د پوهنې وزارت

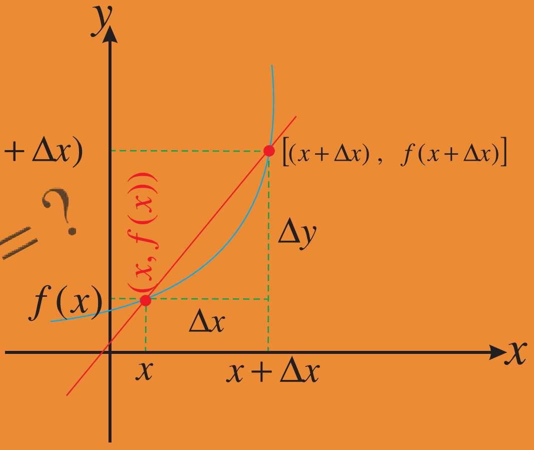
د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساینس د مرکز معینیت

د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

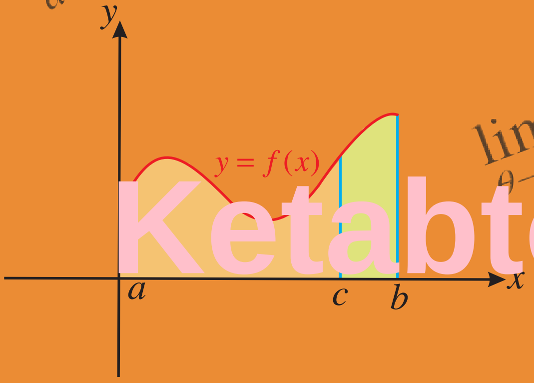
ریاضي ۱۲

ټولګی

$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$



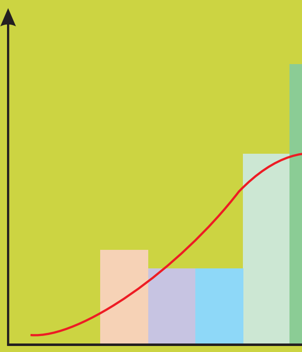
$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$



$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$

د چاپ کال: ۱۳۹۰

ریاضي ۱۲ ټولګی



Ketabton.com

د پوهنې وزارت

د تعليمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساينس د مرکز معينيت

د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف

لوی رياست

رياضي ۱۲

ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکوالان:

- پوهیالی حمدالله شیرزی وردگ د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- مؤلف مهناز توخي د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړې
- پوهنمل طلاباز حبیب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- پوهندوی خالقداد فیروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- سرمؤلف میرنقیب الله د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

علمي او مسلکي ایډیټ:

- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.
- سرمؤلف نظام الدین د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال رحیمه هدایت‌زی د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړې

د ژبې ایډیټ:

- محمدقدوس ذکوخیل د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

دیني، سیاسي او کلتوري کمیټه:

- مولوي عبدالوکیل د اسلامي تعلیماتو علمي غړی.
- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.

د څارنې کمیټه:

- دکتور اسدالله محقق د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس مرکز معین
- دکتور شېر علي ظریفي د تعلیمي نصاب د پراختیا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستیال عبدالظاهر گلستاني د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس

طرح او ډیزاین:

ولید «نوید» نسیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحيم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی | دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د توري | هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی | د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو | د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي | پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي | هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي | لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به | لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مودی رهبر | وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزیر پیغام

ګرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختیا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعلیمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختګ او ټولنې د اړتیاوو له مخې رامنځته کیږي. څرګنده ده چې علمي پرمختګ او ټولنیزې اړتیاوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعلیمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښایي چې تعلیمي نصاب د سیاسي بدلونونو او د اشخاصو د نظریو او هیلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتیب شوی دی. علمي ګټورې موضوعګانې پکې زیاتې شوې دي. د زده کړې په بهیر کې د زده کوونکو فعال ساتل د تدریسي پلان برخه ګرځېدلې ده.

هیله من یم دا کتاب له لاربښوونو او تعلیمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د میتودونو د کارولو له لارې تدریس شي او د زده کوونکو میندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکیفیته ښوونه او روزنه کې پرله پسې ګډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هیلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې بریاوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ ګران ښوونکي د تعلیمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤولیت په ریښتوني توګه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زیار کاږي چې د پوهنې تعلیمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دین له بنسټونو، د وطن دوستی د پاک حس په ساتلو او علمي معیارونو سره سم د ټولنې د څرګندو اړتیاوو له مخې پراختیا ومومي.

په دې ډګر کې د هېواد له ټولو علمي شخصیتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له میندو او پلرونو څخه هیله لرم چې د خپلو نظریو او رغنده وړاندیزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تألیف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتیب کې یې مرسته کړې، له ملي او نړیوالو درنو مؤسسو، او نورو ملګرو هېوادونو څخه چې د نوي تعلیمي نصاب په چمتو کولو او تدوین او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې یې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفیق

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړلیک

سرلیک — مخونه

لومړی څپرکي لېمیټ ۱-۴۰

- د لېمیټ مفهوم
- د ښي او کیڼې خوا لېمیټونه
- د لېمیټ خاصیتونه
- د نسبتي تابعګانو لېمیټونه
- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل
- د $\infty - \infty$ او $0\cdot\infty$ مبهم شکلونه
- د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ مبهم شکلونه
- د مثلثاتي تابعګانو لېمیټ
- د تابعګانو متمادیت
- د متمادي تابعګانو خاصیتونه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دویم څپرکی مشتقات ۴۱-۸۲

- د یوې تابع مشتق
- د مشتق هندسي تعبیر
- د مشتق قوانین
- د مرکبو تابعګانو مشتق
- د مثلثاتي تابعګانو مشتق
- ضمني مشتقات
- لوړې مرتبه مشتقات
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دریم څپرکی د مشتق د استعمال ځایونه ۸۳-۱۳۲

- د یوې تابع بحراني ټکی(اعظمي او اصغري)
- د انعطاف د ټکي ټاکل د دویم مشتق څخه په ګټې اخېستنې سره
- د منحنيګانو رسمول
- د توابعو د ګرافونو مجانبونه
- د هوموګرافیک تابعګانو ګراف
- د دریمې درجې یو مجهوله تابع ګراف
- د رول قضیه
- د متوسط قیمت قضیه
- د لوپیتال قاعده
- د بحراني ټکو تطبیق
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک | مخونه

څلورم څپرکی انتيګرال ۱۳۳-۱۷۲

- د ريمان مجموعه
- د انتيګرال مفهوم
- د غيرمعين انتيګرال خواص
- معين انتيګرال
- د معين انتيګرال خواص
- د مشتق او انتيګرال اساسي قضيې
- په تعويضي طريقې سره انتيګرال نيونه
- قسمي انتيګرالونه
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

پنځم څپرکی د لوګاريتمي او اکسپوننشيل تابعګانو مشتق او انتيګرال ۱۷۳-۱۹۸

- د لوګاريتمي او اکسپوننشيل تابعګانو مشتق
- د معکوسو تابعګانو مشتق
- قسمي کسرونه
- د اکسپوننشيل تابعګانو انتيګرالونه
- د لوګاريتمي تابعګانو انتيګرال
- د قسمي کسرونو په مرسته د انتيګرال محاسبه
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

شپږم څپرکی د انتيګرال تطبيقات ۱۹۹-۲۲۲

- د يوې منحني د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه
- د دوو محصور شويو منحنيګانو ترمنځ د مساحت محاسبه
- د دوراني جسمونو د حجم محاسبه
- د قوس د اوږدوالی محاسبه
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

اووم څپرکی احصائيه ۲۲۳-۲۶۰

- د احتمال د تابع توزيع
- د دوه جملهيي توزيع او د برنولي آزمايښت
- د پواسن د احتمال توزيع
- د نورمال توزيع
- د نورمال توزيع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول
- نمونه اخيستل
- د نمونې د اوسط توزيع
- د مرکزي لېميټ قضيه
- د نمونهيي توزيع نسبت
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

اتم څپرکی احتمالات ۲۶۱-۲۸۲

- پرېکړې او نښتې فضاګانې
- هم چانسه پيښې
- د نښتو يا پيوسته فضاګانو احتمال
- مشروط احتمال
- د حاصل ضرب اصل
- د ناخاپه پيښو استقلاليت
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

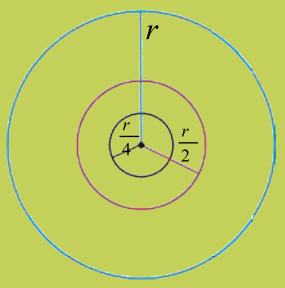
لومړی څپرکی

لیمیټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ مفهوم

په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاعګانې يې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې تـه نـور خـو ځلې دوام ورکولای شئ؟



فعالیت

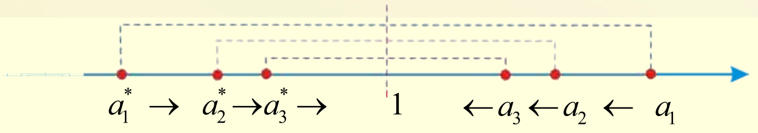
د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د a_1 او a_1^* موقعیت(ځای) وښیئ.
- ویلای شئ، چې د a_2 او a_2^* قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا دباندې پراته دي.
- د a_1 ، a_1^* او a_2 ، a_2^* منځنی ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پراوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ، چې د a_3 او a_3^* د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ، چې د n د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د a_n او a_n^* ردیفونه کومو قیمتونو ته نږدې کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله:لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لیمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

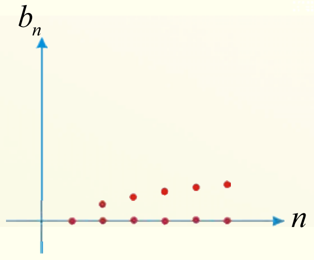
مثال: لاندي ورکړل شوي رديفونه د n د تر ټولو لويو قيمتونو لپاره کوم قيمت ته تقرب کوي يا نږدی کېږي، موضوع په ګرافيکي ډول تشريح کړئ، په داسې حال کې چې:

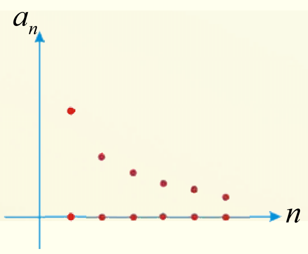
$$a_n = (\frac{2n+3}{n}) \; ... (i) \qquad b_n = (\frac{n-1}{n}) \; ... (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \; ... (iii)$$

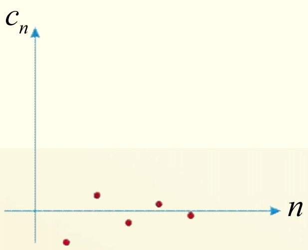
حل: پوهېږو چې د n د بېلابېلو قيمتونو لپاره ګرافيکي ښودنه په لاندې ډول ده.

n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\to 1$

n	1	2	3	4	5	6	7	$\to \infty$
a_n	5	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{7}$	$\to 2$







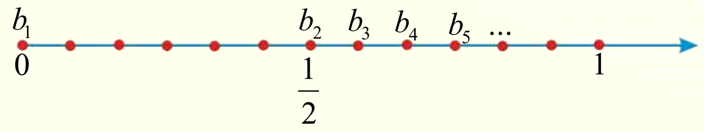
n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
c_n	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\to 0$

له پورتينو ګرافونو څخه ليدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د n د قيمتونو په زياتېدو سره د ترادفونو قيمت يوه ټاکلې عدد ته نږدې کېږي، لکه د a_n ترادف د 2 عدد ته د b_n ترادف د 1 عدد ته او د c_n ترادف صفر ته تقرب کوي، چې ترادف ته د ډېرو لويو قيمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانۍ سره روښانه کېږي.

د ترادف د قيمتونو له جدول څخه د لېميټ قيمت څرګندېږي، د لېميټ په شته والی کې رديف يوه ټاکلې عدد ته نږدې کېږي. دغه ټاکلې عدد ته لېميټ (limit) وايي. چې په lim سره ښودل کېږي.

ددي لپاره د $b_n = \frac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نيسو، لرو چې:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	…



او يـــــــا كـــــــه چيـــــــري $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$ .... I ، $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}$ .... II او $2, 4, 6, \ldots, 2n$ .... (III) د عددونو ترادفونه په پام کې ونيسو، ليدل کېږي چې که n د بې نهايت لورې ته نږدې شي، نـو د I تـرادف صـفر تـه نـږدې کېـږي د II تـرادف د (1) عـدد تـه نـږدې کېـږي د III تـرادف د بې‌نهايت(∞) ته نږدې کېږي.

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x پـه اختيـاري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی يا پـه لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x \to a} x = a \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چيرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجـود وي پـه داسـې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x : a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چيرې د x د قيمتونو يو متزايد تـرادف موجـود وي پـه داسـې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x : a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x \to a \iff (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

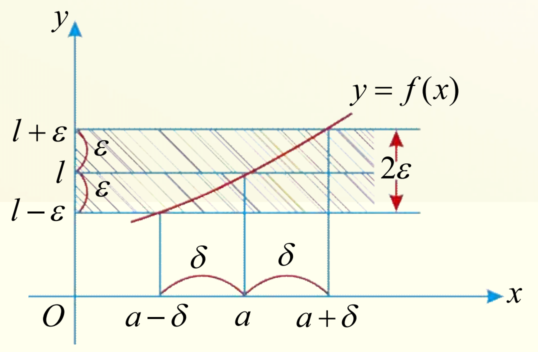
لومړی بېلګه: د x متحول د 9 عدد ته نږدی کړئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

حل:

$x: 9.1\ ,\ 9.01\ ,\ 9.001\ ,\ 9.0001\ ,\ \dots \to 9^+$

$x: 8.9\ ,\ 8.99\ ,\ 8.999\ ,\ 8.9999\ ,\ \dots \to 9^-$

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر ترلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کیدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدی شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدی کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې یې لیکو: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ یا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow (|x-a| \to 0 \Rightarrow |f(x)-l| \to 0)$$

پوښتنه

د $f(x) = 2x$ تابع کې په ګرافیکي ډول وښیئ چې که x د (3) عدد ته نږدې شي $f(x)$ له (6) سره مساوي کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي او کيڼ خوا لميټونه

مخامخ تصوير ته پاملرنه وکړئ ووایئ چې مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نږدې کېدای شو.

فعاليت

په لاندې جدول کې د $x \neq 1$ ، $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ته ځينې قيمتونه ورکړل شوي.

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$

- د تابع ګراف رسم کړئ.
- که x د (1) عدد ته نږدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نږدې کېږي.

د پورتني فعاليت څخه لاندې پايله ليکلای شو:

د ښي خوا لمټ: د $f(x)$ تابع د a په عددکې د ښي لورې l_1 لميټ لري که چيرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو کوچنی عدد د $\delta > 0$ موجود وي داسې چې که: $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l_1$$

د کيڼ خوا لميټ: د $f(x)$ تابع د a په عددکې د کيڼ لورې l_2 لميټ لري که چيرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ يو عدد پيدا شي داسې چې $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ ته نږدې شي د l لميټ لري، يعنې: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه بېلګه: و ښیئ چې $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کیڼي خوا لیمیټونه تر څېړنې لاندې نیسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

لیدل کېږي چې د ښی خوا او کیڼې خوا لیمیټونه سره مساوي دي، نو $\lim\limits_{x\to 3}=\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ دي.

دویمه طریقه: د لیمیټ د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \;:\; |x-a|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta \;\Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لیمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لیمیټ لري، یعنې: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

پوښتنه

وښیئ چې د $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لیمیټ نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ خاصیتونه (Properties of Limit)

د مخامخ مساوات دلیمیټونو دواړه خواوې کله چې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$

فعالیت

ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که x د 2 عدد ته نږدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لیمیټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لیمیټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \pm \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \div \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x\to a} f(x) = A$ او $\lim_{x\to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x\to a} Kf(x) = K \lim_{x\to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}\ ,\ \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}\ ,\ \lim_{x\to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

بې نهایت کوچنی تابعګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نږدې شي بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که چیرې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

1- ددې لپاره چې $\lim_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د یوه ثابت عدد b او یوې بې نهایت کوچني تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په حیث وښودل شي، یعنې:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=b+\varepsilon(x)\\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چیرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نږدې شي، بې نهایت کوچنی تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهایت کوچنی تابعګانو مجموعه بیا هم یوه بې نهایت کوچنی تابع ده.

3- د بې نهایت کوچنیو تابعګانو د ضرب حاصل بیا هم یوه بې نهایت کوچنی تابع ده.

4- که چیرې $\varepsilon(x)$ یوه بې نهایت کوچنی تابع او $u(x)$ داسې یوه تابع وي چې لیمیټ یې صفر نه وي، نو د $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع یوه بې نهایت کوچنی تابع ده.

مثال:

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، یوه بې نهایت کوچنی تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نږدې شي بې نهایت کوچنی تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

مثالونه: د تېرو خاصیتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$$

$$2)\ \lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

د پورتنیو مثالونو له حل څخه د لیمیټ یو خاصیت داسې بیان او ثبووو:

1. د څو تابعګانو د مجموعې لیمیټ د نوموړو هرې تابع د لیمیټونو له مجموعې سره مساوي دي، یعنې: که چیرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابعګانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

ثبوت: که $\lim_{x\to a}f(x_2)=b_2$ ، $\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1$ او ε_1 او ε_2 بې نهایت کوچنی تابعګانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{aligned} f(x_1)&=b_1+\varepsilon_1\ \ .....\ I\\ f(x_2)&=b_2+\varepsilon_2\ \ .....\ II\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنگه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهایت کوچنیو تابعگانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهایت کوچنیو تابعگانو مجموعه او تفاضل بیاهم یوه بې نهایت کوچنی تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

2. د دوو یا څو تابعگانو د ضرب د حاصل لیمیټ د نومړو تابعگانو د لیمیټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1 \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2 \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

څرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچنی عددونه دي، نو د ضرب حاصل یې د b_1 او b_2 سره او همداشان په خپلو کې بې‌نهایت کوچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابعگانو د نسبت لیمیټ د هغو تابعگانو د لیمیټونو له نسبت څخه عبارت دی؛ لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\quad,\quad g(x)=b_2\neq 0$$

ثبوت:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b_1+\varepsilon_1 \\ g(x)=b_2+\varepsilon_2 \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفریق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې ε_1 او ε_2 ډېرې کوچنی مثبت عددونه($0<\varepsilon<1$)دي، نو کله چې $x \to a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي، چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

د ساندویچ قضیه: که چیرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابعګانې د هر x لپاره په یوه غیر تړلې انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a} f(x)=b=\lim_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x)=b$ دی.

مثال: که د $u(x)$ تابع دغه خاصیت($1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{2}$) ولري، نو $\lim_{x\to a} u(x)$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې $\lim_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2})=1=\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})$ نو د ساندویچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to 0} u(x)=1$$

قضیه: که چیرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابعګانې وي چې $f(x)<g(x)$ نو د لیمیټ د شتون په صورت کې یې لمیټ $\lim_{x\to a} f(x)\le \lim_{x\to a} g(x)$ سره دی.

مثال: د $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ تابعګانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې $f(x)<g(x)$ دی، د $x>1$ لپاره لرو:

حل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\frac{15}{5}=3$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 0} 6x^3-2x^2+5x+3$

2) $\lim_{x\to -1} x^7-2x-5$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9}$

5) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-4x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نسبتي تابعګانو لېمیټونه

آیا پوهیږئ چې مخامخ اړیکې په څه نامه یادیږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

فعالیت

- د $y = x^2 - 1$ تابع لېمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لېمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لېمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله

- د ځینو تابعګانو لېمیټ مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- د ځینو تابعګانو لېمیټ مبهم شکلونه لري؛ لکه $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, \ldots$ چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لېمیټ لاسته راځي، چې په لاندې ډول یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- د $\frac{0}{0}$ **بڼه**:

فعالیت

- د $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قیمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع لېمیټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آیا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره یو معین قیمت ولري؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چیرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل(خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لېمیټ قیمت په لاس راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: لاندې لېميټونه پيداکړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\ ,\qquad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\ ,\qquad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

حل: لومړی د لېميټ بنه ټاکو:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

څرنګه چې پاسنې لېميټونه د $\frac{0}{0}$ بنه لري، نو د تجزيې په مرسته يې وروسته له ساده کولو څخه د لېميټ قيمت په لاندې ډول په لاس راورو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

حل: بيا هم لېميټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

حل: ليدل کېږي چې نوموړی لېميټ بيا هم د $\frac{0}{0}$ بنه لري، نو د لېميټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

پوښتنې

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\qquad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لېمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

فعالیت

- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ د تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ د تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ د تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول، چې تر ټولو لوی توان ولري وېشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لېمیټ په لاس راځي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیداکړئ.

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په x^2 باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

دويم مثال: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پيداکړئ.

حل: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

دريم مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پيداکړئ.

حل: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$

څرنګه چې پوښتنه $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

يادونه: هغه تابعګانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عمليه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې ډول د هغوی لېميټ په لاس راورو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ که چیرې ($x\to\infty$) کړی وي؛ نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت دی له $\dfrac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

څلورم مثال: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}\qquad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}\qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

حل:

1- خرنگه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- خرنگه چې $m<n$ دی، نو د نوموړی تابع لیمیټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- خرنگه چې $m>n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ مساوي له ∞ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

یادونه: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي ځوابونه په کور کې د عملیې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ؟

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{6}{x^2 - x}$

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + x^2 - x + 9}{x^4 + x^2 - x + 5}$

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{x^3 - x + 5}$

5) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

III- د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لېمیټونو قیمتونو پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$

فعالیت

- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لېمیټ پیدا کړئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لېمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابعګانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.

مثال: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=?$

2) $\lim_{x\to1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=?$

حل 1:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

څرنګه چې نومړی لېمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري نو لیکلای شو، چې:

$$=\lim_{x\to1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2) $\lim_{x\to1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

حل 2:

$$\lim_{x\to1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=(1-1)(\frac{1}{1^2+2-3})=0\cdot\frac{1}{3-3}=0\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\infty$$

لیدل کېږي چې نوموړی لیمیټ د $(0\cdot\infty)$ شکل لري، نو:

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim_{x\to5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ شکلونه

د مخامخ لیمیټ مبهم شکل وټاکئ؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

فعالیت

- د $y = x^x$ تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ لیمیټ بنه په هغه صورت کې وټاکئ چې $x \to \infty$ وکړي.
- د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې $0^0, \infty^0, 1^\infty$ شکلونه په ضرب بدل شو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چیرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه خانته غوره کړي هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0\cdot\infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعنې: $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$

یادونه:

I- که چیرې $n \to \infty$ وکړي د $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ترادف $e = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکارېږي:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دی چې ... $e = 2.71$ عدد ته د Euler عدد وايي.

II-

1) $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ 2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$ 4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

ثبوت: پوهيږو چې څلور واړه پوښتنې د 1^∞ مبهم شکلونه لري.

1) $x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}\ ,\ \alpha \to 0 \Rightarrow x \to \infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}\ ,\ x \to \infty \Rightarrow u \to 0$

$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$

$x = \frac{1}{u} \to u = \frac{1}{x}\ ,\ u \to 0 \Rightarrow x \to \infty$

$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\ ,\ x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x}\ ,\ x \to 0 \Rightarrow u \to \infty$

$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4) $y = e^x - 1 \quad \Rightarrow e^x = 1 + y \quad \Rightarrow x = \ln(1+y)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} \ , \ y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \ , \ y \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$= \frac{1}{\ln \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

د 1^∞ مبهم شکل عمومي حالت: که چیرې د اکسپوننشیل تابع لیمیټ یعني $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د 1^∞ مبهم شکل خانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha = u - 1$ سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1} = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right] = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنگه چې $\alpha = u - 1$ دی که چیرې $u \to 1$ نو $\alpha \to 0$ ته نږدې کېږي په پایله کې:

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

لومړی مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ لیمیټ قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو معلومېږي چې لیمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u = 1 + \frac{2}{x} \quad , \quad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right] = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P = e^2$$

دویم مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ قیمت محاسبه کړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}} = 1^\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې معلومېږي نوموړی لېمیټ د 1^{∞} مبهم شکل لري نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^P$$

$$u=1+\frac{1}{x} \quad , \quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^P=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل: **د تېر په شان بیاهم لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو،** $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$

څرنګه چې معلومېږي لیمیټ د 1^{∞} مبهم شکل لري د فورمول په مرسته یې محاسبه کوو:

$$u=\cos x \quad , \quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^P$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^P=e^0=1$$

پوښتني

لاندې لیمټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$ 2) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

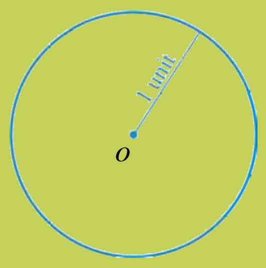
3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$ 4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

5) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ

Trigonometric functions limits



که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1unit) وي، نوموړې دایرې ته څه ډول دایره وایي.

فعالیت

- دوضعیه کمیاتو په سیستم کې د $C(o,r)$ په مثلثاتي دایره کې د θ مرکزي زاویه رسم کړئ.
- د C له بهرنۍ ټکي څخه په دایره باندې د ox پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د C ټکی د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاویې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتوو:

قضیه: د یوې زاویې د ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمټ مساوي په (1) دي، کله چې زاویه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

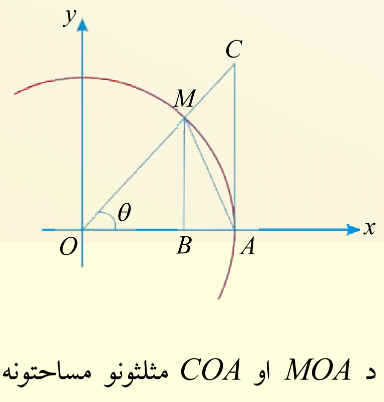
ثبوت: په لاندې شکل کې د MOA او COA د مثلثونو او OMA د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

$$MOA \text{ د مثلث مساحت} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM} = \frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM} = \frac{\overline{BM}}{2}\cdot r$$

$$O\overset{\frown}{A}M \text{ د قطاع مساحت} = \frac{1}{2}\theta r^2$$

د θ د زاویې پراخوالی باید په رادیان لاسته راوړو.

$$C\overset{\Delta}{O}A \text{ د مساحت} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC} = \frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC} = \frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$



د MOA او COA مثلثونو مساحتونه د OMA د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2}r\,\overline{BM} < \frac{1}{2}\theta r^2 < \frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r}<\theta<\frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta<\theta<\tan\theta \Rightarrow 1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\cos\theta\le\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\le\lim_{\theta\to 0}1$$

د ساندویچ د قضیې پر بنسټ معلومېږي چې $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$ او همدارنګه $\lim_{\theta\to 0}1=1$ دی، نو $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ دی.

پوهېږو چې د هرې زاویې ساین د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1\le\sin\theta\le 1$$

$$-\frac{1}{\theta}\le\frac{\sin\theta}{\theta}\le\frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}\le\lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\le\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د ساندویچ د قضیې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left.\begin{array}{l}-\lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}=0\\ \lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}=0$$

په پایله کې ویلای شو چې د یوې زاویې ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمیټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاویه بې‌نهایت ته نږدې شي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x=\alpha$ نو $x=\frac{\alpha}{2}$ کېږي، څرنګه چې $x\to 0$ کړی دی، نو $\alpha\to 0$ کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}}=2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=2\cdot 1=2$$

دویم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\tan 2x}{7x}$ حل کړئ.

حل:

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\dfrac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\dfrac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

دریم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x}$ حل کړئ.

حل: پوهیږو چې $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پیدا کړئ:

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3x\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\frac{\dfrac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

پنځم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

حل: پوهیږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{4x+6x}{2}\sin\dfrac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $y = 5x$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$= 10\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 10\cdot 1\cdot 1 = 10$$

پوښتنې

لاندې لېمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x}$ 5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$ 6) $\lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3x$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$ 8) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$ 9) $\lim_{x\to 1}(\cos^2 x + \sin^2 x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابعگانو متمادیت

Continuity of functions

شکلونو ته پام وکړئ.

لومړي او دويم پلونه څه توپير لري، خپل نظر بيان کړئ.

د تابعگانو گرافونه مختلف شکلونه لري، چې ځيني يې په يوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې يا متمادي تابعگانې بلل کېږي او ځيني يې په يوه قلم نه شي رسمېدلای يعنې د رسم په وخت کې بايد د قلم څوکه يو ځل يا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په يوه برخه کې يې گراف غوڅ وي، دغه ډول تابعگانې په نومورې ټکې کې غير متصلې يا غير متمادي تابعگانې بلل کېږي.

فعالیت

- د $f(x)=x^2+4x$ تابع گراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لېميټ د $x=1$ په نقطه کې پيدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قيمت د $x=1$ په نقطه کې پيدا او وروسته داوړه اريکې سره پرتله کړئ.

له پاسني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پایله: د $y=f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې متمادي بلله کېږي، چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د a په ټکي کې تعريف شوې وي.

2- راکړل شوې تابع د a په ټکي کې لېميټ ولري.

3- د $f(a)$ قيمت بايد د $f(x)$ له لېميټ سره مساوي وي: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

حل:ځرنګه چې د تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، نو د متماديت له شرطونو څخه ليکلای شو:

$$1)\ 2\in Dom\ f(x)=IR$$

$$\left.\begin{array}{l}2)\ \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7\\ 3)\ f(2)=2^2+4-1=7\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=7$$

ځرنګه چې د متماديت درې واړه شرطونه په کې حقيقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

دويم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متماديت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع د تعريف ساحه عبارت ده؛ له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

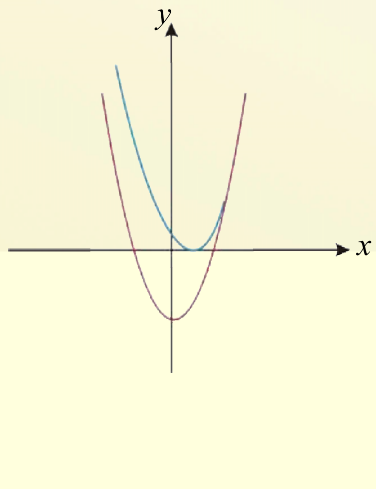
ځرنګه چې ليدل کيږي -1 د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د -1 په ټکي کې متمادي نه ده.

دریيم مثال: د $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1\ ; & x<2\\ x^2-3 & ; x\geq 2\end{cases}$ د تابع متماديت د $x=2$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د ښي او کيڼي خوا ليمتونه څېړو:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)\ \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

په پايله کې ويلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې ليدل کيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: که $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x\ge 1\\ 1-x & ; x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x)=1-x=0\\ f(1)=0\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 1-x=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

پایله: که چیرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim_{x\to a} f(x))^{\alpha} \quad , \quad \alpha\in IR$

2) $\lim_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim_{x\to a} f(x))$

4) $\lim_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim_{x\to a} f(x))$

پنځم مثال: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

حل: څرنګه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د -3 عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

غیر متمادیت: که چیرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې f په a کې غیر متمادي ده او a یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

لومړی ډول: د f تابع د a په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه ولري خو مساوي نه وي.

دویم ډول: کم تر کمه یو له دوو لیمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه) څخه موجود نه وي.

دریم ډول: که چیرې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري خو a د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

a) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$

c) $h(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$

d) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$

e) $f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$

f) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$

g) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 3 & ; \quad x=2 \end{cases}$

h) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$

د متمادي تابعگانو خاصیتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقیقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , g(x) \neq 0$$

فعالیت

- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابعگانو متمادیت وڅېړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

پایله: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعگانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابعگانو څخه يې هره یوه په $x = c$ یا یوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابعگانو جمع	$f(x) + g(x)$
2- د تابعگانو تفریق	$f(x) - g(x)$
3- د تابعگانو ضرب	$f(x) \cdot g(x)$
4- د تابعگانو تقسیم	$\dfrac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

لومړی بېلگه: **که** $f(x) = x^2 + 3$ **او** $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو:**

1- f او g د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ، چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

حل:لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+3)=4$

3) $f(1)=(1^2+3)=4$

نو د f **تابع** د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+3x-2)=1^2+3\cdot 1-2=2$

3) $g(1)=(1^2+3\cdot 1-2)=2$

په همدې شان د g تابع د $x=1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابعګانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېړو:

الف)

$f(x)+g(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D(f(x)+g(x))=IR$

2) $\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to 1}(2x^2+3x+1)=6$

3) $f(1)+g(1)=(1+3+1+3-2)=6$

$\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=f(1)+g(1)=6$

$(f+g)(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D[(f+g)(x)]=IR$

2) $\lim_{x\to 1}[(f+g)(x)]=\lim_{x\to 1}[2x^2+3x+1]=6$

3) $(f+g)(1)=(2x^2+3x+1)(1)=6$

$\lim_{x\to 1}[(f+g)(x)]=(f+g)(1)=6$

په پایله کې د متمادي تابعګانو د جمعې حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot1^3+1^2+9\cdot1-6=8$

3) $\lim_{x\to1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim_{x\to1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پايله کې د متمادي تابعګانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

دويمه بېلګه: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وخېړئ، چې آيا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

حل:

1) $Df(x)=IR$	1) $Dg(x)=IR$
2) $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x+1)=3$	2) $\lim_{x\to2}g(x)=3x-2=3\cdot2-2=4$
3) $f(2)=x+1=3$	3) $g(2)=3x-2=3\cdot2-2=4$
$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=3$	$\lim_{x\to2}g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim_{x\to2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim_{x\to2}[f(x)\cdot g(x)]=(f\cdot g)(2)=12$

په پايله کې لاس ته راځي چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- وښيئ چې لاندې تابعګانې په ورکړ شويو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x)=x^3-2(x+1)^5 \quad ; \quad x=2$

2) $g(x)=\dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \quad ; \quad x=-1$

3) $h(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x=4$

2- تشريح کړئ، چې ولې د $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ تابع په $x=0$ کې غيرمتمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی يا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0: |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x\to a} x = a \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چیرې د x د قیمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدی شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چیرې د x د قیمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدی شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

تعريف: که چیرې د $f(x)$ تابع په يوه غير ترلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې شامل وي کیدای شي چې تابع په a کې نه وي تعريف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدی شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدی کېږي، نو ويل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې يې ليکو: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ يا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$

د لیمیټ ځانګړتیاوې: که f او g دوې تابعګانې وي، C,L او M حقیقي عددونه وي داسې چې $\lim_{x\to c} f(x) = L$ او $\lim_{x\to c} g(x) = M$ ، نو لاندې رابطې ليکلای شو:

1) $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L+M$

2) $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L-M$

3) $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L\cdot M$

4) $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\ ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim_{x\to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to c} f(x)} = \sqrt{L}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بې نهايت کوچنی تابعګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نږدې شي بې نهايت کوچنی بللې کېږي، که چيرې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

د ساندويچ قضيه: که چيرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابعګانې د هر x لپاره په يوه غير تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a} h(x) = b = \lim_{x\to a} f(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x) = b$ دی.

- که چېرې يوه تابع د $\frac{0}{0}$ بڼه ولري، د لېميټ د پيداکولو لپاره يې لومړی تابع د تجزيې په مرسته ساده کوو او بيا يې لېميټ په لاس راوړو.
- $f(x) = \dfrac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}$ د تابع د لېميټ د پيداکولو لپاره چې $x \to \infty$ وکړي، عبارت دی له:

  1. د $m = n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$
  2. د $m < n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت له صفر څخه دی.
  3. د $m > n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت دی له $\pm\infty$

- د هغو تابعګانو چې $(\infty - \infty)$ او $(0 \cdot \infty)$ بڼه ولري د لېميټ د پيداکولو لپاره يې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ يا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته يې لېميټ په لاس راوړو.
- هغه تابعګانې چې د 1^{∞} مبهم شکلونه لري له دې فورمول څخه $P = \lim_{x\to a}[v(u-1)]$, $\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} \stackrel{1^{\infty}}{=} e^P$ يې د لېميټ د پيداکولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta \to 0$ وکړي همېشه سمه ده.

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

- د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکي کې متمادي بلل کېږي، کله چې:
  1. a د $f(x)$ د تابع په دومين کې شامل وي.
  2. راکړل شوی تابع د a په نقطه کې لېميټ ولري.
  3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي سم ځواب په نښه کړي.

-1 $\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}$

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-2 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-3 $\lim_{x\to 1.4}(2x+0.3)$

a) 1 b) 3 c) 0 d) هیڅ یو

-4 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-5 $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

-6 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

-7 لاندې لیمیټونه پیداکړئ.

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

2) $\lim_{x\to -1}\sqrt{3+x}$

3) $\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{x^2-7}$

4) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim\limits_{x\to -2}(\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{2}{x^2+2x})$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a\,x^2}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$

23) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

25) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

26) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2})$

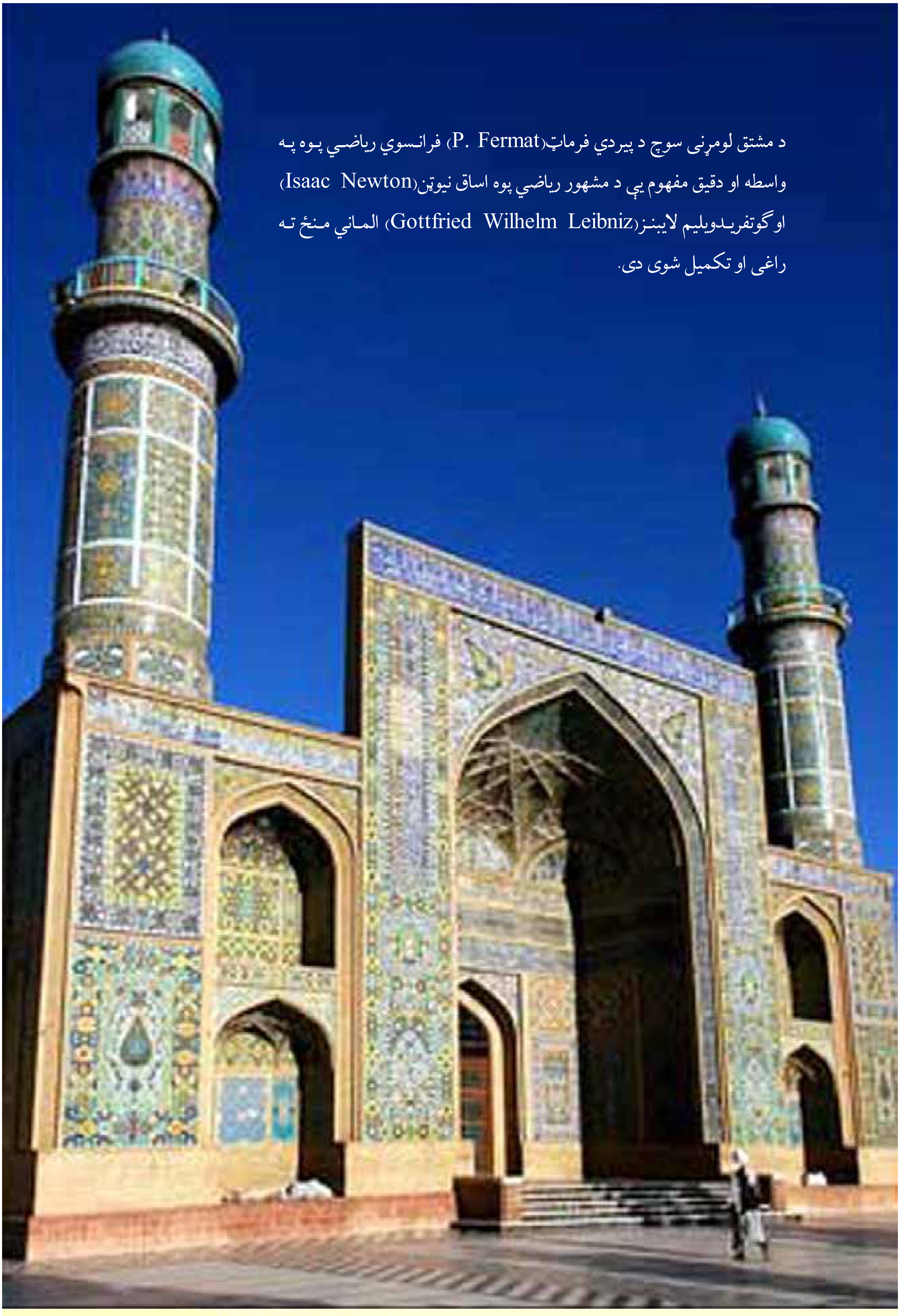
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم څپرکی

مشتق

د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرماټ(P. Fermat) فرانسوي رياضي پوه په واسطه او دقيق مفهوم يې د مشهور رياضي پوه اساق نیوټن(Isaac Newton) اوگوتفریدویلیم لايبنز(Gottfried Wilhelm Leibniz) الماني منځ ته راغی او تکميل شوی دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقات

Derivatives

د $f(x) = x^2 - 1$ تابع په پام کې ونیسئ د مخامخ کسر لیمیټ پیدا کړئ.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$$

د یوه منحني میل

- که د یوه مستقیم خط دوه ټکي $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقیم خط میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آیا د یوه مستقیم خط میل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانګړي ټکي پورې اړه لري؟
- آیا د مستقیم خط میل د هغې زاویې سره اړه لري، چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت لوري سره جوړوي؟
- آیا د مستقیم خط او منحني میلونه یو شان پیداکیږي؟

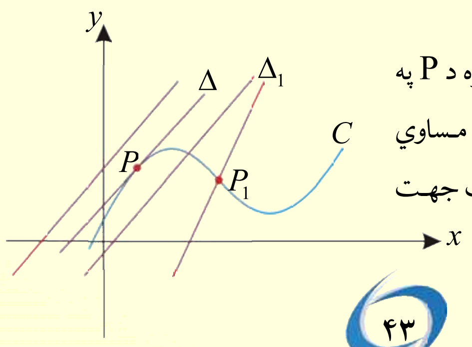
له پورتنیو پوښتنو څخه څرګندیږي چې د منحني میل په اسانۍ سره نشو پیداکولای ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسیر ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل میلونه لري، نو له دې کبله لومړی د یوه منحني خط میل د هغه په یوه ټکي کې تعریفوو او بیا یې د محاسبې لپاره یو فورمول په لاس راوړو.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او P_1 دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د P_1 په ټکي کې د Δ_1 قاطع او د p په ټکي کې د Δ مماس رسم کړئ.
- که د P_1 ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي، چې د p ټکي ته نږدې شي، په پایله کې د Δ_1 مستقیم خط له Δ مستقیم خط سره څه اړیکه پیداکوي؟

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

د Δ د مستقیم خط میل چې د C له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاویې له (tan) سره مساوي دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

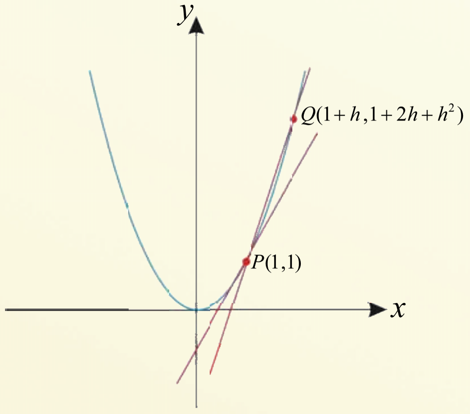


(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $y = f(x) = x^2$ د منحني سره د مماس میل د $P(1,1)$ په ټکي کې پیداکړئ.

حل: څرنګه چې د منحني میل د مماس له میل سره د P په ټکي کې برابر دي، نو ددې مماس میل له هغې فورمول څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي، نشو پیداکولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوې دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخمیني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تیریږي، پیداکړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکي د P ټکي ته نږدې شي د PQ د مماس میل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کیږي:

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{\overline{PQ}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نږدې ده په $1+h$ ښودلای شو، چې h یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$$

نو دا $(1+h\ ,\ 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h,1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تیریږي، میل یې عبارت دی له:

$$m_{PQ}\frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چیرې په شکل کې $h \to 0$ نو $Q \to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کیږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وایي؛ یعنې: $\overline{PQ} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لېمیټ دا عملیه موږ ته دا امکان په لاس راکوي چې د $y = x^2$ د تابع د منحني میل په یوه اختیاري ټکي $P(x,y)$ کې په لاس راوړو. که د Q د ټکي اختیاري مختصات $[x+h,(x+h)^2]$ وي که د PQ میل ته m او د P په ټکي کې د مماس میل په m_T سره وښیو لرو، چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

$$m_T = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه لیکلای شو، که چېرې $Q[x+h\ ,f(x+h)],\ P[x,f(x)]$ د نوموړي منحني دوې اختیاري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، لیکلای شو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

په حقیقت کې دا د هغه مستقیم خط میل دی چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحني میل د هغې په هر اختیاري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

دویم مثال: د $f(x) = x - x^2$ د منحني سره د مماس میل د $P(2,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د Newton خارج قسمت تشکیل او د $x = 2$ په ټکي کې د منحني میل حسابوو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-(2+h)^2-2+2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-4h-h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(1-4-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-3-h) = -3$$

منځنی یا وسطي تعبیر

که یو جسم د یوه مستقیم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبیعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده یعنې $S = f(t)$ د t_1 او t_2 دوو وختونو خارج قسمت $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ د جسم د وسطي سرعت په نامه یادیږي او سرعت د t_0 په وخت کې عبارت له هغه حد یا لیمیت څخه دی چې لحظوي سرعت بلل کیږي. $\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنی رابطې لیمیټ د t او t_0 په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ویلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالی خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(s_2)-f(s_1)}{t_2-t_1}$$

مثال: د $y=f(x)=x^2$ په تابع کې د f متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انتروال کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_1=2$ او $x_2=5$ دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$

پوښتنې

1) د لاندې تابعګانو د x د متحول لپاره د یو Δx او Δy تزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په غوښتل شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x^2-4$, (0)

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x-x^2$, (3)

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=3x^2-5x+4$, $(2,-1)$

2) د $f(t)=5t^3-3t+1$ د تابع متوسط تغییرات د $[2,4]$ په انتروال کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې تابع مشتق

مخامخ لېمېټ څه را ښيي آيا په بل ډول يې ليکلای شو؟

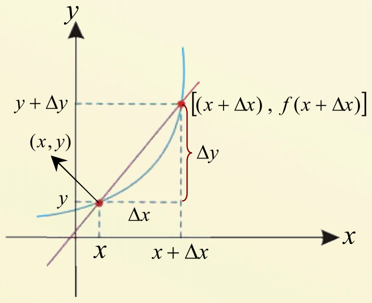
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

فعاليت

- که چېرې د $y=f(x)$ تابع د$[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي، که د x متحول د Δx په اندازه زياتوالی پيدا کړئ آيا تابع تزايد کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زياتوالي رابطه وليکئ.
- د تابع تزايد د متحول پر تزايد $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ داسې وليکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دواړو خواوو څخه لېمېټ ونيول شي، په هغه صورت کې چې Δx صفر ته تقرب وکړي، د دې حد يا لېمېټ د څه په نامه يادېږي؟

د پورتنی فعاليت پايله داسې بيانوو:

$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \quad / \quad \div \Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$



تعريف: د تابع او د متحول د بدلون د لېمېټ نسبت ته کله چې د متحول تزايد صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کېږي؛ لکه: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ يا y' ، $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x$ وي، د دې تابع مشتق پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مشتق د تعریف څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو، چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow f'(x)=2$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\Rightarrow f'(x)=3x^2$$

دریم مثال: د $x\geq 0$, $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق پیدا کړئ.

حل: مخکې له حل څخه $x\geq 0$ حالت په پام کې نیسو:

الف: که $x>0$ وي؛ نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

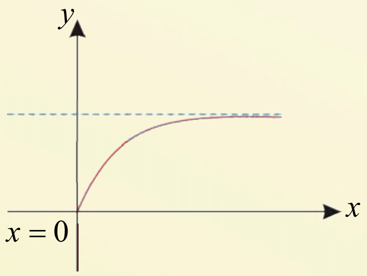
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب: که $x=0$ شي نو $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی، نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه وي لکه چې په شکل کې لیدل کېږي؛ یعنې که x ډېر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نږدې کېږي او د $x=0$ په ټکي کې ($\frac{1}{2\sqrt{x}}$) د مماس میل ډېر لوییږي، چې مماس په یوه عمود خط بدلیږي.



پوښتنې

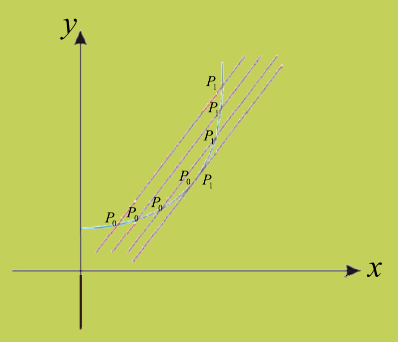
دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیدا کړئ.

1) $f(x)=x-x^2$ 2) $f(x)=-2x^2$ 3) $f(x)=2x^2+x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق هندسي تعبير

په مخامخ شکل کې څه وينئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.

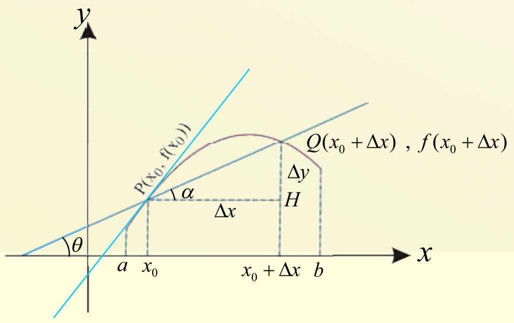


- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د C منحني يا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ متمادي وي ګراف رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\,,\,f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د Δ مستقيم خط داسې رسم کړئ، چې د منحني د P او Q له ټکو څخه تېر شي.
- آيا ويلای شئ چې د Δ مستقيم خط د x د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي؟
- ووايئ چې د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يا $\frac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه يادېږي؟
- که د Q ټکی د P ټکي ته ډېر نږدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د Δ مستقيم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې يې وښيئ.
- لېميټ د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې وڅېړئ.

د پورتنی فعاليت پايله داسې بيانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی؛ يعني:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_\Delta$$



تعريف: د مماس ميل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع د مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، يا په بل عبارت د هغې زاويې د ټانجنټ څخه عبارت دی چې د Δ مستقيم خط يې د x د محور لـه مثبت جهت سره جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیداکړئ.

حل: پوهېږو چې $m = \tan\alpha = f'(x)$ دی، نو لیکلای شو؛ چې:

$$f(x) = 2x^3 - 1$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + (\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}[6x^2 + 6x(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m = f'(x) = f'(1) = 6x^2 = 6 \cdot 1^2 = 6$

نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \Rightarrow \quad y = 6x - 5$$

دویم مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماسل میل قیمت د $x_0 = 2$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2(\Delta x)x_0 + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + (\Delta x)) = 2x_0$$

$$m = y' = 2x_0 = 2 \cdot 2$$

$$y' = m = 4$$

دریم مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع ورکړل شوې ده، غواړو د $x = x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0 = 2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیداکړو:

$$x = x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

اوس د حد د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې $x_0 = 2$ دی، نو $f'(2) = 2\cdot 2 = 4$ یعنې د $x_0 = 2$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنی چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

څلورم مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^{\;3}}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^{\;3} + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^{\;3}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د x_0 په ټکي کې برابر دي له: $f'(x_0) = 3x_0^2$

پنځم مثال: د x_0 په ټکي کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$
$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x}$$
$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - f(x_0)$$
$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}$$
$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$
$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0+0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ټکي کې د $f(x)$ مشتق دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق تابع يې $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$

پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابعګانو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = 5x^2 - 2$ 2) $f(x) = \frac{2}{x}$

2. په ورکړل شويو ټکو کې د لاندې تابعګانو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = 4x^2 \quad , \quad x_0 = \frac{1}{2}$ 2) $f(x) = 3x - 1 \quad , \quad x_0 = -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق قوانين

آيا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزايد له لارې په بله طريقه پيدا کړئ؟

$$f(x) = 2x^2$$

1- د يوه ثابت عدد مشتق:

فعاليت

د $y = C$ تابع، (C ثابت عدد) په پام کې ونيسئ.

- تابع ته د Δx په اندازه بدلون(تزايد) ورکړئ، د تابع د تزايد په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د بدلون(تزايد) نسبت تشکيل کړئ.
- د پورته مساوتو له دوارو خواوو لېميټ ونيسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

د هرې ثابتې $f(x) = C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع گراف يوه افقي کرښه ده چې ميل يې صفر دی.

ثبوت:

$$y = C$$
$$y + \Delta y = C$$
$$\Delta y = C - y$$
$$\Delta y = C - C$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$
$$y' = 0$$

مثال: د $f(x) = \pi^4$ او $y = 100$ تابعگانو مشتق پيدا کړئ.

حل: خرنگه چې π^4 او 100 ثابت عددونه دي؛ نو:

$$f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$$
$$f(x) = \pi^4 \Rightarrow f'(x) = 0$$
$$f(x) = 100 \Rightarrow f'(x) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د يوې طاقت لرونكي تابع مشتق:

فعاليت

د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام کې ونيسئ.

- متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ، آيا تابع هم تزايد کوي که تزايد کوي په کومه اندازه اړيکه يې وليکئ؟
- د پورته اړيکې څخه د Δy قيمت پيدا کړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشکيل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې لېمټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

که چېرې $f(x) = x^n$ راکړل شوې وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره کېږي.

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x+\Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x+\Delta x - x)[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}\right]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}}_{x^{n-1} \text{ خلي } n}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

لومړی مثال: د $f(x) = x^5$ د تابع مشتق د $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې وټاکئ.

حل:

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f(x)' = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f(\frac{1}{2}) = 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د حاصل جمع مشتق:

فعالیت

د u او v مشتق منوونکي تابعگانې په پام کې ونیسئ.

- آیا د $y=u+v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y=u+v$ په تابع کې $u(x)$ ته د Δu په اندازه او $v(x)$ ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ، د y د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه ولیکئ.
- لومړی د تابع تزاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په Δx وویشئ او وروسته یې لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y=u+v$$
$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-y$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-u-v$$
$$\Delta y=\Delta u+\Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

څرنگه چې $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$ دی، نو: $y'=u'+v'$

4- د حاصل تفریق مشتق

که $y=u-v$ وي، نو $y'=u'-v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

لومړی مثال: د $y=2x+1$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې $u=2x$ او $v=1$ دی، نو:

$$u'=1\cdot 2x^{1-1}=2x^{0}$$
$$u'=2$$
$$v'=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

دويم مثال: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: په دې تابع کې $u=4x^2$, $v=3x$ او $w=5$ دی چې $u'=8x$, $v'=3$ او $w'=0$ کېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

دريم مثال: د لاندې تابعګانو مشتقونه پيدا کړئ:

1) $y=12x-7$
$y'=(12x)'-(7)'$
$y'=12$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$
$f'(x)=18x-12$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$
$f'(x)=18x^2-4x+6$

5- د حاصل ضرب مشتق:

فعالیت

که د u او v توابع مشتق منونکي وي، نو $u\cdot v$ هم مشتق منونکي دي، د $y=u\cdot v$ تابع په پام کې ونيسئ.

- **په پورتنی تابع کې u ته Δu په اندازه، v ته Δv په اندازه تزايد ورکړئ او د تابع تزايد پيدا کړئ.**
- د Δy د تزايد له پيداکولو وروسته د مساوات اطراف په Δx وويشئ.
- د پورتني رابطې د دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېميټ ونيسئ، چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

له پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=u\cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \Rightarrow \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v\cdot u'+u\cdot v'+0\cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو، چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \Rightarrow v' = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2 - 3) \\ y' = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

دویم مثال: د $y = (5x - 1)^2$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د y تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x-1)^2 = (5x-1)(5x-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 5x - 1 \Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x - 1 \Rightarrow v' = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x-1) + 5(5x-1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

6- د حاصل تقسیم مشتق:

که د u او v تابعګانې مشتق منونکی وي؛ نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکی ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- u او v ته په ترتیب سره Δu او Δv په اندازه تزاید ورکړي او د y تابع تزاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په Δx وویشئ.
- د پورتني رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي، لېمیټ ونیسي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبتوو:

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v}\ \Rightarrow\ y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}\ \Rightarrow\ \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot v\Delta}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

لومړی مثال: د $y=\dfrac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق يې عبارت دی له:

$$\left.\begin{array}{l}u=2+3x\ \Rightarrow u'=3\\ v=1-2x\ \Rightarrow v'=-2\end{array}\right\}\Rightarrow\ \begin{array}{l}y=\frac{u}{v}\qquad\Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\\ y'=\frac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2}\\ =\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2}\end{array}$$

یادونه: که چیرې وغواړو چې د یوې تابع مشتق په یوه ټاکلي نقطه لکه په x_0 کې پیدا کړو وروسته د تابع د مشتق څخه ټاکلی قیمت په هغه کې وضع کوو چې د تابع مشتق په هغه نقطه کې پیدا کړو، لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $f(y)=\dfrac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پيدا کړئ:

حل: د تابع د حاصل تقسيم د مشتق څخه لرو:

$$f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2}$$

$$f(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{1+0}$$

$$f(0)=-9$$

$$\left.\begin{array}{l} u=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y \\ v=1-3y \Rightarrow v'=-3 \end{array}\right\}$$

دريیم مثال: د $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: پوهيږو چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري نو د $y=\dfrac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخيستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{array}{ll} y=\dfrac{u}{v} & \Rightarrow y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ u=-3 & \Rightarrow u'=0 \\ v=2t-1 & \Rightarrow v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(t)=\frac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\frac{6}{(2t-1)^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ:

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$ 2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$ 3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$ 5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$ 6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$ 8) $f(x)=7x+3$

7- د يوې مربع جذري تابع مشتق:

فعاليت

د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونيسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ د تابع تزايد پيدا کړئ.
- د لاس راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لېميټ په هغه صورت کې ونيسي، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$
$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to o}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x}\Rightarrow u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1\Rightarrow v'=2x \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x} \\ f'(x)=\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\dfrac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ \qquad =\dfrac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

8- د $\sqrt{u}$ تابع د جذري مربع مشتق

- که چیرې y د u او u د x تابع او مشتق منوونکي وي د y اړیکه u ته او u، x ته څه فکر کوئ.
- د u متحول ته د Δu په اندازه تزاید ورکړئ د Δy د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړه خواوو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y+\Delta y=\sqrt{u+\Delta u}$$
$$\Delta y=\sqrt{u+\Delta u}-\sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{u+\Delta u}-\sqrt{u})(\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u})}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$$
$$\Delta y=\frac{u+\Delta u-u}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx ویشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لیمیټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0\Rightarrow\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$$
$$y'=\frac{u'}{\sqrt{u}+\sqrt{u}}=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

دویم مثال: د $h(x)=(x^2+x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{aligned}u&=x^2+x &\Rightarrow u'&=2x+1\\ v&=\sqrt{x} &\Rightarrow v'&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \begin{aligned}h'(x)&=(2x+1)\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+x)\\ h'(x)&=2x\sqrt{x}+\sqrt{x}+\frac{x^2+x}{2\sqrt{x}}\\ h'(x)&=\frac{4x^2+2x+x^2+x}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2+3x}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ د تابع د مشتق قیمت د $x=8$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ د تابع د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\left.\begin{aligned} u=\sqrt[3]{x}-1 &\Rightarrow u'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3 &\Rightarrow v'=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)&=\frac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{aligned}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ نقطه کې پیدا کوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$

پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{1}{x+1} \quad , \quad y=3x^{-3} \quad , \quad f(x)=x^2+3$$

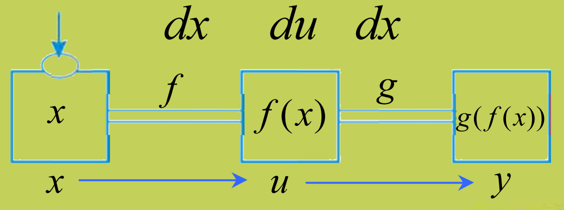
2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابعګانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ. $[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g')\quad g\neq 0]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکبو تابعګانو مشتق (زنځیري قاعده) Chain Rule

د مخامخ اړیکې او شکل په اړه خپل نظر بیان کړئ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$



فعالیت

که چیرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- وواياست چې y د u او u له x سره څه اړیکه لري؟
- آیا د $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقیقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړې خواوې په Δx وویشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځایونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسي چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پایله یې په لاندې ډول ده.

ثبوت:

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د دې زنځیري قاعدې پر بنسټ لاندې پایلې لیکلای شو:

1- که $y=u^n$ وي؛ نو $y=nu^{n-1}\cdot u'$ کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي؛ نو $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

مثال: د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$　　2) $y=\sqrt{1-x^2}$　　3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$　　5) $y=(x^2-2)^{-3}$

حل: د زنځیري قاعدې په مرسته لیکلای شو؛ چې:

1) $y=\underbrace{(2x^2-1)}_{u}{}^3$

$$\left.\begin{aligned} &u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x\\ &y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} &y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}\\ &y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x\\ &\quad=(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x\\ &\quad=12x(4x^4-4x^2+1)\quad =12x(2x^2-1)^2\end{aligned}$$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

$$\left.\begin{aligned} &u=1-x^2\Rightarrow u'_{(x)}=-2x\\ &y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

لیدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري نو: $y=u\cdot v\ \Rightarrow\ y'=u'v+v'u$

3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

$$\left.\begin{aligned} &u=(x^2-3)^2\\ &u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x)\\ &v=2x^3\Rightarrow\ v'_{(x)}=6x^2\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} &y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2\\ &y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2\\ &\quad=8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2\\ &\quad=8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9)\\ &\quad=8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2\\ &\quad=14x^6-60x^4+54x^2\end{aligned}$$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$

$$\left.\begin{aligned} &u=x^2-2x^3\\ &u'_{(x)}=2x-6x^2\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} &y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}\\ &y'=\frac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}}\end{aligned}$$

5) $y=(x^2-2)^{-3}$

$$\left.\begin{aligned} &u=x^2-2\\ &u'_{(x)}=2x\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} &y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u'\\ &y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\frac{-6x}{(x^2-2)^4}\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:

I. که چیرې د f تابع د (x_0) په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس میل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني یا د تابع له ګراف سره رسمیږي.

مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع میل د $x_0=1$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_0=1$ دی؛ نو: $f(x_0)=1$ سره کیږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، میل یې عبارت دی، له:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3 \quad \Rightarrow f'(1)=3$$

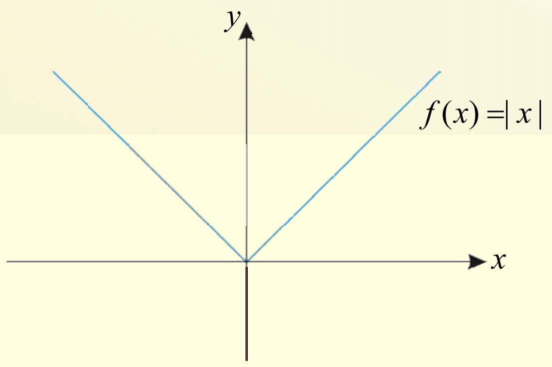
II. که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د x_0 په ټکي کې پیوسته یا متمادي ده، خو برعکس یې ټیک نه ده، یعنې کیدای شي، یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي یا پیوسته وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

مثال: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د $x=0$ په ټکي کې پیداکړئ.

حل: پوهیږو چې مشتق په حقیقت کې د نیوټن د نسبت د لیمیټ محاسبه ده چې د ښي او کیڼ اړخ لیمیټونه یې په صفر کې سره وڅیړل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کېږي، چې $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې پيوسته يا متمادي ده.

پوښتني

د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ.

1) $y = (x^2 + 2)^2$

2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$

3) $y = (1 - 2x^3)^4$

4) $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$

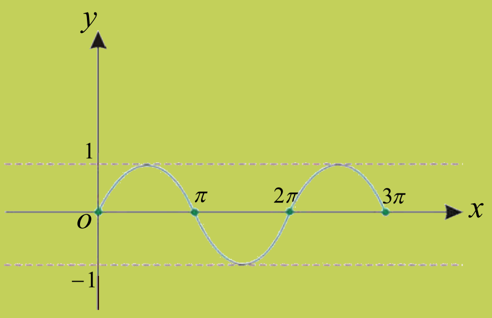
5) $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابعګانو مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



فعالیت

- مثلثاتي دايره او راديان تعريف کړئ.
- آيا دا $-1 \le \sin x \le 1$ اړيکه حقيقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونيسئ متحول د Δx په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونيسئ.
- د $\sin(x + \Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
- وروسته د انکشاف له پورتني رابطې څخه $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:

1- د $y = \sin x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$\Delta y = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$

$$y' = \cos x$$

$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې $f(x)=\sin u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$f(u)=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sin 4x$ مشتق پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin 4x \\ u=4x \Rightarrow u'=4 \\ f(x)=\sin u \Rightarrow y'_u=\cos u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=\sin u \Rightarrow f'(x)=u'\cos u \\ f(x)=\sin 4x \Rightarrow f'(x)=4\cos 4x \end{array}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3\cdot\csc x$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x=x^3\cdot\dfrac{1}{\sin x} \\ u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ v=\dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow v'=\dfrac{-uv'}{v^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x \\ f'(x)=3x^2\cdot\csc x+\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\cdot x^3 \\ \quad =3x^2\csc x-\cot x\cdot\csc x\cdot x^3 \\ \quad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x \end{array}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

$a)\ y=\sin 5x$ $\qquad b)\ y=\dfrac{\sin x}{1+x}$

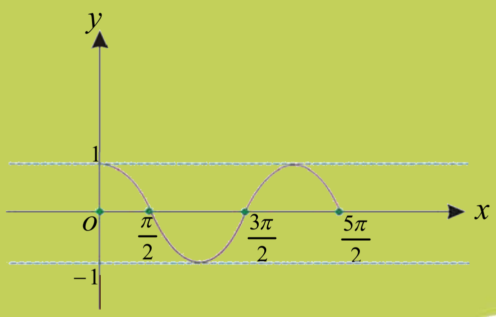
$c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=\cos x$ تابع مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



فعاليت

- د $y=f(x)=\cos x$ په تابع کې متحول ته Δx او تابع ته د Δy په اندازه تزايد ورکړئ.
- د $\cos(x+\Delta x)-\cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنی انکشافي رابطې په مرسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکيل او له اطرافو څخه لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

2- د $y=\cos x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y=\cos x$$

$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$$

$$\Delta y=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$$

$$\Delta y=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\cdot 1$$

$$\boxed{y=\cos x \quad\Rightarrow\quad y'=-\sin x}$$

یا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$
$$(\cos x)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-2\sin x\cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ چې سره دی، نو:

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}(-2\sin x\cdot\cos x)$$
$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

که چیرې $y = \cos u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u - \cdot \sin u}$$

لومړی مثال: د لاندې توابعو مشتق پیداکړئ.

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$ 2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

حل: پوهېږو چې $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'\cdot v + v'u$ دی، نو:

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$
$$f'(x) = (2\sin x)'\cos x + (\cos x)'\cdot 2\sin x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$$
$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2\cos 2x$$

2) $f(x) = x - \sin x\cos x$
$$f'(x) = (x)' - (\sin x\cdot\cos x)' = (x)' - [(\sin x)'\cdot\cos x + (\cos x)'\cdot\sin x]$$
$$f'(x) = (x)' - [\cos x\cos x + (-\sin x\sin x)] = 1 - \cos 2x$$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو لومړی مشتق پیدا کړئ.

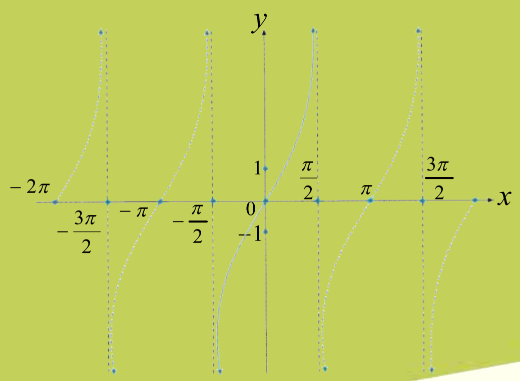
1) $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$ 2) $f(x) = \sin^2 x$ 3) $f(x) = \sec x$

4) $f(x) = \csc x$ 5) $f(x) = \frac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=\tan x$ تابع مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع راښيي.



فعالیت

- د $y=\tan x$ تابع د نسبت په شکل ولیکئ.
- د پورتني نسبت څخه مشتق ونیسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

3- د $y=\tan x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y=\tan x$$

$$y'_{(x)}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده‌کوونکو ته پرېږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y=\tan^3 x$$

حل: پوهیږو چې که $y=u^n$ وي نو مشتق یې $y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{aligned}u&=\tan^3 x\\ u'&=\sec^2 x\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \begin{aligned}y&=\tan^3 x\\ y'&=3\tan^2 x\sec^2 x\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y=\sec x\cdot\cot x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې تابع شکل د $y=u\cdot v$ شکل لري، نو:

$$y=\sec x\cdot\cot x$$
$$u=\sec x \quad\Rightarrow\quad u'=\sec x\tan x$$
$$v=\cot x \quad\Rightarrow\quad v'=-\csc^2 x$$

د u,v,u' او v' قیمتونه د $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$y'=\sec x\tan x\cdot\cot x+\sec x(-\csc^2 x)$$
$$=\sec x\tan x\frac{1}{\tan x}-\csc^2 x\sec x$$
$$=\sec x-\csc^2 x\sec x$$

پوښتني

د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

$a)\ \ y=\tan x\cot x$

$b)\ \ y=(x^2+x-1)\tan^2 x$

$c)\ \ y=\dfrac{1}{\tan x}$

$d)\ \ y=\tan x\sec x-\cot x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره وليکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

فعاليت

- د $y = 2x^2 - 4$ د تابع مشتق پيدا کړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ او ګراف يې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پيدا کولای شئ.

د يوه منحني خط معادله د وضعيه کمياتو په سيستم کې عبارت له $y = f(x)$ څخه ده، له دې ځايه $y - f(x) = 0$ کېږي او $y - f(x)$ يوه دوه متحوله تابع د x او y له جنسه ده، که $F(x,y) = y - f(x)$ تابع په پام کې ونيسو، نو د دې منحني معادله د $F(x,y)$ شکل غوره کوي؛ د مثال په ډول: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نو د $F(x,y) = 0$ له معادلې څخه لېکلای شو، چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ يا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو بېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي. په عمومي ډول د $F(x,y) = 0$ معادله کېدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y يو له بل څخه جلا وي، نو مشتق يې په آسانۍ پيداکولای شو، ولې په ځينو رابطو کې y له x سره يو ځای بيان شوي وي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نيولو کې که د x له جنسه مشتق نيسو، نو y يو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نيسو x ثابت فرضوو لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عمومي حالاتو کې چې که ضمني رابطه د $f(x,y)=0$ په شکل تعریف شوی وي؛ نو $y'(x)$ په لنډ ډول داسې محاسبه کېږي:

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته(} y \text{ ثابت دی)}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته(} x \text{ ثابت دی)}}$$

لومړی مثال: د $y=\sin\frac{x}{y}+1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi,1)$ په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: د $y-\sin\frac{x}{y}-1=0$ رابطې څخه $y'_{(x)}=\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پيدا کوو.

$$y-\sin\frac{x}{y}-1=0$$

$$\left.\begin{aligned} f'_{(x)}&=y'_x-(\sin\frac{x}{y})'_x-(1)_x\\ &=0-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-0=\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}\\ f'_{(y)}&=y'_y-(\sin\frac{x}{y})'_y-(1)_y\\ &=1-\frac{x}{1}\cos\frac{x}{y}-0=1-x\cdot\cos\frac{x}{y}\end{aligned}\right\}\Rightarrow y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1-x\cdot\cos\frac{x}{y}}=\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1-x\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi,1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)}=\frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1+\pi\cos\frac{\pi}{1}}=\frac{\cos\pi}{1+\pi\cos\pi}=\frac{-1}{1-\pi}$$

دويم مثال: د $x^2y+2y^3=3x+2$ رابطې ضمني مشتق پيدا کړئ.

حل:

$$x^2y+2y^3=3x+2$$

$$x^2y+2y^3-3x-2=0$$

$$f'_{(x)}=2xy+0-3-0=2xy-3$$

$$f'_{(y)}=x^2+6y^2-0-2=x^2+6y^2-2$$

$$f'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy-3}{x^2+6y^2-2}=\frac{3-2xy}{x^2+6y^2-2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پیداکړئ.

حل:

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

او یا په بله طریقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دویم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دویمې مرتبې د مشتق د پیداکولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اړیکې لومړی مشتق پیداکوو او بیا له دې رابطې څخه مشتق نیسو.

لومړی مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دویمه مرتبه مشتق $y''_{(x)}$ پیداکړئ.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او یا په بله طریقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه مشتق نیسو $y''_{(x)}$:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $x^2+xy+y^2-3=0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکی کې پیدا او پر منحنی د مماس معادله یې ولیکي.

حل: څرنگه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي نو نوموړی ټکی د منحنی پرمخ واقع دی؛ د $y'_{(x)}$ د پیداکولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې لیکلای شو:

$$f'_{(x)}=2x+y$$

$$f'_{(y)}=x+2y$$

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y} \quad , \qquad x+2y\neq 0$$

$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \;\Rightarrow\; y-1=-(x-1) \;\Rightarrow\; y=-x+2$$

او یا په بله طریقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$

$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$

$$2x+y+(x+2y)y'=0$$

$$(x+2y)y'+2x+y=0$$

$$(x+2y)y'=-2x-y$$

$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3=5y^3+x$ ضمني تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$

$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$

$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$

پوښتنې

1- د $x\sin y+y\cos x=5$ د رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

2- د $x^3+xy^2+y=3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

3- د $x^2+y^2=4x+4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوړې مرتبه(متوالي) مشتقات

د مخامخ تابع درې ځلې مشتق ونیسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونیسئ؟

$$f(x) = \sin x$$
$$f(x) = \cos x$$

فعالیت

- د $y = 2x^4 - 3x^3 - 2x - 1$ تابع مشتق پیداکړئ.
- د پورته تابع دویم مشتق پیداکړئ.
- د پورتني مشتق د تابع دریم ځل مشتق ونیسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نیولی شو؟
- د پورتنی تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که د $y = f(x)$ مشتق منونکی وي، لومړی مرتبه مشتق یې په $y' = f'_{(x)}$ ، دویمه مرتبه مشتق یې په $y'' = f''_{(x)}$ دریمه مرتبه مشتق یې په $y''' = f'''_{(x)}$ … په کلي ډول $n-$ام مرتبه مشتق د $y = f(x)$ تابع په $y^{(n)} = f^{(n)}_{(x)}$ علامت ښیو.

لومړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دریم مشتق په لاس راوړئ.

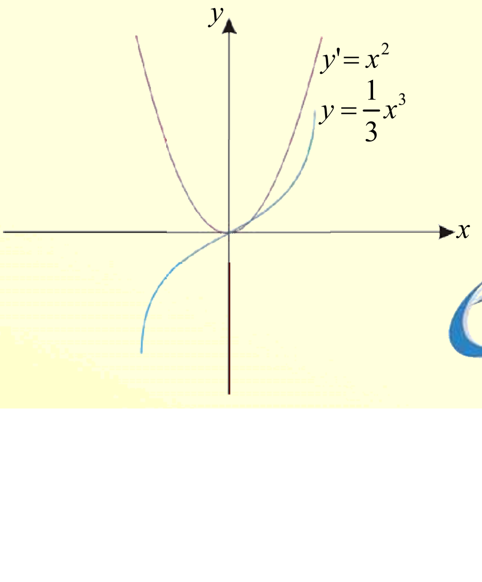
حل:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$
$$y'' = 6x - 6$$
$$y''' = 6$$

دویم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ د تابع ګراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$
$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$
$$y' = x^2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: که $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قیمت پیداکړئ.

حل: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق یا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$(y^{(9)})^2+y^2=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2$$
$$=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

څلورم مثال: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه ځلي مشتق پیداکړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

یادونه: که چیرې $n-$ام درجه‌یي څو جمله‌یي تابع $f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n \quad c_n\neq 0$ راکړې شوې وي $n-$ام مشتق یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{n(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ \dots\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{n(x)}=2c_2+6c_3x+\ \dots\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{n(x)}=6c_3+12c_4x+\ \dots\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^{n}_{n(x)}=n(n-1)(n-2)x\ \dots\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول که $k>n$ وي، نو: $f^{k}_{n(x)}=0$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو تر هغې مشتق پیداکړئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$ 2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ 4) $y=\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خېرکي مهم ټکي

- که چېرې د $P(x, f(x))$ او $Q(x+h, f(x+h))$ ټکي د $f(x)$ تـابع دوه اختیـاري ټکـي وي، نـو لاندې اړیکه د Newton خارج قسمت په نامه یادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحني میل په یوه اختیاري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د یوې تابع مشتق: د تابع او متحول د تزاید، د نسبت لیمیټ کله چې $\Delta x\to 0$ وکړئ، د مشتق په نامه یادېږي او په $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د (x_0) په یوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس میل د منحني سره د $(x_0, f(x))$ په ټکي کې دی.

که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په x_0 کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده؛ یعنې کېدای شي یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه دی.

د $f(x)$ د تابع مشتق د C پر منحني $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې د یوه منحني سره د مماس میل د هغې تابع د مشتق په نوم یادېږي.

که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو یوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د f تابع د (x_0-r, x_0+r) په فاصله کې($x_0=x$ په شاوخوا) کې تعریف شوې وي او د هغې لیمیټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې یو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منحني د $x=x_0$ په ټکي کې رسم کړو، د دې مماس میل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق قوانین:

$$1)\ f(x)=C \Rightarrow f'(x)=0$$
$$2)\ f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$$
$$3)\ f(x)=u\pm v \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$$
$$4)\ f(x)=u\cdot v \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$$
$$5)\ f(x)=\frac{u}{v}\ ,\ v\neq 0 \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$
$$6)\ f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$7)\ f(x)=\sqrt{u} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$
$$8)\ f(x)=\sqrt[n]{u} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع گانو مشتق:

$$1)\ y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x\ ,\quad y=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$
$$2)\ y=\cos x \Rightarrow y'=-\sin x\ ,\quad y=\cos u \Rightarrow y'=-u'\sin u$$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول n-ام ځلې مشتق یې $y^{(n)}=f^{(n)}_{(x)}$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دويم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x) = x^2 - x$ منحنی ميل د $P(3,0)$ په ټکی کې عبارت دی له:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- د $f(x) = 2x^2$ په تابع کې د f متوسط بدلون د $[3, 4]$ په انتروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- د $y = 2x^2 - 3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y' = 4x^2 + 3$ $b)\ y' = 4x + \frac{1}{2}x$ $c)\ y' = 4x + \frac{3}{x^2}$ $d)\ y' = 4x$

4 – د $f(x) = \sqrt{x-1}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5 – د $f(x) = 2x^2 + x$ تابع د $x = 1$ په ټکی کې د مماس خط معادله عبارت دی له:

$a)\ y = 5x - 5$ $b)\ y = x - 3$ $c)\ y = 5$ $d)\ y = 5x$

6- د $y = \frac{2x}{-x+4}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y' = -4x + 8$ $b)\ y' = -2$ $c)\ y' = \frac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y' = \frac{8}{(-x+4)^2}$

7 – د $y = (2 - x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y' = -6x^5 + 2x^3 - 24x$ $b)\ y' = 3(2 - x^2)^2$ $c)\ y' = 3(-2x)^2$ $d)$ هيڅ يو

8 – د $y = \sin x$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y' = \sin x$ $b)\ y' = \cos x$ $c)\ y' = -\sin x$ $d)\ y' = -\cos x$

9 – د $y = (1 + x^4)^{\frac{-1}{5}}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y' = -\frac{4}{5}x^3(1 + x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y' = -\frac{1}{5}(1 + x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y' = -4x^3$ $d)$ هيڅ يو

10– د $y = \frac{\cos}{1 - \cos x}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y' = \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2}$ $b)\ y' = \frac{-\sin x}{(1 - \cos x)}$ $c)\ y' = \frac{-\sin x}{(1 - \cos x)^2}$ $d)$ هيڅ يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې مفصل حل کړئ.

1. د $f(x)=\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

2. د $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\dfrac{\pi}{4}$ په ټکي کې پیدا کړئ.

6. د $f(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

7. د $y=\cos x$ تابع اتمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

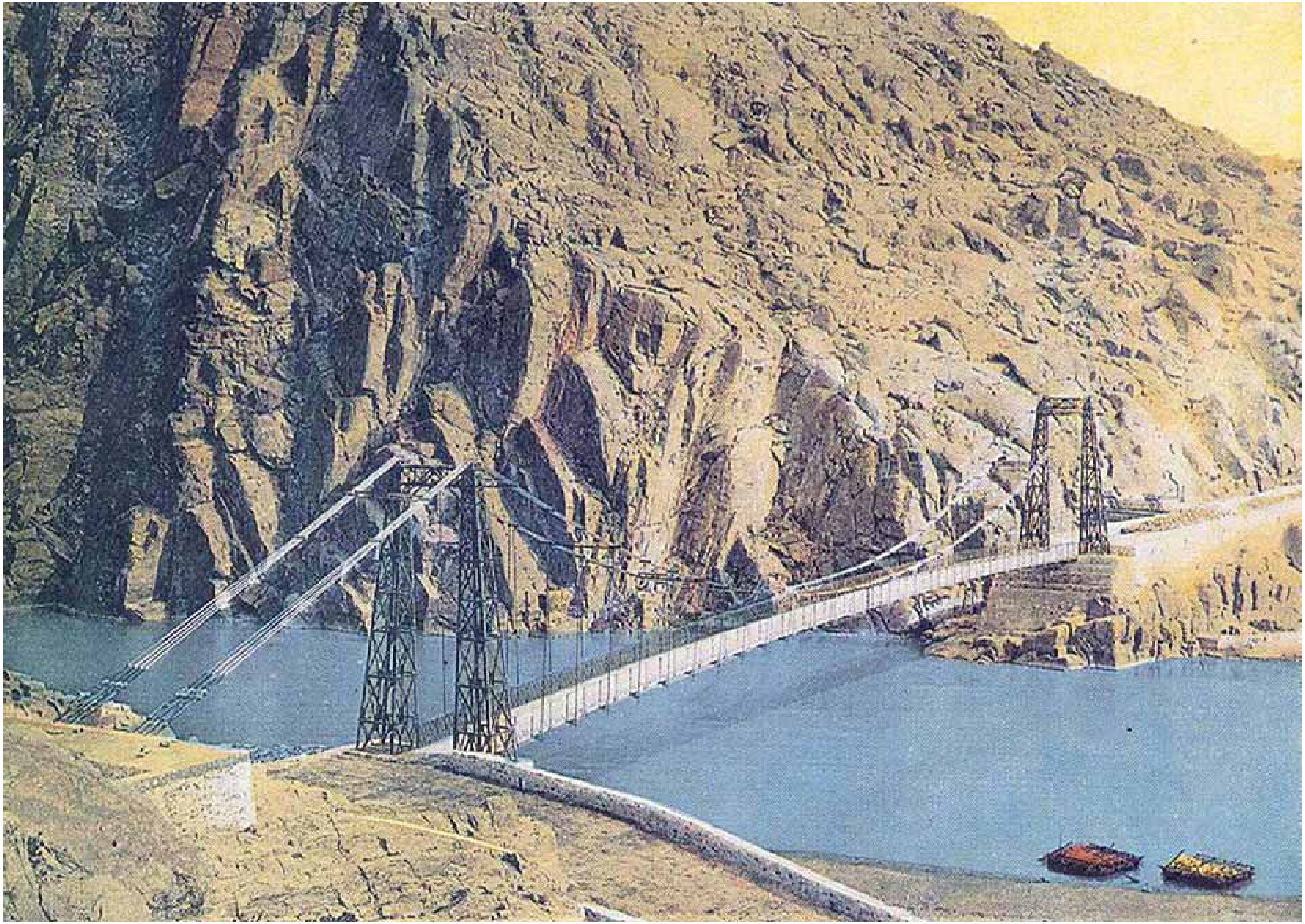
9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

درېيم څپرکی

د مشتق د استعمال ځايونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

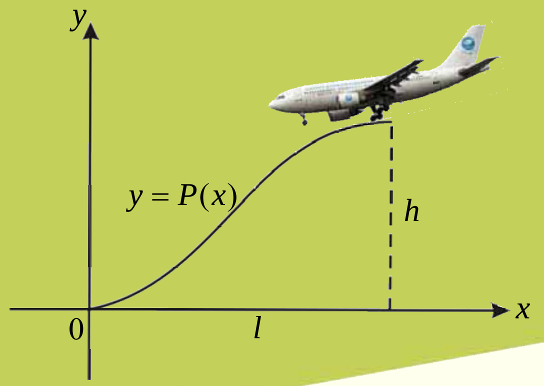
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د استعمال ځایونه

د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بیان کړئ.

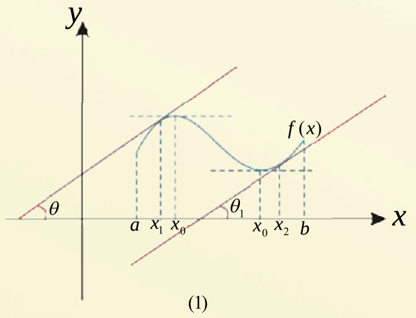


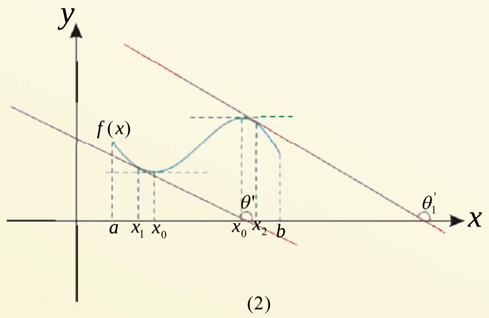
له مشتق څخه په ډیرو ځایونو کې لکه: (په فزیک کې د حرکت، سرعت او تعجیل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره حلیږي همدارنګه په کیمیا کې هم، د تابع د تحولات، د ځینو لیمیتونو په پیدا کولو کې) کار اخیستل کیږي چې ځینې ځایونه یې دلته تر څیړنې لاندې نیسو.

I- د یوې تابع تحولات:

فعالیت

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:





- متزایدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- په (1) شکل د (a,b) په انټروال کې د x_0 ، x_1 او x_2 په ټکو کې د رسم شویو مماسونو میلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو جګ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی په ګوته کړئ.

- په پورته شکلونو کې وښيي چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څيړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په (a,b) انتروال کې د مشتق وړ وي، نو که چيرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x)>0$ وئ، تابع په هغه انتروال کې متزايده بلل کيږي.

2- که چيرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او د (a,b) په انتروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کيږي.

يادونه: د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع د تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قيمت په زياتېدو سره د y يا تابع قيمت کم يا ثابت پاتې شي.

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع ګراف متزايد ده.

حل: څرنګه چې تابع کسري بڼه نه لري نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کيدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزايد شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2+3$$

ليدل کېږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی نو د x د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې $(+3)$ ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی نو تابع متزايده ده.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انتروال کې متناقصه ده؟

حل: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په هره انتروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، يعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x=\pm1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی نو تابع په همدې انټروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د تعریف ساحه پیدا او وروسته د تابع د تزاید شرط په کې څېړو:

$D_f \to IR$

$f(x) = 5x - 4$

$f'(x) = 5 > 0$

څرنګه چې $f'(x) > 0$ نو د ټولو قیمتونو لپاره همیشه مثبت دی. نو تابع متزایده ده.

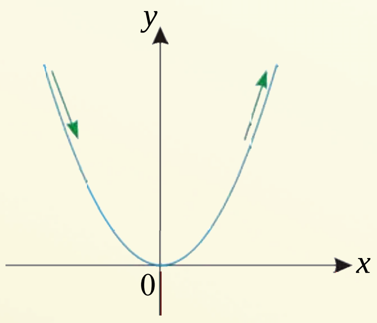
څلورم مثال: د $y = x^2$ د تابع ګراف ته څیر شئ او وښیئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y' < 0$ او که تابع متزایده وي $y' > 0$ څخه دی، نو لیکلای شو چې:

$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$

د تناقص شرط $y' < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$

د تزاید شرط $y' > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$



x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	4	↘	1	↘	0	↗	1	↗	4	↗	$+\infty$

د تابع له ګراف څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0, +\infty)$ په انټروال کې متزایده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $f(x)=ax+b$ د تابع تحولات وښئ؟

2- د $y=\frac{-3}{4}x-1$ د تابع تحولات وښيئ؟

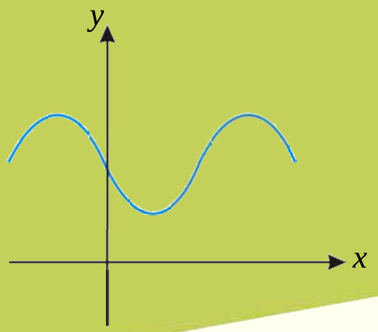
3- وښيئ چې د $f(x)=2x^2+3x+1$ تابع د $x=1$ په نقطه کې متزايده ده؟

4- د $y=x^2+3x+2$ د تابع د تزايد انتروال و ټاکئ؟

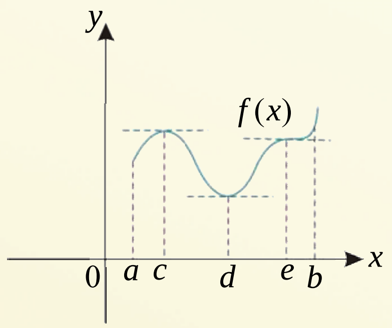
(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې تابع بحراني (*Extreme*) ټکي (اعظمي *Maximum* او اصغري *Minimum*)

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او ووايئ چې دا ټکي د څه په نامه يادېږي؟



که په لاندېني شکل کې د $f(x)$ تابع د (a,b) په انټروال کې د مشتق وړ وي.



- د متحول د قيمت په زياتوالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت لوېږي.
- د متحول د قيمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت کمېږي.
- د تابع تحولات په (c,d) او (d,e) انټروال کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ د تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

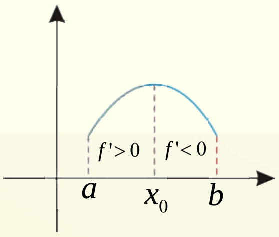
د يوې تابع په ګراف کې د y پر محور تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي(maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته د تابع اصغري(minimum) وايي، د x د هغو قيمتونو لپاره چې تابع اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د بحراني(Extreme) نقطو په نامه يادېږي.

تعریف:

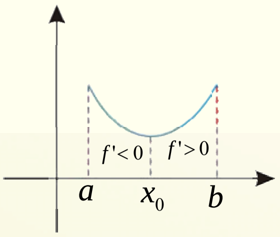
1- **ثابته تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق همیشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وایي.

2- **متزایده تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزایده بلل کېږي، یعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.

3- **متناقصه تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې منفي وي یعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.



(1)



(2)

1- **اعظمي ټکی**: که چیرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تزاید له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اعظمي (maximum) په نامه یادېږي.

2- **اصغري ټکی**: که چیرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزاید حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اصغري (minimum) په نامه یادېږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چیرې مشتق خپله اشاره د x_0 په یوه معین ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بیا مثبت ته یا له منفي څخه صفر او بیا منفي ته بدله کړي x_0 د انعطاف د نقطې په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ راکړل شوی ده دا تابع خو د (Extreme) تکی لري.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)}=3x^2-7x+2$$

$f'(x)=0$

$3x-1=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$

$x-2=0\Rightarrow x_2=2$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{17}{54}$ Max	↘	-2 ‖ -2	↘	Min	↗	$+\infty$

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او (2) په دوو نقطو کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني (Extreme) تکي لري.

دویم مثال: د $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع موضعی Extreme تکي یا نستبي تکي مشخص کړئ.

حل: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کیږي چې تابع د $y=\frac{u}{v}$ شکل لري، نو $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x)=0 \quad\Rightarrow -x^2-2x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=12$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{-2}=0.73$$

x		-3		-2.73		-1		0.73		1	
$f'(x)$	−		−	0	+		+	0	−		−
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{15}$	↘	Min	↗	0	↗	Max	↘	-2	↘

(c) ketabton.com: The Digital Library

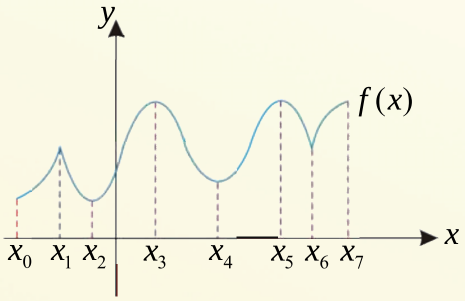
په جدول کې ښکاري چې f' د x_1 او x_2 دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه د Extreme ټکي لري، یعنې تابع اعظمي او اصغیر ټکي لري.

اعظمي او اصغري مطلق ټکي

کیدای شي یوه تابع په یوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په یوه ټاکلي انټروال کې تابع یوازې یوه مطلقه اعظمي او یوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې یې وښیئ؟

فعالیت

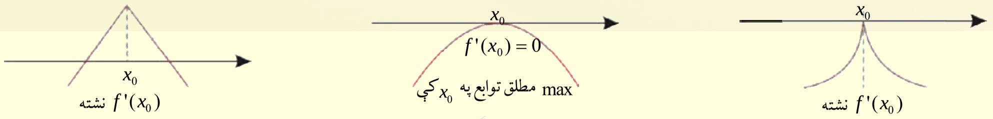
لاندینی شکل ته ځیر شي:



- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښیئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په ګوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

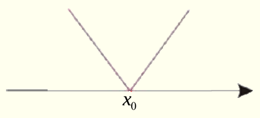
د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

مطلق اعظمي *Maximum*: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکي مطلق اعظمي بلل کیږي، که چیرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وایي لاندې شکلونه وګورئ.

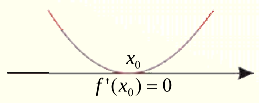


(c) ketabton.com: The Digital Library

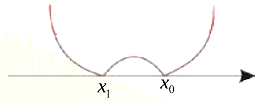
مطلق اصغري *Minimum*: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کيږي، کـه چيـرې د f د تعريف په ساحه کې د هر x لپـاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نـو پـه دې حالـت کـې $f(x_0)$ تـه مطلقـه اصغري وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپـاره تـابع يـا اعظمـي او يـا اصـغري قيمتونـه اخلـي د x دغه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.



$f'(x_0)$ نشته



min مطلق توابع په x_0 کې

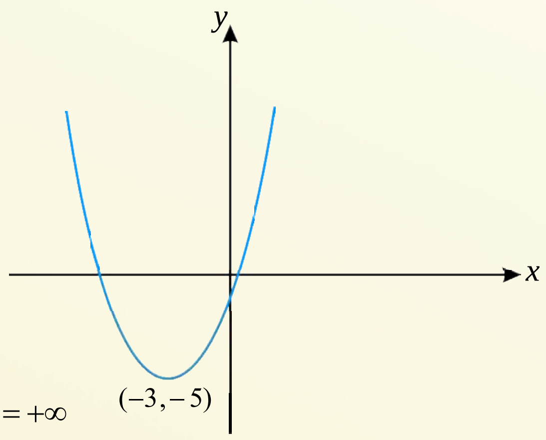


$f'(x_0)$ او $f'(x_1)$ نشته

لومړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغری پيداکړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$
$$f'(x) = x + 3$$
$$f'(x) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$f(-3) = -5$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} x^2 + 3\lim_{x\to\infty} x - 1\lim_{x\to\infty} - \frac{1}{2} = +\infty$$



x	$-\infty$	-4	-3	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{9}{2}$ ↘	-5 Min ↗	3 ↗	$\frac{15}{2}$ ↗	$+\infty$

په پايله کې د $x = -3$ په ټکي کې چې د تابع قيمت (-5) دی او تابع په $(-3, -5)$ ټکي کې مطلق اصغري لري.

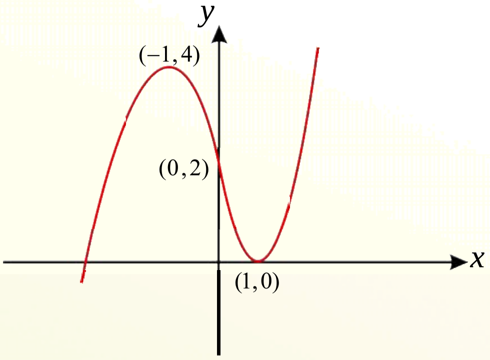
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیدا او رسم یې کړئ.

حل: د اعظمي او اصغري ټکو د پیداکولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پیدا او بیا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$$f(x)=x^3-3x+2$$
$$f'(x)=3x^2-3$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x^2=1$$
$$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$$
$$f(1)=1^3-3\cdot1+2=1-3+2=0$$
$$f(0)=0-3\cdot0+2=2$$
$$f(2)=2^3-3\cdot2+2=4$$
$$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(2)=4$$
$$Max\ f(2)=4 \qquad Min\ f(1)=0$$



x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{5}{6}$	↗	4 (Max)	↘	2	↘	0 (Min)	↗	4	↗ $+\infty$

له جدو څخه لیدل کیږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونوکې مطلقه متزایده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطخ اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د یوې تابع د ګراف رسمولو لپاره لاندې ټکي باید په پام کې ونیسو:

1. د تابع متمادیت او نامتمادیت مطالعه کړو.
2. د قایمو محورراتو سره د ګراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزاید او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پیداکول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتیبول او د هغوی په مرسته د ګراف رسمول.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د x او y له محورونو سره پیداکؤو:

د y له محور سره دګراف تقاطع د ټکو د پیداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$$x = 0 \qquad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی ګراف د y محور په $(0,2)$ نقطه کې قطع کوي.

د x د محور سره دګراف د پرېکړې د ټکو دپیدا کولو لپاره y مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمت پیداکوو:

$$y = 0 \ , \ 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$$

نو پورتنی ګراف د x محور په $(-1,0)$ او $(2,0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دویم مشتق څیړو.

$$y = 2 + x - x^2$$

څرنګه چې د تابع په اعظمي او اصغري په نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0 \ ، \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \ \Rightarrow \ 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپېژندنې له پاره دتابع دویم مشتق په $x = \frac{1}{2}$ ټکو کې څیړو:

$$y'' = -2 < 0$$

څرنګه چې y'' تل منفي دی نو په $x = \frac{1}{2}$ کې هم منفي دی څکه نو تابع په $x = \frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي قیمت لري څرنګه چې د $x = \frac{1}{2}$ لپاره $y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده: $(\frac{1}{2} ، 2\frac{1}{4})$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري ځکه چې دهر x لپاره $y'' < 0$ دی.

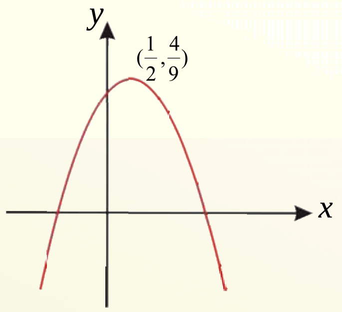
3- په $\pm\infty$ کې دگراف څیړل:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}(2+x-x^2) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2) = -\infty$$

د زیاتې روښانتیا لپاره لاندې جدول ترتیب شوی، او دتابع ټول بدلونو نه په هغو کې په‌ګوته کوو او وروسته نوموړی ګراف رسموو.

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	↗	0	↗	$2\frac{1}{4}$	↘	0	↘



پوښتنې

1- د لاندې توابعو موضعي Extreme و ټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2 - 3x + 2$ $\quad b)\ f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ $\quad c)\ y = 3x^2 - 4x + 1$

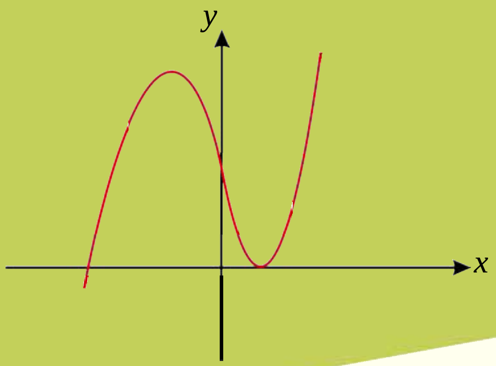
2- د $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ د تابع مطلقه min پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

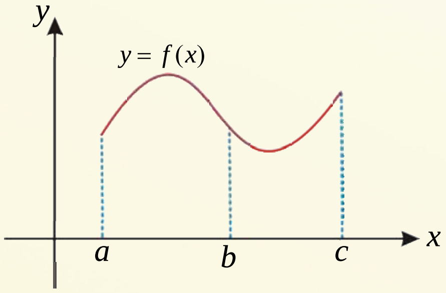
د انعطاف د نقطې ټاکل

هغه ټکي چې د يوې تابع گراف په هغې کې خپل محدبيت، مقعريت ته او يا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه يادېږي؟ آيا په دې ټکي کې د دويم مشتق علامه او قيمت څرګلاى شئ؟



فعاليت

لاندينۍ شکل په پام کې ونيسى.

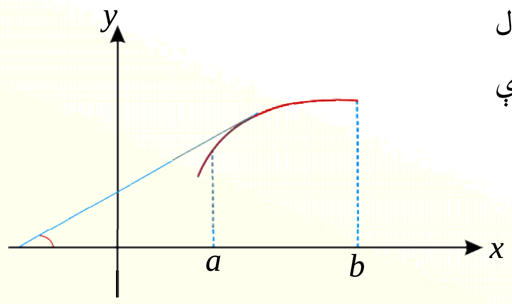


- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (a,b) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کيږي؟
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (b,c) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کيږي؟
- د (a,b) په انټروال کې په منحني يو مماس رسم کړئ او له هغه مماس سره يې پرتله کړئ چې د (b,c) په انټروال کې په منحني رسمېږي.

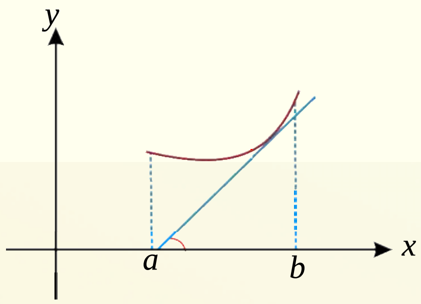
د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

1. د $y = f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې پرسيدلى يا محدب بلل کېږي، که چيرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه يا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دويم مشتق منفي $y''<0$ په لاس راځي.

په دې ډول که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې منفي وي، نو د تابع ګراف یا منحني په دې انټروال کې محدب پاتې کیږي.



2. د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې نتوتې یا مقعره بلل کیږي، که چیرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني نه لاندې یا ښکته خوا پروت وي، که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې مثبت وي $y''>0$ وي، منحني په دې انټروال کې مقعر بلل کیږي.



تعریف: هغه ټکې چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا ددې پر عکس په کې جهت بدلوي، د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کیږي.

که د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ټکې کې چې د تابع دویم مشتق صفر شي ($f''(x_0)=0$) وي تابع د $x = x_0$ په ټکې کې د انعطاف نقطه لري او ددې پر عکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

لومړی مثال: د $f(x) = x^2 - 5x + 4$ د تابع ګراف رسم محدبیت او مقعریت یې وڅیړئ.

حل: تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

1- د y له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

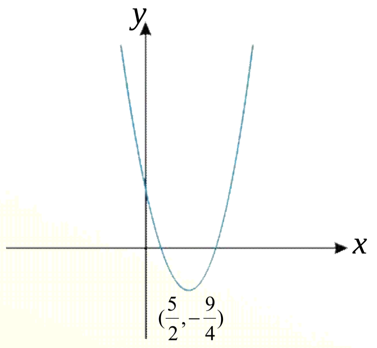
2- د x له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{matrix} y=0 \\ x^2-5x+4=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2-5x+4=(x-4)(x-1) \Rightarrow x_1=4 \quad , \quad x_2=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.

x	$-\infty$	0	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$4 \searrow$	$0 \searrow$	$-\frac{9}{4}$ min $\nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$



د ګراف، مقعريت او محدبيت د څيړلو لپاره د تابع دويم مشتق په لاس راوړو:

$f(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow y'=2x-5$

$f''(x)=2>0$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پايله کې ويلای شو چې منحني ننوتې يا مقعر دی.

دويم مثال: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب يا مقعر وي.

حل:

$y=x^3+9x^2-6x+1$

$y'=3x^2+18x-6 \Rightarrow y''=6x+18$

$y''<0 \Rightarrow 6x+18<0$

$6x<-18 \Rightarrow x<-3$

$y''>0 \Rightarrow 6x+18>0$

$6x\geq-18$

$x>-3$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$ محدب	انعطاف	$\cup$ مقعر

څرنګه چې ليدل کيږي د تابع دويم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي نو دا ډول ګراف په لومړي انټروال کې محدب او په دويم کې مقعر دی.

دريم مثال: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

حل:

$$f(x)=x^5-5x^3 \Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2$$
$$f''(x)=20x^3-30x$$
$$f''(x)=0$$
$$20x^3-30x=0$$
$$x(20x^2-30)=0$$
$$x_1=0$$
$$20x^2-30=0$$
$$x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	-13.65	$\cup$		$\cap$	$-6\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cup$	

ليدل کيږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x=0$, $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دويم مشتق صفر دی يا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکوکې مماس رسميدلی شي، چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.

پوښتني

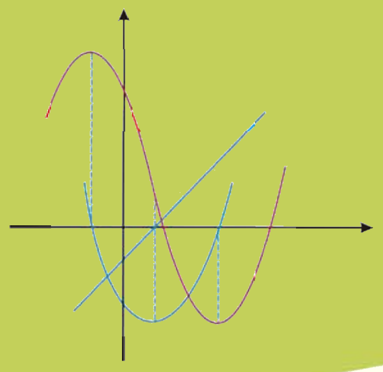
1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبيت او مقعريت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منحني‌ګانو رسمول
د دويمې درجې تابعګانو ګراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.



فعاليت

- د $f(x)=x+1$ د تابع ګراف د $f(x)=-x+1$ د تابع له ګراف سره پرتله کړئ.
- د $y=ax^2+bx+c$ د تابع د تعريف ساحه و ټاکئ آيا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړې تابع لومړی مشتق پيدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور يې وټاکئ.
- د تابع ليميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x\to\pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتيب او نوموړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- د تابع د تعريف ساحه: ليدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره ټاکلې ده، يعنې:

$$D_f\to(-\infty,+\infty)$$

نو تابع د خپل تعريف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x)=2ax+b=0$$
$$f'(x)=0$$
$$2ax+b=0$$
$$2ax=-b$$
$$x=\frac{-b}{2a}$$

د $x=\frac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c \Rightarrow a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=0$$

$$y=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac-b^2}{4a}$$

د $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکی بحراني یعني اعظمي یا اصغري دی.

الف: که $a>0$ وي، نو: $a>0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Min لري.

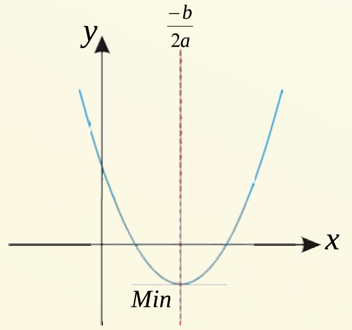
ب: که $a<0$ وي، نو: $a<0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Max لري.

3- د ګراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او ګراف یې رسموو:

$a>0$

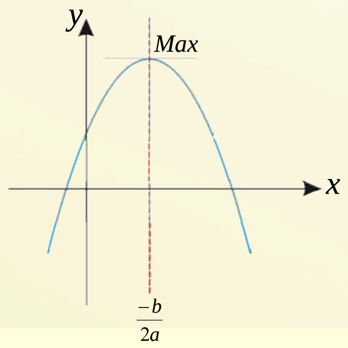
x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$-\infty$



خرنګه چې $a>0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.

$a<0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$-\infty$



خرنګه چې $a<0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=x^2-4x+3$ د تابع تحولات مطالعه اوګراف يې رسم کړئ.

حل:

1- د تابع د تعريف ساحه $(-\infty,+\infty)$ تابع د ټولو حقيقي قيمتونو لپاره ټاکلې ده، نو تابع په دې انټروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &y=0\\ &x^2-4x+3=0\\ &(x-1)(x-3)=0\\ &x-1=0 \Rightarrow x=1\\ &x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{aligned}\right\}\ (1,0)\ ,\ (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &x=0\\ &y=0-4\cdot0+3\\ &y=3 \end{aligned}\right\}\ (0,3)$$

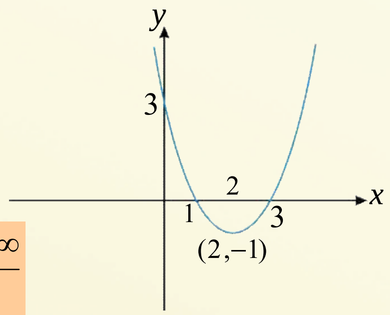
4- د تابع د extreme ټکو د پيداکولولپاره د لومړی مشتق صفري ټکي پيدا او جدول يې ترتيبوو:

$$f'(x)=2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

$$\left.f(2)=2^2-4\cdot2+3=-1\ \right\} \Rightarrow V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \Rightarrow f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$



x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
y'	−	−	−	+	+	
y	$-\infty$ ↘	3 ↘	0 ↘	−1 ↗ (Min)	0 ↗	$+\infty$

دويم مثال: د $f(x)=-x^2+2x$ د تابع تحولات مطالعه اوګراف يې رسم کړئ.

حل: ليدل کيږي چې تابع د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوې ده، نو:

1- د تابع د تعريف ساحه عبارت دی له: $(-\infty,+\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2 د تابع د منحني د تقاطع ټکی د x له محور سره:

$f(x)=0$

$-x^2+2x=0$

$x(-x+2)=0$ — د تقاطع ټکی

$x_1=0 \qquad (0,0)$

$-x+2=0$

$x_2=2 \qquad (2,0)$

-3 د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$x=0$

$f(x)=-x^2+2x$

$f(x)=0+2\cdot 0$

$f(x)=0 \qquad (0,0)$

-4 د تابع د extreme نقطو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$D_f \to (-\infty,+\infty)$

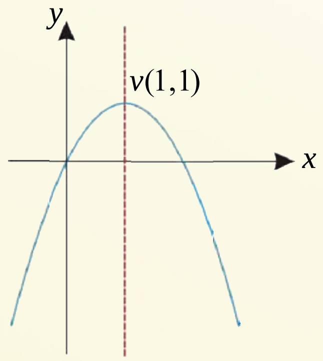
$f(x)=-x^2+2x$

$f'(x)=-2x+2=0$

$-2x+2=0$

$-2x=-2$

$\left.\begin{matrix} x=1 \\ f(1)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$



x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$		$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗	1 (Max)	↘	0	↘ $-\infty$

په جدول کې لیدل کیږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

پوښتنې

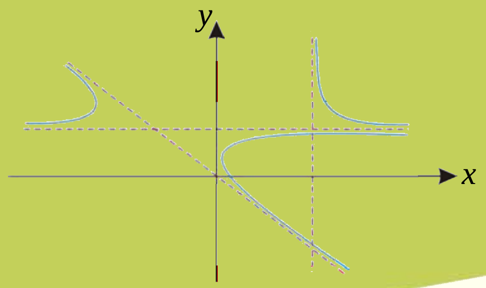
1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع ګراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د ګراف بدلونونه وڅیړئ او ګراف یې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو د ګرافونو مجانبونه

شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه یې واخلئ.

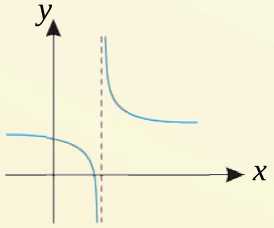


فعالیت

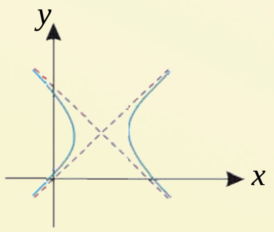
- مجانبونه څه دول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګان په کومو ټکو کې قطع کوي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

مجانبونه: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني لپاره د لاربنود حیثیت لري او د منحني کرښه غوځه کړي، هغه تابعګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي مجانبونه لري او په درې ډوله دي.

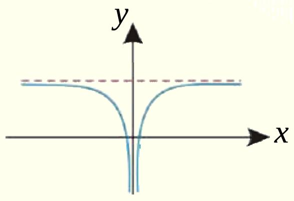


1- **عمودي مجانب**: د $y = f(x)$ تابع هغه عمودي مجانب لري چې $x \to a$ او $y \to \infty$ وکړي، یعنې $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابعګانو کې چېرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي نوموړې تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.



2- **مایل مجانب**: د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y = ax + b$) لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه او د متحول د مخرج درجه له درې څخه لوړه وي.

په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چیرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.



-3 **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده، چې که $x \to \infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې کـه $x \to \infty$ وکړي، نـو $y \to c$ ته تقرب کوي، یعني $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ شي.

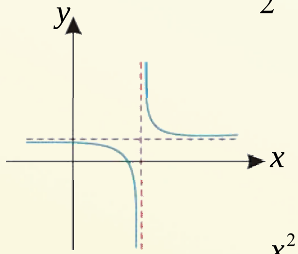
لومړی مثال: د $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي مجانب پیداکړئ.

حل: د عمودي مجانب د پیداکولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

افقي مجانب عبارت دی له: $y = \dfrac{1}{2}$

x	-1	0	$+1$
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1



دویم مثال: د $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$ د تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

حل:

-1 مایل مجانب: ددې مجانب د پیداکولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج وېشو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{x} \Rightarrow y = x+2$$

-2 عمودي مجانب: د دې مجانب د پیداکولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} \Rightarrow x = 0$$

-3 افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{matrix}x+1=0\\ x_1=-1\end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix}x-2=0\\ x_2=2\end{matrix}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پیداکولو لپاره د تابع لیمیټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنګه چې د تابع د صورت له وېش څخه پر مخرج د $y=ax+b$ خطي معادله پیدا نه شوه، نو تابع مایل مجانب نه لري.

د مجانبو د ټاکلو عمومي لاره:

که چیرې د $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې m او n په ترتیب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

الف: که $m<n$ وي، نو د x محور افقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې b د m او n د درجو د حدودو د ضریبونو نسبت دی.

ج: که چیرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مایل مجانب احتمال یې شته.

د: که چیرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د یوه واحد په اندازه له مخرج څخه لویه وي) تابع هرو مرو مایل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

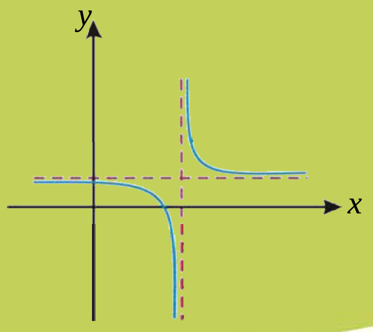
1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$ 2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوموګرافيک تابع ګانو ګراف

شکل ته پاملرنه وکړئ دا شکل د څه ډول تابع ګراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه يې وښيئ.



- هوموګرافيک تابع څه ډول تابع ده، په يوه مثال کې يې واضح کړئ.
- د $y=\frac{1}{x}$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پيدا او بيا يې رسم کړئ.
- د تابع د ګراف تقاطع د x او y له محورونو سره پيدا کړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

هغه تابعګانې چې د $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموګرافيک تابعګانې بلل کېږي، داسې چې $c\neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب يې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} \Rightarrow y=\frac{a}{c}$$

2- عمودي(قايم) مجانب يې:

$$cx+d=0 \Rightarrow cx=-d \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. څرنګه چې د تابع مخرج د $x=3$ په قیمت کې صفر کېږي نو تابع پرته د $x=3$ څخه د متحول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعني د تابع د تعریف ساحه ټاکو: $Domin = IR \setminus \{3\}$

2. د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \\ 2x-1=0 \\ 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{array}\right\} (\frac{1}{2},0)$$

3. د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \quad \Big\} (0,\frac{1}{3})$$

4. د مجانبونو ټاکل:

الف- افقي مجانب: $y=2$ ، $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-3}=2$ یا $f(x)=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$

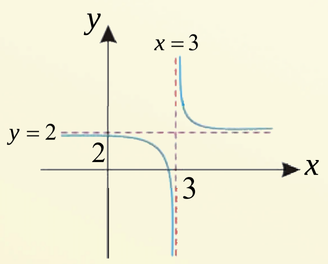
ب- عمودي مجانب: $x=3 \Leftarrow x-3=0$ یا $x=-\frac{d}{c}=-\frac{-3}{1}=3$

5. د تابع د extreme ټکي پیدا کوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↘	نه دی تعریف شوی	↘ $+\infty$



دویم مثال: د $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ د تابع د ګراف بدلونونه و څېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

1- د تابع د تعریف ساحه $D_f \to IR\setminus\{-1\}$ یعني تابع په $x=-1$ ټکي کې تعریف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

الف- عمودی مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- افقي مجانب: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

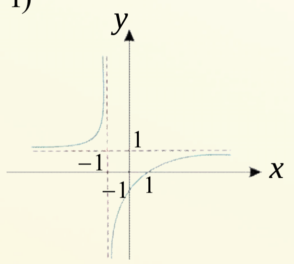
5- د تابع extreme نقطې پیدا کوو، جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$	-1	
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$1 \searrow$	نه دی تعریف شوی	$\nearrow 1$



دریم مثال: غواړو د $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ تابع ګراف رسم کړو.

حل:

1- د تابع د تعریف ساحه تر څېړنې لاندې نیسو لیدل کېږي چې تابع پرته د $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده، یعنې: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محورونو سره د تقاطع ټکي

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب- د y له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوي نه ده، نو د y محور سره تقاطع نه لري.

3- **مجانبونه**:

الف- عمودي مجانب: څرنګه چې په مخرج کې یوازې x موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د y محور کېږي.

ب- افقي مجانب: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x-5}{x}\right]=2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پیداکول: د بحراني ټکو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو

$$f(x)=\frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}$$

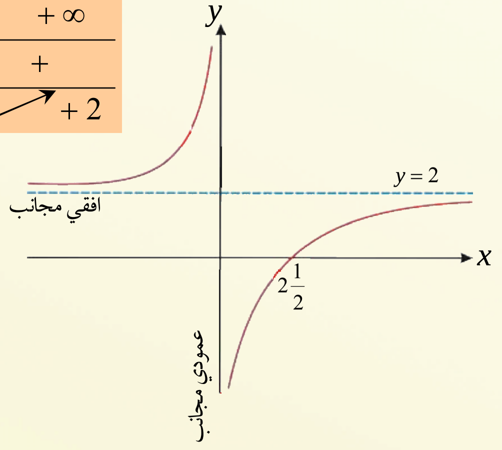
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

څرنګه چې $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزایده ده.

د ګراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

x	$-\infty$		0		2.5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	2 ↗	$+\infty$		$-\infty$ ↗	0 ↗		$+2$

نه دی تعریف شوی



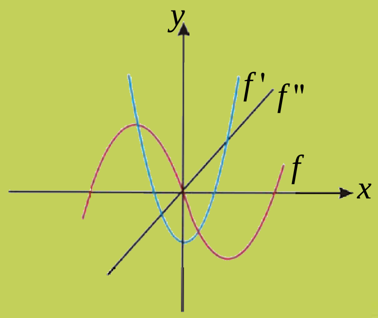
پوښتني

1. د $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.
2. د $f(x)=\frac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دريمې درجې يو مجهوله تابع ګراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$

مخامخ شکل د ځينو توابعو ګرافونه راښيي تاسې د هرې تابع د ګراف په هکله خپل نظر بيان کړئ.



فعاليت

- د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووايئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
- د نوموړې تابع ضريبونه او ثابت حد وليکئ.
- د نوموړې تابع دويم مشتق پيدا کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

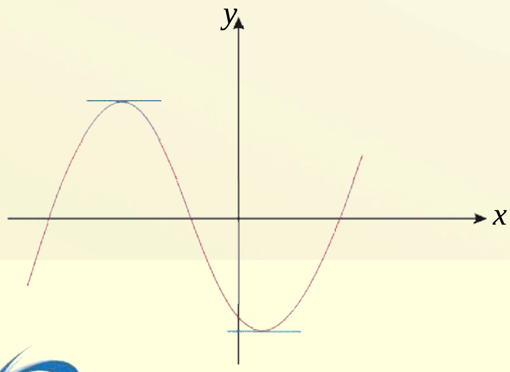
1. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دريمه درجه تابع کې چې $a > 0$ وي داسې په پام کې نيسو که چيرې د تابع لومړی مشتق پيدا کړو دويمه درجه تابع په لاس راځي، نو د $f'(x) = 0$ لپاره د دويمې درجې د معادلې حل په پام کې نيسو او Δ يې مطالعه کوو که چيرې د معادلې Δ له صفر څخه لوی $(\Delta f' > 0)$ وي، نو معادله(د تابع مشتق) دوه حله لري، که چيرې $a > 0$ وي منحنی له کين لوري څخه ښي لوري ته يوه نسبي اعظمي نقطه(Maximum) او يوه نسبي اصغري(Minimum)لري.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f' > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$		$\searrow$		$\nearrow +\infty$

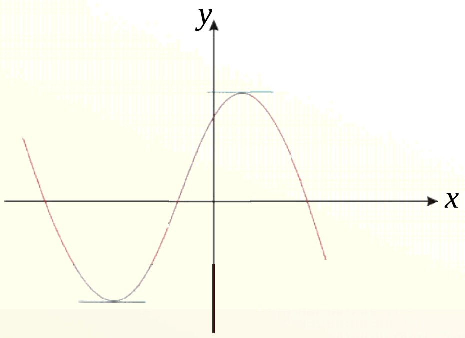


(c) ketabton.com: The Digital Library

2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، په تابع کې چې $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادله دوه جذرونه لري، که چېرې $\Delta f'>0$ نو منحني دکېن لوري څخه ښی لوري ته يوه نسبي اصغری(Minimum) او يوه نسبي اعظمي(Maximum) نقطه لري.

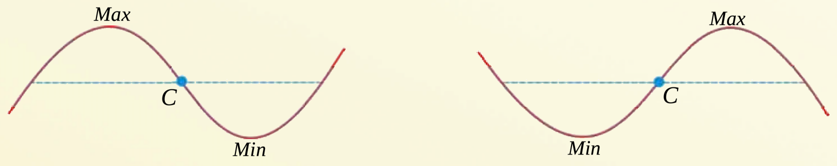
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$a<0 \Rightarrow \Delta f'>0$$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \searrow$		$\nearrow$		$\searrow +\infty$



3. که د درېمې درجې تابع منحني نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme ټکو د منځني ټکي يا د انعطاف د نقطې مختصات يې:

$$I(x_c,y_c)=\left(\frac{x_{max}+x_{min}}{2},\frac{y_{max}+y_{min}}{2}\right)$$



4. د درېمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

$$f'(x)=0$$
$$3ax^2+2bx+c=0$$

چې د تناظر ټکي يې وروسته د نوموړې معادلې د حل څخه د تناظر مرکز $x=-\frac{b}{3a}$ په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې چې $a<0$ وي او $f'(x)=0$ سره وضع شي او $\Delta f'(x)=0$ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\le 0$ وي، نو په دې صورت تابع متناقصه ده او که چیرې $f'(x)\ge 0$ وي نو په دې صورت کې تابع متزایده ده.

(2) (1)

لومړی مثال: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته ګورو چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده د محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې ګراف رسموو: $f(x)=x^3+3x^2-4$

$$f'(x)=3x^2+6x$$
$$3x^2+6x=0$$
$$x(3x+6)=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \;\Rightarrow\; x_2=-2$$
$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$$
$$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$$
$$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$$
$$=-8+12-4=0$$
$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 6x+6=0$$
$$6x=-6$$
$$x=-1$$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

د محورونو سره تقاطع:

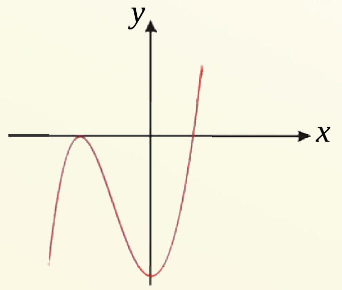
الف- د x له محور سره تقاطع:

$$y=0$$
$$(x-1)(x+2)^2=0$$
$$\left.\begin{matrix} x-1=0 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x_2=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1,0)\ ,\ (-2,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$x=0$$
$$y=0^3+3\cdot0^2-4=-4 \Rightarrow (0,-4)$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	−	+	
$f''(x)$	−	−	+	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 (max) ↘	-2 ↘	-4 (min) ↗	$+\infty$



دويم مثال: د $f(x)=-x^3+3x^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف رسم کړئ.

حل: د تابع لومړی مشتق پيداکوو او وروسته يې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راوړو.

-1

$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f'(x)=-3x^2+6x$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow -3x^2+6x=0 \Rightarrow x(-3x+6)=0$$
$$x_1=0\ ,\ -3x+6=0 \Rightarrow -3x=-6 \Rightarrow x_2=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \\ f(2)=-2^3+3\cdot 2^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\ \ (2,4)$$

2- د محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ -x^3+3x^2=0 \\ x^2(-x+3)=0 \\ x_1=0\ \ ,\quad -x+3=0 \\ \qquad\qquad x_2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\quad ,\qquad (3,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

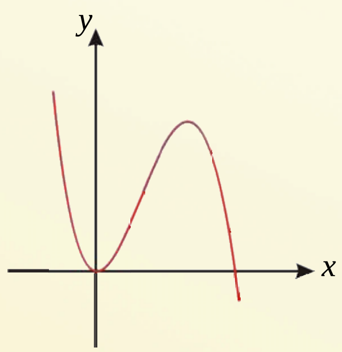
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

3- د انعطاف د نقطې د پیداکولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x)=-6x+6=0$$
$$x=1$$
$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f(1)=2 \ \Rightarrow\ I(1,2)$$

4- اوس يې جدول ترتيبوو او ګراف يې رسموو:

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$-$
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗	2	↗	4	↘ $-\infty$
		نسبي Min				نسبي Max	



(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې د تناظر مرکز د $x = \frac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x = \frac{-b}{3a} = \frac{-(-3)}{3\cdot 1} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 1 + 1 = 0$$

$C(1,0)$ د تناظر د مرکز مختصات

پوښتني

1. د لاندې تابعګانو د تحولاتو جدول ترتیب او ګرافونه یې رسم کړئ.

$a)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1 \quad , \quad b)\ f(x) = -(x-1)^3$

2- د $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$ د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

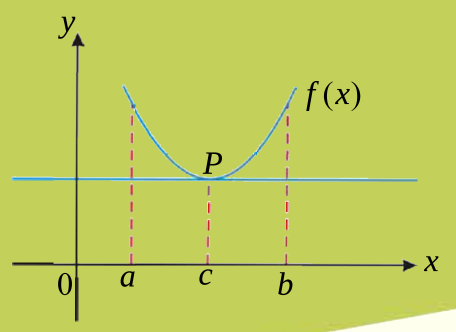
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رول قضیه

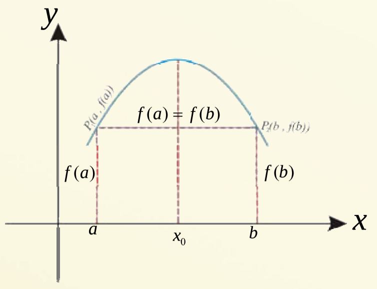
Rolle Theorem

په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د Δ مستقیم خط یو له بل سره څه اړیکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.



فعالیت

- په مخامخ شکل کې د (a,b) په انټروال کې د $f(x)$ په منحني داسې ټکي شته چې له هغو څخه په منحنی داسې مماس رسم شي چې د x له محور سره موازي وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړده.
- که چیرې $f(a)=f(b)$ وي، نو د x_0 ټکي په (a,b) انټروال کې وښیئ.



د پورتني فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:

قضیه: که چیرې د $f(x)$ تابع د $a\le x\le b$ په انټروال کې متمادي او د $a<x<b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a)=f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د x_0 یو ټکی په $a<x<b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0)=0$ شي.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوي انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکي لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

-2 که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1) > 0$ وي، نو تابع په $x_0 \in [a,b]$ کې یو Maximum قیمت لري چې $f(x_0) \ge f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2) < 0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

څرنګه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0) = 0$ کیږي.

لومړی مثال: د رول قضیه د $f(x) = \cos x$ د تابع لپاره په $[a,b] = (\pi, 5\pi)$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: څرنګه چې $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ سره وي نو د $f(x)$ تابع د هر x لپاره د مشتق وړ ده نو د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi, 5\pi)$ کې لږ تر لږه یو x_0 موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $(\cos x)' = 0$ شي. څرنګه چې $(\cos x)' = -\sin x$ دی، نو باید $-\sin x = 0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi, 5\pi)$ کې موجود وي.

$-\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ کې درې حله $4\pi, 3\pi, 2\pi$ قیمتونه اخیستلای شي.

دویم مثال: د رول قضیه د $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ تابع په $[a,b] = [-1,1]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: لیدل کیږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(-1) = f(1) = 0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ کې متمادي ده او په $[-1,1]$ کې د x_0 یو عدد شته چې $f'(x_0) = 0$ شي او هغه $x_0 = 0$ دی.

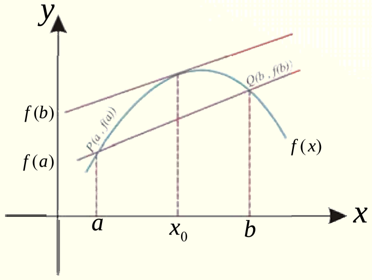
د $y'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره مشتق په لاس راورو:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوسط قیمت قضیه (لاگرانژ قضیه):

مخامخ شکل په پام کې و نیسئ:



- د یوې مستقیمې کرښې میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کرښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتنی فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

قضیه: که چیرې $f(x)$ د $[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د (a,b) په فاصله کې د مشتق وړ وي د (a,b) د انتروال څخه د c یو عدد شته دی داسې چې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یعنې: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کیږي چې:

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{......... I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{......... II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د c عدد د (a,b) انتروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په $[a,b]=[1,3]$ کې وڅېړئ.

حل: لیدل کېږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قیمت له قضیې سره سم په $(1,3)$ کې یو x_0 شته داسې چې:

$$f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پیداکولو لپاره لرو:

$$f'(x_0)=6x^2-8=18\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$$

څرنګه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې ګډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

پوښتنې

1- که چیرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوي وي د x_0 قیمت داسې پیداکړئ چې د رول قضیه په پورتني تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوي وي د x_0 قیمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د هوپیتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بیانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

فعالیت

- د $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کی پیدا کړئ چې $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\dfrac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا قاعده بیانو:

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د (a,b) په انتروال کې تعریف او د مشتق ور وي.

که چیرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لېمیټ نسبت $x\to a$ قیمت کې د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او یه $x\to\infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لېمیټ د پیدا کولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي مشتق نیولو ته ادامه ورکوو n... تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}=0$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

یا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د لوپیتال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره د لاندې توابعو لیمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x} \qquad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3} \qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$$

لومړی ځواب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

دویم ځواب:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

دریم ځواب:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

پوښتنې

د لوپیتال د قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

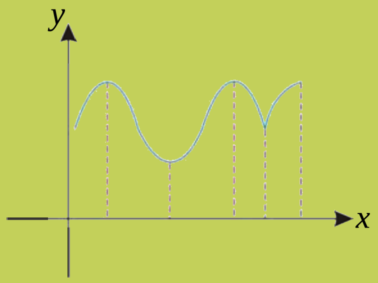
$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\ , \qquad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}\ , \qquad d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{3x^3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بحراني ټکو تطبيق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او دا ټکی د څه په نامه ياديږي.



1- دوه عددونه پيدا کړئ چې مجموعه يې 20 او د ضرب حاصل يې لوی ممکن قيمت ولري.

حل: که لومړی عدد ته x وويل شي، نو دويم عدد $20-x$ دی او د ضرب حاصل يې د تابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ ليکو، څرنګه چې د x عدد په $[0,20]$ انټروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قيمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot20-20^2=400-400=0$$

ليدل کيږي چې (10 ، 100) د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل يې 100 دی.

2- د يوه خوځنده جسم د حرکت معادله د $x=(t-2)(t-3)$ په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ.

حل: د منځنی سرعت د تعريف په مرسته ليکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- دکرې د حجم او سطحې تر منځ منحنی نسبت پیدا کړئ.

حل:

$$\text{دکرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{دکرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4- د سانتي ګراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر منځ منحنی نسبت وټاکئ.

حل: د منحنی سرعت د تعریف $(V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F)-C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32)-\frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیدا کړئ.

حل: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په x او سور یې په y وښیو، نو لیکلای شو:

$$\text{میحط} = 2x + 2y = 200$$

$$\text{میحط} = x + y = 100 \quad \Rightarrow y = 100 - x$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y$$

$$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$$

$$x > 0 \quad , \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \quad \Rightarrow x < 100$$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انتروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیدا کوو:

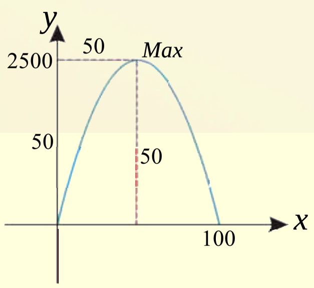
$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 50 \quad \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} S(x) = 0$$

x	0		50		100
S'		+	0	−	
S	0	↗	2500	↘	0



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

حل: که چیرې دا عددونه x او y وي، نو $x+y=200$ او که x ، $x^2+y^2=T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)}=x^2+y^2$$
$$=x^2+(200-x)^2$$
$$=x^2+x^2-400x+(200)^2$$
$$=2x^2-400x+40000$$
$$T'_{(x)}=4x-400$$
$$T'_{(x)}=0$$
$$4x-400=0$$
$$x=100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنی مجموعه عبارت دی له: $T_{(100)}=20000$

7- د A ټکی د $y=\dfrac{2}{x}$ د منحني له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انتروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدي ترمنځ لاسته راوړو.

حل: د $y=\dfrac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x,\dfrac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2_{(A)}+y^2_{(A)}}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$
$$\overline{OA}^2=x^2+\frac{4}{x^2}=d^2 \Rightarrow d'_{(x)}=(x^2)'+(\frac{4}{x^2})'=2x-\frac{8x}{x^4}=2x-\frac{8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=\frac{2x^4-8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=0$$
$$2x^4=8$$
$$x_1=\sqrt{2} \quad , \quad x_2=-\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2+\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2+\frac{4}{2}=\frac{8}{2}=4$$
$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدا څخه 2 واحد مربع ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

8- یو مکعب مستطیل چې قاعده یې مربع ده، په پام کې نیسو، که د دریو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پیدا کړئ.

حل: که د مکعب مستطیل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته یې y وویل شي، نو:

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

څرنګه چې $y \geq 0$ دی، نو $0 \leq x \leq 12$ کېږي او د مکعب مستطیل حجم عبارت دي له:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24-2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$V = 24x^2 - 2x^3$

$V'(x) = 48x - 6x^2$

$V'(x) = 0$

$48x - 6x^2 = 0$

$x(48-6x) = 0$

$x_1 = 0$

$48 - 6x = 0$

$-6x = -48$

$x = 8$

$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0 - 0 = 0$

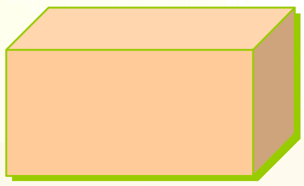
$V'(0) = 0$

$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3 = 1536 - 1024 = 512$

$V(8) = 512$

$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$

$V(12) = 0$



نو د مکعب مستطیل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.

پوښتنې

1- د $y = x^3 + x^2 + x + 1$ د تابع تحولات پیدا او منحني یې رسم کړئ.

2- دوه داسې عددونه پیدا کړئ چې د جمعې حاصل یې 20 او د ضرب حاصل یې تر ټولو لوی ممکن قیمت ولري.

3- که د اوسپنې له یوې تختې څخه چې هره ضلعه یې $1m$ طول لري یو سر خلاص بکس جوړېږي د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربعګانې پرې کړئ او بیا هغه قاط کړئ کوچنۍ مربعګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

4- د $y = x^2$ ګراف ته ډېره نژدې نقطه له $A(0,3)$ نقطې سره پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متزایده بلل کېږي، چې د $[a,b]$ په انټروال کې پیوسته او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي، چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د تابع له تزاید څخه مطلب دا دی چې د x د متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت زیات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت کم شي.
- په یوه تابع کې تر ټولو جګې نقطې ته موضعي اعظمي(Local Maximum) او تر ټولو ټیټې نقطې ته موضعي اصغري(Local Minimum) وایي، د x هغه قیمتونه چې د هغوی لپاره تابع یا اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د Extreme په نامه یادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وایي.
- مطلق Minimum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وایي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دویم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دویم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف(Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابعګانې چې د $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموګرافیک تابعګانو په نامه یادېږي، په دې شرط چې $c \neq 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ ترلږه د x_0 یو ټکی په $a < x < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0) = 0$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادیږي.
- که چیرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د (a,b) په خلاصه فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي د x_0 یو عدد د a او b ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کیږي.

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعگانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چیرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لیمیټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لیمیټ د پیدا کولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي مشتق نیولو ته دوام ورکوو ...n تر څو د ابهام شکل ختم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دریم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که یوه تابع په $[0,b]$ انتروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزاید ده چې :

$a)\ f'(x)=0 \quad b)\ f'(x)<0 \quad c)\ f'(x)>0 \quad d)\ f'(x)\geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو جګې نقطې ته:

a) Minimum وایي   b) Infliction وایي   c) Maximum وایي   d) هیڅ یو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکی عبارت دی له:

a) دوه ټکي   b) یو ټکی   c) درې ټکي   d) نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوي:

a) د اعظمی ټکی دی   b) دانعطاف ټکی دی   c) اصغری ټکی دی   d) هیڅ یو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه عبارت له :

$a)\ (-\infty\,,+\infty) \quad b)\ (-\infty\,,0) \quad c)\ (0,-\infty)$ d) هیڅ یو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

$a)\ x=1 \quad b)\ x=2 \quad c)\ x=-1 \quad d)\ x=-2$

7- د هوموګرافیک تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

$a)\ y=\dfrac{a}{c} \quad b)\ x=-\dfrac{d}{c} \quad c)\ y=\dfrac{c}{a} \quad d)\ y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقی مجانب عبارت دی له:

$a)\ 4 \quad b)\ 6 \quad c)\ -6 \quad d)\ -4$

9- لاندې کومه الجبري اړیکه حقیقت لري:

$a)\ \lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \quad b)\ \lim_{x\to x_0} f(x)=f'(x) \quad c)\ \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ d) هیڅ یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x) = x^2 - x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

2. د $f(x) = -x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انتروال کې د منحنی د بدلون ټکي پیدا کړئ.

3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 2x$ 2) $f(x) = 3x^2 - 1$ 3) $f(x) = \sqrt{2}x$

4. د لاندنیو تابعګانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$ 2) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$

5. د لاندې تابعګانو د مشتق تابع پیدا کړئ.

1) $f(x) = 2x - 4x^2$ 2) $f(x) = 3x^3 - 1$ 3) $f(x) = \sqrt{2}x$

6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابعګانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x) = 7x^2 - 3x$, $x_0 = -1$

2) $f(x) = 6x^2 - 2x - 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$

7. د $f(x) = 3x^5 - 4x^2 - 3x$ د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې ګراف رسم کړئ.

8. د $x^2y + 6y^3 = x - 3$ د تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

9. د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = x^3 \sec x$ 2) $f(x) = \sin(3x - 1)$ 3) $f(x) = \cos^2 2x$

10. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟

11. د $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

12. د $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

13. د $f(x) = \sin x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

14. د $f(x) = \tan x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

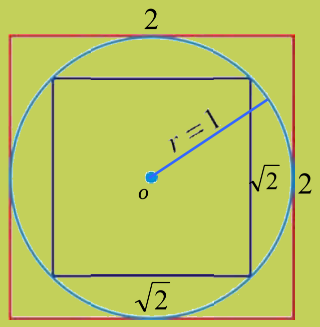
څلورم څپرکی

انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریمان مجموعه

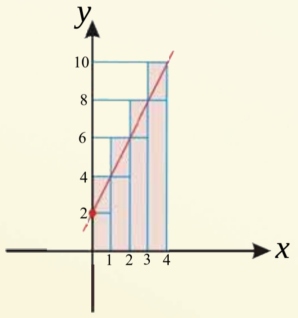
Riemann's Sum



په مخامخ شکل کې چې که د دایرې شعاع یو واحد ده، د دایرې د محیطي او محاطي څلور ضلعي ګانو مساحت حساب کړئ او وواياست چې ددې دایرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي ګانو سره څه اړیکه لري؟

فعالیت

- هغه مساحت چې د x د محور او $f(x)=2x+2$ د تابع د ګراف په منځ کې د $[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y=2x+2$ تابع په ګراف کې د څلورو لاندینيو او پورتنيو مستطیلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوی دی پیدا کړئ.



- د پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه، او د لاندینیو مستطیلونو د مساحت مجموعه د تابع د ګراف د لاندینی مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړیکه لري؟
- د پورته په څېر فعالیت د اتو مساوي لاندینیو مستطیلونو او د اتو مساوي پورتنیو مستطیلونو لپاره تکرار کړئ او پایله یې د ګراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چیرې د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او لاندینیو مستطیلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په ګراف کې د فاصلې ویش زیات کړو د پورتنیو او لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه کوم قیمت ته نږدې کیږي.

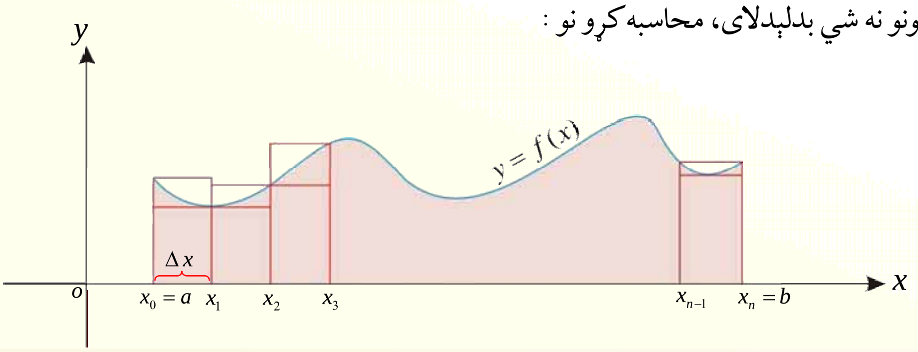
---

[1]- که چیرې د x په محور د فاصلو تقسیمات زیات کړو او یا که چیرې په یوه فاصله کې د مستطیلونو شمیر زیات شي په هم هغه اندازه د ګراف لاندني مساحت د قیق په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه لاندي تعریف لاسته راځي:

تعریف: فرضوو چې د $y = f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترلي انټروال کې متمادي او تعریف شوې وي که چیرې د ناحیې مساحت چې د x د محور او $y = f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو نو:



د $[a,b]$ ترلي انټروال چې په n مستطیلو نو وېشو، څرنګه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی تابع قیمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطیلونو د هر انټروال اوږدوالی د $i = 1, 2, 3, \ \dots \ , n$ لپاره په لاندي ډول دي:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x \dots, x_i = a + i\Delta x, \ \dots \ , x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3], \ \dots \ ,[x_{i-1}, x_i], \ \dots \ ,[x_{n-1}, x_n]$$

که په شکل کې د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ \dots \ + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ \dots \ + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که چیرې محصور شوی مساحت په A وښیو نو: $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چیرې د رابطې له اطراف څخه لیمیټ ونیسو نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساندویچ د قضیې پر بنسټ لیکلای شو؛ چې: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = A$

نو $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان مجموع او دې مجموعې لیمیټ یعنې $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لیمیټ وایي.

لومړی مثال: د $[0,2]$ انټروال په څلور مساوي برخو وویشئ، د $y = x^2+1$ منحني، او x محور ترمنځ مساحت پیدا کړئ.

حل: که چیرې $[0,2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وویشو؛ نو د مستطیلونو عرض داسې په لاس راځي:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

ددې مستطیلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دی له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a+\Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a+2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a+3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1] \;,\; [x_1, x_2] \;,\; [x_2, x_3], \ldots\ldots\ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

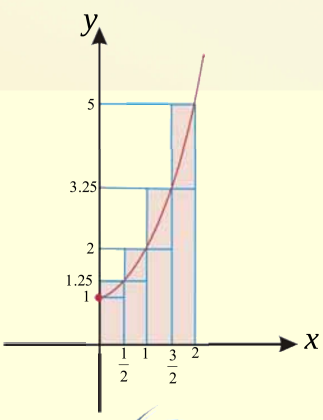
$$[0,\frac{1}{2}] \;,\; [\frac{1}{2},1] \;,\; [1,\frac{3}{2}] \;,\; [\frac{3}{2},2]$$

د تابع د گراف د رسمولو لپاره تابع ته قیمتونه ایږدو او د مستطیلونو طول لاس ته راځي:

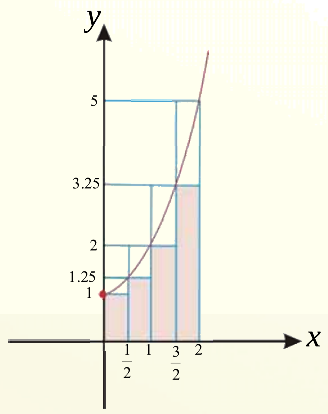
$$f(x) = x^2+1 \;,\; f(0) = 1$$

$$f(\frac{1}{2}) = 1.25 \;,\; f(1) = 2$$

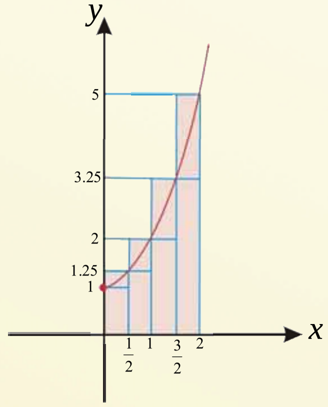
$$f(\frac{3}{2}) = 3.25 \;,\; f(2) = 5$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1\times\frac{1}{2}+1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}=3.75$



د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2}=5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

دويم مثال: د $f(x)=1+x$ تابع د ريمان د مجموعې لېميټ په $[1,10]$ انټروال کې پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

باید په یاد ولرو:

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = 1 + [\frac{9}{n}]\, i \quad , \quad i = 0,1,2, \ \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} [\sum_{i=1}^{n} (1+x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\Delta x \sum_{i=1}^{n} (1+x_i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} x_i]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} (a + \Delta x i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 + \frac{9}{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} (\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n} (n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (n + \frac{9n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (\frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (\frac{11n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n}]$$

$$= 9 + \frac{99}{2} = 58.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

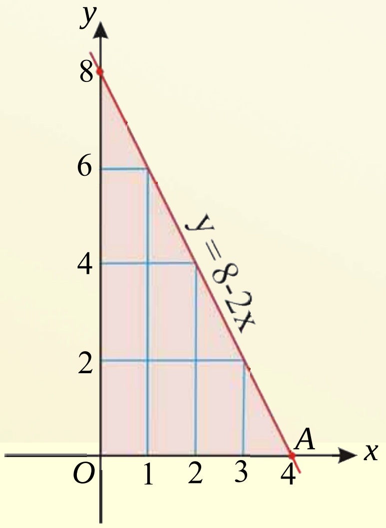
پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له وېشلو څخه وروسته د $y = 3x$ مستقیم خط او د x د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x = 0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه اود پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د $y = 8 - 2x$ تابع ګراف د لاندې OA مثلث مساحت د $[0,4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیت څخه په ګټه اخیستنې سره پیدا کړي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیگرال مفهوم

Concept of Integral

خرنگه چې پوهېږئ د شکلونو لاندیني او پورتني مساحتونه د انتیگرال په واسطه محاسبه کېږي.

آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیگرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعی لېمیټ ته انتیگرال وایي دا($\int$) د انتیگرال علامه ده، د sum د کلیمې یا د ریمان د مجموعې د S توري غزېدلی حالت دی، لکه: $\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ چې دلته $f(x)$ تابع او dx د $f(x)$ تابع د انتیگرال متحول نظر x ته دی.

انتیگرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیگرالونه، هغه انتیگرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- غیرمعین انتیگرال Indefinite Integral

فعالیت

- که د $F(x) = 2x^2 - 1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیگرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیگرال له لومړنی تابع سره پرتله کړئ او ووایئ چې (-1) په نوموړي تابع کې د څه په نامه یادېږي.
- که په پورتني تابع کې (-1) په C ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنی فعالیت د $F(x) = x^6 + 1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووایئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترلې انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنی تابع وي. د $F(x)+C$ تابعگانو سټ په داسې حال کې چې C یو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غیرمعین انتیگرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: $\int x\,dx$ پیداکړئ.

حل: $\int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\,dx$ حساب کړئ.

حل: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\,dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\,dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C$

دریم مثال : $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx$ پیداکړئ.

حل: $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

پوښتني

لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^4}\,dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

e) $\int \sqrt[8]{x^4}\cdot x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د غیرمعین انتیگرال خواص

Properties of indefinite integral

تاسې د لېمیټ او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیر معین انتیګرال کې هم وي؟

$$\left.\begin{array}{l}\int \quad dx \\ \int[f(x)\pm g(x)]\,dx \\ \int[f(x)\cdot g(x)]\,dx \\ \int\frac{f(x)}{g(x)}dx \quad , g(x)\neq 0\end{array}\right\} = ?$$

فعالیت

د مشتقاتو د خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x)=3x^4$$

$$f(x)=2x^3-\frac{1}{x^2}$$

$$f(x)=\sin x+\cos x$$

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنګه چې د تابعګانو د مشتق د پیداکولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخېستل کېږي، غیرمعین انتیګرالونه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: $\int \quad dx = \quad \int dx = \quad x+C$

مثال: د $\int 5dx$ انتګرال پیدا کړئ.

حل: $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

2- که چیرې $n\neq -1$ وي، نو: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

مثال: د $\int x^4dx$ **انتيگرال** پيدا کړی.

حل: $\int x^4dx=\frac{x^{4+1}}{4+1}+C=\frac{1}{5}x^5+C$

3- که چيرې a يو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو**:

$$\int a\,f(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$$

مثال: **د** $\int 2x^2\,dx$ **انتيگرال** محاسبه کړئ.

حل: $\int 2x^2dx=2\int x^2dx=2\frac{x^3}{3}+C=\frac{2}{3}x^3+C$

4- کـه چيـرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعگـانې وي پـه دې صـورت کې د تابعگـانو د جمـع او تفريـق د حاصـل انتيگرال مساوی دی په:

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

مثالونه:

$a)\quad \int(2x^2+3)dx=\int 2x^2dx+\int 3dx=\frac{2x^3}{3}+3x+C$

$b)\quad \int(8-2x)dx=8\int dx-2\int xdx=8x-x^2+C$

5- که چيرې دتابعگانو ترادف تر انتيگرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتيگرال مساوی دی په:0

$$\int[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\ldots+\int f_n(x)dx$$

مثال:

$$\int[x^3-6x^2+9x+1]dx=\int x^3dx-\int 6x^2dx+\int 9xdx+\int dx$$
$$=\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}+x+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعګانې وي، په دې حالت کې د تابعګانو د ضرب د حاصل انتیګرال مساوي نه دی د انتیګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چېرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

حل الف: لومړی په تابع ګانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیګرال په لاس راوړو:

$$\begin{aligned}\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx &= \int[(x+1)(x-2)]dx = \int(x^2-2x+x-2)\,dx\\ &= \int(x^2-x-2)\,dx\\ &= \int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\end{aligned}$$

حل ب: اوس د هرې تابع انتیګرال بېل بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx &= \int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\,dx = (\int x\,dx+\int dx)(=\int x\,dx-\int 2\,dx)\\ &= (\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C) = (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\\ &\Rightarrow \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C \neq (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\end{aligned}$$

په پایله کې څرګنده شوه، چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیګرال مساوي نه دی د هرې تابع د انتیګرال له حاصل تقسیم سره، یعنې: $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

مثال: که چېرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

د الف جزء حل: لومړی د تابع ګانو د تقسیم د حاصل انتیګرال په لاس راوړو.

$$\begin{aligned}\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx &= \int[(x+1)(x-2)]dx = \int(x^2-2x+x-2)\,dx\\ &= \int(x^2-x-2)\,dx\\ &= \int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ب جزء حل: اوس د صورت او مخرج د تابعگانو انتیگرالونه بېل بېل په لاس راوړو او وروسته يې سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx = \int (x+1)\,dx \cdot \int (x-2)\,dx = (\int x\,dx + \int dx)(\int x\,dx - \int 2\,dx)$$

$$= (\frac{x^2}{2} + x + C)(\frac{x^2}{2} - 2x + C) = (\frac{x^2}{2} + x)(\frac{x^2}{2} - 2x) + C$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \neq (\frac{x^2}{2} + x)(\frac{x^2}{2} - 2x) + C$$

په پايله کې څرگنده شوه چې مساوات حقيقت نه لري.

پوښتني

د انتيگرال د خاصيتونو څخه په گټه اخيستني سره لاندې انتيگرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int -17\,dx = ?$

b) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x}\,dx = ?$

c) $\int 2x^4\,dx = ?$

d) $\int \frac{1}{x^5}\,dx = ?$

e) $\int (2x^2 + 4x^3 - 5x + 9)\,dx = ?$

f) $\int (2x+3)^6\,dx = ?$

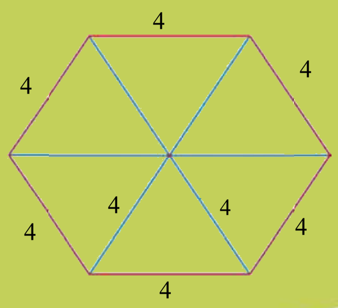
g) $\int \frac{x^3 + 2x^2}{x^2}\,dx = ?$

h) $\int (2+x)\,dx = ?$

معین انټیګرال

Definite Integral

د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره یې پرتله کړئ.



- د $f(x)=2x$ د تابع ګراف د $[2,5]$ په انټروال کې د $n=5$ لپاره رسم کړئ او د ګراف لاندینی مساحت پیدا کړئ
- په شکل کې د ګراف لاندینی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی نو د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته کله چې n بې‌نهایت ته نږدی شی او د فرعي انټروالونو (Δx) لوی اوږدوالی صفر ته نږدی شي، د $f(x)$ تابع له $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې د معین انټیګرال په نوم یادیږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

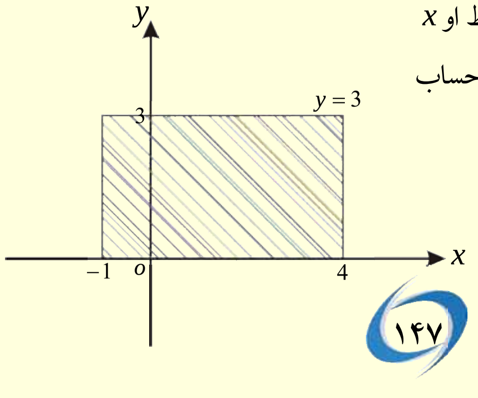
چې a ته د انټیګرال لاندینی سرحد او b ته د انټیګرال پورتنی سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2\,dx$ ټاکلي انټیګرال قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړی د $F(x)$ لومړنی تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انټیګرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2dx=[\frac{x^3}{3}]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

دویم مثال: هغه مساحت چې د $y=3$ خط او x محور ترمنځ په $[-1,4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $\int_{-1}^{4} 3\,dx$ معین انتیګرال د یوه مستطیل مساحت راښیي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

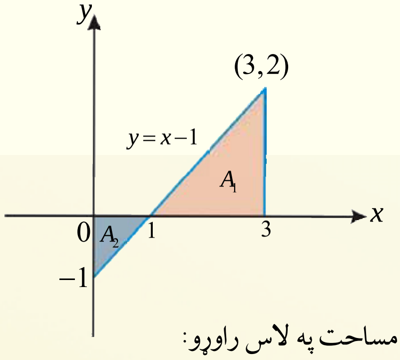
ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

$= 3[4-(-1)] = 3\cdot 5 = 15$ د مستطیل مساحت

د انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\,dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

دریم مثال: هغه مساحت چې د $y = x-1$ مستقیم خط او x محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کې محصور دی په لاس راوړئ.



حل:

له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2\cdot 2) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

د کوچنی مثلث مساحت عبارت دی له:

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

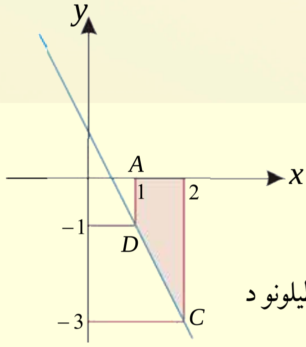
د A_1 او A_2 د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیګرال قیمت عبارت دی له:

$$\int_{0}^{3} (x-1)\,dx = [\frac{x^2}{2} - x]_0^3 = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$$

پوښتنې



1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y = -2x+1$ د مستقیم خط او د x د محور ترمنځ محصور دی په لاس راوړئ.
2. د $f(x) = x^2$ تابع د لاندینیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انټروال کې د $n = 4$ لپاره په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معین انتیګرال خواص

Properties of definite integral

آیا کولای شو چې د غیرمعین انتیګرال د ځانګړونو څخه په ګټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

$$\left.\begin{aligned}&\int_a^b c\,dx\\&\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx\\&\int_a^a f(x)\,dx\end{aligned}\right\}=?$$

فعالیت

- د $\sum_{=1}^{4} 3\,{}^{2}$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x\,dx$ د انتیګرال قیمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1+3x)\,dx$ ټاکلی انتیګرال محاسبه کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کېږي، ترڅو ټاکلي انتیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې یعنې $\int_a^b Cdx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په n مساوي برخو یعنې $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ وېشو او د هر x_i لپاره د i - ام انټروال څخه لرو: $i = 0,1,2,\ldots,n$ $f(x_i) = C$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i=C(\Delta x_1+\Delta x_2+\ldots+\Delta x_n)=C\left(\frac{b-a}{n}+\frac{b-a}{n}+\ldots+\frac{b-a}{n}\right)$$

$$=C(b-a)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=C(b-a)\frac{n}{n}=C(b-a)\Rightarrow\int_a^b Cdx=C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ ټاکلی انتیګرال حساب کړئ.

حل: $\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3=1$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتیګرال منونکی وی او   یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_a^b \quad f(x)dx = \quad \int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که چیرې د $[a,b]$ انټروال د x_i ، $i=1,2,...,n$ په n مساوي برخو ووېشو نو د ریمان د مجموعې او انتیګرال د تعریف له مخې لیکلای شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \quad f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \quad f(x)dx = \quad \int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4\,dx$ ټاکلي انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) = 4\cdot 4 = 16$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنی تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = -(-F(b)+F(a))$$

$$= -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$ انتیګرال مساوات پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی د کېڼ لوری انتیګرال او وروسته د ښي خوا انتیګرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$$

4- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو، چې: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

ثبوت: **څرنګه چې** $\Delta x = 0$ **دی، نو:**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2\,dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_3^3 3x^2 dx = [\frac{3x^3}{3}]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$

5- که $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې په $[a\ ,b]$ انټروال کې انتیګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) \pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه:

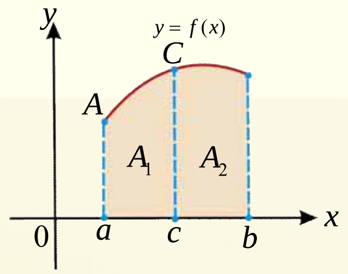
حل:

$$a)\quad \int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2\,dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1 = 5$$

$$b)\quad \int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه تړلې انټروال کې چې د a, b او c ټکي پکې شامل دي انټیګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



ثبوت: دلته د $[a,b]$ انټروال په دوو انټروالونو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقسیموو، وروسته د $f(x)$ تابع انټیګرال په نوموړي انټروالونو کې په پام کې نیسو.

د انټیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A = \int_a^b f(x)dx$ په حقیقت کې د هغې سطحې مساحت دی چې د $f(x)$ د تابع د ګراف او x د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغه سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د x د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له:

$$A_1 = \int_a^c f(x)\,dx \text{ ، } A_2 = \int_c^b f(x)\,dx$$

په پایله کې ویلای شو چې :

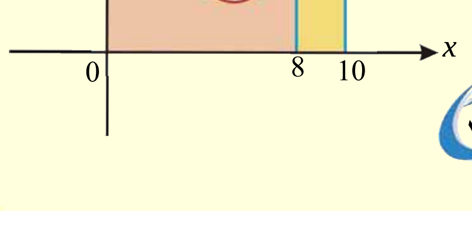
$$A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

مثال: که چیرې $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انټیګرال قیمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د $\int_8^{10} f(x)\,dx$ انتيګرال قيمت په لاس راوړو:

$$\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چيرې د $f(x) \le g(x)$ تابعګانې په $[a,b]$ انټروال کې انتيګرال منومنکي وي؛ نو لرو:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x) - f(x)]\,\Delta x$$

نو څرنګه $g(x) - f(x) \ge 0$ او $\Delta x \ge 0$ دی نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېميټ هم منفي نه دی يعنې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\,\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \ge 0$$

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \ge \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال: که چيرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نو د $x > 1$ لپاره وښاياست چې $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ دی.

حل:

$$\int_a^b (1 - \frac{x^2}{4})\,dx \le \int_a^b (1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_a^b 1\,dx - \int_a^b \frac{x^2}{4}\,dx \le \int_a^b 1\,dx + \int_a^b \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهېږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3) \quad /\div(b-a)$$

$$1-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le 1+\frac{1}{6}(b^3-a^3)$$

$$-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le +\frac{1}{6}(b^3-a^3) \quad /\div(b^3-a^3)$$

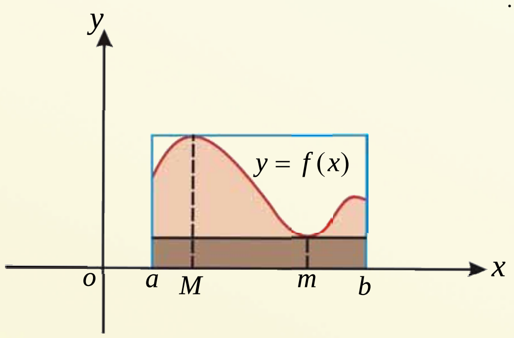
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6} \Rightarrow -1<2$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او M, m قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قیمتونه په نوموړي انټروال کې وي، نو $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

ثبوت: څرنګه چې $m\le f(x)\le M$ دی نو لرو چې:

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$



چې دا وروستنی اړیکه د انټیګرال د تخمیني قضیې په نامه یادېږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انټیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ.

حل: څرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1(1-0)$$

$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

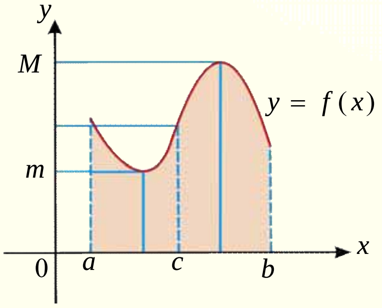
$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0{,}3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې د انتیګرال تخمیني قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د c یو حقیقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a<b$ لپاره m او M قیمتونه په ترتیب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د $[a,b]$ په انټروال کې وي، لکه مخامخ شکل د انتیګرال د تخمیني قضیې څخه په کار اخیستنې د $c\in[a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

فرضوو $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =$ وي، نو $\le M$ $m \le$ دی او د هر c حقیقي عدد لپاره، $a \le c \le b$

لرو چې: $f(c) =$ نو: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادېږي خرنګه چې $f(c)$ د تابع متوسط قیمت په $[a,b]$ انټروال کې دی.

مثال: د $f(x)=x^2$ تابع په $[1,4]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ آیا کولای شئ

$\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3}-\frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$ دی.

حل: خرنګه چې $f(x)=x^2$ تابع ده اوس که د x په ځای د c قیمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c)=c^2$ سره کېږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د c قیمت داسې په لاس راځي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس په پورتنی رابطه کې یې قیمت ایږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2\,dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$= f(c) \quad , \quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 \quad , \qquad = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع یو قیمت مساوي په   او $1 < \sqrt{7} < 4$ دی.

له مخکې ځخه پوهېږو چې د مستطیل مساحت د طول او عرض د اوږدوالي د ضرب سره برابر دی نو د متوسط قیمت په فورمول کې $f(c)$ طول او $b-a$ عرض دی نو د منحني لاندې مساحت په $[1,4]$ انټروال کې مساوي له هغه مستطیل سره دی چې اضلاع یې 7 او 3 دی.

پوښتنې

1. لاندې معین انټیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx = ?$

$b)\ \int_{2}^{5}7x\,dx = ?$

$c)\ \int_{-2}^{4}(-x)\,dx = ?$

$d)\ \int_{-1}^{3}(2|x|-3x)\,dx = ?$

$e)\ \int_{-2}^{3}3x\,dx$

$f)\ \int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g)\ \int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h)\ \int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$

2. د $\int_{-1}^{4}f(x)\,dx$ انټیګرال قیمت د $[-1,4]$ په انټروال کې داسې پیداکړئ، چې $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx = 5$ او $\int_{1}^{4}f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x) = x$ تابع په $[0,2]$ انټروال کې په نظر کې ونیسئ او د c قیمت په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- د انټيګرال او مشتق اساسي قضيې

يو موټر په $72\frac{m}{sec}$ چټکتيا سره په حرکت کې دی، دريور برک ته فشار ورکوي او موټر وروسته له 6 ثانيو ودرېږي په دې وخت کې وهل شوې فاصله پيدا کړئ.

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

فعاليت

- د مشتق د تعريف څخه په ګټې اخيستنې سره د $f(x) = x^2$ د تابع مشتق د $h = 0$ په ټکي کې پيدا کړئ.
- د په لاس راغلی تابع انټيګرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قيمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه په لاس راځي، چې:

د انټيګرال او مشتق تر منځ يوه منطقي اړيکه شته چې له دې اړيکې څخه په کار اخيستنې سره کولای شو، د انټيګرال اصلي او اساسي قضيې په لاندې ډول ثبوت کړو:

1- د انټيګرال او مشتق لومړۍ اساسي قضيه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او x په دی انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په$[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ دی.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پايله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انټيګرال منوونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعريف مطابق ليکو او بيا د x متحول ته د h په اندازه تزايد ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(a) - (F(x) - F(a))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(x)\Big|_a^{x+h} - F(x)\Big|_a^x}{h}$$

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\big|_a^{x+h}-F(t)\big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر دريم خاصيت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قيمت د قضيې څخه $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ چې c د x او $x+h$ تر منځ واقع دی، نو کله چې h صفر ته تقرب وکړي c ، x ته تقرب کوي، همدارنګه د f تابع له متماديت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پايله کې: $F'(x)=f(x)$

مثال: د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پيدا کړئ.

حل:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \text{ يا } F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

د زنځيري قاعدې له مخې لرو:

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د انتيګرال او مشتق دويمه اساسي قضيه:

که چيرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

ثبوت: د مخکينی قضيې څخه پوهېږو چې که $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ دی له دې ځايه د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف يو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F(x) = \quad \Rightarrow f(x) = F(x) +$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) +$$

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) =$$

که د x په ځای په پورتنی رابطه کې a وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\,dt - F(a) = \qquad , \qquad 0 - F(a) = \quad \Rightarrow \quad = -F(a)$$

که د قيمت په لومړی رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$

که د x په ځای په دې رابطه کې b وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

چې اخيری رابطه په $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ په شکل ښودل کېږي دغه وروستی اړيکه د لومړنی تابع او $\int_a^b f(t)\,dt$ انتيګرال ترمنځ اړيکه ښيي، چې د نيوټن"لايبنز" رابطې په نوم هم يادېږي.

يادونه:

$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

$\int \cos x\,dx = \sin x + c$

$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\int_0^1 x^2 dx$ انتیگرال حاصل پیدا کړئ.

حل: $$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

پوښتني

1. **لاندې مشتقات پیدا کړئ.**

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

$b)\ F(t) = \int_{0}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2} dy$

$d)\ F(x) = \int_{1}^{x} \frac{\sin t}{t} dt$

2. **که په** $f(t) = t$ **تابع کې** $F(0) = 2$ **وي، د** $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \ldots, 1$ ټکو کې پیدا کړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

11- په تعويضي طريقې سره انتيگرال نيونه

ـ آيا کولای شئ چې مخامخ انتيگرال د نامعين انتيگرال له خواصو څخه په کار اخيستنې سره حل کړئ.

ـ که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په يوه متحول سره عوض کړئ او بيا هغه حساب کړئ او ووايئ چې په انتيگرال کې د وضع کولو دا طريقه په څه نوم يادېږي.

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

فعاليت

- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ انتيگرال کې د جذر لاندې افاده په u سره عوض کړئ.
- د u مشتق ونيسي او د dx قيمت پيدا کړئ.
- څرنگه چې نومورې انتيگرال يو معين انتيگرال دی، نو د $u=2x+1$ په معادله کې د $x=0$ او $x=4$ قيمتونه وضع او د انتيگرال سرحدونه د u له جنسه په لاس راوړی، وروسته د انتيگرال قيمت محاسبه کړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکی وي، $u=g(x)$ او $F'(x)=f(x)$ سره تعويض شي، څرنگه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځيري قاعدې څخه ليکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

لومړی مثال: د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتيگرال قيمت پيدا کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو:

$$u = 3 - 5x \;, \quad du = -5\,dx \qquad dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \;\Rightarrow\; u = 3 - 5\cdot 1 = -2 \;\Rightarrow\; u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \;\Rightarrow\; u = 3 - 5\cdot 2 = 3 - 10 \;\Rightarrow\; u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو.

$$u = 1 + 2x^3 \quad , \quad du = 6x^2\,dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{6} du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1 + 2x^3 \Rightarrow u = 1 + 2\cdot 0 = 1 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1 + 2x^3 \Rightarrow u = 1 + 2\cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx = \int_1^3 u^5 \frac{1}{6}\cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{729}{6} - \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{728}{6}\right]$$

$$= \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

فعالیت

- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتیگرال کې د جذر لاندې افاده د u په متحول سره تعویض کړئ.
- له u څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلې قیمت په لومړنی انتیګرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د پورته ځخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع ځخه مشتق ونیسئ او د هغې ځخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعالیت ځخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u=g(x)$ د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري له زنځیري قاعدې ځخه په کاراخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

لومړی مثال: $\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ.

حل: د جذر لاندې افاده په u سره عوض کوو.

$$u=1-4x^2\ ,\ du=-8x\,dx$$

$$xdx=-\frac{1}{8}du$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{u}}du=-\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=-\frac{1}{8}(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1})+C$$

$$=-\frac{1}{8}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(2\sqrt{u})+C=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

دویم مثال: $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ حساب کړئ.

حل: که چېرې $u=x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u=x^4+2\ ,\ du=4x^3dx\ ,\ x^3dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx=\int\cos u\cdot\frac{1}{4}du$$

$$=\frac{1}{4}\int\cos u\,du$$

$$=\frac{1}{4}\sin u+C$$

$$=\frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

لاندې انتیگرالونه د تعویض له لارې محاسبه کړئ.

a) $\int \cos 3x \, dx = ?$

b) $\int_1^2 x\sqrt{x-1} \, dx = ?$

c) $\int_0^7 \sqrt{4+3x} \, dx = ?$

d) $\int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2} \, dx = ?$

e) $\int 2x(x^2+3)^4 \, dx = ?$

f) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{x^2+10} = ?$

g) $\int \sqrt{\cos x} \, \sin x \, dx = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12- قسمي انتيګرالونه

د حجروي وېش په وخت کې يوه حجره په دوو يا څو حجرو وېشل کېږي. ايا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شيانو کې لکه: تيږه، شګه او نورو کې ووينو که څواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه يادېږي.

فعاليت

- د $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتيګرال قيمت په تعويضي طريقه پيدا کړئ.
- **آيا کولای شی چې د** $\int x^2 \sin x dx$ انتيګرال په تعويضي طريقه وشمېرئ.

له پورتني فعاليت څخه دې پايلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)dx$ په انتيګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکی تابعګاني دي چې يوه له بلې سره د ضرب ورځ وي يا نه وي، خو د انتيګرال محاسبه يې اسانه کار نه دی، که چيرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق يې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'v+v'u$ دی.

له پورتنی رابطې څخه $v'u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتيګرال نيسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\ dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\ dx \quad \text{يا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنی رابطې ته د غيرمعين انتيګرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

که د u او v تابعګاني په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوی وي، لاندی فورمول د معين انتيګرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

لومړی مثال: د $\int x \sin x \, dx$ انتیگرال پیداکړئ.

حل:

$$u = x \quad , \quad du = dx$$
$$dv = \sin x \, dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$
$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int -\cos x \, dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -x e^x \, dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل:

$$u = -x \quad , \quad du = -dx \quad , \quad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v' \cdot u \, dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot u' \, dx$$
$$\int_0^1 -xe^x \, dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 \quad = -e^0$$
$$= -1$$

یادونه:
$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه حساب کړئ.

a) $\int \theta \cos\theta \, d\theta = ?$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx = ?$

c) $\int x^5 \cos(x^3) \, dx = ?$

d) $\int_0^1 x e^x \, dx = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

د ریمان مجموعه: فرضوو د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او تعریف شوی وي او د ناحیې مساحت چې د x محور او د $y = f(x)$ منحني ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال چې په n مستطیلو نو تقسیموو څرنګه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی د تابع قیمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطیلونو انټروالونه د $n, \;........, i = 1,2,3$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a \quad , \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \; ... \; , x_i = a + i\Delta x, \; ... \; , x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \; , \; [x_1, x_2] \; , \; [x_2, x_3], \; ... \; , [x_{i-1}, x_i], \; ... \; , [x_{n-1}, x_n]$$

که د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په A وښیو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

نامعین انټیګرالونه: که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنۍ تابع وي. د $F(x) + C$ توابعو سټ چې c یو ثابت عدد وي د غیرمعین انټګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د نامعین انټیګرالونو خواص(ځانګړتیاوې):

$$\int dx = \int dx = x + C$$

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx$$

$$\int [f(x) \cdot g(x)]\, dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx} \quad , \quad g(x) \neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معين انتيګرال: د $f(x)$ تابع د ريمان مجموعې لېمېټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې n بې‌نهايت تـه نـږدې شي د Δx فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر تـه نـږدې کېـږي، چې د $f(x)$ تـابع ټاکلی انتيګـرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم يادېږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

a ته د انتيګرال لاندينی سرحد او b ته د انتيګرال پورتنی سرحد وايي.

د معين انتيګرال خواص(ځانګرتياوی):

$$\int_a^b C\,dx=C(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x)\ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)\ \Rightarrow\ f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

د انټيګرال او مشتق لومړۍ اساسي قضيه:

که چيرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

خرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

د انټيګرال او مشتق دويمه اساسي قضيه:

- که چيرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او د $u=g(x)$ متحول سره تعويض شي چې مستقل متحول يې x او متمادي مشتق ولري. د زنځيری قاعدې څخه په کار اخيستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق منونکې وي، او $u=g(x)$ همدارنګه $F'(x)=f(x)$ سره تعويض شي، خرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځيري قاعدې څخه ليکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انټيګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکې تابعګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او يا نه وي، خو د انټيګرال محاسبه يې آسانه کار نه دی، که چيرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني اړيکې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتيگرال نيسو:

$$\int v'\cdot u\ dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\ dx \quad \text{يا} \quad \int udv = u\cdot v - \int vdu$$

چې اخيرى اړيکې ته د غير معين انتيگرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

- که د u او v تابگانې په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوى وي لاندې فورمول، د معين انتيگرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کيږي:

$$\int_a^b v'u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځېرکي پوښتنې

1- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو قیمت پیدا کړئ.

$a)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ $\qquad b)\ \int_{-4}^{4}[2x^2 - \frac{1}{8}x^4]dx$ $\qquad c)\ \int_{2}^{4}\frac{1}{x^2}dx$

$d)\ \int_{0}^{3} 4dx$ $\qquad e)\ \int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$ $\qquad f)\ \int_{1}^{2}(x^2 - x^5)\,dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\qquad h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}]dx$ $\qquad i)\ \int_{2}^{3}(x^3 + x^2)dx$

$)\ \int_{-2}^{2}[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4]dx$ $\qquad)\ \int_{0}^{\pi}\sin x dx$ $\qquad l)\ \int_{1}^{2} x^2\,dx$

2- لاندې غیر معین انتګرالونه حل کړئ.

$a)\ \int[\sin x + 8x^3]dx$ $\qquad b)\ \int[x^5 + \frac{4}{x^4} + x^3 + \frac{2}{x^2} + x]dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)\,dx$ $\qquad d)\ \int \sin x\,dx$

$e)\ \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ $\qquad f)\ \int \frac{(1-x)^2}{1-x}dx$

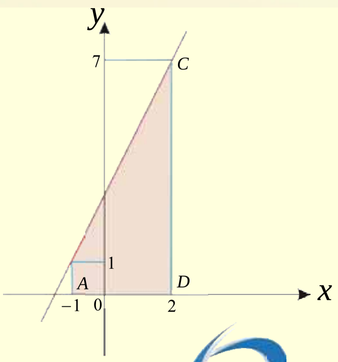
$g)\ \int \sqrt[5]{x^3}\,dx$ $\qquad h)\ \int \frac{3x^2 + 8x}{x}dx$

$i)\ \int\left(2x^2 + 3\right)dx$ $\qquad)\ \int \frac{1}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$)\ \int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3}dx$ $\qquad l)\ \int(3x^2 + 4x - 1)\,dx$

3- د لاندې محصور شوې سطحې مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx$



(c) ketabton.com: The Digital Library

4- لاندې انتیګرالونه د تعویضي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\,dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\,dx$

$c)\ \int \frac{2\,dx}{x+2}$

$d)\ \int (3x+6)^3\,dx$

$e)\ \int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

$f)\ \int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

$g)\ \int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\ \int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\,dx$

$i)\ \int \frac{1}{(x-10)^7}\,dx$

$)\ \int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

$)\ \int (4-3x)^7\,dx$

$l)\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انتیګرالونه د قسمي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int x\cos x\,dx$

$b)\ \int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$d)\ \int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\ \int x\sqrt{1+x}\,dx$

$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\,dx$

$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

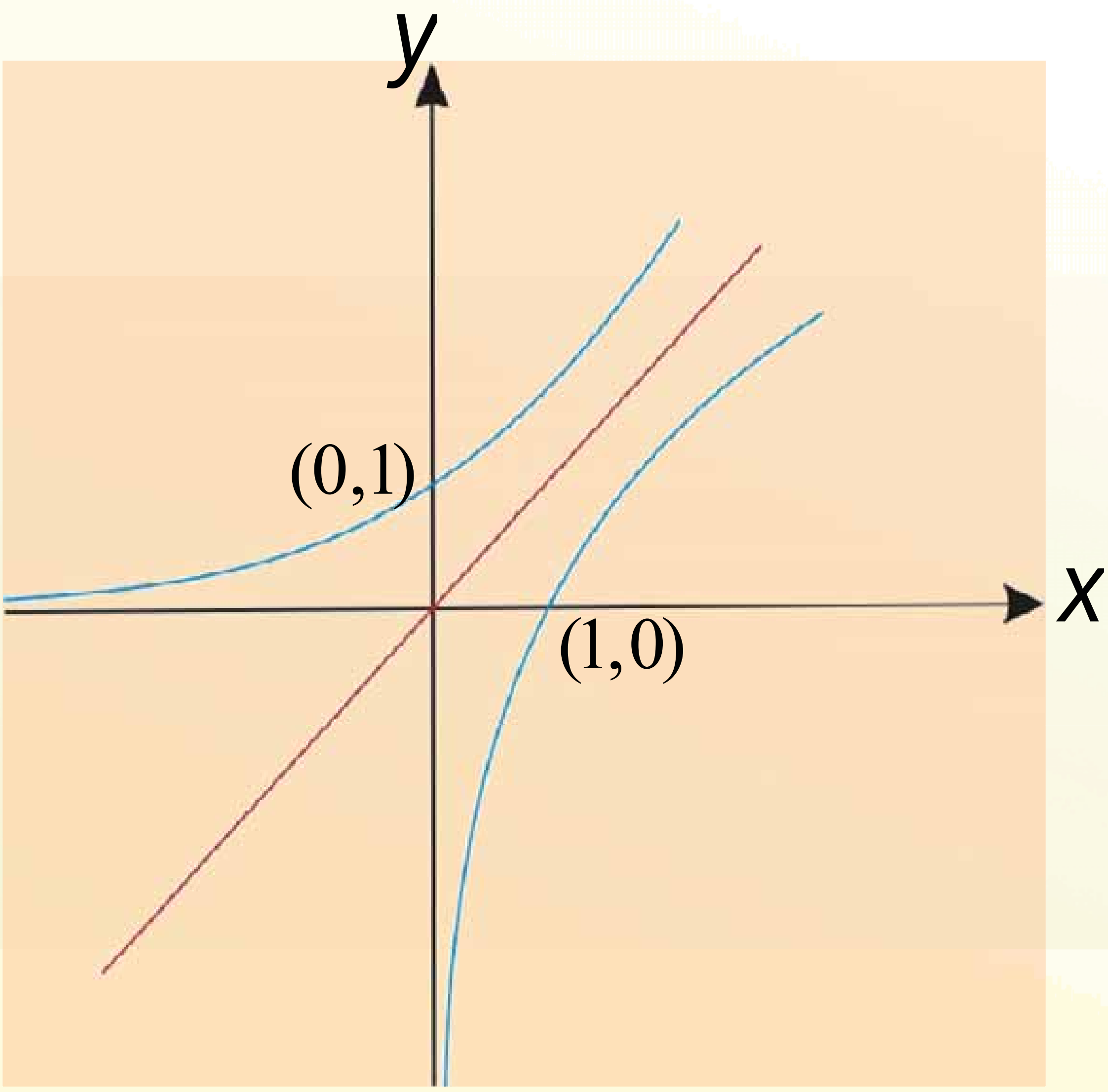
(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق او انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

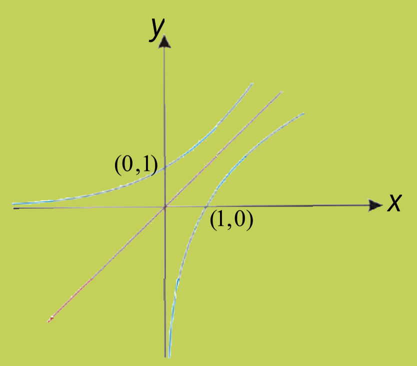
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابعګانو ګراف راښیي، نومونه یې واخلئ.



- لوګاریتم تعریف او خواص یې ولیکئ.
- لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
- که $\log_b x$ یوه متصله تابع وي، نو $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y = f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسئ، اړیکه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په عمومي ډول که $f(x)=\ln x$ او $g(x)=a^x$ وي؛ نو $g'(x)=a^x\ln a$ او $f'(x)=\frac{1}{x}$ دی.

ثبوت:

-1

$$y=g(x)=a^x$$
$$\ln y=\ln a^x = x\ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر x ته مشتق نیسو:

$$\frac{y'}{y}=x'\ln a+x(\ln a)'$$
$$\frac{y'}{y}=\ln a+0$$
$$\frac{1}{y}y'=\ln a$$
$$y'=y\ln a \quad\Rightarrow\quad g'(x)=a^x\ln a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x}) \quad =\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ دی خرنگه چې $h\to 0$ تقرب وکړي نو $u\to\infty$ ته نږدی کېږي،

لیکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u}=\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهیږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

قضیه

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي؛ نو مشتق یې $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$
2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

ثبوت:

-1

$$f(x)=\log_a x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\frac{x}{h}=u$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، یعنې:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=\frac{1}{x}\log_a e$$

2- غواړو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

د زنځيري قاعدې له مخې:

$$f'(x) = (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)}\log_a e \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$$

که $a = e$ وضع شي؛ نو لرو: $(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

پایله:

1- د Exponential تابعګانو مشتق د لوګاریتم په مرسته کولای شو په اسانی سره په لاس راوړو.

که $y = e^x$ وي ددې تابع مشتق $y' = e^x$ دی ځکه که د $y = e^x$ رابطې څخه طبيعي لوګاريتم ونيسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \quad \Rightarrow \ln y = x\ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \quad \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \quad \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که $y = e^u$ او u تابع د x وي، نو: $y' = u'e^u$

3- که $y = a^u$ کله چې $a > 0$ او $a \neq 1$ وي، نو: $y' = u'a^u \ln a$

4- د لوګاريتمي تابعګانو د مشتق پيداکولو لپاره په بېلابېلو قاعدو سره له دې اړيکې څخه ګټه اخلو:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u}\log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \quad \Rightarrow y' = \frac{(\ln u)'}{\ln a} = \frac{u'}{u\ln a}$$

لومړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2+1)$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: که $g(x) = x^2+1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2+1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \quad \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x^2-5x+4) \\ g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array}$$

دریم مثال: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

حل: پوهیږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

خلورم مثال: د $y = e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې که $y = e^u$ وي نو $y' = u'e^u$

$$y = e^{(x^2+1)} \Rightarrow y' = (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y = \sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې که چیرې $y = a^u$ وي نو $y' = u'a^u \ln a$ سره دی، نو:

$$y = \sqrt[x]{2} = (2)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = (\frac{1}{x})' \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2$$

شپږم مثال: د $y = x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y = x^{2x}$$
$$\ln y = \ln x^{2x}$$
$$\ln y = 2x \ln x$$
$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$
$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اووم مثال: د $y = 10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$ دی، نو:

$$y = 10^x$$
$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

اتم مثال: د $y = e^{3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که $u = 3x$ وضع شي، نو: $u'(x) = 3$

$$y = e^u$$
$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$
$$y' = 3e^{3x}$$

نهم مثال: د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = \log(x^4 + 1)$ 2) $y = \log_3(\log_2 x)$ 3) $y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: پوهېږو چې د لوگارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضيې څخه په گټه اخېستنې سره په لاس راوړو:

$$y = \log_a u$$

$$y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e = \frac{u'}{u\log_e a} = \frac{u'}{u\ln a}$$

1) $y = \log(x^4+1) \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$

2) $y = \log_3(\log_2 x) \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{(\log_2 x)'}{\ln 3\log_2 x} = \dfrac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x} = \dfrac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$

$$= \frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}} = \frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}} = \frac{1}{\ln 3\, x\ln x}$$

3) $y = \log_{x^2-1} x^2+1 = \dfrac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)} = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$

پوهېږو چې $y = \dfrac{u}{v} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ دی؛ نو لرو:

$$y' = \frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1) - \frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^2-1)\right]^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

a) $f(x) = \ln\sin 3x$

b) $f(x) = \ln\sqrt{3x^2+7}$

c) $f(x) = \ln(5x^2-6x+5)$

d) $f(x) = \log_{10} 3x^2$

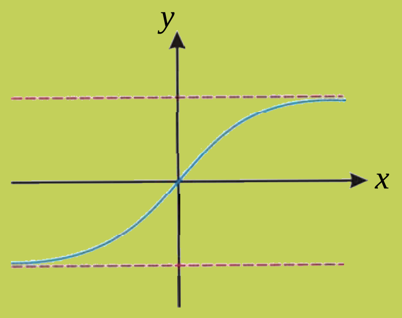
e) $f(x) = y = x^x$

f) $y = \dfrac{(x+1)^2(\sqrt{x}-1)}{(x+4)^3 e^x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معکوسو تابعگانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګراف رابنيي؟



کـه چیـري f او g یـوه د بلـې دوې معکوسـې تابعګـانې وي، يعنـې $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي، نـو:

$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{dy}{dx}$ یا $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ دی، ځکه چې د تابع او ضمني تابعګانو له مشتق څخه لیکلای شو:

$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ x = g(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \quad \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \quad \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

مثال: د $y = a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پیدا کړئ.

حل:

$$y = a^x \quad \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\log_e a$$

$$y' = a^x \ln a$$

د مثلثاتي معکوسو تابعګانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابعګانو مشتق د لاندې اړیکو په مرسته لاسته راوړو:

1) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4) $(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

1) $y = arc\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (arc\tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ویشو:

$$(arc\tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

دکسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ ویشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

لومړی مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1 + x^2}$$

دویم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = \log_5 u = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1 + x^2}}{\arctan x \ln 5} = \frac{1}{(1 + x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

دریم مثال: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پیدا کړئ.

$$y' = [arc\ \tan e^x]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1 + u^2} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (arc\sin x)^3$

2) $y = \log_2(arc\cos x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه

د يو کسر تجزيه کول په قسمي کسرونو:

پوهېږو چې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعې حاصل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آيا کولای شئ چې له دې کسر څخه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

فعاليت

- د $\frac{7}{x+1}$ ، $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونود جمعې حاصل، بېرته په لومړنيو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعريف يې کړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

تعريف: د يوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل ليکل شوی وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه يادېږي.

د يوه واقعي کسر د تجزيه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نيسو:

لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ($P_n(x)$) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوی وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{}{x-x_n}$$

(A ، C ، .... حقيقي عددونه دي)

لومړی مثال: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

حل: د مخرج پولينوم په لومړنيو ضربي عواملو تجزيه کوو، نو په لاس راځي:

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

ليدل کېږي، چې نومړی کسر له دريو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه يې A , C, ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+\quad(x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+\quad x^2-3\quad x-10\quad+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+\quad+C)x^2+(A-3\quad-6C)x+(-2A-10\quad+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

ليدل کېږي، چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو بايد صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضريبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره ليکو:

$$\begin{cases}A+\quad+C=4\\A-3\quad-6C=-1\\-2A-10\quad+5C=-39\end{cases}$$

د پورته سيستم له حل څخه وروسته $=3, A=2$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دويم مثال: د $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

حل: لومړی نومړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بيا پورتنۍ طريقه پرې تطبيقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}\Rightarrow\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+\quad(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+\quad)x+(2A-4\quad)}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{matrix}A+\quad=4\\2A-4\quad=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=\frac{5}{2}\quad,\quad=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلي وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{}{(x-x_0)^n}$$

لومړی مثال: د $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

حل: د مخرج د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+\quad(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+\quad)x^2+(-2A-3\quad+C)x+(A+2\quad-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{aligned}A+\quad&=3\\-2A-3\quad+C&=-6\\A+2\quad-2C&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}A&=2\\&=1\\C&=1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

که د مخرج ضربي عوامل دریمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم د یو قسمي کسر $\frac{Ax+}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

لومړی مثال: د $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مخرج پولینوم ضربي عوامل عبارت دي له:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

څرنګه چې د x^2+2x+4 درې جملهيي د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزيې وړ نه ده له دې امله ليکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+\ }{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+\ \ )(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+\ \ +2C)x+(\ \ +4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=5\\ A+\ \ +2C=8\\ \ \ +4C=9\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}A=3\\ \ \ =1\\ C=2\end{array}\Rightarrow \frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

پوښتنې

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

1-

$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ $c)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

2-

$a)\ \frac{1}{x^4(x+1)}$ $b)\ \frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ $c)\ \frac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$d)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $e)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

3-

$a)\ \frac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ $b)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

$c)\ \frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ $d)\ \frac{x^5}{x^4-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل تابعګانو انټیګرالونه

مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$
$$a^x = b$$

فعالیت

- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم یې واخلئ.
- د لوګاریتمي تابع یوه بېلګه ولیکئ.
- د $\log_a x = C$ اړیکه په اکسپوننشیل ډول ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لیکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبیعي اکسپوننشیل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \ a \neq 1 \quad , \ a \in IR^+$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$
$$u = 1 \quad \Rightarrow \quad du = 0 \cdot dx$$
$$dv = a^x \quad \Rightarrow \quad v = \frac{a^x}{\ln a}$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=2^{x-3}$ اکسپوننشیل تابع انتیګرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx=\int\frac{1}{8}2^x dx=\frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

دویم مثال: دلاندي اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 3^{x+1}dx=?$ 2) $\int 6^{x-1}dx=?$

حل:

1) $\int 3^{x+1}dx=?$

$$3^{x+1}=3^x\cdot 3$$

$$\int 3^x\cdot 3\,dx=3\int 3^x dx=3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

2) $\int 6^{x-1}dx=?$

$$6^{x-1}=\frac{6^x}{6}=\frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int\frac{1}{6}6^x dx=\frac{1}{6}\int 6^x dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+C$$

پوښتني

د لاندي اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرالونه محاسبه کړئ.

a) $\int 3^{x-1}dx$ b) $\int 2^{-x}dx$ c) $\int a^{x+b}dx$

d) $\int\frac{1}{a^x}dx$ e) $\int 2^x\cdot 3^x dx$ f) $\int\frac{2^x}{3^x}dx$

g) $\int\frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ h) $\int\frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ i) $\int(1+2^x)dx$

د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال

وښيئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$

فعالیت

- لوګاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابعګانو ګراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال ونیسو؟

د پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوګاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ $f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوګاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي، نو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \ , \quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \ , \quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\,\log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیگرال غواړو پیدا کړو:

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یادونه:

(I) د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیگرال حل پیداکړو.

لومړی مثال: لاندې انتیگرالونه پیدا کړئ.

حل:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^{u} du = -\frac{1}{4} e^{u} + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ:

حل:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

دریم مثال: د $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ انتیګرال حساب کړئ.

حل:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int (x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int \ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

(II) معین انتیګرالونه هم د بدلون(تعویض) له لارې حل کیږي.

لومړی مثال: د $\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$ انتیګرال پیدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1,\ u=2x \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\ u=2x \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2dx$ انتیگرال قیمت پیدا کړئ.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx\Rightarrow dx\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{matrix}x=1\ ,\ u=x^2=1\\ x=2\ ,\ u=x^2=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int_1^2 2x\cdot\ln x^2dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4\ln u\,du$$

$$=[u\cdot\ln u-u]_1^4=[4\cdot\ln 4-4]-[1\cdot\ln 1-1]\approx 2.545$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه حل کړئ.

$a)\ \int\ln 2x^3dx$ $\qquad b)\ \int\ln\sqrt{x}dx$ $\qquad c)\ \int\log\frac{x}{2}dx$

$d)\ \int 3\log\frac{1}{x}dx$ $\qquad e)\ \int_1^2\frac{4}{e^{2x-4}}dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قسمي کسرونو په مرسته د انتيګرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پيدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزيه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابعګانو انتيګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونيسو.

لومړی مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

حل: د قسمي کسرونو د تجزيې په مرسته ليکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{\quad}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+\quad(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+\quad x-2\quad}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+\quad)x-4A-2\quad}{(x-2)(x-4)}$$

$A+\quad=7$

$-4A-2\quad=-12$

$A=7-\quad$

$-4(7-\quad)-2\quad=-12$

$-28+4\quad-2\quad=-12$

$-28+2\quad=-12$

$2\quad=16 \Rightarrow \quad=8$

$A=7-8=-1$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو ليکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

دويم مثال: د $\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتيګرال محاسبه کړئ.

حل: مخرج په فکټورو تجزيه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{\quad}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+\quad(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+\quad x-2\quad}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+\quad)x+3A-2\quad}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+\quad)x+3A-2\quad=-5x+9$$

$$A+\quad=-5\Rightarrow A=-5-\quad$$

$$3A-2\quad=-5x+9$$

د A او عددي قيمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-\quad)-2\quad=9$$

$$-15-5\quad=9$$

$$-5\quad=24$$

$$\quad=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

پوښتنې

لاندې انتيګرالونه د قسمی کسرونو په طريقه حل کړئ.

a) $\int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ b) $\int\frac{x-2}{x^2-6x+13}dx$ c) $\int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

- که $f(x)=e^x$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^x$ دی.
- که $f(x)=a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د يوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل ليکل شوی دی که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چيرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د کسري پولينوم مخرج ($P_n(x)$) د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدليدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{}{x-x_n}$$

- که د لومړي درجه پولينوم مخرج ضربي عوامل چې ځينې يې تکرار راغلی وي، يعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې تکرار شوی وي، نو ليکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دويمه درجه پولينوم د تجزيې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولينوم يو ټوټه کسر $\frac{Ax+}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشيل تابعګانو انتيګرال لپاره ليکلای شو:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^+ \ , \ a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انتيګرال لپاره ليکلای شو:

$$\int \ln dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int\log_a x\,dx=x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- ځينې تابعګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، ليکو:

$$f(x)=e^x \quad\Rightarrow\quad \int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x) = \ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
2. د $f(x) = \ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
3. د $y = 2x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x) = \log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 5t^7 dt$ 2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x - 5\sin x + e^x)dx$ 4) $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$

5) $\int xe^{-x}dx$ 6) $\int (\frac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

7 – د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

a) $y = \ln(x^2+x+1)$ b) $y = \ln(\sin x)$

c) $y = e^{x^2+1}$ d) $y = \sqrt[x]{2}$

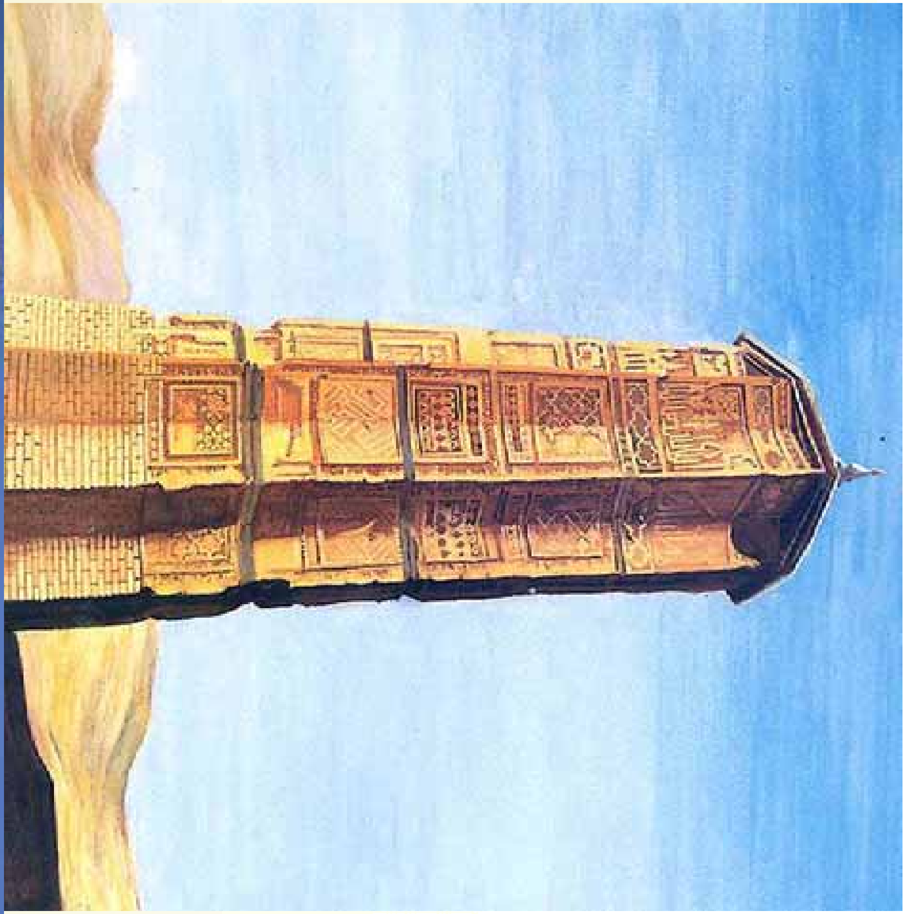
(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

د انتیگرال تطبیقات

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

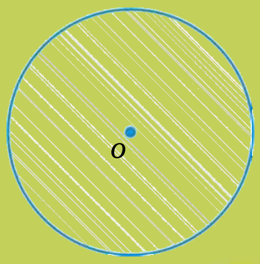


(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې منحني د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by one curve

د مخامخ شکل مساحت چې يوه سطحه د يوې منحني په واسطه ترل شوې دايره ده د مساحت فورمول يې ووياست.



فعاليت

د $y=1-x^2$ تابع په پام کې ونيسئ.

- د تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي او د x محور سره د تقاطع ټکي پيدا او ګراف يې رسم کړئ.
- د $y=1-x^2$ تابع او x محور تر منځ د سطحې د مساحت قيمت د انتيګرال په مرسته پيدا کړئ.
- پورتنی فعاليت د $y=-x^2+2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحني او د x د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

ـ $\int_a^b f(x)\,dx = F(a)-F(b)$ انتيګرال د يوې سطحې د مساحت قيمت راښيي چې د $y=f(x)$ منحني او د x محور او د $x=a$, $x=b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

ـ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ ترلې انټروال کې مثبت او متمادي وي، يعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع ګراف ټل د x محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع ګراف د x محور لاندې خواته واقع ده او منفي دی.

لومړی مثال: د $x = 4 - y^2$ تابع د منحني او د y د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیداکړئ.

حل: لومړی د تابع بحراني ټکي او د y محور سره د پرېکړې ټکي پیداکوو، وروسته يې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیداکولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره يې مساوي کوو او د محورو سره د پرېکړې ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.

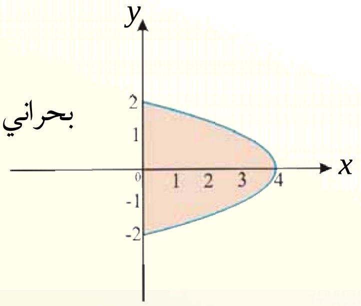
$$x = 4 - y^2 \Rightarrow x' = -2y = 0$$

$$x' = 0 \Rightarrow y = 0$$

$y = 0, \quad x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 4 - 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4,0)$ بحراني ټکی

$x = 0, \quad 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$

$y = \pm 2 \Rightarrow (0,2), \quad (0,-2)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي



څرنګه چې د $x = 4 - y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر x محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمايي مساحت په پام کې نیولو سره، د انټیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A = \int_{-2}^{2}(4-y^2)\,dy = 2\int_{0}^{2}(4-y^2)dy = 2[4y - \frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A = 2\,[(4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - 0] = 2\,(8 - \frac{8}{3}) = 2\,(\frac{24-8}{3}) = 2\,(\frac{16}{3}) = \frac{32}{3}$$

دويم مثال: د x محور او د $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ تابع منحنی د محصور شوی سطحی مساحت محاسبه کړئ.

حل: د محصور شوی سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکی او د x محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad y' = -x$$

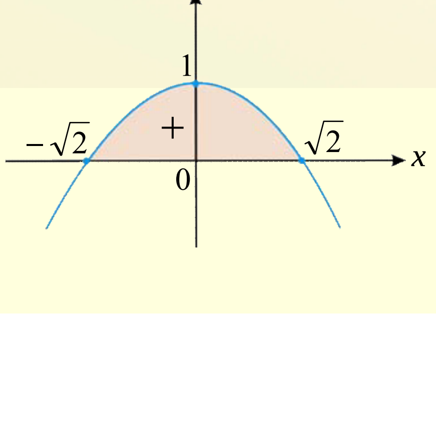
$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x = 0,\ y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}0^2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0,1)$ بحراني ټکی

$$y = 0, 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = 2,\ x = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$(\sqrt{2},0),\ (-\sqrt{2},0)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

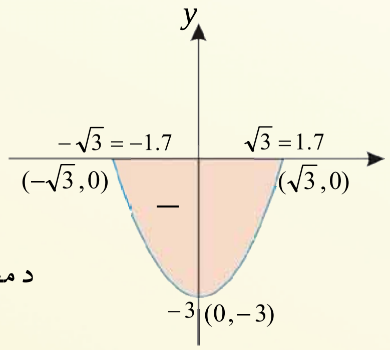
$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

دریم مثال: د $y=x^2-3$ تابع گراف د x له محور سره یوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع گراف رسموو او د تابع بحراني ټکی او د تقاطع ټکی په لاس راوړو:



$y=x^2-3\Rightarrow y'=2x$

$y'=0\Rightarrow x=0$

$x=0\ ,\ y=x^2-3\Rightarrow y=0^2-3$

$\Rightarrow y=-3\Rightarrow(0,-3)$ بحراني ټکی

$y=0\ ,\ x^2-3=0\Rightarrow x^2=3$

$x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow(\sqrt{3},0)\ ,\ (-\sqrt{3},0)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي

څرنگه چې د $y=x^2-3$ تابع په $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د پرېکړې ټکي متناظر قیمتونه لري نو گراف یې د x محور څخه لاندې دی او انټیگرال یې منفي دی، نو د ټول مساحت څخه د انټیگرال د سرحدونو نیمایي مساحت پیدا کوو اوبه 2 کې یې ضربوو:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_{0}^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_{0}^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ تابع گراف رسم د منحني او x محور تر منځ د سطحې مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

حل: لومړی د منحني بحراني ټکی او له محورونو سره د پرېکړې ټکي پيدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \,,\ x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \,,\quad y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$$

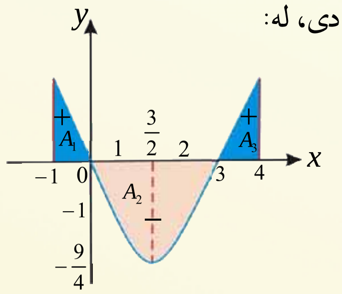
$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \,,\quad (x,y) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$$ بحراني ټکی

څرنگه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکی دی او د تقاطع ټکي يې د x له محور سره عبارت دی، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3$$



$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)\,dx - \int_{0}^{3}(x^2 - 3x)\,dx + \int_{3}^{4}(x^2 - 3x)\,dx$$

$$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$$

$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

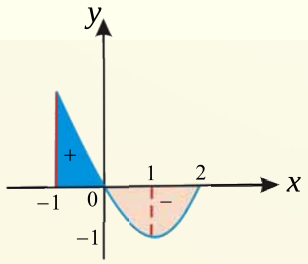
پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ منحني د x محور او $x = 2$ ، $x = -1$ کرښو تر منځ مساحت پیداکړئ.

حل: لومړی بحراني ټکي وروسته د x محور سره د تقاطع ټکی په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$
$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$
$$x = 1 \;,\; y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1,-1)$$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د x محور سره يې تقاطع په لاندي ډول ده.

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 \;,\; x_2 = 2$$



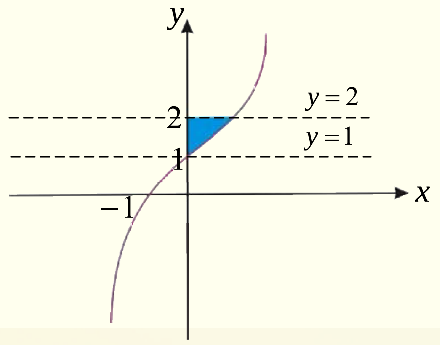
څرنګه چې منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې له مبدأ څخه تیرېږي او د منحني يوه برخه د $[-1,0]$ په انټروال کې د x محور پورته خواته او بله برخه يې د $[0,2]$ په فاصلې کې د x محور ښکته خواته پرته ده انتيګرال يې منفي دی:

$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$
$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$
$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

پوښتني

1- د $f(x)=\sin x$ منحني او د x محور تر منځ مساحت په $[-2\pi, 2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y=x^3+1$ تـــابع منحنـــي او $y=1$ ، $y=2$ کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.



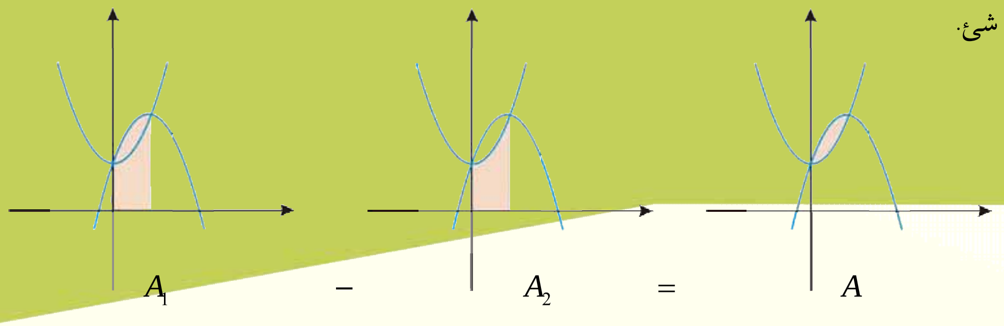
3- د $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منحني او د $x=0$ او $x=1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو محصور شویو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by tow curves

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ د $A = A_1 - A_2$ اړیکې د سموالي په اړه څه ویلای شئ.



که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابعګانې راکړل شوې وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د y_1 تابع ګراف د y_2 تابع د ګراف څخه لوړ دی نو د تابعګانو د انتیګرال د تفریق حاصل $(y_1 - y_2)$ د x په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعالیت د $y = x^2$ تابع د منحني او $y = x + 2$ د کرښې لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوې سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

_ که چیرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحني ګانو د محصور شوې سطحې د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، یعنې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع دپاسه واقع وي نو لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پیدا کوو وروسته د پاسني او لاندیني منحني د x د محور سره مساحت په $[a,b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

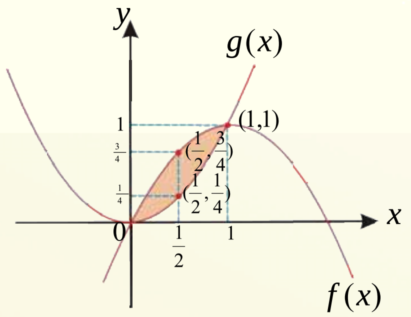
ـ که چیرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

لومړی مثال: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحنې ګانو د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل: لومړی د دواړو منحنې ګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو:

$$f(x)=2x-x^2\ ,\ g(x)=x^2$$
$$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2$$
$$2x-x^2-x^2=0$$
$$2x-2x^2=0$$
$$2x(1-x)=0$$
$$2x=0\quad\Rightarrow x_1=0$$
$$1-x=0\quad\Rightarrow x_2=1$$

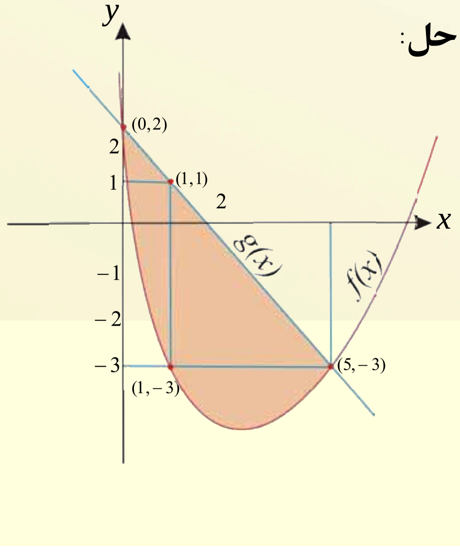


لیدل کېږي چې دواړو منحنې ګانو تقاطع (1،1) او (0،0) ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیدا کوو.

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]=\int_0^1[2x-x^2-x^2]dx=\int_0^1[2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$
$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل:



$$\left.\begin{array}{l}f(x)=x^2-6x+2\\ g(x)=2-x\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$x^2-6x+2=2-x\Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$$
$$x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0$$
$$x_1=0\ ,\ x_2=5$$
$\Rightarrow (0,2)\ ,\ (5,-3)$ د کرښې او منحنې د تقاطع ټکې

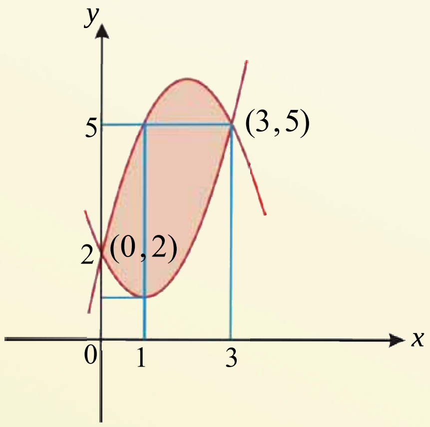
(c) ketabton.com: The Digital Library

له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کرښې ګراف د $f(x)$ ګراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنی چې $g(x) > f(x)$

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)dx$$
$$= \int_0^5 (-x - x^2 + 6x)\,dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)\,dx$$
$$= [-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2}]_0^5 = (-\frac{125}{3} + 5\cdot\frac{25}{2}) - 0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2}$$
$$= \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

دریم مثال: د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو ګرافونو د تقاطع ټکي د انتیګرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولو لپاره $f(x) = g(x)$ وضع کوو:



$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) = x^2 - 2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$
$$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$$
$$\Rightarrow -x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad -2x = -6 \Rightarrow x_2 = 3$$

د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي $(3,5)$, $(0,2)$

د x محور سره د تقاطع ټکي عبارت له (5،3)، (2،0) دی اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د $g(x)$ ګراف د $f(x)$ له ګراف څخه پورته واقع دی نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_0^3(-x^2+4x+2)dx-\int_0^3(x^2-2x+2)dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x]_0^3-[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+2x]_0^3$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot 27+2\cdot 9+6-0-\frac{1}{3}\cdot 27+9-6+0$$
$$=-9+18-9+9$$
$$=9$$

پوښتني

1- د $y=x^2$ او $y=-x^2+4x$ منحني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

2- د $y^2=2x-2$ پارابول او $y=x-5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

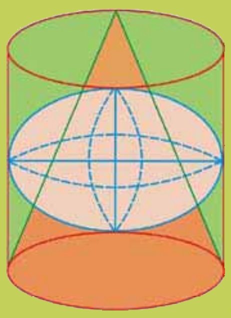
3- د $y^2=2x+6$ منحني او $y=x-1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوراني جسمونو د حجمونو محاسبه
Accounting of rounding things Volume

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پیدا کړئ.



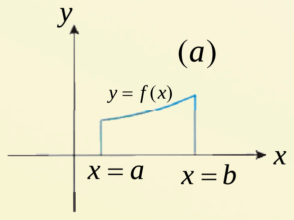
په مخکنیو ټولګیو کې مو د جسمونو حجم پیدا کړی وو پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معین انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره ثبوتوو.

فعالیت

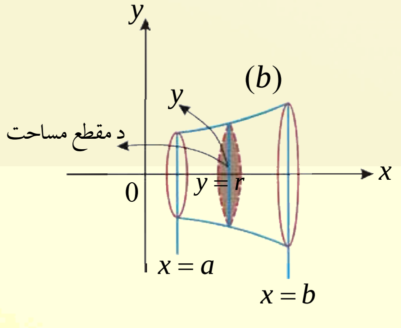
- یو ټکی او یوه کرښه په فضاکې داسې په پام کې ونیسئ چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د یوې مستقیمې کرښې له دوران څخه د یوه ټکي په شاوخوا له څرخېدو وروسته جوړېږي نوم یې واخلئ.
- د نوموړي جسم د حجم فورمول ولیکئ او ووایئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

- که چیرې د $y = f(x)$ متمادي تابع د منحنی مساحت نظر (a) شکل

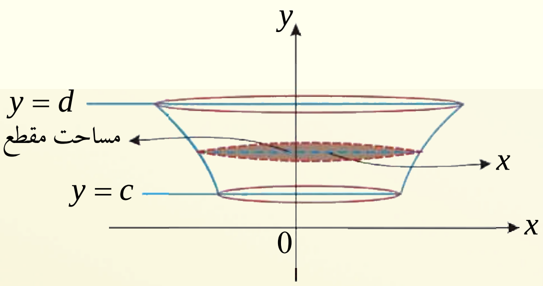


د $x = a$ او $x = b$ کرښو او منحنی په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتنې تابع د منحنی له دوران څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یې شکل لري، لکه د (b) شکل.



چې ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دايروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دايرې مساحت نظر x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د y محور سره موازي ده؛ نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول يې نظر ريمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\, dx = \int_a^b \pi y^2\, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$$



- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع يې $\Delta y = d - c$ او شعاع يې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\, dy = \int_a^b \pi x^2\, dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2\, dy$$

د دوراني جسمونو حجم د انتيګرال په مرسته په لاس راځي لکه:

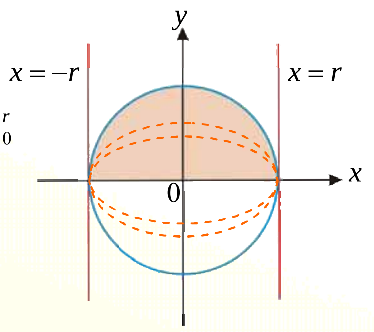
1- د انتيګرال په مرسته د کرې حجم پيدا کړئ.

ثبوت: پوهېږو چې که چيرې نيمه دايره د خپل قطر په شاوخوا وخرخي کره لاس ته راځي او د دايرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نيمې دايرې حجم له خرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو، چې د دايرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$



$$= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi [r^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$= 2\pi [(r^3 - \frac{r^3}{3}) - 0]$$

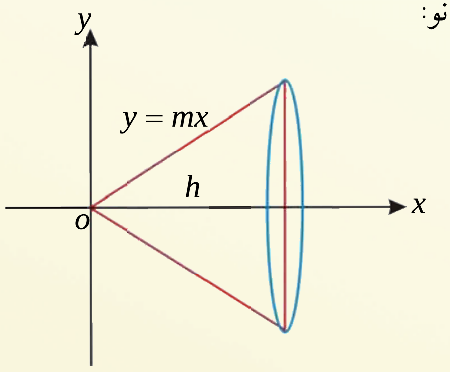
$$= 2\pi (\frac{3r^3 - r^3}{3})$$

$$= 2\pi (\frac{2r^3}{3})$$

$$V(\text{د کرې حجم}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2- د انتیګرال په مرسته د مخروط حجم پیدا کړئ.

ثبوت: خرنګه چې مخروطي سطح د $y = mx$ کرښې له دوران څخه د x د محور په چاپیریال په لاس راځي نو:



$$V = \int_0^h \pi y^2 dx$$

$$= \int_0^h \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_0^h x^2 dx$$

$$= \pi m^2 [\frac{x^3}{3}]_0^h = \pi m^2 (\frac{h^3}{3})$$

$$= \frac{\pi h}{3} (mh)^2$$

له پورته شکل څخه لیدل کیږي چې د مخروط قاعده دایروی بڼه لري اوشعاع یې د h محور سره موازي ده، یعنې $y // r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع (h) د x په محور باندې منطبق ده، $(x = h)$ نو د $y = mx$ په اړیکه کې یې قیمت وضع کوو:

$$y = mx \quad \Rightarrow \quad r = mh$$

$$= \frac{\pi h}{3}\ r^2$$

$$V = \pi r^2 \times \frac{h}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

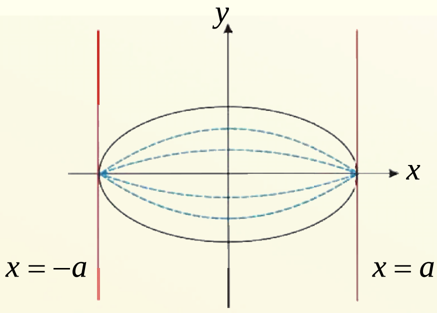
خرنگه چې د مخروط قاعده دايروي ده، د دايرې مساحت πr^2 دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ د منحني او x محور په چاپير د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

ثبوت: د الپس د نيمايي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو، چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^{a} \pi y^2\, dx = \pi \int_{-a}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2 x - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$= 2\pi[(b^2 a - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}) - 0] = 2\pi[b^2 a - \frac{b^2 a}{3}]$$

$$= 2\pi[\frac{3b^2 a - b^2 a}{3}] = 2\pi[\frac{2b^2 a}{3}]$$

$$V = \frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

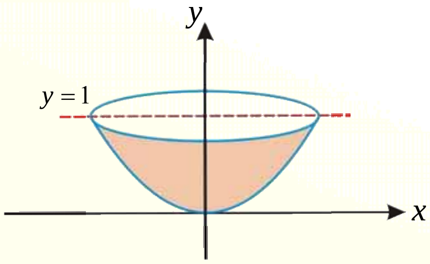
که چيرې د الپس محراقونه د y په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغه جسم حجم چې د $y = x^2$ او $y = 1$ کرښې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران څخه د y په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

حل: لومړی شکل رسموو وروسته یې مساحت حسابوو:

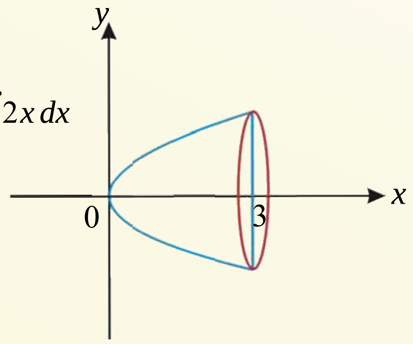


$$V = \int_a^b \pi\, x^2 dy = \pi \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}\pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ تابع او $y = 3$ کرښې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیدا کړئ.

حل:



$$V = \int_a^b \pi\, y^2 dx = \int_0^3 \pi[\sqrt{2x}\,]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}\,]^2 dx = \pi \int_0^3 2x\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x\, dx = 2\pi[\frac{x^2}{2}]_0^3$$

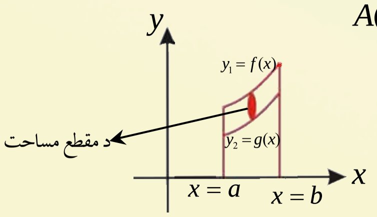
$$V = 9\pi$$

یادونه: که د $y_1 = f(x)$ او $y_1 = g(x)$ تابعګانې په $[a, b]$ انټروال کې متمادي وی د هغه دوراني جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحنيګانو او د $x = a$ ، $x = b$ کرښو تر منځ جوړېږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

$=\Delta x$ د استوانې ارتفاع

$A(x) =$ (د استوانې د مقطع مساحت) $= \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

د هغې استوانې د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع ګراف څخه پورته قرار لري.



$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$$

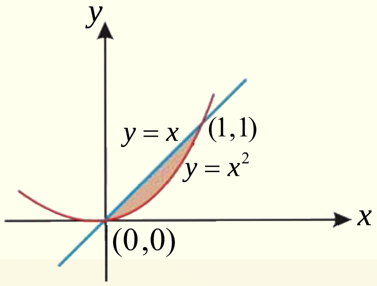
(c) ketabton.com: The Digital Library

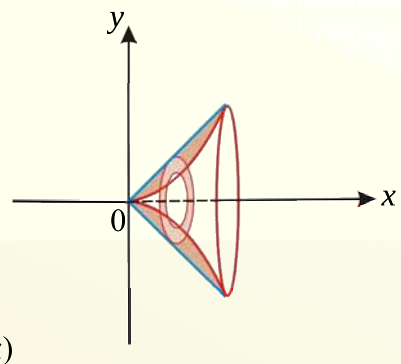
د هغې استواني د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع ګراف ، د $f(x)$ ګراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2)\,dx = \pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y = x^2$ منحني او $y = x$ کرښې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د x محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

حل:





$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x^2 = f(x) \\ y_2 = x = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y_2 > y_1 \;,\; g(x) > f(x)$$

$$= \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (x^2)^2)dx$$

$$= \pi\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \pi[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$= \pi[(\frac{1}{3} - 0) - (\frac{1}{5} - 0)] = \pi[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}]$$

$$V = \pi[\frac{5-3}{15}] = \pi[\frac{2}{15}] = \frac{2\pi}{15}$$

پوښتني

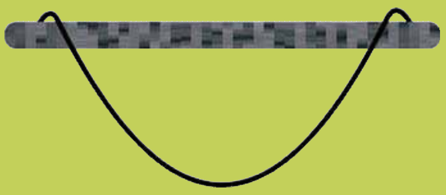
1. د هغه جسم حجم چې د $y = \sin x$ تابع او د $x = 0$ او $x = \pi$ دوو کرښو تر منځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د x د محور په چاپیر جوړېږي پیدا کړئ.
2. د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y = x^3$ منحني او $y = 8$ ، $x = 0$ کرښو ترمنځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د y د محور په چاپیر جوړېږي حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

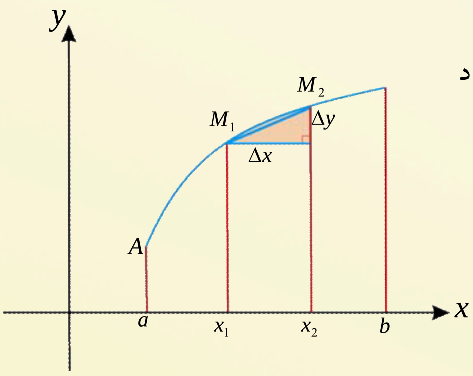
د قوس د اوږوالی محاسبه

Accounting the Length of Arc

ځرنګه کولای شو چی د مخامخ پري اوږدوالی پیداکړو؟



- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال پـه پـام کې ونیسـئ او هغې تـه $\overset{\frown}{A}$ ووایې، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په دریو مساوي برخو ویشو او د x_1 او د x_2 د قوس اوږدوالی په M_1 او M_2 ښیو.
- د M_1 له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د M_2 په ټکي او یوه بلـه کرښـه، د هغې پـه مخامخ کرښـه رسـموو او د دوارو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی ونوموئ.
- د M_1 د کرښي فاصلې ته Δx او M_2 ته Δy وایې او د M_2 M_1 د قایم الزاویه مثلث د مخامخ قوس اوږوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.



له پورتني فعالیت څخه کولای شو، چې د M_1 M_2 مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.

ثبوت:

له قایم‌الزاویه M_2 M_1 مثلث څخه په ګټې اخیستني سره لرو چې:

$$(M_1 M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f'(t)\cdot\Delta t \quad , \quad \Delta y = g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

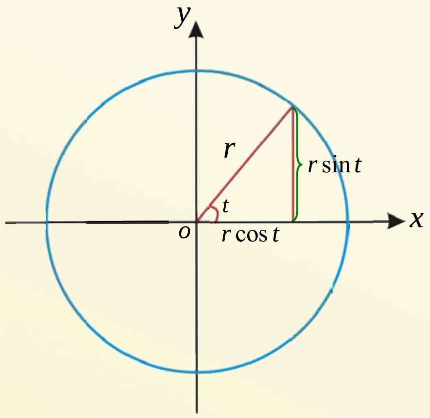
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

لومړی مثال: د $x^2+y^2=r^2$ د دایرې محیط محاسبه کړئ:

حل: څرنګه چې د دایرې پارامتري معادله په دې ډول $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ ده.

که چیرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دایرې نمایي محیط پیدا کړئ.



$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\,dt$$

$P=[r\,t]_0^{\pi}=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi r$ د دایرې نیمایي محیط

د دایرې مکمل محیط $=2\pi r$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د x د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو:

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0 \le x \le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

حل: $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2} \cdot dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \int_0^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du = \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x$$

$$du = \frac{9}{4}dx$$

$$dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \frac{4}{9}[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_0^4 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{u^3}]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}[\sqrt{(1 + \frac{9}{4}x)^3}]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{(1 + \frac{9}{4} \cdot 4)^3} - 1] = \frac{8}{27}(\sqrt{10^3} - 1)$$

$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د y د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو، چې:

$$= \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1}\, dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالی په $1 \le y \le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

حل:

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$=\int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$

پوښتني

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيګانو د قوس اوږدوالی د $1\leq x\leq 2$ د فاصلې تر منځ پيدا کړئ.
2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحني د قوس اوږدوالی د $0\leq x\leq 1$ د فاصلې تر منځ پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي مهم ټکي

- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی راښیي چې د $y=f(x)$ منحنې او د x د محور او د $x=a$ او $x=b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع ټل د x د محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د x د محور لاندې خواته واقع او انتیګرال یې منفي دی.

د دوو منحني ګانو په واسطه د محصور شوې مساحت محاسبه:

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع د ګراف په پورتنۍ برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

- که چیرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنۍ برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx$$

د دوراني جسمونو د حجم مساحت:

- که چیرې د $y=f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x=a$ او $x=b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع له منحنې د دوران څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه‌یي شکل لري.

چې ارتفاع یې $\Delta x=b-a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهېږو چې د دایرې مساحت نظر د x محور ته $A(x)=\pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د y له محور سره موازي دی؛ نو $y=r$ کیږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په لاندې ډول دی:

$$v=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x=\int_a^b \pi r^2\,dx=\int_a^b \pi y^2\,dx=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

- که د $x=f(y)$ تابع مساحت د $y=c$ ، $y=d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر y محور ته $A(y)=\pi r^2$ چې ارتفاع یې $\Delta x=d-c$ او شعاع یې $x=r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران د مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y=\int_a^b \pi r^2\,dy=\int_a^b \pi x^2\,dy=\pi\int_a^b [f(y)]^2\,dy$$

د قوس د اوږدوالی محاسبه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قوس د اوږدوالی د محاسبې فورمول: $= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$

(1 $$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

(2 $$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(y)}\, dy$$

د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د $y^2 - x - 5 = 0$ منحني او د y د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y = \sin x$ منحني په $[0, 2\pi]$ انټروال کې او د x د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د $y = x^2 - 2x$ او $y = 6x - x^2$ منحني گانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y = -x^2 + 4x - 3$ منحني او x محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ او $y = x^2 - 4x$ منحني گانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y = \sin x - \cos x$ منحني او $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ کرښو د x محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ منحني د تابع له دوران څخه د x د محور پرشاوخوا په $[0, 4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې رابندې شوې مسطحې د جسم حجم چې د $y = x^2$ منحني او د $x^2 + y^2 = 2$ دایرې له دوران څخه د x محور په شاوخوا جوړ شوې وي پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y = \frac{1}{2}x + 1$ کرښې دوران او د x محور په $[2, 6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y = -x + 4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2 \le x \le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږدوالی په $2 \le x \le 5$ انټروال کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

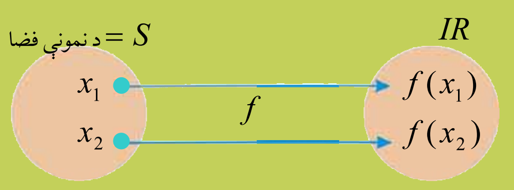
احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

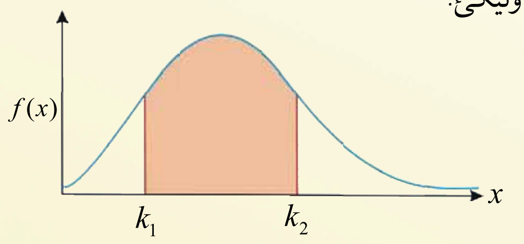
موږ ټول افغانان یو.

د احتمال د تابع توزیع

د تصادفي ازمایښت، نمونه‌یي فضا او ناخاپه متحول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.



- هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تری‌گټه اخلي، له هغه متحول سره چې په الجبر کې مو لوستي دی څه توپیر لري؟
- که $x_1, x_2 \ldots x_n$ د یوه سټ عناصر او $P(x = x_i) = f(x_i)$ تابع ولرو، هغه مرتبې جوړې چې د نوموړی تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بیا یې ولیکئ.
- مخامخ شکل ته په کتنې سره د k_1 او k_2 مقدارونو ترمنځ او د $f(x)$ منحنی لاندینی محدود شوی مساحت د انتیګرال په شکل وښیئ.



- د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د $\sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$، $[E(x = x_i)] =$ $[x_i - E(x_i)]^2$ او $[x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تر څېړنې لاندې نیول کیږي عبارت له هغه تابع څخه دی، چې د تعریف ناحیه یې نمونه‌یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي.

ـ که $P(x = x_i) = f(x_i)$ ولرو نو د $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \ldots, [x_n, f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا(گسسته) احتمال تابع وایي.

- د تجمعي او پیوسته احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x) = P(X \le x)$ وښیو.
- که چیرې $f(x)$ د احتمال تابع او x تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)\,dx$$

- که چیرې x پیوسته ناڅاپه (تصادفي) متحول او $k_1 < k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

- که چیرې x ناڅاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط (*Expected Value*) د x تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کیږي، برابر دی له:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots\ldots\ldots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د x اوسط هم بلل کیږي چې هغه په $\bar{x}$ ښيي همدارنگه که چیرې x گسسته تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د x وریانس چې د S^2 په شکل ښودل کیږي برابر دی له:

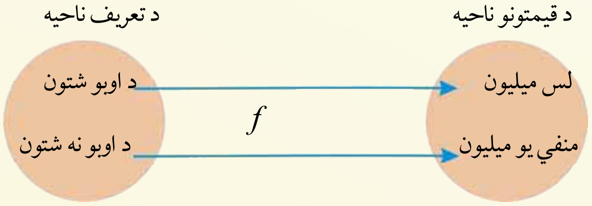
$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډۍ پر سر د اوبو یوه څاه وکني، د اوبو څاه په یو میلیون افغانۍ تمامېږي که نوموړې څاه اوبه ورکړي د شرکت مالك لس میلیونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې به د څاه د کېندلو یو میلیون افغانۍ مصرف په زیان ورکړي.

الف_ دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښیئ.

ب_ که د دې احتمال چې کیندل شوی څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال یې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط (*Expected Value*)، وریانس او د x تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړئ.

د الف حل:



د ب حل: د تصادفي متحول احتمال تابع، اوسط، وریانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي:

تصادفي متحول	د تابع احتمال	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واریانس	انحراف معیار
x_i	$f(x_i)$	$E(x)=\sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1	0.8	$-1\cdot 0.8=-0.8$	$(-1-1.2)^2=4.84$	$4.84\cdot 0.8=3.872$	4.4
10	0.2	$10\cdot 0.2=2$	$(10-1.2)^2=77.44$	$77.44\cdot 0.2=15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2=19.360$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

فرض کوو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د پېرودل شوو موټرو شمېر	0	1	2	3

د x تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پیدا کړې.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخیستنې سره ووایئ چې په یوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله‌يي توزيع او د برنولي ازمويښت

يو ګډون کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزموينه کې د 160 سؤالونو څخه 100 سؤالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې دا ګډون‌کوونکی په آزموينه کې بريالی کيږي او يا بې نتيجه پاتې کيږي؟

د احتمال دوه جمله‌يي توزيع يوه مجزا توزيع ده چې د مختلفو پېښو د توصيف لپاره په کار وړل کيږي اکثراً پېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.

فعاليت

د لاندې آزمويښتي پېښو د شرطونو څخه څه ډول پايلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه يې له 7 څخه کوچنی شي.
- د يوې جعبې څخه څو ځلې د يوې مرۍ(مهره) اخېستل چې د تورو او سپينو مرۍ لرونکې ده.
- د يوې جعبې څخه چې د تورو او سپينو مريو لرونکې ده څو ځلې يوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوې مرۍ سپينه وي(چې اخېستل شوې مرۍ بيا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې m بريالیتوب د n آزمايښت څخه($m<n$) چې ترتيب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه يادېږي او فورمول يې وليکئ.
- که د m شکلونو د بريالیتوب احتمال د n ازمايښت څخه په P او $n-m$ شکلونو د ناکامې احتمال د n آزمايښت څخه په q وښودل شي نو د m کاميابي احتمال د آزمايښت د n شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو څلور ځوابه آزمويني د پوښتنو سره مخامخ کيږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض وکړئ که د (سم ځواب) بريالیتوب په T او (ناسم ځواب) نه بريالیتوب د F په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر يوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتني فعاليت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمايښت يو ناڅاپه ازمايښت دی، چې کولای شو پايله يې په دوو حالتونو بريالیتوب او نابريالیتوب دسته بندي کړو.

د برنولي توزيع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښيو په داسې حال کې چې P د بریالیتوب احتمال او $q=1-p$ د نابریالیتوب احتمال دی.

که چیرې یو ازمایښت n ځلې تکرار کړو، یو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزمایښت د بریالیتوب احتمال P او نابریالیتوب احتمال q وي، په دې صورت کې د n ځلې آزمایښت څخه د m ځلې بریالیتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$ $\quad P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$

پورتني اړیکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښیو،

د پورتنی فورمول په پام کې نیولو سره کولای شو، د دوه جملهیي د توزیع اوسط په $\bar{x}=np$ او د دوی توزیع معیاري انحراف د $S=\sqrt{npq}$ په بڼه وښیو.

مثال: د یوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شکرې له ناروغی څخه 0.4 دی، که چیرې 15 تنه په دې ناروغی اخته وي، ددې خومره احتمال شته چې پنځه تنه ښهٔ شي او همدا شان پیداکړئ چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

حل: څرنګه چې $n=15$, $m=5$, $q=0.6$, $P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$
$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.0060466176 0=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$
$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$
$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$
$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$
$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$
$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$
$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$

پوښتنې

په یوه کلي کې 200 کورنی اوسیږي که هره کورنی 4 ماشومان ولري ددې احتمال پیداکړئ چې هره کورنی

- حد اقل یو زوی لري.
- یوازې دوه زامن لري.
- یوه یا دوې لوڼې ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پواسن د احتمال توزيع

که چيرې د برنولي دوه جملهيي توزيع فورمول په پام کې ونيسو، ايا ويلاي شئ که چيرې د برنولي په دوه جملهيي توزيع کې د P قيمت صفر ته تقرب وکړي او د n قيمت لايتناهي ته تقرب وکړي؛ نو د برنولي دوه جملهيي توزيع څه سره مساوي کيږي.

1) $b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^x q^{n-x}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b(x,n,p)=\dfrac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$

3) $P(x,\lambda)=\dfrac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$

فعاليت

که $n=5$، $p=0.1$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ قيمتونه په داسې حال کې چې $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$ او $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او له پاسنيو توابع قيمتونه سره يې پرتله کړئ، ويلای شي چې دکوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي، چې د m شکلونو دکاميابي احتمال د n آزمايښتونو څخه کله چې n لوی او دکاميابي احتمال P کوچنی وي، د تقريبي محاسبې لپاره وکارول کيږي.

دا فورمول عبارت دی له: $P(X=m)=\dfrac{e^{-x}\lambda^m}{m!}$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دی.

په ياد ولرئ چې د پواسن په توزيع کې اوسط او هم وريانس له λ سره برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 200 تنو مسافرینو د یوې الوتکې ټکټ اخېستلی دی د مخکنیو تجاربو په اساس که د هغه مسافرینو چې ټکټ یې رانیولی دی د نه راتګ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرین واپس را نه شي څومره دی.

حل: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کامیابي ده او همدارنګه لیدل کېږي چې $n = 200$ ډېر لوی او $P = 0.01$ یعنې د کامیابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{m}}{m!} \qquad \lambda = n\,p = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^{3}}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^{2}} \cdot 8}{6} = \frac{\frac{1}{7.3890461584} \cdot 8}{6}$$

$$= \frac{0.13533 \cdot 8}{6} = \frac{1.08268}{6} = 0.1804$$

اوس که چیرې دا احتمال د دو جملهیي په فورمول محاسبه کړو،لرو چې:

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^{m}\; q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ p = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.99$$

$$P(3) = P(X = 3) = \binom{200}{3} (0.01)^{3} (0.099)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3! \cdot 197!} (0.01)^{3} (0.099)^{197} = 0.1814$$

څرنګه چې لیدل کېږي دواړه ځوابونه سره معادل دي نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په يوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښيو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتني فورمول کې t د ښودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شوی وي m د ورتللو شمېر د t په واحد وخت کې د λ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

مثال: که په يوه ساعت کې د يوه بانک د مراجعينو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې څلور تنه په لومړيو دريو دقيقو کې راغلی وي څومره دی.

حل:

$$\lambda = 60 \quad , \quad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \quad , \quad \lambda t = 60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د چاپ د یوه ماشین د جوړولو لپاره په یوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

الف: د ماشین د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزیع په یوه کال کې حساب کړئ.

ب: د توزیع اوسط او معیار انحراف څومره دی؟

ج: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشین د جوړولو مصرف پیدا کړئ؟

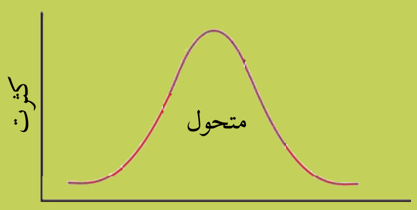
د: ددې احتمال چې په هر کال کې دیوه ماشین د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمال توزیع

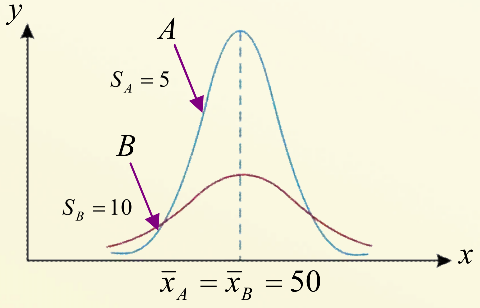
پوهېږو چې د نورمال منحني شکل مشابه او متناظر له زانګولی سره ده، په نورمال منحني کې د پراګندګی مرکزي شاخصونه(معیاري انحراف او اوسط) څه ډول ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.



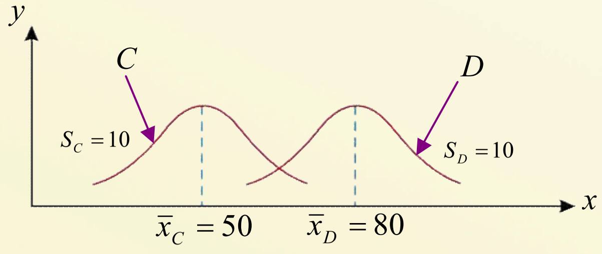
فعالیت

د نورمال بېلابېل توزیعات د بېلابېلو اوسط او معیار انحرافونو لرونکی دی.

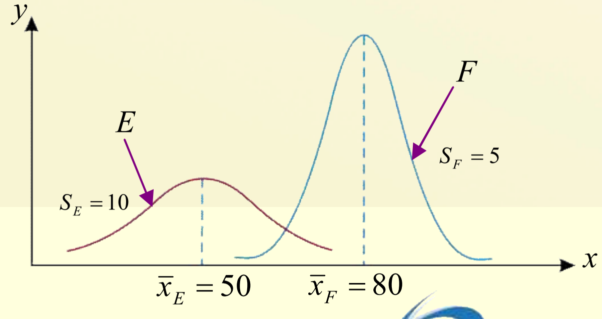
څو د نورمال توزیع له بېلابېلو اوسطحو او معیار انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.



الف شکل



ب شکل



ج شکل

لاندینی فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخېستنې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

- د الف په شکل کې د A او B د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې C او D توزیع د څه ډول معیار انحراف او اوسط لرونکی دی؟
- د ج په شکل کې د E او F توزیع د څه ډول معیار انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته تر کوم ځایه غزیدلي دي؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزیع کیدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

او یا

$$f(x) = N(x, \bar{x}, s)$$

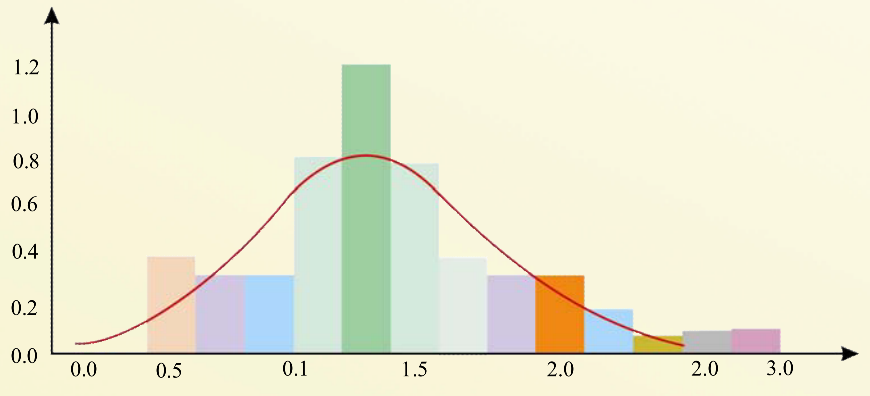
په داسې حال کې چې $e = 2.71828$ او π هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، s معیار انحراف، x پیوسته تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی راښیي.

د نورمال توزیع له پیوسته توزیعګانو څخه ده. د نورمال توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توګه سره نږدې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د موټرونو ماشین د تیلو سوزولو په وخت کې یوه اندازه مضر لوګی تولیدوي، د هغه مضر لوګی مقدار چې له 46 موټرونو تولیدېږي، چې د یوه تن په واسطه چې لورنزن نومېده په 1980 کال کې وڅېړل شو.یوه اندازه لوګی د نایتروجن اوکسایدونه لري. لاندې مستطیلي ګراف د نایتروجن اوکساید میزان د $(\frac{gr}{mil})$ د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزیع اوسط او وریانس چې د نوموړی کس له خوا تر څېړنې لاندې نیول شوی. ددې مستطیلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونه‌یي شمېر له اندازه‌ګیری سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

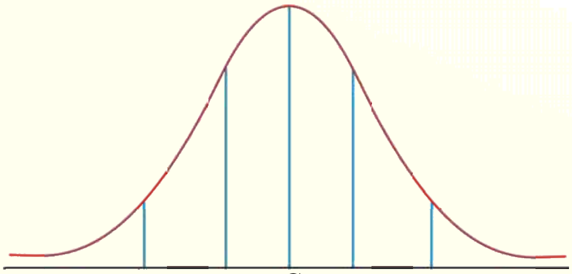
د مثال په ډول په څلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870 \cdot 0.2 = 0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی ځکه 8 دیټا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه

لاندینی شکل په پام کې ونیسئ د A, B, C, D او E ټکو موقعیت د معیار انحراف د اوسط له جنسه پیدا کړئ.

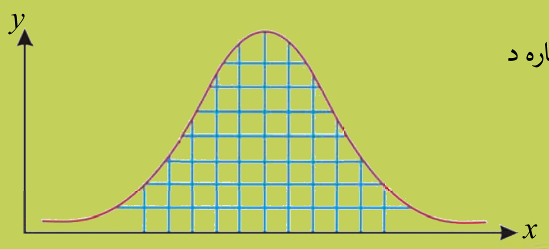


(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول

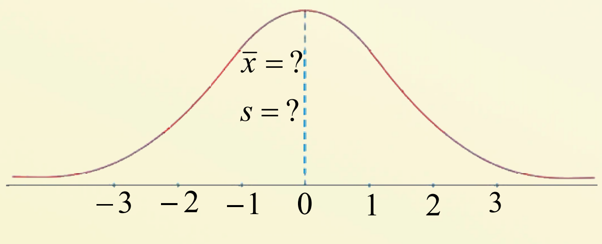
مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

د $y = f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د څه ډول لارو وړاندیز کوئ.



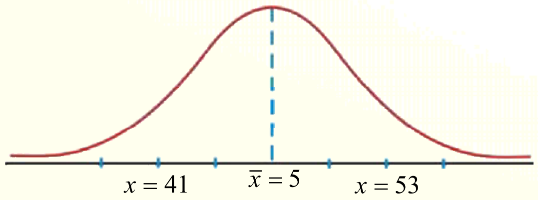
فعالیت

- که چیرې د x تصادفي پیوسته متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\bar{x}$ او معیار انحراف یې s وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ کمیت غوره کړي د انتیګرال په بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انتیګرال محاسبه په ساده کار وي.
- که چیرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ تابع د احتمال توزیع برابر له څه سره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیار انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دی؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

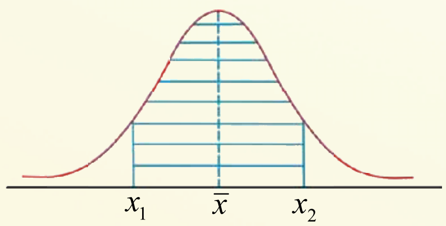
• کـه پـه لانـدې شـکل کې چې د $x = 41$ او $x = 53$ قیمتونـه پـه نورمـال ډول د $\bar{x} = 50$ اوسـط او $S = 5$ معیار انحراف ښودل شوی دی نو د $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.



له پورتنی فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د x پیوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د x د احتمال د توزیع له تابع څخه انتګرال ونیسو او د منحنې لاندې سطحه د x_1 او x_2 فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s)dx$$



د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نه دی، د نورمال توزیعګانو د منحنې لاندې مساحت محاسبه اوږدو جدولونو ته اړتیا لري چې عملاً داکار ګران دی، کولای شو چې د جدول د جوړولو شکل د احصائیوي data د سټنډرډ کولو په واسطه حل کړو.

په دې معنا چې کولای شو په x پورې اړوند تصادفي متحول چې د نورمال توزیع لرونکی دی، د لاندې اړیکې په واسطه سټنډرډ کړو.

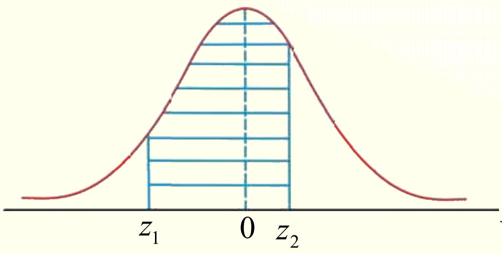
$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

دلته z د سټنډرډ نورمال متحول په نامه او منحنې ته د سټنډرډ نورمال منحنې په نامه یا د نورمال احتمال منحنې نومول کېږي، په یاد ولرئ چې د z سټنډرډ وي، متحول تل د صفر اوسط لرونکی او یو معیار انحراف یې دی، همدارنګه د نورمال منحنې او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سره برابر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

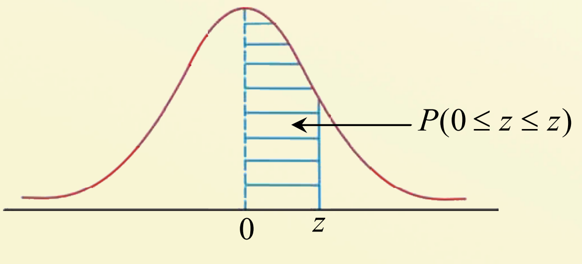
لاندې مساحت د یوه منحني یوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقیم تناسب لري او کولای شو چې د $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ بدلولو سره یې په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \int_{z_1}^{z_2} N(z, 0, 1)\, dz$$

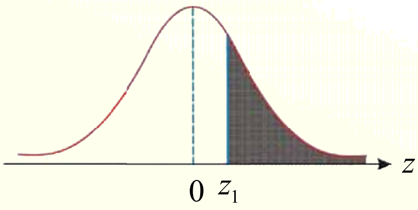


د x متحول منحني لاندې مساحت چې د $x = x_1$ او $x = x_2$ ترمنځ واقع دی، د z متحول له منحني مساحت سره چې د $z = z_1$ او $z = z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. په پایله کې کولای شو چې د نورمال د توزیع سټنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزیع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قیمت لپاره په لاس راوړای شو.

د سټنډرډ نورمال د توزیع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو، په لنډ ډول توضیح کړو. هغه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د سټنډرډ نورمال توزیع اړوند په احتمالاتو کې ګډون لري. لاندې جدول ددې لوست یوه برخه د جدول پای راښیي، هغه ارقام چې د جدول دپاسه لیکل شوي دي، راښیي چې z د مثبتو مقدارونو لپاره تنظیم شوي دي چې د منحني لاندې مساحت له صفر ټکي څخه تر z پورې راښیي.



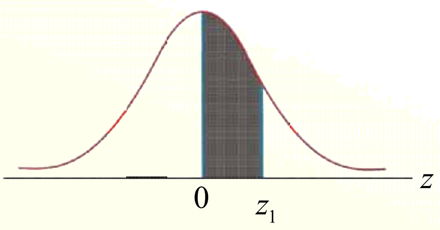
جدول(1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997

(c) ketabton.com: The Digital Library

جدول(2)



z	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰/۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۸۰	۰/۰۱۲۰	۰/۰۱۶۰	۰/۰۱۹۹	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۷۹	۰/۰۳۱۹	۰/۰۳۵۹
۰/۱	۰/۰۳۹۸	۰/۰۴۳۸	۰/۰۴۷۸	۰/۰۵۱۷	۰/۰۵۵۷	۰/۰۵۹۶	۰/۰۶۳۶	۰/۰۶۷۵	۰/۰۷۱۴	۰/۰۷۵۴
۰/۲	۰/۰۷۹۳	۰/۰۸۳۲	۰/۰۸۷۱	۰/۰۹۱۰	۰/۰۹۴۸	۰/۰۹۸۷	۰/۱۰۲۶	۰/۱۰۶۴	۰/۱۱۰۳	۰/۱۱۴۱
۰/۳	۰/۱۱۷۹	۰/۱۲۱۷	۰/۱۲۵۵	۰/۱۲۹۳	۰/۱۳۳۱	۰/۱۳۶۸	۰/۱۴۰۶	۰/۱۴۴۳	۰/۱۴۸۰	۰/۱۵۱۷
۰/۴	۰/۱۵۵۴	۰/۱۵۹۱	۰/۱۶۲۸	۰/۱۶۶۴	۰/۱۷۰۰	۰/۱۷۳۶	۰/۱۷۷۲	۰/۱۸۰۸	۰/۱۸۴۴	۰/۱۸۷۹
۰/۵	۰/۱۹۱۵	۰/۱۹۵۰	۰/۱۹۸۵	۰/۲۰۱۹	۰/۲۰۵۴	۰/۲۰۸۸	۰/۲۱۲۳	۰/۲۱۵۷	۰/۲۱۹۰	۰/۲۲۲۴
۰/۶	۰/۲۲۵۸	۰/۲۲۹۱	۰/۲۳۲۴	۰/۲۳۵۷	۰/۲۳۸۹	۰/۲۴۲۲	۰/۲۴۵۴	۰/۲۴۸۶	۰/۲۵۱۸	۰/۲۵۴۹
۰/۷	۰/۲۵۸۰	۰/۲۶۱۲	۰/۲۶۴۲	۰/۲۶۷۳	۰/۲۷۰۴	۰/۲۷۳۴	۰/۲۷۶۴	۰/۲۷۹۴	۰/۲۸۲۳	۰/۲۸۵۲
۰/۸	۰/۲۸۸۱	۰/۲۹۱۰	۰/۲۹۳۹	۰/۲۹۶۷	۰/۲۹۹۶	۰/۳۰۲۳	۰/۳۰۵۱	۰/۳۰۷۸	۰/۳۱۰۶	۰/۳۱۳۳
۰/۹	۰/۳۱۵۹	۰/۳۱۸۶	۰/۳۲۱۲	۰/۳۲۳۸	۰/۳۲۶۴	۰/۳۲۸۹	۰/۳۳۱۵	۰/۳۳۴۰	۰/۳۳۶۵	۰/۳۳۸۹
۱/۰	۰/۳۴۱۳	۰/۳۴۳۸	۰/۳۴۶۱	۰/۳۴۸۵	۰/۳۵۰۸	۰/۳۵۳۱	۰/۳۵۵۴	۰/۳۵۷۷	۰/۳۵۹۹	۰/۳۶۲۱
۱/۱	۰/۳۶۴۳	۰/۳۶۶۵	۰/۳۶۸۶	۰/۳۷۰۸	۰/۳۷۲۹	۰/۳۷۴۹	۰/۳۷۷۰	۰/۳۷۹۰	۰/۳۸۱۰	۰/۳۸۳۰
۱/۲	۰/۳۸۴۹	۰/۳۸۶۹	۰/۳۸۸۸	۰/۳۹۰۷	۰/۳۹۲۵	۰/۳۹۴۴	۰/۳۹۶۲	۰/۳۹۸۰	۰/۳۹۹۷	۰/۴۰۱۵
۱/۳	۰/۴۰۳۲	۰/۴۰۴۹	۰/۴۰۶۶	۰/۴۰۸۲	۰/۴۰۹۹	۰/۴۱۱۵	۰/۴۱۳۱	۰/۴۱۴۷	۰/۴۱۶۲	۰/۴۱۷۷
۱/۴	۰/۴۱۹۲	۰/۴۲۰۷	۰/۴۲۲۲	۰/۴۲۳۶	۰/۴۲۵۱	۰/۴۲۶۵	۰/۴۲۷۹	۰/۴۲۹۲	۰/۴۳۰۶	۰/۴۳۱۹
۱/۵	۰/۴۳۳۲	۰/۴۳۴۵	۰/۴۳۵۷	۰/۴۳۷۰	۰/۴۳۸۲	۰/۴۳۹۴	۰/۴۴۰۶	۰/۴۴۱۸	۰/۴۴۲۹	۰/۴۴۴۱
۱/۶	۰/۴۴۵۲	۰/۴۴۶۳	۰/۴۴۷۴	۰/۴۴۸۴	۰/۴۴۹۵	۰/۴۵۰۵	۰/۴۵۱۵	۰/۴۵۲۵	۰/۴۵۳۵	۰/۴۵۴۵
۱/۷	۰/۴۵۵۴	۰/۴۵۶۴	۰/۴۵۷۳	۰/۴۵۸۲	۰/۴۵۹۱	۰/۴۵۹۹	۰/۴۶۰۸	۰/۴۶۱۶	۰/۴۶۲۵	۰/۴۶۳۳
۱/۸	۰/۴۶۴۱	۰/۴۶۴۹	۰/۴۶۵۶	۰/۴۶۶۴	۰/۴۶۷۱	۰/۴۶۷۸	۰/۴۶۸۶	۰/۴۶۹۳	۰/۴۶۹۹	۰/۴۷۰۶
۱/۹	۰/۴۷۱۳	۰/۴۷۱۹	۰/۴۷۲۶	۰/۴۷۳۲	۰/۴۷۳۸	۰/۴۷۴۴	۰/۴۷۵۰	۰/۴۷۵۶	۰/۴۷۶۱	۰/۴۷۶۷
۲/۰	۰/۴۷۷۲	۰/۴۷۷۸	۰/۴۷۸۳	۰/۴۷۸۸	۰/۴۷۹۳	۰/۴۷۹۸	۰/۴۸۰۳	۰/۴۸۰۸	۰/۴۸۱۲	۰/۴۸۱۷
۲/۱	۰/۴۸۲۱	۰/۴۸۲۶	۰/۴۸۳۰	۰/۴۸۳۴	۰/۴۸۳۸	۰/۴۸۴۲	۰/۴۸۴۶	۰/۴۸۵۰	۰/۴۸۵۴	۰/۴۸۵۷
۲/۲	۰/۴۸۶۱	۰/۴۸۶۴	۰/۴۸۶۸	۰/۴۸۷۱	۰/۴۸۷۵	۰/۴۸۷۸	۰/۴۸۸۱	۰/۴۸۸۴	۰/۴۸۸۷	۰/۴۸۹۰
۲/۳	۰/۴۸۹۳	۰/۴۸۹۶	۰/۴۸۹۸	۰/۴۹۰۱	۰/۴۹۰۴	۰/۴۹۰۶	۰/۴۹۰۹	۰/۴۹۱۱	۰/۴۹۱۳	۰/۴۹۱۶
۲/۴	۰/۴۹۱۸	۰/۴۹۲۰	۰/۴۹۲۲	۰/۴۹۲۵	۰/۴۹۲۷	۰/۴۹۲۹	۰/۴۹۳۱	۰/۴۹۳۲	۰/۴۹۳۴	۰/۴۹۳۶
۲/۵	۰/۴۹۳۸	۰/۴۹۴۰	۰/۴۹۴۱	۰/۴۹۴۳	۰/۴۹۴۵	۰/۴۹۴۶	۰/۴۹۴۸	۰/۴۹۴۹	۰/۴۹۵۱	۰/۴۹۵۲
۲/۶	۰/۴۹۵۳	۰/۴۹۵۵	۰/۴۹۵۶	۰/۴۹۵۷	۰/۴۹۵۹	۰/۴۹۶۰	۰/۴۹۶۱	۰/۴۹۶۲	۰/۴۹۶۳	۰/۴۹۶۴
۲/۷	۰/۴۹۶۵	۰/۴۹۶۶	۰/۴۹۶۷	۰/۴۹۶۸	۰/۴۹۶۹	۰/۴۹۷۰	۰/۴۹۷۱	۰/۴۹۷۲	۰/۴۹۷۳	۰/۴۹۷۴
۲/۸	۰/۴۹۷۴	۰/۴۹۷۵	۰/۴۹۷۶	۰/۴۹۷۷	۰/۴۹۷۷	۰/۴۹۷۸	۰/۴۹۷۹	۰/۴۹۷۹	۰/۴۹۸۰	۰/۴۹۸۱
۲/۹	۰/۴۹۸۱	۰/۴۹۸۲	۰/۴۹۸۲	۰/۴۹۸۳	۰/۴۹۸۴	۰/۴۹۸۴	۰/۴۹۸۵	۰/۴۹۸۵	۰/۴۹۸۶	۰/۴۹۸۶
۳/۰	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۸	۰/۴۹۸۸	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۹۰	۰/۴۹۹۰
۳/۱	۰/۴۹۹۰	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۳
۳/۲	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵
۳/۳	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۷
۳/۴	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۸
۳/۵	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸
۳/۶	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۷	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۸	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۹	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال په ډول که چيري $z = 1.56$ وي لومړی هغه سطر پيداکړئ چې په هغه کې z د 1.5 معادل دی، که چيرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسېږي چې له پاسه 0.06 ليکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کېږو چې د منحنې د لاندې اړونديې سطحې د $z = 0$ څخه تر $z = 1.56$ پورې دی، نو ليکلای شو چې: $P(0 \le Z \le 1.56) = 0.9406$

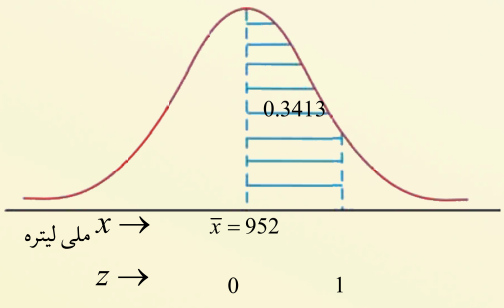
لومړی مثال: د څښلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستگاه داسې تنظيم شوې ده، که 952 ملي‌ليتر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې ميزان چې د نورمال توزيع اوسط يې 952 ملي‌ليتره او معياري انحراف يې 4 ملي‌ليتره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي‌ليترو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

حل: لومړی z د x له جنسه پيداکوو:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د x د تعريف ناحيه له 952 څخه تر 956 د z تعريف د ناحيې له صفر څخه تر 1 بدلېږي. د لوست د پيل له جدول(2) څخه په گټه اخيستنې سره لرو $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي‌ليترو نوشابه ولري، يا په بل عبارت 34.13 فيصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي‌ليتره نوشابه لري؛ يعنې:



$$\begin{aligned} P(0 \le z \le 1) &= P(z_2) - P(z_1) \\ &= P(1) - P(0) \\ &= 0.3413 - 0 \\ &= 0.3413 \end{aligned}$$

دويم مثال: په يوه خاص مضمون کې د زده‌کوونکو د نمبرو د نورمال توزيع اوسط 70 او معياري انحراف يې 8 دی له نورمال ستندرډ جدول څخه په گټه اخيستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فيصدي پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسيمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو:
$$z_1 = \frac{54-70}{8} = -2$$

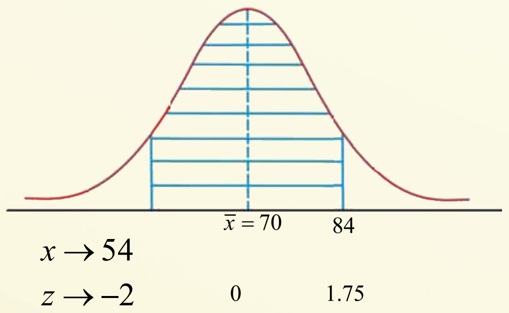
د $x = 84$ لپاره لرو:
$$z_2 = \frac{84-70}{8} = 1.75$$

څرنګه چې د سټنډرډ نورمال منحني لاندې مساحت په يو محدود انټروال کې په پام کې نيول شوی دی؛ نو له نورمال سټنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$
$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوې مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$



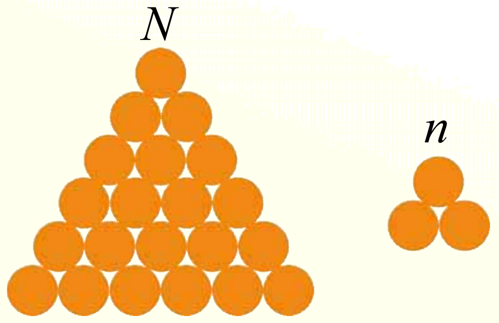
پوښتنې

د لومړي مثال په پام کې نيولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فيصده له 948 څخه تر 956 ملي‌ليټره پورې نوشابه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نمونه اخېستل

په دي متل کې((موټې د خرواروا نمونه ده)) څرنګه تحلیلوئ.



$N =$ جامعه $\Rightarrow n = ?$

فعالیت

- که چیرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو ونې(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندیز کوئ.
- نمونه په دوو ډولونو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناڅاپه نمونه، تاسې ددې نمونو کومې یوې ته غوره‌والی ورکوی؟ ولې؟
- د نمونه‌ګیری لپاره ښکاره خپل دلایل شته ایا کولای شي یو یا دوه دلیلونه یې وواییځ.
- سوچ کولای شي چې د اوسط او معیار انحراف عددي ځانګړنې چې د ټولنې د توزیع او د نمونې د توزیع لپاره ورڅخه ګټه اخېستل کېږي، یو شان وي.
- ایا د نمونه‌ګیري او لیدل شویو ناڅاپه متحولینو د مقدارونو ترمنځ توپیر شته؟

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د نمونه اخېستنې بیلې بیلې لارې شته دی.

ـ ناڅاپه نمونه اخېستنه: د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.

ـ سیستماتیک نمونه اخېستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

ـ طبقه‌یي نمونه اخېستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

ـ خوشه‌یي نمونه اخېستنه: که ټولنه ډېره لویه وي، هغه په بېلابېلو ځانګو وېشو او له هرې ځانګې څخه یوه نمونه ټاکو.

ـ د هرې ټولنې عددي ځانګړنې(اوسط معیار انحراف) ته د ټولنې پارامتر وایي.

ـ د هرې ټولنې د عددي نمونه‌ګیري ځانګړنې(اوسط معیار انحراف) ته آماره وایي.

ـ د نمونې پایلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولینو په بڼه په پام کې نیسو.

ـ د $x_1, x_2 \dots x_n$ ناڅاپه متحولونو یوه ناڅاپه نمونه د x تصادفي متحول ویل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چيرې تابع يې په دې ډول تعريف شوې وي.

$$f(x_1,x_2)...,x_n)=f(x_1)\cdot f(x_2)...f(x_n)$$

مثال: فرض کوو چې په يوه قطۍ کې 5 سپينې او 7 تورې ګلولې وي، د قطۍ له منځ څخه 5 ګلولې يوه يوه ځای په ځای کول(د يوه عنصر دويم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوې ناخاپه نمونې تصادفي متحولين په ژبه بيان کړئ او اړونده توزيع يې پيدا کړئ.

حل: د x_1, x_2 او x_3 ناخاپه متحولونو په پام کې ونيسئ په لومړي پړاو کې د x_1 ناخاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپينې ګلولې ټاکلو په لومړي پړاو کې ځانته غوره کړئ. او د x_2 متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې او د (1) عدد سپينه ګلوله لپاره په دويم پړاو کې ځانته غوره کوي په همدې بڼه د x_3 ناخاپه متحول په دويم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپينه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د x_1, x_2 او x_3 ناخاپي متحولونه د برنولي ناخاپه متحولين دي. د $p=\frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i=1,2,3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i)=(\frac{5}{12})^{x_i}(1-\frac{5}{12})^{1-x_i}$$

څرنګه چې نمونه اخيسته ناخاپه ده، نو د x_1, x_2 و x_3 ناخاپه متحولين يو له بل څخه بېل دی نو تابع يې عبارت دی له:

$$f(x_1,x_2,x_3)=P(x_1=x_1\ ,\ x_2=x_2\ ,\ x_3=x_3)$$

په ياد ولرئ چې د عناصرو هره ناخاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلې نه دي، هغې ته آماره وايي.

پوښتنې

1. که $N=25$ د يوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناخاپه نمونه يې پيدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناخاپه نمونې سره له مثال بيان کړئ؟
3. فرض کوو چې د يوې ټولنې څخه مو ناخاپه نمونه رانيولې ده څه سوچ کوئ چې ددې نمونې سره به څه وکړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې د اوسط توزیع

دولت غواړي وپوهېږي چې د یوه ښار د وګړو متوسطه ګټه(سپما) څومره ده؟

ددې کار لپاره ناځاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس باید ددې محاسبه شوې مقدار څخه کوم کمیت تخمین کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

فعالیت

- د لاندې data د درېو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پایله راښیي:

نوم	داود	سلیمان	پژواک
نمبرې	2	3	4

- د نمبرو د احتمال توزیع یې ولیکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معیار انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوې نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نیولو) ارایه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښیئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزیع جدول(د $\bar{x}$ د کثرت د توزیع جدول) ولیکئ.
- د $\bar{x}$ د کثرت توزیع جدول مستطیلي ګراف رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو د اوسط سره پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, ...x_n$ د یوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناڅاپه نمونه وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې احتمال توزیع عبارت دی له:

x	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	

د $\bar{x}_n$ متحول د اوسط، $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وریانس، $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نمونې وریانس $S_n{}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونه‌یي وریانس اوسط، $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونه‌یي اوسط، μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وریانس S^2 د نمونې وریانس دی.

مثال: د لاندې ټولنه، ټولې دوه ګونې ممکنه ناڅاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1,2,3$$

الف: د x د احتمال توزیع ولیکئ.

ب: د ټولنې اوسط او وریانس حساب کړئ.

ج: د $\bar{x}$ د توزیع جدول تشکیل او مستطیلي ګراف یې رسم کړي.

د: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

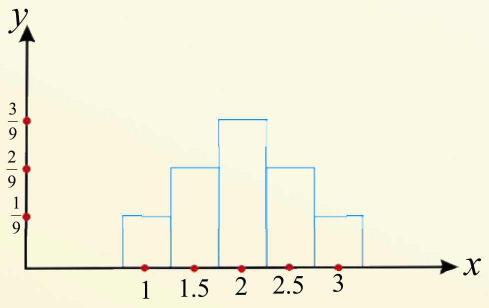
ج: لاندې جدول ټولې دوه‌ګونې ممکنو نمونو د ځای نیول، د سره او هر یوه اوسط راښيي:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\bar{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د $\bar{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول ښودل کېږي:

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د $\bar{x}$ مستطیلي ګراف په لاندې ډول رسمېږي:



د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1\cdot\frac{1}{9} + 1.5\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} + 2.5\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2\cdot\frac{1}{9} + (1.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 2^2\cdot\frac{3}{9} + (2.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو ليدل کېږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^{\ 2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

پوښتنه

1. فرض کوو چې يوه ټولنه د $6, 4, 2$ او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزيع، اوسط او وريانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته ددې ټولنې څخه دوه ګوني ناځاپه نمونه د ځای په نيولو سره وټاکئ او د نمونې توزيع اوسط يعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي ګراف يې رسم کړئ، د $\bar{x}$ اوسط او وريانس حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکزي لیمیټ قضیه

پوهېږو چې د ټولنې کمیت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کمیت ته نمونه یي اوسط ویل کېږي د $S_{\bar{x}}$ او $\bar{x}$ د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختیار کې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=?$$

فعالیت

- که د لویې ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}$ و، د کوچنی ټولنې حجم په $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\frac{S}{\sqrt{n}}$) چې N د ټولنې عناصر شمېر، n د نمونه عناصرو شمېر او S معیار انحراف دی) وښیو څه وخت کېدای شي چې د لویې ټولنې حجم له کوچنی ټولنې سره برابر شي؟
- که د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نورمال توزیع یو له بل څخه بیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟
- که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ناځاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوی وي او د μ اوسط لرونکی وي او ς^2 وریانس وي وېلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟

د پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چیرې N د یوې لویې ټولنې د μ متناهي اوسط او δ^2 متناهي وریانس لرونکی یوه ناڅاپه n ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط یعنې $\bar{x}$ د تقریبي نورمال توزیع د $\mu_{\bar{x}} = \mu$ اوسط $\delta_{\bar{x}}^{\,2} = \frac{\delta^2}{n}$ وریانس دی او $Z = \frac{\bar{x}-M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناڅاپه متحول د نورمال سټنډرډ توزیع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضریب د N د لویو قیمتونو لپاره (1) ته نږدې کېږي. په حقیقت کې یې لیمیټ هغه وخت چې $n \to \infty$ وکړی، برابر له (1) سره دی.

مثال: د يوه لوی ټولګی ښخه چې د زده‌کوونکو د رياضي مضمون نمبرو نورمال توزيع د 71 اوسط او معيار انحراف يې 9 دی. يوه 9 تايي نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 ښخه زيات وي حساب کړئ. همدارنګه که چيرې په تصادفي ډول يو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې يې له 80 ښخه زياتې وي محاسبه کړئ.

حل: ښرنګه چې $\bar{x}$ د نورمال توزيع د μ په اوسط او معيار انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(\bar{x}>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}>\frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}}=P(z>3)$$
$$=1-P(z)\leq 3=1-0.9987=0.0013$$

همدارنګه د $n=1$ لپاره لرو:

$$P(\bar{x}>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\delta}>\frac{80-71}{9}=P(z>1)$$
$$=1-P(z)\leq 1=1-0.8413=0.1587$$

پاملرنه:

د $P(z)$ قيمت له (2) جدول ښخه په لاس راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د يوه ماشين په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزيع اوسط يې $\mu = 250gr$ او معياري انحراف يې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغې احتمال محاسبه چې د ناخاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تايي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونه‌يي توزيع نسبت

د A په يوه ښارکې n کسان غواړي د B يوکس د ښاروال په صفت وټاکي، که داکسان تر پوښتنې لاندې راشي او x د موافقوکسانو شمېر وښيئ ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دی.

- که چيرې x د دوو جملو توزيع لرونکی وي، کولای شو وليکو چې:

$$f(x) = \binom{n}{x} P^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ ....$$

که چيرې $x = n\overset{\frown}{P} \Rightarrow \overset{\frown}{P} = \frac{x}{n}$ وي د x قيمت په تعويض سره په پورتنی فورمول کې $f(\overset{\frown}{P})$ وليکئ.

- د $\overset{\frown}{P} = \frac{x}{n}$ په فورمول کې که د x تصادفي متحول د n ناخاپه متحولينو د $x_1, x_2, ..., x_n$ له مجموع څخه تشکيل شوی وي، $\overset{\frown}{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړيکه لري؟

که چيرې x ناخاپه متحول، n د برنولي د آزمايښتونو مجموعه، P د هر آزمايښت برياليتوب احتمال وي په دې صورت کې $\overset{\frown}{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x) = n\,p$ اوسط $V(x) = n\,p\,q$ د x ناخاپه متحول وريانس وي.

د دوه جمله‌يي د توزيع په پاملرنې سره د $\overset{\frown}{P}$ توزيع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\overset{\frown}{P}) = \binom{n}{n\overset{\frown}{P}} p^{n\overset{\frown}{p}} (1-p)^{n(1-\overset{\frown}{p})} \qquad \overset{\frown}{P} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ...,1$$

د $\overset{\frown}{P}$ ناخاپه متحولينو اوسط $(Expected\ Value)$ او وريانس په لاندې صورت ليکلای شو:

$$\mu_p = E(\overset{\frown}{P}) = P$$

$$\delta^2 \overset{\frown}{P} = V(\overset{\frown}{P}) = \frac{p\,q}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال ستندرډ توزيع يې عبارت دی له:

$$z = \frac{x - n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}} = \frac{\overset{\frown}{p} - p}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د کاليو د ښه والي احتمال $P = 0.3$ دی، يوه ساده ناخاپه نمونه $n = 6$ ګونه ټاکو که چيرې x د ناقصو کاليو ښودونکی وي، د x او $\hat{P}$ احتمال توزيع وليکئ.

حل: د x ناخاپه متحول د دوه جمله‌يي توزيع د $P = 0.3$ او $n = 6$ پارامترونه وي.

$$f(x) = P(X = x) = B(x, 6, 0.3) \qquad x = 0, 1, ..., 6$$

د دوه جمله‌يي توزيع جدول څخه په ګټه اخيستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزيع د جدول احتمال يې ليکو:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د $\hat{P}$ ناخاپه متحول د $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$ او 1 قيمتونه نيسي:

$$P(\hat{P} = 0) = P(X = 0) = 0.1176$$

$$P(\hat{P} = \frac{1}{6}) = P(X = 1) = 0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P} = \frac{x}{n}) = P(X = x)$$

او د $\hat{P}$ د احتمال توزيع عبارت دی:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

په پورتني مثال کې:

$$P(\hat{P} \leq 0.6) = P(x \leq 3.6) = P(x \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} B(x, 6, 0, 3) = 0.9294$$

اويا:

$$P(\hat{P} \leq 0.27) = P(x \leq 1.62) = P(x \leq 3) = 0.1176 + 0.3025 = 0.4201$$

پوښتنې

1. ددې احتمال چې د يوه تن د غوښتنليک فرم په پوره ډول پرته له غلطۍ(تېروتنې) څخه ډک کړي $P = 0.7$ وي، يوه نمونه د $n = 200$ ګونه د استخدام ډک شوی فارمونه مو ټاکلی وي.

- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د ± 00.05 داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولوېږي.
- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د 0.6 څخه زيات وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

- ناخاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د يوې تابع په عنوان په احصائيه او احتمالاتو کې ترې نه ګټه اخېستل کېږي.
- د يوه مجزا ناخاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې هغه عددونه دي چې ناخاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قيمتونو ناحيه سره د تعريف د ناحيې د عناصرو اړونده احتمالونه ګڼون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه کې هغه عددونه ګڼون ولري چې د x ناخاپه متحول يې ځانته غوره کوي او د قيمتونو ناحيه يې د $f(x)$ ټول تصويرونه موجود دي.
- د يوه پيوسته(متمادي) متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې د x ټول پيوسته(متمادي) مقدارونه غوره کړي او دقيمتونو ناحيه يې $F(x)$ ټول تصويرونه وي.
- د x مجزا ناخاپه متحول اوسط Expected value او وريانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزيع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جمله‌يي توزيع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$
- د دوه جمله‌يي توزيع اوسط او معياري انحراف عبارت له: $S=\sqrt{n\,p\,q}$, $\bar{x}=n\,p$
- د پواسن د احتمال توزيع يو مجزا احتمال توزيع ده چې فورمول يې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که N له يوې نورمالې جامعې څخه د n خلې(تايي) ناخاپه نمونه وټاکو د $\bar{x}$ د نمونه‌يي اوسط آماره د نورمال توزيع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta_{\bar{x}}^{2}=\frac{\delta^2}{n}$ او $z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د سټنډرډ نورمال توزيع سره ده.
- د نورمال توزيع: د نورمال توزيع شکل له زنګولی سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزيع کې مرکزي شاخصونه يو له بل سره برابر دي او د پيوسته ناخاپه متحولونو د ناحيې تعريف محدود دی چې د احتمال توزيع يې عبارت ده له:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\delta})^2}$$

چې μ د ټولنې اوسط او δ د ټولنې معياري انحراف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د a او b په فاصلو کې کولای شو له دې انتيګرال څخه ګټه واخلو:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$

- که چيرې x د دوه جملهيي توزيع د n شمېرد برنولي پر له پسې ازمايښتونه، P د کاميابی احتمال او $q = 1 - p$ د هر ازمايښت د نابرياليتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائيه د اوسط نمونه او د x ناخاپه متحول وريانس په ترتيب سره عبارت دی له: $\hat{P} = \frac{x}{n}$, $E(x) = np$ او $V(x) = npq$

همدارنګه د دوه جملهيي توزيع، اوسط، وريانس او د سټنډرډ توزيع او $\hat{P}$ ناخاپه متحول په ترتيب سره عبارت دی له:

$$E(\hat{P}) = P \quad , \quad f(\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} P^{n\hat{P}} q^{(1-P)}$$

$$z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad , \quad V(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$$

- ددې $z = \frac{x-\mu}{\delta}$ اړيکې په واسطه کولای شو چې هره احصائيوي مجموعه يې د نورمال توزيع لرونکی وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه.
- د نمونه ګيرۍ طريقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناخاپه نمونهګيري، منظمه نمونهګيري، ګروپي نمونهګيري، خوشهيي نمونه ګيري.
- د x نمونې ناخاپه متحولونو اړوند تابع په دې صورت تعريفېږي.

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots\ldots, f(x_n)$$

- که چيرې x د ټولنې يوه ناخاپه نمونه د $f(x)$ د احتمال تابع په لرلو سره وي $E(\bar{x}_n) = \mu$ اوسط، $V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$ د اوسط وريانس، δ^2 د ټولنې وريانس او S^2 ته د نمونو وريانس وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونیسئ:
   - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښيئ.
   - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌يي فضا سره نسبت ورکړئ.
   - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال ولیکئ.
2. که چیرې د یوې جوړې بوټونو د نقیصې احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معیار انحراف په یوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پیدا کړئ.
3. د یوه شرکت په ګدام کې 500 پایې کمپیوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه یې 50 پایې نقص لري، یو اخېستونکی له هغې څخه 10 پایې کمپیوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغې 8 پایې جوړ اخېستی وي؟
4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معیار انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې ګټه واخلئ. لومړی یو افقي محور رسم کړئ او د $\bar{x}$, $\bar{x}+s$, $\bar{x}-s$, $\bar{x}+2s$ او $\bar{x}-2s$ ټکې پرې وټاکئ وروسته یو ټکی د h اختیاري جګوالی په اندازه د $\bar{x}$ له پاسه په پام کې ونیسئ او $\bar{x}+s$ له پاسه یو ټکی د $0.6h$ په جګوالي وټاکئ، یعنې یو ټکی چې مختصات یې $(\bar{x}+s, 0.6h)$ څرنګه چې د نورمال منحنې متناظر دی، همدا عمل په ځانګړې توګه په $\bar{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\bar{x}-2s$, $\bar{x}+2s$ د پاسه دوه ټکې د h او $0.15h$ په جګوالي په پام کې ونیسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحنې د دقیق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه ګټه واخلئ. په پایله کې دا ټکې د یوه منحنې په واسطه وصل او ووایئ چې دا منحنې په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.
5. په یوه روغتون یوه څېړنه راښیې چې د مراجعینو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
   - د روغتون د مراجعینو د احتمال توضیح د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پیدا او ګراف یې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمیده ده؟
   - ددې توزیع د اوسط او معیار انحراف مقدار په لاس راوړئ.
   - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زیات روغتون ته مراجعه کړې وي؟ ولې؟
6. فرض کوو چې د یوه کتاب د یوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزیع یا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال یې مطلوب دی داسې چې:

- حد اقل یوه ټاپیي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقیقاً 5 ټاپیي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټاپیي تیروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیار انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
   - کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
   - د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
   - که چیرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
   - د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.

8. که چیرې $x_1, x_2, \ldots, x_n$ د x ناڅاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چیرې x یو ناڅاپه متحول او د μ او δ^2 پارامترونه وي آیا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع μ او δ^2 مجهول وي آیا پورتنیو تابعګانو ته احصائیه ویلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګڼون لري، که د عمرونو اوږدوالی یې د ساعتونو په حساب سره عبارت له 108 104 112 103 دي یوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کوو چې د x ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښیئ:
    - د x د احتمال توزیع ولیکئ.
    - $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د یوه ښار د وګړو دګټې اندازه چې د غیرنورمال توزیع $\mu = 90$ افغانی اوسط او د 25 افغانی معیار انحراف سره دی که چیرې د 225 کسیز د وګړو د یوې نمونې دګټې مجموعه له 2100 افغانیو څخه زیاته وي، احتمال یې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وګړي د A نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n = 50$ دوه‌ګونې یوه نمونه کې حداقل 60% وګړي د A نوماند طرفدار وي.

13. په 12 مثال کې که چیرې $P = 0.4$ وي، یعنې ددې احتمال چې یو وګړی د A کاندید طرفدار وي 0.4 دی، یوه $n = 200$ ګونه نمونه وټاکو نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وګړی د A کاندید طرفدار وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی
احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلې شوې(غیرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې

په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دویم نل څخه په وار سره اوبه په څمکه توییږي ویلای شئ چې له دې نلونو څخه په ځمکه د اوبو د څاڅکو د توییدو توپیر په څه کې دی؟

فعالیت

- د یو رمل په اچولو سره ویلای شي چې د نمونه یي فضا ټولې ممکنې پایلې کومې دي؟
- آیا د ونې څخه د یو یې پخې منې د لویدلو وخت وړاندوینه کولای شئ چې ورروسته له څو ثانیو، دقیقو او یا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لویدلو نمونه یې فضا ولیکې.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه یې فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لوېدلو وخت څنګه پرتله کولای شي.

د پورتنی فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه یې فضا عبارت له هغه ټاکلي او یا نا ټاکلي سټ یا مجموعې څخه ده، چې د ځینې عناصرو یې د شمېر وړ، او ځینې یې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه یې فضاګانې چې عناصر یې د شمېر(countable) او تشخیص وړ وي د پرېکړې یا ګسسته(شلیدلې) نمونه یې فضا یا متصل په نامه یادېږي او هغه نمونه یې فضاګانې چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د نښتې(پیوسته) یا متمادي نمونه یې فضا په نامه یادېږي.

لومړی مثال: له لاندې نمونه یې فضاګانو څخه کومه یوه نښتی(پیوسته) او کومه یوه پرېکړې(ګسسته) ده.

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د 8 او 12 ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل.

ج: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

د: د يوې کُرې د حرارت د يوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي گرېډ څخه تر 1000 درجود سانتي گرېډ پورې.

هـ : د 30° او 45° زاويو ترمنځ يوه زاويه ټاکل.

حل: څرنگه چې (الف او ج) نمونه‌يي فضاگانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړ شوي، نو پرېکړې يا گسسته فضا ولي (ب، د او هـ) له نامحدود حقيقي عددونو څخه تشکيل(جوړ) چې د شمېر وړ نه دي، نو نبنتي يا پيوسته فضاگانې دي.

دويم مثال: خيبر د کور د گلانو د اوبولو لپاره يو واټرپمپ اخيستی دی.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونيسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالی نمونه-يي فضا چې کيدای شي هر مثبت حقيقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې دکار د مودې قيمت شي، په دې ډول د داسې ناخاپه حادثې پېښېدل صفر هر حقيقي عددکيدای شي چې دا نمونه‌يي فضا يوه غير متمادی، نبنتي يا پيوسته نمونه يي فضا ده؛ يعنې { t د واټرپمپ د ورانېدو وخت، $S = \{t \in IR : t \geq 0$ چې په پورتنی نمونه يي فضاکې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالي راښيي.

يادونه:

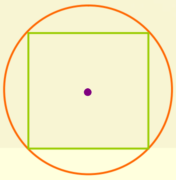
1- د لومړي مثال الف او ج جزونه کې محدودې نمونه‌يي فضاگانو څخه بحث شوی چې عناصر يې د شمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌يي فضاگانې ذکر شوې چې عناصر يې د شمېر وړ نه دي، نو ځکه ټول مثبت حقيقي عددونه اخېستلای شي.

2- په دويم مثال کې نمونه‌يي فضا متصل يا غير محدوده ده چې د حقيقي عددونو د انټروال په توگه ښودل کېږي.

پوښتنې

1- يو غشي وېشتونکی د يوه دايروي د سک په دننه چې ورانگه يې r ده، په پام کې ونيسي. د غشي د لگېدو ځای د دايرې په دننه کې چې مرکز ته نږدې ولگېږي، د هغې نمونه يي فضا ارايه کړې. وواياست چې دا څنگه يوه نمونه يي فضا ده.

2- په مخامخ شکل کې په ناخاپي يا تصادفي ډول د دايرې په دننه کې يو ټکي و ټاکئ، احتمال ددې شته چې مطلوب ټکي د مربع په دننه کې وي.



3- يو طبيعي دوه رقمی عدد و ټاکئ، هغه احتمال پيداکړې چې عدد د 4 مضرب وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

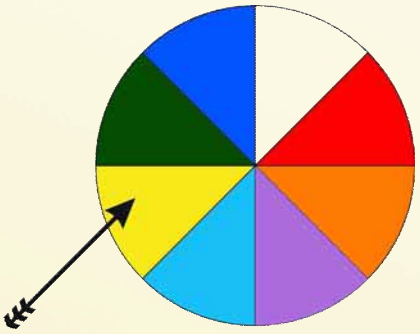
هم چانسه پېښې

د يوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او يا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دي؟

د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس يو له بل سره څه اړيکه لري؟

فعاليت

د مخامخ شکل په څېر يوه دايره په پام کې ونيسئ، که چېرې په راکړې شوې دايره کې يو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنګه ناحيه او شين رنګه ناحيه کې د غشي لګېدل يو له بل سره څه اړيکه لري؟
- د غشي د لګېدو چانس دکچه په اړه د نارنجي او سپينو رنګونو سره په پرتله باندې څه ويلای شې؟
- د غشي د لګېدو د چانس کچې په تور رنګ څومره ده؟
- د تجربې، نمونه‌یي فضا يې وليکئ.
- لومړنی ناخاپه پېښې لست کړې او د هر يو احتمال پيدا کړی دی؟
- د لومړنيو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ويلای شې؟

د پورتنی فعاليت له اجرا کولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو:

هغه لومړنی ساده پېښې چې د هغوی د پېښېدلو چانس په يوې تجربې په اجرا کولو کې سره برابر وي، د هم چانسه پېښو په نامه يادېږي. لکه:

که چېرې $S=\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ يوه نمونه يي فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i=1,2\ldots n$ لپاره يوه ناخاپه لومړنی پېښه ده که $0\le P(\{e_i\})\le 1$, $i=1, 2, \ldots n$ دی.

سربېره پر دې د لومړنيو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له يوه سره ده.

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\ldots+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=1$$

مثال: څلور تنه په یوه لوبه کې ګډون کوي. تاسې د هر یوه د ګټلو احتمال پیداکړئ په داسې حال کې چې نمونه‌یي فضا هم چانسه وي.

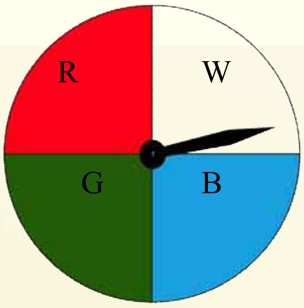
حل: که چېرې $S = \{a, b, c, d\}$ نمونه یي فضا وي، نو د هرې ناخاپه لوموړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دی.

لرو چې:
$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

پاسنۍ لوموړنۍ پېښې سره هم چانسه دي.

پوښتنې

1- مخامخ شکل په پام کې ونیسي ، که چېرې د عقربې(ستنې) د درېدلو احتمال په آسماني او سپین رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د درېدلو احتمال به څومره وي؟



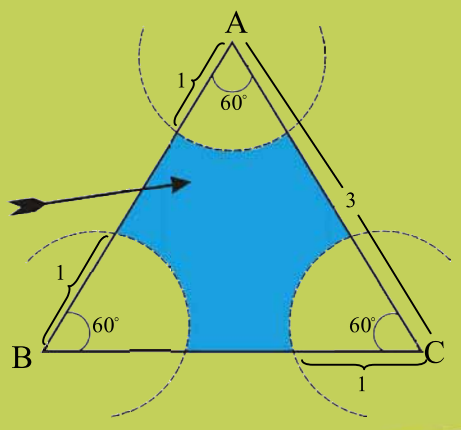
2- لاندې د کثرت جدول د رمل یوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونیسي. هغه احتمال پیداکړئ، چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

د رمل شمېره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

3- د رمل یوه دانه داسې ډکه شوې چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که یو چا په شرط وهلو کې(5) شمېره ټاکلې وي، د هغې احتمال پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

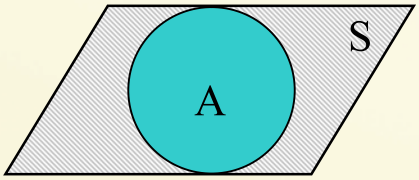
د نبتي یا پیوسته(متمادي) فضاګانو احتمال



د یوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه یې 3 واحده ده، یو غشي ولو، ددې احتمال چې د غشي د لګېدلو ټکې د مثلث د هر رأس نه د یو واحد په اندازه لوی وي، څو دی؟

فعالیت

- آیا ویلای شي چې د یوې ټوټه کرښې، د یوې مستوي د یوې برخې او یا د فضا د حجم څو ټکي یو پر بل پسې موجود دي؟



- د هغو ټکو د پیښدلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لویې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د A او S د ساحو د مساحتونو د نسبت سره څه اړیکه لري؟
- آیا کولای شئ دا مسئله په فضا د یوه جسم حجم د یوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عمومیت ورکړئ؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پیوسته(متمادي) نمونه‌یي فضا د نامعینو ټکو مجموعه ده، چې شکل یې د اعدادو په محور ، په مستوي کې لکه سطح او یا په فضا کې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو ښوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پیدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او یا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

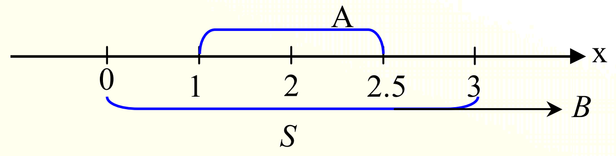
معمولاً د اعداد له محور څخه په ګټه اخیستنې سره د x یو متحول، د یوه مساحت د یوې برخې لپاره د دوو متحولونو لکه x او y او په همدې ترتیب د حجمونو لپاره له دریو متحولونو لکه x, y او z څخه ګټه اخلو.

لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د x یو ټکي په ناڅاپي یا اتفاقي ډول ټاکو پیدا کړئ ددې احتمال چې $1 < x < 2.5$ وي؟

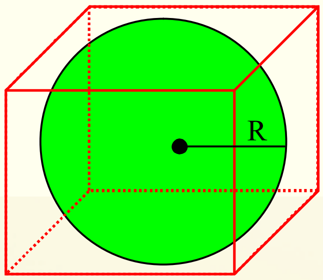
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د حقیقي اعدادو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغې پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نیولو سره د A پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A)=\frac{\text{د A ټوټه کرښې اوږدوالی}}{\text{د B ټوټه کرښې اوږدوالی}}=\frac{2.5-1}{3-0}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$



دويم مثال: په ناڅاپه ډول یو ټکی د یوه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې 2 واحده وي ټاکو پیدا کړئ ددې احتمال چې نوموړي ټکي د مکعب د محاطي کُرې په دننه کې وي.



حل: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې a واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع $r=\frac{a}{2}$ کیدای شي نو:

A ناڅاپه پېښه د کرې د حجم او S نمونه یې فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r=\frac{a}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$P(A)=\frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3}=\frac{\pi}{6}$$

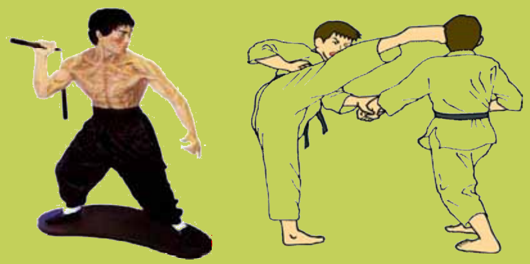
پوښتنې

1- د حقیقي اعدادو په محور د A او B دوه ټکي په ناڅاپي یا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $-2\le B\le 0$ او $0\le A\le 3$ وي، ددې احتمال پیدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې یو ټکي په ناڅاپي یا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمال پیدا کړئ، چې نوموړي ټکي نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نږدې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشروط احتمال



له یوه ولایت څخه (20) تنه نارینه او ښځینه زده کوونکي د کانکور په آزموینه کې د طب پوهنځي ته بریالي شوي دي، د هغوی له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کاراته بازان وی. د نومړو محصلینو له مینځ څخه په اتفاقي ډول یو تن ټاکو احتمال د دې پیدا کړئ، چې:

- ټاکل شوی محصل یوه کارته بازه نجلي وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلي په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بریالي شوي؟

فعالیت

له 2500 زده‌کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې له 80% زده‌کوونکو څخه یې 70% نارینه زده‌کوونکي وي او په مطالعه کولو عادت ولري، که د ټولو زده‌کوونکو لپاره احتمال یو شان وی، د لاندې پیښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده‌کوونکی ټاکل د ښوونځی له زده‌کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M : نارینه زده‌کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده‌کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی زده‌کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې ټاکل شوی زده‌کوونکی یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده‌کوونکی د ټاکلو احتمال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

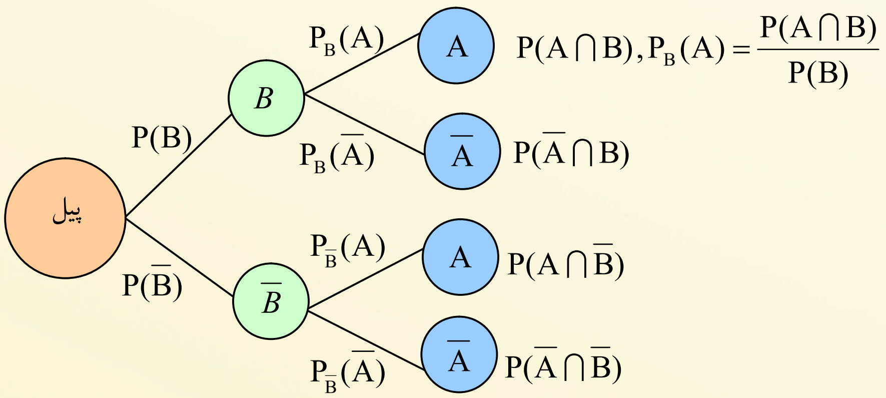
د لاندې احتمالات وېش له حاصل څخه عبارت دی که چیرې Ω تړوله نمونه‌يي فضا او $|\Omega|$ نمونه‌يي فضا د عناصرو شمیر وي، نو لرو:

$$P_R(M)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{|M\cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}}=\frac{|M\cap R|}{|R|}=$$ د هغه نارینه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پیښې له احتمال څخه عبارت دي چې ټاکلي زده‌کوونکي نارینه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

تعریف: که چیرې S نمونه‌يي فضا A او B د نمونه‌يي فضا دوې ناخاپي پیښې وي، په داسې حال کې چې $P(B)\neq 0$ وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال یعنې $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ چې د A ناخاپي پیښې احتمال نظر د B ناخاپي پیښې ته مشروط احتمال بلل کېږي.

د پورته تعریف په پام کې نیولو سره نظر د مسیر لومړي قاعدې ته د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پایلې په لاس راځي:

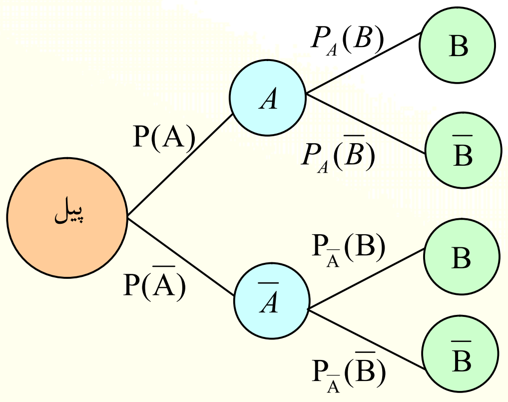
1- د مسیر د لومړۍ قاعدې څخه لرو: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

مسیر له دویمې قاعدې د څخه په ګټه اخیستنې سره لرو: $P(A\cap \overline{B})=P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$

$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$

2- ونه‌ییزه(درختي) دیاګرام له مخې $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

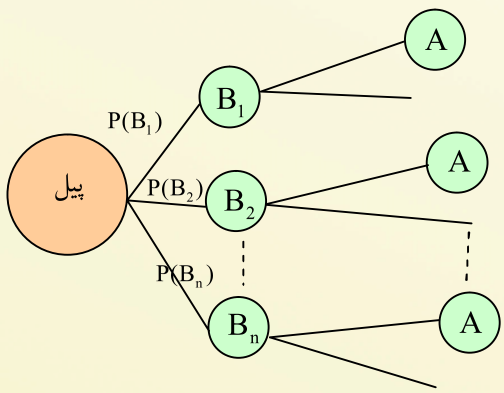
(c) ketabton.com: The Digital Library



له لومړي پايلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B)=\dfrac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$

3- که چیرې نوموړی حالت د Ω نمونه يي فضا ناځاپي پيښو د $B_1, B_2, ..., B_n$ اختياري ويش لپاره عموميت ورکړو د ونې په ډول د دیاګرام د په پام کې نيولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} \qquad i=1,2,...,\ n$$



لومړی مثال: يو زده کوونکي ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د ګاډي څخه ګټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسيږي. په منځني ډول نوموړی 60% په ټاکلي وخت ښوونځي تـه حاضرېږي کـه چيـرې پيښې:

A: د ګاډي په واسطه راتلل B: په ټاکلي وخت رسيدل

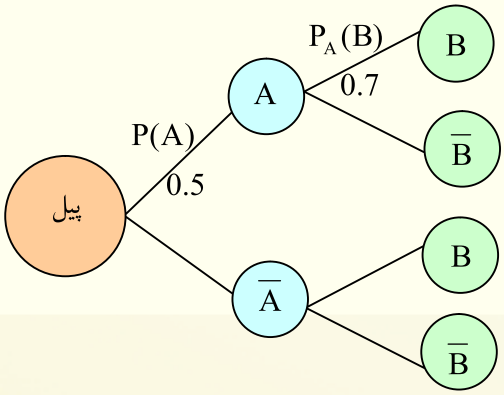
(c) ketabton.com: The Digital Library

وي په دي صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته يعني $P_B(A)$ مطلوب دي؟

حل: د نوموړي احتمال د پيداکولو لپاره د ونهييز يا درختي دياګرام په پام کې نيولو سره نظر فورمول تـه پـه لانـدې ډول په لاس راځي:

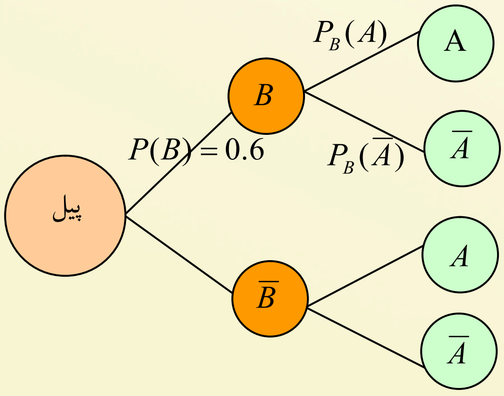
$$P_B(A) = \frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{0.5\cdot 0.7}{0.6} = 0.5833 = 58.33\%$$

نـو پـه دې اسـاس دګـادي پـه واسـطه د رسـېدلو احتمـال پـه دې شـرط چې پـه ټاکلي وخـت پـه شـوونځي کـې وي 58.33% سـلنې سـره برابـر دی.



پوښتني

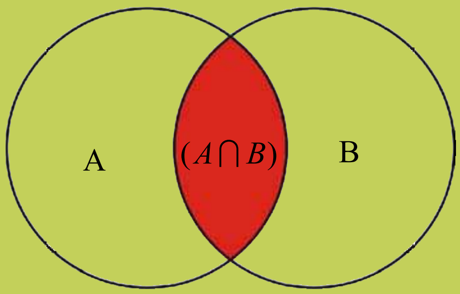
له لاندې دياګرام څخه په ګټه اخيستنې سره د مشروط احتمـال په ټاکلي وخت رسېدل شوونځي ته په دې شرط چې دګادي په واسطه سرته رسيدلي وي، يعني $P_A(B)$ د ناڅاپه پيښې احتمـال شوونځي ته په ټاکلي وخت رسيدل، پـه دې شرط چې دګاډي په واسطه نه وي راغلي يعني $P_A(B)$ مطلوب دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب اصل

د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال په B ، د A او B ناخاپه پیښې احتمال یو له بل سره څه اړیکه لري؟



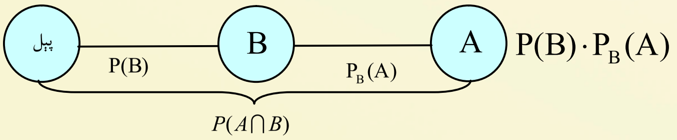
فعالیت

- که چیرې A او B دوې ناخاپه پیښې د S په نمونه یي فضا کې وي.
- د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال B ته ولیکئ.
- د ونهیز دیاګرام څخه په ګټه اخیستنې سره د $P(B) \cdot P_B(A)$ قیمت په لاس راوړئ.
- د $(A \cap B)$ ناخاپه پیښو احتمال د A او B ناخاپه پیښو څخه او یا د A مشروط له B څخه په ګټه اخیستنې سره ولیکئ.
- د فعالیت د دوو پورتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړې.
- آیا کولای شو چې موضوع د ډیرو ناخاپه پیښو لپاره عمومیت ورکړو.

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

د S په یوه نمونه یي فضا کې د A او B د دوو ناخاپه پیښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف په پام کې نیولو سره لرو: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$

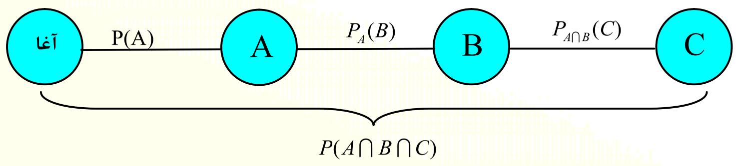
دا مسئله کولای شو چې د ونهیز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړو:



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مطلب د دریو A، B او C پیښنو لپاره په لاندې ډول پراخوو.



$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنی قاعده د حاصل ضرب په نامه یادېږي او کولای شو، هغه د یو شمېر اختیاري ناخاپي پیښنو لپاره هم په لاس راوړو.

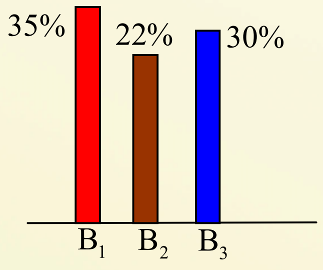
مثال: د B_1, B_2 او B_3 دریو ولایتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر یوه لپاره د ټاکنو دګډون کوونکو فیصدي او د جمهوري ګوند برخه فیصدي ورکړل شوې ده؟

په کوم احتمال د ټاکنوګډون کوونکي او یا رایې اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلی وي.

حل: په لاندې ډول ناخاپي پیښې تعریف او نوموو:

V : هغه رایې ورکوونکي چې د جمهوري ګوند یې ټاکلی دي.

B_i : د ولایت رایې ورکوونکي B_i – (i-ام) ... i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.



ولایت	راي ورکوونکي فیصدي	جمهوري ګوند ته رایې ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30

د $B_i\ (i=1,2,3)$ ناخاپه پیښې په حقیقت کې یې د S نمونه یې فضا یو ویش جوړ کړي چې د هغوی لپاره صورت نیسي.

1- B_i یو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه یې فضا لپاره $\bigcup_{i=1}^{3}B_i = S=B_1\cup B_2\cup B_3$ دی، نو $B_i\cap V\ \ (i=1,2,3)$ پیښنه یو له بل سره یو په یو مستقل د هغوی لپاره صورت نیسي. $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې اړيکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره وليکو:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

تعريف: که چيرې د $B_1, B_2, ..., B_n$ خرنګه چې $P(B_i)\neq 0$ وی $i=1,...n$ پيښنو عمومي حالت د S په نمونه‌يي فضا کې يوه پېښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه ياد او د A اختياري ناڅاپه پيښې لپاره لرو:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعريف، د اصل حاصل ضرب له قضيې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نيولو څخه لاندې فورمول چې د بائيز(Baye's) د فورمول په نامه يادېږي، په آسانی سره په لاس راځي، داسې چې B_i چې $i=1,...n$ د S نمونه يي فضا يو پيښې لپاره چې $P(B_i)\neq 0$ ، $i=1,...n$ د A د ناڅاپه پيښې احتمال چې $P(A)\neq 0$ سره وي، لرو:

د بائيز (Bayex)فورمول:

$$P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}$$

د بائيز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n=2$ لپاره $B_1=\overline{B}, B_2=\overline{B}$ په پام کې ونيسو، په حقيقت کې B_1 او B_2 د S نمونه يي فضا پيښې وي لرو:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

پورتنی فورمول د $n=2$ د بائيز له فورمول څخه عبارت دي.

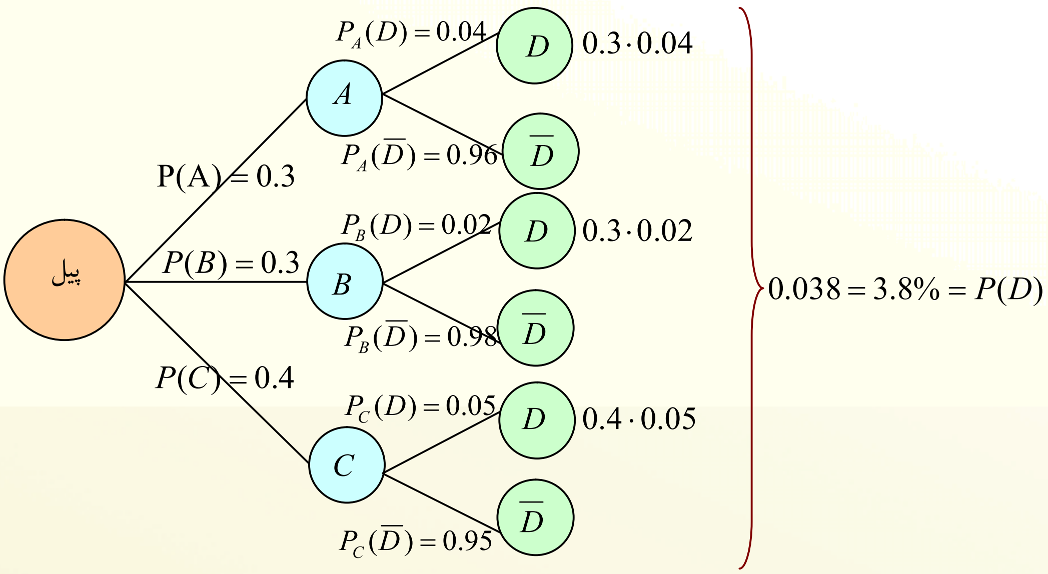
مثال: په يوه فابريکه کې د A، B او C درې ماشينونه په ترتيب سره 30% ، 30% او 40% برخه د برق ګروپونه توليدوي. که چيرې په ماشينونو کې د ګروپونو د خرابېدو کچه په ترتيب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې يو اخېستل شوي ګروپ وران يا خراب وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی ګروپ د C ماشین پورې اړه لري.

c) یو نوی تولید شوی ګروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B ماشین پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C)=\frac{P(D\cap C)}{P(D)}=\frac{P(C)\cdot P_C(D)}{P(D)}=\frac{0.4\cdot0.05}{0.038}=\frac{0.02}{0.038}=0.526=52.6\%$$

د c جز:

$$P_{\overline{D}}(B)=\frac{P(\overline{D}\cap B)}{P(\overline{D})}=\frac{P(B)\cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{0.3\cdot0.98}{0.3\cdot0.96+0.3\cdot0.98+0.4\cdot0.95}$$

$$=\frac{0.294}{0.288+0.294+0.38}=\frac{0.294}{0.962}=0.3056=30.56\%$$

پوښتني

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شپږ واړه مخونه یوازې د 6 شمېره وهل شوې ده. د هغوی له منځ څخه یوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوې او درې ځلې اچول شوې ده. درې ځلې 6 راغلي. پیدا کړئ، هغه احتمال چې په ټاکل شوې دانه په سم ډول شمیرې وهل شوې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناځاپه پېښو استقلالیت

لـه مـشروط احتمـال څخـه پـوهیږو چـې د A او B دوو ناځاپو پېښو یا حادثو د B د پیښـې پیـښدل د A پـه پیښـه تـاثیر اچـوي پـه دې سـبب لازمـه ده چـې د احتمـال د محاسبې په وخت کې د A او B پیښه په پام کې ونیسو.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناځاپه پیښې پیښدل پر B ناځاپه پیښې اغېزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمال د $A\cap B$ پیښې له احتمال سره څه اړیکه لري.

تعریف: د A او B دوې ناځاپه پیښې چې یوه پر بله اغېزه لرونکې نه وي د ناځاپه مستقلو پیښو په نامه یادیږي.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

فعالیت

- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلې پیښې چې د S نمونه یي فضاکې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
- د مشروط احتمال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلې دوې پیښې وي د $P(A)$ او $P_B(A)$ احتمالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
- د $P(A\cap B)$ ناځاپه پیښې احتمال له څه سره مساوي دي؟
- د $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ د پیښو د احتمال د فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B ګډ ټکی ونه لري څه پایله اخلي؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پیښې مستقلې بلل کیږي که چیرې:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

2: که چیرې A او B پیښې دګډو ټکو لرونکې نه وي، نو

$A\cap B=\emptyset\Rightarrow P(A\cap B)=0$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (د جمع د حاصل اصل)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترګو رنګ او ذکاوت یو پر بل پرته له اغېزې فرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناخاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوی تن یو هوښیار ذکي زده کوونکی وي.

B: ټاکل شوی زده کوونکی تورې سترګې ولري.

پیدا کړئ هغه احتمال چې ټاکل شوی زده کوونکی په ناخاپه توګه هوښیار ذکي او تورې سترګې ولري.

حل: ددې لپاره چې ټاکل شوی زده کوونکی هوښیار او تورې سترګې ولري لیکلای شو:

څرنګه چې $P_B(H)=P(H)$ بر سیره پردې $P_B(H)=\dfrac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B\cap H)=P(H)\cdot P(B)$$

عمومي حالت: د A_1 , A_2 , A_n..... , $(n\geq 2)$ ناخاپه پېښی احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو یا څو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً یوه له بلې سره تړلې نومول کېږي.

پایله:

1: پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ او $\overline{A}\cap B$ ناخاپه پېښو احتمالي پایلې د A او B پېښو لپاره چې احتمالونه یې a او b وي، په آسانۍ په لاس راوړو. د A او B د مستقل والی څخه پوهېږو چې د A او $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ او B په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم یوه له بلې څخه مستقلې دي؛ نو لرو:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A\cap B)=a\cdot b$	$P(A\cap\overline{B})=a(1-b)$	a
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=b(1-a)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: د A ، B او C درې ناخاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

دويم مثال: په يوه کڅوړه کې دوې سپينې او دوې تورې مرى پرتې دي. دوې مرى يوه له بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړی مرى د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

b- پرته له دې چې مرى واپس کېښودل شي.

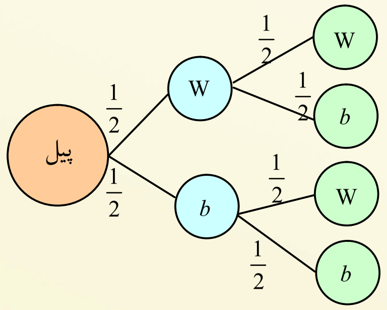
د A پيښه: په لومړي ځل سپينه مرى راووزي. B: دويم ځل مرى سپينه وي.

له يوې بلې څخه مستقلې يا ترلې (وابسته) دي.

حل:

a) خرنګــــــــــه چــــــــــې $P(A)=\frac{1}{2}$ او $P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وي او

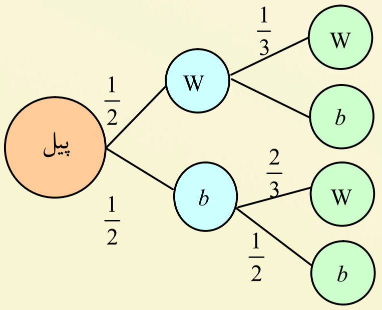
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$ دي نو A او B يوه له بلې څخه مستقلې دي.



b) خرنګه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\ ,\ P(A)=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B يوه له بلې څخه ترلې يا وابسته دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځايونه چې په نښه شوي دي ډک يې کړئ:

	B	$\overline{B}$	
A	0.12	$P(A\cap\overline{B})=?$	?
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=?$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$	?
	?	0.6	

حل: څرنګه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$

$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot0.6=0.18$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot0.4=0.28$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot0.6=0.42$$

په همدې ترتيب په جدول کې د قيمتونو په وضع کولو سره مسئله تکميلېږي.

پوښتني

يو سټ چې عناصر يې 5,3,2 او 30 دی د يوه رقم د انتخاب احتمال يې 0.25 دی په ناڅاپي ډول لـه نوموړي سټ څخه يو رقم انتخابوو، که چېرې A_k ناڅاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شـوي او د تقسيم قابليت پـه k ولري، آيا A_2, A_3 او A_5 ناڅاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

بېلې شوې(غیرمتمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر او تشخیص وړ وي، د **پرېکړې یا** گسسته نمونه‌یي فضا په نامه یادېږي؛ لکه د رمل یا د سکې اچولو تجربي نمونه‌یي فضا.

نښتي(متمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر وړ نه وی د پیوسته یا متمادی نمونه‌یي فضا په نامه یادېږي چې د حقیقي اعدادو پر محور د فاصلې په بڼه او یا په فضا کې د هندسي شکلونو یا حجمونو په ډول څرگندېږي.

هم چانس پېښې:

د یوې نمونه یي فضا لومړني پیښې چې د هغوي پېښې د تجربې په پای کې په برابر احتمال پېښېږي، هم چانسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمال مجموع له یوه سره مساوي ده.

د نښتي(پیوسته) فضا احتمال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د یوې پام وړ ناڅاپې پیښې لپاره په یوه تجربي نمونه‌یي فضا کې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دی د متصلې فضا له احتمال څخه.

مشروط احتمال:

کـه چیـرې A او B د S، د نمونـه‌یـي فـضا دوې ناڅاپـه پېـښې چـې $P(B)\neq 0$ وي پـه دې حالـت کـې $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ته د A ناڅاپه پیښې د مشروط احتمال په نامه یادېږي پـه دې شـرط چې د B پېښه لـه مخکې پېښه شوې وي.

یوه له بلې څخه مستقلې پېښې:

د A او B دوه ناڅاپه پېښې یوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي، که چیرې:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېړکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه یي فضاګانو څخه کومه یوه سره نښتې یا پیوسته او کومه یوه پرېکړې یا ګسسته دی؟

الف: د یوې رمل دانې اچولو تجربه

ب: د یوې سکې د اچولو تجربه

ج: د یو غشي لګېدل په یوه دایره

د: د یوې فلزي میلې د اوږدوالي زیاتېدلو تجربه نظر حرارت ته

2. د یو چارتراش چې اوږدوالي يې L دي په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال ددې شته دی چې د کېڼ اړخ اره شوې برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچنۍ وي.

3. د یوه خصوصي شرکت یو کارګر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نږدې تم ځای کې چې د مامورینو په ګاډي کې د کارته د تګ لپاره ګډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځای ته رسېږئ څومره احتمال ددې شته چې نوموړې تن له 5 دقیقو څخه لږ منتظر پاتې شي.

4. د $[0.3]$ ترلې فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، پیدا کړي ددې احتمال چې د اعدادو مجموعه د 5 څخه کوچنۍ او د 2 څخه لویه وي.

5. په ناڅاپه ډول یو ټکي د مخروط دننه چې د قاعدې ورانګې یا شعاع يې R او جګوالی $R\sqrt{3}$ دي ټاکو، پیدا کړې ددې احتمال چې ټکي د محاطي کرې دننه په دې مخروط کې قرار لري.

6. د یو خودکار قلم خرابېدل دوه دلیلونه لري:

1- د میخانیکیت خرابېدل

2- د خودکار د نیچې خرابېدل

که چېرې د یو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دلیل (1، شمیره وي مساوي په 0.05 او د دویم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وڅېړئ: چې دوه پورتنی دلایل مستقلې او یا غیر مستقلې پېښې دي؟

7. خیبر غواړي هغه څلور کلي‌ګانې چې په جیب کې يې لري او سره یو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دریمې کلي له آزمویلو سره چې له جیب څخه يې را باسي د قلف اړوند کلي وي، په هغه صورت کې چې:

a) هره آزمویل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جیب کې اچوي.

b) هره آزمویل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جیب کې اچوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library