲۰۵۴	۰/۲۰۸۸	۰/۲۱۲۳	۰/۲۱۵۷	۰/۲۱۹۰	۰/۲۲۲۴
۰/۶	۰/۲۲۵۸	۰/۲۲۹۱	۰/۲۳۲۴	۰/۲۳۵۷	۰/۲۳۸۹	۰/۲۴۲۲	۰/۲۴۵۴	۰/۲۴۸۶	۰/۲۵۱۸	۰/۲۵۴۹
۰/۷	۰/۲۵۸۰	۰/۲۶۱۲	۰/۲۶۴۲	۰/۲۶۷۳	۰/۲۷۰۴	۰/۲۷۳۴	۰/۲۷۶۴	۰/۲۷۹۴	۰/۲۸۲۳	۰/۲۸۵۲
۰/۸	۰/۲۸۸۱	۰/۲۹۱۰	۰/۲۹۳۹	۰/۲۹۶۷	۰/۲۹۹۶	۰/۳۰۲۳	۰/۳۰۵۱	۰/۳۰۷۸	۰/۳۱۰۶	۰/۳۱۳۳
۰/۹	۰/۳۱۵۹	۰/۳۱۸۶	۰/۳۲۱۲	۰/۳۲۳۸	۰/۳۲۶۴	۰/۳۲۸۹	۰/۳۳۱۵	۰/۳۳۴۰	۰/۳۳۶۵	۰/۳۳۸۹
۱/۰	۰/۳۴۱۳	۰/۳۴۳۸	۰/۳۴۶۱	۰/۳۴۸۵	۰/۳۵۰۸	۰/۳۵۳۱	۰/۳۵۵۴	۰/۳۵۷۷	۰/۳۵۹۹	۰/۳۶۲۱
۱/۱	۰/۳۶۴۳	۰/۳۶۶۵	۰/۳۶۸۶	۰/۳۷۰۸	۰/۳۷۲۹	۰/۳۷۴۹	۰/۳۷۷۰	۰/۳۷۹۰	۰/۳۸۱۰	۰/۳۸۳۰
۱/۲	۰/۳۸۴۹	۰/۳۸۶۹	۰/۳۸۸۸	۰/۳۹۰۷	۰/۳۹۲۵	۰/۳۹۴۴	۰/۳۹۶۲	۰/۳۹۸۰	۰/۳۹۹۷	۰/۴۰۱۵
۱/۳	۰/۴۰۳۲	۰/۴۰۴۹	۰/۴۰۶۶	۰/۴۰۸۲	۰/۴۰۹۹	۰/۴۱۱۵	۰/۴۱۳۱	۰/۴۱۴۷	۰/۴۱۶۲	۰/۴۱۷۷
۱/۴	۰/۴۱۹۲	۰/۴۲۰۷	۰/۴۲۲۲	۰/۴۲۳۶	۰/۴۲۵۱	۰/۴۲۶۵	۰/۴۲۷۹	۰/۴۲۹۲	۰/۴۳۰۶	۰/۴۳۱۹
۱/۵	۰/۴۳۳۲	۰/۴۳۴۵	۰/۴۳۵۷	۰/۴۳۷۰	۰/۴۳۸۲	۰/۴۳۹۴	۰/۴۴۰۶	۰/۴۴۱۸	۰/۴۴۲۹	۰/۴۴۴۱
۱/۶	۰/۴۴۵۲	۰/۴۴۶۳	۰/۴۴۷۴	۰/۴۴۸۴	۰/۴۴۹۵	۰/۴۵۰۵	۰/۴۵۱۵	۰/۴۵۲۵	۰/۴۵۳۵	۰/۴۵۴۵
۱/۷	۰/۴۵۵۴	۰/۴۵۶۴	۰/۴۵۷۳	۰/۴۵۸۲	۰/۴۵۹۱	۰/۴۵۹۹	۰/۴۶۰۸	۰/۴۶۱۶	۰/۴۶۲۵	۰/۴۶۳۳
۱/۸	۰/۴۶۴۱	۰/۴۶۴۹	۰/۴۶۵۶	۰/۴۶۶۴	۰/۴۶۷۱	۰/۴۶۷۸	۰/۴۶۸۶	۰/۴۶۹۳	۰/۴۶۹۹	۰/۴۷۰۶
۱/۹	۰/۴۷۱۳	۰/۴۷۱۹	۰/۴۷۲۶	۰/۴۷۳۲	۰/۴۷۳۸	۰/۴۷۴۴	۰/۴۷۵۰	۰/۴۷۵۶	۰/۴۷۶۱	۰/۴۷۶۷
۲/۰	۰/۴۷۷۲	۰/۴۷۷۸	۰/۴۷۸۳	۰/۴۷۸۸	۰/۴۷۹۳	۰/۴۷۹۸	۰/۴۸۰۳	۰/۴۸۰۸	۰/۴۸۱۲	۰/۴۸۱۷
۲/۱	۰/۴۸۲۱	۰/۴۸۲۶	۰/۴۸۳۰	۰/۴۸۳۴	۰/۴۸۳۸	۰/۴۸۴۲	۰/۴۸۴۶	۰/۴۸۵۰	۰/۴۸۵۴	۰/۴۸۵۷
۲/۲	۰/۴۸۶۱	۰/۴۸۶۴	۰/۴۸۶۸	۰/۴۸۷۱	۰/۴۸۷۵	۰/۴۸۷۸	۰/۴۸۸۱	۰/۴۸۸۴	۰/۴۸۸۷	۰/۴۸۹۰
۲/۳	۰/۴۸۹۳	۰/۴۸۹۶	۰/۴۸۹۸	۰/۴۹۰۱	۰/۴۹۰۴	۰/۴۹۰۶	۰/۴۹۰۹	۰/۴۹۱۱	۰/۴۹۱۳	۰/۴۹۱۶
۲/۴	۰/۴۹۱۸	۰/۴۹۲۰	۰/۴۹۲۲	۰/۴۹۲۵	۰/۴۹۲۷	۰/۴۹۲۹	۰/۴۹۳۱	۰/۴۹۳۲	۰/۴۹۳۴	۰/۴۹۳۶
۲/۵	۰/۴۹۳۸	۰/۴۹۴۰	۰/۴۹۴۱	۰/۴۹۴۳	۰/۴۹۴۵	۰/۴۹۴۶	۰/۴۹۴۸	۰/۴۹۴۹	۰/۴۹۵۱	۰/۴۹۵۲
۲/۶	۰/۴۹۵۳	۰/۴۹۵۵	۰/۴۹۵۶	۰/۴۹۵۷	۰/۴۹۵۹	۰/۴۹۶۰	۰/۴۹۶۱	۰/۴۹۶۲	۰/۴۹۶۳	۰/۴۹۶۴
۲/۷	۰/۴۹۶۵	۰/۴۹۶۶	۰/۴۹۶۷	۰/۴۹۶۸	۰/۴۹۶۹	۰/۴۹۷۰	۰/۴۹۷۱	۰/۴۹۷۲	۰/۴۹۷۳	۰/۴۹۷۴
۲/۸	۰/۴۹۷۴	۰/۴۹۷۵	۰/۴۹۷۶	۰/۴۹۷۷	۰/۴۹۷۷	۰/۴۹۷۸	۰/۴۹۷۹	۰/۴۹۷۹	۰/۴۹۸۰	۰/۴۹۸۱
۲/۹	۰/۴۹۸۱	۰/۴۹۸۲	۰/۴۹۸۲	۰/۴۹۸۳	۰/۴۹۸۴	۰/۴۹۸۴	۰/۴۹۸۵	۰/۴۹۸۵	۰/۴۹۸۶	۰/۴۹۸۶
۳/۰	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۸	۰/۴۹۸۸	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۹۰	۰/۴۹۹۰
۳/۱	۰/۴۹۹۰	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۳
۳/۲	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵
۳/۳	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۷
۳/۴	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۸
۳/۵	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸
۳/۶	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۷	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۸	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۹	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰

د مثال په ډول که چیرې $z = 1.56$ وي لومړی هغه سطر پیدا کړئ چې په هغه کې z د 1.5 معادل دی، که چیرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسیږو چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کیږو چې د منحنې د لاندې اړوندې سطحې د $z = 0$ څخه تر $z = 1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې: $P(0 \le Z \le 1.56) = 0.9406$

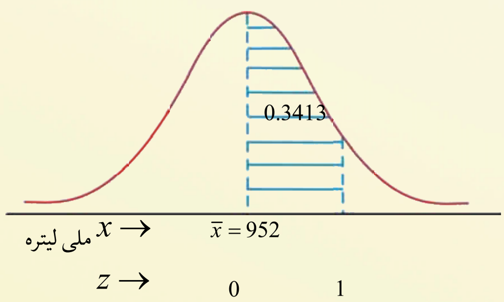
لومړی مثال: د څښلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستگاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي‌لیټر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي‌لیټره او معیاري انحراف یې 4 ملي‌لیټره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي‌لیټرو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

حل: لومړی z د x له جنسه پیداکوو:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د x د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د z تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلیږي. د لوست د پیل له جدول(2) څخه په ګټه اخیستنې سره لرو $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټرو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټره نوشابه لري؛ یعنې:



$$\begin{aligned} P(0 \le z \le 1) &= P(z_2) - P(z_1) \\ &= P(1) - P(0) \\ &= 0.3413 - 0 \\ &= 0.3413 \end{aligned}$$

دویم مثال: په یوه خاص مضمون کې د زده‌کوونکو د نمبرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال سټنډرډ جدول څخه په ګټه اخیستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فیصدي پیدا کړئ.

حل: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسیمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو: $z_1 = \frac{54-70}{8} = -2$

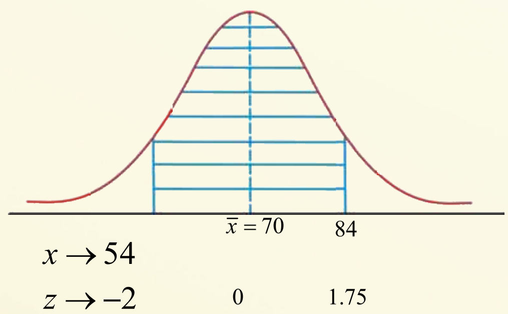
د $x = 84$ لپاره لرو: $z_2 = \frac{84-70}{8} = 1.75$

څرنګه چې د سټنډرډ نورمال منحني لاندې مساحت په یو محدود انټروال کې په پام کې نیول شوی دی؛ نو له نورمال سټنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$
$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$

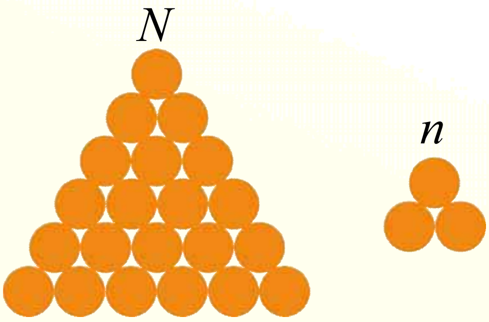


پوښتنې

د لومړي مثال په پام کې نیولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فیصده له 948 څخه تر 956 ملي‌لیټرو پورې نوشابه لري.

نمونه اخېستل

په دې متل کې((موټی د خروارو نمونه ده)) څرنګه تحليلوئ.



$N =$ جامعه $\Rightarrow n = ?$

فعاليت

- که چيري وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو ونې(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړانديز کوئ.
- نمونه په دوو ډولونو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه، تاسې ددې نمونو کومې يوې ته غوره‌والی ورکوئ؟ ولې؟
- د نمونه‌ګيری لپاره ښکاره خپل دلايل شته ايا کولای شي يو يا دوه دليلونه يې ووايئ.
- سوچ کولای شي چې د اوسط او معيار انحراف عددي ځانګړنې چې د ټولنې د توزيع او د نمونې د توزيع لپاره ورڅخه ګټه اخېستل کېږي، يو شان وي.
- ايا د نمونه‌ګيري او ليدل شويو ناخاپه متحولينو د مقدارونو ترمنځ توپير شته؟

له پورتني فعاليت څخه پوهېږو چې د نمونه اخېستنې بېلې بېلې لارې شته دی.

ــ ناخاپه نمونه اخېستنه: د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.

ــ سيستماتيک نمونه اخېستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

ــ طبقه‌يي نمونه اخېستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

ــ خوشه‌يي نمونه اخېستنه: که ټولنه ډېره لويه وي، هغه په بېلابېلو ځانګو وېشو او له هري ځانګې څخه يوه نمونه ټاکو.

ــ د هري ټولنې عددي ځانګړنې(اوسط معيار انحراف) ته د ټولنې پارامتر وايي.

ــ د هري ټولنې د عددي نمونه‌ګيري ځانګړنې(اوسط معيار انحراف) ته آماره وايي.

ــ د نمونې پايلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناخاپه متحولينو په بڼه په پام کې نيسو.

ــ د $x_1, x_2 \ldots x_n$ ناخاپه متحولونو يوه ناخاپه نمونه د x تصادفي متحول ويل کېږي.

که چیرې تابع یې په دې ډول تعریف شوې وي.

$$f(x_1, x_2)\ldots, x_n) = f(x_1)\cdot f(x_2)\ldots f(x_n)$$

مثال: فرض کوو چې په یوه قطی کې 5 سپینې او 7 تورې ګلولې وي، د قطی له منځ څخه 5 ګلولې یوه یوه ځای په ځای کول(د یوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوې ناخاپه نمونې تصادفي متحولین په ژبه بیان کړئ او اړونده توزیع یې پیدا کړئ.

حل: د x_1, x_2 او x_3 ناخاپه متحولونو په پام کې ونیسئ په لومړۍ پړاو کې د x_1 ناخاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې ګلولې ټاکلو په لومړي پړاو کې ځانته غوره کړئ. او د x_2 متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې او د (1) عدد سپینه ګلوله لپاره په دویم پړاو کې ځانته غوره کوي په همدې بنه د x_3 ناخاپه متحول په دویم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپینه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د x_1, x_2 او x_3 ناخاپي متحولونه د برنولي ناخاپه متحولین دي. د $p = \frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i = 1, 2, 3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = (\frac{5}{12})^{x_i}\,(1-\frac{5}{12})^{1-x_i}$$

څرنګه چې نمونه اخیستنه ناخاپه ده، نو د x_1, x_2 و x_3 ناخاپه متحولین یو له بل څخه بېل دی نو تابع یې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1 \ , \ x_2 = x_2 \ , \ x_3 = x_3)$$

په یاد ولرئ چې د عناصرو هره ناخاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلې نه دي، هغې ته آماره وایي.

پوښتنې

1. که $N = 25$ د یوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناخاپه نمونه یې پیدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناخاپه نمونې سره له مثال بیان کړئ؟
3. فرض کوو چې د یوې ټولنې څخه مو ناخاپه نمونه رانیولې ده څه سوچ کوئ چې ددې نمونې سره به څه وکړو؟

د نمونې د اوسط توزیع

دولت غواړي وپوهېږي چې د یوه ښار د وګړو متوسطه ګټه(سپما) څومره ده؟

ددې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس باید ددې محاسبه شوې مقدار څخه کوم کمیت تخمین کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

فعالیت

- د لاندې data د دریو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پایله راښیي:

نوم	داود	سلیمان	پژواک
نمبرې	2	3	4

- د نمبرو د احتمال توزیع یې ولیکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معیار انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نیولو) ارایه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښیئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزیع جدول(د $\bar{x}$ د کثرت د تو زیع جدول) ولیکئ.
- د $\bar{x}$ د کثرت توزیع جدول مستطیلي ګرام رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو د اوسط سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, ...x_n$ د یوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناڅاپه نمونه وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې احتمال توزیع عبارت دی له:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	

د $\bar{x}_n$ متحول د اوسط، $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وریانس، $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نمونې وریانس $S_n{}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونه‌یي وریانس اوسط، $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونه‌یي اوسط، μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وریانس S^2 د نمونې وریانس دی.

مثال: د لاندې ټولنه، ټولې دوه ګونې ممکنه ناڅاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1,2,3$$

الف: د x د احتمال توزیع ولیکئ.

ب: د ټولنې اوسط او وریانس حساب کړئ.

ج: د $\bar{x}$ د توزیع جدول تشکیل او مستطیلي ګراف یې رسم کړي.

د: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

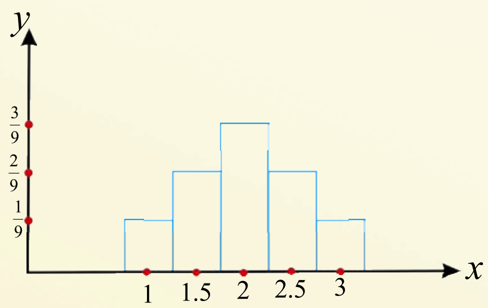
ج: لاندې جدول ټولې دوه‌ګونې ممکنو نمونو د ځای نیول، د سره او هر یوه اوسط راښيي:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\bar{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د $\bar{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول ښودل کېږي:

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د $\bar{x}$ مستطیلي ګراف په لاندې ډول رسمېږي:



د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1\cdot\frac{1}{9} + 1.5\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} + 2.5\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2\cdot\frac{1}{9} + (1.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 2^2\cdot\frac{3}{9} + (2.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^{\ 2} = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

نو لیدل کېږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^{\ 2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

پوښتنه

1. فرض کوو چې یوه ټولنه د $6,4,2$ او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزیع، اوسط او وریانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته ددې ټولنې څخه دوه ګونې ناڅاپه نمونه د ځای په نیولو سره وټاکئ او د نمونې توزیع اوسط یعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي ګراف یې رسم کړئ، د $\bar{x}$ اوسط او وریانس حساب کړي.

د مرکزي لېميټ قضيه

پوهېږو چې د ټولنې کميت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کميت ته نمونه يي اوسط ويل کېږي د $S_{\bar{x}}$ او $\bar{x}$ د نمونو احصائيه دکوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختيار کې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=?$$

فعاليت

- که د لويې ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}$ و، د کوچنۍ ټولنې حجم په $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\frac{S}{\sqrt{n}}$ (چې N د ټولنې عناصر شمېر، n د نمونه عناصرو شمېر او S معيار انحراف دی) وښيو څه وخت کېدای شي چې د لويې ټولنې حجم له کوچنۍ ټولنې سره برابر شي؟
- که د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نورمال توزيع يو له بل څخه بيل وي آيا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزيع لرونکی ده؟
- که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ناخاپه ځانګړي متحولونه په يو شان توزيع شوی وي او د μ اوسط لرونکی وي او ς^2 وريانس وي وېلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ د توزيع وريانس او اوسط څو دی؟

د پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

که چيرې N د يوې لويې ټولنې د μ متناهي اوسط او δ^2 متناهي وريانس لرونکی يوه ناخاپه n ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط يعني $\bar{x}$ د تقريبي نورمال توزيع د $\mu_{\bar{x}} = \mu$ اوسط $\delta_{\bar{x}}^{\,2} = \frac{\delta^2}{n}$ وريانس دی او $Z = \frac{\bar{x}-M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناخاپه متحول د نورمال سټنډرډ توزيع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضريب د N د لويو قيمتونو لپاره (1) ته نږدې کېږي. په حقيقت کې يې لېميټ هغه وخت چې $n \to \infty$ وکړې، برابر له (1) سره دی.

مثال: د یوه لوی ټولګی څخه چې د زده‌کوونکو د ریاضي مضمون نمبرو نورمال توزیع د 71 اوسط او معیار انحراف یې 9 دی. یوه 9 تایې نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 څخه زیات وي حساب کړئ. همدارنګه که چیرې په تصادفي ډول یو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې یې له 80 څخه زیاتې وي محاسبه کړئ.

حل: څرنګه چې $\bar{x}$ د نورمال توزیع د μ په اوسط او معیار انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(\bar{x}>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}>\frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}}=P(z>3)$$

$$=1-P(z)\leq 3=1-0.9987=0.0013$$

همدارنګه د $n=1$ لپاره لرو:

$$P(\bar{x}>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\delta}>\frac{80-71}{9}=P(z>1)$$

$$=1-P(z)\leq 1=1-0.8413=0.1587$$

پاملرنه:

د $P(z)$ قیمت له (2) جدول څخه په لاس راوړو.

پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د یوه ماشین په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزیع اوسط یې $\mu = 250gr$ او معیاري انحراف یې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغې احتمال محاسبه چې د ناخاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تایي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

د نمونه‌يي توزيع نسبت

د A په يوه ښارکې n کسان غواړي د B يوکس د ښاروال په صفت وټاکي، که دا کسان تر پوښتنې لاندې راشي او x د موافقو کسانو شمېر وښيئ ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دې.

فعاليت

- که چيرې x د دوو جملو توزيع لرونکی وي، کولای شو وليکو چې:

$$f(x) = \binom{n}{x} P^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ ....$$

که چيرې $\hat{P} = \frac{x}{n} \Rightarrow x = n\hat{P}$ وي د x قيمت په تعويض سره په پورتنی فورمول کې $f(\hat{P})$ وليکئ.

- د $\hat{P} = \frac{x}{n}$ په فورمول کې که د x تصادفي متحول د n ناځاپه متحولينو د $x_1, x_2, ..., x_n$ له مجموع څخه تشکيل شوی وي، $\hat{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړيکه لري؟

که چيرې x ناځاپه متحول، n د برنولي د آزمايښتونو مجموعه، P د هر آزمايښت برياليتوب احتمال وي په دې صورت کې $\hat{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x) = n\,p$ اوسط $V(x) = n\,p\,q$ د x ناځاپه متحول وريانس وي.

د دوه جمله‌يي د توزيع په پاملرنې سره د $\hat{P}$ توزيع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} p^{n\hat{p}} (1-p)^{n(1-\hat{p})} \qquad \hat{P} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ...,1$$

د $\hat{P}$ ناځاپه متحولينو اوسط $(Expected\ Value)$ او وريانس په لاندې صورت ليکلای شو:

$$\mu_p = E(\hat{P}) = P$$

$$\delta^2 \hat{P} = V(\hat{P}) = \frac{p\,q}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال ستندرډ توزيع يې عبارت دی له:

$$z = \frac{x - n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}}$$

مثال: د کالیو د ښه والي احتمال $P=0.3$ دی، یوه ساده ناخاپه نمونه $n=6$ ګونه ټاکو که چیرې x د ناقصو کالیو ښودونکی وي، د x او $\hat{P}$ احتمال توزیع ولیکئ.

حل: د x ناخاپه متحول د دوه جمله‌یي توزیع د $P=0.3$ او $n=6$ پارامترونه وي.

$$f(x)=P(X=x)=B(x,6,0.3) \qquad x=0,1,\ldots,6$$

د دوه جمله‌يي توزیع جدول څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزیع د جدول احتمال یې لیکو:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د $\hat{P}$ ناخاپه متحول د $0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6}$ او 1 قیمتونه نیسي:

$$P(\hat{P}=0)=P(X=0)=0.1176$$

$$P(\hat{P}=\frac{1}{6})=P(X=1)=0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P}=\frac{x}{n})=P(X=x)$$

او د $\hat{P}$ د احتمال توزیع عبارت دی:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

په پورتني مثال کې:

$$P(\hat{P}\le 0.6)=P(x\le 3.6)=P(x\le 3)=\sum_{x=0}^{3}B(x,6,0,3)=0.9294$$

اویا:

$$P(\hat{P}\le 0.27)=P(x\le 1.62)=P(x\le 3)=0.1176+0.3025=0.4201$$

پوښتنې

1. ددې احتمال چې د یوه تن د غوښتنلیک فرم په پوره ډول پرته له غلطۍ(تېروتنې) څخه ډک کړي $P=0.7$ وي، یوه نمونه د $n=200$ ګونه د استخدام ډک شوی فارمونه مو ټاکلې وي.

- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د ± 00.05 داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولوېږي.
- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د 0.6 څخه زیات وي.

د څپرکي مهم ټکي

- ناڅاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د یوې تابع په عنوان په احصائیه او احتمالاتو کې تر ې نه ګټه اخېستل کېږي.
- د یوه مجزا ناڅاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعریف ناحیه یې هغه عددونه دي چې ناڅاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قیمتونو ناحیه سره د تعریف د ناحیې د عناصرو اړونده احتمالونه ګڼون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعریف ناحیه کې هغه عددونه ګڼون ولري چې د x ناڅاپه متحول یې ځانته غوره کوي او د قیمتونو ناحیه یې د $f(x)$ ټول تصویرونه موجود دي.
- د یوه پیوسته(متمادي) متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعریف ناحیه یې د x ټول پیوسته(متمادي) مقدارونه غوره کړي او دقیمتونو ناحیه یې $F(x)$ ټول تصویرونه وي.
- د x مجزا ناڅاپه متحول اوسط Expected value او وریانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزیع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جمله‌یي توزیع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$
- د دوه جمله‌یي توزیع اوسط او معیاري انحراف عبارت له: $S=\sqrt{n\,p\,q}$, $\bar{x}=n\,p$
- د پواسن د احتمال توزیع یو مجزا احتمال توزیع ده چې فورمول یې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که N له یوې نورمالې جامعې څخه د n خلې(تایي) ناڅاپه نمونه وټاکو د $\bar{x}$ د نمونه‌یي اوسط آماره د نورمال توزیع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta_{\bar{x}}^2=\dfrac{\delta^2}{n}$ او $z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د سټنډرډ نورمال توزیع سره ده.
- د نورمال توزیع: د نورمال توزیع شکل له زنګولې سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزیع کې مرکزي شاخصونه یو له بل سره برابر دي او د پیوسته ناڅاپه متحولونو د ناحیې تعریف محدود دی چې د احتمال توزیع یې عبارت ده له:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\delta})^2}$$

چې μ د ټولنې اوسط او δ د ټولنې معیاري انحراف دی.

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د a او b په فاصلو کې کولای شو له دې انتیګرال څخه ګټه واخلو:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$

- که چیرې x د دوه جملهیي توزیع د n شمېرد برنولي پر له پسې ازمایښتونه، P د کامیابی احتمال او $q = 1-p$ د هر ازمایښت د نابریالیتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائیه د اوسط نمونه او د x ناخاپه متحول وریانس په ترتیب سره عبارت دی له: $\hat{P} = \frac{x}{n}$, $E(x) = np$ او $V(x) = npq$

همدارنګه د دوه جملهیي توزیع، اوسط، وریانس او د سټنډرډ توزیع او $\hat{P}$ ناخاپه متحول په ترتیب سره عبارت دی له:

$$E(\hat{P}) = P \quad , \quad f(\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} P^{n\hat{P}} q^{(1-P)}$$

$$z = \frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad , \quad V(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$$

- ددې $z = \frac{x-\mu}{\delta}$ اړیکې په واسطه کولای شو چې هره احصائیوي مجموعه یې د نورمال توزیع لرونکی وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه.
- د نمونه ګیری طریقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناخاپه نمونهګیري، منظمه نمونهګیري، ګروپي نمونهګیري، خوشهیي نمونه ګیري.
- د x نمونې ناخاپه متحولونو اړوند تابع په دې صورت تعریفېږي.

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots\ldots, f(x_n)$$

- که چیرې x د ټولنې یوه ناخاپه نمونه د $f(x)$ د احتمال تابع په لرلو سره وي $E(\bar{x}_n) = \mu$ اوسط، $V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$ د اوسط وریانس، δ^2 د ټولنې وریانس او S^2 ته د نمونو وریانس وایي.

د څېړکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونیسئ:
   - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښیئ.
   - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌یي فضا سره نسبت ورکړئ.
   - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال ولیکئ.
2. که چیرې د یوې جوړې بوټونو د نقیصي احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معیار انحراف په یوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پیدا کړئ.
3. د یوه شرکت په ګدام کې 500 پایې کمپیوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه یې 50 پایې نقص لري، یو اخېستونکی له هغې څخه 10 پایې کمپیوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغې 8 پایې جوړ اخېستی وي؟
4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معیار انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې ګټه واخلئ. لومړی یو افقي محور رسم کړئ او د $\bar{x}$, $\bar{x}+s$, $\bar{x}-s$, $\bar{x}+2s$ او $\bar{x}-2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته یو ټکی د h اختیاري جګوالی په اندازه د $\bar{x}$ له پاسه په پام کې ونیسئ او $\bar{x}+s$ له پاسه یو ټکی د $0.6h$ په جګوالي وټاکئ، یعنې یو ټکی چې مختصات یې $(\bar{x}+s, 0.6h)$ څرنګه چې د نورمال منحني متناظر دی، همدا عمل په ځانګړي توګه په $\bar{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\bar{x}+2s$, $\bar{x}-2s$ د پاسه دوه ټکې د h او $0.15h$ په جګوالي په پام کې ونیسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني د دقیق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه ګټه واخلئ. په پایله کې دا ټکي د یوه منحني په واسطه وصل او ووایئ چې دا منحني په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.
5. په یوه روغتون یوه څېړنه راښیي چې د مراجعینو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
   - د روغتون د مراجعینو د احتمال توضیح د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پیدا او ګراف یې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمېده ده؟
   - ددې توزیع د اوسط او معیار انحراف مقدار په لاس راوړئ.
   - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زیات روغتون ته مراجعه کړې وي؟ ولې؟
6. فرض کوو چې د یوه کتاب د یوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزیع یا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال یې مطلوب دی داسې چې:

- حد اقل یوه ټاپيي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقيقاً 5 ټاپيي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټاپيي تيروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیار انحراف يې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
- کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال يې څومره دی.
- د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
- که چیرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
- د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.

8. که چیرې $x_1, x_2, \ldots, x_n$ د x ناڅاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چیرې x یو ناڅاپه متحول او د μ او δ^2 پارامترونه وي آیا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع μ او δ^2 مجهول وي آیا پورتنیو تابعګانو ته احصائیه ویلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګټون لري، که د عمرونـو اوږدوالـی یـې د ساعتونو پـه حساب سره عبارت لـه 108 104 112 103 دي یوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کوو چې د x ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښیئ:
- د x د احتمال توزیع ولیکئ.
- $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د یوه ښار د وګړو د ګټې اندازه چې د غیرنورمال توزیع $\mu=90$ افغانی اوسط او د 25 افغانی معیار انحراف سره دی که چیرې د 225 کسیز د وګړو د یوې نمونې د ګټې مجموعه لـه 2100 افغانیو څخه زیاتـه وي، احتمال يې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وګړي د A نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n=50$ دوه‌ګونې یـوه نمونه کې حداقل 60% وګړي د A نوماند طرفدار وي.

13. پـه 12 مثـال کـې کـه چیـرې $P=0.4$ وي، یعنـې ددې احتمـال چـې یـو وګـړی د A کاندیـد طرفـدار وي 0.4 دی، یوه $n=200$ ګونه نمونه وټاکو نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وګـړي د A کاندیـد طرفدار وي.

اتم څپرکی

احتمالات

بېلې شوې(غیرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې

په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دويم نـل څخه پـه وار سره اوبه په څمکه توييږي ويـلای شـئ چې لـه دې نلونـو څخه په ځمکه د اوبو د څاڅکو د تويېدو توپير په څه کې دی؟

فعاليت

- د يو رمل په اچولو سره ويلای شي چې د نمونه يي فضا ټولې ممکنې پايلې کومې دي؟
- آيا د ونې څخه د يو يې پخې مڼې د لوېدلو وخت وړاندوينه کولای شئ چې ورروسته له څو ثانيو، دقيقو او يا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د مڼې د لوېدلو نمونه يي فضا وليکئ.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه يي فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د مڼې د لوېدلو وخت څنګه پرتله کولای شي.

د پورتنی فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راځي:

د يوې ناخاپه تجربې نمونه يي فضا عبارت له هغه ټاکلي او يا نـا ټاکلي سټ يـا مجموعې څخه ده، چې د ځينې عناصرو يې د شمېر وړ، او ځينې يې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر يې د شمېر(countable) او تشخيص وړ وي د پرېکړې يـا ګسـسته(شـليدلي) نمونه يي فضا يا متصل په نامه يادېږي او هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د نښتې(پيوسته) يا متمادي نمونه يي فضا په نامه يادېږي.

لومړی مثال: له لاندې نمونه يي فضاګانو څخه کومه يوه نښتی(پيوسته) او کومه يوه پرېکړې(ګسسته) ده.

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د 8 او 12 ترمنځ د يوه حقيقي عدد ټاکل.

ج: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

د: د يوې کُرې د حرارت د يوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي ګرېډ څخه تر 1000 درجود سانتي ګرېډ پورې.

هـ : د 30° او 45° زاويو ترمنځ يوه زاويه ټاکل.

حل: څرنګه چې (الف او ج) نمونه‌يي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړ شوي، نو پرېکړې يا ګسسته فضا ولې (ب، د او هـ) له نامحدود حقيقي عددونو څخه تشکيل(جوړ) چې د شمېر وړ نه دي، نو نښتي يا پيوسته فضاګانې دي.

دويم مثال: خيبر د کور د ګلانو د اوبولو لپاره يو واټرپمپ اخيستي دي.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونيسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالي نمونه-يي فضا چې کيداى شي هر مثبت حقيقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې د کار د مودې قيمت شي، په دې ډول د داسې ناڅاپه حادثې پېښېدل صفر هر حقيقي عدد کيداى شي چې دا نمونه‌يي فضا يوه غير متمادى، نښتي يا پيوسته نمونه يي فضا ده؛ يعني { t د واټرپمپ د ورانېدو وخت، $S = \{t \in IR : t \geq 0$ چې په پورتنې نمونه يي فضا کې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالي راښيي.

يادونه:

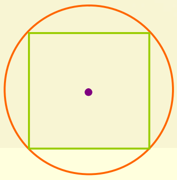
1- د لومړي مثال الف او ج جزونه کې محدودې نمونه‌يي فضاګانو څخه بحث شوى چې عناصر يې د شمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌يي فضاګانې ذکر شوې چې عناصر يې د شمېر وړ نه دي، نو ځکه ټول مثبت حقيقي عددونه اخېستلاى شي.

2- په دويم مثال کې نمونه‌يي فضا متصل يا غير محدوده ده چې د حقيقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

پوښتنې

1- يو غشي وېشتونکى د يوه دايروي د سک په دننه چې ورانګه يې r ده، په پام کې ونيسي. د غشي د لګېدو ځاى د دايرې په دننه کې چې مرکز ته نږدې ولګېږي، د هغې نمونه يې فضا ارايه کړې. وواياست چې دا څنګه يوه نمونه يې فضا ده.

2- په مخامخ شکل کې په ناڅاپي يا تصادفي ډول د دايرې په دننه کې يو ټکى و ټاکئ، احتمال ددې شته چې مطلوب ټکى د مربع په دننه کې وي.



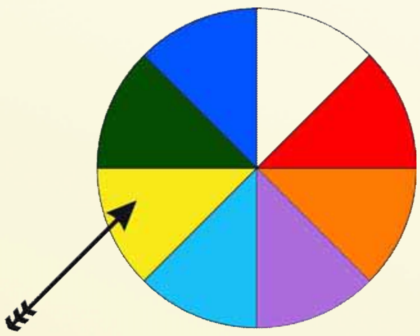
3- يو طبيعي دوه رقمي عدد و ټاکئ، هغه احتمال پيدا کړئ چې عدد د 4 مضرب وي.

هم چانسه پېښې

د يوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او يا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دي؟
د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس يو له بل سره څه اړيکه لري؟

فعاليت

د مخامخ شکل په څېر يوه دايره په پام کې ونيسئ، که چېرې په راکړې شوې دايره کې يو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنګه ناحيه او شين رنګه ناحيه کې د غشي لګېدل يو له بل سره څه اړيکه لري؟
- د غشي د لګېدو چانس دکچه په اړه د نارنجي او سپينو رنګونو سره په پرتله باندې څه ويلای شې؟
- د غشي د لګېدو د چانس کچې په تور رنګ څومره ده؟
- د تجربې، نمونه‌يې فضا يې وليکئ.
- لومړني ناخاپه پېښې لست کړي او د هر يو احتمال پيدا کړي دي؟
- د لومړنيو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ويلای شې؟

د پورتنی فعاليت له اجرا کولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو:

هغه لومړنی ساده پېښې چې د هغوي د پېښېدلو چانس په يوې تجربې په اجرا کولو کې سره برابر وي، د هم چانسه پېښو په نامه يادېږي. لکه:

که چېرې $S = \{e_1, e_2 ,...e_n\}$ يوه نمونه يې فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i = 1,2...n$ لپاره يوه ناخاپه لومړني پېښه ده که $0 \le P(\{e_i\}) \le 1$, $i = 1 , 2 , ...n$ دي.

سربېره پر دې د لومړنيو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له يوه سره ده.

$$P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + ... + P(\{e_n\}) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1$$

مثال: څلور تنه په یوه لوبه کې ګډون کوي. تاسې د هر یوه د ګټلو احتمال پیداکړئ په داسې حال کې چې نمونه‌یي فضا هم چانسه وي.

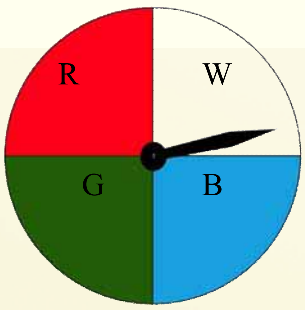
حل: که چېرې $S = \{a, b, c, d\}$ نمونه یې فضا وي، نو د هرې ناڅاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دی.

لرو چې: $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$

پاسنۍ لومړنۍ پېښې سره هم چانسه دي.

پوښتنې

1- مخامخ شکل په پام کې ونیسئ، که چېرې د عقربې(ستنې) د درېدلو احتمال په آسماني او سپین رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د درېدلو احتمال به څومره وي؟



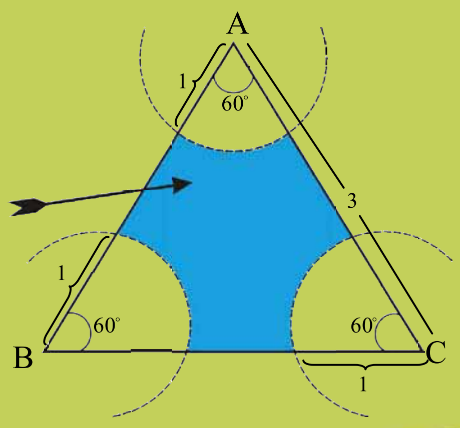
2- لاندې د کثرت جدول د رمل یوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونیسئ. هغه احتمال پیداکړئ، چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

د رمل شمېره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

3- د رمل یوه دانه داسې ډکه شوې چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که یو ځل په شرط وهلو کې (5) شمېره ټاکلې وي، د هغې احتمال پیداکړئ.

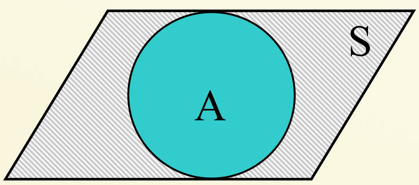
د نښتې یا پیوسته(متمادي) فضاګانو احتمال

د یوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه یې 3 واحده ده، یو غشي ولو، ددې احتمال چې د غشي د لګېدلو ټکې د مثلث د هر رأس نه د یو واحد په اندازه لوی وي، څو دی؟



فعالیت

- آیا ویلای شي چې د یوې ټوټه کرښې، د یوې مستوي د یوې برخې او یا د فضا د حجم څو ټکې یو پر بل پسې موجود دی؟
- د هغو ټکو د پېښېدلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لویې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د A او د S د ساحو د مساحتونو د نسبت سره څه اړیکه لري؟



- آیا کولای شئ دا مسئله په فضا د یوه جسم حجم د یوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عمومیت ورکړئ؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله لاسته راځي.

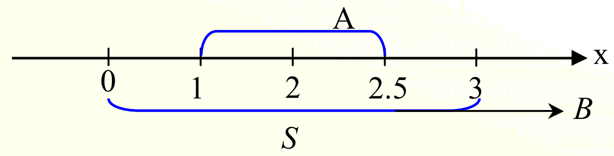
پیوسته(متمادي) نمونه‌یي فضا د نامعینو ټکو مجموعه ده، چې شکل یې د اعدادو په محور، په مستوي کې لکه سطح او یا په فضا کې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو ښوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پیدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او یا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

معمولاً د اعداد له محور څخه په ګټه اخیستنې سره د x یو متحول، د یوه مساحت د یوې برخې لپاره د دوو متحولونو لکه x او y او په همدې ترتیب د حجمونو لپاره له دریو متحولونو لکه x, y او z څخه ګټه اخلو.

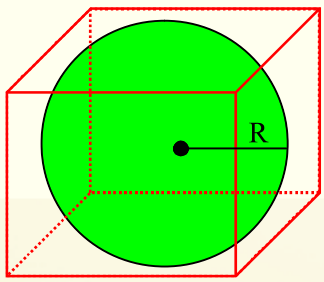
لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د x یو ټکې په ناڅاپي یا اتفاقي ډول ټاکو پیدا کړئ ددې احتمال چې $1 < x < 2.5$ وي؟

حل: د حقیقي اعدادو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغې پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نیولو سره د A پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A)=\frac{\text{د } A \text{ ټوټه کرښې اوږدوالی}}{\text{د } B \text{ ټوټه کرښې اوږدوالی}}=\frac{2.5-1}{3-0}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$



دویم مثال: په ناڅاپه ډول یو ټکی د یوه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې 2 واحده وي ټاکو پیدا کړئ ددې احتمال چې نوموړی ټکی د مکعب د محاطي کُرې په دننه کې وي.



حل: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې a واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع $r=\frac{a}{2}$ کېدای شي نو:

A ناڅاپه پېښه د کرې د حجم او S نمونه یې فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

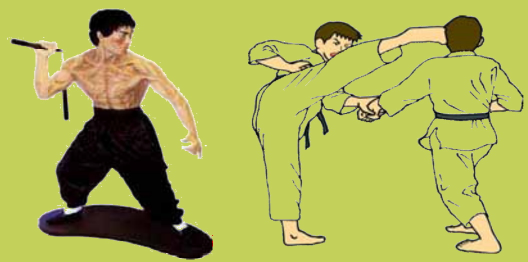
$$r=\frac{a}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$P(A)=\frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3}=\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

1- د حقیقي اعدادو په محور د A او B دوه ټکي په ناڅاپي یا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $0\le A\le 3$ او $-2\le B\le 0$ وي، ددې احتمال پیدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې یو ټکي په ناڅاپي یا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمال پیدا کړئ، چې نوموړی ټکی نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نږدې وي.



مشروط احتمال

له یوه ولایت څخه (20) تنه نارینه او ښځینه زده کوونکي د کانکور په آزموینه کې د طب پوهنځي ته بریالي شوي دي، د هغوی له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کارته بازان وي. د نومړو محصلینو له مینځ څخه په اتفاقي ډول یو تن ټاکو احتمال د دې پیدا کړئ، چې:

- ټاکل شوی محصل یوه کارته بازه نجلي وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلي په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بریالي شوي؟

فعالیت

له 2500 زده‌کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې له 80% زده‌کوونکو څخه یې 70% نارینه زده‌کوونکي وي او په مطالعه کولو عادت ولري، که د ټولو زده‌کوونکو لپاره احتمال یو شان وی، د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده‌کوونکي ټاکل د ښوونځی له زده‌کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M : نارینه زده‌کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده‌کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده‌کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده‌کوونکي یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده‌کوونکی د ټاکلو احتمال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

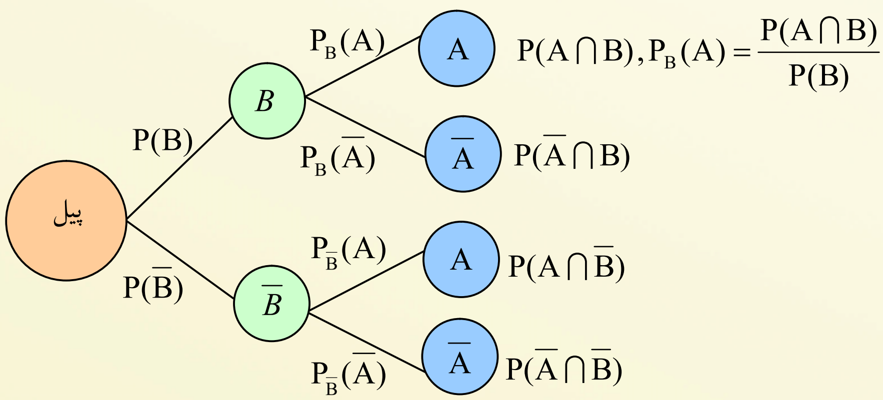
د لاندې احتمالات وېش له حاصل څخه عبارت دی که چیرې Ω ټوله نمونه‌یي فضا او $|\Omega|$ نمونـه‌یي فـضا د عناصرو شمیر وي، نو لرو:

$$P_R(M)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{|M\cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}}=\frac{|M\cap R|}{|R|}=$$ د هغه نارینه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پیښې له احتمـال څخه عبارت دي چې ټاکلي زده‌کوونکي نارینه وي، په دې شرط چې هغـه پـه مطالعه عادت وي.

تعریف: که چیرې S نمونه‌یي فضا A او B د نمونـه‌یي فـضا دوې ناخـاپي پیـښې وي، پـه داسې حال کې چې $P(B)\neq 0$ وي. په دې حالـت کې نومـوړی احتمـال یعنـي $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ چې د A ناخـاپي پیـښې احتمال نظر د B ناخاپي پیښې ته مشروط احتمـال بلل کېږي.

د پورته تعریف په پام کې نیولو سره نظر د مسیر لومړي قاعدې ته د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



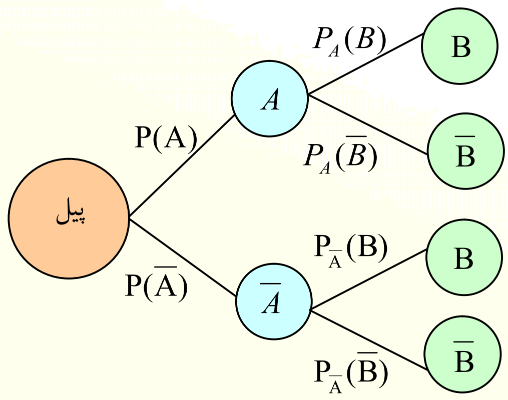
د مشروط احتمـال له فورمول څخه لاندې مهمې پایلې په لاس راځي:

1- د مسیر د لومړی قاعدې څخه لرو: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

مسیر له دویمې قاعدې د څخه په‌ګټه اخیستنې سره لرو: $P(A\cap \bar{B})=P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)$

$$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)$$

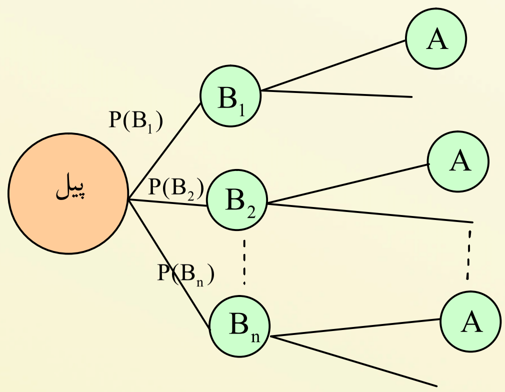
2- ونه‌ییزه(درختي) دیاګرام له مخې $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$



له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B)=\dfrac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$

3- که چیرې نوموړی حالت د Ω نمونه یي فضا ناځاپي پیښو د $B_1, B_2, ..., B_n$ اختیاري ویش لپاره عمومیت ورکړو د ونې په ډول د دیاګرام د په پام کې نیولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}\qquad i=1,2,...,\ n$$



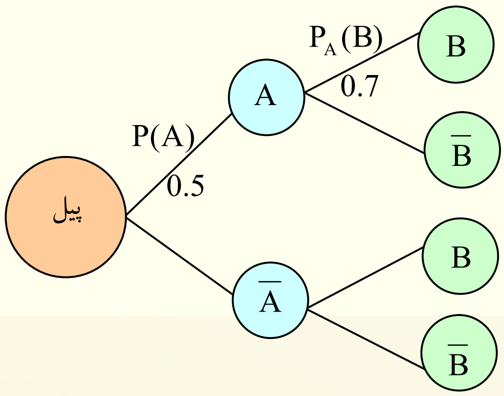
لومړی مثال: یو زده کوونکي ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د ګادي څخه ګټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسیږي. په منځني ډول نوموړي 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضریږي که چیرې پیښې:

A: د ګادي په واسطه راتلل B: په ټاکلي وخت رسیدل

وي په دي صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته يعنې $P_B(A)$ مطلوب دي؟

حل: د نوموړي احتمال د پيداکولو لپاره د ونهييز يا درختي دياګرام په پام کې نيولو سره نظر فورمول ته په لاندې ډول په لاس راځي:

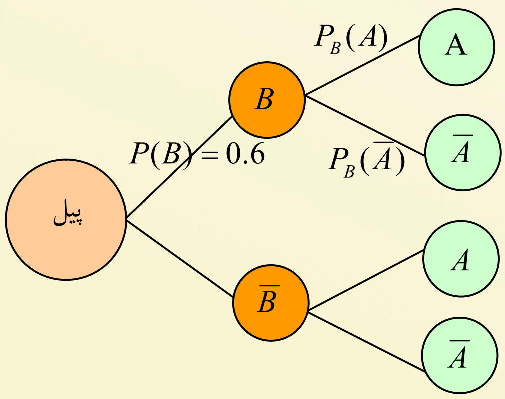
$$P_B(A)=\frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)}=\frac{0.5\cdot 0.7}{0.6}=0.5833=58.33\%$$



نو په دې اساس د ګاډي په واسطه د رسېدلو احتمال په دې شرط چې په ټاکلي وخت په ښوونځي کې وي 58.33% سلنې سره برابر دی.

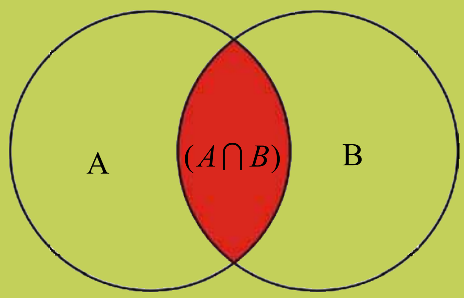
پوښتنې

له لاندې دياګرام څخه په ګټه اخيستنې سره د مشروط احتمال په ټاکلي وخت رسېدل ښوونځي ته په دې شرط چې د ګاډي په واسطه سرته رسيدلي وي، يعنې $P_A(B)$ د ناڅاپه پيښې احتمال ښوونځي ته په ټاکلي وخت رسيدل، په دې شرط چې د ګاډي په واسطه نه وي راغلي يعنې $P_A(B)$ مطلوب دي.



د حاصل ضرب اصل

د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال په B ، د A او B ناخاپه پیښې احتمال یو له بل سره څه اړیکه لري؟



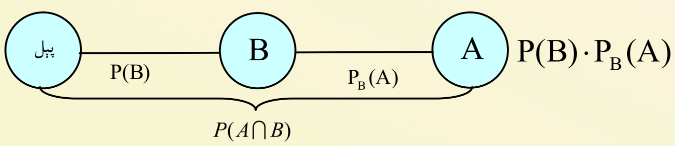
فعالیت

- که چیرې A او B دوې ناخاپه پیښې د S په نمونه یي فضا کې وي.
- د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال B ته ولیکئ.
- د ونهییز دیاګرام څخه په ګټه اخیستنې سره د $P(B) \cdot P_B(A)$ قیمت په لاس راوړئ.
- د $(A \cap B)$ ناخاپه پیښو احتمال د A او B ناخاپه پیښو څخه او یا د A مشروط له B څخه په ګټه اخیستنې سره ولیکئ.
- د فعالیت د دوو پورتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړې.
- آیا کولای شو چې موضوع د ډیرو ناخاپه پیښو لپاره عمومیت ورکړو.

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

د S په یوه نمونه یي فضا کې د A او B د دوو ناخاپه پیښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف په پام کې نیولو سره لرو: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$

دا مسئله کولای شو چې د ونهییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړو:



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مطلب د درېو A، B او C پېښو لپاره په لاندې ډول پراخوو.

$$\text{آغا} \xrightarrow{P(A)} A \xrightarrow{P_A(B)} B \xrightarrow{P_{A\cap B}(C)} C$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{P(A\cap B\cap C)}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنی قاعده د حاصل ضرب په نامه یادېږي او کولای شو، هغه د یو شمېر اختیاري ناخاپي پېښو لپاره هم په لاس راوړو.

مثال: د B_1, B_2 او B_3 درېو ولایتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر یوه لپاره د ټاکنو د ګډون کوونکو فیصدي او د جمهوري ګوند برخه فیصدي ورکړل شوي ده؟

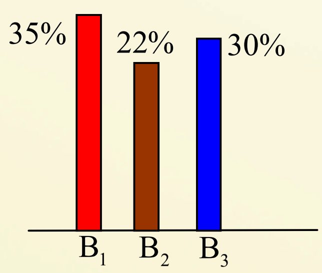
په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکي او یا رایې اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلی وي.

حل: په لاندې ډول ناخاپي پېښې تعریف او نوموو:

V : هغه رایې ورکوونکي چې د جمهوري ګوند یې ټاکلي دي.

B_i : د ولایت رایې ورکوونکي B_i – (i-ام) … i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.

ولایت	راې ورکوونکي فیصدي	جمهوري ګوند ته رایې ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30



د B_i $(i=1,2,3)$ ناخاپه پېښې په حقیقت کې یې د S نمونه یي فضا یو ویش جوړ کړي چې د هغوی لپاره صورت نیسي.

1- B_i یو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه یي فضا لپاره $S = B_1\cup B_2\cup B_3 = \bigcup_{i=1}^{3} B_i$ دی، نو $B_i\cap V$ $(i=1,2,3)$ پېښه یو له بل سره یو په یو مستقل د هغوی لپاره صورت نیسي. $V = \bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

له دې اړيکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره وليکو:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

تعريف: که چيرې د $B_1, B_2, ..., B_n$ ځرنګه چې $P(B_i)\neq 0$ وی $i=1,...n$ پيښنو عمومي حالت د S په نمونه‌يي فضاکې يوه پېښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه ياد او د A اختياري ناڅاپه پيښې لپاره لرو:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعريف، د اصل حاصل ضرب له قضيې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نيولو څخه لاندې فورمول چې د بائيز(Baye's) د فورمول په نامه يادېږي، په آسانی سره په لاس راځي، داسې چې B_i چې $i=1,...n$ د S نمونه يي فضا يو پېښې لپاره چې $P(B_i)\neq 0$ ، $i=1,...n$ د A د ناڅاپه پيښې احتمال چې $P(A)\neq 0$ سره وي، لرو:

د بائيز (Bayex)فورمول:

$$\boxed{P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}}$$

د بائيز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n=2$ لپاره $B_1=\overline{B}, B_2=\overline{B}$ په پام کې ونيسو، په حقيقت کې B_1 او B_2 د S نمونه يي فضا پېښې وي لرو:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

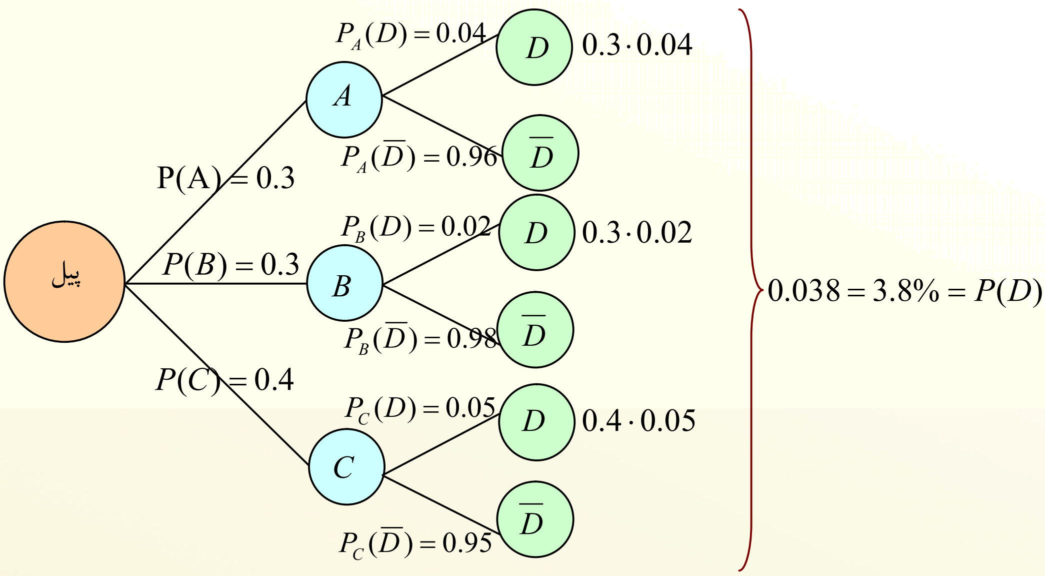
پورتنی فورمول د $n=2$ د بائيز له فورمول څخه عبارت دي.

مثال: په يوه فابريکه کې د A، B او C درې ماشينونه په ترتيب سره 30% ، 30% او 40% برخه د برق ګروپونه توليدوي. که چيرې په ماشينونو کې د ګروپونو د خرابېدو کچه په ترتيب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې يو اخېستل شوي ګروپ وران يا خراب وي.

b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی ګروپ د C ماشین پورې اړه لري.

c) یو نوی تولید شوی ګروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B ماشین پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C)=\frac{P(D\cap C)}{P(D)}=\frac{P(C)\cdot P_C(D)}{P(D)}=\frac{0.4\cdot0.05}{0.038}=\frac{0.02}{0.038}=0.526=52.6\%$$

د c جز:

$$P_{\overline{D}}(B)=\frac{P(\overline{D}\cap B)}{P(\overline{D})}=\frac{P(B)\cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{0.3\cdot0.98}{0.3\cdot0.96+0.3\cdot0.98+0.4\cdot0.95}$$

$$=\frac{0.294}{0.288+0.294+0.38}=\frac{0.294}{0.962}=0.3056=30.56\%$$

پوښتنې

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شپږ واړه مخونه یوازې د 6 شمېره وهل شوې ده. د هغوې له منځ څخه یوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوې او درې ځلې اچول شوې ده. درې ځلې 6 راغلې. پیدا کړئ، هغه احتمال چې په ټاکل شوې دانه به سم ډول شمېرې وهل شوې وي؟

د ناڅاپه پېښو استقلالیت

له مشروط احتمال څخه پوهیږو چې د A او B دوو ناڅاپو پېښو یا حادثو د B د پېښې پېښدل د A په پېښه تاثیر اچوي په دې سبب لازمه ده چې د احتمال د محاسبې په وخت کې د A او B پېښه په پام کې ونیسو.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناڅاپه پېښې پېښدل پر B ناڅاپه پېښې اغېزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمال د $A\cap B$ پېښې له احتمال سره څه اړیکه لري.

تعریف: د A او B دوې ناڅاپه پېښې چې یوه پر بله اغېزه لرونکې نه وي د ناڅاپه مستقلو پېښو په نامه یادېږي.

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلې پېښې چې د S نمونه یي فضا کې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
- د مشروط احتمال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلې دوې پېښې وي د P(A) او $P_B(A)$ احتمالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
- د $P(A\cap B)$ ناڅاپه پېښې احتمال له څه سره مساوي دي؟
- د $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ د پېښو د احتمال د فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B ګډ ټکی ونه لري څه پایله اخلې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پېښې مستقلې بلل کېږي که چیرې:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

2: که چیرې A او B پېښې دګډو ټکو لرونکې نه وي، نو

$A\cap B=\emptyset\Rightarrow P(A\cap B)=0$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (د جمع د حاصل اصل)

لومړی مثال: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترګو رنګ او ذکاوت یو پر بل پرته له اغېزې فرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناڅاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوي تن یو هوښیار ذکي زده کوونکي وي.

B: ټاکل شوي زده کوونکي تورې سترګې ولري.

پیدا کړې هغه احتمال چې ټاکل شوي زده کوونکي په ناڅاپه توګه هوښیار ذکي او توري سترګې ولري.

حل: ددې لپاره چې ټاکل شوي زده کوونکي هوښیار او تورې سترګې ولري لیکلای شو:

څرنګه چې $P_B(H) = P(H)$ بر سیره پردې $P_B(H) = \dfrac{P(B \cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت: د A_1 ، A_2 ، $A_n, \ldots$ ، $(n \geq 2)$ ناڅاپه پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو یا څو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً یوه له بلې سره تړلي نومول کېږي.

پایله:

1: پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ او $A \cap \overline{B}$ ا ناڅاپه پېښو احتمالي پایلې د A او B پېښو لپاره چې احتمالونه یې a او b وي، په آسانۍ په لاس راوړو. د A او B د مستقل والی څخه پوهېږو چې د A او $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ او B په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم یوه له بلې څخه مستقلې دي؛ نو لرو:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B) = a \cdot b$	$P(A \cap \overline{B}) = a(1-b)$	a
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B) = b(1-a)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = (1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: د A ، B او C درې ناڅاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

دویم مثال: په یوه کڅوړه کې دوې سپینې او دوې تورې مرۍ پرتې دي. دوې مرۍ یوه له بلې پسې لـه کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مرۍ د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

b- پرته له دې چې مرۍ واپس کېښودل شي.

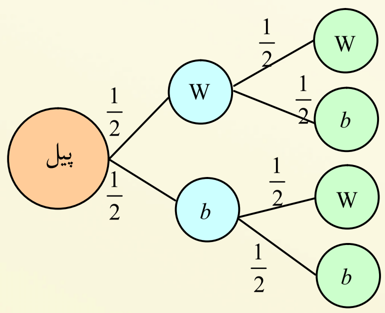
د A پېښه: په لومړي ځل سپینه مرۍ راووزي. B: دویم ځل مرۍ سپینه وي.

له یوې بلې څخه مستقلې یا تړلې (وابسته) دي.

حل:

a) خرنګـــــــه چـــــــې $P(A)=\frac{1}{2}$ او $P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وي او

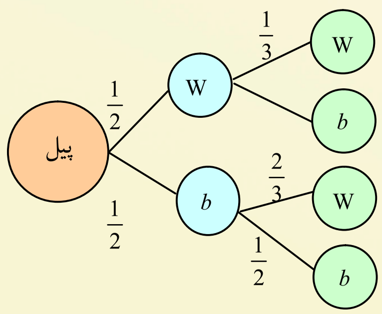
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$ دي نو A او B یوه له بلې څخه مستقلې دي.



b) خرنګه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2},\ P(A)=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B یوه له بلې څخه تړلې یا وابسته دي.



دریم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځایونه چې په نښه شوي دي ډک يې کړئ:

	B	$\overline{B}$	
A	0.12	$P(A\cap\overline{B})=?$	?
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=?$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$	?
	?	0.6	

حل: څرنګه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$

$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

په همدې ترتیب په جدول کې د قیمتونو په وضع کولو سره مسئله تکمیلیږي.

پوښتنې

یو سټ چې عناصر یې $5,3,2$ او 30 دی د یوه رقم د انتخاب احتمال یې 0.25 دی په ناخاپي ډول له نوموړي سټ څخه یو رقم انتخابوو، که چیرې A_k ناخاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوی او د تقسیم قابلیت په k ولري، آیا A_2 ، A_3 او A_5 ناخاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

بېلې شوې(غیرمتمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر او تشخيص وړ وي، د **پرېکړې يا** گسسته نمونه‌يي فضا په نامه يادېږي؛ لکه د رمل يا د سکې اچولو تجربي نمونه‌يي فضا.

نښتي(متمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر وړ نه وی د پيوسته يا متمادی نمونه‌يي فضا په نامه يادېږي چې د حقيقي اعدادو پر محور د فاصلې په بڼه او يا په فضا کې د هندسي شکلونو يا حجمونو په ډول څرګندېږي.

هم چانس پېښې:

د يوې نمونه يي فضا لومړني پيښې چې د هغوي پېښې د تجربي په پای کې په برابر احتمال پېښېږي، هم چانسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمال مجموع له يوه سره مساوي ده.

د نښتي(پيوسته) فضا احتمال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د يوې پام وړ ناڅاپي پيښې لپاره په يوه تجربي نمونه‌يي فضا کې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دی د متصلې فضا له احتمال څخه.

مشروط احتمال:

کـه چيرې A او B د S، د نمونـه‌يي فـضا دوې ناڅاپـه پېـښې چـې $P(B) \neq 0$ وي پـه دې حالـت کـې $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ته د A ناڅاپه پيښې د مشروط احتمال په نامه يادېږي پـه دې شـرط چې د B پېښـه لـه مخکې پېښه شوې وي.

يوه له بلې څخه مستقلې پېښې:

د A او B دوه ناڅاپه پېښې يوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي، که چيرې:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

د څېړکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه يي فضاګانو څخه کومه يوه سره نښتي يا پيوسته او کومه يوه پرېکړې يا ګسسته دی؟

الف: د يوې رمل دانې اچولو تجربه

ب: د يوې سکې د اچولو تجربه

ج: د يو غشي لګېدل په يوه دايره

د: د يوې فلزي ميلي د اوږدوالي زياتېدلو تجربه نظر حرارت ته

2. د يو چارتراش چې اوږدوالي يې L دي په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال ددي شته دي چې د کين اړخ اره شوي برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچني وي.

3. د يوه خصوصي شرکت يو کارګر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نږدې تم ځاى کې چې د مامورينو په ګاډي کې د کارته د تګ لپاره ګډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځاى ته رسېږئ څومره احتمال ددې شته چې نوموړې تن له 5 دقيقو څخه لږ منتظر پاتي شي.

4. د $[0.3]$ ترلې فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، پيدا کړې ددې احتمال چې د اعدادو مجموعه د 5 څخه کوچنی او د 2 څخه لويه وي.

5. په ناڅاپه ډول يو ټکي د مخروط دننه چې د قاعدې وړانګې يا شعاع يې R او جګوالی $R\sqrt{3}$ دي ټاکو، پيدا کړې ددې احتمال چې ټکي د محاطي کرې دننه په دې مخروط کې قرار لري.

6. د يو خودکار قلم خرابېدل دوه دليلونه لري:

1- د ميخانيکيت خرابېدل

2- د خودکار د نيچې خرابېدل

که چېرې د يو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دليل (1) ،شميره وي مساوي په 0.05 او د دويم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وځېږئ: چې دوه پورتنی دلايل مستقلې او يا غير مستقلې پېښې دي؟

7. خيبر غواړي هغه څلور کليګانې چې په جيب کې يې لري او سره يو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دريمې کلي له آزمويلو سره چې له جيب څخه يې را باسي د قلف اړونـد کلي وي، په هغه صورت کې چې:

a) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جيب کې اچوي.

b) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جيب کې اچوي.