1.1 تعریف او ډولونه:

تعریف : هغه معادله چې مشتقات ولري دتفاضلي معادلي په نوم یاديږي ، کیداشی چې دغه مشتقات معمولي مشتقات وي او یا قسمي مشتقات وي.

تفاضلي معادلي په دوه ډوله دي

معمولي تفاضلي معادله (Ordinary Differential Equation)

هغه معادله چې د x مستقل متحول ، د y غیرمستقل متحول چې y ته د x تابع هم وایو او د y هر ترتیب مشتق نظر x ته ولري دمعمولي تفاضلي په نامه سره یاديږي.

مثالونه:

1. $\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

2. $\frac{dy}{dx} + y = e^x$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = 0$

4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = \sin x$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

6. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 7\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} - 9y = \log x$

قسمي تفاضلي معادله (Partial Differential Equation)

هغه تفاضلي معادله چې دوه یاځو مستقل متحوله ، تابع او ددغه تابع قسمي مشتقات (هر ترتیب چې وي) ولري دقسمي تفاضلي معادلي په نامه سره یاديږي.

مثالونه:

که چیرته z د x او y تابع وي نو:

Ketabton.com

7. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 8. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$ 9. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

1.2 دتفاضلي معادلو ترتیب او درجه

دتفاضلي معادلي ترتیب:

په تفاضلي معادله کي لوړ ترین مشتق دتفاضلي معادلي دترتیب ښخه عبارت دی.

دتفاضلي معادلي درجه:

په تفاضلي معادله کي دلوړترین ترتیب توان دتفاضلي معادلي ددرجي ښخه عبارت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته مثالونو کې:

1) لومړی ترتیب او لومړۍ درجه　　　2) لومړی ترتیب او لومړۍ درجه

3) دوهم ترتیب لومړۍ درجه　　　4) لومړی ترتیب دوهمه درجه

5) دوهم ترتیب لومړۍ درجه　　　6) دریم ترتیب دوهمه درجه

همدارنګه د $\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ تفاضلي معادلې دترتیب او درجې دپیداکولو لپاره لومړی دمعادلې دواړه خواوې مربع کوو ، په نتیجه کې معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

اوس پورته معادله دوهم ترتیب او دوهمه درجه تفاضلي معادله ده.

باید په یاد ولرئ چې دتفاضلي معادلو ترتیب او درجه کوم چې مونږ تعریف کړل باید مثبت تام عدد وي.

دتفاضلي معادلو حل

یوه معمولي تفاضلي معادله لاندې عمومي شکل لری

$$F\left[x, y, y', y'', \dots\dots\dots\dots y^{(n)}\right] = 0 \dots\dots\dots\dots (1)$$

دیوې تفاضلي معادلې حل عبارت دهغه تابع څخه دی ، کوم چې په راکړل شوی معادله کی صدق وکړي، ϕ(x) تابع ته د (1) تفاضلي معادلې حل ویل کیږي ، که چیرته :

$$F[x, \phi(x), \phi'(x), \dots\dots\dots\dots, \phi^n(x)] = 0$$

یاپه بل عبارت y=ϕ(x) تابع په (1) معادله کې صدق وکړي.

د n ام ترتیب تفاضلي معادلو حل ، چې n اختیاري ثابت عددونه ولري د عمومي حل (general solution) په نامه سره یادیږي، که چیرته په عمومي حل کې داختیاری ثابت عدد په ځای خاص قیمت وضعه شي ، دتفاضلي معادلې مشخص حل (particular solution) لاس ته راځي.

1.3 دتفاضلي معادلو ترتیب دپارامتر دحذفولوپه واسطه

ددې لپاره چې مونږ ښه پوه شو چې څنګه کولای شو چې تفاضلي معادله دپارامتر دحذفولو په واسطه تشکیل کړو ، نو لاندې مثال په نظر کې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال : داسې تفاضلي معادله تشکیل کړئ ، کوم چې د $y = a\cos(x+b)$ منحنیاتو مجموعه رابښایی ، a او b اختیاري ثابت عددونه دي.

حل:

$$y = a\cos(x+b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

داولې معادلې نظر x ته مشتق اخلو

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin(x+b) \ldots\ldots\ldots\ldots. (2)$$

اوس ددوهمې معادلې نظر x ته مشتق اخلو

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos(x+b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ددریمې معادلې څخه د a قیمت لمنځه وړو، په نتیجه کې لاندې تفاضلي معادله لاسته راځي

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \quad => \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

په نتیجه کې ویلای شو، که وغواړو یوه تفاضلي معادله تشکیل کړو ، نو لومړی باید دورکړل شو منحنیاتو مجموعي کوم چې د پارامترونو دلودونکي ده ، مشتق ونیسو او بیا پارامترونه حذف کړو.

یاداښت: (i) دمنحنیاتو هغه مجموعه کوم چې یو پارامتر ولري ، لومړی ترتیب تفاضلي معادله تشکیلوی.

(ii) په عمومي ډول دمنحنیاتو هغه مجموعه کوم چې n پارامترونه ولري ، n ام ترتیب تفاضلي معادله تشکیلوي.

1.4 لومړی ترتیب او لومړۍ درجه تفاضلي معادله

په دې فصل کې مونږ د لومړی ترتیب او لومړۍ درجې تفاضلي معادلو دحل لپاره مختلفي طریقو باندې بحث کوو، چې په عمومي ډول لومړی ترتیب او لومړۍ درجه تفاضلي معادلې لاند شکل لري.

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (1)$$

دپورته عمومی شکل ، عمومي حل عبارت دی له:

$$F(x, y, c) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (2)$$

په دوهمه معادله کې c یو اختیاري ثابت عدد دی ، کوم چې په لومړۍ معادله کې صدق کوي، که چېرته c ته یومشخص قیمت وکړو ، نو په دې صورت کې عمومي حل په مشخص حل باندې بدلیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مونږ دلومړی معادلې ځینې معیاري شکلونه په لاندي طریقو باندې حل کوو.

(1) هغه معادلې چې متحولین یي دتفکیک وړ وي او یا دساده کولو څخه وروسته تفکیک ته برابریږي
(2) متجانسي تفاضلي معادلې
(3) متجانسو تفاضلي معادلوته بدلیدونکي تفاضلي معادلی
(4) کاملی تفاضلي معادلې
(5) کاملو تفاضلي معادلوته بدلیدونکی تفاضلي معادلې
(6) خطي تفاضلي معادلې
(7) خطي تفاضلي معادلوته بدلیدونکي تفاضلي معادلې (برنولي شکل)

1.5 دتفکیک وړ معادلې (Separation of variables):

ددې لپاره دتفاضلي معادلې لاندې شکل په نظر کې نیسو

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1) \qquad (\,g(y)\neq 0\,)$$

دمتحولینو په جداکولو سره لومړی معادله په لاندې شکل لیکو او بیا یې انتیگرال نیسو

$$g(y)dy=f(x)dx \qquad => \qquad \int g(y)dy=\int f(x)dx$$

دانتیگرال دنیونې څخه وروسته د (1) تفاضلي معادلې حل په لاندې ډول لاسته راځي

$$G(y)=F(x)+c$$

چې F(x) او G(y) په ترتیب سره د x او y توابع او c یو اختیاري ثابت عدد دی.

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: دمتحولینو دجلاکولو څخه وروسته معادله په لاندې ډول حل کوو

$$\frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\tan^{-1}y=\tan^{-1}x+A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = A$$

$$\tan^{-1} \frac{y-x}{1+yx} = A$$

$$\tan^{-1} \frac{y-x}{1+yx} = \tan^{-1} c \quad => \quad \frac{y-x}{1+yx} = c \quad => \quad y-x = c(1+yx)$$

کوم چې دغوښتل شوي معادلې مطلوب حل دی

دوهم مثال: $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^y$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی یې متحولین سره بیلوو اوبیا یې ددواړو خواوو انتیګرال نیسو

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^y + x^2 e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = e^y (e^x + x^2)$$

$$e^{-y} dy = (e^x + x^2) dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int (e^x + x^2) dx$$

$$-e^{-y} + c = e^x + \frac{x^3}{3} \quad \text{یا} \quad e^x + e^{-y} + \frac{1}{3} x^3 = c$$

دریم مثال: $e^x \tan y \; dx + (1 - e^x) \sec^2 y \; dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: ددی لپاره چې متحولین یې سره بیل کړو ، نومعادله په $(1 - e^x) \, . \tan y$ باندې ویشو

$$\frac{e^x}{1-e^x} dx + \sec^2 y \, dy = 0$$

$$-\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx + \int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = \log c$$

$$-\ln(e^x - 1) + \ln \tan y = \ln c$$

$$\ln\left(\frac{\tan y}{e^x - 1}\right) = \ln c \quad \text{یا} \quad \tan y = c(e^x - 1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: $\tan y \frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: د *sin C +sin D* رابطې څخه په استفادې سره پورته معادله په لاندې شکل لیکوو

$$\tan y \frac{dy}{dx} = 2\sin x \cos y$$

$$\frac{\tan y}{\cos y} dy = 2\sin x \; dx$$

$$\sec y \tan y \; dy = 2\sin x \; dx$$

$$\int \sec y \tan y \; dy = 2\int \sin x \, dx$$

$$\sec y = -2\cos x + c \quad \text{یا} \quad \sec y + 2\cos x = c$$

پنځم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(x+y)}$ تفاضلي معادله حل کړئ

په راکړل شوې معادله کی متحولین یو دبل څخه نه بیلیږي ، خو که x+y=t سره تعویض کړو ، نو بیا کولای شو متحولین يې په اسانی سره بیل کړو

$$x+y=t \quad => \quad 1+\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\frac{dt}{dx} - 1 = \frac{1}{\cos t} \quad => \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t} + 1 = \frac{1+\cos t}{\cos t}$$

اوس يې متحولین سره بیلوو ، چې لاندې شکل لاسته راکوي

$$\frac{\cos t \; dt}{1+\cos t} = dx$$

$$\left(\frac{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right) dt = dx \quad => \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan^2\frac{t}{2}\right) dt = dx$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \tan^2\frac{t}{2}\right) dt = dx \quad => \quad \frac{1}{2}\left(1 - \left(\sec^2\frac{t}{2} - 1\right)\right) dt = dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{2}\left(2-\sec^2\frac{t}{2}\right)dt = dx \quad => \quad \left(1-\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\right)dt = dx$$

$$\int\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\right)dt = \int dx \quad => \quad t-\tan\frac{t}{2} = x+c$$

$$x+y-\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = x+c \quad \text{یا} \quad y-\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = c$$

کوم چې دراکړل شوې معادلې عمومي حل دی

شپږم مثال: $\frac{dy}{dx}+1 = e^{x+y}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: x+y=t سره نیسو

$$x+y=t \quad => \quad 1+\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو ، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\frac{dt}{dx} = e^t \quad => \quad e^{-t}dt = dx$$

$$\int e^{-t}dt = \int dx$$

$$-e^{-t} = x+c$$

$$-e^{-(x+y)} = x+c \quad => \quad x+e^{-(x+y)}+c+0$$

اووم مثال: $(2x-3y+1)dx+(6y-4x+3)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله کی متحولین سره نه بیلیږي ، خوکه په لاندې ډول تعویض اجرا کړو ، نو بیا کولای شو چی په اسانی سره معادله کې متحولین سره بیل کړو

$$2x-3y=t \quad => \quad 2-\frac{3dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-3y)+1}{2(2x-3y)-3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{3}\left(2-\frac{dt}{dx}\right)=\frac{t+1}{2t-3} \quad \text{يا} \quad \frac{dt}{dx}=\frac{t-9}{2t-3} \quad => \quad \frac{(2t-3)}{t-9}dt=dx$$

$$\int\left(\frac{2t-3}{t-9}\right)dt=\int dx \quad \text{يا} \quad \int\left(\frac{2t}{t-9}-\frac{3}{t-9}\right)dt=\int dx$$

$$2\int\frac{t-9+9}{t-9}dt-3\int\frac{1}{t-9}dt=\int dx$$

$$2\int\left(1+\frac{9}{t-9}\right)dt-3\int\frac{1}{t-9}dt=\int dx$$

$$2[t+9\ln(t-9)]-3\ln(t-9)=x+A$$

$$2t+15\ln(t-9)=x+A$$

$$(4x-6y)+15\ln(2x-3y-9)=x+A$$

$$3x-6y+15\ln(2x-3y-9)=A$$

$$\text{يا} \quad x-2y+5\ln(2x-3y-9)=c \qquad c=\frac{1}{3}A$$

اتم مثال: $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y)$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$t=x+y \quad => \quad \frac{dt}{dx}=1+\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-1$$

دغه قيمتونه په راکړل شوې تفاضلي معادله کې وضعه کوو

$$\frac{dt}{dx}-1=\sin t+\cos t \quad => \quad \frac{dt}{dx}=\sin t+\cos t+1$$

$$\frac{dt}{\sin t+\cos t+1}=dx \quad => \quad \frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+2\cos^2\frac{t}{2}}=dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

صورت او مخرج په $\cos^2\frac{t}{2}$ باندې ویشو

$$\frac{\sec^2\frac{t}{2}}{2\left[\tan\frac{t}{2}+1\right]}dt = dx$$

$$\int \frac{\sec^2\frac{t}{2}}{2\left[\tan\frac{t}{2}+1\right]}dt = \int dx$$

$$\ln\tan\left[\frac{t}{2}+1\right] = x + c \quad \text{یا} \quad \tan\left[\frac{x+y+2}{2}\right] = e^{x+c}$$

$$\tan\left(\frac{x+y+2}{2}\right) = A\,e^{x} \qquad (A = e^{c})$$

1.6 تمرینونه

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

01. $(e^y+1)\cos x\ dx + e^y \sin x\, dy = 0$

02. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 y}{1+x^3}$

03. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$

04. $y - x\dfrac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \dfrac{dy}{dx}\right)$

05. $(x^2 - yx^2)\dfrac{dy}{dx} + y^2(1+x) = 0$

06. $\dfrac{dy}{dx} + xy = xy^3$

07. $x\sqrt{1+y^2}dx = y\sqrt{1+x^2}dy = 0$

$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0\,,\quad y = 1,\ \ x = 0$

09. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(2\ln x + 1)}{\sin y + y\cos y}$

10. $a\left(x\dfrac{dy}{dx} + 2y\right) = 2xy\dfrac{dy}{dx}$

11. $\dfrac{dy}{dx}(1+x)(1+y^2)\,,\quad y = 1,\quad x = 0$

12. $\cos y\ \ \ln(\sec x + \tan x)dx = \cos x\ \ \ln(\sec y + \tan y)dy$

تفکیک ته بدلیدونکي تفاضلي معادلې

(c) ketabton.com: The Digital Library

13. $\frac{dy}{dx} = (3x + 2y + 4)^2$ 14. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 7}{3x - y + 4}$

15. $(x + 2y - 1)dx = (x + 2y + 1)dy$ 16. $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$

17. $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y)$ 18. $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{x-y}$

19. $x^4 \frac{dy}{dx} + x^3 y + cosec\,(xy) = 0$ 20. $x\,dy + y\,dx + 4\sqrt{1 - x^2y^2}\,dx = 0$

جوابونه:

01. $\sin(e^y + 1) = c$ 02. $y^3 = c(1 + x^3)$ 03. $(x + 1) = c(2 - e^y)$

04. $(x + a) = c \cdot \frac{y}{(1 - ay)}$ 05. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = c$ 06. $\frac{y^2 - 1}{y^2} = Ae^{x^2}$

07. $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = c$ $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ 09. $x^2 \ln x - y \sin y = c$

10. $e^{-2y}\, y^a\, x^{2a} = A$ 11. $\tan^{-1} y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}$

12. $[\ln(\sec x + \tan x)]^2 - [\ln(\sec y + \tan y)]^2 = c$

13. $\frac{1}{\sqrt{6}} \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(3x + 2y + 4)\right] = x + c$

14. $2x - y - 15\ln(3x - y + 19) + c = 0$ 15. $x = y + \frac{2}{3}\ln\left(x + 2y - \frac{1}{3}\right) + c$

16. $\tan^{-1}(x + y) = x + c$ 17. $1 + \tan\left\{\frac{x + y}{2}\right\} + \frac{2}{x + c} = 0$

18. $x = e^{-(x-y)} + c$ 19. $\cos xy = -\frac{1}{2x^2} - c$ 20. $\sin^{-1}(xy) + 4x = c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

متجانسې تفاضلي معادلې (Homogeneous Differential Equations)

$f(x,y)$ یوه n امه درجه متجانسه تابع ده ، که چیرته $f(\lambda x\,,\lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ سره شي، دمثال په ډول $x^2 + xy$ ، $\sqrt{x^2+y^2}$ او $\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ په ترتیب سره دوهمه ، اوله او صفرمه درجه متجانسې توابع دي.

$M(x\,,y)\,dx + N(x\,,y) = 0$ یوه لومړی ترتیب او لومړۍ درجه متجانسه تفاضلي معادله ده ، که چیرته M او N یو شان درجه لرونکي متجانسې توابع وي، پورته معادله کولای شو د $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ په شکل ولیکو، چې $f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ یوه صفرمه درجه متجانسه تابع ده ، دغه تابع بیا د $\frac{x}{y}$ یا $\frac{y}{x}$ په شکل لیکلای شو ، چې ددې څخه لاندې معادلې لاسته راځي

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots.(1) \qquad \text{یا} \qquad \frac{dx}{dy} = f\left(\frac{x}{y}\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

په لومړۍ معادله کې $\frac{y}{x} = v$ سره تعویض کوو او په دوهمه معادله کې $\frac{x}{y} = v$ سره تعویض کوو، ورسته یې بیا متحولین سره بیلوو اوحل بیا یې حل کوو، چې دلومړۍ معادلې لپاره په لاندې ډول عمل اجراکوو

$$\frac{y}{x} = v \quad => \quad y = vx\,, \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په لومړۍ معادله کې وضعه کوو

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(v)$$

اوس یې متحولین سره بیلوو او انتیګرال یې نیسو

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{f(v) - v} \quad => \quad \ln x + c = \int \frac{dv}{f(v) - v}$$

چې c یو اختیاري ثابت عدد دی ، همدارنګه ددوهمې معادلې دحل لپاره په لاندې ډول عمل اجراکوو

$$\frac{x}{y} = v \quad => \quad x = vy\;, \quad \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په دوهمه معادله کې وضعه کوو

$$v + y\frac{dv}{dx} = f(v)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته معادله هم دمتحولینو په جلا کولو سره حل کوو

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $(x-y)dy-(x+y)dx=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی معادله د $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$ په شکل لیکو ، دمعادلې ښي صرف یوه متجانسه تابع ده ، او په لاندې ډول تعویض اجرا کوو

$$y=vx \quad => \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v+\frac{xdv}{dx}=\frac{x+vx}{x-vx} \quad => \quad v+\frac{xdv}{dx}=\frac{1+v}{1-v} \quad => \quad \frac{xdv}{dx}=\frac{1+v}{1-v}-v$$

$$\frac{xdv}{dx}=\frac{(1+v)-v(1-v)}{1-v} \quad \text{یا} \quad \frac{1-v}{1+v^2}dv=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1}{1+v^2}dv-\frac{1}{2}\int\frac{2v}{1+v^2}dv=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\tan^{-1}v-\frac{1}{2}\ln(1+v^2)=\ln x+c \quad => \quad \tan^{-1}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\ln x+c$$

$$\text{یا} \quad \tan^{-1}\frac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}=c$$

دوهم مثال: $(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}=\frac{1-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}}$$

دمعادلې ښي طرف یوه متجانسه تابع راښایي ، او دحل لپاره یې لومړی په لاندې دول تعویض اجراکوو

$$\frac{y}{x}=v \quad => \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v + v^2}{v} \quad \text{یا} \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v - v^2}{v} - v \quad \text{یا} \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v}{v}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو او انتیګرل یې نیسو

$$\frac{dx}{dv} = \frac{v}{1 - v}dv \quad \text{یا} \quad \frac{dx}{v} = \left(\frac{v - 1 + 1}{1 - v}\right)dv$$

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int \left(1 + \frac{1}{v - 1}\right)dv$$

$$\ln x = -[v + \ln(v - 1)] + c \quad \text{یا} \quad \ln x(v - 1) = c - v$$

$$\ln(y - x) = c - \frac{y}{x}$$

کوم چې دراکړل شوې معادلې عمومي حل دی

دریم مثال: $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوی معادله په لاندې شکل لیکو

$$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

کومه چې یوه متجانسه تفاضلي معادله ده او دحل کولو لپاره یې په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y = vx \quad => \quad \frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v + \frac{xdv}{dx} = \frac{vx + \sqrt{x^2 + v^2x^2}}{x} = v + \sqrt{1 + v^2}$$

$$\frac{xdv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$$

متحولین یې سره بیلوو او انتیګرال یې نیسو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{x} \quad => \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln\left[v + \sqrt{1+v^2}\right] = \ln x + \ln c \quad => \quad v + \sqrt{1+v^2} = xc$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = xc \quad => \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 c$$

څلورم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: ليدل کيږي چې دمعادلې ښی طرف يوه متجانسه تابع ده ، نودحل لپاره يې په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$\frac{y}{x} = v \quad => \quad y = vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

دغه قيمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v + \frac{xdv}{dx} = v + \tan x \quad => \quad \frac{xdv}{dx} = \tan v \quad \text{يا} \quad \frac{dv}{\tan v} = \frac{dx}{x}$$

$$\cot v\, dv = \frac{dx}{x} \quad => \quad \int \cot v\ dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln \sin v + \ln c = \ln x \quad \text{يا} \quad x = c \sin v \quad \text{يا} \quad x = c \sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

پنځم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$x \cos\left(\frac{y}{x}\right)(y\, dx + x\, dy) = y \sin\left(\frac{y}{x}\right)(x\, dy - y\, dx)$$

حل: تفاضلي معادله په لاندې شکل ليکو

$$\left[x \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right] y - \left[y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right] x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left\{x \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y\, sin\ \left(\frac{y}{x}\right)\right\} y}{\left\{y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x\, cos\ \left(\frac{y}{x}\right)\right\}\ x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left\{\cos\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\ sin\ \left(\frac{y}{x}\right)\right\}\frac{y}{x}}{\left\{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)-\ cos\ \left(\frac{y}{x}\right)\right\}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

اوس دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډو تعویض اجراکوو

$$\frac{y}{x}=v\quad =>\quad y=vx\quad \therefore\quad \frac{dy}{dx}=v+\frac{xdv}{dx}$$

ددغه قيمتونو په وضعه کولو سره لومړی معادله لاندې شکل غوره کوي

$$v+\frac{xdv}{dx}=\frac{v(\cos v+v\sin v)}{v\ sin\ v-\cos v}$$

$$\frac{xdv}{dx}=\frac{v(\cos v+v\sin v)}{v\ sin\ v-\cos v}-v=\frac{2v\cos v}{v\sin v-\cos v}$$

$$2\frac{dx}{x}=\frac{v\sin v-\cos v}{v\cos v}dv$$

$$2\int\frac{1}{x}dx=\int\left(\frac{\sin v}{\cos v}-\frac{1}{v}\right)dv$$

$$2\ln x=-\ln\cos v-\ln v+\ln c$$

$$\ln x^2=\ln\left(\frac{c}{v\cos v}\right)$$

$x^2\ v\cos v=c$ یا $xy=\cos\left(\frac{y}{x}\right)=c$

شپږم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

حل: راکړل شوی معادله کولای شو په لاندې ډول ولیکو

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)}{\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دمعادلې ښی طرف یوه متجانسه تابع راښايي ، نو دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$x = vy \qquad \therefore \qquad \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

دغه قيمتونه په لومړۍ معادله کې وضعه کوو

$$v + y\frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{(1+v)} \qquad y\frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{(1+v)} - v = -\frac{(v+e^v)}{1+v}$$

اوس يې متحولين سره بيلوو او انتيګرال يې پيداکوو

$$\frac{1+e^v}{v+e^v}dv = -\frac{dy}{y} \qquad \therefore \qquad \int\left(\frac{1+e^v}{v+e^v}\right)dv = -\int\frac{1}{y}dy$$

$$\ln(v+e^v) = -\ln y + \ln c$$

$$\ln(v+e^v)\,y = \ln c \qquad \text{يا} \qquad y(v+e^v) = c$$

$$y\left(\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}}\right) = c \qquad \text{يا} \qquad x + ye^{\frac{x}{y}} = c$$

1.7 تمرينونه

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

01. $(x-y)\dfrac{dy}{dx} = x + 2y$

02. $(x^3 - 3xy^2)dx = (y^3 - 3x^2y)dy$

03. $(3xy + y^2)dx - (x^2 + xy)dy = 0$

04. $x\dfrac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$

05. $(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$

06. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \tan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

07. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 + 2y^3}{2xy^2}$

08. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$

09. $y\,dx + x\left(\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right) - 2x\,dy = 0$

10. $x^2 + (x^2 - xy)\dfrac{dy}{dx} = 0$

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x - \sqrt{xy}}$

12. $\left(x\tan\dfrac{y}{x} - y\sec^2\dfrac{y}{x}\right)dx + x\sec^2\left(\dfrac{y}{x}\right)dy = 0$

13. $(x^2 + y^2)dx = 2xdy \qquad y(1) = 0$

14. $xe^{\frac{y}{x}} - y + xy' = 0 \qquad y(e) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جوابونه:

1. $\ln|x^2+xy+y^2| = 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{x\sqrt{3}}\right)+c$　2. $(x^2-y^2) = c(x^2+y^2)^2$

3. $\ln\left|\frac{y}{x^3}\right| + \frac{y}{x} = c \qquad (x \neq 0\ ,\ \ y \neq 0)$

4. $x\sin\frac{y}{x} = c\left(1+\cos\frac{y}{x}\right)\left(x\sin\frac{y}{x}\right) \qquad (x \neq 0)$

5. $y^2 = x^2 + cx^4$　6. $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = cx$　7. $2y^3 = 3x^3(\ln x + c)$

8. $y = x\tan\ln(cx)$　9. $cy = \ln\frac{y}{x} - 1$　10. $y = (\ln y + c)$

11. $2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = 0$　12. $x\tan\frac{y}{x} = c$　13. $x^2 - y^2 = x$

14. $y = -x\ln\ln|x| \qquad (x \neq 0)$

1.8　هغه معادلې چې په متجانسو معادلو باندې بدلیږی

داډول معادلې عموما د $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{Ax+By+C}$ په شکل دي، چې a, b ,c ,A ,B, C ثابت عددونه دي، دداډول معادلو دحل لپاره لاندې دوه حالتونه موجود دي.

اول حالت: که چیرته $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = k$ (فرضیه) نو په دې صورت کې معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k(Ax+By)+c}{Ax+By+C}$$

په داډول معادلو کې کولاي شو چې د $Ax+By=t$ تعویض څخه وروسته متحولین په اسانی سره بیل کړو.

دوهم حال: که چیرته $\frac{a}{A} \neq \frac{b}{B}$ سره وي، نو په دې صورت کې راکړل شوی تفاضلي معادله د $x = X + h$ او $y = Y + k$ په وضعه کولو سره معادله په متجانسه تفاضلي معادله باندې بدلیږي، چې h او k ثابت عددونه دي ، او دمعادلاتو دحل څخه لاسته راځي.

$$x = X + h \quad => \quad dx = dX\ , \qquad y = Y + k \quad => \quad dy = dY$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

اوس نو معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(aX + bY) + (ah + bl + c)}{(AX + BY) + (Ah + Bk + C)}$$

که چیرته h او k داسي انتخاب کړو چې $Ah + Bk + C = 0$, $ah + bk + c = 0$ سره شي، نو په دی صورت کي پورته معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{AX + BY}$$

پورته معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، او دلاندې تعویض په اساس یی حل کوو

$$Y = VX\ ,\ \ V = V(X) \qquad\qquad X = VY\ ,\ \ V = V(Y)$$

عملي مثالونه: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه متجانسه معادله نه ده ،خو نوموړی معادله په پورته حالتونو کې لومړې حالت رابنایې ، نوراکړل شوی معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 1}{2(x + 2y) + 3} \ \ldots\ldots\ldots (1) \qquad x + 2y = t \qquad => \qquad 1 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

ددغه قیمتونو په وضعه کولو سره لومړی معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{dx} - 1\right) = \frac{t + 1}{2t + 3}\ ,\ \ \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{2t + 2}{2t + 3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2t + 2}{2t + 3} + 1 = \frac{2t + 2 + 2t + 3}{2t + 3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{4t + 5}{2t + 3} \qquad => \qquad \left(\frac{2t + 3}{4t + 5}\right) dt = dx$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{2}(4t + 5) + \frac{1}{2}}{4t + 5}\right) dt = \int dx \qquad \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{1}{4t + 5}\right) dt = x + c$$

$$\frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{4}\ln(4t + 5)\right] = x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4t + \ln(4t+5) = 8x + 8c$$

$$4(x+2y) + \ln(4x+8y+5) = 8x + c_1$$

$$4(2y-x) + \ln(4x+8y+5) = c_1$$

کوم چې دراکړل شوی معادلې عمومي حل دی

دوهم مثال: $(x+2y)(dx-dy) = dx + dy$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$(x+2y-1)dx = (x+2y+1) \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-1}{x+2y+1} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$x+2y = t \quad => \quad 1 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{dt}{dx} - 1\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{dt}{dx} - 1\right] = \frac{t-1}{t+1} \quad \text{یا} \quad \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{2t-2}{t+1}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2t-2}{t+1} + 1 = \frac{2t-2+t+1}{t+1} = \frac{3t-1}{t+1}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو

$$\left(\frac{t+1}{3t-1}\right)dt = dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{3}\left[1 + \frac{4}{3t-1}\right]dt = dx$$

اوس یې انتیګرال پیداکوو

$$\frac{1}{3}\int\left(1 + \frac{4}{3t-1}\right)dt = \int dx$$

$$\frac{1}{3}\left[t + 4\cdot\frac{1}{3}\ln(3t-1)\right] = x + c$$

$$\frac{1}{3}\left[x + 2y + \frac{4}{3}\ln(3x+6y-1)\right] = x + c$$

کوم چې دراکړل شوي معادلې عمومي حل دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y-3}{2x+y-3}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله $\frac{a}{A}\neq\frac{b}{B}$ په شکل ده ، نو دراکړل شوی معادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$x=X+h\,,\quad y=Y+k \qquad => \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$$

ددغه قيمتونو په وضعه کولو سره راکړل شوی معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y+(h+2k-3)}{2X+Y+(2h+k-3)}$$

د $2h+k-3=0$ او $h+2k-3=0$ معادلو دحل څخه $k=1$ او $h=1$ لاسته راځي

$$\therefore \quad x=X+1\;,\quad y=Y+1 \qquad => \qquad X=x-1\;,\quad Y=y-1$$

اوس نوموړې معادله لاندي شکل اختياروي، کومه چې يوه متجانسه معادله ده

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y}{2X+Y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$Y=VX \qquad \text{نو} \qquad \frac{dY}{dX}=V+X\frac{dV}{dX}$$

دپورته قيمتونوپه وضعه کولوسره لومړی معادله لاندې شکل اختياروي

$$V+X\frac{dV}{dX}=\frac{X+2VX}{2X+VX} \qquad => \qquad V+X\frac{dV}{dX}=\frac{1+2V}{2+V}$$

$$X\frac{dV}{dX}=\frac{1+2V}{2+V}-V=\frac{1+2V-2V-V^2}{2+V}=\frac{1-V^2}{2+V}$$

اوس يي متحولين سره بيلوو او دقسمي کسرونو دتجزيي په مرسته يي انتيګرال پيداکوو

$$\left(\frac{2+V}{1-V^2}\right)dV=\frac{dX}{X} \qquad => \qquad \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-V}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+V}\right)\right]dV=\frac{dX}{X}$$

$$\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{1-V}\right)dV+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+V}\right)dV=\int\frac{1}{X}dX$$

$$-\frac{3}{2}\ln(1-V)+\frac{1}{2}\ln(1+V)=\ln X+\ln c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-3\ln(1-V)+\ln(1+V)=2(\ln X+\ln c)$$

$$\ln\frac{1+V}{(1-V)^3}=2\ln X\,c$$

$$X^2c^2=\frac{1+V}{(1-V)^2}\qquad c^2(X-Y)^3=X+Y\qquad \left(\because V=\frac{Y}{X}\right)$$

$$(x-y)^3c^2=x+y-2$$

ځلورم مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{3y-7x+7}{3x-7y-3}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله دوهم حالته ته ورته ده ، او دحل لپاره یې په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$x=X+h\,,\qquad y=Y+k\qquad =>\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره راکړل شوې معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dY}{dX}=\frac{3Y-7X+(3k-7h+7)}{3X-7Y+(3h-7k-3)}$$

د $3k-7h+7=0$ او $3h-7k-3=0$ معادلو دحل څخه h=1 او k=0 څخه لاسته راځي، په نتیجه کې معادله لاندې شکل اختیاروي، کومه چې یوه متجانسه تفاضلي معادله ده

$$\frac{dY}{dX}=\frac{3Y-7X}{3X-7Y}$$

$$Y=VX\qquad =>\qquad \frac{dY}{dX}=V+X\frac{dV}{dX}$$

$$V+X\frac{dV}{dX}=\frac{3VX-7X}{3X-7VX}=\frac{3V-7}{3-7V}$$

$$X\frac{dV}{dX}=\frac{3V-7}{3-7V}-V=\frac{3V-7-3V+7V^2}{3-7V}$$

$$X\frac{dV}{dX}=\frac{7(V^2-1)}{3-7V}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو او دقسمي کسرونو دتجزیې په مرسته یې انتیګرال پیداکوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$7\frac{dX}{X} = \frac{3-7V}{(V-1)(V+1)}dV$$

$$7\int\frac{1}{X}dX = -\int\left(\frac{2}{V-1}+\frac{5}{V+1}\right)dV$$

$$7\ln X = -[2\ln(V-1)+5\ln(V+1)]+\ln c$$

$X^7(V-1)^2(V+1)^5 = c$ یا $X^7\left(\frac{Y}{X}-1\right)^2\left(\frac{Y}{X}+1\right)^5 = c$

$(Y-X)^2(Y+X)^5 = c$ یا $(y-x+1)^2(y+x-1)^2 = c$

1.9 تمرینونه:

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+3}{2x-2y+5}$
2. $(6x-4y+3)dx = (3x-2y+1)dy$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y-x-5}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$
5. $(2x-4y+3)dy + (x-2y+1)dx = 0$
6. $(x-2y+5)dx - (2x+y-1)dy = 0$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y+x+5}$
8. $(2x+3y-5)\frac{dy}{dx} + (3x+2y-5) = 0$
9. $(2x+y+6)dx = (y-x-3)dy$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+2y-3}$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$
12. $(2y-x-1)dy - (2x-y+1)dx = 0$

جوابونه:

1. $(2y-x) = \ln(x-y+2)+c$
2. $(2y-x) = \frac{1}{4}\ln(12x-8y+1)+c$
3. $\frac{(y-x)^2}{2} - 5(y-x) = 6x+c$
4. $x-y = \ln(3x-4y+1)+c$
5. $\ln\{4(x-2y)+5\} = 4(x+2y)+c$
6. $x^2-y^2-4xy+10x+2y = c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7. $\ln\{(x+2)^2+(y+3)^2\}^{\frac{1}{2}}+\tan^{-1}\left\{\dfrac{y+3}{x+2}\right\}=c$

8. $3x^2+4xy+3y^2-10x-10y+10=c$ 9. $y^2-2xy-2x^2-6y-12x-18=c$

10. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{X+\sqrt{2}Y}{X-\sqrt{2}Y}\right)-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2Y^2-X^2}{X^2}\right)=X+c \quad X=x-\dfrac{1}{3}\,,\ Y=y-\dfrac{4}{3}$

11. $(y-x)^3=c(x+y-2)$ 12. $(3x-3y+2)(x+y)^3=c$

خطي تفاضلي معادلې (Linear Differential Equations)

هغه تفاضلي معادلې چې $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$ شکل ولري ، خطي تفاضلي معادلې ورته وايي ، چې P او Q د x تابع دي، يا هم ثابت عددونه دي ، y او د y مشتق y' بايد يو مثبت تام عدد وي ، چې ديو ځخه به لوي هم نه وی، او نه به yy' دحاصل ضرب په شکل وي.

دلومړی معادلې دحل لپاره ، دمعادلې دواړه خواوې په $e^{\int Pdx}$ فکتور کې ضربوو ، کوم چې لاندې شکل اختياروي

$$\left[\frac{dy}{dx}+P(x)y\right]e^{\int Pdx}=Q(x)e^{\int Pdx} \quad \text{يا} \quad \frac{d}{dx}\left[y\,e^{\int Pdx}\right]=Q(x)e^{\int Pdx}$$

اوس يې نظر x ته انتيگرال نيسو

$$ye^{\int Pdx}=\int Q(x)e^{\int Pdx}\,dx+c$$

کوم چې غوښتل شوې حل دی

يادابنت: $e^{\int Pdx}$ فکتورته دانتيگرال فکتور ته دلومړی معادلې دانتيگرال فکتور وايي، همدارنگه ځيني وخت خطي تفاضلي معادله لاندې شکل اختياروي

$$\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$$

چې په دې صورت کې دراکړل شوې معادلې دانتيگرال فکتور عبارت د $e^{\int Pdy}$ ځخه دی ، او دمعادلې حل په لاندې ډول دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$xe^{\int Pdy} = \int Q(y)e^{\int Pdy}\,dy + c$$

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^3$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ په شکل ده ، چې $Q = x^3$ او $P = \frac{2}{x}$ څخه دي، دانتیګرال فکتور یې په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int Pdx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

اوس دمعادلې عمومي حل دلاندې فورمول په اساس لاسته راوړو

$$y \times IF = \int Q.IFdx + c$$

قیمتونه په فورمول کې وضعه کوو

$$y\,x^2 = \int x^3.x^2dx + c \quad \text{یا} \quad yx^2 = \int x^5dx + c$$

$$yx^2 = \frac{x^6}{6} + c \quad \text{یا} \quad y = \frac{x^4}{6} + \frac{c}{x^2}$$

دوهم مثال: $\frac{dy}{dx} + y\sec x = \tan\ x$ تفاضلي معادله حل کړې

حل: $Q = \tan x$, $P = \sec x$ سره دي ، نو لومړی یې دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int Pdx} = e^{\int \sec x dx} = e^{\ln(\sec x + \tan x)} = (\sec x + \tan x)$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول دی

$$y(\sec x + \tan x) = \int \tan x\,(\sec x + \tan x)dx + c$$

$$y(\sec x + \tan x) = \int \sec x \tan x\,dx + \int (\sec^2 x - 1)dx + c$$

$$y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + c \qquad \therefore\ y = 1 + \frac{c - x}{\sec x + \tan x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x\ln x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$p=\frac{2}{x} \quad \text{او} \quad Q=x\ln x$$

دمعادلې دحل لپاره لومړی باید دانتیګرال فکټور پیداکړو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره په لاندې ډول عمل اجراکوو

$$y.x^2=\int x\ln x\,.x^2dx+c$$

پورته انتیګرال دانقسام په طریقه پیداکوو

$$yx^2=\ln x\;.\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{16}+c \quad \text{یا} \quad y=\frac{x^2}{4}\ln x-\frac{x^2}{16}+\frac{c}{x^2}$$

ځلورم مثال: $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=e^{\tan^{-1}x}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله لومړی په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{(1+x^2)}y=\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2} \quad , \quad P=\frac{1}{1+x^2} \quad \text{او} \quad Q=\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$$

دراکړل شوې معادلې دحل لپاره لومړی دانتیګرال فکټور پیداکوو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{1}{1+x^2}dx}=e^{\tan^{-1}x}$$

اوس معادله په لاندې ډول پیداکوو

$$ye^{\tan^{-1}x}=\int\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\,.e^{\tan^{-1}x}dx+c=\int\frac{e^{2\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx+c$$

$$ye^{\tan^{-1}x}=I+c$$

په معادله کې موجود انتیګرال لومړی په تعویضي طریقه پیداکوو ، او بیا یې په معادله کې د I په ځای وضعه کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{e^{2\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx \ , \qquad \tan^{-1}x=t \quad => \quad \frac{1}{1+x^2}dx=dt$$

$$I=\int e^{2t}dt=\frac{e^{2t}}{2}=\frac{e^{2\tan^{-1}x}}{2}$$

نو دراکړل شوې معادلې حل په لاندې ډول دی

$$ye^{\tan^{-1}x}=\frac{e^{2\tan^{-1}x}}{2}+c \qquad y=\frac{e^{\tan^{-1}x}}{2}+c\,e^{-\tan^{-1}x}$$

پنځم مثال: $\sin^2 x\frac{dy}{dx}-y=\cot x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{\sin^2 x}=\frac{\cot x}{\sin^2 x} \qquad \text{یا} \qquad \frac{dy}{dx}-y\,cosec^2x=\cot x\ \ cosec^2x$$

$$P=-cosec^2x \qquad Q=\cot x\ \ cosec^2x$$

اوس یې دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{-\int cosec^2x\,dx}=e^{\cot x}$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$ye^{\cot x}=\int(\cot x\ \ cosec^2x)\,e^{\cot x}dx+c$$

$$ye^{\cot x}=I+c$$

د I قیمت لومړی په لاندې ډول لومړی دتعویضي طریقې او وروسته دانقسام طریقې څخه په ګټه اخیستنې سره پیداکوو

$$I=\int(\cot x\ \ cosec^2x)e^{\cot x}dx \qquad \cot x=t$$

$$-cosec^2x\,dx=dt$$

$$I=-\int t\,e^t dt=-\left[t\,e^t-\int e^t.1\,dt\right]$$

$$I=-[t\,e^t-e^t]=e^t-t\,e^t=e^t(1-t)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په نتیجه کې لیکلای شو چې

$$y\, e^{\cot x} = e^{\cot x}(1-\cot x) + c \qquad \text{یا} \qquad y = (1-\cot x) + c e^{-\cot x}$$

شپږم مثال: $(x+\tan y)\, dy = \sin 2y\, dx$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله کولای شو په لاندې ډول ولیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+\tan y}{\sin 2y} \qquad \text{یا} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin 2y}x = \frac{\tan y}{\sin 2y}$$

کومه چې د $\frac{dx}{dy} + P(y)\, x = Q(y)$ شکل لري، ددې څخه لیکلای شو چې:

$$P = -\frac{1}{\sin 2y} \qquad \text{او} \qquad Q = \frac{\tan y}{\sin 2y}$$

لومړی دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int P dy} = e^{-\int \frac{1}{\sin 2y} dy} = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy} = e^{-\frac{1}{2}\ln \tan y} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt{\tan y}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tan y}} = \sqrt{\cot y}$$

اوس دراکړل شوې معادلې عمومي دفورمول په نظر کې نیولوسره په لاندې ډول حل کوو

$$x\sqrt{\cot y} = \int \frac{\tan y}{\sin 2y}\sqrt{\cot y}\; dy + c = \int \frac{\sec^2 y}{2\sqrt{\tan y}} dy + c$$

$$x\sqrt{\cot y} = \sqrt{\tan y} + c \qquad\qquad x = \tan y + c\sqrt{\tan y}$$

اووم مثال: $(1+y^2)\, dx = (\tan^{-1} y - x)dy$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1+y^2}x = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} \qquad \text{نو} \qquad P = \frac{1}{1+y^2} \qquad \text{او} \qquad Q = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس دراکړل شوې معادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$xe^{\tan^{-1}y} = \int \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\, e^{\tan^{-1}y} dy + c$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = \int t\, e^t dt + c \qquad t = \tan^{-1}y$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = (t-1)e^t + c$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = (\tan^{-1}y - 1)e^{\tan^{-1}y} + c$$

$$\therefore \qquad x = (\tan^{-1}y - 1) + ce^{\tan^{-1}y}$$

اتم مثال: $y\ln y\, dx + (x - \ln y)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y} \qquad P = \frac{1}{y\ln y}\ , \qquad Q = \frac{1}{y}$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int \frac{1}{y\ln y}dy} = e^{\ln\ln y} = \ln y$$

اوس راکړل شوې معادله په لاندې ډول حل کوو

$$x\ln y = \int \frac{1}{y}\,.\ln y\, dy + c = \int t\, dt + c\ , \qquad \ln y = t \quad => \quad \frac{1}{y}dy = dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + c$$

$$x\ln y = \frac{(\ln y)^2}{2} + c \qquad \therefore x = \frac{\ln y}{2} + \frac{c}{\ln y}$$

نهم مثال: $\frac{dy}{dx} = x\sin 2y = x^3\cos^2 y$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه معیاري خطي تفاضلي معادله نه ده ، ددې لپاره چې معادله په معیاري شکل ولیکو، نومعادله په $\cos^2 y$ باندې ویشو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sec^2 y\frac{dy}{dx} + 2x\tan y = x^3 \dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

په لومړۍ معادل کې په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$\tan y = t \qquad => \qquad \sec^2 y\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

اوس لومړۍ معادله لاندې شکل اختیاروي

$\frac{dt}{dx} + 2x\,t = x^3$ نو $P = 2x$ او $Q = x^3$

اوس يې دانتيګرال فکتور په لاندې ډول پيداکوو

$$IF = e^{\int Pdx} = e^{\int\ 2x\,dx} = e^{x^2}$$

دپورته قيمتونو په لرلوسره دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پيداکوو

$$te^{x^2} = \int x^3 e^{x^2}dx + c$$

$$= \int x.x^2 e^{x^2}dx + c \qquad x^2 = u\ ;\ 2xdx = du;\ xdx = \frac{du}{2}$$

$$= \int ue^u du + c$$

$$= ue^u - \int e^u du + c$$

$$= ue^u - e^u + c$$

$$te^{x^2} = (u-1)e^u + c \qquad => \qquad te^{x^2} = (x^2-1)e^{x^2} + c$$

$$\therefore t = (x^2-1) + ce^{-x^2} \qquad t = \tan y$$

$$\tan y = (x^2-1) + ce^{-x^2}$$

يادابښت: پورته مثال $f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)P(x) = Q(x)$ شکل لري، دداډول معادلو دحل لپاره $f(y) = t$ وضعه کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم مثال: $x\frac{dy}{dx}-y=x^3\cos x \quad , \quad y(\pi)=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x^2\cos x\,, \qquad P=-\frac{1}{x} \quad \text{او} \quad Q=x^2\cos x$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

اوس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$y\frac{1}{x}=\int x^2\cos x\ \cdot\frac{1}{x}dx+c$$

$$\frac{y}{x}=\int x\,.\cos x\,dx+c$$

$$\frac{y}{x}=x\sin x-\int\sin x\cdot 1\,dx+c$$

$$\frac{y}{x}=x\sin x+\cos x+c$$

$$y=x^2\sin x+x\cos x+cx \qquad\qquad x=\pi\,, \qquad y=0$$

$$0=\pi^2\sin\pi+\pi\cos\pi+c\pi$$

$$0=-\pi+c\pi, \qquad c\pi=\pi \quad => \quad c=1$$

پس دمعادلې خصوصي حال په لاندې ډول دی

$$y=x^2\sin x+x\cos x+x$$

تمرینونه:

لاندې تفاضلي معادلي حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. $x(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} = y(1-x^2) + x^2\ln x$ 2. $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = \sin x$

3. $x\cos x\dfrac{dy}{dx} + y(x\sin x + \cos x) = 1$ 4. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x\sqrt{1-x^2}$

5. $\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$ 6. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - y = e^x(1+x)^2$

7. $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = \sin 2x$ 8. $\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{-x}\cos x$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y\cos x}{1+\sin x}$ 10. $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = 4x\, cosec\, x$

11. $\dfrac{dy}{dx} - 2y\tan x = \sec^4 x$ 12. $(x+y+1)\dfrac{dy}{dx} = 1$

13. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\tan y}{1+x} = (1+x)\, e^x \sec y$ 14. $(x+2y^2)\dfrac{dy}{dx} = y$

15. $y^2 + \left(x - \dfrac{1}{y}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$ $\left(Hint\ reduce\ in\ form\ \ \dfrac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1\right)$

16. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + (1+x)y = 2\sin x$ $y(0) = 2$

17. $x\dfrac{dy}{dx} + y = x\cos x + \sin x$ $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

18. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x}{x^2+1}y = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ $y(0) = 0$

1. $\dfrac{[y(x^2+1)]}{x} = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + c$ 2. $y\sin x = \dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + c$

3. $y\,x\sec x = \tan x + c$ 4. $\dfrac{y}{(1-x^2)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c$

5. $y = \dfrac{1}{2}\,(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$ 6. $y = (x+1)(e^x + c)$

7. $y\sec x = c - 2\cos x$ 8. $y = ce^{-3x} + e^{-x}\left(\dfrac{\sin x + 2\cos x}{5}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9. $y(1+\sin x)+\frac{x^2}{2}=c$ 10. $y=(2x^2+c)cosec\,x$

11. $y\cos^2 x=c+\tan x$ 12. $x=ce^y-(y+2)$

13. $\sin y=(1+x)(c+e^x)$ 14. $\frac{x}{y}=y^2+c$

15. $x=ce^{\frac{1}{y}}+\frac{1}{y}+1$ 16. $y=\frac{\sin x-\cos x}{1+x}+\frac{3e^{-x}}{1+x}$

17. $y=\sin x$ 18. $y=\frac{\tan^{-1} x}{x^2+1}$

1.13 برنولي معادله (Bernoulli’s Equation)

ځيني لومړی ترتيب تفاضلي معادلې دې چې خطي شکل نه لري ، خو دمتحولينو په مناسب تعويض سره کولای شو چې نوموړې معادلې په خطي تفاضلي معادلو باندې تبديلې کړو، يو شکل ددوی څخه دبرنولي معادله هم ده ، کوم چې دسويس رياضي پوه (1654-1705) jacob Bernoulli په واسطه منځ ته راغلي دي، دبرنولي دمعادلې عمومي شکل په لاندې ډول دی

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1), \qquad (n\neq 0\,, \quad n\neq 1)$$

چې P او Q د x تابع دي او يا هم امکان لري چې ثابت عددونه وي، لومړی معادله کولاي شو چې دخطي معادلې په شکل وليکو ، ددې کار لپاره لومړی معادله y^n باندې ويشو، نو لاندې معادله لاسته راکوي

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P\,y^{1-n}=Q \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

اوس په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$y^{1-n}=v \quad => \quad (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

دپورته قيمتونو په وضعه کولو سره دوهمه معادله لاندې شکل اختياروي

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+P\,v=Q \qquad \text{يا} \qquad \frac{dv}{dx}+P(1-n)v=Q(1-n)\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریمه معادله یوه خطي تفاضلي معادله ده ، چې کولای شو نوموړې معادله دانتیګرال دفکتور په پیداکولو سره حل کړو.

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=y^2$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله برنولي معادله ده ، لومړی راکړل شوې معادله په y^2 باندې ویشو

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-\frac{y^{-1}}{x}=1 \quad \text{یا} \quad y^{-2}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y^{-1}=1$$

اوس دپورته معادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1}=v \qquad => \qquad -y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره معادله په لاندې خطي تفاضلي معادلې باندې بدلیږي

$$-\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v=1 \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=-1$$

اوس يي دانتيګرال فکتورپه لاندې ډول پیداکوو

$$P=\frac{1}{x}\,, \quad Q=-1 \quad \text{نو} \quad IF=e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

پس دراکړل شوې معادلې عمومي حل په لاندې ډول دی

$$v\,x=\int -1\,x\,dx+c \quad \text{یا} \quad v\,x=-\frac{x^2}{2}+c \quad \text{یا} \quad y^{-1}x=-\frac{x^2}{2}+c$$

دوهم مثال: $x\frac{dy}{dx}+y=y^2\ln x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=\frac{1}{x}\ln x \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

اوس دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1}=v \qquad => \qquad -y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپورته قیمتونوپه وضعه کولوسره معادله په لاندې خطي تفاضلي معادله باندې بدلیږي

$$-\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=\frac{1}{x}\ln x \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v=-\frac{1}{x}\ln x$$

اوس يې دانتیګرال فکتور پیداکوو

$$P=-\frac{1}{x} \quad , \qquad Q=-\frac{1}{x}\ln x \qquad\qquad IF=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x}}=x$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول دی

$$v\cdot\frac{1}{x}=\int-\frac{1}{x}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+c \quad \text{یا} \quad v\,x^{-1}=-\int x^{-2}\ln x+c$$

$$vx^{-1}=-\left[\ln x\frac{x^{-1}}{-1}+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right]+c=-\left[-\frac{\ln x}{x}+\frac{x^{-1}}{-1}\right]+c$$

$$yx^{-1}=\ln x\cdot x^{-1}+x^{-1}+c \qquad\qquad y^{-1}=\ln x+1+cx$$

دریم مثال: $\frac{dy}{dx}-2y\tan x=y^2\tan^2 x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: معادله په y^2 باندې ویشو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-2y^{-1}\tan x=\tan^2 x$$

اوس دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1}=v \quad => \quad -y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx} \qquad \therefore\ -\frac{dv}{dx}-2v\tan x=\tan^2 x$$

$$\frac{dv}{dx}+2v\tan x=-\tan^2 x \quad , \qquad P=2\tan x \qquad Q=-\tan^2 x$$

دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int 2\tan x dx}=e^{2\ln\sec x}=e^{\ln\sec^2 x}=\sec^2 x$$

$$\therefore\ \ v\cdot\sec^2 x=-\int\tan^2 x\sec^2 x\,dx+c$$

$$v\cdot\sec^2 x=-\frac{\tan^3 x}{3}+c \quad \text{یا} \quad \frac{1}{y}\sec^2 x=-\frac{\tan^3 x}{3}+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: $y(2x\,y+e^{x})dx-xe^{x}dy=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله برنولي معادلې په شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\frac{2}{e^{x}}y^{2}$$

پورته معادله برنولي معادله ده ، ددې لپاره چې دخطي معادلې په شکل يې وليکو ، نو راکړل شوې معادله به y^2 باندې ويشو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-\frac{y^{-1}}{x}=\frac{2}{e^{x}} \qquad \text{پس} \quad y^{-1}=v \qquad => \qquad -y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx}-\frac{v}{x}=\frac{2}{e^{x}} \qquad \text{یا} \qquad \frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=-\frac{2}{e^{x}}\ , \qquad P=\frac{1}{x} \qquad Q=-\frac{2}{e^{x}}$$

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

پس دمعادلې عمومي حل عبارت دې له

$$v\,x=-\int 2\,e^{-x}\,x\,dx+c=-2\left[-xe^{-x}+\int e^{-x}dx\right]+c$$

$$=-2[-xe^{-x}-e^{-x}]+c \qquad \text{یا} \qquad \frac{1}{y}x=2e^{-x}(x+1)+c$$

پنځم مثال: $\frac{dy}{dx}+y\cos x=y^{n}\sin 2x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله دبرنولي معادلې په شکل ده ، لومړی راکړل شوي معادله په y^n باندې ويشو

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}\cos x=\sin 2x \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ (1)$$

$$y^{1-n}=v \qquad => \qquad (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

دپورته قيمتونو په وضعه کولوسره لومړی معادله په لاندې خطي معادلې باندې بدليږي

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+v\cos x=\sin 2x \qquad \text{یا} \qquad \frac{dv}{dx}+(1-n)\cos x\cdot v=(1-n)\sin 2x$$

$$P=(1-n)\cos x\ ,Q=(1-n)\sin 2x$$

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int(1-n)csox}=e^{(1-n)\sin x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پيداکوو

$$v\, e^{(1-n)\sin x} = \int (1-n)\sin 2x\, e^{(1-n)\sin x}\, dx + c$$

$$(1-n)\sin x = t \qquad => \qquad \cos x\, dx = \frac{1}{n-1} dt$$

$$v\, e^{(1-n)\sin x} = \int (1-n) 2\sin x \cos x\, e^{(1-n)\sin x}\, dx + c$$

$$= \frac{2}{n-1}\int t\, e^t dt + c$$

$$= \frac{2}{n-1}\left[te^t - \int 1 . e^t dt\right] + c$$

$$= \frac{2}{n-1}[t\, e^t - e^t] + c = \frac{2}{n-1}[(t-1)e^t]$$

$$y^{(1-n)} e^{(1-n)\sin x} = \frac{2}{n-1}[(1-n)\sin x - 1]\, e^{(1-n)\sin x} + c$$

$$y^{1-n} = \left\{\frac{2}{n-1}\right\}[(1-n)\sin x - 1] + ce^{-(1-n)\sin x}$$

شپږم مثال: $\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x}\ln z = \frac{z}{x^2}(ln\, z)^2$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله په z باندې ویشو، نولاندې نتیجه لاسته راکوي

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}\ln z = \frac{1}{x^2}(\ln z)^2 \qquad y = \ln z \qquad => \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

پورته معادله دبرنولي معادلې شکل دی، ددې لپاره چې په خطي شکل يې بدله کړو ، نو معادله په y^2 باندې ویشو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{y^{-1}}{x} = \frac{1}{x^2} \qquad y^{-1} = v \quad => \quad -y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = \frac{1}{x^2} \qquad \text{يا} \qquad \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -\frac{1}{x^2} \qquad P = -\frac{1}{x}\ ,\quad Q = -\frac{1}{x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$IF = e^{\int P dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

اوس يې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$v \cdot \frac{1}{x} = \int -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} dx + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + c$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x^2} + cx \qquad y = \ln z$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\ln z} = \frac{1}{2x} + cx$$

1.14 تمرینونه:

لاندې تفاضلي معادلات حل کړئ

1. $\frac{dy}{dx} - xy = x^3 y^2 \quad Ans: \quad \frac{1}{y^2} = 1 - x^2 + ce^{x^2}$
2. $2\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2} \quad Ans: \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{c}{\sqrt{x}}$
3. $xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2} \quad Ans: \quad -\frac{1}{y^2} e^{x^2} = c - 2x$
4. $\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan y = x^3 \quad Ans: \quad \tan y \, e^{x^2} = c + \frac{1}{2} e^{x^2}(\tan y - 1) \quad put \tan y = v$
5. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 x \quad Ans: \quad 1 + x^2 y + cxy = 0$
6. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^3 \sec x \quad Ans: \quad \cos^2 x = y^2(2 \sin x + c)$
7. $x^3 \frac{dy}{dx} + y^4 \cos x = x^2 y \quad Ans: \quad x^3 = (c + 3 \sin x) y^3$
8. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = y^2 \sin^2 x \cos^2 x \quad Ans: \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \sin x \cos^3 x + c \sin x$
9. $\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y \quad Ans: \quad tany = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + ce^{-x^2}$
10. $\frac{dy}{dx}(x^2 y^3 + xy) = 1 \quad Ans: \quad \frac{1}{x} = 2 - y^2 + ce^{-\frac{y^2}{2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کاملې تفاضلي معادلې (Exact Differential Equations)

هغه تفاضلي معادلې چې (1) .... $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ شکل ولري ، کاملې تفاضلي معادلې ورته وايي ، که چیرته دلومړۍ معادلې چپ طرف دیوې تابع لکه $f(x,y)$ کامل دیفرنسیال وی، یعني $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = df$ ، یاپه ساده ډول باندې لومړۍ معادلې ته کامله تفاضلي معادله وايي که چیرته $u(x,y)$ په لاندې ډول موجود وي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{او} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

دمثال په ډول $x\,dy + y\,dx = 0$ تفاضلي معادله په نظر کې نیسو، نوموړې معادله کولای شو چې د $d(xy) = 0$ په شکل ولیکو، کوم چې مونږ ته $df = 0$ شکل رابښايي ، چې f د x او y تابع ده، دانتیګرال نیوني څخه وروسته $xy = c$ لاسته راځي ، کوم چې دراکړل شوې معادلې عمومي حل دې، داډول معادلوته کاملې تفاضلي معادلې وايي.

قضیه: دلومړۍ معادلې دکامل والي لپاره لازمي اوکافي شرط عبارت له $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ څخه دی.

(i) دلازمي شرط لپاره ثبوت:

فرض کړئ چې لومړۍ معادله کامله ده ، مونږباید وښایو چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ، څرنګه چې لومړۍ معادله کامله ده ، نو دتعریف په اساس د $f(x,y)$ یوه تابع موجوده ده دکوم لپاره چې مونږ لاندې معادله لرو

$$df = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

دتیرو ریاضیاتوپه اساس لرو چې

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ددوهمې او دریمې معادلو دمقایسې په اساس لرو چې

$$M = \frac{\partial f}{\partial x}\,, \quad N = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \;\; => \;\; \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,, \;\; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x}$$

څرنګه چې

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x} \qquad \therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

کوم چې لازمي شرط رابښايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ii) دکافي شرط لپاره ثبوت:

فرض کړئ چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ، مونږ باید د $f(x,y)$ یوه تابع پیداکړو ، دکوم لپاره چې لاندې معادله صدق وکړي

$$df = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \quad \text{یعني} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{او} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

مونږ باید د $f(x,y)$ تابع داډول لاسته راوړو ، دکوم لپاره چې څلورمه معادله کې لومړی حالت صدق وکړي، دنوموړی معادلي نظر x ته مشتق اخلو او y ثابت نیسو ، نو مونږ لاندې معادله لاسته راوړو

$$f = \int M(x,y)\ dx + \phi(y) \dots\dots\dots\dots\dots\dots.(5)$$

چې $\phi(y)$ یوه اختیاري تابع د y ده ، اوس $\phi(y)$ داډول انتخابوو چې په څلورمه معادله کې دوهم حالت لپاره هم صدق وکړي ، یعنې $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \dots\dots\dots (6)$ ، اوس د $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ په نظر کې نیولو سره $\phi(y)$ هروخت امکان لري.

د (5) څخه لیکلای شو چې

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + \phi'(y) \ \dots\dots\dots\dots\dots.(7)$$

د (6) او (7) دمقایسي په اساس لیکلای شو چې

$$\phi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,u)\ dx \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(8)$$

د (8) چپ طرف د x څخه مستقل دی

راځی چې اوس د (4) حالت لاندې وښایو، x د (8) ښي طرف ته دننه کیدای نه شي ، ددی لپاره مونږ باید وښایو چې د (8) دښي طرف قسمي مشتق صفر دی.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M\ dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M\ dx\right]$$

$$\frac{\partial}{dx}\int M\ dx = M(x,y) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\ dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

څکه $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ اوس د (8) مشتق نظر y اخلو، نو ترلاسه کوو چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\phi(y) = \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right] dy + c \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

چې c يو اختياري ثابت عدد دی ، اوس كه (9) په (5) كې وضعه كړو ، نو غوښتل شوې تابع لاسته راكوي

$$f(x,y) = \int M\,dx + \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right] dy + c$$

دكومې چې كامل ډيفرنسيال عبارت له $M\,dx + N\,dy$ څخه دی

دكاملوتفاضلي معادلو دحل طريقه:

ددادول معادلو دحل لپاره لومړی بايد وښايو چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

1. د $M(x,y)$ انتيګرال نظر x ته پيداكوو او y ثابت په نظر كې نيسو، لاسته راغلي انتيګرال په I_1 سره ښايو.
2. په $N(x,y)$ كې هغه حدونه چې x ونلري ، نظر y ته انتيګرال نيسو او دغه انتيګرال په I_2 سره ښايو.
3. $I_1 + I_2 = c$ دراكړل شوې معادلې عمومي حل دی

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $(2xy + 3y)\,dx + (x^2 + 3x)\,dy = 0$ تفاضلي معادله حل كړئ

حل:

$$M = 2xy + 3y \quad \text{او} \quad N = x^2 + 3x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 3 \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راكړل شوی معادله يوه كامله تفاضلي معاده ، اوس يې عمومي حل په لاندې ډول پيداكو

$$\int (2xy + 3y)dx + \int (0)dy = c$$

$$2y\frac{x^2}{2} + 3y\,x = c \quad \text{يا} \quad x^2y + 3xy = c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته معادله کولای شو په لاندی ډول حل کړو، چې لومړی دمعادلې چپ طرف دیو کامل ډیفرنسیال په شکل لیکو

$$(2xy\,dx + x^2\,dy) + 3(x\,dy + y\,dx) = 0 \quad \text{یا} \quad d(x^2y) + 3d(xy) = 0$$

دانتیګرال څخه وروسته دراکړل شوې معادلې عمومي حل په لاس راځي

$$x^2y + xy = c$$

دوهم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)dx + (2x^3y - 3x^2y^2 - 5y^4)dy = 0$$

حل: پوهیږو چې

$$M = 5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3 \quad \text{او} \quad N = 2x^3y - 3x^2y^2 - 5y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2y - 6xy^2 \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y - 6xy^2$$

څرنګه چې $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)dx + \int (-5y^4)dy = c$$

$$x^5 + x^3y^2 - x^2y^3 - y^5 = c$$

دریم مثال: $(e^y + 1)\cos x\ \,dx + e^y \sin x\, dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لیدل کیږي چې

$$M = (e^y + 1)\cos x \quad \text{او} \quad N = e^y \sin x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \cos x \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y \cos x$$

څرنګه چې $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int (e^y + 1)\cos x \; dx + \int (0)\, dy = c \qquad => \qquad (e^y + 1)\sin x = c$$

ځلورم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$\left[y\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \cos y\right] dx + [x + \ln x - x \sin y] dy = 0$$

حل: پوهیږو چې

$$M = y\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \cos y \quad \text{او} \quad N = x + \ln x - x \sin y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \sin y \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \sin y$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس يې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int \left[y\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \cos y\right] dx + \int (0)\, dy = c$$

$$yx + y \ln x + x \cos y = c$$

پنځم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(2x \ln y)\, dx + \left(\frac{x^2}{y} + 3y^2\right) dy = 0$$

حل: لیدل کیږي چې

$$M = 2x \ln y \quad \text{او} \quad N = \frac{x^2}{y} + 3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x}{y} \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2x}{y}$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int (2x\ln y)\,dx + \int 3y^2 dy = c \qquad => \qquad x^2\ln y + y^3 = c$$

شپږم مثال: لاندې تفاضلی معادله حل کړئ

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$$

حل: ليدل کيږي چې

$$M = \left(1+e^{\frac{x}{y}}\right) \qquad N = e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{1}{y}\right) + \left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} + e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} = \left(-\frac{x}{y^2}\right)e^{\frac{x}{y}}$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله يوه کامله تفاضلي معاده ، اوس يې عمومي حل په لاندې ډول پيداکو

$$\int \left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \int (0)dy = c$$

$$x + \frac{e^{\frac{x}{y}}}{\frac{1}{y}} = c \qquad \text{يا} \qquad x + y\,e^{\frac{x}{y}} = c$$

1.16 تمرينونه

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $3x(xy-2)dx + (x^2+2y)dy = 0$
2. $y\sin 2x\ \ dx - (1+y^2+\cos^2 x)dy = 0$
3. $(x^2-2xy+3y^2)dx + (y^2+6xy-x^2)dy$
4. $(y^2-x^2)dx + 2xy\,dy = 0$
5. $\left(1+3e^{\frac{x}{y}}\right)dx + 3e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$
6. $(y\sec^2 x + \sec x\tan x)dx + (\tan x + 2y)dy = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7. $(e^y + 1)\cos x \ dx + e^y \sin x \ dy = 0$

8. $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2y}\right) dx - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x^2y}\right) dy = 0$

9. $\left(x + \frac{y^3}{x^2}\right) dx - 3y^2 dy = 0$

10. $(\cos x - 3x^2 \tan y)dx - x^3 \sec^2 y \ dy = 0$

11. $(ax + hy + g)dx + (hx + by + f)dy = 0$

12. $\left[\cos x \ \log_e(2y - 8) + \frac{1}{x}\right] dx + \frac{\sin x}{y - 4} \ dy = 0 \qquad y(1) = \frac{9}{2}$

جوابونه:

1. $x^3y - 3x^2 + y^2 = c$

2. $3y \cos 2x + 6y + 2y^3 = c$

3. $x^3 - 3x^2y + 9xy^2 + y^3 = c$

4. $\frac{x^3}{3} - xy^2 = c$

5. $x + 3ye^{\frac{x}{y}} = c$

6. $y \tan x + \sec x + y^2 = c$

7. $(e^y + 1)\sin x = c$

8. $\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{xy} = c$

9. $x^3 - 2y^3 = cx$

10. $3y \cos 2x + (6y + 2y^3) = c$

11. $ax^2 + 2h\,xy + by^2 + 2gx + 2fy + c$

12. $\mathrm{Sin}\, x \ln(2y - 8) + \ln x = 0$

1.17 هغه تفاضلي معادلې چې په کاملو تفاضلو معادلوباندې بدلیږي

په دې برخه کې ځینې معادلې تربحث لاندې نیسو ، کومې چې $Mdx + Ndy = 0$ شکل ولري خو کاملې نه وي، ولې دیوې مناسبې تابع دضربولو څخه وروسته په کاملوتفاضلي معادلوباندې بدلیږي ، چې دغه مناسبې تابع ته دانتیګرال فکټور یا داتمام عامل وایي ، دانتیګرال فکټور دپیداکولو لپاره لاندې قوانین بغیر دثبوت څخه ترڅیړنې لاندې نیسو.

لومړی قانون: که چیرته راکړل شوی تفاضلي معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله وي او همدارنګه $Mx + Ny \neq 0$ ، نو $\frac{1}{Mx+Ny}$ عبارت دانتیګرال فکټور څخه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، نو لومړی یې دانتیګرال فکټور پیداکوو

$$IF = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{(x^4 + y^4)x + (-xy^3)y} = \frac{1}{x^5}$$

اوس راکړل شوې معادله په $\frac{1}{x^5}$ کې ضربوو

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5}\right)dx - \frac{y^3}{x^4}dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5}\right)dx + \int (0)dy = c \qquad => \quad \ln x - \frac{y^4}{4x^4} = c$$

دوهم مثال: $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، نو دانتیګرال فکټور یې په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{y^2x + (x^2 - xy - y^2)y} = \frac{1}{y(x^2 - y^2)}$$

اوس راکړل شوې معادله په لاسته راغلي انتیګرال فکټور کې ضربوو، نو معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{y}{x^2 - y^2}dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{x^2 - y^2}\right)dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int \frac{y}{x^2 - y^2}dx + \int \frac{1}{y}dy = c$$

$$y \cdot \frac{1}{2y}\ln\frac{x - y}{x + y} + \ln y = c \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\ln\frac{x - y}{x + y} + \ln y = c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوهم قانون: که چیرته $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ یواځې د x تابع وي ، د f(x) په شکل یې فرض کوو، نو $e^{\int f(x)dx}$ عبارت دانتیګرال فکټور څخه دی.

لومړی مثال: $2y\,dx+(2x\ln x-xy)dy=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$M=2y \qquad N=2x\ln x-xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2\left(x\cdot\frac{1}{x}+\ln x\right)-y=2(1+\ln x)-y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2-2-2\ln x+y}{2x\ln x-xy}=\frac{-2\ln x+y}{x(2\ln x-y)}=-\frac{1}{x}=f(x)$$

$$\therefore \quad IF=e^{\int f(x)dx}=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$$

اوس راکړل شوي معادله په $\frac{1}{x}$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$\frac{2y}{x}dx+\frac{2x\ln x-xy}{x}dy=0 \quad \text{یا} \quad \frac{2y}{x}dx+(2\ln x-y)dy=0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده ، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int\frac{2y}{x}dx+\int(-y)dy=c \qquad => \qquad 2y\ln x-\frac{y^2}{2}=c$$

دوهم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(6x^2+4y^3+12y)\,dx+3x(1+y^2)\,dy=0$$

حل:

$$M=6x^2+4y^3+12y \qquad N=3x+3xy^2$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{12y^2+12-3-3y^2}{3x(1+y^2)}=\frac{12(y^2+1)-3(1+y^2)}{3x(1+y^2)}=\frac{3}{x}=f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\therefore \quad IF = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

راکړل شوې معادله په x^3 کې ضربوو

$$(6x^5 + 4x^3y^3 + 12x^3y)\, dx + 3x^4(1 + y^2)\, dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده ، نو په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int (6x^5 + 4x^3y^3 + 12x^3y)\, dx + \int (0)dy = c$$

$$x^6 + x^4y^3 + 3yx^4 = c$$

دریم قانون: که چیرته $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ د y تابع وي ، او د f(y) په شکل یې وښایو نو $e^{\int (y)dy}$ دانتیګرال فکتور دی.

لومړی مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$$

حل:

$$M = y^4 + 2y \qquad N = xy^3 + 2y^4 - 4x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 + 2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = y^3 - 4$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{(y^3 - 4) - (4y^3 + 2)}{(y^4 + 2y)} = \frac{-3(y^3 + 2)}{y(y^3 + 2)} = \frac{-3}{y} = f(y)$$

اوس یې دانتیګرال فکتورپه لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int (y)dy} = e^{-\int \frac{3}{y}} = e^{-3\ln y} = e^{-\ln y^3} = \frac{1}{y^3}$$

اوس راکړل شوې معادله په $\frac{1}{y^3}$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$\left(y + \frac{2}{y^2}\right) dx + \left(x + 2y - \frac{4x}{y^3}\right) dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده ، نو عمومي حل یې په لاندې ډول دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \left(y+\frac{2}{y^2}\right)dx+\int 2y\,dy=c$$

$$xy+\frac{2x}{y^2}+y^2=c \quad \text{یا} \quad x\left(y+\frac{2}{y^2}\right)y+y^2=c$$

ځلورم قانون : که چېرته راکړل شوې معادله د $f_1(x,y)y\,dx+f_2(x,y)x\,dy=0$ شکل ولري، چې $M=f_1(x,y)y$ او $N=f_2(x,y)x$ وي او $Mx-Ny\neq 0$ نو په دې صورت کې $\frac{1}{Mx-Ny}$ عبارت دانتیګرال فکتور څخه دی.

مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$y(1+2xy)\,dx+x(1-xy)\,dy=0$$

حل:

$$M=yf_1(x,y) \qquad N=xf_2(x,y)$$
$$M=y(1+2xy) \quad N=x(1-xy)$$

$$Mx-Ny=xy(1+2xy)-xy(1-xy)=xy+2x^2y^2-xy+x^2y^2$$

$$Mx-Ny=3x^2y^2\neq 0$$

پس دراکړل شوې معادلې دانتیګرال فکتور عبارت دی له

$$IF=\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{3x^2y^2}$$

راکړل شوې معادله په $\frac{1}{3x^2y^2}$ کې ضربوو، نو ترلاسه کوو چې

$$\left(\frac{1}{3x^2y}+\frac{2}{3x}\right)dx+\left(\frac{1}{3xy^2}-\frac{1}{3y}\right)dy=0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده او عمومي حل یې په لاندې ډول دی

$$\int \left(\frac{1}{3x^2y}+\frac{2}{3x}\right)dx+\int -\frac{1}{3y}\,dy=c$$

$$-\frac{1}{3xy}+\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{3}\ln y=c \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{xy}+2\ln x-\ln y=k \qquad (k=3c)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم قانون : که چېرته معادله د $x^a y^b(my\,dx + nx\,dy) + x^c y^d(py\,dx + qx\,dy) = 0$ چې p, d, c, n, m, b, a او q ثابت عددونه دي شکل ولري، نو دراکړل شوي معادلي دانتیګرال فکټور عبارت د $x^h y^k$ څخه دی ، د k او h دلاسته راوړلو لپاره لومړی راکړل شوې معادله په $x^h y^k$ کې ضربوو ، ترڅو معادله په کامله تفاضلي معادله باندې بدله شي ، بیا یې د کامل والي دشرط څخه په استفادی سره ، دضریبونو دمقایسي څخه د k او h قیمتونه لاسته راوړو، دغه موضوع په لاندې مثال کې واضح کوو

مثال: $(y^2 + 2x^2 y)dx + (2x^3 - xy)\,dy = 0$ معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$y(y\,dx - x\,dy) + x^2(2y\,dx + 2x\,dy) = 0$$

اوس راکړل شوې معادله په $x^h y^k$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$(x^h y^{k+2} + 2x^{h+2} y^{k+1})dx + (2x^{h+2} y^k - x^{h+1} y^{k+1})dy = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

پورته معادله باید یوه کامله تفاضلي معادله وي

$$M = x^h y^{k+2} + 2x^{h+2} y^{k+1} \quad , \quad N = 2x^{h+2} y^k - x^{h+1} y^{k+1}$$

څرنګه چې لومړئ معادله کامله ده ، نو لروچې

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$(k+2)x^h y^{k+1} + 2(k+1)x^{h+2} y^k = 2(h+3)x^{h+2} y^k - (h+1)x^h y^{k+1}$$

دپورته عینیت دضریبونو د مساوات څخه لرو چې

$k + 2 = -(h+1)$ او $2(k+1) = 2(h+3)$

یعنې $h + k = -3$ او $h - k = -2$

دپورته سیستم دحل څخه د h او k قیمتونه عبارت دي له

$$h = -\frac{5}{2} \qquad k = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad IF = x^{-\frac{5}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$$

اوس راکړل شوې معادله په $x^{-\frac{5}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$ کې ضربوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(x^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\right)dx+\left(2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)dy=0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده ، او عمومي حل يې په لاندې ډول دی

$$y^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\right)+2y^{\frac{1}{2}}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)=c \quad \text{يا} \quad 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}=c$$

1.18

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $(x^2-3xy+2y^2)\,dx+x(3x-2y)\,dy=0$
2. $(x^2y-2xy^2)\ \ dx+2y\,dy=0$
3. $(xy-y^2)\,dx-x^2dy=0$
4. $(x^2+y^2+2x)\,dx+2y\,dy=0$
5. $(3xy-2ay^2)\,dx+(x^2-2ayx)\,dy=0$
6. $(x^3-2y^2)\,dx+2y\,dy=0$
7. $(xy^2-x^2)\,dx+(3x^2y^2+x^2y-2x^3+y^2)\,dy=0$
8. $(y^4+2y)\,dx+(xy^3+2y^4-4x)\,dy=0$
9. $(xy^2+y)\,dx+2(x^2y^2+x+y^4)\,dy=0$
10. $(xy\sin xy+\cos xy)y\,dx+(xy\sin xy-\cos xy)x\,dy=0$
11. $(x^2y^2+xy+1)\,y\,dx+(x^2y^2-xy+1)x\,dy=0$
12. $(2y\,dx+3x\,dy)+2xy(3ydx+4xdy)=0$

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library