شمیرپوهنه (ریاضي)

د لسم ټولګي لپاره

برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

لیکونکی:

ډاکترماخان میرې شینواری

2016

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

د لسم ټولګي لپاره

لیکونکی:
ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری
Smakhan1946@gmail.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

سریزه..................................... ۴	n- مه درجه ټولراشنل توابع ۱۶۵
پولینومشمیرنه ۶	د ټولراشنل توابعوغوښتکي ۱۷۵
د ګاوس الګوریتم.................... ۲۹	د بدلونقانونه ۱۷۸
هورنرشیما.......................... ۴۶	شننیزه – یا تحلیی هندسه ۱۸۳
اړیکې................................ ۵۵	فنکشنونه (بل بدیل)............ ۲۰۲
فنکشن(ځیرونه) یا تابع ۶۵	درېکوډیکچ ۱۳۷
فنکشن او په ښتفنکشن ۹۱	ګډوله – یا کمپلکسګڼونه ۲۷۹
ځلورۍیا مربع توابع ۹۳	د لیکونکیلیکلیاوژباړې..... ۳۱۵
نورمال پارابل ۹۶	د لیکوکیژنود ته لنډه کتنه...... ۳۲۰
د ځلورۍتکمیل له............... ۱۰۱	
کرښیزبرابرونسیستم ۱۱۵	
د مناسبځواب له پاره تلنلار.... ۱۲۳	
مساواتسیستم بې له ۱۲۹	
توان یا پوتنخ توابع ۱۳۳	
کرښیزتوابع د ورکړ شوو ۱۳۸	
مومړی حالت ۱۳۸	
د کرښبرابرونونو ځانګړی ۱۴۲	

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

دا ځلوېښت کاله کیږي، چې زموږ هیواد هراړخیزه ستونزې لري او هر څه دې اوږده جنګ را خراب کړي

ګرانو هیوادوالو!

د نورو نیمګرتیاو په څیر زموږ درسي نصاب - په تیره شمیرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په څلوردیوالي ونه شو، نو زه به وهڅیږم، چې دا ما لیکلي کتابونه د ن ج له لارې له تاسو سره شریک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د ښوونځي په کتابونو کې د ستااتیستیک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دی، چې زه ترې دلته تیریږم او د ښوونځي د تیرو کتابونو څخه هم هیله ده- که زما کتابونه وړاندې نه شو- چې دابرخې یا سمې یا له درسي نصاب څخه ووېستل شي. په دې برخه باور وکړی، چې نه لیکونکی بوهیږي او نه بل لوستونکی پرې پوهیدلی شي.

زما په دې د ښوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پیدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتیستیک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالوالي شمیرنه راوړي او د ستاتیستیک یو کتاب مې هم ژباړلي، چې زه به یې په مناسبوخت کې د لیدلو پتې ګرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځني کتابونه او په ډېره مننه د www.ketabton.com ن ج کې ګرانولوستونکوته وړاندې شوي.

د شمیرپوهني سم اند یا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولګي کې راغلی او هغه هم لکه ستاتیستیک او ... د پوهیدلو نه دی. دا- لکه څنګه چې برېښي- دومره پیچلی نه دی، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولګي په سرکې راوړم، هیله ده چې ستونځې به رامنځ ته نه کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځئ، چې ستونځوبې(د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دی، خو د موصوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمښتونه هم په کې شته. سره د ټولو نیګرتیاوو دا د ښوونځي له پاراه ډېره ګټوره او زه چې پوهیږم، یواخنی سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه ، د ځان له امله نه وایم، دګرانو زده کوونکو او ښوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دې، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولي، چې باید سمې وي.

زه به وهڅیږم، چې درسمي ښوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینی باید ووایم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځې راته په ګوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې ګټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د ښوونځي لیکنې سمې کړي.

د خوندیونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راونیسم.

باور وکړی زه د دې لیکنو سره لږ ستړی شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمګړي پاتې وي، چې ستاسو پوهیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بخښنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه ګڼی.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړی مغذ مې ترې نورموړ دی، نو له دې امله یې نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینومشمیرنه

پویلینوم څه شی دی؟

یو پولینوم د اووښتوني یا واریابلي –چې موږيې د x سره په نښه کوو- له ډېرواره توان د زیاتون دی: د توان جګګښونه پیداښتي یا طبیعي ګڼونه دي. زیاتون له دې برسیره پای دی.

بیلګه: $a_n \cdot x^n + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

همداسي

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

یا هم:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

دلته n یو پیداښتي ګڼ اوپای دی او a_i ریلګڼونه دي د ټولو i=0,1,…n له پاره.

پیژند: د پولینمچګګڼ n د پولینوم درجه بلل کیږي، که $a_n \neq 0$ وي.

په یاد ولری: په پورته سر کې- د پولینوم لیکنبه د توان په همغږیزجګیدونکي لیکنبه اودا کښته یي د پولینوم د توان په همغیزټیټیدونکي لیکنبه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولينومونو سره شميرنه يا کاروني داسې لنډې څيړو

د پولينومونو زياتون: که له

$$a_5 \cdot x^5 + ... + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

سره

$$b_5 \cdot x^5 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زياته-وو، نو داسې مخ ته ځو:

په دې پورته برابرون کې گورو، چې اووښتوني يا واريابله د څلور په جګ يعني x^4 نه شته. دا په دې مانا ده،چې ځله ووني يا صريب يې صفر دی. يعني $o\ x^4$ يا

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زياتونعمليه يا کارونه مح ته بيای:

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ \ + b_0\ )$$

گورو،چېد برابر توا يا برابر جګګڼ واريابلې سره زياتيږي.

بيلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$2x^5 + o\ x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ \ + b_0\ )$$

د پولينومونو کمون کارونه:

کمون يې هم په همدې بيلګه داسې ليکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$a_5\cdot x^5 + a_4\cdot x^4 + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$$

$$-(b_5\cdot x^5 + o\, x^4 + b_3\cdot x^3 + b_2\cdot x^2 + b_1\cdot x + b_0)$$

$$(a_5 - b_5)\cdot x^5 + (a_4 - o)x^4 + (a_3 - b_3)x^3 + (a - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

بیلګه:

$$3\cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4\cdot x^2 + 2\cdot x + 7$$

$$-(2x^5 + o\, x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1)$$

$$x^5 + 6x^4 \quad -7x^3 \quad -x^2 + x + 6$$

پیژند: دوه پولینومونه سره برابر دي، که خله ووني یا صریبونه یې سره برابر وي، دا په دې مانا چې

$$a_n\cdot x^n + ... + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$$

او

$$b_n\cdot x^n + ... + b_3\cdot x^3 + b_2\cdot x^2 + b_1\cdot x + b_0$$

سره برابر دي که $b_i = a_i$ وي،د ټولو $i=1,2,:::n$ له پاره.

د پولینومونوپه هکله مو په اتم ټولګي کې د ترمونوبرخه کې پوره زده کړه کړې. په پولینوم کې هم ټول هغه شمیرلارې، چې په ګڼونو کې باور لري باوري دي.

دا لاندې بیلګې دې هم داروښانه کړي:

د پولینومونوله پاره نورې بیلګې:

- $3x^2 + 2x + 5$
- $7x^3 + x^2 + 6x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

o $10x^5 + 3x^4 + 2x$

د پولینوم ډولونه:

په شمیرپوهنه کې د پولینوم مختلف ډولونه شته.په شمیرپوهنه کې د بینوم لاندې یو پولینوم پوهیږو، چې له دوه غړو جوړ وي یا په بل ډول ویلی شوي، چې یو بینوم د دوه مونومونو زیاتون یا کمون دی.دا لاندې بیلګې دا هم ښايي، چې بینوم څنګه برېښي!

- $a + b$
- $x^3 + y^3$
- $x - 3$

پولینوم، چې له درې زیاتونونو جوړ دی‌ترینوم بلل کیږي. لاندې بیلګه دا روښانه کوي.

- $a^2 + b^2 + c^2$
- $6a^2 + 7a^3 + 8a^4$

زیاتون ته بیلګه

$$(-x^5-2x^4-3x^2-x+2) + (x^2+2) = -x^5-2x^4-2x^2-x+4$$

پولینومکمون ته بیلګه: په لاندې بیلګه کې ګورو، چې د برابر توانونو x یو له بل څخه کمیږي.

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x) – (3x^3 + 2x^2 + 6x) = x^4$$

ځل (ضرب):

دا لاندې درې بیلګې د ځل یا ضرب له پاره ورکړ شوي.

موږاو تاسي د دې لارې سره د بینوم فرمول او د ترمونو د ځله ونو له لارې بلد یو، چې دلته ستاسوپام ورته رااړول کیږي

$$(x-4)\cdot(x^2-2x+3) = x^3-6x^2+11x-12$$

$$(x-5)(x^2+3x+7) = x^3-2x^2-8x-35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(x-3)(4x+7) = 4x^2 - 5x - 21$$

$$(x+1)(x^2+x-6) = x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6 = \underline{\underline{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}}$$

پولينوموېش:

دا لاندې بيلګه د وېش له پاره راوړ، خو دا چې وېش لږ پيچلی دی، په دې به پوره وغږيو.

$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x) : (x + 3) = x^3 - x^2 + 5x - 9 + (27)/(x+3)$

$-(x^4+3x^3)$
$-(-x^3-3x^2)$
$-(5x^2+15x)$
$-(-9x-27)$
پاتېRest: 27

کربنيزځله ووني سره ځل کيږي يا ضربيږي

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x-1{,}5)$$

د ځله ووني ۲ سره غزول کيږي.

$$f(x) = (x^2+3x+2)(x-1{,}5)$$
$$= x^3 - 1{,}5x^2 + 3x^2 - 4{,}5x + 2x - 3$$
$$= x^3 + 1{,}5x^2 - 2{,}5x - 3 \quad /\cdot 2$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم وېش:

که د یوه پولینوم صفرځای معلوم وي، نو کړی شو د پولینوم وېش له لارې د پولینوم درجه په یوه کمه کړو. که دا مو مربع مساوات ته لارښود کړي یا بوځیو نو ساده دی، چې نور صفرځایونه بیدا کړو. لاندې بېلګې دې د پولینوم وېش روښانه کړي.

د بیلګې په توګه د دریمې درجې پولراشنل تابع صفرځایونه معلوم دي، نو کیدی شي چې د تابع مساوات د کرښیزو صریبونوپه څېر ولیکلی شو:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - \bar{x}_3)$$

چیرته چې $x_1 ; x_2 ; x_3$ صفرځایونه دي.

موږ اوس په څرګنده توکه تابع یا څیرونه د څیړنې لاندې نیسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چیرته چې $x1=2$ یو صفرځای دی، ځکه چې

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

له دې سره له دې سره کېدی شي د تابع مساوات د $x1=2$ صفرځآی لاندې (له امله) په پام کې ونیسو او لکه چې لاس ته راځي و
لیکو $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = (\dots\dots\dots)(x - 2)$

د صفرځای ټاکلو لپاره اینوونه : $f(x)= 0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=0$
دا افاده $x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=0$ څېړو

د نوکانو افادې یا وییني $(\dots)$ټاکو

دواړه لورې په $(x-2)$وېشو

$$(x^3-x^2-5x+6) :(x-2)=(\dots)$$

په دې توګه د نوکانو افاده $(\dots)$لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وېش د لیکنیز وېش قانون سره سم مخ ته بیایو

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x-2) = x^2 + x - 3 \\
-\left(x^3 - 2x^2\right) \\
\hline
\quad x^2 - 5x \\
\quad -\left(x^2 - 2x\right) \\
\hline
\quad\quad -3x + 6 \\
\quad\quad -(-3x + 6) \\
\hline
\end{array}
$$

د نوکانو افاده (...) اوس x^2+x-3 بنه لري

له دې لاس ته راځي د صفرځای ټاکنو لپاره اینوونه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=(x^2+x-3)(x-2)=0$$

نو دا مربع مساوات x^2+x-3 اوس حل کوو.

دا د p-q- فرمول سره ځوابوو:

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

صفرځایونه:

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x محور سره غوځتکي:

$$P_{x1}(2|0);\ P_{x2}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right);\ P_{x3}\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right)$$

تابع مساوات:

$$f(x)=(x-2)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\Leftrightarrow f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

د پولینوموېش او لیکنیز پولینوموېش په منځ کې اړیکې شته. په لاندې مخامخوالي کې دا د وېش بې له پاتې په حالت کې را ښايي.

$62228 : 47 = 1\ 3\ 2\ 4$ $-47 \leftarrow 47\cdot 1$ 152 $-141 \leftarrow 47\cdot 3$ 112 $-94 \leftarrow 47\cdot 2$ 188 $-188 \leftarrow 47\cdot 4$ 0	$(x^3-6x^2+11x-12) : (x-4) = x^2-2x+3$ $-(x^3-4x^2) \leftarrow (x-4)\cdot x^2$ $-2x^2+11x$ $-(-2x^2+8x) \leftarrow (x-4)\cdot(-2x)$ $3x-12$ $-(3x-12) \leftarrow (x-4)\cdot 3$ 0

ګڼ ۶۲ د لومړیو دوه ځایونو څخه چوړ دی د دې وېشونو ګڼونو څخه د پروېشوني (۴۷)

سره وېشل کیږي. لاس ته راوړنه (۱) د (۴۷) سره ځل یا ضرب کیږي او د ګڼ (۶۲) څخه کمیږي. د کمښت نتیجې کمښت (۱۵۲) سره په همدې ډول پرمخ ځو تر څو د کمښت لاس ته راوړنه صفر شي.

ازماېښت : $47\cdot 1324 = 62228$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right):(-2x+3)=3x^2+2x-4$$

$$\underline{-\left(-6x^3+9x^2\right)}$$

$$-4x^2+14x$$

$$\underline{-(-4x^2+6x)}$$

$$8x-12$$

$$-\underline{(8x-12)}$$

$$0$$

Probe:

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right)=\left(3x^2+2x-4\right)(-2x+3)$$

بیلګه:

$$\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-2)=x^2+5x+4$$

$$\underline{-\left(x^3-2x^2\right)}$$

$$5x^2-6x$$

$$\underline{-\left(5x^2-10x\right)}$$

$$4x-8$$

$$\underline{-(4x-8)}$$

$$0$$

Probe: $\left(x^2+5x+4\right)(x-2)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right):(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

$$\underline{-\left(a^3+a^2b\right)}$$

$$2a^2b+3ab^2$$

$$\underline{-\left(2a^2b+2ab^2\right)}$$

$$ab^2+b^3$$

$$\underline{-\left(ab^2+b^3\right)}$$

$$0$$

ازماښت:

$$:\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)=\underbrace{\left(a^2+2ab+b^2\right)}_{\text{1. binomische Formel}}(a+b)=\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

بیلګه:

$$\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right):(x-2)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$$

$$\underline{-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2\right)}$$

$$-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x$$

$$\underline{-\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right)}$$

$$-x+2$$

$$\underline{-(-x+2)}$$

$$0$$

ازماښت: $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)(x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{l}(2x^3 \qquad -14x-12):(x-3)=2x^2+6x+4\\ \underline{-(2x^3-6x^2)}\\ \qquad 6x^2-14x\\ \qquad \underline{-(6x^2-18x)}\\ \qquad\qquad 4x-12\\ \qquad\qquad \underline{-(4x-12)}\\ \qquad\qquad\qquad 0\end{array}$$

بيلګه:

په ځنو حالتونوکي دا ښه ده، چي د پولينوم ليکنوکي د اړتيا په وخت کبيوه تشيا پريږدو، کلکه په پورته بيلګه کي چيکورو.

يوه بله شونتيا يي داده، چي هغه تشيا د صفر سره ډکه کړو، لکه دا لاندي:

$$2x^3-14x-12=2x^3+0x^2-14x-12$$

بيلګه:

لاندي بيلګه يو وېش د پاتي سره مخ ته بيايي.لکه ځنګه چي د ليکنيز وېش څخه راته ځرګند دی.

$$\begin{array}{l}(x^3+3x^2-6x-8):(x-1)=x^2+4x-2 \quad (\text{Rest } -10)\\ \underline{-(x^3-x^2)} \qquad\qquad \Rightarrow (x^3+3x^2-6x-8):(x-1)=x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)}\\ \qquad 4x^2-6x\\ \qquad \underline{-(4x^2-4x)}\\ \qquad\qquad -2x-8\\ \qquad\qquad \underline{-(-2x+2)}\\ \qquad\qquad\quad -10 \quad \text{Rest}\end{array}$$

$$\text{Probe: } \left(x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)}\right)(x-1)=(x^3+3x^2-6x-8)$$

دا چي نوي بلدې يون کي د ناسمون سره مخامخ کيږي،غوره ده چي د دې ازماښنت هم وکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوموېش په کارونه کې که د پولینوموېش یوصفرځای څرگند وي، نو کیدی شي د پولینوم درجه په یوه وړه یا رکمه شي.

$x_1 = 2$ د پولینوم یو صفرځای دی.

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x-2) = \underbrace{x^2 + x - 3}_{\text{Restpolynom}}$$

$$\begin{array}{l} \underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\ \quad x^2 - 5x \\ \quad \underline{-\left(x^2 - 2x\right)} \\ \qquad -3x + 6 \\ \qquad \underline{-(-3x + 6)} \end{array}$$

د پاتې پولینوم صفرځایونه اوس کیدیشي د څلورئ یا مربع پولینوم

$$x^2 + x - 3 = 0$$

له لارې پیدا کړو.

د سمون ازماېشت یې وکړئ.

بیلګه: پولینوموېش او ازماېښت یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)=x^2+x-6$$

$$\underline{-\left(x^3+x^2\right)}$$

$$x^2-5x$$

$$\underline{-\left(x^2+x\right)}$$

$$-6x-6$$

$$\underline{-(-6x-6)}$$

$$\text{Prob e}:(x+1)\left(x^2+x-6\right)=x^3+x^2-6x+x^2+x-6=\underline{\underline{x^3+2x^2-5x-6}}$$

پوښتنې:

لاندې پولینوموېش مخ ته بوځئ

الف- $\left(x^3-3x^2-6x+8\right):(x+1)$ ب — $\left(2x^3-x^2-8x+4\right):\left(x^2-4\right)$

پ - $\left(2x^3-3x+1\right):(2x-1)$ ت - $\left(6a^6+a^4b+25b^3\right):\left(3a^2+5b\right)$

ټ - $\left(8x^5-6x^7+2x\right):2x^2$

ث - $\left(9a^5b^3-12a^3b^5\right):3a^3b^3$

ج - $\left(15a^9-8a^6b+8b^3\right):\left(3a^3+2b\right)$ ،

چ — $\left(14a^4-a^3+5a^2-3a+1\right):\left(7a^2-4a+1\right)$

ح — $\dfrac{3x^5y^{n+2}+3x^2y^{3n+2}-2x^{m+3}y^{n+3}-2x^my^{3n+3}}{x^3+y^{2n}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځ - $\frac{48a^{n+x}+56a^{x}b^{x}-72a^{n}b^{c}-84b^{x+c}}{12a^{n}+14b^{x}}$

څ - $\frac{8a^{2n+1}-10a^{2n}b+15a^{3n-2}b-12a^{3n-1}}{2a^{2n}-3a^{3n-2}}$

خ - $\frac{2a^{5}b^{x+2}-2a^{3}b^{x+5}+3a^{4}b^{2x-1}-3a^{2}b^{2x+2}}{a^{2}-b^{3}}$

پولینوم برابرون:

د یوه برابرون په کېڼ اوښي لور د x مختلف توانونه یو پولینوم برابرون ورکوي

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8$$

د داسېبرابرون د اوبی له پاره لومړیدا برابرون په داسي نامه صفربڼه اړوي. دا په دې مانا چې برابرون تر هغې په ورتهبڼه بدلوناړولکیږي، چې په ښیلور یواځې صفر پاتې شي.

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8\,|\,-3x^2$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x=-8\,|\,+8$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x+8=0$$

د صفربڼې یا- فورم په ځای د پولینوم دې بڼې ته هم نورمال بڼه وایي.
موږ د پولینوم پنځه بدیلونهراړوړو

لومړی بدیل:

په برابرون کې د اووښتونې x یو یواځنی توان مخ ته راځي.

$$ax^n+b=0 \Rightarrow x=\sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n ناجوړه وي،نوريښه وېښتوني کيدی شي کميز ګڼ هم وي.
د رېښي ټيک يو حل شتون لري.
که n جوړه وي، نوريښه نيونی(هغه ګڼ چېريښه يېښيول کيږي) يو اځې زياتيز ګڼ کيدی شي.
دوه اوبيونې شتون لري.
بيلګه:

$$
\begin{aligned}
&8x^3 + 27 = 0 \,|\, -27 \\
\Leftrightarrow\ &8x^3 = -27 \,|\, : 8 \\
\Leftrightarrow\ &x^3 = -\frac{27}{8} \,|\, \sqrt[3]{\ } \\
\Leftrightarrow\ &x = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2x^4 - 3 = 0 \,|\, +3 \\
\Leftrightarrow\ &2x^4 = 3 \,|\, : 2 \\
\Leftrightarrow\ &x^4 = \frac{3}{2} \,|\, \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\
\Leftrightarrow\ &x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107 \Rightarrow L = \left\{\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107\right\}
\end{aligned}
$$

په لومړي حالت کې n ناجوړه دې. ريښه نيوني کميزه هم کيدی شي
اويواځې يواوبی شتون لري.
په دويم حالت کې n جوړه دی، ريښه نيونی زياتيزدی.که کميزوي بيا برابرون اوبی نه لري.

دويم بديل:

پولينومبرابرون يوځلورىبرابرون (مربع مساوات) انځوروي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+px+q=0$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

دا د -p-q- – فرمول له لارې اوبی –یا حلکیري

بیلګه

$$x^2-13x+36=0 \quad p=-13 \quad q=36$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$=\left(\frac{13}{2}\right)^2-36=\frac{169}{4}-\frac{144}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9 \\ x_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow L=\{4;9\}$$

D د دېسکریمینانت له پاره لیکلکیږي چې هغې لرلو سره مخ دمخه سړی د اوبیونویا حلومو څومره وال یا ګڼون ټاکلی شي.

که صفر < D وي ، نو څلوری برابرون دوه اوبي یا حلونه لري

که صفر = D وي،نو برابرون یواځې یو ډبل اوبیلري

که صفر > D وي، نو برابرون اوبی نه لري په دې حالت کې نو سړی نور مخ ته نه ځي.

دریم بدیل

ولینومبرابرونیو دوه-څلوری برابرون biquadratische انځوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

د په ځا اېښووني يا سبستيچيوشن z د -p-q- فرمول په مرسته يا له لارې شميرل کيدی شي

پسې دې بيرته په ځايونه په څسبستيچيوشن وکارول شي او ريښه دې ونيل شي.

ريښه تيک د زياتيز - p-q-z -ارزښتونو له پاره نيول کيدی شي.

بیلګه:

$$\frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0$$

$$\text{Substitution: } z = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0 \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18\,;\ q = 81$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

$$z = -\frac{p}{2} = 9$$

$$\text{Rücksubstitution}$$

$$z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-3;3\}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې د يسکريمينانت صفر دئ، داسې چې د سبستيچيوشناووښتونې له پاره يو اوبې .(z = 9) شتون لري.
دا په دېمانا، چې د ۴ –مې درجې پولينوم ټيک دوه اوبې يا ځوابونه لري.

ځلورمبديل:
په پولينومبرابرون کې هغه همغه ارژښته يا مطلقه غړی نه لرو.

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow x\left(ax^2 + bx + c\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{2/3}$$

اووښتونې يا مجهوله x کيدی شي له نوکانو راووېستلشي.
اوبيونې د صفرځل يا – صرب له جملې شميرلکيدی شي (د فاکتورکولو تلنلار)،

بيلګه

$$\begin{aligned}
& x^3 + x^2 - 2x = 0 \\
& \Leftrightarrow x\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}} \\
& \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\
& \Rightarrow p = 1;\ q = -2 \\
& \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} \\
& \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \\
& \Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{array} \right. \\
& \Rightarrow \underline{\underline{L = \{-2; 0; 1\}}}
\end{aligned}$$

د صفر ځلوونې يا صريب دويم ځلوونی کيدی شي د p-q - فرمولسره سادهوشميرلشي.
د صفرځلوونې جمله: يوځل يا صرب ټيک هلته صفردئ، چې يو ځلوونی صفر ړي.

پنځم بديل:
پولينومبرابرون له بديلونو ۱ – ۴ په ځير نه دئ.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

په ډېرو حالتونوکېکيدی شي، د پوينوموېشله لارې اوبی وميندلشي.
د دې له پاره بايد يواوبی معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د پولینوم یواوبی معلوم وي،نو کیدی شید پولینوم درجه د وېش له لارېیه یوه کمه شي. که دا یو ځلوری برابرون راکړي،نو اوبیونه یېبیا ساده ه، چې نور اوبي پیدا کړو.
لاندې بیلګه چې اوبی $x = 2$ معلوم دی،د پولینوم تلنلار روښانه یا معلوموي.
پولینوموېش همغه په راته څرګنده لیکنیزدول لاس ته راوړو.
Division.
وېشنه

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x-2) = x^2 + x - 3$$
$$\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)}$$
$$x^2 - 5x$$
$$\underline{-\left(x^2 - 2x\right)}$$
$$-3x + 6$$
$$\underline{-(-3x + 6)}$$

د نوکانو(....) وېینه یا افاده اوس دا بڼه $x^2 + x - 3$ لري.
له دې د نورو شمیرنوځای په ځای کول لاسته راځي

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x - 3\right)(x-2) = 0$$

اوس دا ځلوری برابرون یا مربع مساوات $\left(x^2 + x - 3\right)$ د اوبیونې دي،چې د
p-q- فرمول له لارې سرته رسیږي.

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ 2;\ -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چيرې د ګومان يا ازماښت له لورې اوبی نه شي پيداکيدی، نوبيا د نومريک تلنلار څخه کار اخستلکيږي(دا به اوس زموږ دنده نه وي).

برابرونونو ته تمرينونه:

۱ - برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماښت يې سرت هورسوئ.

الف - $\frac{1}{5}x^3-25=0$ ب - $\frac{27}{10}x^3-\frac{4}{5}=0$ پ - $8x\left(x^2-1\right)=-8x+1$

۲ – برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماښت يې سرت هورسوئ.

الف - $27x^3-8=0$ ب – $\frac{1}{16}x^3-4=0$ پ- $-2+\frac{7}{8}x^3=-\frac{5}{2}x^3-1$

۳ - برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماښت يې سرت هورسوئ.

الف- $4k^2x^3-2k=0; k>0$ ب – $\frac{1}{4b}\left(x^3-b^3\right)=0; b>0$ پ - $(x+2a)^3=\frac{1}{8}$

۴ - برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماښت يې سرت هورسوئ.

$$\frac{k\cdot x^3}{4}-2k=0$$

۵ - ځانګړې باکترياګاني د ۴ ساعتونو په منځ کې خپل ګنو(تعداد) څلور برابره کوي.په يوه ساعت کې يې په سلوکې ډېروالی څومره دئ؟

۶ – د کال په پيل کې د موټروختارزښت نوی ټاکيبا کره کيږي. د يوه پنځه کلن زوړ کارشوې يوم،ترپلورونکی € 8500 ورکوي.

د موټر کلنی زيان به څومره (د وختارزښت د په سلو کې) وي، که سرې له دې، که سرس داسېمخ ته لاړ شي چې دا په لومړيوپنځه کلونوکې برابر جګ وي؟

۷ – برابرونونه اوبی –يا حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف - $\frac{1}{4}x^3 - 4x = 0$ ب- $3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0$ پ - $x^3 + x^2 - 2x = 0$

۸ – برابرونونه اوبیکړئ

الف- $4x\left(x^2 - x\right) = 7x^3 - 7x^2 - 6x$ ب- $\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 = 0$

پ --- $\frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0$

دا لاندې برابرونونه اوبي کړئ

الف- $x^3 + 4x^2 - 20x - 48 = 0$ ب - $-\frac{1}{2}x^3 + 4x = \frac{1}{2}x^2 - 4$

پ - $-2x^3 + 6x^2 - 4x = \frac{1}{2}x - 1$ ت- $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2}$

ټ - $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3 + 4x^2 - 2x\right) = \frac{3}{2}$

لاندې برابرونونه حل کړئ چې یو اوبی یا حل یېمعلوم وي

الف - $x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0;\ x_1 = -1$

د پولینوم وېش څخه کارواخلی.

-- د پولینوموېش څخه کار واخلئ

الف- $\left(4x^3 - 6x + \frac{5}{2}\right) : (2x - 1)$ ب - $\left(x^3 - 2kx^2 - 2x + 4k\right) : \left(x^2 - 2\right)$

۱۲ – برابرون $x^3 - 4x^2 + (k + 4)x - 2k = 0$ ورکړشوی. وښایئ، چې د $x_1 = 2$ لپاره برابرون یواوبی دی. د k د کوم ارزښت لهپاره ټیک یو ډبل اوبی شته؟

لاس ته راوړنه د کرښیزو ځلوونو یا صربیبونوپه څیر ولیکی.

پوښتنه:

a داسې وټاکئ، چې برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0
ټیک دوه اوبیونې یا حلونه ولري
یو د دریمې درجې برابرون دا دوه { 4- ; 2 } = L اوبیونې لري.
الف - د اوبیونو یا حلونوپه هکله وېناوې وکړی.
ب – دوه برابرونونه ددې اوبیونې ورکړی.
۳ – برابرونونه اوبیکړی
الف- $2x^3 - x^2 - x = 0$ ب - $x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$
۴ – برابرونونه اوبیکړی
الف- $-3x^3 + 5x^2 + 4 = 0$ ب- $x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{6}{5} = 0$
۵- برابرونونه اوبیا حلکړی
الف - $x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$
ب- $x^3 - 2,63x^2 - 1,45x + 3,08 = 0$
برابرونونه اوبی کړی
الف – $-u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2} = 0$ ب - $a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$
۷ – برابرونونه حل کړی
الف - $x^3 - \left(3 + \sqrt{3}\right)x^2 + 3\sqrt{3}x = 0$
ب- $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$ پ- $\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0$
ت - $\frac{4}{10}x^3 - \frac{6}{10} = 0$ ټ - $x^3 - 5x^2 + 6,25x = 0$
ث - $\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ج - $x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$
چ - $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ خ - $x^3 - 3x^2 = -4$
څ - $(3x - 5)\frac{(x - 2)^2}{5} = 0$

پوښتنې
۱ - برابرونونه د پسې حل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف – $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2=0$ ب $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0$

پ - $-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}=0$ ت - $\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{5}x^2-5x+15=0$

ټ- $2x^3-x^2-5x-2=0$ ث - $(3x-1)(x+k)^2=0$

۱ ــد x پسې یې اوبی کړی $(k\neq 0)$

الف - $\frac{1}{9k}\left(x^4+x^3-12x^2\right)=0$ ب - $\frac{k}{2}x^4-kx^3-\frac{3k}{2}x^2=0$

پ - $\frac{x^2}{5k^2}\left(x^2-3k\right)=0\,;\,k>0$ ت - $x^4-26x^2+25=0$

ټ – $-\frac{1}{2}x^4+3x^2-4=0$ ث - $\frac{1}{2}x^4-4x^2+2=0$

ج – $-\frac{1}{16}x^4+x^2-3=0$ چ - $\frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^2-3=0$

ح - $\frac{1}{3}x^4-2x^2+3=0$ خ - $x^4-11x^2+18=0$

پوښتنې

حلونه یا اوبیونې وټاکئ

الف – $\frac{1}{3}x^4-3x^3=0$ ب - $\frac{1}{7}x^4-7=0$ پ - $\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2+1=0$

ت- $-2x^4+x^2+x=0$ ټ - $\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{4}x^3-x=0$ ث - $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^2-3=0$

ج - $\frac{2}{5}\left(x^2-9\right)(x+2)^2=0$ چ - $\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x^2+x=0$ خ - $x^4-5x^2-2x=0$

ح - $x^4-6x^2+8=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس الګوریتم **Der Gauß- Algorithmus**

فکر دې وشي، چې دا برخه په یولسم ټولګي کې راشي. دلته یې راوړنه هم بده نه ده.

یادونه: خوارزمیة د Algorithmus عربي مانا ده : زما په اند دا الخوارزميّة دی، چې په لاتین کې ترې الګوریتموس جوړ شوی دی. الخواریزم د الګوریتم نومورکونکی، یوه شوروي پوست مارکې چې د الخواریزم د ۱۲۰۰ کلیزې جشن په هکله راوېستلې وه. الګوریتم د پرابلم یا د پرابلمونود ټولګي پا یوه یواځنۍ د اوبیونې تلنلار ړه. الګوریتم یوه نړیواله تلنلار ده د په خوښه کرښیز برابرونونو سیستم اوبیونې ته	

ننوتنبیلګې:

د کرښې ډول په توګه کار کوو. د لیکو له پاره اجازه شته : - بدلیدلی شي - د یوه ګڼ سره ځلیدلی شي. - په یوه ګڼ سره وېشلکیدی شي.	درې برابرونونه د درې اووښتونو یا واریابلو یا متحولو سره له بنه بدلون څخه لرو	$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12$ $-x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$ $-4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$ شمیرنځیره یا شیما داسې لیکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

- سره زياتيدی شي

- سره کم کړي

درځونه هم سره بدليدلی شي، که اووبنتوني يا واريابلي x ورسره واخستل شي.

د اوبيوني يا حل لاس ته راوړنه د بيرته په ښټ اينوونې له راې هم کيدی شي.

$$-14x_3 = -14$$
$$\Leftrightarrow x_3 = 1$$
$$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$$
$$\Leftrightarrow -11x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 0$$
$$7x_1 + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12$$
$$\Leftrightarrow 7x_1 = -7$$
$$\Leftrightarrow x_1 = -1$$

$$L = \{-1; 0; 1\}$$

ازماېښت: په لاندې کې د رښتيا له پاره ځاې په ځاې دي.

$$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$$
$$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$$
$$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$$

x_1	x_2	x_3	
7	3	−5	−12
−1	−2	4	5
−4	1	−3	1

x_1	x_2	x_3	
*	*	*	*
0	*	*	*
0	0	*	*

شميرنه داسې مخ ته بیايو: شننه يې بشي لور ته ده.

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	| ·4
−1	−2	4	5	| ·28
−4	1	−3	1	| ·7
28	12	−20	−48	
−28	−56	112	140	II + I
−28	7	−21	7	III + I
28	12	−20	−48	|: 4
0	−44	92	92	|: 4
0	19	−41	−41	
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	| ·19
0	19	−41	−41	| ·11
7	3	−5	−12	
0	−209	437	437	|: 19
0	209	−451	−451	III + II
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	
0	0	−14	−14	

د بيخي نويو له پاره يادونې:

د اوبيوني له پاره تلندول کيدی شي په کوچنيو پلونو توته شي.

۱ ـ د اصلي ماتلاندې سره د ليکي له لاړې ځل (ضرب) سره د د ماتونو مخه ونيسی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- په لومړۍ کربښه لومړی ګڼ باید زیاتیز وي(که نه، بیا کیدی شي د ـ۱ سره ځل شي)

۳- د ځل یا وېش له لارې وهڅېږي چې په لومړي درځ کي تېول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

په ۲ ـمه او ۳ ـمه لیکه کي دې لومړي ګڼونه کمیزوي.

۴- ۲ ـمې او ۳ ـمې لیکې هرې یوې ته دې لومړۍ لیکه ورزیاته شي. له دې سره په لومړي درځ کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۵- په۲ ـمه لیکه کې دې دویم ګڼ زیاتیز وي(که نه، نو د ـ۱ سره دې ځل شي)

۶ ـد ځل یاوېش له لارې په دې نیت کې شي، چې له ۲-مې لیکې په دویم درځ کې تېول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

۷ - و ۲ ـمېلیکې یا کربښې ته ۳ ـمه لیکه ورزیاته کړی. له دې سره په ۳-مه لیکه کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۸ - لاس ته راوړی د اوبی یا حل په څټ لور کیږدی.

برابر پرمختګډول کیدی شي د هغو سیستمونو له پاره هم وکارول شي، چې له دریو زیات برابرونونه شتون ولري:

بڼه بدلونونه کړی شي سړی بل ډول هم مخ ته بوځي.دا چې ،، ځنګه،، دا یواځې د شمیرپوهانو مهارت ته پرېږدو. د زیاتو تمرینونوله لارې سړی یوه غوره لار پیدا کوي. د شونتیا پورې دې د ماتونومخه دې ونیولشي، چې د نا اړینې تیرونې مخه نیول شوي وي. که سړی ورته تازه وي، کیدی شي ډېر بڼه بدلونونه په یوه وخت جوړ کړي، له دېلارې لیکنه کیږي، خود ناسمون شونتیا زیاتیږي؟

د په څټ اینوولو له لارې د اوبي یا حل لاس ته راوړنه	لانې الماني:سره بدل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

tausche: ⇄

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	
−1	−2	4	5	$I\cdot(-1)$ I ⇄ II
−4	1	−3	1	
1	2	−4	−5	
7	3	−5	−12	II - 7·I
−4	1	−3	1	III + 4·I
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	$\cdot 9$
0	9	-19	-19	$\cdot 11$
1	2	−4	−5	
0	−99	207	207	$: 9$
0	99	−209	−209	III + II
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	
0	0	-2	-2	

$-2x_3 = -2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$

$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$

$\Leftrightarrow -11y = 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$

$x_1 + 2\cdot 0 - 4\cdot 1 = -5$

$\Leftrightarrow x_1 = -7$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$

$L = \{-1; 0; 1\}$

ازمايښت:

$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12$ (w)

$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5$ (w)

$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1$ (w)

بیلګه ۱ :(ساده یا اسانه)

د په ځنې اینوولو له لارې د اوبییا حل لاس ته راوړنه

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8$$
$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4$$
$$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1$$

x_1	x_2	x_3		
2	−3	4	8	$\cdot 6$
3	4	−5	−4	$\cdot 4$
4	−6	3	1	$\cdot 3$
12	−18	24	48	$: 6$
12	16	−20	−16	II - I
12	−18	9	3	III - I
2	-3	4	8	
0	34	-44	-64	
0	0	-15	-45	

$-15x_3 = -45$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 3}}$

$34x_2 - 44\cdot 3 = -64$

$\Leftrightarrow 34x_2 = 68$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 2}}$

$2x_1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8$

$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 1}}$

$L = \{1; 2; 3\}$

Probe:

$2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8$ (w)

$3\cdot 1 + 4\cdot 2 - 5\cdot 3 = -4$ (w)

$4\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot 3 = 1$ (w)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ (منځنۍ سخته)

د په ښتېڼ اینوولو له لارې د اوبې یا حل لاس ته راوړنه

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$$
$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$$
$$8x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 13$$

x_1	x_2	x_3		
3	2	−4	−2	$\vert \cdot 8$
4	−5	3	9	$\vert \cdot 6$
8	7	−9	13	$\vert \cdot 3$
24	16	−32	−16	$\vert : 8$
24	−30	18	54	II - I
24	21	−27	39	III - I
3	2	-4	-2	
0	-46	50	70	$\vert :2$ II $\rightleftarrows$ III
0	5	5	55	$\vert :5$
3	2	-4	-2	
0	1	1	11	$\vert \cdot 23$
0	-23	25	35	
3	2	−4	−2	
0	23	23	253	$\vert : 23$
0	−23	25	35	III + II
3	2	−4	−2	
0	1	1	11	
0	0	48	288	

$$48x_3 = 288$$
$$\Leftrightarrow x_3 = 6$$
$$x_2 + 1 \cdot 6 = 11$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 5$$
$$3x_1 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = -2$$
$$\Leftrightarrow 3x_1 = 12$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 4$$

$$L = \{4; 5; 6\}$$

ازماېښت:

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = -2 \quad (w)$$
$$4 \cdot 4 - 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 9 \quad (w)$$
$$8 \cdot 4 + 7 \cdot 5 - 9 \cdot 6 = 13 \quad (w)$$

بیلګه ۳ : (سخته): لاندې درې برابرونونه غواړو اوبې کړو

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{8}x_3 = 4$$
$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 23$$
$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_1	x_2	x_3		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	4	$\mid \cdot 40$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	23	$\mid \cdot 40$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	$\mid \cdot 20$
20	−32	15	160	$\mid \cdot 12$
30	15	8	920	$\mid \cdot 8$
16	−10	5	160	$\mid \cdot 15$
240	−384	180	1920	$\mid : 12$
240	120	64	7360	II - I
240	−150	75	2400	III - I
20	−32	15	160	
0	504	−116	5440	$\mid : 4$
0	234	−105	480	$\mid : 3$
20	−32	15	160	
0	126	−29	1360	$\mid \cdot 13$
0	78	−35	160	$\mid \cdot 21$
20	−32	15	160	
0	1638	−377	17680	$\mid : 13$
0	1638	−735	3360	III - II
20	-32	15	160	
0	126	-29	1360	
0	0	-358	-14320	

د په څټ اینوولو له لارې حل لاس ته راوړنه

$$-358x_3 = -14320$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 40}}$$
$$126x_2 - 29 \cdot 40 = 1360$$
$$\Leftrightarrow 126x_2 = 2520$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 20}}$$
$$20x_1 - 32 \cdot 20 + 15 \cdot 40 = 160$$
$$\Leftrightarrow 20x_1 = 200$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 10}}$$
$$L = \{10 ; 20 ; 40\}$$

ازمايښت:

$$\frac{1}{2} \cdot 10 - \frac{4}{5} \cdot 20 + \frac{3}{8} \cdot 40 = 4$$
$$\Leftrightarrow 5 - 16 + 15 = 4 (w)$$
$$\frac{3}{4} \cdot 10 + \frac{3}{8} \cdot 20 + \frac{1}{5} \cdot 40 = 23$$
$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 8 = 23 (w)$$
$$\frac{4}{5} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{4} \cdot 40 = 8$$
$$\Leftrightarrow 8 - 10 + 10 = 8 (w)$$

د کاروني یا استعمال بیلګی

د ټولراشنل فنکشن د فنکشن برابرون د شمیرلو له لارې، چې څلور ټکي یې معلوم دي،

د ګاوس الګوریتم کارونه یا استعمال

د کاروني بیلګه۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{aligned}
P_1(1|4) \Rightarrow \quad & f(1) &=\; & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 &=\; & 4 \\
P_2(2|2) \Rightarrow \quad & f(2) &=\; & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 &=\; & 2 \\
P_3(4|4) \Rightarrow \quad & f(4) &=\; & 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 &=\; & 4 \\
P_4(5|20) \Rightarrow \quad & f(5) &=\; & 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 &=\; & 20
\end{aligned}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	4	
1	2	4	8	2	II − I
1	4	16	64	4	III − I
1	5	25	125	20	IV − I
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	3	15	63	0	III − 3·II
0	4	24	124	16	IV − 4·II
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	12	96	24	IV − 2·III
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	0	12	12	

$\Rightarrow$

$$12a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$\begin{aligned}
& 6a_2 + 42a_3 = 6 \\
& \Leftrightarrow 6a_2 + 42 = 6 \,|\, -42 \\
& \Leftrightarrow 6a_2 = -36 \,|:6 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2 \\
& \Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2 \\
& \Leftrightarrow a_1 - 11 = -2 \,|\, +11 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4 \\
& \Leftrightarrow a_0 + 9 - 6 + 1 = 4 \\
& \Leftrightarrow a_0 + 4 = 4 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}}$$

د کارونپيلکه ۲

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{aligned}
P_1\left(1\,\middle|\, -\frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad & f(1) &=\; & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 &=\; & -\frac{11}{2} \\
P_2\left(-1\,\middle|\, \frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad & f(-1) &=\; & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 &=\; & \frac{9}{2} \\
P_3(-2|8) \Rightarrow \quad & f(-2) &=\; & -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 &=\; & 8 \\
P_4\left(-3\,\middle|\, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad & f(-3) &=\; & -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 &=\; & \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{11}{2}$	$\vert\cdot 2$
1	−1	1	−1	$\frac{9}{2}$	$\vert\cdot 2$
1	−2	4	−8	8	$\vert\cdot 2$
1	−3	9	−27	$\frac{5}{2}$	$\vert\cdot 2$
2	2	2	2	−11	
2	−2	2	−2	9	II − I
2	−4	8	−16	16	III − I
2	−6	18	−54	5	IV − I
2	2	2	2	−11	
0	−4	0	−4	20	$\vert:(-2)$
0	−6	6	−18	27	$\vert:3$
0	−8	16	−56	16	$\vert:4$
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	−2	2	−6	9	III + II
0	−2	4	−14	4	IV + II
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	4	−12	−6	IV − 2·III
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	0	−4	−4	

$\Rightarrow$

$$-4a_3 = -4 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 4a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 - 4 = -1 \,|\, +4$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = 3 \,|:2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 2a_3 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 2 = -10 \,|\, -2$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = -12 \,|:2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -11$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 + 3 + 2 = -11$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 7 = -11 \,|\, +7$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = -4 \,|:2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2}}$$

د کاروني بيلګه ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|-16) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -16$$

$$P_2(2|11) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 11$$

$$P_3(4|-11) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = -11$$

$$P_4(6|-9) \Rightarrow \quad f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	−16	
1	2	4	8	11	II − I
1	4	16	64	−11	III − I
1	6	36	216	−9	IV − I
1	−1	1	−1	−16	
0	3	3	9	27	|: 3
0	5	15	65	5	|: 5
0	7	35	217	7	|: 7
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	1	3	13	1	III − II
0	1	5	31	1	IV − II
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	4	28	−8	IV − 2·III
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	0	8	8	

$\Rightarrow$

$$8a_3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 10a_3 = -8$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 10 = -8 \mid -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -18 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -9}$$

$$a_1 + a_2 + 3a_3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 9 + 3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 6 = 9 \mid +6 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 15}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 15 - 9 - 1 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 25 = -16 \mid +25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 9}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9}}$$

د کاروني بيلګه۴ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llcll} P_1(-1|7) \Rightarrow & f(-1) & = & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 & = 7 \\ P_2(-2|6) \Rightarrow & f(-2) & = & -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 & = 6 \\ P_3(3|1) \Rightarrow & f(3) & = & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 & = 1 \\ P_4(-3|-2) \Rightarrow & f(-3) & = & -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 & = -2 \end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4·II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2·II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

$\Rightarrow$

$$20a_2 = -10 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$$

$$2a_2 - 12a_3 = -7$$

$$\Leftrightarrow -1 - 12a_3 = -7 \mid +1$$

$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \mid : (-12) \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$$

$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \mid +5$$

$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \mid : (-1) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \mid -3 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 4}$$

Die Funktionsgleichung: $$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

د پررته المانیژباړه:د خیروني یا تابع برابرون

د کاروني بیلګه ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(2|22) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 22$

$P_2(4|44) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 44$

$P_3(-4|4) \Rightarrow \quad f(-4) = -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 4$

$P_4(8|40) \Rightarrow \quad f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = 40$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	22	
1	4	16	64	44	II − I
1	−4	16	−64	4	III − I
1	8	64	512	40	IV − I
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	−6	12	−72	−18	III + 3·II
0	6	60	504	18	IV − 3·II
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	24	336	−48	$IV - \frac{1}{2}\cdot III$
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	0	288	−72	

$\Rightarrow$

$288a_3 = -72 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$

$48a_2 + 96a_3 = 48$

$\Leftrightarrow 48a_2 - 24 = 48 \,|\, +24$

$\Leftrightarrow 48a_2 = 72 \,|: 48 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$

$2a_1 + 12a_2 + 56a_3 = 22$

$\Leftrightarrow 2a_1 + 18 - 14 = 22$

$\Leftrightarrow 2a_1 + 4 = 22 \,|\, -4$

$\Leftrightarrow 2a_1 = 18 \,|: 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$

$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 22$

$\Leftrightarrow a_0 + 18 + 6 - 2 = 22$

$\Leftrightarrow a_0 + 22 = 22 \,|\, -22 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$

Die Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x$

د پړرته المانیژباړه:د څیرونبیا تابع برابرون

د کاروني بيلکه۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|0) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 0$$
$$P_2(-1|-2) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -2$$
$$P_3(2|16) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 16$$
$$P_4(-3|-4) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -4$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	0	
1	−1	1	−1	−2	II − I
1	2	4	8	16	III − I
1	−3	9	−27	−4	IV − I
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	1	3	7	16	$III + \frac{1}{2}\cdot II$
0	−4	8	−28	−4	
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	3	6	15	|: 3
0	0	8	−24	1	|: 8
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	1	−3	0	IV − III
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	0	−5	−5	

$$-5a_3 = -5 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$a_2 + 2a_3 = 5$$
$$\Leftrightarrow a_2 + 2 = 5 \mid -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 3}$$

$$\Rightarrow \quad -2a_1 - 2a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -2 \mid +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 0 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 - 4}}$$

د کاروني بیلګه ۷ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|1) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 1$$
$$P_2(2|0) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$
$$P_3(-2|4) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(3|9) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	1	
1	2	4	8	0	II − I
1	−2	4	−8	4	III − I
1	3	9	27	9	IV − I
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	−3	3	−9	3	III + 3·II
0	2	8	26	8	IV − 2·II
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	2	12	10	$IV - \frac{1}{6} \cdot III$
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	0	10	10	

$\Rightarrow$

$$10a_3 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$12a_2 + 12a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 + 12 = 0 \mid -12$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 = -12 \mid :12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 3 + 7 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 4 = -1 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 - 1 + 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 = 1 \mid +5 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6}}$$

د کارونې بیلګه ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2} \middle| \frac{45}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + 1a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_4\left(-\frac{3}{2} \middle| -\frac{77}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}a_3 + \frac{9}{4}a_2 - \frac{3}{2}a_1 + 1a_0 = -\frac{77}{8}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
1	3	9	27	−4	
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{45}{8}$	$\mid\cdot 8$
1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{77}{8}$	$\mid\cdot 8$
1	1	1	1	6	
2	3	9	27	−4	II − I
8	−4	2	−1	45	III − 8·I
8	−12	18	−27	−77	IV − 8·I
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	−12	−6	−9	−3	III + 6·II
0	−20	10	−35	−125	IV + 10·II
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	42	147	−63	|: 21
0	0	90	225	−225	|: 45
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	2	5	−5	IV − III
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	0	−2	−2	

$\Rightarrow$

$$-2a_3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 7a_3 = -3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \mid -7$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$$

$$2a_1 + 8a_2 + 26a_3 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 40 + 26 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 14 = -10 \mid +14$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 2 = 6 \mid +2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کارونې یا استعمال بیلګه۹ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \mid -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{9}{2}$$

$$P_2\left(-1 \mid \frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{11}{2}$$

$$P_3\left(3 \mid -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -\frac{5}{2}$$

$$P_4\left(-\frac{5}{2} \mid -8\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8}a_3 + \frac{25}{4}a_2 - \frac{5}{2}a_1 + 1a_0 = -8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{9}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	−1	1	−1	$\frac{11}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	3	9	27	$-\frac{5}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$-\frac{125}{8}$	−8	$\mid \cdot 8$

$$-11a_3 = -11 \mid : (-11)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

8	8	8	8	−36	
8	−8	8	−8	44	II − I
8	24	72	216	−20	III − I
8	−20	50	−125	−64	IV − I
8	8	8	8	−36	|: 4
0	−16	0	−16	80	|: 4
0	16	64	208	16	|: 4
0	−28	42	−133	−28	|: 7
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	4	16	52	4	III + II
0	−4	6	−19	−4	IV − II
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	0	16	48	24	|: 8
0	0	6	−15	−24	|: 3

$\Rightarrow$

$$2a_2 + 6a_3 = 3$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 3 \mid -6$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = -3 \mid : 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$$

$$-4a_1 - 4a_3 = 20$$

$$\Leftrightarrow -4a_1 - 4 = 20 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow -4a_1 = 24 \mid : (-4)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -9$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 - 3 + 2 = -9$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 - 13 = -9 \mid +13$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 = 4 \mid : 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کارونې یا استعمال بیلګه ۱۰ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llcll}
P_1(1|25) \Rightarrow & f(1) & = & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 & = 25 \\
P_2(-1|-49) \Rightarrow & f(-1) & = & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 & = -49 \\
P_3(3|27) \Rightarrow & f(3) & = & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 & = 27 \\
P_4(5|5) \Rightarrow & f(5) & = & 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 & = 5
\end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	25	
1	−1	1	−1	−49	II − I
1	3	9	27	27	III − I
1	5	25	125	5	IV − I
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	2	8	26	2	III + II
0	4	24	124	−20	IV + 2·II
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	24	120	−168	IV − 3·III
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	0	48	48	

$\Rightarrow$

$$48a_3 = 48 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$8a_2 + 24a_3 = -72$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 + 24 = -72 \,|\, -24$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 = 96 \,|: 8 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -12}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -74$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -74 \,|\, +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = -72 \,|: (-2) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 36}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 36 - 12 + 1 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 25 = 25 \,|\, -25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x}}$$

پوښتنې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 0x_3 = 28 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 30 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 32 \end{array} \right| \Rightarrow L = \{13 ; 15 ; 17\}$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 12 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 11 \\ 0x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{array} \right| \Rightarrow L = \{3 ; 2 ; 1\}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{array} \right| \Rightarrow L = \{15 ; 12 ; 10\}$$

$$\left| \begin{array}{l} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{array} \right| \Rightarrow L = \{-1 ; 3 ; 2,5\}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 23 \end{array} \right| \Rightarrow L = \{5 ; 3 ; 1\}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 20 \end{array} \right| \Rightarrow L = \{5 ; 3 ; 1\}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -21 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -6 & 2 & -21 \end{array} \Rightarrow L = \{1 ; -1 ; 2 ; -1\}$$

$$\left| \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ x_4 = 5 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow L = \{-1 ; -1 ; 0 ; 5\}$$

د لاس ته راوړنې د کنترل له پاره دې ازمايښت وشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هورنر- شیما Das Horner – Schema

د دي له پاره چې د جګودرجو ټولراشنلځیرونو یا که غواړۍ توابعو ګراف وکښلای شو، باید یو ارزښت جدول برابرکړو. دا به ډېر وخت اوځای ونیسي، چې د دې له پاره اړین ځیره ارزښتونه یا فنکشنارزښتونه وشمیرو.

د هورنر – شیما دا شمیرنې ډېرې ساده کوي.

بیلګه : دریمه درجه ټولراشنل فنکشن یا راشنل ځیرونه

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

د x د ډېرځله نوکانو بندولو له لاربېمنځ ته راځي:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x\left[a_3x^2 + a_2x + a_1\right] + a_0 = \underbrace{x\underbrace{\left[x\left(\underbrace{a_3x + a_2}_{e_2}\right) + a_1\right]}_{e_4} + a_0}_{E}$$

که سړی غواړي چې د $x = x_1$ له پاره فنکشن ارزښت وشمیري، نوکی دی شي سړی په لاندې ډول له دننه دباندې لورته مخ ته لاړ شي:

-- ګرد نوکان وشمیري

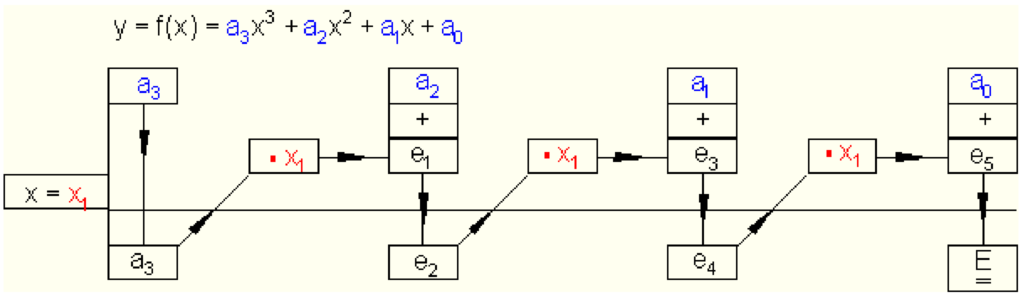
--منځ لاس ته راوړنه (ښه لیکنه به یې داسې وي: منځلاس –ته-راوړنه) د x_1 سره ځل کړي او a_1 ته یې ور زیات کړي

--لاس ته راوړنه د x_1 سره ځل کړي او a_0 ته یې ور زیات کړو

دا شمیرنکارونې یا که غواړۍ شمیرنعملیې کیدی شي ځیره ډوله یا شیماتیکي داسې انځور کړو:

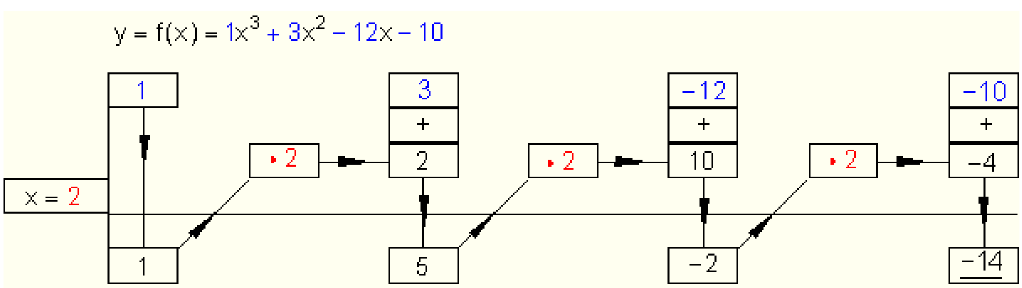
(c) ketabton.com: The Digital Library

Allgemeines Schema: تولیزه بنه



بیلګه : $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x - 10$

د $x = 2$ له پاره دې د $y = f(2)$ ارزښت د هورنر – شیما له لارې وشمیرل شي.



نولاس ته راځي یا باورلری: $y = f(2) = \underline{-14}$

د یوه دریمي درجي پولینوم له پاره- چې غواړو ګراف يې رسم کړو یا کاږو- باید یو ارزښتجدول جوړکړو.

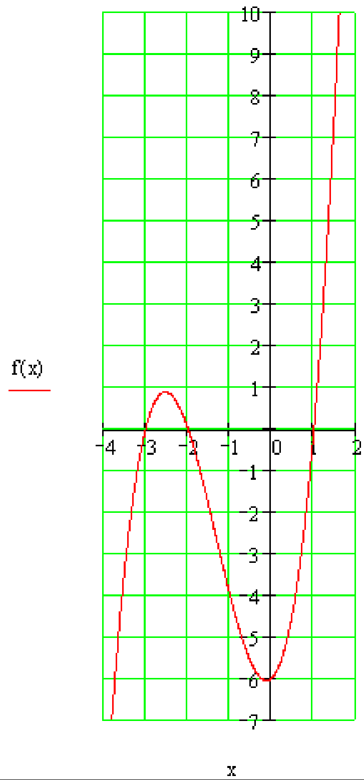
$y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad D_f = \{x \mid -4 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

$a_3 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	1	4	1	−6	
x = −4		−4	0	−4	
	1	0	1	−10	= f(−4)
	1	4	1	−6	
x = −3		−3	−3	+6	
	1	1	−2	0	= f(−3)
	1	4	1	−6	
x = −2		−2	−4	+6	
	1	2	−3	0	= f(−2)
	1	4	1	−6	
x = −1		−1	−3	+2	
	1	3	−2	−4	= f(−1)
	1	4	1	−6	
x = 1		+1	+5	+6	
	1	5	6	0	= f(1)
	1	4	1	−6	
x = 2		+2	+12	+26	
	1	6	13	20	= f(2)
	1	4	1	−6	
x = 3		+3	+21	+66	
	1	7	22	60	= f(3)
	1	4	1	−6	
x = −2,5		−2,5	−3,75	+6,875	
	1	1,5	−2,75	0,875	= f(−2,5)

(c) ketabton.com: The Digital Library



ارزښتجدول؛

x	−4	−3	−2,5	−2	−1
f(x)	−10	0	0,875	0	−4
x	0	1	2	3	
f(x)	−6	0	20	60	

د لښتي- يا جدولارزښت سره کيدی شی په نږدې توګه ګراف وکښل شي.

که د ګراف کښلو کې ځرګنده شي،چې يوبل ځای هم پاتې دی،دا کيدی شي هر وخت د هورنرشيما په مرسته پيدا شي.

ګراف په لاندې x – ځايونوکې صفر ارزښتونه لري: -3; -2;1

دا y – محور په -6 کې غوڅوي.

که په کښلوکې ځرګنده شي چې يوبل ځای هم پاتې دی، نو دا کيدی شي د هونرشيما په مرسته پيدا کړو،د بيلګېپه توګه(0,5) f

	1	4	1	−6	
x = 0,5		+0,5	+2,25	+1,624	
	1	4,5	3,25	−4,375	= f(0,5)

د پولينوم وېشني پر ځای کيدی شي د تولراشنل تابع درجه د هورنر شيما له لارې هم کمه شي.

موږ د هورنر شيما څېړو:

موږ بيرته تابع ترخيرنی لاندی نيسو

$$f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چیرته چي $x1=2$ یو صفرځای دی.

د $f(x)=x^3-x^2-5x+6$ لپاره د هورن شیما د $x1=2$ سره

موخه د ضریب (x-2) له نوکانو وتنه ده. $\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -5 & 6 \\ x=2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{2} & \underline{-6} \\ & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$	په دریمه لیکه کې درې عددونه د ویش نتیجو لپاره هم د پاتي پولینوم ضریبونه بللکیږي. $f(x) = \underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(1\cdot x^2 + 1\cdot x - 3)}_{\text{Restpolynom}}$ کربنیز ضریب پاتي پولینوم

د $f(x)$ د نورو صفرځایونو لپاره د پاتي یا باقي پولینوم صفرځایونه شمیرو. دا د اړونده مربع مساوات د حل له لاري کیږي.

نتیجه یې د لاندې پولینوم ویش بیلګې سره وګورۍ.

بیلګه: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x - 4$ چیرته چي $x_1 = -2$ یو صفرځای دی.

$\begin{array}{c|cccc} & \frac{1}{4} & 1 & -1 & -4 \\ x=-2 & \downarrow & -\frac{1}{2} & -1 & 4 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{array}$	باقي یا پاتي پولینوم: $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ $f(x) = (x+2)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right)$ د مربع مساوت حل $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$ له دې لاس ته راځي او معکوس: $x2=2$ او $x3=-4$

بیلګه:

$f(x) = -x^3 + 7x - 6 = -x^3 + 0\cdot x^2 + 7x - 6$ چیرته چي $x_1 = 1$ یو صفرځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 7 & -6 \\ x=1 & \downarrow & -1 & -1 & 6 \\ \hline & -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}$	باقي پولينوم: -1.x-1.x+6 $f(x)=(x-1)(.x^2-x+6)$ د مربعيز مساوات حل: $.x^2-x+6$له دي لاس تره اوپه ځت يا برعكس $x2=2$ او$x3=-3$

لکه بيلګه چې ښايي، د هورن شيما سره د پاتې پولينوم ټاکنه ساده ده نسبت د پولينوم وېش ته.

دا ټولې پورته تلنلارې مو د مربع مساوات حل ته لاربښودوي. که دا ونه توانيږو، نو د نومريکې تلنلارو څخه کار اخستل کيږي، چې دا دلته نه څېړل کيږي.

تمرينونه: د پولينوم وېش...

د لندې ترمونو لپاره د پولينوم وېش وکاروی:

لومړی - $\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)$ دېم - $\left(2x^3-14x-12\right):(x-3)$

درېم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-7)$ څلورم - $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+6\right):(x+2)$

پنځم - $\left(x^3+\frac{11}{2}x^2+5x-4\right):(x+2)$ شپږم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x-2)$

اوم - $\left(x^3-\frac{5}{4}x^2-\frac{23}{4}x+\frac{3}{2}\right):(x-3)$ اتم - $\left(x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{47}{3}x-5\right):(x+3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x+3)$ لسم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-1)$

تمرینونه: د ټول راشنل توابعو صفرځایونه.

تمرین ټولراشنل تابع **IV**

د صفرځایونو ټاکنه له مختلفو لارو څخه.

د یوه تاسو ته مناسب قانو له مخې د ټولراشنل توابعو صفرځایونه وټاکئ. د x محور سره د ګراف غوڅټکي و ټاکي او د تابع مساوات د کرښیزو ضریبونو د ضرب په څیر انځور کړئ.

اول - $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{13}{2}x^2+18$ دویم - $f(x)=x^3-4x^2+x+6$

دریم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$ څلورم - $f(x)=-\frac{3}{2}x^4+\frac{75}{2}x^2-216$

پنځم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+3$ شپږم - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x$

اوم - $f(x)=3x^4-3$ اتم - $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2$

نهم - $f(x)=2x^3-4x^2-16x$ لسم - $f(x)=2x^3+4x^2-26x+20$

پوښتنې

د ټول هوښیار یا راشنل توابعو محورغوڅټکي ګرافونه

صفرځایونه وشمیرئ او ګرافونه وکاږئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x)=x^4+2x^3+x^2$ ب - $f(x)=x^2-6x+9$

پ - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(\frac{1}{2}x+4\right)$ ت - $f(x)=x^6-x^4$

ټ - $f(x)=3x\left(\frac{2}{3}x-2\right)(-2x+3)$ ث - $f(x)=3\left(x^2+4\right)\left(x^2-4x+10\right)$

دويم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=4x^4+6x^2-\frac{7}{4}$ پ - $f(x)=x^6-8x^4+20x^2$

دريم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x)=2x^3+4x^2-2x-4$ ب - $f(x)=x^3-12x+16$

پ - $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ ت - $f(x)=2x^3-10x^2-4x+20$

ټ - $f(x)=x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}$ ث - $f(x)=-3x^3+3x^2-3x+3$

ج - $f(x)=-5x^3-10x^2-\frac{5}{2}x-5$ چ - $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+9x+6$

څلورم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x)=-3x^4+15x^2-12$ ب - $f(x)=x^4-x^3-2x^2$

پ - $f(x)=-2x^3+2x^2+16x-24$ ت - $f(x)=\left(x^2-6x+9\right)(x-4)$

ټ - $f(x)=x^6-3x^4-4x^2$ ث - $f(x)=x^4-25x^2-60x-36$

پنځم: د لاندې ټولراشنل توبعو ګرافونه په يوه مناسب پروتولاړ يا کواودينات سيتم کې وکاږئ. د دې لپاره يو ارزښت جدول واچوئ او محور غوڅټکي وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x)=x^3-6x^2+9x \quad D_f=\{x\,|\,-0,5\le x\le 4,5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2 \quad D_f=\{x\,|\,-3,5\le x\le 2,5\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x)=x^3-6x^2+9x-2 \quad D_f=\{x\,|\,-0,2\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \quad D_f=\{x\,|\,-3\le x\le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ټ - $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2 \quad D_f=\{x\,|\,-2,5\le x\le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ث - ج - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x \quad D_f=\{x\,|\,-0,2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

شپږم: د لاندې توابعو صفرځایونه وټاکئ او ګراف یې تر شونې پولې پورې ښه وکاږئ. ارزښتجدول کیږدئ او ځنې ارزښتونه د جبشمیري سره وشمیرئ. ځنې صفرځایونه اټکل کړئ او که شوني وي، صفرځایونه وشمیرئ.

الف- $f(x)=x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{10}{3}x-1$ ب - $f(x)=0,01\left(x^3-x^2-x+1\right)$

پ - $f(x)=0,1x^3-0,3x^2-9x-10$ ت - $f(x)=(x-1,7)\left(x^2-3\right)$

تر ۶۴۰ پورې دلته محورغوځتکیراځي؟

اړیکي "Relation":

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه اړیکۀ له دوه شیانو جوړه ده:

۱ – یوه وینابنه

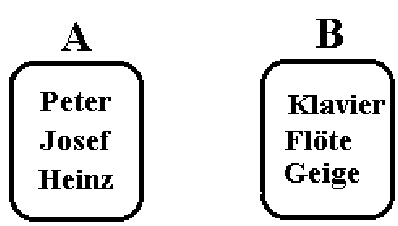
۲ – جوړه، چې دا وینا یې پوره کوي(چې وینابنه یوه رښتیا وینا کوي)۰

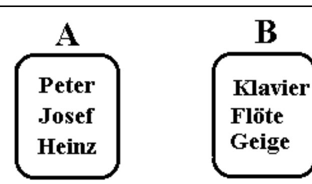
بیلګه :

دیوې کورنۍ د غړو ډیرۍ A دې ورکړ شوې وي او B د لوبو یا موزیک الو ډیرۍ۰

B	A
فوتبال	سپین
هاکي	
زیرګل	
والبال	
کوچۍ	

یا دا لاندې



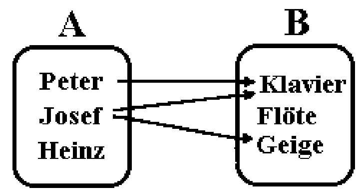
موزیک الي		د کسانونومونه:
پیانو شپیلی ګایګي		پتر یوسف هاینخ

د دواړو ډیریو په منځ کې یوه بینار وینابنه دې یوه وینابنه وي، چې سرې a الهbاندې لوبې کوي۰

جوړه ، چې وینابنه پوره کوي، کیدی شي د بیلګی په توګه لاندې جوړې وي:

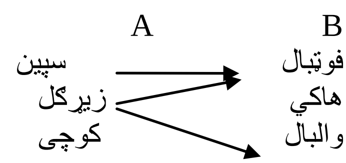
(c) ketabton.com: The Digital Library

پتر په کلاویر لوبه کوي، یوسف په کلاویر لوبه کوي ، یوسف په ګایګي لوبه کوي، د ځیرې په توګه اړیکي داسي انځوریږي:



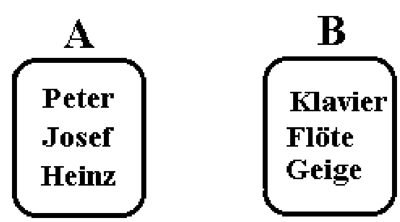
a spielt das Instrument b

یا دا لاندې



نورې بیلګې

موږ د مخه دا لاندې ډیرې منځ ته ر اوړې:

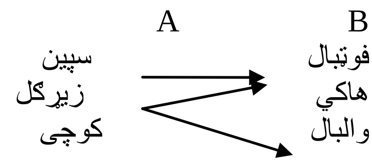


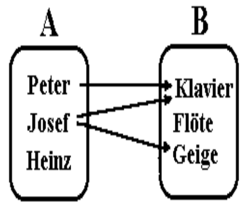
د دواړو ډیریو په منځ کې د اړیکو په ځیر موږ اړیکې «په اله لوبه کوي» راوړې یا دا لاندې

فوټبال هاکي والبال	سپین زېړګل کوچی

(c) ketabton.com: The Digital Library

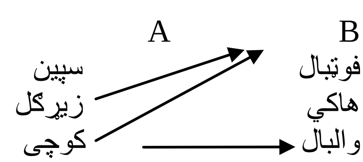
سرلیک

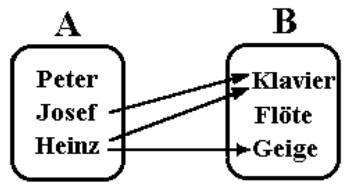




a spielt das Instrument b

په پورته کې ښوول کیږي، چې څوک په کومه اله لوبه کوي.
موږ اوس دواړه ډیرئ A او B ساتو ، مګر د دوي ترمنځ نوې اړیکې غواړو وپیژنو یا تعریف کړو:
بینار اړیکې دې اوس داسې وي، چې « اله لري» او « په اله باندې لوبه کوي» نور نهوي٠
د دې برسیره دې اړیکې « اله لري » لاندې درې جوړې ولرى :
هاینځ کلاویر لري
هاینځ یوه ګایګې لري
یوسف یوه کلاویر لري
د ځیرې په ځیر انځور یږي:





a besitzt das Instrument b

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدلکیږي، چې د دوه ډیریو په منځ کې مختلفې اړیکې منځ ته راتللی شي یا ټینګیدلی شي.

شننیزه انځورونه
مخ ته تیرو مخونوکې مو زده کړل، یوې اړیکې پورې دوه شیان اړه لري: یوه وینا بنه او یوه جوړه، چې دا وینابنه پوره کوي.
کله اړیین نه دي یا نه شي کیدی، چې ټولې جوړې ورکړای شو، کومې چې په یوه اړیکې پورې اړه لري.

بیلګه ۱
ډیری $A = \{ 1,2,3\}$ او ډیری $B=\{1,2,3\}$ دې ورکړ شوي وي. وینابنه کوچنی له یا لنډ >

هر زده کوونکی پوهیږي، چې جوړې $(1/2),(1/3)$ او $(2/3)$ دا وینابنه پوره کوي.
جوړو ګڼلو ته اړنه یو، بلکې دا د وینابنې مخ ته پرتې ډیری A او B ته.

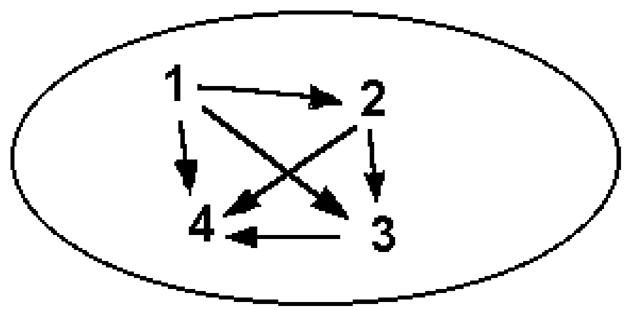
بیلګه ۲
په ځانګړې توګه دا هلته له پامه غورځول کیږي، چې ټولې جوړې وشمیرې، کله چې وینابنو ته مخ ته پرتې ډیری یا ډیرې لویې وي او یا ناپای.
بیلګه : ډیری : $A = B = \{1, 2, 3, \ldots\}$
وینابنه: له هغې، چې لیدل کیږي، چې بیخي ناشوني ده، چې ټولې جوړې وشمیرل شي، چې دا وینابنه پوره کوي.

بیلګه ۳
کله کله اړیکه بیخي نه شي انځوریدلی.
بیلګه : ډیری نارینه =M او ښځینه =F وینابنه کې راوستل شي، چه « واده له سره ».
دا څوک نه شي ګڼلی، چې څوک له چا سره واده دی او دا نه په برخه اخستونکو ډیریو M او F کې ورکړ شوې.

د یوې اړیکې تیوپ یا ډول
اړیکه په دوه ګروپونو ویشل کیدی شي.
۱ – ددوه ډیریو ترمنځ اړیکې
۲ – د یوې ډیری په دننه کې اړیکې

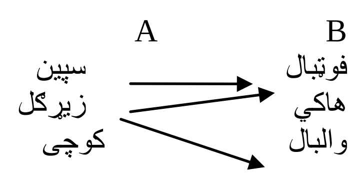
(c) ketabton.com: The Digital Library

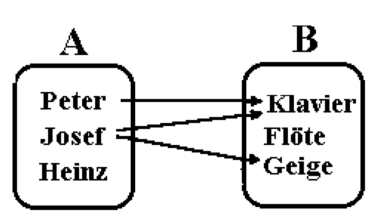
تیوپ ۱ – مورږ وپیژند
د تیوپ ۲ - لپاره بیلګه لاندې اړیکې دي(چې په څیره کې کښل شوي دي):



x له y څخه کوچنی دې

د مخ ته تیرو بیلګو په مخامخوالي یا تضاد دلته د ډیریو د توکو ترمنځ اړیکی پرتي دي
بنسټډیری ،موخه ډیری یا تر مخورشو پسي ورشو
Erklärungروښانه ونه
د ډیری A (بنسټډیری) او B (موخه ډیری) په اړیکو کې په ریښتوني د مخ ته ورشو (پټر ،یوس) همداسې ورپسې ورشو (کلاویر، ګایګې) اړیکې هغه توکې جوړوي، چې په کارونه کې ونډه لري۰
A د لوبغاړو نومونه دي او B د لوبو نومونه دي





Grundmenge: { بنسټډیری : {سپین ، زیرګل، کوچی
Zielmenge { موخه ډیری : { فوټبال ، هاکې ، والیبال

(c) ketabton.com: The Digital Library

Vorbereich ترمخورشو {Peter, Josef} :
Nachbereich ورپسي ورشو {Klavier, Geige} :

ځني شميرپوهان دا مخورشو او همداسي پسي ورشو، تعريفېدېری ، ارزښتډېری يا تعريفورشو همداسي ارزښتورشو بولي

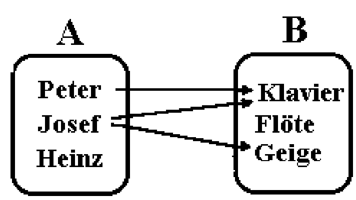
دRelationstafel اړيکو تخته

تراوسه مو تولې اړيکې د غشيدياګرام له لارې انځور کړل٠ يو شونوالی يا امکانات يې د اړيکو تختې له لارې انځورونه ده:

د دې لپاره د بنسټډيری او موخه ډېری توکي په يوه جدول کې ليکو٠ د بنسټډيری توکي په پورته ليکه کې ليکو اود موخه ډېریتوکي په کيڼ درځ يا کينه مته کې ليکو٠

په صليبونه سره هغه پيژند يا تعريف ورکول کيږي، چې د موخه ډېری په توکي باندې د بنسټډيری يو توکی تنظيم شوی وي٠

د بيلګي په توګه بيرته همغه د ساز الو سره بيلګه راوړو



په دې پورې اړونده اړيکتخته په لاندې ډول ليدل کيږي

	Peter	Josef	Heinz
Klavier	x	x	
Flöte			
Geige		x	

د کواوردينات سيستم انځوربنه

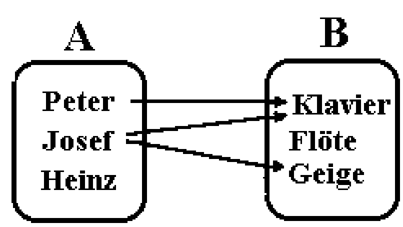
(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه مو اړيکې د غشيدياګرام او اړيکتختو له لارې انځور کړې٠ اوس يو دريم شوونوالی يا دريمه شوونتيا يا امکان غواړو وپيژنو:
انځورونه په يوه کواوردیناتسیستم کې :

د بنسټديری توکي د پروتمحور په نخښه کوو او د موخه ډيری توکي په ولاړ محور په نخښه کوو ٠
د ټکو سره هغه د بنسټډيری توکي او ورسره د تنظيمډيری تنظيم توکو ټاکلي وي

بيلګه

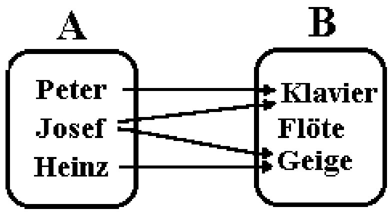
د بيلګی په توګه بيرته هغه بيلګه د لوبو يا موزيک الاتو سره ټاکو:
دلته په دې لاندې الماني ليکنپيا ښه يې :څيره بسيا کړی شو



په کواوردیناتسیستم کې انځورونه داسې ليدل کيږي

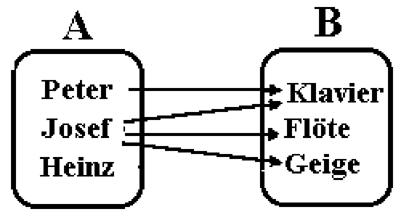
کڼ پوره کيدونکی اړيکې :
د Aڅخه هرتوکی کم له کمه د B په يوه توکي تنظيميږي(پيژندورشو يا مخ ته ورشو او بنسټيزه ډيری کټمټ دي)
ښي پوره اړيکې : دB   هر توکی کم له کمه د څيری په توګه منځ ته راځي (پسې ورشو او موخه ډيری کټمټ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



Linksvollständig

کیڼ پوره



rechtsvollständig

ښی پوره

ښی یواځنی اړیکې

د ښنسټډیری (کیڼ) هر توکی په زیات ترزیاته د موخه ډیری (ښی) باندې تنظیمیږي٠

پام مرسته : غشي ښي « ښيلوریز) یواځنی دي٠

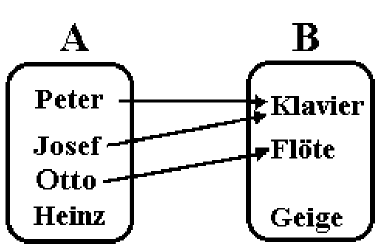
کیڼ یواځنی اړیکې :

د ښی ډیری هر توکی زیات ترزیاته یو وار د یوې ډیری (کینډیری) د خیرې په ډول منځ ته راځي٠

پام مرسته : غشي ښي لورته یواځني دي٠

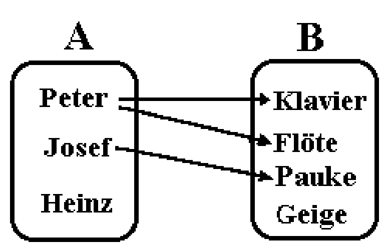
ناټیکوالی!

یا دا لاندې، چې د توپونو په ځای موزیک الې ورکړ شوي دي



rechtseindeutig

ښی



linkseindeutig

کیڼ یواځنی

یواځنی، .

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو کینپوره کیدونکی او بنی یواځنی اړیکې یواځنی اړیکې بلل کیږي (فنکشن او یا څیرونې)

په غشیدیاګرام کې یو فنکشن په دې پیژندل کیږي ، چې په هر توکی تیک یو غشی پیل کیږي

په ښټ اړیکې : په ښپ اړیکو کې

۱ – مخ – او پسې ورشوګاني سره بدلیږي(پیژنددیری او ارزښتدیری)

۲ – اوښتوني سره بدلیږي

رفلکسیو اړیکې reflexive relations

دیاګرام : په هرتوکي یوکړئ غشی شته

رفلکسیو اړیکې :

د رفلیکسو اړیکو پیژند : د هرو برابرو توکو جوړه اړیکو پورې اړج لري

د فرمو په څیر یې لیکنه : د تولو a لپاره باور لري:
aRa

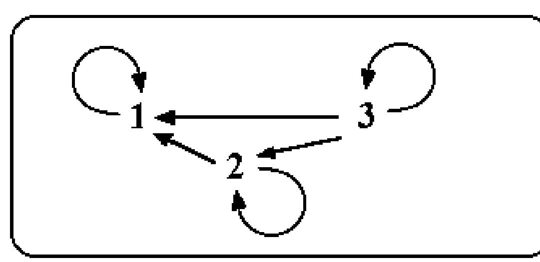
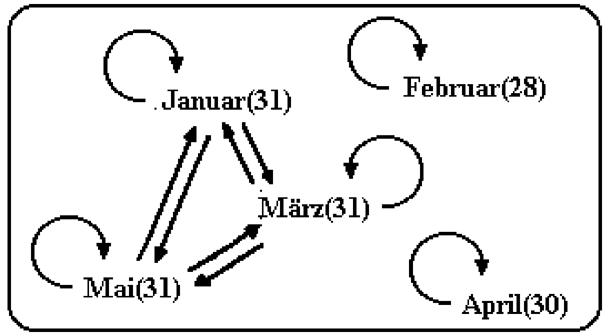


Bild: Die reflexive Relation ≥

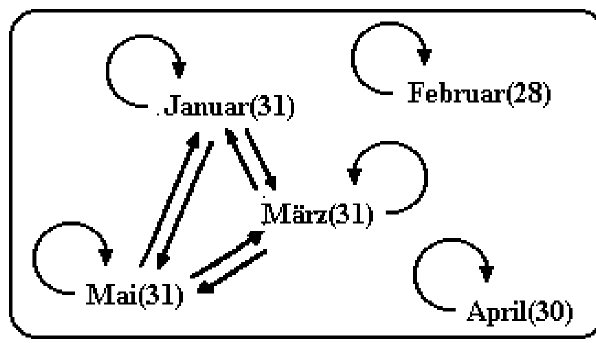
انتیرفلکسیو(ایرفلکسیو اړیکې
Antireflexive
(irreflexive)
Relationen

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند : په انتیرفلکسیو اړیکو کې په هیڅ توکي کړۍ غشی نه شته
د همغه توکي جوړه اړیکو پورې اړوند نه دی، یا په اړیکو ونده نه لري۰
د فرمول په توګه لیکل یې : ¬(aRa)



سیومتریکي اړیکي : symetric relations
هر غشي ته په څټ غشی شته
که (a,b) اړیکو پورې اړه ولري ، نو (b,a) هم په اړیکو پورې اړه لري۰
د سیومري اړیکو ځیره: « همغومره ورځې لري لکه»



انتیسیومتري اړیکي: Antiasymetric reltions
د انتیسیومتري اړیکو دیاګرام : په څټ غشی نه شته ۰
که (a,b) په اړیکو اړه ولري،نو (b,a) په اړیکو اړه نه لري، مګر که a = b وي۰

فرمول: a R b /\ b R a => a = b

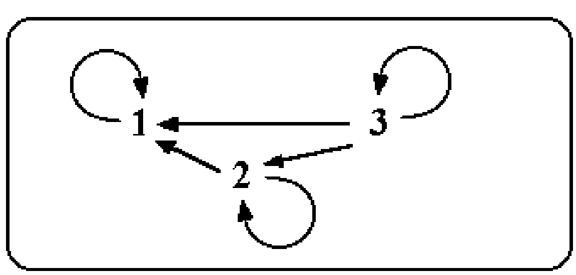


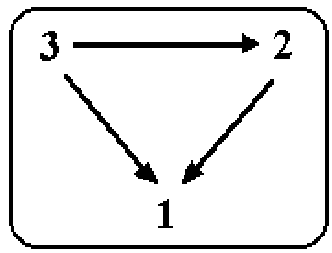
Bild: Die antisymmetrische Relation ≥

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناسيومتريک اړيکي پورته څېره :Antiasymetric reltions

اسيومتريکي اړيکي
asymetric relations (Asymmetrische Relationen)

د اسيومتريکي اړيکو دياګرام نه په ښت غشی لري او نه کړي غشی لري٠
د اسيومتريکي اړيکو پيژند: انتيرفليکسيو او انتيسيومتريکي اړيکي
فرمول : $\neg(bRa \Rightarrow aRb$

څېره: اسيومتري اړيکي	

خيره کونه يا توابع Funktionen

p

يادونه: په انرېزي کي mapping د او الماني کي DieAbbildung په نامه ن,مولشوي، چي پښتومانا يي خيرونه يا خيره کونه ده.

فنکشندوه اوښتونيپا واريابلېلري، چي يوه خپلواکه اوبله يېواکه ده. له دېام له د فنکشن لهپاره ناسمد تابع نومورکړشويدی.

په رياضي يا شميرپوهنه کي خيرونه يا توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې طبیعي ، تخنیکي یا هم نورو ورځنیو کارونو کې زیات وخت یوه لویه د بلې لوي په واک کې وي یا که غواړئ د هغې تابع وي، لکه د بیلګې په توګه د یوه موټر د بنزین سوزول یا استعمالول د هغه د تللې چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی. دا ډول ساده اړیکې مو پخوا هم لوستلي او ګرافیکي مو په یوه کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کې انځور کړي.

بیلګې:

د یوه شي یا جنس قیمتت د هغه د خرڅ شوې ډیرئ یا سټ په واک کې دی یا تابع دی.

ټوله دباندنۍ تودوخي د ورځې د وخت په واک کې ده.

د یوه بایسکلځغلونکي وهلې لار په مساوي چټکتیا یا سرعت د تلنې وخت په واک کې ده.

د موټر د بریک لار په روښانه توګه د هغه د چټکتیا په واک کې ده.

د یوه کوچني لوېدنه د هغه د عمر په واک ده.

د یوه ریاضي ازموېنې نمرې د لاس ته راوړول ټکو په لاس کې ده.

د یوې بډایئ د ګڼې قیمت یا لاس ته راوړنه د په د مخه ټاکلې ګڼې سره دوخت تیرېدنې په واک کې ده.

تمرین ۱ : د داسې یو په واکوالي یا تابعیت لپاره نورې بیلګې هم پیدا کړئ.

له پورته بیلګې څخه لیدل کیږي، چې هر دوه لویې سره تنظیمیږي.

ډېرئ یا سټ ← وخت   خرڅشوې سټ په قیمت اغیزه لري.

د ورځې وخت ← تودوخي.   د ورځې وخت په اندازه شوې تودوخي اغیز لري.

د لاس ته راړلو ټکو تعداد یا ګڼون ← نمرې   د یوې ازموېنې نمرې د لاس ته راړلو ټکو اغیزمن کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين ۲ : د پاتې بيلګو لپاره او د هغو لپاره چې په تمرين ۱ کې مو ميندلي اړيکې پيدا کړئ.

دا يو له بل سره تظيم شوي لويې متحولې(اووښتوني يا **Variablen**) بلل کيږي.

دلته دې دې ته پام وشي، چې کوم په واکوالی يا تابعيت د دوي په منځ کې شتون لري.

د رياضي نمرې د ښوونکي له نظره د لاس ته راوړو ټکو په واک کې دي، مګر نه د نمرو د ټکو په واک کې.

سرې نمرې د بلواک يا تابع متحولو په حيث هم ښايي او د ټکو تعداد د خپلواک متحولو په حيث ښايي.

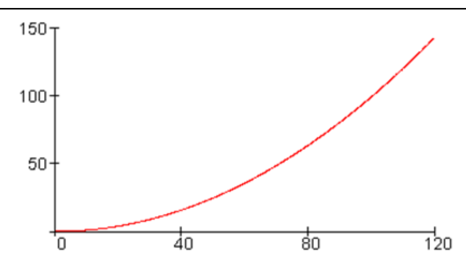
د ټکو او نمرو په منځ کې يو فنکشن يا بلواکيزې يا که غواړئ تابعيتي اړيکې شتون لري.

لکه د مخه درسونو څخه چې پوهيږو، ډېر امکانات شتون لري چې د دوه متحولو ترمنځ تابعيتي اړيکې تشريح کړو يا انځور کړو.

د مختلفو چټکتياو لپاره د بريک لار اندازه کيږي او يو ارزښت جدول ترتيبيږي.

چټکتيا په km/h(x)	20	40	60	80	100	120
د برېکنيولو لار په m(y)	4	16	36	64	100	144

که د جدول ارزښتونه په يوه پروت ولاړ – يا کواوردينات سيستم کې وکښل شي، نو سرې ګراف لاس ته راوړي وروسته له هغې چې ټکي يو له بل سره وتړل شي کوم چې د چټکتيا او بريکلار ترمنځ اړيکې تشريح کوي.



د پراته محور ، چې ابسڅيز هم بلل کيږي د خپلواکي متحولې x ارزښتونه پيدا کيږي، په ولاړ محور چې اوردينات هم بل کيږي د بلواک متحولې $y = f(x)$ارزښتونه ميندل کيږي.

تمرين ۳ :   د ارزښت جدول سره سم په يوه مناسب پروتولاړ – يا کواوردیناتسيستم کې اړونده ټکې وکاږئ او دا په يوه ګراف کې سره ونښلوئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بریکلار د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې وټا کئ.

پولیس یوه دm 90 د بریک لار اندازه کوي؟

دا موټر د کومې چټکتیا یا سرعت سره خغلي؟

زیات وخت دا هم شونې ده چې فنکشنال یا تابیعي اړیکي د تابع مساوات له لارې انځور شي.

د بریکلار لپاره باور لري: $y = f(x) = 0{,}01\ x^2$

دلته $y = f(x)$ د بریکلار لپاره اینووول شوی ا و دا وایي، چې y -کواوردینات په کواوردیناتسیستم کې د متحولې x په واک کې دی، یعني د خپلواک متحولېx یو تابع دی یا په واک کې دی. تابعمساوات دی، کوم چې هغه قانون ورکوي، چې ارزښتونه د $f(x)$ تابع یا بلواک متحولې جوړوي.

د تابع مساوات په ځاي هم وایو چې $f(x) = 0{,}01\ x^2$ د تابع قانون دی.

تمرین ۴ : که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\ x^2$ وي، نو لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ؟

له دا تراوسه شوې کار څخه کیدی شي ووایو:

پیژند یا تعریف:

د یوه تابع سره د خپلواک متحولېx هر ارزښت ټیک یو تابع ارزښت $f(x)$ باندې- یا سره تنظیمیږي. سړی دا هم وایي چې یوه تابع یو یواځنی نظم دی.

لیکنډول:f

$$\underbrace{f : x \to \underbrace{f(x) = x - 1}_{\text{Funktionsgleichung}}}_{\text{Funktion}}$$

پورته لومړۍیې په پښتو: تابع برابرون

که په راتلونکې کې له یوه تابع غږیږو، نو د دې تشریح لپاره فقط تابع مساوات ورکوو، یعني فقط $f(x) = ...$ ی.

د تابع نوم f دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا $x \to f(x)$ ليکندود روښانه کوي، د هر x –ارزښت سره يو ټاکلی تابع ارزښت $f(x)$اړه لري.

تابع مساوات $f(x) = x - 1$ د شميرلو قاعده يا قانون راکوي، چې تابع ارزښت څنګه جوړيږي.

د دې لپاره چې د نظم يواځنوالی بيا وښايو، لاندې بيلګه راوړو:

هر زده کوونکی يو ټاکلی د بوټانو لويوالی لري. دلته حتمي ده چې زيات زده کوونکي به يو- - يا هماغه د بوټانو لويوالی ولري.

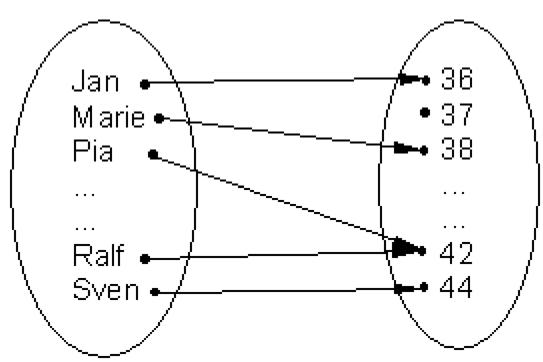
يواځنواوالی په زده کوونکو اړه لري ← د بوټانو لويوالی.

د متحولو سره کښلی يا ليکلې دا په دې معنا دی، چې د زده کوونکي نوم خپلواکه متحوله په ګوته کوي او هغه سره تنظيم شوې د بوټانو لويوالی بلواکه يا تابع متحوله جوړوی.

معکوس يا په څټ د زده کوونکو تنظيم يواځنی نه دی، ځکه چې ډېر زده کوونکي د بيلګې په توګه ۴۲ نمرې د بوټانو لويوالی لرودی شي.

دا ډول تابع د تابعمساوات نه لري، دا کيدی شي چې د ډېرئ څيرې يا سټعکس په څير انځور شي.

يواځنی نظم(تابع يا فنکشن)

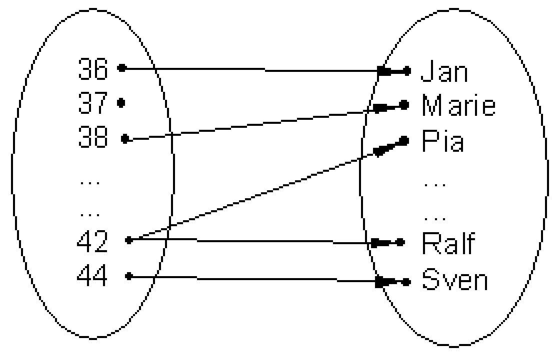


د بوټانولويوالی ډېرئ ياسټ   د زده کوونکو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ارزښت ډېرئ) (تعریفډېرئ)

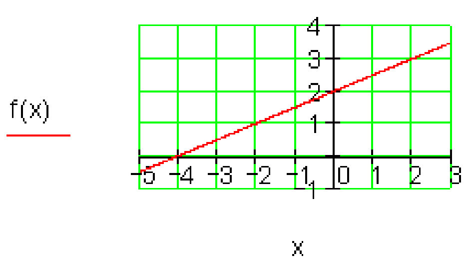
نظم يواځنى نه دى (تابع نه دى)



د دواړو ستونو بدلول

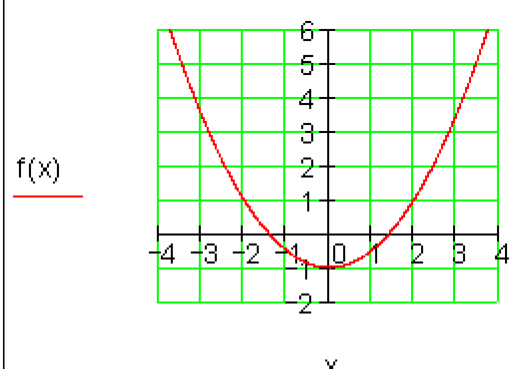
د رياضيكي توابعو او تابعمساواتو بيلګي (له كيڼ و ښي لورته)

$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x + 2$



كربنيز مساوات(ګربنه)

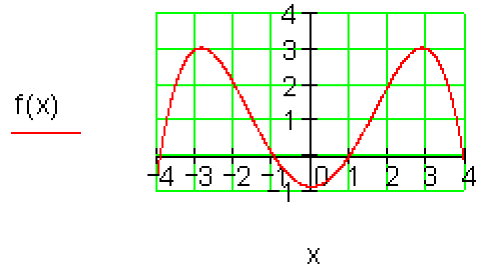
$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1$



مربع مساوات(پارا بل)

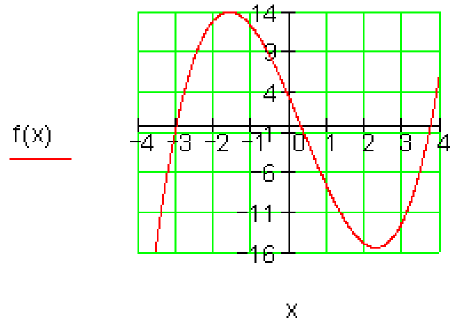
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-7}{120}\cdot x^4 + \frac{23}{24}\cdot x^2 - \frac{9}{10}$$



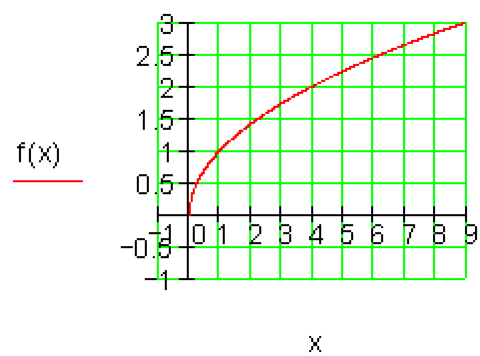
د څلورمې درجې پولراشنل تابع

$$f(x) := x^3 - x^2 - 11x + 3$$



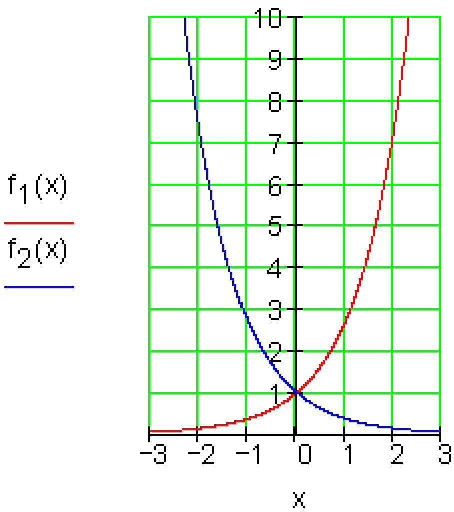
د دريمې درجې پولراشنل تابع

$$f(x) := \sqrt{x}$$



ريښه تابع

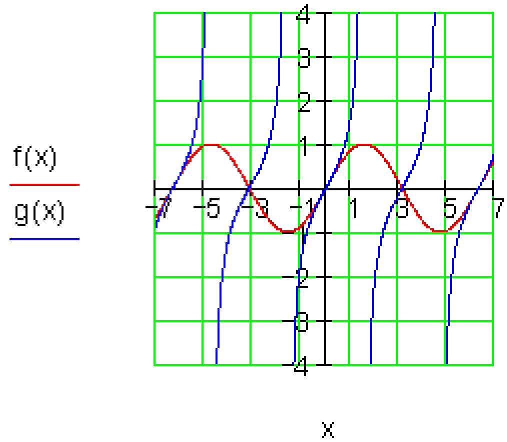
$$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{-x}$$



اکسپوننشل تابع

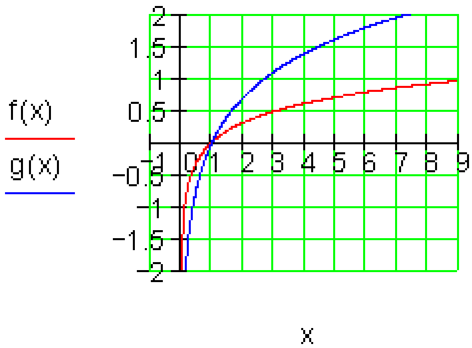
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := \sin(x) \qquad g(x) := \tan(x)$



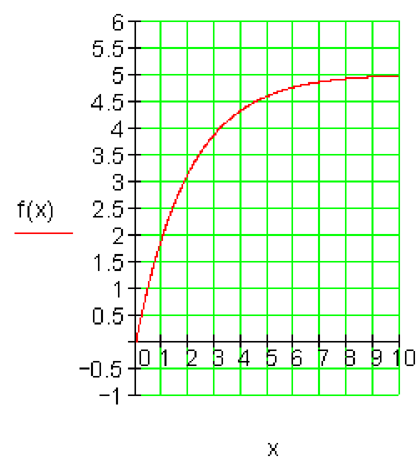
تريگونومتريکي(مثلثاتي) تابع

$f(x) := \log(x) \qquad g(x) := \ln(x)$



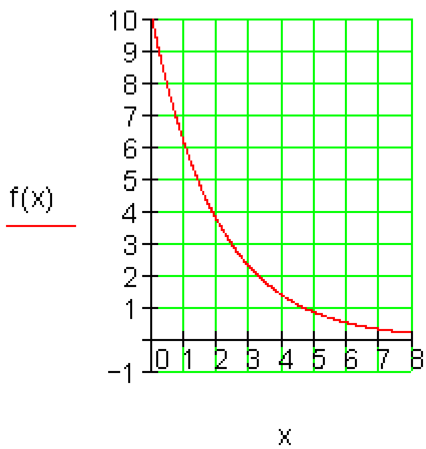
لوگاريتمتابع

$f(x) := 5\cdot\left(1 - e^{-0.5\cdot x}\right)$



اکسپوننشل مرېښتکره

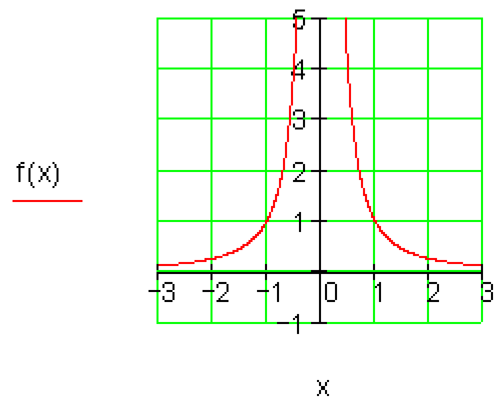
$f(x) := 10e^{-0.5\cdot x}$



اکسپيننشلي کښته کيدنه

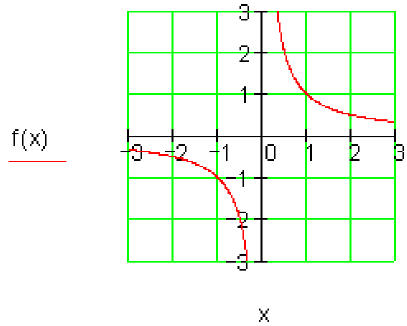
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{1}{x^2}$$



های پارابول محورسیومتریک

$$f(x) := \frac{1}{x}$$



های پارابول ټکی سیومتریک

تعریف- او ارزښتډېرئ یا - سټ

تعریف(پیژند):

د یوه تابع تعدریفسټ **D** د ټولو خپلواکو متحولو ډېرئ یا سټ ده، د کومو لپاره چې تابع تعریف دی.

ارزښت ډېرئ **W** د ټولو تابع ارزښتونو- یا بلواکو - سټ ده، چې د D له توکو منځ ته راځي.

بیلګه:

$f(x) = \frac{1}{x}$ تعریفسټ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ تعریفسټ D=R

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره د وېش اجازه نه شته	R د حقیقيي اعدادو ډېرئ ده

بېلګه:

$f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}_+$ د تابع ارزښت په حیث فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه رامنځ ته کیږي	$f(x) = x + 1 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}$ تابع هر په خوښه ارزښت نیولی شي.

شمیرپوهنیزه لیکندود او د هغه معنا

$f(4) = 7$ د خپلواکو متحولو د ارزښت $x = 4$ لپاره د تابع ارزښت 7 دی.

دا د ارزښتجوړه (7 | 4)په کواوردیناتسیستم کې د ټکي (7 | 4) P کواوردیناتونه جوړوي.

$f(x) = 9$ غوښتونی د x -ارزښت دی، چې په هغه پورې تابع ارزښت 9 اړه لري.

$y = f(5)$ د $x = 5$ لپاره تابع ارزښت دی.

تولګه:

یو یواځنی نظم، چې په هغه کې د تعریف ست D څخه خپلواکه متحوله x تیک یو تابع ارزښت $f(x)$ باندې تنظیم شي ځیرونه (چېموړ یې تابع بولو) یا فنکشن بلل کیږي.

تابعي(خپلواکیز) یا فنکشنلي اړوندوالی د یوه تابع مساوات(د بېلګې په توګه: $f(x) = 2x + 1$) سره لیکل –یا تشریح کیږي.

تابع مساوات کې د x –ارزښتونو په ایښولو سره د تابع ارزښت لاس ته راځي، چې دا د x -ارزښتونو سره یوه ارزښت جدول کې ایښولی یا انځورولی شو.

د ارزښتجدول هره جوړه په کواوردینات سیستم کې تیک یو ټکی په ګوته کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په زیاتو حالتونو کې کیدی شي دا منځ ته راغلي ټکي یوه ګراف ته سره رایوځای یا وتړل شي.

د ټول x - ارزښتونو ډېرئ، هغه چې په تابع مساوات کې ځای په ځای شي تعریف ډېرئ یا ـسټ بلل کیږي.

د ټول تابع ارزښتونو ډېرئ یا ـسټ، چې دلته منځ ته راځي، د تابع ارزښت ډېرئ W پورې اړه لري.

د تمرینونو حل

لومړی تمرین: د داسې بلواکوالي لپاره نوري بیلګې پیدا کړئ.

ځواب: - د یوه تیلسوزونکي ماشین قدرت د څرخونتعداد(د ماشین د څرخیدو تعداد) په واک کې دی.

- د یوې ګردئ یا دایرې سطحه د وړانګې یا شعاع په واک کې ده.

- د بریښنا پیسې د ثابت قیمت سره د انرژي یا بریښنا مصرف په واک کې ده.

دویم تمرین : د پاتې بیلګو او د هغو لپاره چې تاسو په لومړي تمرین کې ولیدل ګډې اړیکې سره په فرمولبندۍ کې راوړي.

ځواب:

لار → د خوزښت وخت: په مساوي پاتې چټکتیا د خوزښت وخت په وهلې لار اغیز لري.

بریکلار → چټکتیا: د یوه موټر چټکتیا د بریکلار باندې اغیزه لري.

ټوله ګټه → د تیریدنې وخت: د سرمایې ایښونې وخت د ګټې لاس ته راوړنه باندې اغیزه لري.

وده → عمر: د کوچنې عمر د هغه په وده اغیزه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

قدرت ⇾ څرخونتعداد: د یوه سوزونکي ماشین د تیلو سوزیدنه د هغه په څرخونتعداد پورې اړه لري.

سطحه ⇾ وړانګه : د ګردۍ یا دایرې وړانګه د دایرې سطحه باندې اغیز لري.

د بریښنا حساب ⇾ انرژي سټ: د سوزولې بریښنا یا انرژۍ سټ یا ډېرۍ د بریښنا بل(هغه د مصارفو کاغز) اغیزمن کوي.

دریم تمرین:په یو مناسب کواوردیناتسیستم کې د ارزښت جدول اړوند ټکي وکاږۍ او دا یوه ګراف ته سره وتړۍ.

د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې بریکلار پیدا کړۍ.

پولیس یوه د 90 m بریکلار کچوي. دا موټر دکومې چټکتیا سره تلی؟

ځواب:

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

تلنلار: په کواوردیناتسیستم یا پروتولاړ سیستم کې د x -محور(ابسڅیزا) د خپلواکو متحولو ډېرۍ نمایندګي کوي، د y –محور (اوردینات) د بلواک یا تابع متحولو نماینده ده.

د مخه له دې چې په یوه کواوردیناتسیستم کې ارزښتونه لیکل –یا کښل کیږي باید وکتل شي، چې کومه خپلواک- او کومه بلواک- یا تابع متحوله ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

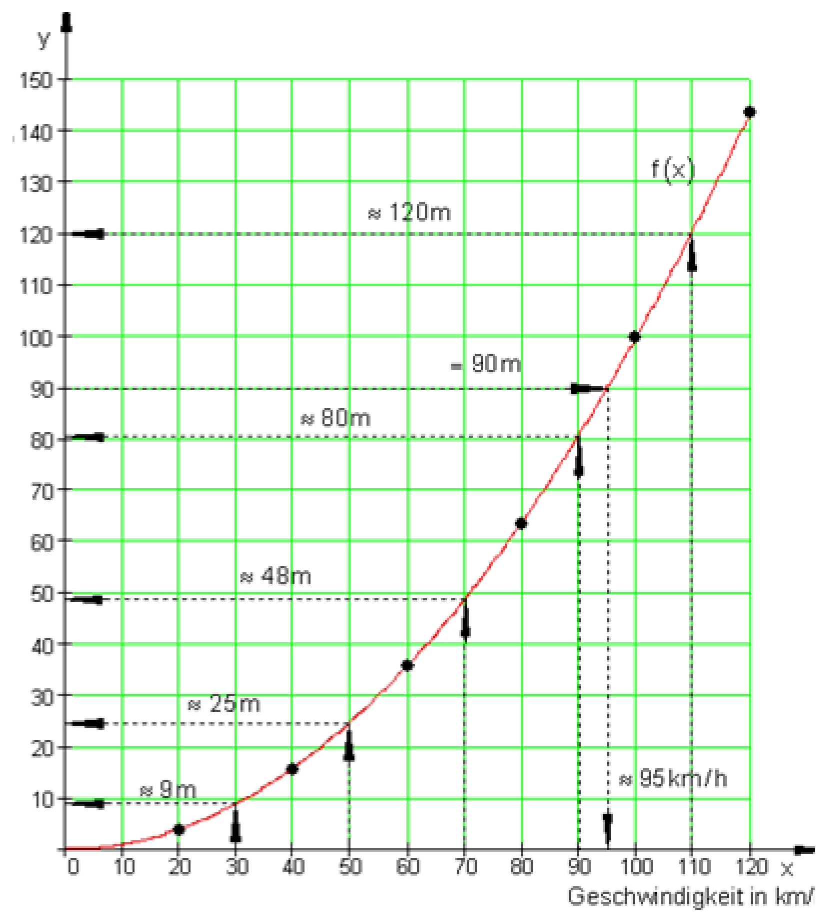
پسي دا هم غوره ده، چې د کچوني لپاره یوو ښه کچونی یا هغه اله چې اندازه پرې کچوو باید ومومو.

د دې لپاره د جدول لوي او کوچني ارزښتونه کتل کيږي او پرېکړه کيږي چ دواړه محوررونه په څو برخو باید وويشل شي.

وروسته له هغې چې ټول په جدول کې ټکي په کواوردیناتسیستم کې ځای په ځای شوي، نو بیا دا ټکي د ګراف په توګه سره تړل – یا نښلول کيږي

کیدی شي له ګراف څخه د داسي x -ارزښتونو لپاره هغه لړ یا ډېر تابع ارزښتونه هم ولوستل شي، چې په ارزښت جدول کې مخ ته نه راځي.

معکوس کیدی شي د یوه ټاکلي تابعارزښت اړونده x -ارزښت ولوستل شي. د دې نتیجو ټیکوالی د دې په واک کې دی، چې ګراف څومره ټیک کښل شوی دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کي: پروت: چټکتیا په کیلومتر. ولاړ:بریکلار په متر

څلورم تمرین:

لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ، که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\,x^2$ وي.

ځواب:

تابعارزښتونه داسې شمیرلکیږي، چې اړونده د x ارزښتونه په تابع مساوات کې کېښوول شي.

$$f(x) = 0{,}01x^2 = \frac{1}{100}x^2$$

$$x = 30 \Rightarrow f(30) = 0{,}01 \cdot 30^2 = 0{,}01 \cdot 900 = 9$$

$$x = 50 \Rightarrow f(50) = 0{,}01 \cdot 50^2 = 0{,}01 \cdot 2500 = 25$$

$$x = 70 \Rightarrow f(70) = 0{,}01 \cdot 70^2 = 0{,}01 \cdot 4900 = 49$$

$$x = 90 \Rightarrow f(90) = 0{,}01 \cdot 90^2 = 0{,}01 \cdot 8100 = 81$$

$$x = 110 \Rightarrow f(110) = 0{,}01 \cdot 110^2 = 0{,}01 \cdot 12100 = 121$$

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

بریکلار 90 m کچ شوې ، غواړو چټکتیا پیدا کړو.

پیل: $f(x) = 90 \Leftrightarrow 0{,}01x^2 = 90$ دا مساوات په x پسې ځواب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0,01x^2 = 90 \,|\, : 0,01 \Leftrightarrow x^2 = 9000 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{9000} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{900 \cdot 10} \Leftrightarrow |x| = 30\sqrt{10}$$

ارزښت حل کړئ.

$$|x| = 30\sqrt{10} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 30 \cdot \sqrt{10} \approx \pm 94,9$$

نسبت و پوښتنې ته فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه موخه ور دي، څکه چې موږ مثبته چټکتیا په پام کې نیسو. د 90 m بریکلار سره د موټر چټکتیا 94,9 km/h وه.

یادونه:لومړی شمیرنه تیک ارزښتونه راکوي، سره له دې هم موخه وردی، چې دا شمیرل شوي ارزښتونه په ګراف کې یا له ګراف څخه هم د لوستلو له لارې کنترول کړو.

پوښتنې

تابع I

لومړی:

ټول ټکي په کواوردینات سیستم کې په نخښه کړئ، چې کواوردینات یې ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

الف- $y \le -1 \wedge x \ge 1$ ب- $y \in \mathbb{R} \wedge -2 \le x \le 3$ پ- $x \in \mathbb{R} \wedge y = 2$

ت - $0 \le x \le 4 \wedge y \ge 0$ ټ- $|x| \ge 1,5 \wedge |y| \le 2$ ث- $y > 0 \wedge x = -1$

دویم: په مناسب کواوردینات سیستم کې لاندې ټکي رسم کړئ.

$$A(40\,|\,220);\ B(10\,|\,250);\ C(200\,|\,300);\ D(80\,|\,240)$$

ایا د x – او y -کواوردیناتو ترمنځ کومې اړیکې شته؟ د دې لپاره یو ترم ولیکئ او نور درې ټکي ورکړئ.

دریم: د ټکو ځای وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- ټکي $P_t\left(t-1\,|\,\frac{1}{t+1}\right)$ د $t€R$ کوم ارزښت په لومړئ څلورئکي پروت دی؟

ب- ټکي $Q_t\left(t\,|\,t^2-1\right)$ د $t€R$ کوم ارزښت لپاره دx محور کښته لور ته پرته ده؟

څلورم:

د ټکوډېرئ يا –سټ $A=\left\{(1|\,3);\left(2\,|\,\frac{3}{2}\right);(3\,|\,1);\left(4\,|\,\frac{3}{4}\right);\ldots\right\}$ ورکړ شوی دی.

د A نور درې توکي ورکړئ او دا ټکي په يوه کواوردينات سيتم کې وکاږئ. ايا د x- او y -کواورديناتونو ترمنځ اړيکې شته؟

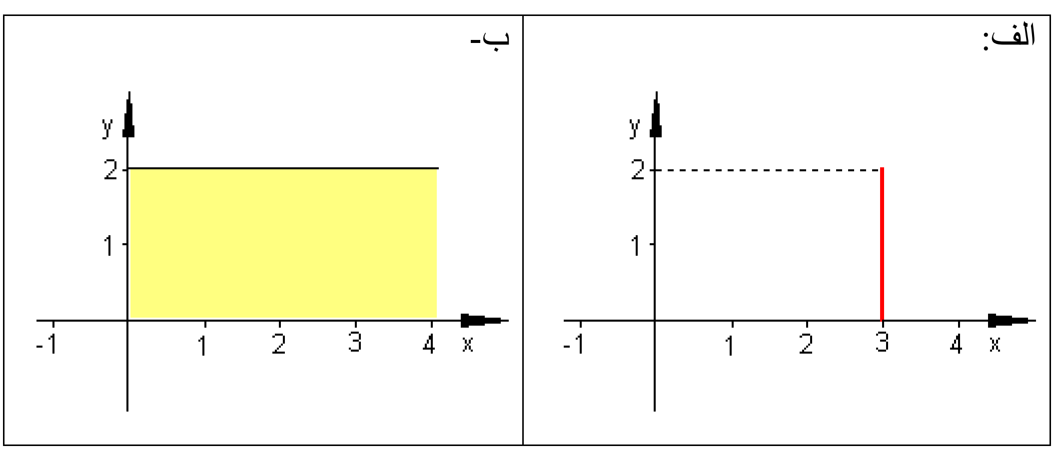
پنځم: يو ټکی $P\left(t\,|\,\frac{t}{2}+3\right)$ د $t€R$ سره ورکړشوی دی.

د t لپاره څه ارزښتونه ورکړي او دا د دې اړونده ټکي په يوه کواوردينات سيستم کې وکاږئ.

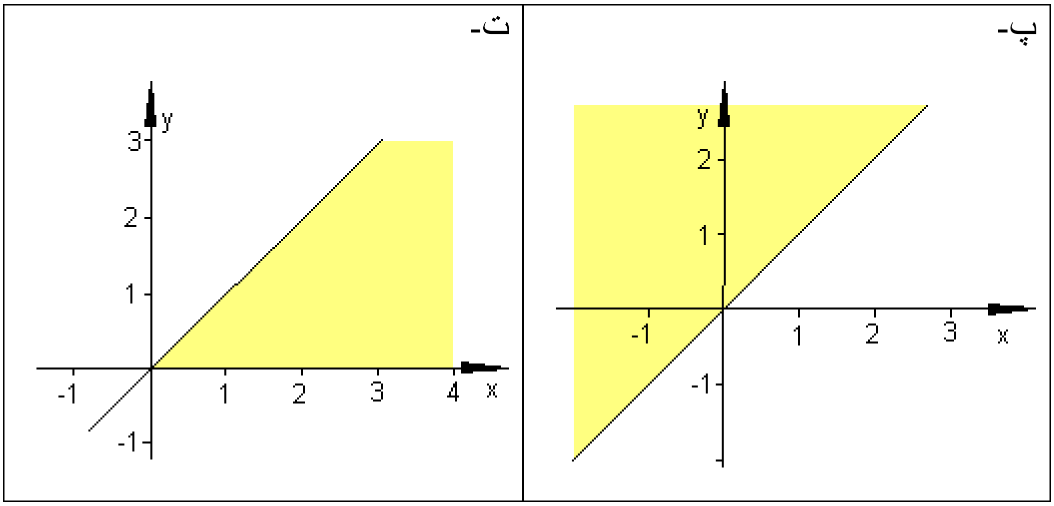
د کومو t -ارزښتونو لپاره باور لري:

د ټکي P د x -کواوردينات د ټکي د y -کواوردينات سره برابر دي؟

شپږم: په نخښه شوې کربښه او همداسې سطحه تشريح کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library



پوښتنې

توابع II

لومړی

ښاغلی برګ د یوه ملفون(لاسي یا لاسي تلفون) قرارداد د لاندې شرایطو سره وکړ:

د میاشتې € 20 ، د تلفون قیمت په دقیقه € 0,35 .

الف- که دی 40, 80 یا 120 دقیقې تلفون وکړي، نو میاشتنی حساب به یې څومره جګ وي؟

ب - لګښت لپاره یو ترم ولیکئ چې په دقیقه کې د خبرو د دوام په واک کې وي.

پ – اړیکې ګرافیکي انځور کړئ.

دویم:یوه الوتکه د سوزونموادو کیروزین 10500 Liter لیتره زخیره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 100 km دا 180 Liter سوزوي.

الف- د په لیتر مصرف جدول جوړ کړئ. یو واټن له 0 km تر 5000 km پورې وټاکئ.

ب – اړیکې یې ګرافیکي ځور کړئ.

پ-له څومره کیلومتره وروسته به زخیره تمامه شوې وی؟

ت - د الوتنې د لار ترم د ټانک د خوندیونې په واکوالي کې وټاکئ.

دریم: یو د شمیراړونې جدول جوړ کړئ، چې ^{0} څلزیوس (^{0}C) په فارنهایت(^{0}F) اړوې د 20^{0}C - او 60^{0}C په ساحه یا ورشو کې. د دې لپاره اړین داتا تشریح کړئ. اړیکې ګرافیکي انځور کړئ. دا اړیکې کوم ترم په ګوته کوي؟ د ا د تبې تودوخځ کچونه (ترمومتر) د ناروغ د تبې په اندازه کئ چې ده ایا دا حرارت یا تودوخي د ژوند خطر لري؟

څلورم: یوه د مالونو لیږلو مغازه غواړي لګښت له امله یو د تحفې پاکټ ولیږي. د پاکټولو تخنیکي پرابلم له امله یې یو اړخ د 35 cm سره کره ټاکلی دی. د پوست د لګښت نظم باید په پام کې نیول شوی وي

د لګښت نظم: مربع ډوله پاکټونه دننه په هیواد کې.

خورا کوچنۍ کتله(یا بهتره ډکی): اوږدوالی 15 cm ، سور 11 cm ، جګوالی1 cm .

خورا جګه کتله: اوږدوالی 60 cm ، سور 30 cm ، لوړوالی 15 cm یا اوږدوالی جمعه یې سور جمعه یې یا په ورزیات جګوالی = 90 cm. خورا زیات وزن 2 kg.

الف- د یوه ډکي یاحجم V = 21 dm^3 لپاره د سور او جګوالي ترمنځ اړیکې وټاکي.

ب- دا ماکسیمال رسیدلوړ ډکی یا حجم څومره لوي دی؟

پنځم: فرمول ورکړشوی دی.

الف- ش څنګه تغیر خوري، که کوچنی شي.

ب- ایا لاندې اړیکې به د فرمول له لارې تشریح شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

A : د کرایې موټر ټول لګښت د عدد a د تللی کیلو متر او د هغه د یوه کیلو متر د قیمت c لپاره.

B : د ودرېدلو لار یا واټن a د بریکلارb او عکس العمل لارc څخه شمیرل کیږي.

پ-شي اړیکي ورکړئ چې د فرمول له لارې تشریح کیدی شي یا روښانه کیدی شي.

شپږم: یو ولاړګوډیز یا مستطیل U = 12 cm چاپیریال یا محیط لري.

الف- اړخونه څنګه یو د بل په واک کې کیدی شي.

ب- یو ترم وټاکئ، چې بلواکوالی د اړخ a څخه ورکوي یا د اړخ a په واک کې یا تابع دی.

پ- د a د کوم ارزښت لپاره سطحه خورا لویه وي؟

پوښتنې

توابع III

لومړی: توابع f(x) ورکړ شوي. یو مناسب ارزښتجدول وکاږئ. دې ته اړوند ګراف رسم کړئ.

الف - $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ب - $f(x)=x^2$ پ - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ ت- $f(x)=3^x$

دویم: فکر وکړئ، چې ایا یو ،،یواځنی نیظم،،د x →y لپاره مخ ته لرو: $x^2+y^2=1$

دریم: ټکی P ورکړ شوی دی. ایا یوه تابع مخ ته لرو؟ که هو، نو نظمقانو وټکئ او خورا لویه تعریفستې یا – دېرئ هم وټاکئ.

$$P=\left\{(2|1);\left(5|\frac{1}{4}\right);\left(10|\frac{1}{9}\right);\left(25|\frac{1}{24}\right);\ldots\right\}$$

څلورم: یو ارزښتجدول ولیکئ او د تابع ګراف وکاږئ:

$$f(x)=\frac{1}{8}\left(x^3-2x-4\right);\ x\in\mathbb{R}$$

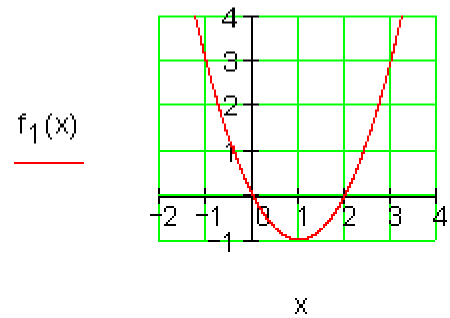
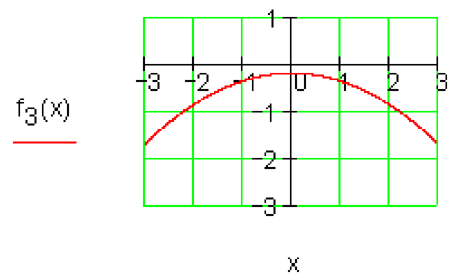
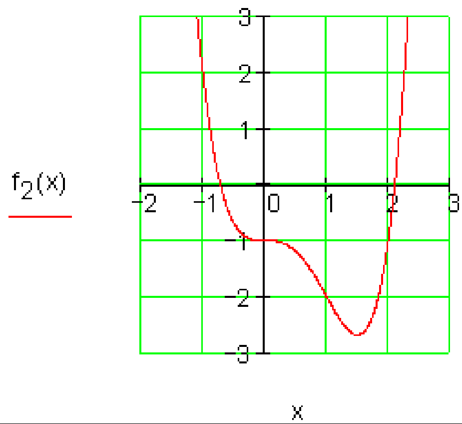
الف- د جبشمیري سره f (3) او f (- 2) وشمیرئ.

ب- په کوم ځای کې د تابع ارزښت صفر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت 1 دی؟
ت-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت کمیز یا منفي دی؟
ټ-د کومو x -ارزښتونو لپاره باور لري: $f(x) < 1$ کړئ، چې د کوم تابع لپاره باور لري:

پنځم: د درې توابعو f_1, f_2, f_3 ګراف ورکړ شوی دی. پرېکړه وکړئ:

	الف- د تابع ارزښتونه هر چیرته صفر دي. ب- توابع په انتروال [0,5 ; 1] منفي یا کمیز دي پ-. $f(2) < f(0)$ ت-. $f(0) = -1$ ټ-. $f(-2) = f(2)$
	

پوښتنې

توابع **IV**

لومړی: تابع f ورکړ شوې د $f(x) =-0,2(2-x); x€R$ سره

پرېکړه وکړئ، چې ایا لاندې وېناوې رښتیا او که نارښتیا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیل ځواب مدلل کړئ.

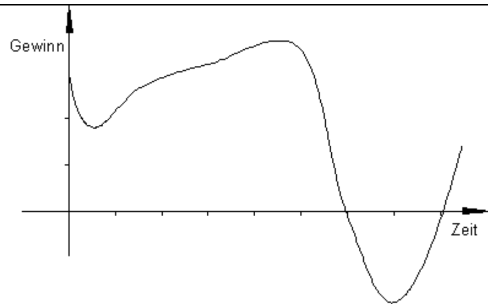
الف- د تابع ارزښتونه زیاتیز یا مثبت دي د ټول x – ارزښتونو لپاره.

ب- $f(x) < 0$ د ټولو $x€R$ لپاره.

پ- $f (x)$ د $x = 2$ لپاره منفي دی.

ت- یو ځای u شتون لري، چې د هغه لپاره $f (u) = f (u + 1)$ باور لري.

دویم: د رسم شوي تابعګراف تلنه تشریح کړئ. دلته هغه غوره ټکي په نخښخه کړئ. هغه ټکي، انتروالونه روښانه کړئ یا تشریح کړئ په کومو کي چې ته اقتصادي پسمنظر(د شاته پراته دلیل) فرمولبندي کوې.



کواوردیناتسیستم کې : پروت: وخت. ولاړ: ګټه

دریم: د یوه موټر د تیلو سوزول د چټکتیا په واک کي یا تابع دی. دا په ځنګ کي څیره د تیلو سوزول ښايي په لیتر په سل کیلو متر کي او د چټکتیا په واکوالي کي، که سری په څلورم ګیر Gang کي لاړ شي.

الف- کږه یا منحني روښانه کړه.

ب- په کومه چټکتیا کي استعمال ۶ لیتره په سل کیلومتر کي دی؟

پ- په کومه چټکتیا کي د تیلو سوزښت خورا کم دی؟

ت- کږه به ځنګه وځغلي، که په دریم ګیر کي سری لاړ شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د لمبا په ډنډ کې $40\ m^3$ اوبه دي. دا اوبه د ډنډ د پاکوالي له امله د پمپ کولو سره وباسي، چې په دقیقه کې 350 Liter لیتره اوبه وځي.

الف- یو ترم د پاتې حجم یا ډکې لپاره په m^3 وټاکئ.

ب- څومره m^3 د ۲۰ دقیقو وروسته په لمباډنډ کې لا پاتې ي.

پوښتنې

توابع V

لومړی:د تابع $f(x)$ماکسیمال تعریفورشو D_{max} پیدا کړئ

الف- $f(x) = 2 - 3x$ ب - $f(x) = \sqrt{2x - 3}$

ث- $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$ ت - $f(x) = -x^2 + 1$

دویم: د تابع $f(x)$ ارزښتورشو وټاکئ د $D = D_{max}$ سره.

الف- $f(x) = \dfrac{3}{2}x - 4$ ب - $f(x) = 1 + \sqrt{x + 1}$

پ - $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ت - $f(x) = x^2 - 5$

دریم: تابع $f(x)$ ورکړ شوې ده. ماکسیمال تعریفورشو D_{max} وټاکئ. د $f(x)$ګراف وکاږئ.

د $x \in \left\{k\,;\, -\dfrac{2}{k}\,;\, k+1\,;\, k-4\right\}$ لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

الف- $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ ب - $f(x) = 2x - \dfrac{2}{x}$ پ - $f(x) = x - x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ ټ - $f(x)=\sqrt{4-2x}$ ث - $f(x)=2^x-1$

څلورم: تابع $f(x)$ د $f(x)x^3$ سره ورکړشوې ده.

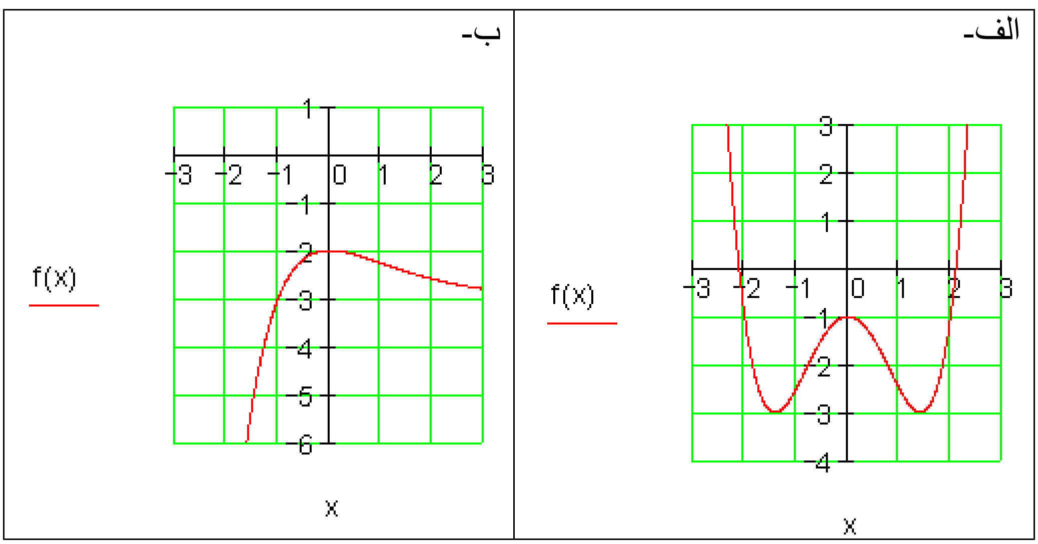
الف- ماکسیمال تعریفورشو D او ارزښتورشو W ورکړئ.

ب- د کوم $x \in D$ لپاره باور $f(x)=81$ لري؟

پ-د کوم $x \in D$ لپاره باور $f(x)\geq 9$لري؟

ت- و ښایئ: $f(x+1)=3.f(x)$ د ټولو $x \in D$ لپاره.

پنځم: تابع $f(x)$ د $D = IR$ لپاره تعریف ده. د رسمونو څخه ارزښت ډېرئ وښایئ.



پوښتنې

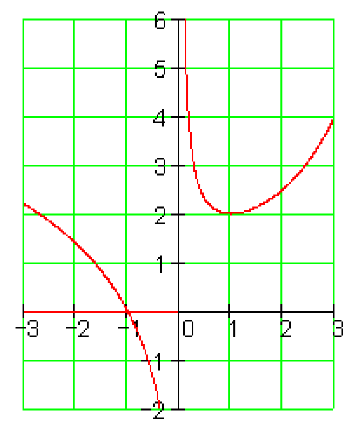
توابع VI

لومړی: د تابع$f(x)$ ارزښتښ د جبشمیري سره وشمیرئ

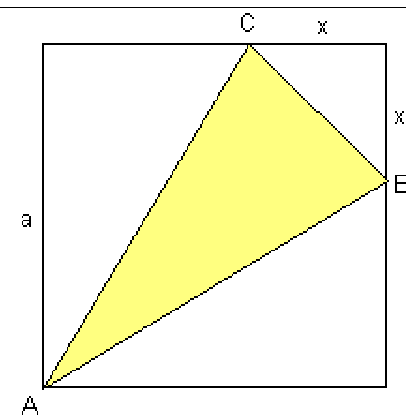
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{2}{5}x^3 - 2$ د D=R سره.

دویم:

دویم: ترڅنګ کړه د تابع f(x) ګراف دی؟ ایا f(x) د ټولو x€R لپاره تعریف دی؟ د x د کومو ارزښتونو لپاره تابع ارزښت - له 2 لوي دی؟ - له صفرکوچنی دی؟	

دریم:

یوه مربع یا خلورې د اړخ اوږدوالي a = 5 cm سره ورکړ شوې ده. د مثلث یا درېګوډيABC د سطحي ترم A(x) وټاکئ	

څلورم: د یوه مالک ټول لګښت K د یوه لاسته راوړنې سټ x په واکوالي کې په سټ واحد یا ډېرئ یوون (ME) د ترم له لارې لیکل کیږي

$K(x) = 0{,}01x^3 - x^2 + 100x + 720$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- د x -ارزښتونو لپاره تر 100 پورې ټول لګښت وشمیرئ. یو مناسبتلنلاري ډول وټاکئ او د ټول لګښت لیدځیره رسم کړئ.

ب- د هر سټ – یا ډېري واحد خرڅلاو99 پیسېواحده دی. لاس ته راونې (د پیسو ځومره دي، که x(ME د سټ واحد) په بازار کې خرڅ شي؟

په لرلې کواوردیناتسیستم کې د خرڅلاو(پیسو) د لیدلو ځیره و کاږئ.

پ-د لیدځیرې ځخه ولولئ:

په کومه ورشو یا ساحه کې ګټه منځ ته راځي؟ د کوم x –ارزښتونو سره به خورا لویه ګټه لاس ته راشي؟

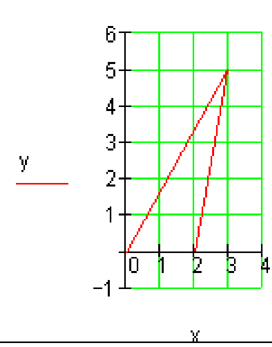
پوښتنې

توابعVII

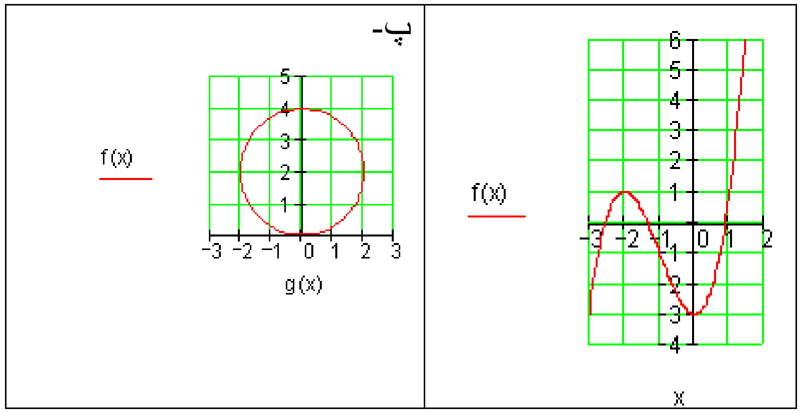
لومړی: توابع f(x) ورکړشوي دي. یو مناسب ارزښت جدول جوړ کړئ. له دې سره اړوند ګراف وکاږئ.

الف- $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب- $f(x) = x^2$

دویم: کوم ګراف په تابع $f : x \rightarrow f(x)$ پورې اړه لري؟ دلیل یې راوړئ.

الف-	ب –
	

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریم:د شمیرپوهنیز لنډ لیکدود سره یې فرمولبندي کړئ.

الف- په ځای3 کې تابع f(x) تابعارزښت 12 لري.

ب- د تابع f(x) له لارې د x -ارزښت سره عدد 4- تنظیمیږي.

پ-ټکی P (2 | 5) د f(x) په لیدخیره باندې پروت دی.

ت- f(x) د کومو ابسخیزا یا پراته ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 4 لري.

ټ- د f(x) تابع تابع ارزښت له 7لوی دی د ټول $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

ث- تابع f(x) د 17- ځای کې تا بع ارزښت 9 نیسي.

ج- توابع f او g د په ځای کې همغه ارزښت غوره کوي.

چ- په کوم ځای x کې fد تابعارزښت gد له تابعارزښت څخه کوچنی دی؟

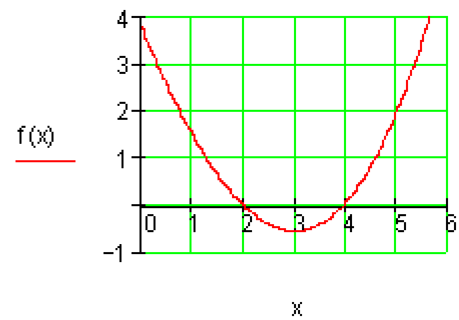
ح- د تابع f(x) د تابع ارزښت برابر 5 دی د ټولو $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

خ- د یوه کړې ټکي K_f کواوردیناتونه سره سر خوري.

څلورم: د یوه نظم لپاره د یوې روڅنۍ بیلګې نوم واخلئ، چې هغه تابع وي یا تابع نه وي.

پنځم: دا ترڅنګ کړه یا منحني د تابع f(x) ګراف دی. له ګراف څخه ولولئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف-د تابع ارزښت په ځای 5 کې

ب- يو ځای د $f(x)$ سره.

پ-په کوم ورشو $f(x) > 0$ باور لري؟

شپږم:کوم ارزښت جدول يوه تابع پورې اړه لري؟

الف -

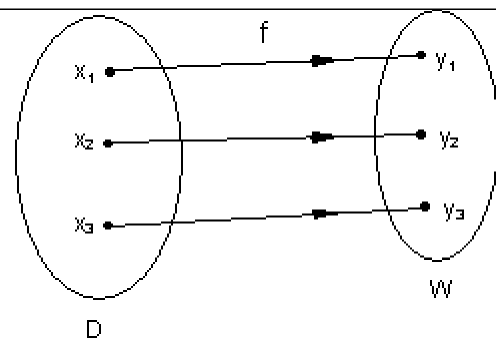
x	−1	0	1	2	3
y	4	0	−2	4	4

ب -

x	−1	0	3	3	4
y	8	7	2	4	5

توابع او په ښټ - يا معکوس توابع

تولیز:



د f د نظم قانون د تابع مساوات له لارې افاده کيږي، لکه د بيلګې په توګه

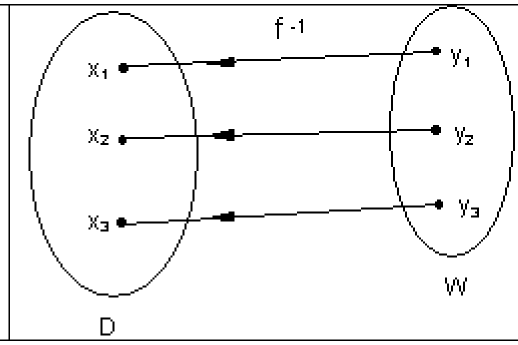
$$f = \{(x | y) | y = f(x) = 2x + 3\}_{D \times W}$$

يا په لنډه توګه:$y=f(x)=2x+3$

د يوه تابع د يو-يواځنوالي د f^{-1} يو-يواځنی نظم هم شتون لري.
دا نظم معکوس تابع يا په ښټ تابع يا انورز inverse تابع بلل کيږي، لکه د بيلګې په توګه.

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کرښیز توابعو معکوس توابع

تابع: $y = f(x) = 2x + 3$ $x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$ $\Leftrightarrow 2y + 3 = x \mid -3$ $\Leftrightarrow 2y = x - 3 \mid : 2$ $\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ معکوس تابع: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$	تابع $y = f(x) = 2x + 3$ ورکړ شوی غوښتنه معکوس تابع f^{-1} او د هغه ګراف ده تابع **f** جګوالی $m = 2$ لري. دا د خپل ګراف سره پروت محور په ټکي $P_x(-1,5 \mid 0)$ کې غوڅوي او ولاړ محور یا اوردینات په ټکي $P_y(0 \mid 3)$ کې غوڅوي. د هغه ګراف کرښنه ده. که د تابع اووښتوني یا متحولي یو له بل سره بدلې شي او د y پسې په ورته توګه ښه بدلون منځ ته راشي، نو سړی معکوس تابع لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معکوس تابع ګراف د تابع د ګراف هنداړونه(انعکاس) ده په 45^0- محور باندې.

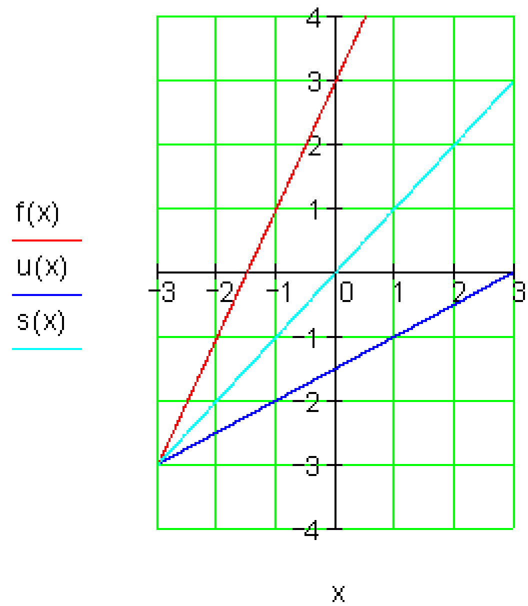
په تولیزه توګه باور لري:

تابع $y = f(x) = a_1 x + a_0$

معکوس تابع

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a_1}x + \frac{a_0}{a_1}$$

د ساده والي له امله معکوس تابع u(x) بولو.



مربع توابع

څلورۍ- یا مربع توابعو ته ننوتنه یا پیل

ننوتنه یا پیل

هرڅوک چي موټر زده کوي، باید پوه وي، چي د بریک په وخت کې په پاخه سرک د بریک نیولو او د موټر دریدځای په منځ کې لار یا واټن څنګه سره یوځای کیدی شي یا جمعه کیدی شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې موټر قانون سره سم له چټکتیا(سرعت) v په km/h (کیلومتر په ساعت) د عکس العمل لار r د بریک لار b په متر شمیرلکیدی شي.

پام (خبراوسه) : د بیلګې په توګه د المان پخوانی او له څخه نوي قانون.

له څخه د تملار په وچ اسفالت شوي سرک د پل بریکلار سره شمیرل کیږي.

د بریک لار $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ د عکس العمل لار $r = \frac{v}{10}\cdot 3$

یادونه: د څه وخت را په دې خوا په جرمني کې د بریکلار لپاره دا فرمول باور لري:.

$$b = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v}{10}\right)^2$$

د بریک همدا ډول د عکس العمل لار په متر (m) راوځي، که چټکتیا یا سرعت په کیلومتر په ساعت (km/h)وي.

الف – د دواړو حالتونو لپاره د s = f(v) تابع مساوات و ټاکی ، د کوم لپاره چې په هره تللي چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب - د تابع مشاوات s = f(v) د دواړو حالتونو لپاره د وهل شوی سرعت v = 0, 10, 20, 30, ... 100 km/h سره د ه یوه د ودرېد - یا توقف لار چې شمیرل کیږي.

پ : په کواوردیناتسیستم کې یا د وضعیه قیمتسیستم کې ګراف رسم کړی.

ت: ټوله لاس ته راوړې نتیجه تشریح کړی.

Problemlösung: د پرابلم حل:

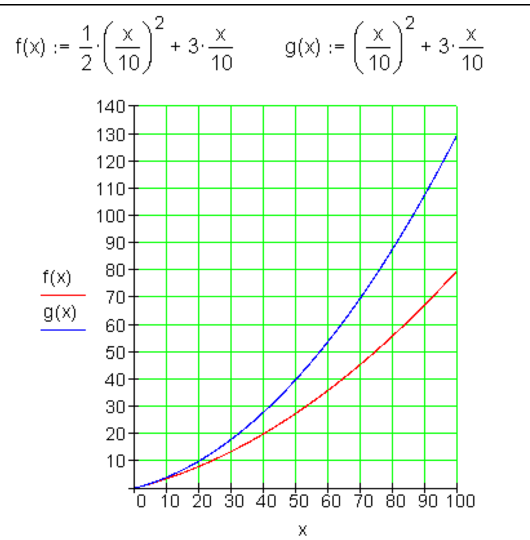
الف: د تابع مساوات:

$f(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10}\cdot 3 = \frac{1}{100}v^2 + \frac{3}{10}v$	زوړ قانون:
$f(v) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10}\cdot 3 = \frac{1}{200}v^2 + \frac{3}{10}v$	نوی قانون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - : ارزښتجدول(په کیلو متر په ساعت کې)

v (in km/h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
f(v) (in m)	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	alt
f(v) (in m)	0	3,5	8	13,5	20	27,5	36	45,5	56	67,5	80	neu



پ - ګرافونه

د x محور هر ه وهل شوې لار په km/h په ګوته کوي.

د y - محور د هر همغه د توقفلار په m په ګوته کوي.

ت – کومنتار

د نوي نظم وروسته د د چټکتیا(سرعت) زیاتیدنې توپیر تل زیاتیږي. د 50 km/h چټکتیا سره نوی د تم کیدلو لار 27,5 m ده، دا د زړې لارm 40 نږدې 69% ده. په 100 km/h دا نوې لار نوره فقط ده، دا د زړې 130 m لارېا نږدې 61% ده. د بریک نیولو لار کمېدنه د بریک ښه کیدو(ABS) سره موخه وره ده.

د تابع مساوات د ټیک پامورتیا او ګراف له امله موږ کره کوو، چې دا نه کرښیز مساوات دی او نه یوه کرښه. انځوروي.

د تابع مساوات لاندې بڼه لري:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

داسې تابع مربع تابع بولو او یا هم د2 –مې درجې ټول(تام) راشنل توابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګرافونه يې پارابول بلل کيږي.

تمرينونه:

د لاندې پارابولونو ګرافونه وکاږئ.

د دې لپاره ارزښت جدول ولیکئ

اول - $f(x)=x^2+4x-5$ دويم $f(x)=x^2+2x+5$

دريم - $f(x)=-x^2+x+6$ څلورم - $f(x)=x^2-x$

پنځم - $f(x)=x^2-\frac{1}{9}$ شپږم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+3$

اوم - $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ اتم - $f(x)=-2x^2+8x-11$

نهم م- $f(x)=3x^2-3x$ لسم - $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{2}x+10$

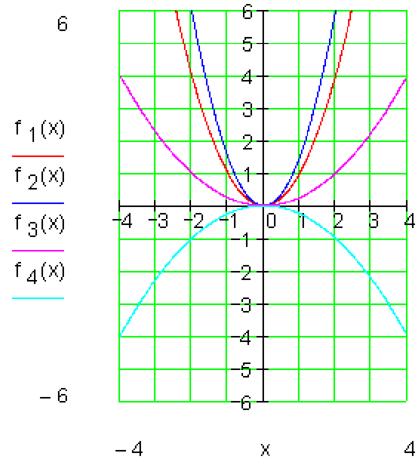
نورمال پارابل، بڼه ځل يا - ضريب او راکښني

د کار قرارداد:

د a2 د مختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x)=a_2x^2$ وخيرئ او ګراف په وضعيه قيمت سيستم کې وکاږئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

د انځور شوي پارابل تابع مساوات یو له بل د x^2 ضریب a_2 له امله توپیروي. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = \frac{3}{2}x^2$ $f_3(x) = \frac{1}{4}x^2$ $f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$ دا ضریب a_2 د پارابل د بنې لپاره مسول او له دې امله د بنې ضریب بلل کیږي. د تقاطع ټکی S وضعیه قیمتونه S (0 | 0) لري.	

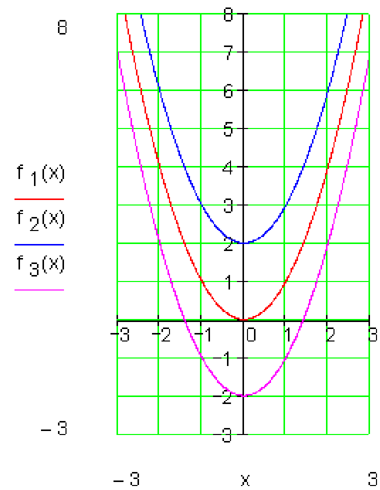
بنه ضریب د پارابل قواري یا شکل ته څنګه تغیر ورکوي؟

ضریب بنې	د پارابول په نخښه ونه
$a = 1$ → $a > 1$ → $0 < a < 1$ → $a = -1$ → $a < -1$ → $-1 < a < 0$ →	نورمال پارابو ل غزېدلی پارابول کېکاږلی پارابول په x محور هنداره شوی نورمال پارابول غزېدلی پارابول، په x -محور هنداره شوی کیکاږلی پاربول، په x –محور هنداره شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کار قرارداد:

د a_0 د مختلفو ارزښتونو لپاره د $f(x) = x^2 + a_n$ تابع مطالع کړی او په وضعیه قیمتسیستم کې یې ګراف رسم کړی: $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$

 	دا یو راکښلی نورمال پارابل دی، چې ککرئ ټکی(د ر آس نقطه) S دa_0 په واحدونو راکښل شوې ده. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$ راکښنه دy محور په اوږدوالي باندې صورت نیسي ، چېرته چې د راکښني لور د a_0د مخنښې له لارې ټاکل کیدی شي. د تقاطع ټکی S کواوردینات S (0 | a_0) لري. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$

د کار ورکوني قرارداد:

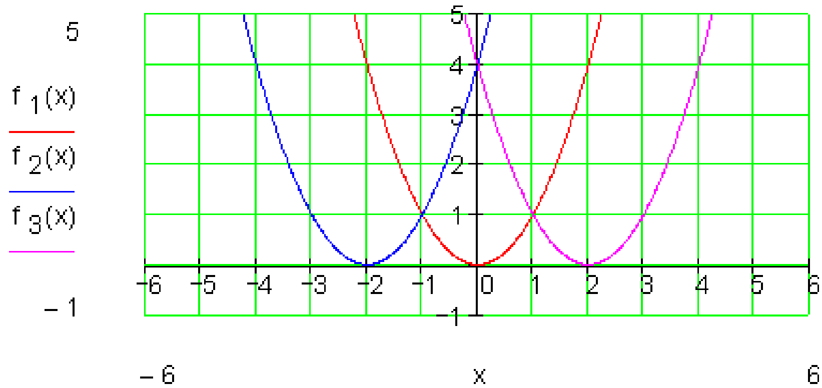
د$f(x) = (x+u)^2$ تابع د u د مختلفو ارزښتونو لپاره راکښنه وڅېړی او ګراف یې په وضعیه قیمتسیستم کې x رسم کړی

$f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = (x+2)^2$ $f_3(x) = (x-2)^2$

د ارزښت جدول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f_1	x	-2	-1	0	1	2	f_2	x	-4	-3	-2	-1	0	f_3	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4



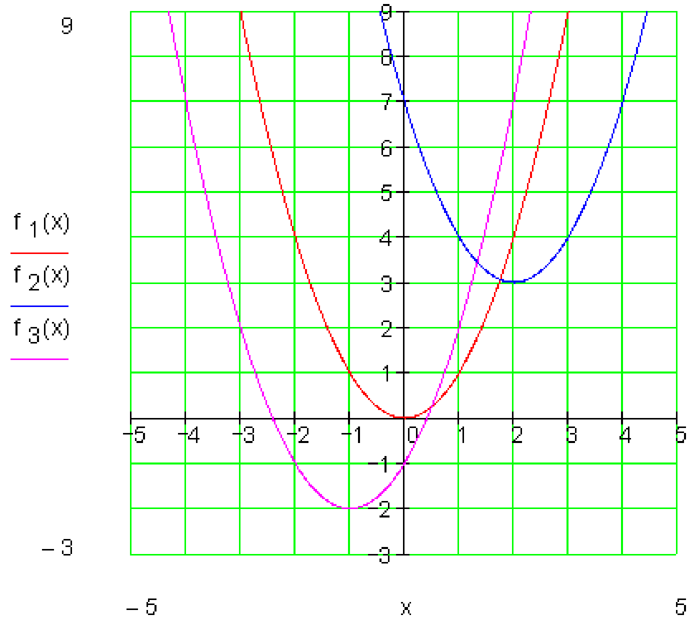
د ا يو راکښلی (چې ځای ته يې تغير ورکړ شوی وي) نورمال پارابول دی، چې ککرئ ټکی(د رأس نقطه) S يې د u په واحدونو(يوونونو) دx په محور راکښل يا کښول شوې ده. دS غوڅتکی(نقطه تقاطع) يې کواوردينات (-u | 0) Sلري.

کيڼې لور ته څرخون يا څرخول، ککرئ ټکیS په u واحدونو يا يوونوو د پيل يا سرچينې کيڼ لورت پروت دی.	u>0 =>
ښی څرخون يا څرخول، ککرټکی S په u واحدونو د پيل يا سرچينې ښیَ لورته پروت دی.	u<0 =>

د کار (ورکونې) قرارداد: د u اوa0 دمختلفو ارزښتونو لپاره تابع f(x) = (x+u)² + a0 وڅيړی او ګراف يې په يوه کواوردينات(پروت ولاړ) سيستم کې انځور کړی.

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = (x-2)^2 + 3 \qquad f_3(x) = (x+1)^2 - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د f_2 (x) ګراف بيرته يو نورمال پارابول دی، چې ککرئ ټکی S يې په دوه واحده ښی لور ته او په درې واحده پورته لور ته راکښلی دی.

د f_3 (x) ګراف هم يو نورمال پارابول دی، چې ککرټکی S (د رأسټکی) په يوه واحد(يوون) کيڼ او په درې واحده لاندې لور ته کښول شوی دی.

د $f(x) = (x + u)^2 + a_0$ ډول تابع د مربع تابع د ککرئ ټکي(رأس ټکي) بڼي تابع بلل کيږي.

د تابع ګراف نورمال پاربول دی، چې په u ارزښت دx محور په لور او په a_0 د yمحور په لور راکښل شوی دی.

که ککرټکی د $S(x_s | y_s)$ سره په نخښه کړو، نو د ککرټکي بڼي مربع تابع په دې ډول ده:

$$f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنده بڼه:	$S(x_s \mid y_s) \Leftrightarrow f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$
بیلګه:	$S(3 \mid -1) \Leftrightarrow f(x) = (x - 3)^2 - 1$

تر اوسه مو فقط نورمال پارابول راکښلی (را کش شوی) وو.

همدا یا برابره راکښنه کیدی شي د یوه په خوښه پارابول سره ورسول شي.

دلته دې بیا فاکتور a_2 په پام کې ونیول شي.

په ټولیزه توګه باور لري:

$Ist\ f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ د یوه نورمال پارابول تابع (بلوان) دی، چې ککرټکی (د رأس ټکی)

$S(x_s \mid y_s)$ لری، نو $f(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s$ د ککرټکي د تابع مساوات دي.

د خلورى تكميلوني له لارې د رآس ټكي(ككرى ټكي) ټاكل

مونږ پوهيږو چې صدق کوي:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \Leftrightarrow a_2(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow S(x_s \mid y_s)$$

په ككرټكي كې د ټوليز تابع مساواتو د ترم تابع له لارې كيدى شي د يوه پارابول ككرټكى (د ككرى ټكى) وشميرل شي.

بیلګه:

$F(x) = 3x^2 - 12x + 15$ دي په ككرئ ټكي مساوات واړول شي.

لوړمی پل(قدم) : د x^2 تر مخه ضریب دې له نوکانو راوه وېستل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\Rightarrow f(x) = 3[x^2-4x+5]$$

دویم پل : مربع تکمیلونه [ ] او بنه بدلون

$$\Rightarrow f(x) = 3.[x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2 + 5] = 3.[(x-2)^2+1] = 3.(x-2)^2 + 3 \Rightarrow S(2;3)$$

بیلګه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 8\right] = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 8\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow S\left(3 \mid -\frac{1}{2}\right)$$

بیلګه:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right] = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow S\left(-\frac{3}{4} \mid -\frac{9}{16}\right)$$

تمرینونه: د مربع تکمیلونې له لارې د رآس ټکي(ککرۍ ټکي) ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه پارابل تابع مساوات ورکړشوي دي(د دويمې درجې ټول راشنل تابع). د لاندې بارابولونو لپاره رآسټکو بڼه او رآسټکي پيدا کړئ.

ګرافونه يې وکاږئ:

لومړی: $f(x)=x^2+2x+5$ دويم: $f(x)=x^2+4x+1$

دريم: $f(x)=x^2-4x+1$ څلورم: $f(x)=x^2-3x+3{,}5$

پنځم: $f(x)=x^2+x-3$ شپږم: $f(x)=-x^2+2x+1$

اووم: $f(x)=-x^2+5x-5$ اتم: $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+2$

نهم: $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}$ لسم: $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

بيلګه 1 :

د ټول راشنل تابع ګراف چې رسم کړای شو،په زياتو حالتونو کې اړيند دی، چې ارزښتجدول وپيژنو. د دې لپاره جبشميري له لارې کيدی شي. خو دا هم تل اړيين دی.

يو ه ساده بيلګه بې له جبشميري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د متحولې $x = 0$ څخه پيل کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=0: f(0)=0^2-4\cdot0+3=0-0+3=3$$
$$x=1: f(1)=1^2-4\cdot1+3=1-4+3=0$$
$$x=2: f(2)=2^2-4\cdot2+3=4-8+3=-1$$
$$x=3: f(3)=3^2-4\cdot3+3=9-12+3=0$$
$$x=4: f(4)=4^2-4\cdot4+3=16-16+3=3$$
$$x=5: f(5)=5^2-4\cdot5+3=25-20+3=8$$
$$x=6: f(6)=6^2-4\cdot6+3=36-24+3=15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له ± 10 لوی شي، کېدی شي چې پېع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کیږي.

$$x=-1: f(-1)=(-1)^2-4\cdot(-1)+3=1+4+3=8$$
$$x=-2: f(-2)=(-2)^2-4\cdot(-2)+3=4+8+3=15$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کیږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f (x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د $f(x)$ ګراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمیرل کېدی شي

د بیلګې په توګه $x = \pm ½$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-\frac{1}{2}: f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}+2+3=5\frac{1}{4}=5,25$$

$$x=\frac{1}{2}: f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-2+3=1\frac{1}{4}=1,25$$

هر څوک له جبشميري سره بنه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شميروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

په لاندې کې HN د اصلي ګډ مخرج (ماتلاندې) په معنا دی.

يوه غوره بيلګه، چې ځنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي

د تابع مساوات $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

بادونه: په لاندې زيات ځايونه HN راغلي، دا د اصلی مخرج په مانا دي.

موږ د $x = 0$ سره پيل کوو

$$x=0: f(0)=\frac{4}{5}\cdot 0^2-\frac{3}{4}\cdot 0-\frac{7}{2}=0-0-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}=-3,5$$

$$x=1: f(1)=\frac{4}{5}\cdot 1^2-\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\equiv}\frac{16}{20}-\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{69}{20}=-3,45$$

$$x=2: f(2)=\frac{4}{5}\cdot 2^2-\frac{3}{4}\cdot 2-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\equiv}\frac{32}{10}-\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}$$

$$=-1,8$$

$$x=3: f(3)=\frac{4}{5}\cdot 3^2-\frac{3}{4}\cdot 3-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\equiv}\frac{144}{20}-\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{29}{20}=1,45$$

$$x=4: f(4)=\frac{4}{5}\cdot 4^2-\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}-3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\equiv}\frac{128}{10}-\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{63}{10}=6,3$$

$$x=5: f(5)=\frac{4}{5}\cdot 5^2-\frac{3}{4}\cdot 5-\frac{7}{2}=20-\frac{15}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=4}{\equiv}\frac{80}{4}-\frac{15}{4}-\frac{14}{4}=\frac{51}{4}=12,75$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې لیکل کیږي.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دي ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسي شمیرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x=\pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په پورته کې (HN(Hauptnenner داصلې مخرج(ماتلاندې) یا مخرج مشترک په معنا دی.

د دې لپاره چې د یوه ټول ریښتوني یا تام راشنل تابع ګراف انځور کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړیین دی، چې ارزښت جدول وکاږو. د دې لپاره یو جبشمیروني ته اړتیا لرو.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیرې ښخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د تحولې $x = 0$ ښخه پیل کوو

$$x = 0: f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$
$$x = 1: f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$
$$x = 2: f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$
$$x = 3: f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$
$$x = 4: f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$
$$x = 5: f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$
$$x = 6: f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له 10 $\pm$ لوی شي، کېدی شي چې پع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کیږي.

$$x = -1: f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$
$$x = -2: f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښنل کیږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د f(x) ګراف رسم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمېرل کیدی شي

د بېلګې په توګه $x = \pm ½$

$$x = -\frac{1}{2} : f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 2 + 3 = 5\frac{1}{4} = 5,25$$

$$x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 2 + 3 = 1\frac{1}{4} = 1,25$$

هر څوک له جبشمېري سره ښه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شمیروني یا کمپیوتر څخه کار واخلي.

یوه غوره بیلګه، چې ځنې برخې یې د جبشمیري په مرسته حل شوي دي:

د تابع مساوات $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

موږ د $x = 0$ سره بیل کوو

$$x = 0 : f(0) = \frac{4}{5}\cdot 0^2 - \frac{3}{4}\cdot 0 - \frac{7}{2} = 0 - 0 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} = -3,5$$

$$x = 1 : f(1) = \frac{4}{5}\cdot 1^2 - \frac{3}{4}\cdot 1 - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{16}{20} - \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{69}{20} = -3,45$$

$$x = 2 : f(2) = \frac{4}{5}\cdot 2^2 - \frac{3}{4}\cdot 2 - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{32}{10} - \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5} = -1,8$$

$$x = 3 : f(3) = \frac{4}{5}\cdot 3^2 - \frac{3}{4}\cdot 3 - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{144}{20} - \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{29}{20} = 1,45$$

$$x = 4 : f(4) = \frac{4}{5}\cdot 4^2 - \frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} - 3 - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{128}{10} - \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{63}{10} = 6,3$$

$$x = 5 : f(5) = \frac{4}{5}\cdot 5^2 - \frac{3}{4}\cdot 5 - \frac{7}{2} = 20 - \frac{15}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=4}{=} \frac{80}{4} - \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{51}{4} = 12,75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې لیکل کیږي.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسي شمیرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x=\pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټونه مربع توابع II

لومړی - د لاندې پارابولونو د تابع مساوات ورکړی:

الف- $f(x) = x^2 - 4x + 2$ ب – $f(x) = x^2 + 4x + 2$

پ – $f(x) = -x^2 - 4x + 3$ ت- $f(x) = -x^2 + 8x - 9$

ټ- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ ث – $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

ج – $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2$ چ – $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + 6$

ح- $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 7$ خ - $f(x) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

(۱) د ککرئ ټکي بڼه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوڅټکي وشمیرى.

(۳) پل په پل تشریح کړی، چې f(x) د نورمال پارابول حخه څنګه منځ ته راځي او دا څنګه واز دی.

(۴) په یوه مناسب پروتولاړسیستم کې د f(x) ګراف وکاږی

دویم – سړی کړی شي د نورمال پارابول څخه هر په خوښه پارابول د د غوڅټکي د راکښني له لارې او د پرسېدني یا غزوني له لارې منځ ته اوړي. که دا کښته لور ته واز وي، نو دا دx محور باندې هنداره کیږي یا منعکس کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه پارابول په هکله لاندې ټکي پیژنو:

	د y په لور راکښنه یا بدلون	د x په لور راکښنه یا ځای بدلون	Formfaktor بڼه ضریب
a)	په 2 واحدونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 1$
b)	په 4 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کیڼ لورته	$a_2 = -1$
c)	په 4 واحدونو کښته لور ته	په 2 واحدونو کیڼ لورته	$a_2 = \frac{1}{2}$
d)	په 5 واحدونو پورته لور ته	په 1 واحد ښي لورته	$a_2 = -2$
e)	په 3 واحدونو پورته لور ته	په 4 واحدونو کیڼ لورته	$a_2 = -\frac{1}{4}$
f)	په 6 واحدونو کښنه لور ته	په 2,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{3}{2}$
g)	په 3 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کیڼ لورته	$a_2 = -\frac{3}{4}$
h)	په 4,5 واحدونو کښنه لور ته	په 3,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 2$
i)	په 3 واحدونو یا یوونونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{1}{3}$
j)	په3 واحدونو پورته لور ته		$a_2 = -\frac{2}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 4 واحدونو بنې لورته

(۱) د ککرئ ټکي بڼه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوځېټکي وشمیری.

(۳) د تابع مساوات په پولینوم بڼه $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$? څنګه دي؟

(۴) په یو مناسب کواوردینات سیسم کې د f(x) ګراف وکاږی.

پوښتنې

د مربع توابعو بنسټونه IV

لومړی:

تابع f(x) ورکړ شوی دی. د شمېرنې له لارې وښایې، چې ګراف تابع په x محور کې لمسوي. ګراف وکاږی.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} \quad x \in \mathbb{R}$$

دویم: د تابع مساوات(f(x د محور غوځېټکي وشمیری، او ککری ټکي. ګراف یې رسم کړی.

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ پ- $f(x) = x^2 + 4x + 1$

ت - $f(x) = -0,25\left(4x^2 + 12x + 9\right)$ ټ _ $f(x) = 3x(1-x)$ ث-

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3}$$

دریم: دU = 18 cm محیط سره کوم مستطیل(ولاړکودیز) خورا لویه سطحه لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د توابعو $f(x)$ او$g(x)$ ګرافونه چيرته د x محور غوڅوي؟ ککرۍ چيرته پرتي دي؟ د دواړو ګرافونو ترمنځ کومې اړيکي پرتې دي؟ د ارزښت جدول په مرسته پوښتنې ځواب کړئ.

الف –

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-3,5$	$0,5$	$2,5$	$2,5$	$0,5$	$-3,5$
$g(x)$	4	0	-2	-2	0	4

ب –

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-12	-5	0	3	4	3
$g(x)$	$3,5$	0	$-2,5$	-4	$-4,5$	-4

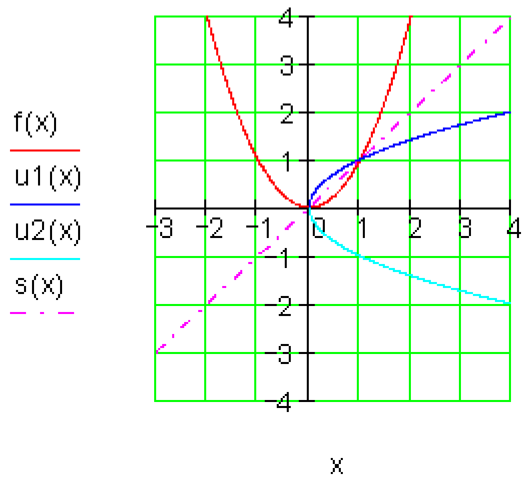
پنځم: د اړونده ګراف کوم خويونه د تابع مساوات څخه سيده لوستل کيدی شي؟

$$f(x) = -x^2 - x + 6;\quad g(x) = (2-x)(x+3);\quad h(x) = -(x+0,5)^2 + \frac{25}{4}$$

د مربع-يا څلورئ توابعو معکوس تابع

تلنلار (که غواړې: طريقه يا قانون) همداسې ده لکه پورته په کرښيزو توابعو کې چې وښوول شوه.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$y=(f(x)=x^2$

د متحولو x او y بدلول

$x=f(y)=y^2 \Leftrightarrow y^2=x$

ريښه نيونه:

له دې لاس ته راځي او برعکس

$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$

يا $y = -\sqrt{x}$

نو دوه معکوس توابع شتون لري:

$y = u_1(x) = \sqrt{x}$

او

$y = u_2(x) = -\sqrt{x}$

د معکوس تابع جوړولو سره تعريفورشو محدوده شوه، د دې لپاره چې يواځنی نظم منځ ته راشي

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښیزبرابرونسیستم د ۲ برابرونونو او ۲ متحولو سره.

داسي سیستم له دوه مساوتو څخه جوړ دی. غوښتونی د دواړو مساواتو ګډ حل دی. مختلفي تلنلارې شته، چې سرې حل ته ورسیږي

په لاندې einsetzen in = په ... کې ایښوول.

د جمعي تلنلار:

مساواتسیستم: (I) $5x - 2y = 1$ (II) $3x + 3y = 9$	د حل پل(قدم) غوښي(قطاع، که قطعه؟) د جمعي تلنلار ته لومړی امکان یا واریانت
(I) $5x - 2y = 1 \mid \cdot 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$ (I) $7,5x - 3y = 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$	لومړی: مساوات ورته داسي بڼه بدل کړئ، چې ضریبونه (ترمخ عددونه) د yمتحولي تر مخنخښي پورې سره سروخوري.
(I) $7,5x - 3y = 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$ (+) $10,5x = 10,5 \mid : 10,5$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$	دویم: منځ ته راغلي مساوات سره جمعه کړې او د **x** - متحولي پسې یې حل کړئ
په $3x + 3y = 9$ کې ایښوونه: $x = 1$	دریم: د **x** لپاره میندل شوي ارزښتونه د دواړو څخه په یوه مساوات کې کیږدئ او **y** پسې یې حل کړې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$3 \cdot 1 + 3y = 9$ $\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \mid -3$ $\Leftrightarrow \quad 3y = 6 \mid : 3$ $\Leftrightarrow \quad y = 2$	
$L = \{(1 \mid 2)\}$	ځلورم: حلسټ يا حلډېرۍ وليکۍ

پنځم:

ازماېښت د اېښووني له لارې

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

مساواتسيستم

$$(I) \quad 5x - 2y = 1$$
$$(II) \quad 3x + 3y = 9$$

د حل پلونه قدمونه د جمعي تلنلار لپاره

دويم واريانت

لومړی: مساوات داسي ورته بنهبدل کړئ، چي د **x** ضريبونه(ترمخعددونه) تر مخنخښي پورې سره يوغرېز شي.

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \mid \cdot 3$$
$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \mid \cdot (-5)$$
$$(I) \quad 15x - 6y = 3$$
$$(II) \quad -15x - 15y = -45$$

دويم: منځ ته راغلی مساوات سره جمعه کړئ او متحولې **y** پسې يې حل کړئ.

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & 15x - 6y = 3 \\ (II) & -15x - 15y = -45\end{array}\right\} +$$
$$-21y = -42 \mid : (-21)$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: بني لورته الماني د اينووني په مانا ده

$y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

د x لپاره ميندل شوي ارزښتونه له دي دوه پهيوه مساوت کي کيږدئ او د متحولې x پسې يې حال کړئ.

$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

ځلروم: حلستې يا د حلډېرئ وليکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

پنځم: د اينووني له لارې ازماېښت

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د برابراينووني تلنلار

د حل پل د برابراينووني تلنلار ته

واريانت 1

مساواتسيستم

$$(I) \quad 5x - 2y = 1$$
$$(II) \quad 3x + 3y = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
&(I) \quad 5x - 2y = 1 \mid +2y \\
&(II) \quad 3x + 3y = 9 \mid -3y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(I) \quad 5x = 1 + 2y \mid : 5 \\
&(II) \quad 3x = 9 - 3y \mid : 3
\end{aligned}
$$

لومړی: دواړه مساوات د اووښتوني یا متحولې **x** پسې حل کیږي.

$$
\begin{aligned}
&(I) \quad x = \frac{1+2y}{5} \\
&(II) \quad x = \frac{9-3y}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(I) \quad x = \frac{1+2y}{5} \\
&(II) \quad x = 3 - y
\end{aligned}
$$

دویم: د مساوات بنې ا ړخونه برابر اینسوول کیږي او د متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$
\begin{aligned}
\frac{1+2y}{5} &= 3 - y \mid \cdot 5 \\
\Leftrightarrow 1 + 2y &= 15 - 5y \mid +5y \\
\Leftrightarrow 1 + 7y &= 15 \quad \mid -1 \\
\Leftrightarrow 7y &= 14 \quad \mid : 7 \\
\Leftrightarrow y &= 2
\end{aligned}
$$

دریم: (د کین لور الماني په ښنتو: اینسول په ..کې)

د **y** میندل شوی ارزښت د دواړو څخه په یوه وتونمساوات کې اینسوول کیږي، او دا بیا د متحولې **x** پسې حل کیږي.

$y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$
\begin{aligned}
3x + 3 \cdot 2 &= 9 \\
\Leftrightarrow 3x + 6 &= 9 \mid -6 \\
\Leftrightarrow 3x &= 3 \mid : 3 \\
\Leftrightarrow x &= 1
\end{aligned}
$$

څلورم: حلسټ یا ـدېرئ ولیکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم: د ځا په ځای کولو یا اینوولو له لارې ازماېښت

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x - 2y = 1$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9$$

د حل پل د برابراینوولو له لارې

واریانت 2

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \mid -5x$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \mid -3x$$
$$(I)\quad -2y = 1 - 5x \mid : (-2)$$
$$(II)\quad 3y = 9 - 3x \mid : 3$$
$$(I)\quad y = \frac{1 - 5x}{-2}$$
$$(II)\quad y = \frac{9 - 3x}{3}$$
$$(I)\quad y = \frac{5x - 1}{2}$$
$$(II)\quad y = 3 - x$$

لومړی: دواړه مساوت د اووښتونې یا متحولې **y** پسې حل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم: د دواړو مساواتو ښئ خوا برابره ليکل يا اينسوول کيږي او د متحولې **x** پسې حل کيږي.

$$\frac{5x-1}{2} = 3-x \mid \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 5x-1 = 6-2x \mid +2x$$
$$\Leftrightarrow 7x-1 = 6 \mid +1$$
$$\Leftrightarrow 7x = 7 \mid :7$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

دری(ښئ الماني: اينسوول په ...کې)

د x ميندل شوی ارزښت د دداړو وتونمساواتو څخه په يوه کې اينسوول کيږي، دا بيا د متحولې **y** پسې حل کيږي.

x = 1 eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$3 \cdot 1 + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \mid -3$$
$$\Leftrightarrow 3y = 6 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

څلورم: د حلسټ وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$$

پنځم د اينسوونې له لارې ازماېښت

$$\text{(I)} \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$\text{(II)} \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د اينسووني تلنلار: د اينسووني تلنلار لپاره د حل پلونه(قدمونه)

وارينت 1

مساواتسيستم

$$\text{(I)} \quad 5x - 2y = 1$$
$$\text{(II)} \quad 3x + 3y = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: مساوات(I) د **x** پسې خل کيږي.

$$(I)\ 5x - 2y = 1 \mid +2y$$
$$\Leftrightarrow 5x = 2y + 1 \mid :5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$
$$3\left(\frac{2}{5}y + \frac{1}{5}\right) + 3y = 9$$

دويم: د بني اړخ ميندل شوی ترم په مساوات **(II)** کې ايښوول کيږي او د **y** پسې حل کيږي.

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + \frac{3}{5} + 3y = 9 \mid -\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + 3y = 9 - \frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{21}{5}y = \frac{42}{5} \mid \cdot 5$$
$$\Leftrightarrow 21y = 42 \mid :21$$
$$\Leftrightarrow y = 2$$

دريم: د **y** لپاره ميندل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساواتو کې ايښوول کيږي، دا بياپه **x** پسې حل کيږي.

$$y = 2 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$
$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

څلورم: د حل سټ وليکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

پنځم: د ايښوولو له لارې حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د حل پلونه(قدمونه) د اينوولو تلنلار لپاره

واريانت 2

مساواتسيستم

$$(I)\qquad 5x - 2y = 1$$
$$(II)\qquad 3x + 3y = 9$$

لومړی: مساوات**(II)** د متحولې **y** پسې حل کيږي.

$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \mid -3x$$
$$\Leftrightarrow \quad 3y = 9 - 3x \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 3 - x$$

دويم: دېنې لور ميندل سوی ترم په مساوات **(I)**کې کيږدئ او په **x** پسي يې حل کړئ.

$$y = 3 - x \text{ eingesetzt in } (I): 5x - 2y = 1$$
$$5x - 2(3 - x) = 1$$
$$\Leftrightarrow 5x - 6 + 2x = 1 \mid +6$$
$$\Leftrightarrow 7x = 7 \mid : 7$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

3. دريم: د **x** لپاره ميندل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساوتو کې اينوول کيږي، او دا بيا د متحولې **y** پسې حل کيږي.

$$x = 1 \text{ eingesetzt in } (II): 3x + 3y = 9$$
$$3\cdot 1 + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \mid -3$$
$$\Leftrightarrow 3y = 6 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم: جلسټ ولیکئ

$L = \{(1|2)\}$

پنځم: ازماېښت د اینوولو له لارې

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

ټولې درې تلنلارې د هغه د واریانتو سره پہ یوه ټکلي مساوتسیستم وکارول شو. که څوک یوګوني تلنلرې ټیک وګوري، پیژني، چې په واریانت ۲ کې لږ د شمیرلو کار غوښتونی دی.

په یوه ټاکلي تلنلار د شمیرلو کار د دې حل کوونکي مساوتسیستم په واک کې دی. له دې امله دې لومړی پام وشي، چې کومه تلنلار د لږ کار سره سرته رسیدی شي. د دې لپاره نو یو څو بیلګو ته اړ یو. لاندې بیګې دي د دې لپاره یوه کوچنۍ مرسته وي، چې مناسب د حل – یا ځواب تلنلار پیداشي.

د مناسب ځواب تلنلار لپاره بیلګې

بیلګه ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>

x1=-1 په (1) کې اینوونه y=7x+8

$$\begin{aligned} & y = 7\cdot(-1)+8 \\ \Leftrightarrow\ & y = -7+8 \\ \Leftrightarrow\ & \underline{\underline{y = 1}} \end{aligned}$$

حل: L={(-1|1)}

ازماینت

$$\begin{aligned} & (I)\ \ y = 7x+8 \Rightarrow y = 7\cdot(-1)+8 \\ & \Leftrightarrow y = -7+8 \Leftrightarrow y = 1\ (w) \\ & (II)\ y = -2x-1 \Rightarrow y = -2\cdot(-1)-1 \\ & \Leftrightarrow y = 2-1 \Leftrightarrow y = 1\ (w) \end{aligned}$$

</td>
<td>

$(I)\ \ y = 7x+8$

$(II)\ y = -2x-1$

د برابر اینووني لار

$$\begin{aligned} & 7x+8 = -2x-1 \,|\, +2x \\ \Leftrightarrow\ & 9x+8 = -1 \,|\, -8 \\ \Leftrightarrow\ & 9x = -9 \,|\, :9 \\ \Leftrightarrow\ & \underline{\underline{x = -1}} \end{aligned}$$

</td>
</tr>
</table>

بیلګه۲:

<table>
<tr>
<td>

Y=3 اینوونه په (1) کې 2x+4y=8

حل:

$$\begin{aligned} & 2x-12 = 8 \,|\, +12 \\ \Leftrightarrow\ & 2x = 20 \,|\, :2 \\ \Leftrightarrow\ & \underline{\underline{x = 10}} \end{aligned}$$

ازماینت

$$\begin{aligned} & (I)\ \ 2x+4y = 8 \Rightarrow 2\cdot 10+4\cdot(-3) = 8 \\ & \Leftrightarrow 20-12 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8\ (w) \\ & (II)\ 2x-5y = 35 \Rightarrow 2\cdot 10-5\cdot(-3) = 35 \\ & \Leftrightarrow 20+15 = 35 \Leftrightarrow 35 = 35\ (w) \end{aligned}$$

</td>
<td>

$(I)\ \ 2x+4y = 8$

$(II)\ 2x-5y = 35$

د جمعي تلنلار:

$$(II)\ \ 2x-5y = 35 \,|\, \cdot(-1)$$

$$\left.\begin{aligned} (I)\quad & 2x+4y = 8 \\ (II)\quad & -2x+5y = -35 \end{aligned}\right\}+$$

$$\begin{aligned} & 9y = -27 \,|\, 9 \\ \Leftrightarrow\ & \underline{\underline{y = -3}} \end{aligned}$$

</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ :

(I) $x + 2y = 5$ (II) $-x + y = 1$ د اينووني لار; (II) په y پسي حل کړئ $-x + y = 1 \mid +x$ $\Leftrightarrow \quad y = x + 1$ په (I) کې کيږدئ x+2y=5 $x + 2(x + 1) = 5$ $\Leftrightarrow x + 2x + 2 = 5 \mid -2$ $\Leftrightarrow \quad 3x = 3 \mid : 3$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$	X=1 په (1) کې کيږدئ x+2y=5 $1 + 2y = 5 \mid -1$ $\Leftrightarrow 2y = 4 \mid : 2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$ حل: L= {(1|2)} ازماېښت (I) $x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 4 = 5$ $\Leftrightarrow 5 = 5 \ (w)$ (II) $-x + y = 1 \Rightarrow -1 + 2 = 1 = 35$ $\Leftrightarrow 1 = 1 \ (w)$ wد رښتيا لپاره

بيلګه ۴ : په لاندې: einsetzen اينسوونه په (1)کې اوبيونه يا حل:Lösung
ازماېښتProbe د زياتون يا جمعې
لار:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(I)} & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ \text{(II)} & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2|-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II) & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2\,|\,-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II) & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$
$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$
$$\Leftrightarrow -5=y$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$
$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2|-5)\}\ x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\Rightarrow\frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\Leftrightarrow 2=2\ (w)$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\Rightarrow\frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$
$$\Leftrightarrow 6-2=4\Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

یادونه:

مساواتسیستم د کسرونو ترمونو څخه جوړ دی. دا چي مخرج دد صفر کیدو اجازه نه لري یا نه شي صفر کیدی، تعریفست باید ورکړ شي. داسئ مساواتسیستم کرښیز نه دی.

د رسموني لار

$$(I)\quad x-y=-2\quad L_I=\{(-2|0);(-1|1);(0|2);(1|3);\ldots\}$$
$$(II)\ \wedge\ -2x-y=1\quad L_{II}=\{(-2|3);(-1|1);(0|-1);(1|-3);\ldots\}$$

دواړه مساوات د y پسې حل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هر مساوات لپاره ارزښتجوړې د حل سټ په ګوته کوي.

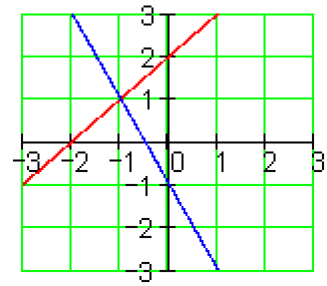
$$\begin{array}{lll} (I) & x - y = -2 & \mid +y \\ (II) & -2x - y = 1 & \mid +y \\ \hline (I) & x = -2 + y & \mid +2 \\ (II) & -2x = 1 + y & \mid -1 \\ \hline (I) & x + 2 = y \Leftrightarrow y = x + 2 & \\ (II) & -2x - 1 = y \Leftrightarrow y = -2x - 1 & \end{array}$$

کا دا په يوه کواوردیناتسیستم کې وکښل شي، نو دوه کرښې ترې لاس ته راځي. د کرښو په غوڅېدکي يا نقطه تقاطع کې د دواړو مساواتو حلسټ پروت دی.

حلسټ يا-ډېرئ: L={(-1|1)}

په هر مساوات کې د x لپاره عددونه اېښوول کېږي.

x	-2	-1	0	1
y_I	0	1	2	3
y_{II}	3	1	-1	-3



د رسموني لار د مساوات او کرښو ترمنځ هندسي(ځمککچيزې) اړيکې ليدوړ کوي. د حل لار په حيث زيات وخت مناسب نه دی، چې د ګډغوڅېدکي کواودينات په ګرفيک کې ناټيک لوستل کيدی شي.

برابرون – يا مساواتسيستم بې له يواځني حل څخه

رسميزه حل يا درسم له لارې حل د مساوات او کرښې ترمنځ هندسي اړيکې ليدوړ کوي.

- دوه کرښې کيدی شي چې نسبت يو بل ته مختلف پروتځايونه ولري.

- دا کيدی چې په يو ټکي کې سره غوڅې کړي، لکه پورته بيلګه چې ليدوړ کوي، د دواړو کرښيز مساوات لپاره ټک يو حل شتون لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دا کیدی شي یو بل سره غبرګې وي، نو په دې حالت کې کوم ټکی نه شته، چې دواړه کرښې یې یو له بل سره ګډ ولري. له دې سره اړونده مساوات له دې امله حل نه لري.

- دا کیدی شي یو په بل پرتې وي، یعنې کټمټ وي، نو هر ټکی د یوې کرښې به د بلې کرښې ټکی هم وي. نو له دې امله به دااړونده مساوات ناپای زیات حلونه ولري.

مساوات سیستم حل نه لري چې دا د حل پیل مو یوه . لیدوړ دا په دې معنا دی، ې ځغلي او کوم ګډ ټکی نه لري.	$(I)\quad 10x+4y=4$ $(II)\quad 5x+2y=1\,\vert\cdot(-2)$ $(I)\quad 10x+4y=4$ $(II)\ -10x-4y=-2\,\vert$ $+$ 0=2 نو دا ناټیک وینا ده، له دې لاس ته را ځي{}=L

دا مساواتسیستم ناپای ډېر ځوابونه یا حلونه لري

د ورته بڼه بدلون وروسته د مساوات (I) او مساوات (II) جمعه کونې یو بل سره پورته کوي یا له منځه وړي، دا په دې معنا چې مساوات ورته یا ایدنتیک دي. هره د اعدادو جوړه، چې مساوات (I) پوره کوي،دا مساوات (II)هم پوره کوي. لیدوړ دا په دې معنا دی، چې کرښې یو په بل پرتې دي.	$(I)\quad 10x+4y=2$ $(II)\quad 5x+2y=1\,\vert\cdot(-2)$ $(I)\quad 10x+4y=2$ $(II)\ -10x-4y=-2\,\vert$ $+$ 0=0 له دې لاس ته راځي رښتیا وینا

پوښتنې

مساواتسیستم I

مساوات سیستم ته د دوه متحولو سره ګډوله پوښتنې، کرښیزمساواتسیستم، سیستم د کسري ترمونو سره او شي پوښتنې(د متن سره پ،ښتنې)

لومړی: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف- $\begin{cases} (I) & 5y - 3x = 1 \\ (II) & x = y + 1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} (I) & 4x + 5y = 32 \\ (II) & y = 5x - 11 \end{cases}$

پ- $\begin{cases} (I) & 15y - 4x = -50 \\ (II) & x = y + 7 \end{cases}$ ت - $\begin{cases} (I) & 3x = y + 15 \\ (II) & 2y - 10 = 2x \end{cases}$

د ویم: د لاندې مساواتسیستم حلستې وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $\begin{cases} (I) & 2y = 2x - 40 \\ (II) & 3x = 10 - 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} (I) & \frac{x}{2} - \frac{3y}{5} = 3 \\ (II) & \frac{x}{4} + y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (I) & \frac{2x}{15} + \frac{7y}{12} = 3 \\ (II) & \frac{7x}{25} - \frac{5y}{16} = \frac{3}{20} \end{cases}$

d) $\begin{cases} (I) & \frac{x+5}{y-7} = \frac{4}{3} \\ (II) & \frac{x+2}{y-5} = \frac{5}{8} \end{cases}$

دریم: د لاندې مساواتسیستم حلستې وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $\begin{cases} (I) & \frac{4}{3x+1} = \frac{2}{3y-13} \\ (II) & \frac{2}{5x-10} = \frac{4}{7y-6} \end{cases}$

b) $\begin{cases} (I) & \frac{7}{x} - \frac{12}{y} = \frac{5}{6} \\ (II) & \frac{4}{y} + \frac{5}{2} = \frac{9}{x} \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c)
(I) $\frac{4}{x}+\frac{8}{y}=\frac{5}{3}$
(II) $\frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-\frac{1}{6}$

d)
(I) $\frac{3}{2x-1}-\frac{8}{3y+2}=-\frac{1}{5}$
(II) $\frac{5}{2x-1}+\frac{4}{3y+2}=\frac{8}{15}$

څلورم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

(I) $\frac{7}{2x-5}-\frac{9}{7y+5}=\frac{10}{3}$ (II) $\frac{24}{2x-5}+\frac{15}{7y+5}=\frac{19}{3}$

پنځم: یو پلار په دې لحضه کې څلورواره دومره عمر لري لکه ځوي یې او په ۵ کاله کې به فقط درې واره دومره عمر ولري. دا دواړه همدا اوس څومره عمر لري؟

شپږم: په کوم وخا کې به یو (اوبه) ساتونی (بیلر؟) له دوه نلونو څخه نیمم ډک شي، چې لومړی نل د ټول ساتوني د ډکولو لپاره ۱۸ دقیقې اودویم د دې لپاره ۲۲ دقیقو ته اړتیا ولري یا په کار ولري؟

اوم: د یوه مستېیل یا ولاړکونجیزچاپیریال یا محیط ۱۸۰ سانتي متره دی. اړخa څومره اوږد دی، که اړخ b ۳۰ سانتي متره وي؟

اتم: که د دوه ارزښتځاییزه پرته جمعه یا پروت زیاتون عدد9 دی. که ارزښتونه بدل شي، نو نوی عدد لاس ته راځي چې د زاړه عدد 7/4 ده. دواړه ځا ارزښتونه څومره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

توان- یا پوتنخ توابع

توان توابع

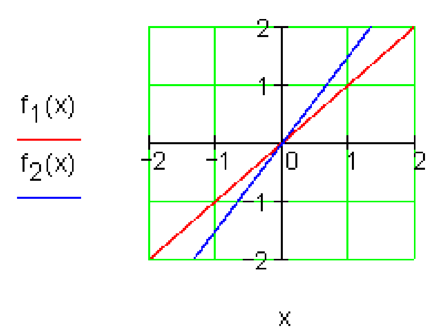
تعریف:

یوه تابع د تابع مساوات $f(x) = a_n x^n \quad ; n \in \mathbb{N} \quad ; a_n \in \mathbb{R}$ سره پوتنخ تابع بلل کیږي.

د n اکپوننت یا جګعدد د پوتنخ تابع درجه ټاکي او ضریب an د ګراف بڼه یا فورم او هغه د بني ضریب بلل کیږي.

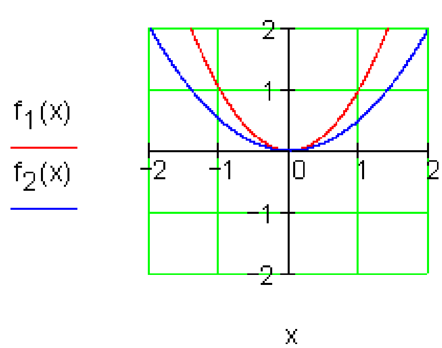
بیلګي:

$f_1(x) := x \qquad f_2(x) := \frac{3}{2} \cdot x$

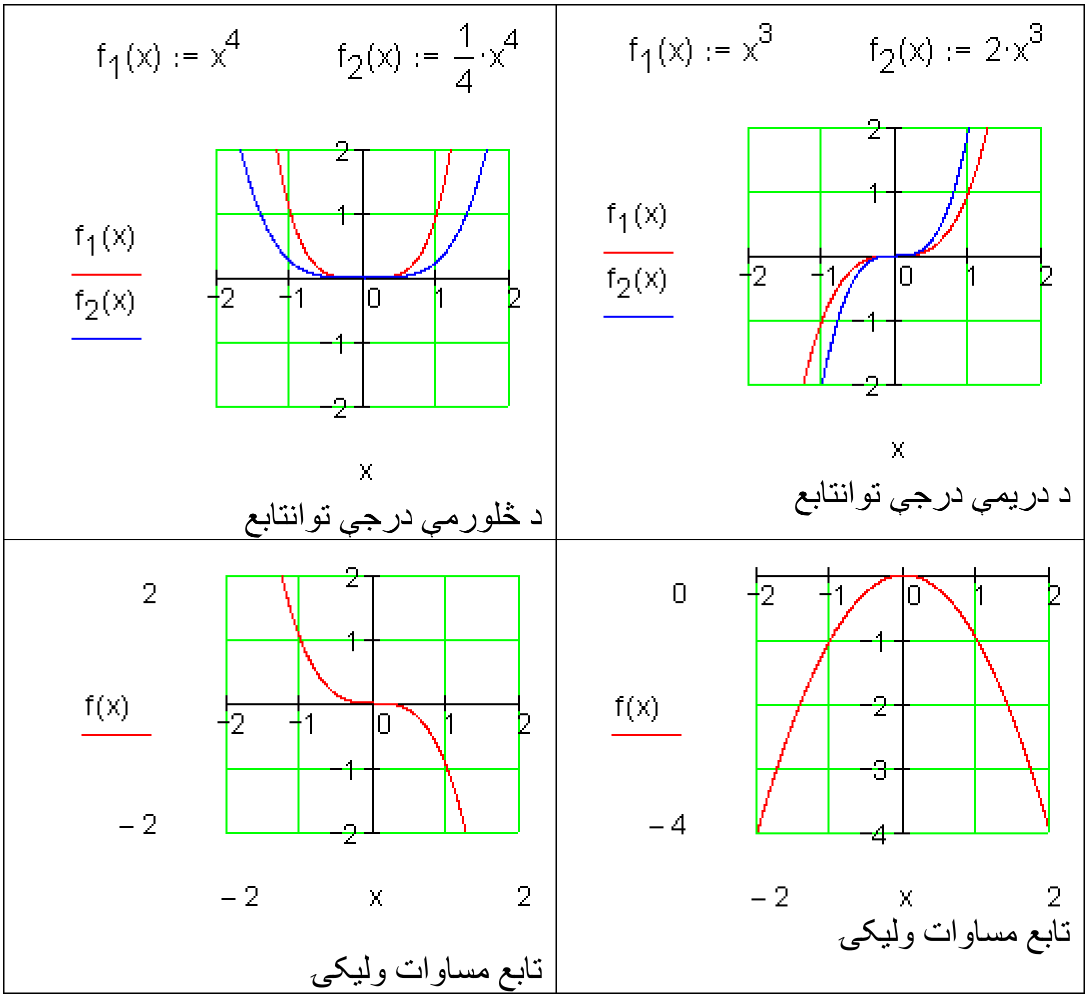


د لومړی دزجي توان تابع(کرښه)

$f_1(x) := x^2 \qquad f_2(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2$



د دویمي درجي توان تابع (پارابول)



لاندې پوښتنې ځواب کړی:

ب – د n درجه او د a_n مختخبنه د ګراف په تلنه کومه اغيزه لري؟

پ – د پوتنځ تابع د n درجه د ګراف په سيومتري کومه اغيزه لري؟

ت – د پوتنځ تابع د n په واکولي او د a_n مختخبنې له امله کوم ارزښتسټ(ارزښتډيرې) لري؟

ټ - د a_n مطلق ارزښت د ګراف په تلنه کوم اِيز لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه لړ ورروسته راځي.

سيومتري

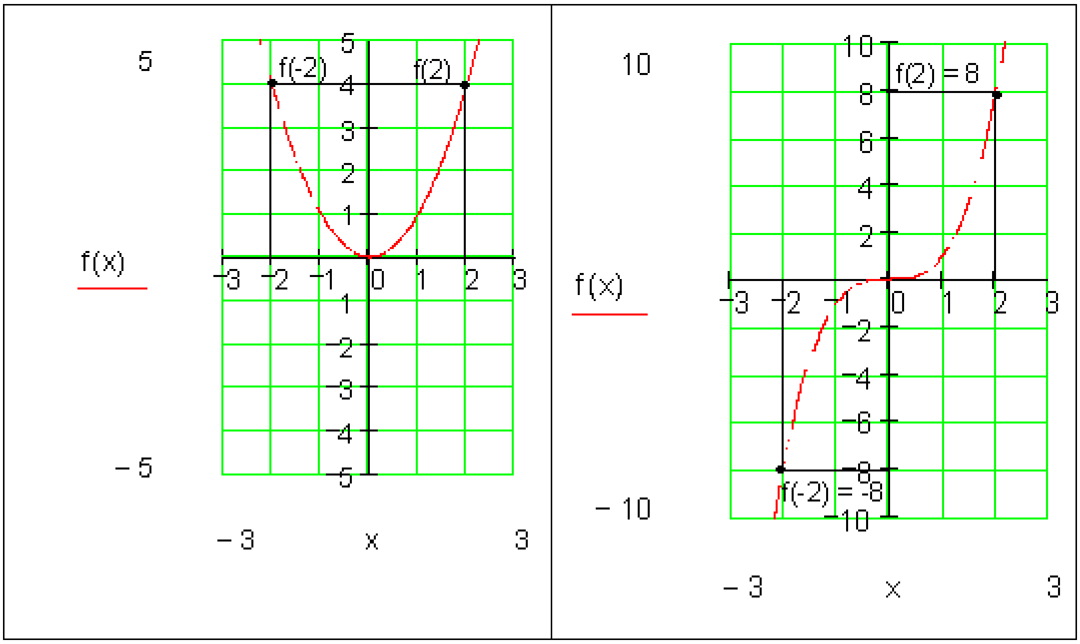
په سيومتري څنګه قضاوت کيدی شي، که څوک فقط د يوه توان(پوتنځ) تابع تابع مساوات پيژني؟

د دې لپاره د لاندې توابعو ګرافونه کاږو:

$f(x)=x^2$ او $f(x) = x^3$

او تابع د $x=-2$ او $x=2$ په ځايونو کې تر څېړنې لاندې نيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګومان مو نږدې دی چې لاندې باور لري:

دx د جوړه ځګعددسره د تابع ارزښتونه برابر دي. دا په دې معنا چې :

محورسیمتریک، نو $f(-x) = f(x)$

د x ناجوړه(طاقو) ځګعددونو لپاره د تابع ارزښت برابر مطلق قیمت لري، مګر متضادې مخنښې لري.

دا په دي معنا چې:

ټکی سیومتریک، نو $f(-x) = -f(x)$

دا اړیکې د ټولو تانتوابعو لپاره باور لري (بې له ښوونې).

د یوه توان - یا طاقت تابع محورسیومتریک دی، که د ټولو $x \in D$ ؛ لپاره باور ولري: f(-x)=f(x)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه توانتابع ګراف ټکی سیمتریک دی،که د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري $f(-x)= - f(x)$

ټولګه:

د $a_n > 0$ لپاره باور لري:

ټول توا‌ان توابع د جوړه جګعدد سره محور سیومتریک دي. دا له II د I. څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکیسیومتریک دي. دوی له .IIIو I. څلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

د ټولو 0 > لپاره باور لري:

ټول توا‌ان توابع د جوړه جګعدد سره محور سیومتریک دي. دا له III د .IV څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکیسیومتریک دي. دوی له .IIو .IV څلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

تمرینونه:

د توان تابع خویونه.

د لاندې توانتوابعو درجه وټاکی، په سیمتریکي حالت، د ګراف په تلنه او او ارزښت دېرې یې یوه وینا وکړی د د هر ګراف یې په پروت ولاړسیستم (کواوردینات سیستم) کې رسم کړئ.

لومړی - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ دویم - $f(x) = \frac{1}{4}x$

دریم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^4$ څلورم - $f(x) = \frac{1}{5}x^3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^5$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^3$ اتم - $f(x) = 2x^2$

نهم - $f(x) = \frac{1}{5}x^4$ لسم - $f(x) = -\frac{2}{5}x^4$

کربنیز ې توابع د ورکړشوو شرایطو سره

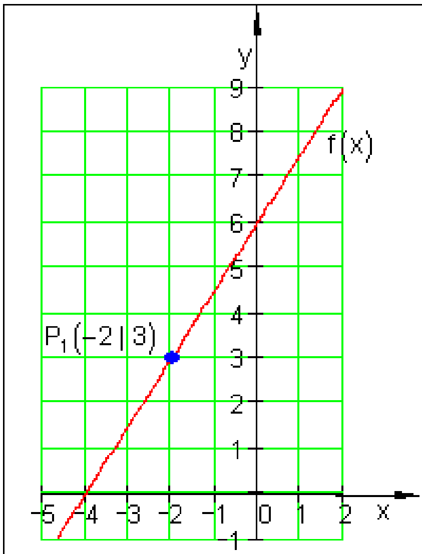
. لومړی حالت : د P تکي څخه تیرې کربښې د a_1 جګوالي سره

بیلګه:

یوه کربښه د a_1 د جګوالي سره د $P_1(x_1 \mid y_1)$ په تکي کې ځغلي.

د $f(x) = a_1x + a.$ تابع مساوات دې پیدا شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



جګوالی: $a_1 = 1,5$: تکی $P_1(-2|3)$

وتونمساوات $f(x) = a_1 x + a_0$

جګوالی ځای په ځای کړی

$f(x) = 1,5 \cdot x + a_0$

د a_0 لپاره دې ارزښت وشمیرل شي.

د $P_1(-2|3)$: لپاره ازمايښت

$$\begin{aligned} f(-2) = 3 \Leftrightarrow \quad 1,5 \cdot (-2) + a_0 &= 3 \\ \Leftrightarrow \quad -3 + a_0 &= 3 \mid +3 \\ \Leftrightarrow \quad a_0 &= 6 \end{aligned}$$

د تابع مساوات $f(x) = 1,5 \cdot x + 6$

ازمايښت:

$$P_1(-2|3) \Leftrightarrow f(-2) = 3$$

$$f(-2) = 1,5 \cdot (-2) + 6 = -3 + 6 = 3$$

بیلګه:

د حیواناتو ساتونکی د وښو اوتومات څخه د روځې 7,5 kg خوراک شته. دولس روځې، وروسته له هغې چې زیرمه له غذايي موادو ډکه شوې وه، هلته نور 250 kg پاتې دي.

الف - يو تابع مساوات ولیکی، چې دا حالت تشریح کړي

ب - په څومره ستې یا ډیری به دا د وښو زیرمه دولس ورځې د مخه ډکه شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل و الف ته - دx محور: وخت په ورځو

y محور : د وښو زېرمه په کیلوګرامkg .

$$f(x) = -7{,}5x + a_0$$

$$P(12 \mid 250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7{,}5 \cdot 12 + a_0 = 250$$

$$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 \mid +90$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -7{,}5x + 340}}$$

حل و ب ته- د ډکیدنې وخت $x = 0$ دی.

$$\Rightarrow f(0) = -7{,}5 \cdot 0 + 340 = 340$$

د وښو شتون دولس12 ورځې د مخه په 340 kg ډک شوی .

لکه څنګه په لومړي حالت کې چې د یوې کرښې جګوالی او یو ټکی معلوم دي، شمېرنه په همغه ډول د ورکړشوو داتن یا داتا Daten سره مخ ته ځي.

په داسې حالت کې شمیرنه ټویزه سرته رسیږي. دا مو بیا یو فرمول ته لاربنوده وي.

یوه کرښه دa_1 جګوالي سره د$P_1(x_1 \mid y_1)$ ټکي څخه تیرېږي.

د کرښمساواتو ټولیز فرمول دی: $f(x) = a_1 x + a_0$

$$P_1(x_1 \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 \mid -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$$

دا د ټکی - جګوالي فرمول هم بلل کیږي.

بیلګه:

په $a_1 = -2;\ P_1(-3 \mid 4)$ کې ځا په ځای کړی $f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$:

$$f(x) = -2(x - (-3)) + 4 = -2(x + 3) + 4 = -2x - 6 + 4 = \underline{\underline{-2x - 2}}$$

.

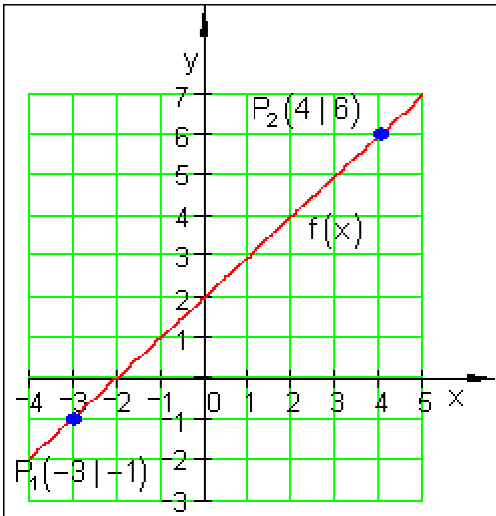
(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت: کرښه له دوه ټکو تیریږي

بیلګه:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په یوه کرښه پراته دي.

د $f(x) = a_1x + a_0$ تابع مساوات غواړو پیداکړو.



$P_1(-3\mid-1)$ $P_2(4\mid6)$

وتونمساوات: $f(x) = a_1x + a_0$

د جګوالي ټاکنه:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-1)}{4-(-3)} = \frac{6+1}{4+3} = \frac{7}{7} = 1$$

جګوالی وضعه کړی $f(x) = 1 \cdot x + a_0$

وروسته له دې چې جګیدنه معلومه شوه، دا پوښتنه داسې حل کیږي لکه په لومړي حالت کې.

د ټکو ازمایښت لپاره بې پروا ده چې د دې لپاره کوم ټکي کارول کیږي، ځکه چې دواړه ټکي به په کرښه پراته وي.

د ټکو ازمایښت د $P_2(4\mid6)$ یا P_1 لپاره

$$P_2(4\mid6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1\cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فزيک څخه پوهيږو چې د حرارت معلومولو (ګرمۍ کچونې) لپاره مختلفې دد حرارت سکالا کارول کيږي. د څلزيوس سکالاCelsiusskala او د فارنهايټ سکالا Fahrenheitskala

د دواړو ترمنځ کرښيزې اړيکې موجود دي.

$100\,^0C$ برابرى دي د $212\,^0F$ سره . $0\,^0C$ برابر د ى په $32\,^0F$ سره.

د يوه تابع مساوات غواړو پيداکړو، چې د هغې په مرسته ^0C په ^0F اړول کيږي.

خپلواکه متحوله x په ^0C او بلواکه يا تابع متحوله $y = f(x)$ په ^0F .

ځګوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$$

$$P_1(0\,|\,32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

په بدل شوى تابع x په C° کې کيږدى نتيجه يې ده.

د بيلګې په دول:

$$x = 20\,^0C : f(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20\,^0C \triangleq 68\,^0F$$

د دويم حالت لپاره هم کيدى شي شميرنه په ټوليزه توګه مخ ته بوتلى شى:

دوه ټکى $P_1(x_1\,|\,y_1)$ او $P_2(x_2\,|\,y_2)$ په يوه کرښه پراته دي.

د مساواتو عمومي بنه ده:. $f(x) = a_1x + a_0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګوالی: $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0$

$$P_1(x_x \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 =$$

$$= y_1 \mid - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

دا په دوه ټکو کې د کرښيزې مساواتو يو توليزه بڼه ده .

په زياتو ادبياتو کې په لاندې ډول ده:

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ ;\ x_1 \neq x_2$ چيرته چې $y = f(x)$ باور لري.

د عملي کاروني لپاره لاندې بڼه مساعده ده:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

بېلګه:

$P_1(2 \mid -1); P_2(-3 \mid 2)$ په $f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ کې ځای په ځای کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{2-(-1)}{-3-2}(x-2)+(-1)=\frac{2+1}{-5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}-\frac{5}{5}$$
$$=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$$

تمرين:

د ^{0}F په ^{0}C باندې شميرنې لپاره يو تابع مساوات وليکئ

2.2.3.تمرين: د تابعمساواتو شميرنه

يو کرښيز مساوات د a_1 جګوالی لري او د P له ټکي تيريږي.

د f(x) تابعمساوات معلوم کړئ او د محورونو قاطع ټکي يا غوښتکي او ګراف انځور کړئ

اول - $P(2|-2)$ $a_1=\frac{1}{2}$ دويم - $P(-1|3)$ $a_1=\frac{3}{4}$

دريم - $P(3|-1)$ $a_1=2$ څلورم - $P\left(\frac{3}{2}\middle|4\right)$ $a_1=\frac{4}{5}$

يوه کرښه له ټکو P_1 او P_2 تيريږي.

د f(x) تابع مساوات پيدا کړئ او د محور قاطع ټکي او ګراف رسم کړئ.

پنځم - $P_2(5|4)$ $P_1(2|1)$ شپږم - $P_2(2|3)$ $P_1(-3|-2)$

اوم - $P_2(4|-1)$ $P_1(-2|3)$ اتم - $P_2(3|1)$ $P_1(-4|-1)$

نهم - $P_2(4\,|\,-1)$ $P_1\left(-3\,\middle|\,\frac{9}{2}\right)$

لسم - $P_2\left(\frac{7}{2}\,\middle|\,4\right)$ $P_1(-4\,|\,-2)$

. د کرښبرابروتو ځانګړی حالت:

د x- محور سره غبرګ کرښه:

$f(x) = a_0\,;\ a_0 \in \mathbb{R}$

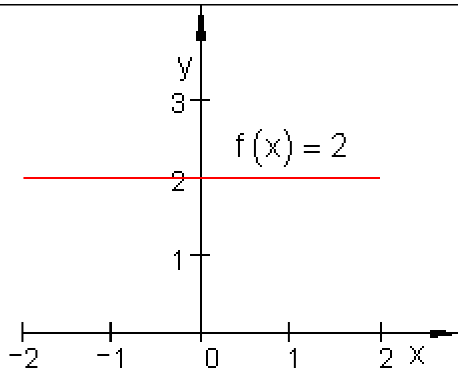
يو د 0 درجې تام راشنل تابع ده او

ثابته تابع هم بلل کیږي.

x- محور هم یوه ثابته تابع ده د

تابع مساوات $f(x) = 0$ سره.

د ثابتې تابع جګوالی تل صفر دی.



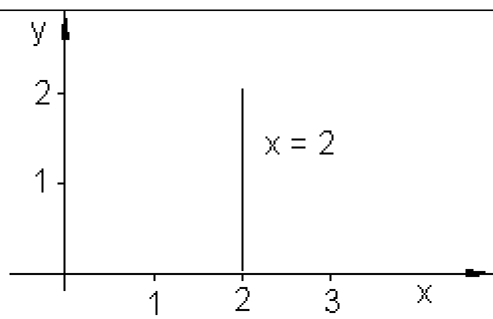
د y- محور سره غبرګه.

$x = a\,;\ a \in \mathbb{R}$

کرښه د محور سره غبرګه (موازي) ځغلي.

دا د یوه تابع مساوات سره نه شي لیکل کیدی، ځکه چې یواځنی تنظیم نه شته یعني تابع نه ده.

$x = 0$ دy - محور مساوات دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

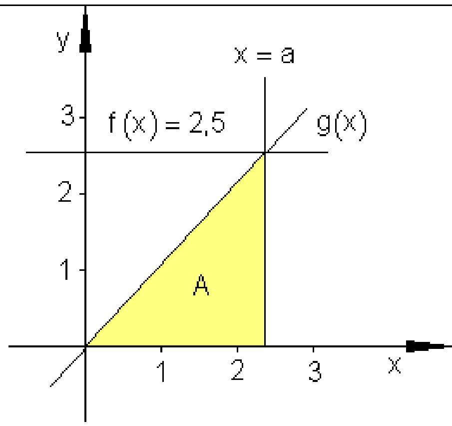
بیلګه:

یو f(x) = 2,5 ور کړ شوی او y- محور سره موازي دa واټن د 0 < a سره.

یوه سرچینیزه کربنه g د(P(a | f(x) ټکي څخه تیریږي.

دا دx - محور او د y- محور سره غبرګې کربنې سره یو مثلث جوړوي.

a داسې وټاکئ چې وسطحه د سطحې څلور واحدونه (یوونونهFE) جوړ کړي. د دې حالت لپاره د(g(x تابع مساوات څنګه دي؟



$A=\frac{g\cdot h}{2}$ د g = a او

h=f(x) = 2,5 سره

د مثلث سطه $\Rightarrow A=\frac{2,5\cdot a}{2}=\frac{5}{4}a$

$A=4\Leftrightarrow\frac{5}{4}a=4\,|\cdot\frac{4}{5}\Leftrightarrow a=\frac{16}{5}$

(ځکه چې د سرچینې کربنه $g(x)=a_1x$ ($a_0=0$

د جګېدو له مثلث څخه $a_1=\frac{5}{2}:\frac{16}{5}=\frac{25}{32}$

د تابع مساوات : $g(x)=\frac{25}{32}x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین: د ^0F بدلون شمیرنه په ^0C لپاره د تابع مساوات ولیکئ

حل :

د ^0C اړونه یا بدلون په^0F د متحولې لپاره دا معنا لري:

x په ^0F مستقله یا خپلواکه متحوله ده او $y = f(x)$ په^0C بلواکه یا تابع متحوله ده.

$$212\,^0F \triangleq 100\,^0C \Rightarrow P_1(212\,|\,100) \quad \text{او} \quad 32\,^0F \triangleq 0\,^0C \Rightarrow P_1(32\,|\,0)$$

دا چې د حرارت الو ترمنځ یوه کرښیزه ا ړیکه پرته ده، نو ټکي P_1 اوP_2 په یوه کرښه پراته دي.

د کرښې عمومي کرښیزه بڼه په دې ډول ده:.$f(x) = a_1x + a_0$

دلته ضریبونه a_1 او a_0 د ټاکلو دي.

جګوالی: $$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100-0}{212-32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0$$

ټکي ازمایښت د $P_1(32\,|\,0)$ سره.

$$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9}\cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{8} + a_0 = 0\,|-\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x-32)$$

د ^0F اړونې په ^0C لپاره باور لري.

$$^0F \text{ in } ^0C \text{ gilt: } f(x) = \frac{5}{9}(x-32)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

xپه ^0F او y په ^0C .

پوښتنې:

کرښيزي توابع III

لومړی: د g کرښو مساوات وټاکئ

الف: $P_1(-4|-2)$ او $P_2(2|0)$ په g پراته دي،

ب- g په $P_1(-3|1)$ او $P_2\left(1|\frac{11}{3}\right)$ کې ځغلي

پ- $P_1(1|-2)$ او $P_2(-2|10)$ په g پراته دي

ت- g محورونه په x = 2 او y = 6 کې غوڅوي(قطع کوي)

ټ-g له P(-6;1)) تیریږي او له h سره غبرګ دی د $h(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ مساوات سره

ث- g جګوالی $a_1 = -4{,}5$ لري او له P(1;1,5) څخه تیریږي.

ج- g جګوالی $a_1 = 3$ لري او له P(1;,1,5) څخه تیریږي

چ- g دx محور په x = 3 کې غوڅوي او د hکرښه د h(x) = 4x - 2 سره په x = -1 کې غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم: د دوه کرښو g او h کرښیز مساوات پیدا کړی، چې له ټکی P(3;-2) تیرېږي.

دریم: یوه کرښه g د کرښیز تابع f(x) سره پیدا کړی، چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي او تابع مساوات وټاکی.

الف- $P_1(1,5 \mid 3); P_2(3 \mid 2,5)$ ب - $P_1(-3 \mid 5); P_2(1 \mid 2,5)$

پ- $P_1(4 \mid 0); P_2\left(-1 \mid -\sqrt{2}\right)$ ت - $P_1(k \mid 3); P_2(2k \mid -1)$

ټ - $P_1(1 \mid 0); P_2(-1 \mid k+1)$ ث - $P_1\left(2\sqrt{k} \mid \sqrt{2k}\right); P_2\left(\sqrt{k} \mid 0\right)$

څلورم: د f(x) کرښیزې تابع مساوات وټاکی.که معلوم وي:

الف-کرښه د $a_1 = \frac{5}{4}$ جګیدني سره له P(4;-1) څخه تیرېږي.

ب-کرښه له ټکو $P_1(-5 \mid -3)$ او $P_2(0 \mid 3)$ څخه تیرېږي.
پ-کرښه له P(4,5;2,7) ټکي تیرېږي. او د x محور سره 45° مایله ده.

ت-کرښه له P(-1,5;0) تیرېږي او د h(x) = 2x+2 سره غبرګه (موازي) ده.

پنځم: کر ښه g و کاږی او کرښیز مساوات وټاکی.

الف- $P(3 \mid -1) \in g$ او g دy محور سره غبر؛(موازي) څغلي.

ب- $P(3,5 \mid 2,5) \in g$ او g دx محور سره موازي څغلي.

پ- g له P(-5;1)تېرېږي او د $h(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ سره موازي ده.

ت- g له $P\left(1 \mid \frac{3}{2}\right)$ تېرېږي او د کرښو سره چې له ټکو $P_1(-2 \mid -3)$ او $P_2\left(\frac{3}{2} \mid -5\right)$ تېرېږي، موازي څغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

کرښيز مساوات VI

لومړی –

د لاندې کرښيزو توابعو گرافونه و کاږی او د ارزښت سټ يا – ډېری W و ټاکی

الف- $f(x) = -2x + 2 ; D = \{x | -3 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} ; D = \{x | -4 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3 ; D = \{x | -2 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x) = 3x - 6 ; D = \{x | -1 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$

دويم –

ټکی P_1 او P_2 ورکړ شوي، چې په کرښه پراته دي. د f (x) تابعمساوات پيدا کړی او گراف يې وکاږی

الف- $P_1(3 | 4) ; P_2(7 | -1) ; D = \{x | 0 \leq x \leq 7\}_{\mathbb{R}}$

ب - $P_1(-8 | 1) ; P_2(2 | -3) ; D = \{x | -8 \leq x \leq 2\}_{\mathbb{R}}$

پ - $P_1(4 | 3) ; P_2(-7 | -1) ; D = \{x | -7 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $P_1(-4 | -4) ; P_2(4 | 2) ; D = \{x | -4 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$

دريم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې مساواتو حلسټ یا حلډېرۍ پیداکړی. مساوات چې کسری راشنل ترمونه ولري، باید د هغو تعریفورشو هم ورکړل شي.

الف- $x-5=9$ ب - $8+x=25$ پ - $x-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$ ت - $\frac{5}{9}=x-\frac{1}{3}$

ټ - $88=4x-16$ ث - $a+bx=3b+a$ ج - $8-(x+5)=2$

چ - $9+(5-x)=6$ ح = $(x-6)(x+3)=(x-5)(x-2)$ خ -

خ - $(x+3)(x+7)=(x+2)(x+9)$ $\frac{x}{4}+\frac{5x}{6}+\frac{5}{6}=\frac{x}{2}+x$

ځ - $\frac{3}{2x}+\frac{2}{3x}=\frac{1}{9}+\frac{7}{3x}$ د - $\frac{ax}{b}-\frac{b}{ac}=\frac{a}{bc}-\frac{bx}{a}$ ډ - $\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}=a$

ذ- $23a-\left\{5ax-\left[9ax+(12a-6ax)\right]-(3a-8ax)\right\}-15a=5ax-7a$

څلورم:د لاندې توابعو د محورونو سره د تقاطع ټکي هم پیدا کړی.

الف- $f(x)=2x-7$ ب - $f(x)=-2x+6$ پ - $f(x)=3x-3$

ت - $f(x)=2x+\frac{2}{3}$ ټ - $f(x)=\frac{3}{4}x+2$ ث - $f(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}$

ج - $f(x)=3{,}5x+\frac{1}{2}$ چ – $f(x)=-2{,}5x+2\frac{1}{2}$ ح - $f(x)=1\frac{3}{4}x-3\frac{2}{3}$

پنځم: د یوې کرښې دوه ټکي P_1 اوP_2 ورکړ شوي د لاندې توابعو له I تر IV لپاروه وټاکی:

I. $P_1(3 \mid 4);\ P_2(7 \mid -1);\ D=\{x \mid -2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

II. $P_1(-8 \mid 1);\ P_2(2 \mid -3);\ D=\{x \mid -8\le x\le 2\}_{\mathbb{R}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

III. $P_1(4 \mid 3);\ P_2(-7 \mid -1);\ D=\{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

IV. $P_1(4 \mid 2);\ P_2(-4 \mid -4);\ D=\{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

الف- د جګیدني ضریب m.

ب - د کرښي تابعمساوات

پ - دy محور سره د تقاطع ټکی P_y

ت - د تقاطع ټکی P_y د x محور سره

ټ - پهW باندي ارزښتډېری W.

ث - په D کي د تابع ګراف

شپږم: لاندي مساواتسیستمونه حل کړی:

الف- $\begin{cases} \text{I} & 5y-3x=1 \\ \text{II} & x=y+1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} \text{I} & 4x+5y=32 \\ \text{II} & y=5x-11 \end{cases}$ پ - $\begin{cases} \text{I} & 15y-4x=-50 \\ \text{II} & x=y+7 \end{cases}$

ت - $\begin{cases} \text{I} & 3x=y+15 \\ \text{II} & 2y-10=2x \end{cases}$ ټ - $\begin{cases} \text{I} & 2y=2x-40 \\ \text{II} & 3x=10-2y \end{cases}$ ث - $\begin{cases} \text{I} & x+y=a+b \\ \text{II} & x-y=a-b \end{cases}$

پوښنتي

کرښیز مساوات IX

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:کرښه g له ټکو (P1(4;-3,5 او(P2(2,5;-1 تیرېږي.

کرښه h له ټکو $P_3(5|2,5)$ او $P_4\left(\frac{3}{2}|\frac{25}{3}\right)$. تیرېږي.

کرښې یو بل ته څه موقعیت لري یا څنګه پرتې دي؟

دویم:د(f(x کرښیزې تابع د تابع ترم او ارزښتساحه(ارزښتورشو) و ټاکئ، که صدق ولري:

الف- $f(0)=20\,;\,f(12)=32\,;\,x>0$ ب- $f(-3)=6\,;\,f(2)=-8\,;\,x\in[-3\,;\,3]$

دریم:

د (f(xکرښیزې تابع ګراف په 3 LE اوږدوالی واحده کیڼ لور

ته خوزیږي. د راکښل شوې کرښې د (f*(x مساوات څنګه دي؟

$$f(x)=\frac{5}{3}x-2 \quad D=\mathbb{R}$$

څلورم: د (f(x او (g(x توابع ورکړ شوې دي. د کوم ارزښت لپاره (f(x) > g(x صدق کوي؟

$$f(x)=2x-3 \quad ; \quad g(x)=-0{,}5x+1 \quad x\in\mathbb{R}$$

پنځم: یوه (g(xکرښه ورکړ شوې.. دا د یوې کرښې (h(x له خوا قطع کیږي. د (h(xمساوات وټاکئ، که باور ولري: $g(x)=-3x+2$

الف- قاطع یا غوڅې دx محور سره . ب - قاطع(غوڅې) په x = -5 کې

شپږم:

یوه د پیل کرښه د $a_1=-0{,}125$ جګوالي سره و داسې کښول کیږي. چې کرښه h د مساوات	$h(x)=-1{,}5(x-2)$ ؛

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره د x په محور قطع کوي. راکښنه تشريح کړی او د راکښل شوې کرښې ګراف و کاږی.	

اوم: يوه $f(x)$ کرښيزه تابع ورکړ شوې. کرښه د $x = u$ مساوات سره د $f(x)$ ګراف په P کې قطع کوي او د x محور په Q کې قطع کوي. يوه سکيڅې ترتيب کړی.

الف- د P او Q کواوردينات وټاکی، که $f(x) = 0,75x + 2$ وي.

ب- د u د کوم ارزښت لپاره P د x محور پورته لور ته پرته ده.

ت- $P(u \mid f(u))$ په 1 څلوری يا ربع کې پروت دی. Q، $R(0 \mid 0)$ او P د يوه مثلث رآسونه (ککرټکي)جوړوي. د دې مثلث د مساحت A لپاره ترم وټاکی. u (محيط) داسې وټاکی، چې $A(u) = 10$ صدق وکړي.

اتم: د g کرښې ته موازي او عمود مساوات داسې وټاکی، چې له P ټکي تير شي.

الف- $g: x + 2 - 3y = 0; P(0 \mid 3)$ ب- $g(x) = \frac{2}{3}x - 3; P(1 \mid 4)$

پ - $g(x) = -1,5kx; P(1 \mid 0)$

نهم: کرښه g له ټکو P_1 او P_2 تيريږي. د h کرښې ته يې ځای مطالعه کړی او د امکان په حالت کې يې د قاطع ټکی معلوم کړی.

$$P_1(-1 \mid 1,5); P_2(-2 \mid -2,5) \qquad h: \ -x - 6 - 4y = 0$$

لسم: و ښايی: کرښه g او کرښه h عمود دي.

$$g: \ y - \sqrt{2}x = 1 \qquad h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0$$

$$g(x) = -3x + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یولسم:

د A, B او C ټکي د یوه مثلث د رآس ټکي دي. د$k > 0$ د کوم ارزښت لپاره دا مثلث قایم الزاویه (ولاړګوډیز) دی؟ (ښی رآس په C پروت دی)	$A\left(\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right);B\left(-\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right);C(0\mid k)$

پوښتنې

کرښیز توابع **XI**

لومړی-

$$f_1(x)=\frac{1}{4}x+2\frac{1}{4};\ f_2(x)=-4x-2;\ D=\{x\mid -9\le x\le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع f_1 (x) سره د دویمې کرښې د تابع(x) f_2 سره غوځیږي. وټاکئ:

الف – د کواوردیناتونو x_s او y_s سره غوځټکی S .

ب – د دواړو کرښو غوځټکي د y محور سره .

پ – د دواړو کرښو غوځټکي دx محور سره .

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې .

دویم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4\,;\, D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(3 \mid y_s)$ کې د تابع $f_2(x)$ سره له کرښې څخه غوځیږي.

وټاکئ:

الف-د S پوره کواودینات

ب-تابع .$f_2(x)$.

پ-د دواړو کرښو غوځټکي د کواوردینات محورونو سره.

ت-په D کې د دواړو توابعو ګراف.

دریم:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1;\, D = \{x \mid -7 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(-4 \mid y_s)$ کې کې له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې پروتمحور په 7- کې غوځوي، غوځیږي.

وټاکئ:

الف – د S پوره کواوردینات.

ب – تابع $f_2(x)$.

پ – د دواړو کرښو غوځټکي د کواودینات د محورونو سره.

ت – د واړو توابعو ګراف په D کې..

څلورم –

د یوه درېکوډي یا مثل ټکي P_1, P_2 او P_3 ورکړ شوي دي. د درېګوډي د اړخونو تابع وټاکئ. پخوا له دې یو پلان نقشه ترتیب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(-6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(-2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(-4 \mid 3)$$

ب –

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(4 \mid 3)$$

پنځم -

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3 ; P_2(-2 \mid -3) ; D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره د دویمې کرښې ځخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې له ټکي P_2 تیریږي ، په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوځیږي.

وټاکئ:

الف - د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ب- تابع $f_2(x)$.

پ – د دواړو کرښو غوځټکی S .

ت - د دواړ کرښو محورغوځټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

کرښيز توابع XII

لومړی -

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3 \,;\, P_2(2 \mid -3) \,;\, D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له يوې دويمې کرښې د تابع $f_2(x)$ سره، چې له ټکي P_2 تيريږي په ټکي S کې ولاړکونجيزه غوځيږي.

وټاکی.

لومړی:

الف – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ب – تابع $f_2(x)$.

پ - د دواړو کرښو غوڅټکی S .

ت - د دواړو کرښو د محورغوڅټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

دويم –

د کرښې تابع $f_2(x)$ وټاکی، چې پروتمحور په P_{x2} کې غوڅوي او له کرښې څخه د تابع $f_1(x)$ سره په S کې غوځيږي. د واړو کرښو غوڅټکي وشميری او د دواړو کرښو ګراف په D کې رسم کړی.

الف- $f_1(x) = \frac{3}{2}x + 6 \,;\, P_{x2}(-6 \mid 0)$

$S\left(x_s \,\middle|\, \frac{3}{2}\right) ; D = \{x \mid -6 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 3 \,;\, P_{x2}(4 \mid 0)$

$S(3 \mid y_s) ; D = \{x \mid -1 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

دريم -

$$P_1(-5 \mid 5) \,;\, P_2(-1 \mid -1) \,;\, S(x_s \mid 2) \,;\, D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 اوP_2 تيريږي او په ټکي S کې ولاړکونجيز له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره غوځيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وټاکئ:

الف- د $f_1(x)$ جګوالی m_1 .

ب – تابع $f_1(x)$.

پ – دS پوره کواوردینات.

ت – د$f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ – تابع$f_2(x)$.

ث – د $f_1(x)$ او$f_2(x)$ ګرافونه

څلورم -

$$P_1(5 \mid 5);\ P_2(1 \mid -1);\ S(3 \mid y_s);\ D=\{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 اوP_2 څخه تیریږي او په ټکي S کې ولاړکونجیزه له کرښې د تابع $f_2(x)$ سره غوځیږي.

وټاکئ:

الف – د $f_1(x)$ جګوالی m_1 . ب - تابع $f_1(x)$.

پ - د S پوره کواوردیناتونه ت – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ - تابع $f_2(x)$. د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ګرافونه.

پنځم -

$$f_2(x)=3x-3;\ S\left(\frac{3}{2} \,\middle|\, \frac{3}{2}\right);\ D=\{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجیزه غوځیږي.

وټاکئ:

الف - تابع $f_1(x)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅټکي.

پ – د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پوښتنې

کرښيزې توابع برخه XIII

لومړی -

$$f_2(x)=\frac{4}{5}x+\frac{9}{10};S\left(2\left|\frac{5}{2}\right.\right);D=\{x\,|\,-1\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع(x) f_1 ګراف په ټکي S کې د تابع (x) f_2 له ګراف څخه ولاړکونجيز(قايم الزاويه) غوڅيږي.

وټاکی:

الف: تابع (x) f_1 .

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅټکي.

پ – د دواړو توابعو ګرافونه په D کې.

$$g:\quad y-\sqrt{2}x=1 \qquad \Rightarrow g(x)=\sqrt{2}x+1$$

$$h:-2y-\sqrt{2}x+6=0\Rightarrow h(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}x+3$$

د اورتوګوناليټي شرايط: $a_{1g}=-\frac{1}{a_{1h}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{1g} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad q.e.d$$

دویم:

د دوه کرښنو توابع $f_1(x)$ او$f_2(x)$ ورکړشوي او د یوې دریمې کرښې جګوالی m_3 د تابع $f_3(x)$ سره. تابع $f_3(x)$ داسې وټاکئ، چې ګراف یې د نورو دواړو کرښنو غوڅټکي څخه تیر شي. د دریواړو کرښنو محور غوڅټکي وټاکئ او د دریواړو توابعو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف-

$$f_1(x) = -4x - 2\,;\, m_3 = \frac{1}{4}$$

$$f_2(x) = 2x + 4\,;\;\; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

ب –

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}\,;\, m_3 = -4$$

$$f_2(x) = 2x + 4\,;\;\; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

دریم: کرښه دتابع $f_1(x)$ سره له ټکيP_1 تیرېږي او له یوې دویمې کرښې چې له ټکي P_2 تیریږي په ټکي S کې غوځیږي. توابع $f_1(x)$او $f_2(x)$ وټاکئ د هغو محورغوڅټکي اوپه D کې یې ګراف وکاږئ.

$$P_1\left(-2 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right); P_2(3 \mid 5); S\left(2 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right); D = \{x \mid -8 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

څلورم:

$$P_1\left(-1 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right); P_2\left(-3 \,\middle|\, \frac{11}{2}\right); D = \{x \mid -9 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره محور په 8- کې غوڅوي. $f_1(x)$ ته غبرګه یوه دویمه کرښه د تابع $f_2(x)$ سره پروت محور په 4- کې غوڅوي. دواړه کرښې له یوې دریمې کرښې چې تابع $f_3(x)$ لري او له ټکو P_1 او P_2 تیریږي په ټکو P_3 او P_4 کې ولاړکونجیزه(قایوم الزاویه) غوڅوي. وټاکئ:

الف- تابع $f_3(x)$ ب - تابع$f_1(x)$

پ – تابع $f_2(x)$ ت – د دریواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

$$A\left(-\frac{13}{2}\;\middle|\;-\frac{3}{2}\right); B(3 \mid 2); D=\{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د یوه قایوم الزاویه مثلث(ولاړکونجیز درې ګوډي) څخه، چې ولاړ کونج(قایم الزاویه) یې په C کې پرته ده، ټکي A او B ورکړ شوي. د مثلث اړخ یا ضلع [BC] د تابع $f_3(x)$ سره د اوردینات یا ولاړ محور په 3 کې غوڅوي.

وټاکئ:

الف- د اړخ [AB] تابع $f_1(x)$ ب- د اړخ یا ضلعې [BC]تابع $f_3(x)$

پ- د اړخ [AC] تابع $f_2(x)$ ت- د ټکي C کواوردیناتونه

ټ په D کې ګرافونه.

پوښتنې

کرښیزې توابع **XIV**

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: $A(-8|-6);\ C(-1|5);\ D=\{x\mid -8\le x\le 2\}_{\mathbb{R}}$

له یوه قایمالزاویه مثلث، چې قایمه زاویه یې په B پرته ده، ټکی A او C ورکړ شوي دي. د مثلث ضلع (اړخ)[BC] د اوردينات محور (ولاړمحور) په 3کې قطع کوي.

دا وټاکئ:

الف-

$[AB] = f_1$; $[BC] = f_2$; $[AC] = f_3$ د مثلث درې د ضلعو توابع.

ب- د B ټکي کواودينات یا وضعیه قیمت کې د ټکي B محورونه

پ -په D کې ګراف.

دویم:

$A(-4|-1);\ B(2|-4);\ D=\{x\mid -4\le x\le 5\}_{\mathbb{R}}$

د یوه مثلث ټکيA او B ورکړ شوي دي. د مثلث [BC] ضلع دy محور په 12-کې قطع کوي; ضلع [AC] د x محور په 3- کې غوڅوي.

دا وټاکئ:

الف-تابع $f_1(x)$ ضلع .[AB] قطع کوي

ب - تابع $f_2(x)$ ضلع [BC] غوڅوي.

پ - تابع $f_3(x)$ ضلع [AC]

ت - د C ټکي وضعیه قیمتونه

ټ - د D ټکي وضعیه قیمتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: توابع $y = f(x) = 3x - 4$ او $g(x) = ax + 3$ ورکړ شوي.

د دواړو توابعو ګرافونه په ټکي $S(3 \mid 5)$کې غوڅوي.

د$h(x)$ تابع مساوات داسې وکاږئ، چې ګراف په ټکي S عمود څغلي. په یوه وضیه قیمتسیستم کې دریواړه ګرافونه رسم کړئ.

څلورم:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}\,;\ f_2(x) = -4x - 2\,;\ D = \{x \mid -10 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$$

د$f_1(x)$ تابع سره کرښه د دویمې کرښې د$f_2(x)$ تابع سره قطعه کوي.

دا وټاکئ:

الف- دS قاطع ټکی د x_s او y_s کواودینات سره.

ب - د دواړو کرښو د قاطع ټکي د x محور سره.

پ - د دواړو کرښو قاطع ټکي د x محو سره.

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

د $g(x)$ تابع ، چې په $f(x)$ عمود ده پیدا کړئ. د $g(x)$ ګراف د y محور په $P_y(0 \mid 3)$ ټکي قطع کوي. دواړه کرښې په یوه وضعیه قیمت سیستم(پروت ولاړ سیستم) کې رسم کړئ.

الف - $f(x) = -2x + 2$ ب - $f(x) = 3x - 6$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ت - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

شپږم: د دواړو کرښو غوڅټکی (نقاط تقاطع) و ټاکئ او ګراف یې وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}\,;\, f_2(x) = -4x - 2\,;\, D = \{x \mid -10 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x) = -2x + 2\,;\, f_2(x) = 3x - 6\,;\, D = \{x \mid -2 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4\,;\, f_2(x) = \frac{3}{2}x - 2\frac{1}{2}\,;\, D = \{x \mid -1 \le x \le 7\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1;\, f_2(x) = \frac{5}{6}x + 5\frac{5}{6}\,;\, D = \{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

n -مه درجه ټول مات- یا راشنل توابع

n -مه درجه ټول راشن لفنکشن

یو تابع $f(x)$د

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

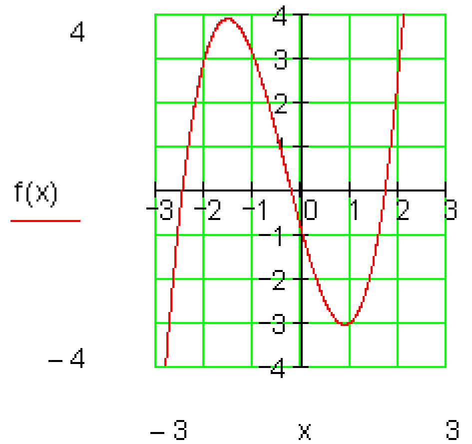
سره n -مه درجه ټول راشنل تابع بلل کيږي.

عددونه $a_n\,;\, a_{n-1}\,;\, a_{n-2}\,;\, \ldots.\, a_2\,;\, a_1\,;\, a_0$ ضريبونه بلل کيږي.

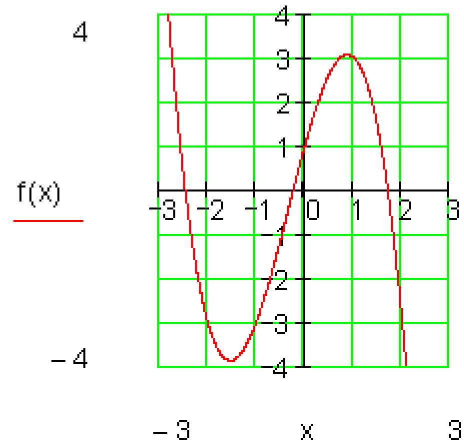
ټول راشنل یا هوښيار توابع د توان توابعو یوځای اینوولو له لارې لاس ته راځي.

بيلګې:

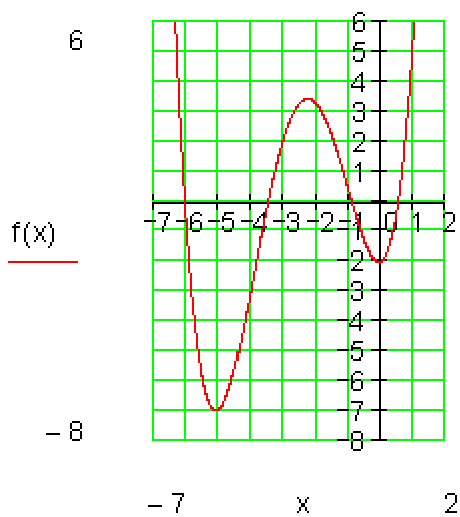
(c) ketabton.com: The Digital Library



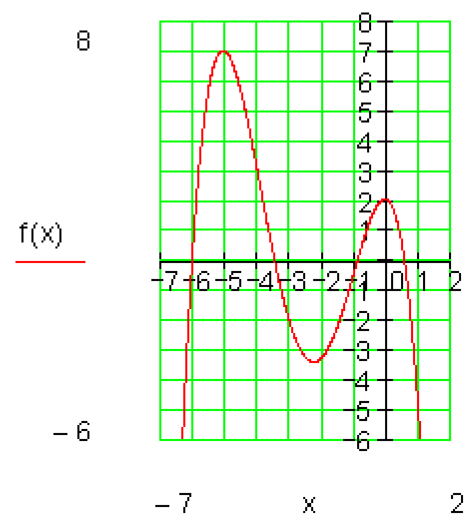
$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$



$f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 1$



$f(x) = 0,2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x - 2$



$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x + 2$

د ګراف تلنه

جمله:
د ټول راشنل تابع ګراف تلنه د خورا جګ توان زیاته وونې (د جمعې غړي) سره تاکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	n جوړه	n ناجوړه(طاق)
$a_n>0$	تلنه له II و I ته.	تلنه له III و I ته.
$a_n<0$	تلنه له III و IV ته.	تلنه له II و IV ته.

بيلګه: د الماي پينتو: ناجوړه(طاق) جوړه (جفت) ناجوړه

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7 \qquad n = 3\,(\text{ungerade}) \wedge a_n = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - I}}$$

$$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7 \qquad n = 4\,(\text{gerade}) \wedge a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - IV}}$$

$$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9 \qquad n = 5\,(\text{ungerade}) \wedge a_n = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$$

سيومتري

ګومان مو نږدې دی، هغه توابع، چې فقط د جوړه جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، محور سيومتريک دي او توابع چې فقط د ناجوړه(طاقو) جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، ټکی سيومتريک دي.

جمله

د يوه ټولراشنل تابع ګراف تيم هلته محورسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط جوړه جګعددونه ولري.

د يوه ټولراشنل تابع ګراف ټيک هلته ټکيسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط ناجوړه (طاق) جګعددونه ولري.

بيلګه:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

$$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$$

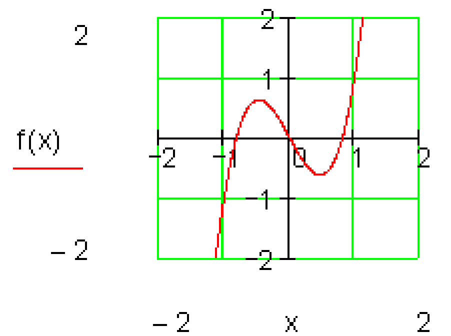
(c) ketabton.com: The Digital Library

محورسيومتريک

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -(3x^3 - 2x) = -f(x) \Rightarrow$$

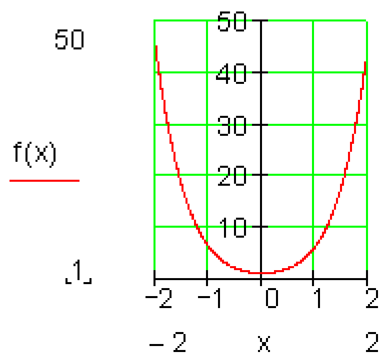
تکی سيومتريک



$f(x) = 3x^3 - 2x$

سرچيني ته سيومتريک دی

(تکی سيومتري)



$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$

yمحور ته سيومتريک دی

(محورسيومتريک)

تمرينونه:

د ټول هوښيارو توابعو خوېونه.

د لاندې تاوبعو په سيمترۍ، تلنه او د صفرځايونو تعداد يا ګنون باندې وېناوې وکړی.

لومړی - $f(x) = 2x^2 - 1$ دويم - $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ريم - $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+2x^2+2$ خلورم - $f(x)=-x^5-x^3+x$

پنځم - $f(x)=x^6-x^4+1$ شپږم - $f(x)=-\frac{1}{2}x^5+x^2-2x$

اوم - $f(x)=\frac{1}{10}x^7+\frac{1}{8}x^5-\frac{1}{6}x^3+x$ اتم - $f(x)=\frac{1}{100}x^{10}-\frac{1}{50}x^6+\frac{1}{10}x^2$

نهم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{2}{5}x-1$ لسم - $f(x)=\frac{3}{4}x^5-\frac{1}{2}x$

په يوه خوښه ټکي ته سيومتريک

که د يوه ټکي سيومستري تابع ګراف په خوښه راکښل شي، نو سيومتري سرچينې ته ځي، چې موږ يې ټکی سيومتري بولو له منځه ځي. نسبت و موخېټکی ته دا ساتلې پاتې کيږي.

بيلګه:

د $f(x)=0,5x^3-1,5x$ تابع ګراف ټکی سيومتريک دی، يعنې سرچينې ته سيومتريک.

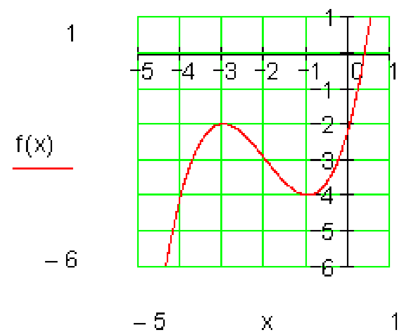
دا ګراف دې په ۲ واحدونو يا يوونونو کيڼ لور ته او په ۳ يوونونو يا واحدونو کښته لور ته راکښل شي.

د راکښلشوي ګراف تابع مساوات دي:

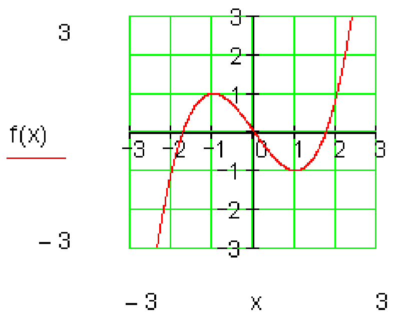
$$g(x)=0,5(x+2)^3-1,5(x+2)-3=0,5x^3+3x^2+4,5x-2$$

$g(x)$ و ټکی $P_0(-2|-3)$ ته سيومتريک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$



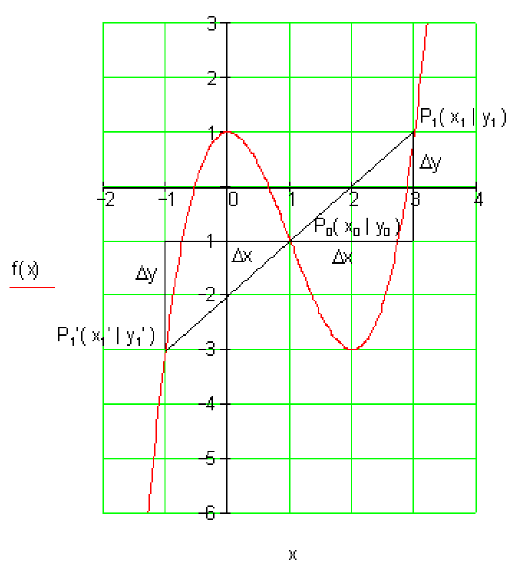
$f(x) = 0,5x^3 - 1,5x$

کواوردینانسیستم د ګراف په بڼه کوم رول نه لوبوي. تنها تابع مساواتوتغیر خوړلی.

د حالت بیلګه: باید وازمایل شي، چې ایا د دریمې درجې د یوه ټول هوښیار تابع ګراف یوه ټاکلي ټکی ته ټکی سیومتریک دی.

ترمخ راوړنه.

چمتووالی:



د ټکو کواوردینات لپاره باور لري:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y$$
$$x_1' = x_0' - \Delta x$$
$$y_1' = y_0' - \Delta y$$
$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$\Delta y = y_1 - y_0$$

د هنداره-یا منعکس شوي ټکو کواوردیناتونه:

$$x_1' = x_0 - (x_1 - x_0) = \underline{\underline{2x_0 - x_1}}$$
$$y_1' = y_0 - (y_1 - y_0) = \underline{\underline{2y_0 - y_1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دې قاعدې یا لار سره تل کېدی شي په P_0 و P_1 ته يوه هنداروته يا انعکاسونه کې اړونده هنداروته P_1' وټاکل شي.

بيلګه:

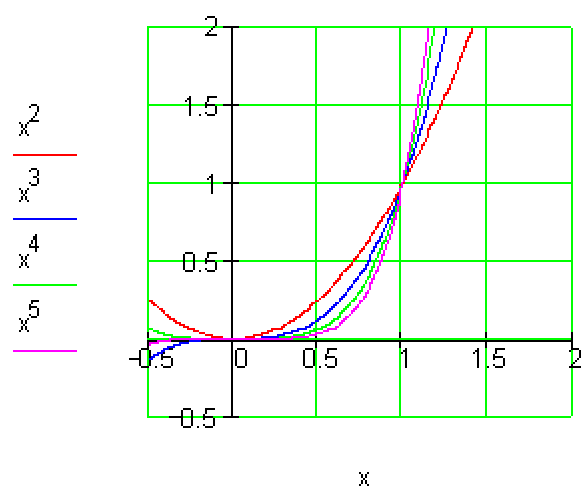
که هنداورنه په ګراف نه وي پرته ، نو ګراف و P_0 ته ټکی سيومتريک نه دی.

پوښتنې

تول مات- يا راشنل توابع I

د توانتوابعو خويونه

لومړی –

	دا ترخنګ په 1 . څلورمه کې ګراف تر څيرنې لاندې ونيسی د x ارزښتونو لپاره د 0 او 1 ترمنځ دجګو درجو يو د توان تابع ګراف پروت دی د يوه توان تابع د ګراف لاندې يا کښته د ټيټې درجې. د $x > 1$ لپاره دا ټيک برعکس کېدونکي دي. د دې حالت لپاره لایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – د دریمې درجې توان تابع ګراف دې په دوه واحده کینې لور ته او تړلی په درې واحده پورته لور ته و کښل شي.

د دې راکښل شوې تابع مساوات لپاره دې د تابع مساوات ورکړ شي.

دریم –

د څلورمې درجې توان تابع ګراف دې په درې واحده ښی لور ته او پسې تړلی دې په دوه ضریبه وغزول شي.

الف – د راکشل شوي ګراف لپاره تابع مساوات ورکړئ

ب – وښایی، چې ګراف نه محور – او نه ټکی سیومتریک دی.

څلورم –

په کوم توان تابع $f(x) = x^n$ کې ټکی په ګراف اړه لري؟

د دې توان توابعو مساوات ورکړئ.

الف - $P(-3 \mid -27)$ ب - $P(-2 \mid 16)$ پ - $P(0{,}5 \mid 0{,}25)$ ت - $P\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{27}\right)$

ټ - $P(0{,}1 \mid 0{,}0001)$ ث - $P(-1 \mid 1)$ ج - $P(-2 \mid 8)$ چ - $P\left(\frac{3}{4} \mid \frac{81}{256}\right)$

پنځم –

د لاندې توان توابعو سیومتري او د ګراف تلنه وټاکی او د هر یوه ارزښتدېری(ارزشتست) او درجه ورکړې.

الف - $f(x) = 4x^3$ ب - $f(x) = -160x^2$ پ - $f(x) = -1500x$

ت - $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$ ټ- $f(x) = 5$ ث - $f(x) = -25x^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم –

لاندې تابع مساوات د پولینوم په بڼه انځور کړی.

هر ځل یې درجه ورکړی.

الف - $f(x)=(x-2)^2-4x^3$ ب- $f(x)=4(x+5)^3+(x-2)(x+2)$

پ- $f(x)=2x^3-(x-1)^2$ ت - $f(x)=(x-4)(x+1)^2$

ټ - $f(x)=(x^2-4)(x^3-x^2+4)$ ث - $f(x)=\frac{x-5}{8}(x-2)+\frac{3}{4}x^2$

اوم -

دلیل راړی:

د یوه ناجوړه(طاق) درجې ټولراشنل تابع ګراف د x محور لږ ترلږه په یوه ځل غوځوي.

دا هلته هم باور لري که درجه جوړه یا جفتوي؟

پوښتنې

ټول راشنل توابع II

سیومتری او تلنه

لومړی – و څېړی، چې ایا f(x) یو ټولراشنل تابع دی. په ورکړشوي حالت کې د تابع ګراف، درجه او د ضریبونو $a_0; a_1; a_2; \ldots$ an ارزښتونه ورکړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف ـ $f(x)=2$ ب ـ $f(x)=4x$ پ ـ $f(x)=2^x$ ت ـ $f(x)=\frac{x^3-4x}{8}$

ټ ـ $f(x)=\sqrt{3}x^4$ ث ـ $f(x)=\frac{1}{x}$ ج ـ $f(x)=\sqrt{x}$ چ ـ $f(x)=\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

ح ـ $f(x)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$ خ ـ $f(x)=16x^3-2x^2+5x^2-4$

دویم – د لاندې ټولراشنل توابعو څخه کوم يې محور سيومتريک او کوم يې ټکی سيومتريک دي؟

الف ـ $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب ـ $f(x)=x^3+3x+1$ پ ـ $f(x)=(x-2)(x+2)$

ت ـ $f(x)=x^6-6x^2+\sqrt{3}$ ټ ـ $f(x)=(x-2)^3(x-1)$ ث ـ $f(x)=x^4-\sqrt{5}x^2$

ج ـ $f(x)=\left(2x^4+2x^2+5\right)x$ چ ـ $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)(x+1)(x-1)$

ح ـ $f(x)=1-3x^2+x^6$

دریم – د c متحوله داسې وټاکئ، چې د تابع ګراف ټکی سيومتريک او همداسې محورسيومتريک شي.

الف ـ $f(x)=x^3+4x+c$ ب ـ $f(x)=(x-c)(x+4)$ پ ـ $f(x)=x^5+x^c$

ت ـ $f(x)=x^3\left(x^2-cx\right)$ ټ ـ $f(x)=c+x^3$ ث ـ $f(x)=4x^3+x^2+cx^2+5x$

څلورم : د لاندې توابعو د ګراف تلنه معلومه کړئ.

الف ـ $f(x)=2x^5-6x^3$ ب ـ $f(x)=-4x^4+3$

پ ـ $f(x)=2x-5$ ت ـ $f(x)=-2x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x)=4x^4-3x^2+4x-5$ ث - $f(x)=-6x+3$

ج - $f(x)=4x^4+3x^3-6x^5$ چ - $f(x)=-2x^5+6x^3$

پنځم - د لاندې توابعو د ګراف تلنه او سیومتري ورکړی.

الف - $f(x)=\sqrt{3}x^2-\sqrt{5}x^4-2$ ب - $f(x)=x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(8-\frac{1}{2}x\right)$

پ - $f(x)=5x^6-4x^4+5$ ت - $f(x)=x^5+x^3-2x$

ټ - $f(x)=5$ ث - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(x^2+6x+9\right)$

ج - $f(x)=x^5+4x^4+4x^3$ چ - $f(x)=\left(4x^2-4\right)\left(x^3+8x^2+16x\right)\left(x^3+27\right)$

ح - $f(x)=-3$ خ - $f(x)=-x^5+x^3-2$

شپږم : د لاندې تابعو صفرځیونه وشمېرئ:

الف - $f(x)=(x-4)(x-2)(x+1)$ ب - $f(x)=(x-4)(-x+2)$

پ - $f(x)=x(x+5)^2$ ت - $f(x)=3(x-4)^3(x+2)$

ټ - $f(x)=(2x-4)(x+3)x^3$ ث - $f(x)=x^3-2x^2$

د ټولراشنل توابعو محور غوځېدکي (د محور د تقاطع نقطی)

د ټولراسنل توابعو محور غوځېدکي (د محور د تقاطع نقطی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y محور سره غوځتکی $P_y(0 | y_s)$: $P_y(0 | y_s)$ شرط: $y_s = f(0)$

بيلګه : د يا په معنا

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = 3 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$
$$\Rightarrow P_y(0 | -3) \text{ oder } P_y(0 | f(0))$$

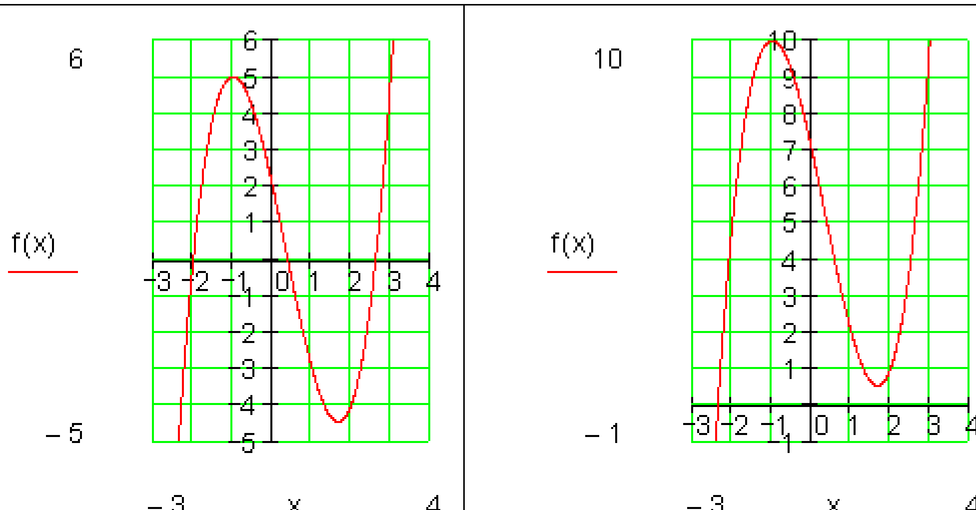
د P_y د y کواوردينات تل د ضريبونو a_0 سره کتمټ ده.

دا تل د تابع مساوات ځخه لوستل کيدی شي.

د x-محور سره غوځتکی $P_y(x_s | 0)$ صفرځای : شرط: $f(x) = 0$

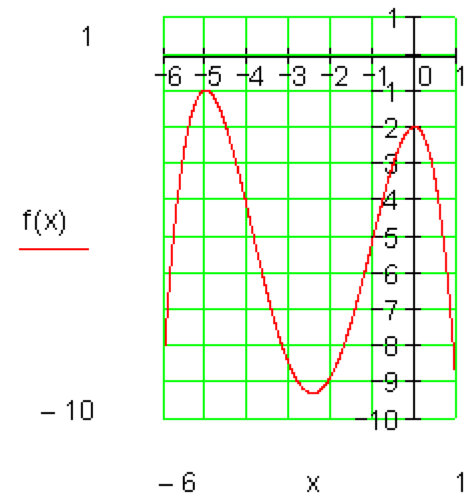
د مربع تابع (د دويمي درجې ټولراشنلتابع) ځخه بوهيږو، چې دا دوه ، يو ، يا هيڅ صفرځايونه لرودی شي. دا د جګ درجو ټول راشنلتابع سره ځنګه دی؟

بيلګه:



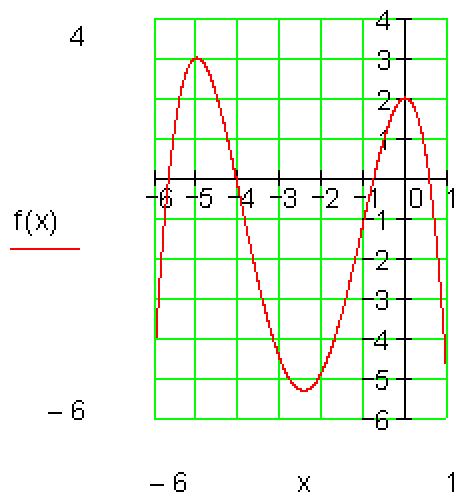
$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$	$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$
دري صفرځايونه لري	صفرځای نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x - 2$$

د صفرځای نه شتون



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x + 2$$

څلور صفرځایونه لري.

جمله:

یو د n -مي درجې پولراشنل تابع زیات له زیاته n صفرځایونه لري.

که n جوړه وي، نو دا لږترلږه یو صفرځای لري.

د صفرځایونو شمیرنې لار(تګلار)

د فکتوري کونو یا صریبونو تګلار:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

فاکتور x له نوکانو راوتلی شي.

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 2x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

او په نوکانو کې افاده یا وبینه صفر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

مربع مساوات دی.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \,|\, : 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$p = -1;\ q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

صفرځايونه :

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -1$$

د x محور سره غوڅتکی

$$P_{x1}(0|0);\ P_{x2}(2|0);\ P_{x3}(-1|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

(پورته) د کربنيز ضريبونو ضرب

د بدلون قانون substitution:

يادونه: په دې معنا چې د يوې اووښتونې يا متحولې لپاره بله متحوله ځا په ځای کوو.

$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ بې مربعيز(بي ځلوريز) مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون: $x^2=z$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

بدلون په ځتې- یا بیرته ګرځوو:

$$x^2 = z_1 = 9 \,|\, \sqrt{\ } \qquad x^2 = z_2 = 4 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{9} \qquad |x| = \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3 \qquad x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

د x محور سره غوځتکی

$$P_{x1}(3|0);\, P_{x2}(-3|0);\, P_{x3}(2|0);\, P_{x4}(-2|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

د کرښيز ضريبونو ضرب

پوښتني

محور غوځتکي او د تپولراشنل یا ماتتوابعو ګرافونه II

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د درېيمې درجې يو تولهوښيار يا –راشنل تابع سرچينې سره سيومتريک ده، که
الف- له ټکو $P_1(1|2)$ او $P_2(3|-2)$ څخه تيره شي.
ب- که کرښه g د g(x)=3x سره پارابول په P(0|0) کې لمس کړي.
دويم: تابع f(x) د پيژندورشو يا تعريف ساحې D = IR سره ورکړ شوې ده. تابع f(x) په سيومتري وڅيړئ، صفرځايونه وشميرئ او ګراف وکاږئ.

الف – $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2$ ب – $f(x)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

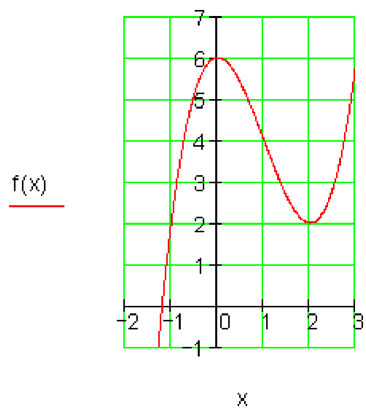
پ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$ ت - $f(x)=\frac{1}{48}x^3-x$

ټ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$ ث - $f(x)=\frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$

ج - $f(x)=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2$ چ = $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{9}{2}$

دريم: تابع $f(x)=x^3-3x^2+6;\, D=\mathbb{R}$ ورکړشوې ده.

الف - وښايئ:
د f(x) صفرځای د (1- ; 2-) ترمنځ پروت دی مدلل کړئ، چې f(x) تيک يو صفرځای لري، دا ګراف بايد څنګه راکښل شي، چې له هغې سره دا تيک دوه صفرځايونه ولري؟
ب- کرښه x = u د f(x) ګراف په ټکي Q او د x محور په P کې غوڅوي.
د لاندې درېګوډي يا مثلث 0PQ سطحه د u = 2 لپاره وښايئ.
د مثلث د (خوندي) سطحې ترم د u په واکوالي کې د 0 < u لپاره ورکړئ.
g(x) څومره صفرځايونه د g(x)=3.f(x) سره لري؟
دلايل يې راوړئ.



څلورم: تابع $f(x)=5x^3-10,8x+4$ ورکړ شوې ده. وښاى: x=0,4 يو صفرځاى دی. پسې نور صفرځايونه وشميرئ.

$f(x)=5x^3-10,8x+4;\, D=\mathbb{R}$

پنځم: د اووښتونې يا متحولې c په واکوالي کې د صفرځايونو تعداد وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2cx\,;\, D = \mathbb{R}$$

$$x^2 + 2x + 2c = 0 \Rightarrow p = 2\,;\, q = 2c \Rightarrow D = 1 - 2c$$
$$\text{für } D > 0 \Rightarrow 1 - 2c > 0 \Leftrightarrow c < 0{,}5$$
$$\text{für } D = 0 \Rightarrow 1 - 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0{,}5 \Rightarrow x_{2/3} = -1$$
$$\text{für } D < 0 \Rightarrow 1 - 2c < 0 \Leftrightarrow c > 0{,}5$$
$$\text{für } c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0\,;\, x_3 = -2$$

اړیکې:

د $c > 0{,}5$ لپاره $f(x)$ تيک یو صفرځای لري:($P_x(0 \mid 0)$

د $c = 0{,}5$ یا د $c = 0$ لباره$f(x)$ تيک دوه صفرځایونه لري.

د$c < 0{,}5$ او c د صفر سره نامساوي لپاره $f(x)$ تيک درې صفرځایونه لري.

پوښتنې

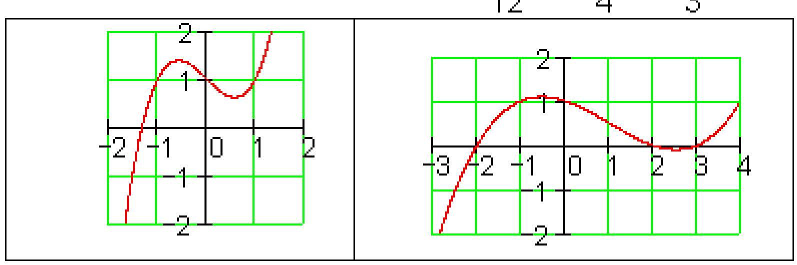
د ټول راشنل توابعو محور غوښتکي او ګرافونه III

تابع په یوه ګراف تنظیمیږي.

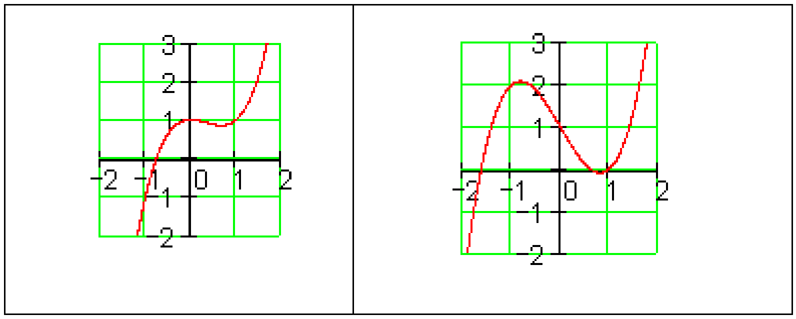
لومړی: هر د یوه تابع ترم سره تنظیم کړی او خپله پریکړه په دلیل کلکه کړی.

$$f_1(x) = x^3 - x + 1;\ f_2(x) = x^3 - 2x + 1$$

$$f_3(x) = x^3 - x^2 + 1;\ f_4(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



دویم: هر هغه څوک چې د لایسنس اخستلو لپاره ځان چمتو کوي، باید وپوهیږي، چې د یوه بریک وهونکي موټر تمکیدني واټن په یوه وچ پاخه سرک)چې طبعأ باید هوار وي) د عکسالعمل لار او د بریک لار څخه یوځای جوړه ده. د لاندې د موټې قانون یا لار(د درې ګوتو) څخه کیدی شي د چټکتیا v په km/h د عکسالعمل لار r او د بریک لار b په متر وشمیرل شي.

د بریک لار: $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ همداسې $b = \frac{\left(\frac{v}{10}\right)^2}{2}$ ، د عکس العمل لار: $r = \frac{v}{10} \cdot 3$

د المان د3.3.04 راپن اخبار د اول له جولای1. Juli 2004 په وچ سره د تمځای لار په بل بریکلار شمیرل کیږي.(په افغانستن کې به داڅنګه وي ؟نه پوهیږم)

الف- تابع مساوات $s = f(v)$ وټاکئ، د کوم سره چې د هرې تلنې د چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب – د لاندې تلل شوی چټکتیا $v = 0, 10, 20, 30, \ldots 50$ km/h لپاره په یوه ارزښت جدول کې د هغه هر یوه تمځای s سره یوځای کړئ

پ – له دې سره د (60 ... 100 km/h) لپاره دs یو څونور ارزښتونه وشمیرئ او د دې تابع ګراف وکاږئ.

ت – د نوي بریک نیولو قانون(المانی) سره دا تراوسه شمیرل شوي ارزښتونه وشمیرئ او دا په همغه کواودینات سیستم کې وکاږئ او توله نتیجه په شننه یا کومنتار سره روښانه کړئ.

دریم: داتابعورکړ شوئ: $f(x) = x^3 - 0,5x^2 - 3x + 1,5;\ D = \mathbb{R}$

الف- وښایئ: $f(x) = 0,5(2x-1)(x^2-3)$

ب –ګراف د شوونتیا تر پولې ټیک وکاږئ.

پ – د x د کوم ارزښتونو لپاره$f(x)>0$ باور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

شننیزه ځمککچپوهنه یا تحلیلي هندسه:

تحلیلی هندسه(وکتورهندسه هم) د هندسې یوه برخه ده، چې د هندسې پرابلمونو د حل د پاره د الجبري مرستندوی موادو (په تولیزه توګه له کرښیز الجبر) څخه جمتو کوي. دا په ډېرو حالتونو کې ممکن کوي، چې ځمککچیزې پوښتنکونې سوچه شمیرنیز حل کړی شو، بې له دې چې لیدونې یې مرستې ته راوبولې یعنې چې شکل څنګه برېښې یا دی.

۱۶ ـ د سطحې شننیزه (تحلیلي) هندسه

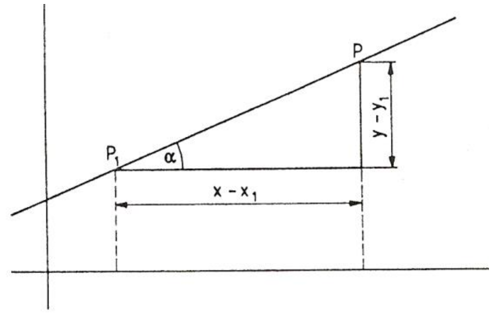
په دې برخه کی یوځود تحلیلي (شننیزې یا سپړنیزې) ځمککچپوهنې یا هندسي ټاکلي پرابلمونه څېړل کیږي.د تحلیلي هندسې بنسټیزه تګلار به ځرګنده (وښول) شي، په نامه هندسې جوړښتونه، ددې هندسې شکلونو او ددې په شننیزې یا تحلیلي ځرګندونویی د هندسې خویونو جوړښت ښایي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چې یوه کرښه یواځنی کره تعین کړاې شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو یا ـ مساواتو مختلفی بڼی شته دی. یوه کرښه د یوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کیدي شي . (ټکی او د ټکی میلان معلوم دی) .

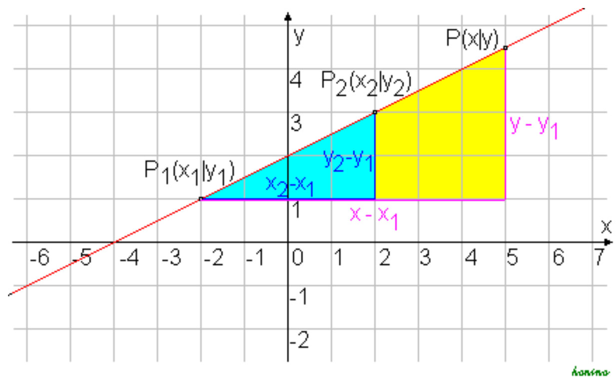
دلته دې(P1(x1 , y1دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګیدو کونج،وي، چی د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او(P(x,y په کرښه یو اووښتونی (واریابل) ټکی دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو د کرښې د ميلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته ځيره دې وکتل شي(لاددې ځيره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1);......................(16,1)$$

پورته د کرښې ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو $x1= 0, y1 = b$ سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: (y - b = m (x - 0 په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

يوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دوه ټکي دي(P1(x1 , y1 اوP2 (x2 , y2) وي، د x1|=x2 سره ، (څيره ش ۱۶ . ۲) د ځګيدونکی يا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

او

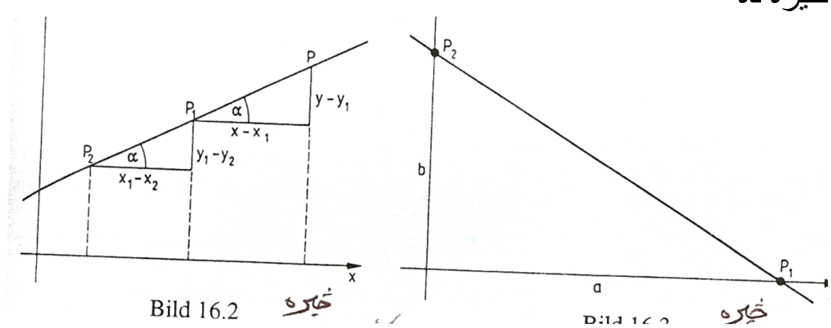
m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x \ - x_1}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکيزبرابرون

څيره ده



که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردينات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردينات x1= 0, y2 = b|= 0 سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅي برابرون

ځلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاينيز دي.د مساوات عمومي فورم)يا ټوليزه بنه (داسی دی:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (16 . 5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)
دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري یا په بر کی نیسي
y = y0 (A = 0 ,B|=0)
او(x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بیلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون یا لاینیز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تیریږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30^\circ$ یی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی لیکل کیږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم یي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بیلګه ۱۶ . ۲ :

د لاینیزبرابرون یا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(**اته** ناسم، په ځای یې شپږ دي)

بیلګه ۱۶ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ښیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

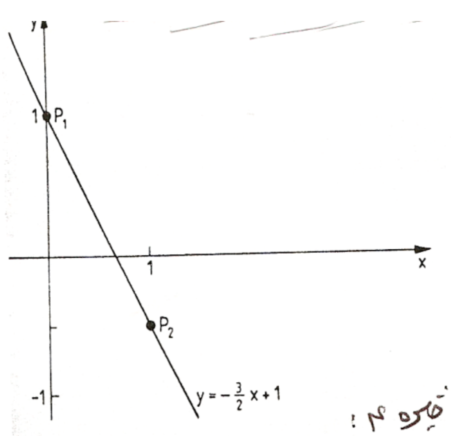
بیلګه ۱۶ . ۴ :

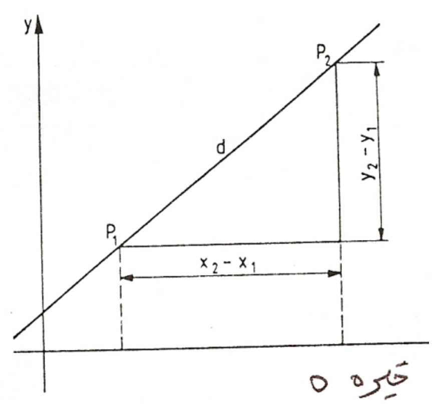
د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي۰
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (ښیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};.........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ښیرې ۱۶ . ۴ او - ۵





بیلګه ۱۶ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجتکي یی دادي(A(3,1),B(-1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کتمتی) چی (یو د بلی سره) غبرګي نه وي ټیك یو غوڅټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی ، نو د دواړو کواوردیناتو برابرون باید پوره کړي . په دې حالت کي د غوڅټکي کواوردیناتو، د دوه لاینیزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونې یا

ناپېژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه ترې لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابرونسیستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي یو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډېرې اوبیونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه یوه کرښه ښایي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي یوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بیلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کرښو
الف) g2: -2x+y = 1,
ب) g3: 3x -y=5, ,
پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3
سره څیړو
اوبیونه : د g1 برابرونونو څیره داسی بدلیږي : 3x-y=2
الف) د برابرونونو سیستم 3x-y=2، -2x+y=1
ټیك یوه اوبونه لري: x1=3 , y1=7
ددې څخه څرګندیږي چی ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوڅټکی دی .
ب) د برابرونونو سیستم
3x - y = 2
3 x - y = 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی نه لري : برابرونونه یو بل ردوي یه نه زغمي . د g1 او g2 کرښی یو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سیستم 3x-y=2

-x+(1/3)y=-2/3

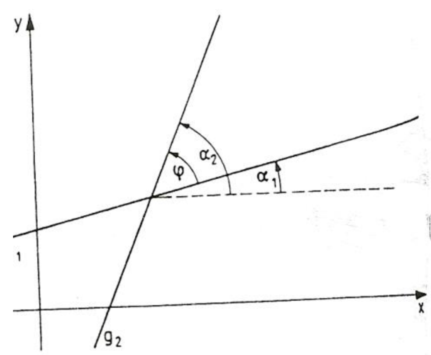
ناپای ډیر ې اوبیونې یا حلونه لري. برابرونونه یو بل سره برابر یا یو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي یو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کتې متې برابرونونه دي ۰

که د دوه کرښو

g 1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو جګید کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت یا توپیر)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶)



ځېره ۱۶ . ۶

د کرښی له برابرونونو پوهیږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زیاتون تیورم (بنستیزه جمله) (برخه ۶ . ۵) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

د کوم څخه چی د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 . m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دیږ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته خبرې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4}-1}{1+1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180-\phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښې یوبل سره غبرګې ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1+m_1.m_2} = 0$$

ګورو چې د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښې یو په بل (نیغې) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m-m)/(1+m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

یعنې د m2= -1/m1 لپاره (m1|=0,m2|= 0)

په کرښه(y=y0 (m1=0 باندې کرښه(x=x0(m2=oe نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

m2 = m1 (16, 8)

د اورتوګونالیټی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

m2 = -1 / m1 (16 . 9)

بیلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي(P (2,-1 تیریږي، او له کرښی g1 : y = -2x +1 سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نیغه) ځغلي اوبیونه:

الف) د g2 کرښی میلان (جګوالی m2 = m1 = -2)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : (y+1=-2(x-2 همداسی y = -2x +3

ب) د g2 کرښي میلان یاجګیدنه ده m2=-1/m1=1/2 د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2

بیلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کیږي چي د(P1(1/3,-1/6 ټکی تیریږي او په کرښه چی له ټکو(P2(-1,1 او(P3(-2,-1 تیریږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تیریږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري (y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تیریدونکی کرښي برابرون د m_2 میلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:
y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بیلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوځتکي S واټن له ټکي(P(6,13څومره دی او د کرښي برابرون څنګه دی چي د کواوردینات له سرچینی تیریږي او د S او P څخه تیریدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوځتکي کواوردینات د لاندې برابرونونو سیستم څخه لاس ته راځي
2x-y=1
3x+2y=5
یعنی: xS=1 , yS=1
د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \sqrt{(1-6)+(1-13)^2} = 13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S او P تيريږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: (m = 12 / 5

له S او P ټکو تيريدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي ميلان

m2 = -1/m = -5/12

د (P0 (0,0څخه تيريدونکی کرښه د m2 ميلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تيريږي او د x–محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, $= 30^o$, b) $P_1(-3,2)$ $= 45^o$

c) $P_1(-1,-4)$, $= 120^o$, d) $P_1(4,4)$, $= 0^o$

e) $P_1(0,0)$, $=150^o$, f) $P_1(1,-1)$, $= 90^o$

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تيريږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅي (لنډ : محورغوڅي) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره چې يو له بل يې لري وټاکئ.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ – يو دريګوټی دا لاندې ګوټکی لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دريګوټيو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دريګوټي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برخښوونه يا –فورم څنګه دی؟

a) $3x -5y +15 = 0$, b) $4x -3y -18 = 0$

c) $-4x +2y -10 = 0$, d) $-3x -4y +15 = 0$?

۶ – د کرښې $y = -(12 / 5)x +2$ پروتځای د کرښو

a) $y+2,4x - 6 = 0$, b) $28x +10y = 0$, c) $8x + 5y =2$,

d) $5y +12x -10 = 0$. e) $y +(12/5)x = 3$, f) $6x +2,5y = 5$

سره وڅیړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د لاندې کرښو د غوڅتکو کواورديناتونه او غوځکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$ $3x - y = 5$,

b) $y = (1/2)x + 1$ $y = -2x + 6$,

c) $y - x = 7$ $y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$ $-x/2 + y/3 = 1$,

e) $6x - 2y + 10 = 0$ $y = 3x + 6$,

f) $y = 4x - 1$ $y = -3x + 5$!

۸ – کومه کرښه د کرښی $x - y = 4$ ، کرښی $3x + y = 8$ او برسیره پر دی له غوڅتکی P(0,5) څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندې گوټ A(-4,-1), B(2,-2), C (1,3) سره د دریګوډي دننه کونجونه څومره لوي دی ؟ (پیلونه: دریکونجی وکاږی)

۱۰ – د ولاړپریوتی کرښي یا زوړندې مساوات له ټکی P(2,0) څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دی؟

۱۱ – د ولاړکرښی مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي P(-1,-2) څنګه د

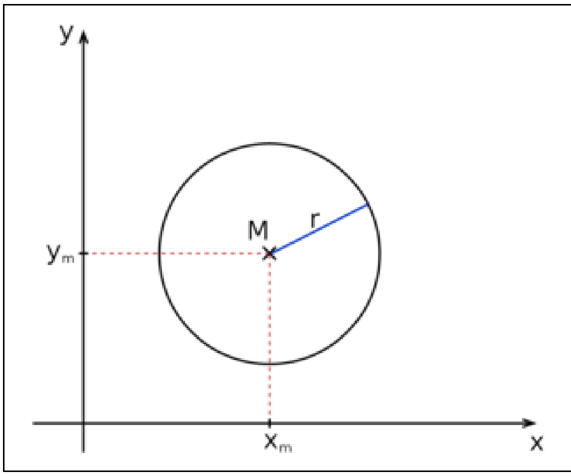
۱۲ – د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي P(-1,-3) تیریږي، څنګه دي؟

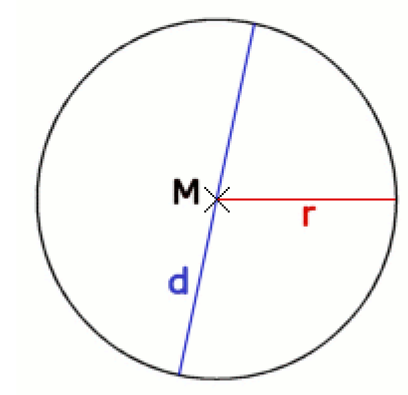
۱۶ . ۲ گردی (دایره)

دایره(گردی) د ټولو هغو ټکو ډیری(سټ) ده، چی د یوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسي په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانګه وایو او په rیی په نخښنه کوو.
فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې دایره (گردی) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډیری(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \left\{ X \in E \mid |\overline{MX}| = r \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





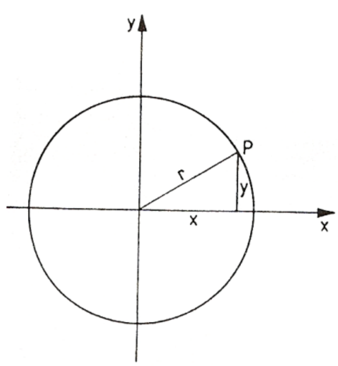


Bild 16.7 ،ځيره

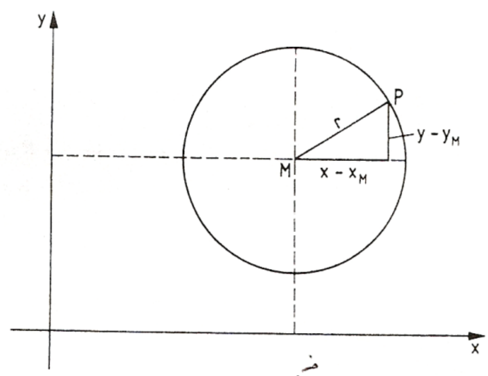


Bild 16.8 ځيره

په شننیزه هندسه کې کیدی شي، چې ګردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردی ټولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پیتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د یوې ګردۍ ځانګړې حالت او د کواوردیناتسیستم سره، چې منځټکی یې د کواوردینات
په سرچینه پروت وي لاس ته راځي
$$x^2 + y^2 = r^2$$
که د ګردۍ منځ ټکی د کواوردیناتسیستم (خيره ۱۶ . ۷) په سرچینه پروت وي، نو د
) پیوتاګوراس د جملې له مخې (د ګردي په خوښنه ټکي (P(x,y لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردۍ منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردینات (xM,yM) ولري (ځیره ۱۶ . ۸) نو د ګردۍ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغیر وعمومي) ، پس پیژندل کیږي چی د ګردیبرابرون د ځلورۍ یا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاینیز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی یوه غړي په ځیري سره یوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټولیز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه ۰
که د ګردي برابرون په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه یی ځرګنده کوو یا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د ځلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه ځیرې پورته وګورئ

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردئ برابرون دې په ټولیزه - یا عمومي توګه وي:
$$2x^2+2y^2 +4x-12y = 0$$
له دې لاس ته راځي، که په دوه وویشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د ځلورۍ پوره کونه یا مربع تکمیلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y \ +9 = 3+4+9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبینوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$
ګردۍ منځټکی $M(-2,3)$ او وړانګه $r=4$ لري.

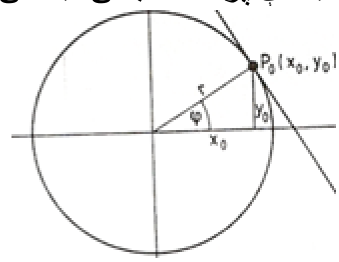
بیلګه ۱۶ . ۱۲ :
د ګردۍ برابرون ولیکې چې منځټکی یې $M(2;0)$ وي او په کوم چې ټکی $P(6,4-3)$ روت دی؟
اوبیونه : د $M(2,0)$ سره (۱۶ . ۱۱) داسې دئ
$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$
د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2 + (4 - 3)^2 = r^2$
له دې څخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د ګردۍ برابرون:
$$(x-2)^2 + y^2 = 64$$
ګردۍ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي
۱ - کرښه ګردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅې ده(سیکانتې)
۲ – کرښه ګردۍ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)
۳ - کرښه ټوله له ګردی دباندې پرته ده (له ګردۍ تیریدونکی، لنډ : تیرېدونې)
د غوڅټکي(د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سرې د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی ږدي(y یا x پسی حل یا اوبۍ شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (څلورۍ برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چې په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو رییل ډبل اوبی او یا هېڅ رییل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بیلګه ۱۶ . ۱۳:
کوم پروت ځایونه ګردی k چې راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ اولاندې کرښی و یو بل ته لري؟
$$g1 : 2x+y=4 ,g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردۍبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$$(x-2)^2+(-2x+4 -3)^2=5 <=> 5x-8x=0$$
ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به g1 د ګردي غوڅوونی یا (Sekantسکانت) وي.
که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي
$$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 <=> x^2-8x+16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډبل اوبونې $x_{1,2} = 4$, $y_{1,2} = 4$ سره g_2 یو تانجنت دی.
که $g_3 : y=2x+6$ د ګردۍ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 \Leftrightarrow 5x^2+x+8=0$
دا څلورۍ برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه g_3 له ګردۍ k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.



په ګردي $x^2+y^2 = r^2$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی $P_0(x_0,y_0)$ د مساوات $x_0^2+y_0^2 = r^2 > 0$ سره غوښتل کېږي. تنجنت د مماس په ورانګه نیغ ولاړ دی
د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او
له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت
$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0; ....(16,13)$

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:
$y-y=-(x_0/y_0)(x-x_0) \Leftrightarrow xx_0+yy_0=x_0^2+y_0^2=r^2$

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16.14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه $P_0(\pm r,0)$ او $P_0(0,\pm r)$ په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

(c) ketabton.com: The Digital Library

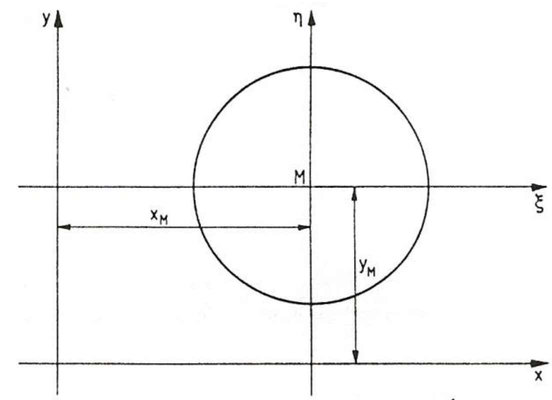


Bild 16.10

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته x0,y0 یا xM,yMاو x_0, y_0 یا x_M, y_M ګورو نو کټمټ دي

بیلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداکوو. دا باید دګردی برابرون پوره کړي . ټکی P1 باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) باید پوره کړي. نو باور لري

$x_0^2+y_0^2 = 16$ او $-12x_0 + 4y_0 = 16$

که دا لاینیزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي یو څلوری برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبیونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$y_{01}=4$, $y_{02}=-16/5$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو(P01(0,4 او(P02(-12/5,16/5 د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$0.x+4y=16 \iff y=4$

او

$(-12/5)x-(16/5)y=16 \iff y=(-3/4)x-5.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي (M(xM,yM سره د η,ζ -کواوردینات سیستم کی ، چی سرچینه يي په M کی پرته ده)(؟ څیره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري٠

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;..................................(16,15)$$

د η,ζ -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم یو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتی دي ٠

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;..........................(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بیا دا دy,x -کواوردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي(کشوي یا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي(Po(x0,y0کی د ګردۍ تنجنت برابرو په ګردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بیلګه ۱۶ . ۱۵:

په ګردۍ چی برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، دx - محور باندې، په ټکو

$$x_1 = x_2 =-5$$

سره تنجنت وکا ږو(کیږدو). برابرون یی څنګه دي؟

اوبیونه : د ګردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدلیږي:

$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$

$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8 , y_M = 2 , r = 5$$

د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو ګردۍ ټکو په ګردیبرابرون کی ځایوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې داسی لاس ته راغلي دy لپاره څلوری‌برابرون یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو
مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6 , y2 = -2$
د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \iff 3x+4y=9$$

او

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \iff 3x-4y=-7$$

تمرينونه:

۱۳ – د لاندې مساواتو سره ګردیمنحنیکی او وړانګه وټاکی:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) $x^2+y^2\ 9y = 0$, d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$, f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ – د لاندې ګردیو مساوات وڅیری

الف) چی منځ ټکی $M(-2,-1)$ لری او له سرچینی تیریږي

ب) هغه چی دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5,\ 5 -3)$, $P_3(\ 5 \mid 3,-1\ )$ یی د غاړو ټ

پ) چی وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11)$,$P_2(5,5)$ څخه تیریږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4 / 3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ) چي منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4 / 3)x +13$ لمسوي.

ث) چي د هغي منحنیکی په کرښه $y = 3x -19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$ او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ – کوم پروتحایونه ګردی k چي فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې یو له بل سره لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,
d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتخاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی
الف) په ټکي $P_0(5, y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،
ب) په ټکي $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟
۱۸ – د هغو ګردیو منختکي پیداکړی چې وړانګه یې $r = 5$ وي، کومې چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکي $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!
۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

فنکشنونه(بلواك یا تابع)

د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د بلواك او بیا زیاته د فنکشن په نامه څموږ په دې کار کی بلل شوي چی موږ ورسره تراوسه د تابع د نامه لاندې هم بلد یو، څما په اند یا فکر که دا موږ څیرونه وبولو، نو موخه ور یا هدفمند به مو نومولی وي او تابع خوبې له هغې بلواک دی. په لاندې کې به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی څموږ د څیرلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې رېيلی واريابلی (اووښتوني يا متحولې) Rرييل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن يا ځيرونه) د رييلو ګڼونو ډېری باندې ، د يوې ډېری $D \subseteq R$ يوه يواځنی ځيرونه ده. D دپيژند ډېری نوميږي .
د ټولو ارزښتونو ډېرئ چې y يې د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پيژندډيری يا تعريف ډيري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډيری W بلل کيږي .
د دي قانونمندی f له مخی هر $x \in M$يواځني يوه $y \in W$ باندې تنظيميږي يا ځيره کيږي :
$y = f(x)$
اوس نو x خپلواك واريابل يا اووښتونی يا مجهوله بلل کيږي يا نوميږي او y بلواك واريابل يا اووښتونی بلل کيږي، له دې امله تابع، چې موږوايو، د ځيروني هغه ځيره شوې خوا ده. (د فنکشن يا ځيروني او تابع يا بلواک توپير)

د فنکشن مختلف انځورډولونو په منځ کې سرې توپيروي. د دې کليمه انځورونه کې له ماتماتيکي يا شميريز سومبوليك څخه تيريد شو،خو ، مګر ددې لپاره يو پيچلی، د تشريح شکل دی، چې

په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بيلګه ۱۵ . ۱ : هر رييل ګڼ د همغه رييلګڼ په نيم ور زيات ۱ باندې تنظيميدل يا ځيره کيدل..

بيلګه ۱۵ . ۲ : هر يو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر يو مثبت ګڼ او صفر به د هغه په مربع تنظيم شي.

د شميرپوهنی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحليلي (شننيزه) انځورونه د بلواک يا فنکشن تشريح ده. دلته x او y د نورو رييلو ګڼونو سره د بنسټيزو کارونو يا عمليو ، زياتون، کمون ، ځل ، ويش ، او د بنسټيزو فنکشنونو له لارې ترل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بيلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بيلګی ۱۵ . ۲ ته :
د $x<0$ لپاره $y=|x|$
د $x>0$ لپاره $y=x^2$
دلته $D=R,W = [0,oe)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي چې په داسې حالت کې له کېڼ و ښې لور ته یا ګډوډ لوستل کیږی یعنی داسې لولو:
د y x مطلقه ارزښت سره مساوي دئ ، که چیرې x له 0 کوچنی وي.

داسې لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چې له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیځیت(واضح)روښانه و څرګند) explizit نومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ ۱و ۱۵ . ۲ چې په یوه د y په لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: y =f(x)
که چیرې داسې نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل F(x,y)=0 دی او فنکشن ایمپلیځیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به 2y-x-1=0 ,D=R,W=R فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپلیځیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیځیت شنینیزه بڼه (ایمپلیځیت تحلیلي فورم) کیدی شي په اکسپلیځیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي.
د بیلګی په توګه:
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیځیت حل کیدونکی نه دئ.
د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لارښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)

$x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oe به یوه پارامتري انځورونه وی
او x = t , y = t/2 + 1 به یوه بله پارامتري انځورونه وي.
زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X	-2	-1	0	1	2 ....
Y	2	0,5	1	1,5	2 .....

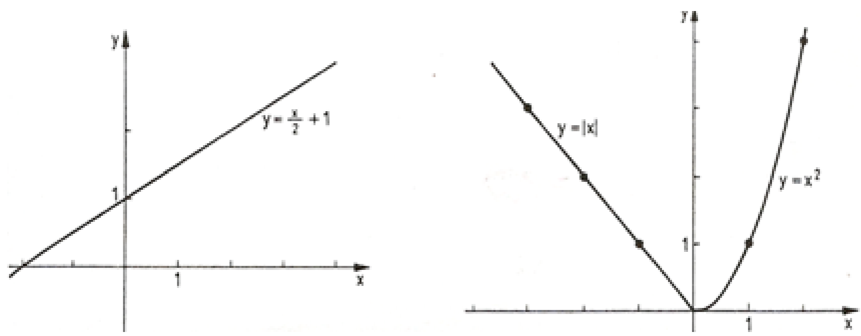
بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....-3	2	-1	0	1	2	3 ...

(c) ketabton.com: The Digital Library

Y....3 2 1 0 1 4 9 ...

د فنکشن گرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرښې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو یا اووښتونوجوړې د x,y- هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي . ځیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲ بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته



۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال]a,b[کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی (مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو $x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1) \le f(x2) \quad (f(x1)>f(x2))$
که د برابرونتخبنه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دی

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټیدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په يوه اينټروال [a,a-] کی يو تعريف شوی فنکشن ($y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) يا سيومتريك symetrisch,(ناجوړه (طاق) يا نا- يا انټيسيومتريك antisymetrisch بلل کيږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \qquad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو ځيري اکسيال يا محوري سيومتريك و y - محور ته ځغلي) دلته هم ځيره شته ، نو تل به همغه څه ليکم؟ ۱۵ . ۳) ، طاق فنکشنونه و سرچينی ته منځني يا مرکزي سيومتريك ځغلي) بيا هم ځيره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

بيلګه ۱۵ . ۴

فنکشن $y= x^3 ,D= R$

يو ناجوړه يا طاق فنکشن دی :

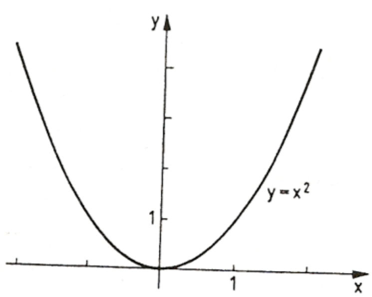
$$(-x^3) = -x^3$$

بيلګه ۱۵ . ۳ :

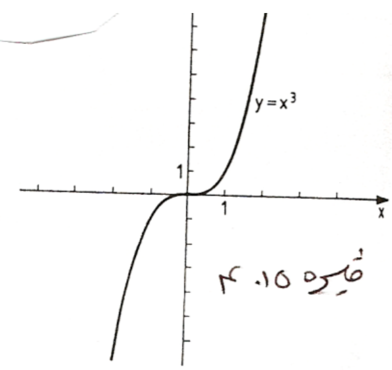
فنکشن $y=x^2,D=R$

يو جوړه يا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$



ځيره ۱۵.۳



ځيره ۱۵.۴

د بيلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه يا جفت او نه ناجوړه يا طاق دي

پيژند ۱۵ . ۴:

($y = f(x$ تيك هلته په D (پيژندډيری ده) بند يا رابند(محدود)بلل کيږي که يو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري:

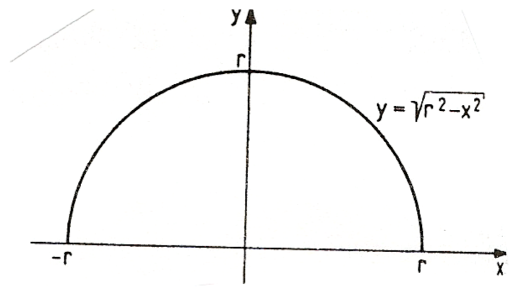
$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بيلګه ۱۵ . ۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$
رابند یا راګیر(محدود» زه به دا له دې وروسته
بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی خیره ده(

ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$



پیژند ۱۵ . ۵:
د $y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p) = f(x)$$

د دورانی یا تل راګځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي٠

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\, x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (خیره ۱۵ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:
$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 , \quad x2 = -2$
فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم خیر ۱۵ . ۶)

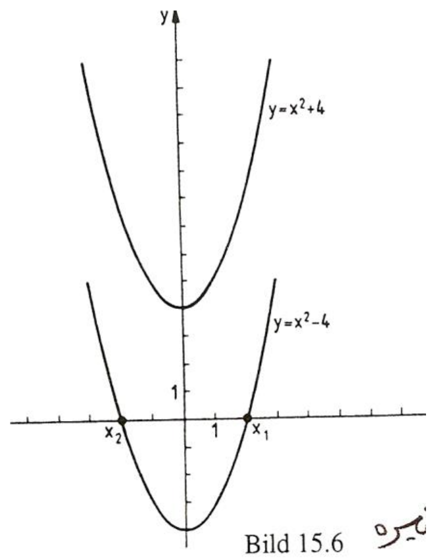


Bild 15.6 نیره

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \quad , \quad y \in W \quad y = f(x),$
یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي
یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ خیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (y =
f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ښتکیدونکی دی ، دا په دي مانا چي دا
یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په ښت یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا
واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په ښت فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا
د فنکشن روڼنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه خیره ده، چی x خپلواك
اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیژندونکی دي د y=f(x) په
ښت یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په ښت فنکشن سره کتمت(- ورته) identic دی۰د په ښت یا
برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

كرافيكى ښيره $y = x$ په كرښه د $y = f(x)$(هندارونه) يعنى په هنداره كى ښيرونه او لنډ يى: هندارونه) ده۰

بيلګي ١٥ ، ١ ته :

د فنكشن $y = f(x)= x/2 + 1$ چپه يا په ښټ فنكشن داسى دى
$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$
سرېى $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبى كوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ښيره. ١٥ ٧ الف)
ړ

بيلګي ١٥ . ٣ ته : فنكشن
$x \in D$ $y = x^2$,
ښيرره ش ١٥ . ٣) په ښټكيدونكى دي يا په ښټكيدونكى نه دى.
هر $y \in W$ $=[0,oe]$ پوري دوه $x \in D$ $= [-oe,oe]$ اړه لري، يعنى $x=+y$او $x=-y$
مګر $y= x^2$كلك مونوتون جګيدونكى دى (او په دې ډول يواځنى او يواځنى).

د $x \geq 0$ لپاره او كلك مونوتون لويدونكى د $x < 0$ لپاره. $y=x^2, x\geq 0$
ته چپه- يا په ښټ فنكشن $y=+ x$ دى، او $x < 0$, $y = x^2$ ته چپه- يا په ښټ فنكشن - $y =$ xدى. (ښيره ١٥ . ٧ ب) .
په ټوليزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ١٥ . ١ :

كه $y = f(x)$كلك مونوتون جګيدونكى) لويدونكى (وي ، نو په ښټ فنكشن $y = f^{-1}(x)$ موجود دى او دا هم كلك مونوتون جګيدونكى (لويدونكى) دى.

١٥ . ٣ . بنسټيز فنكشنونه

په دې برخه كي بنسټيز فنكشنونه تعريفيږي. دا ټول راشنل فنكشنونه، مات راشنل فنكشنونه، پوتنځ يا په توان فنكشنونه، ايكسپوننشل فنكشنونه او لوګاريتم فنكشنونه، تريګونومتري فنكشنونه او ښيكلومتري فنكشنونه دي. دا بنسټيز فنكشنونه به د ځپلوځانګړډوله خويونو له مخى وښيرل شي. په برخه ١٥ . ۴ كه به دفنكشن فنكشنونه (ځنځيرى - يا تړلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنونه) وخیرل شي. د فنکشنونو خیرل به د هغو ځانګړېوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخې هلته هم دوام وومومي، که د دیفرنشل شمیرنې کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a^2x^2+a_1x+a_0, n \in N;\ a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالایني فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کې پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لايني فنکشنونو خیره(ګراف) یوه کربښه ده چي په y = n کې دy - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m = \tan\alpha$

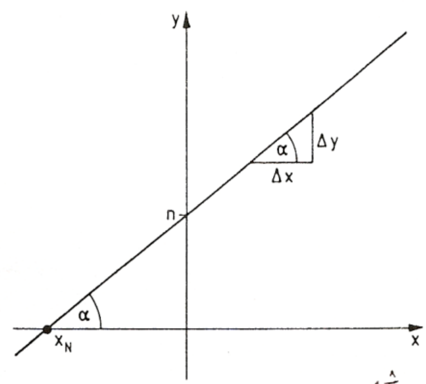


Bild 15.8 ګاره

لري (خیره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

کربښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که 0 =|m نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي (y = 0 لري: $x_N = -n/m$

که را په غاړه شي چې د یوې کرښې برابرون، چې له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي یو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرېټکی یا نوره ښه غوڅټکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱ . ۱۵) کې $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c , a \neq 0 \qquad (15 .3)$$

د مربع فنکشنونو څیره) ګراف (پارابول دی چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیڅینت) ځله ونې یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاې او بڼه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیړني لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(خ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q$ (a=1 , b=p , c=q) (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د څلورې - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \quad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2/4$ راکښل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:

$$x_s = -p/2 , y_s = q - p^2/4$$

بیلګه ۱۵ . ۷:

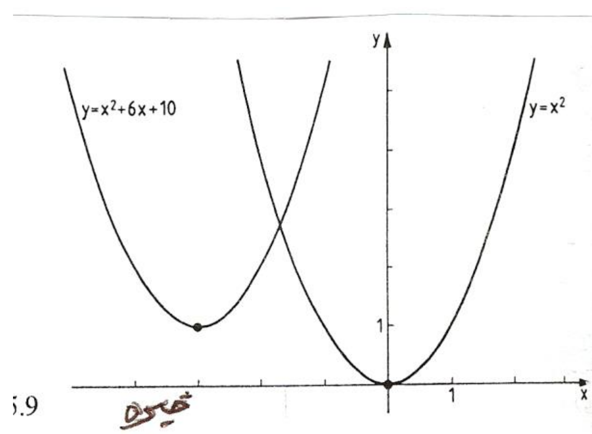
(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=x^2+6x+10,\ xs=-6/2=-3, ys=10-6^2/2=1$
(خ،۱۵ . ۹)
3. $y = ax^2$ ($a|=0, b=0, c = 0$)
د ککرې (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $1 < |a|$لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د a $0 >$لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$
(خ . ۱۵ . ۱۰)
4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرې   (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)
$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$



بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,$(a=-1/2,\ b=1,\ c=4)$
دککرې کواوردینات:
$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$
دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

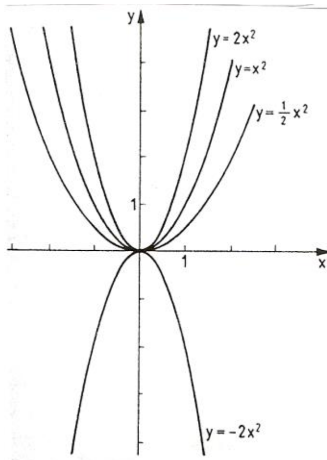


Bild 15.10 ځېره

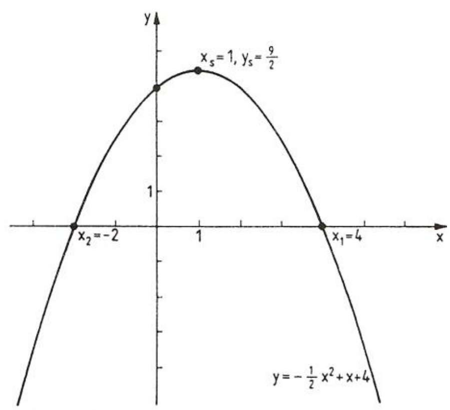


Bild 15.11 ځاکره

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (ځ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي٠

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته:
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي
چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري.

فنکشن$y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$ $x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 له x1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یی له x1سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (څرکندوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلونه یا ضریبونه		a_2	a_1	a_0
منځنی خلونه		a_3x_1	$(a_3x_1+a_2)x_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$
منځنی زیاتون	a_3	$a_3x_1+a_2$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$او $x2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.

اوبیونه) :

که چېرې ددریمی درجې ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چې د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله   ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګې ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5): (x-5) =x^2+3x+1$ له دې امله لرو:
$y = x^3-2x^2 -5 = (x^2 + 3x +1) (x-5)$
د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړی کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:
$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$
او$f (x1) = 0$ چی د $(x-x_1)$سره د ځلوني له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د ځلوري – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجې فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ریشنل ړرزرنړ
ړړطړتظداغظطافنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیخینت یا ځله وونې لپاره دې صفر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :

5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن
$y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$ لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	2	0	-6	-20	-8	80
$x_1 = 2$		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
$x_2 = 2$		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
$x_3 = -2$		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم (2 $x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$

لپاره لاندې د حل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)$
$(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي
$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$

ددې لپاره چی د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفیرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري
چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره (f(x تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی
xn -> oe

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي
او xn ->±oe دx ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زياتيز يا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
(کږه له oe - څخه oeد په لور ځي) .
که n جوړه او a_nکميز يا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي).

که n ناجوړه او a_n کميز يا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_nکميز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

پيژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$
$$n,m\in N_0;a_k,b_i\in R;Q_m\neq 0$$

مات ريشنلفنکشن بلل کيږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعريف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نوميږي، که n<m وي او نااصلي مات دی
که n ≥ m ، نااصل مات فنکشن کيدی شي چي د پولينوم ويش له لارې تجزيه
(ټوټه) شي او د يوه ټول ريشنلفنکشن او يوه ريښتونی ماتی برخی د زياتون په څير
وليکل شي.

بيلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن
باندې دماتباندې فنکشن ويش څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$ پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$.

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره یو صفرځاي لري، که $x = x0$ وي نو باور لري:

$P_n(x_0)=0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x = x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0)=0$ او $Q_m(x)=0$

د $x = x_P$ لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P)\neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بیلګه ۱۵ . ۱۳ :

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x$ د ماتباندي- او ماتلاندي فکشنونو توټي کولو وروسته په لاندې فورم د لاینې فاکتورونوپه توګه لیکل کیږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x=x_0=3/2$ لپاره ماتباندي صفر دی، مګر مات لاندي صفر نه دی (صفرځای)مات لاندي- او مات باندي فنکشنونه د $x = x; L = -2$ لپاره صفر دي (تشځای)

د $x=x_{P1}=0$ او $x=x_{P2}=0$ لپاره ماتلاندي صفر او مات باندي صفر نه دی (قطب)

که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای (ټيك ناپای ځای بللکيږي) xpکی کره داسیمپتوټي کربښي $x = xP$ ته نزدې کيږي.د یوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعریف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نیونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ یعنی x^m د ماتباندي او ماتلاندي د ویش څخه لاس ته راځی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x تول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x تول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ځيره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کيږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نيسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه يی د صفر په لور ځي، لکه تولريشنل برخه.
د نااصل مات فنکشن ځيره د x -> ±oe سره ، ځان خپل تولريشنلبرخی ته نزدې کوي.

بيلګه ۱۵ . ۱۴:

الف: $y = x /(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول يا قطب نه لري ريبل اوبيونه نه لري) او د x -> ± oe لپاره د x- محور ($y = 0$) د اسيمپتوتی په خير لري (خيره. ۱۵ . ۱۲)

ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځايونه ($x^2+2x-3 =0$) په $x1 =-3$ او $x1=1$ کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x = -2$ اسيمپتوتی دی، او د x →±oe لپاره فنکشن $y = x$ اسيمپتوتي کيږي)دا سيمپتوتی کليمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

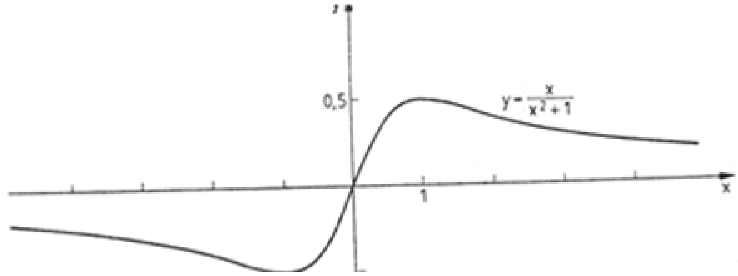
موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي تول - يا مات ريشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

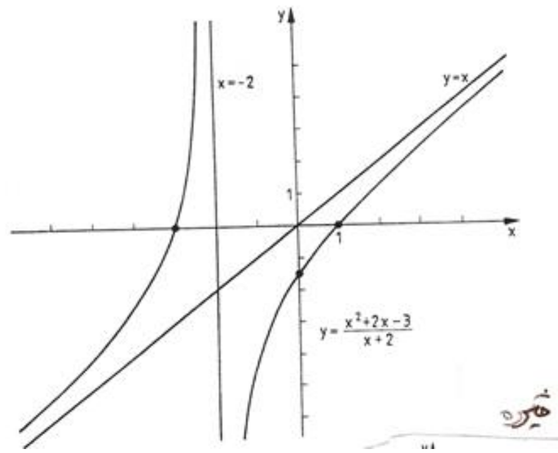
$$y=x^n; n\in Z\setminus\{0,1\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15,8_a)$$

يو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پيژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زيا تز يا زياتيز يا مثبت تولګڼ n لپاره يو تولرشنل فنکشن دی. د جوړه تولګڼ n لپاره تولريشنل فنکشن دی. د تولګڼ n لپاره تولی کرښ د تعريف ډيری(-) = D oe,oe، د ارزښت ډيری(W=(0,oe او ګډ تکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري.
(خيره ١٤ الف ١٥) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe
او(W = (-oe,oe دي او (1-,1-) , (0,0). (1,1) ګډ تکي دي (خيره ۱۵ . ۱۴ ب)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library





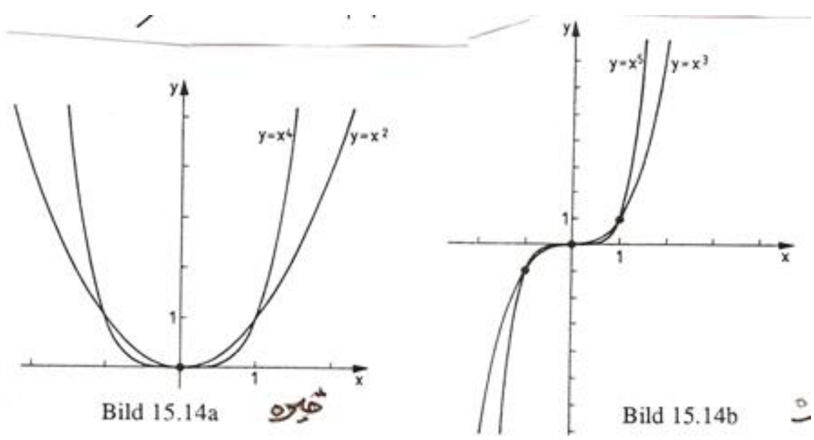


Bild 15.14a Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په $x = 0$ کی د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپټوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز) nلپاره ټولی کرږې د پیژند ډیري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ارزښت ډيري($D = (-\infty,\infty)\setminus\{0\}$ $W = (0,\infty)$ لري اوګډټکي $(1,1)$, $(-1,1)$
؟؟؟ ځيره ش. ۱۵/۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون (کميز n)لپاره{ $D = (-\infty,\infty)\setminus\{0\}$ او($W=(-\infty,\infty)$ او$(-1،-1)$ $(1,1)$
ګډ ټکی دی (ځيره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه ځيرې دي

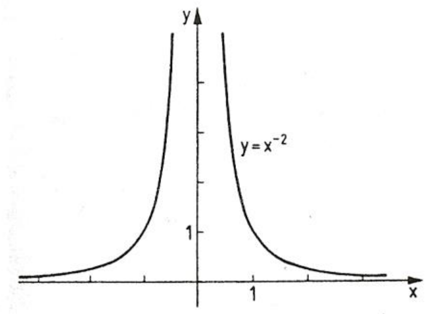


Bild 15.15a

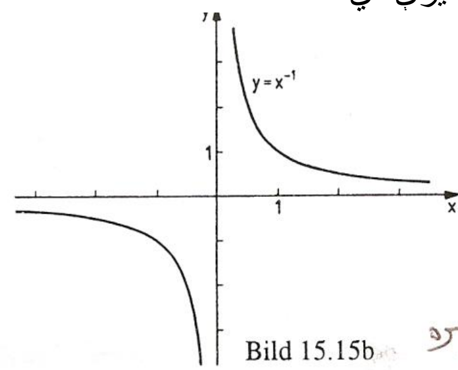


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ځټ بلواک لپاره دې د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي.(پرتله بيلګه(بيلګه ۱۵ .۳)

د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- يا پر ځټ فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ , n \in N\setminus\{1\}\ , D = [0,\infty), W = [0,\infty) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15,8_b)$$

او ريښه فنکشن نوميږي (پيژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کيدی شي و

ريشنل ايکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ريشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ , a \in Q\ , x > 0 \qquad (15.8c)$$

نو د ريښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په ځير وپوهيدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرځټ بيرته پوتنځ فنکشن دی.

ټوليز پوتنځ فنکشن پيژند د ريل ايکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د ريلګڼونو کليمه دې وکتل شي برخه ۳ ۱۰ . ۴ کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

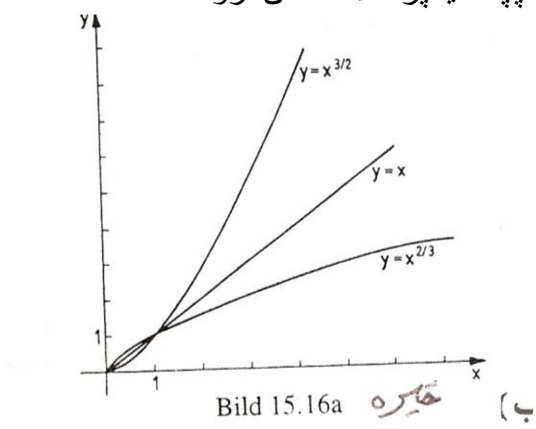
پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R \ , x > 0 \qquad (15.8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} \ , x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښت فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} \ , x \geq 0$



(خیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

(خیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$$y = x^{-2} = 1/x^2 \ , x > 0$$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښت فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په پام کی وي.

د بیلګي په توګه فنکشن $y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی دی او له دې امله ټول په ښت کیدونکی وی، د $y = \sqrt[3]{x}$ فنکشن $y = x^3$ په پیژندډیری ($D = [0,\infty$) کی پر ښت فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د $y= x^3$ پرښت فنکشن د] $D= (-\infty,0$ سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=a^x, a>0, a\neq 1 \qquad (15,9)$$

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰

(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پیژند ۴ . ۱ وکتل شي)

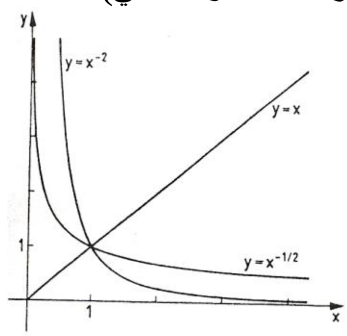


Bild 15.16b څېره

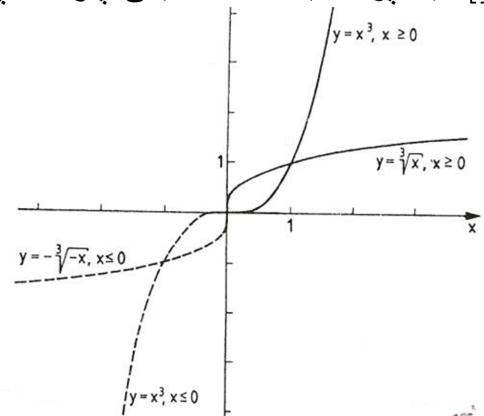
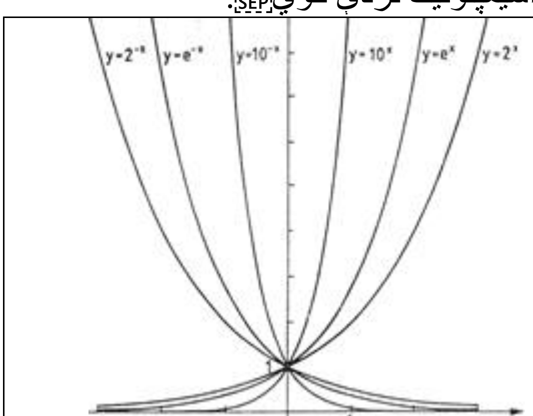


Bild 15.17 څېره

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژنددیری(D=(-oe,oe او ارزښتدیری(W=(o,oe لري. د $a^0=1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کرو ګډ ټکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹) په کلکه مونوتونجګیدونکی دئ اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنږدې کیږي. د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نږدې کوي.



کسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګګې (a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10 څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$$y = \log_a x \,,\ a > 0 \,,\ a \,|= 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژندديری $D = (0.oe\ \ )$ او د ارزښتدیری $W=(-oe,oe\ \ )$ لري.

د $y = \log_a x$ کرږې د ګرږو $y=a^x$ هنداورنه ده، په کرښه $y=x$ ۰ تکی(1,0) د ټولوکرږو ګډ تکی دی (څیره شته دی)

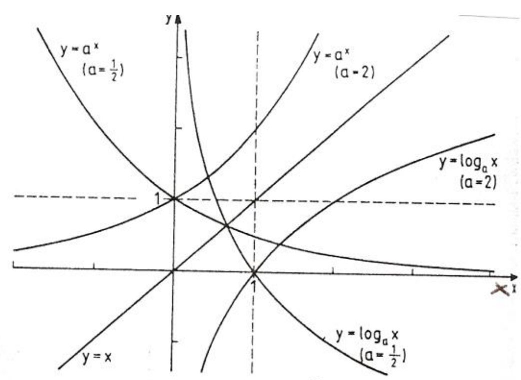


Bild 15.19 شکل

د $a>1$ لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x\to 0$ لپاره اسیومپتوتیك د کمیز - y محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$ لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د $x>0$ لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز - y محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر یی یعني $y = \log_a x$

د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي.

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10} x = \lg x \,,\ y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریګونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

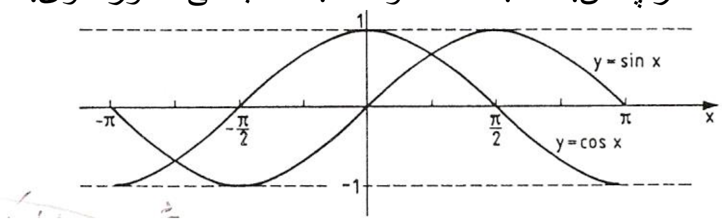
$$y=\sin x ;D=R,W=[1,1] \ldots\ldots (15,11_a)$$

$$y=\cos x; D=R, W=[-1,1] \ldots\ldots (15,11_b)$$

$$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z \ldots (15,11_c)$$

$$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z \ldots\ldots (15,11_d)$$

د دې کږوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریګونومتریکی فنکشنونه $y = \sin x, y = \tan x , y = \cot x$ ناجوړه فنکشنونه، او $y = \cos x$ یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریګونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه $y=\sin x , y= \cos x$ پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$$\sin (x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi) = \cos x , k \in Z$$

لاندې فنکشنونه پریود π

(c) ketabton.com: The Digital Library

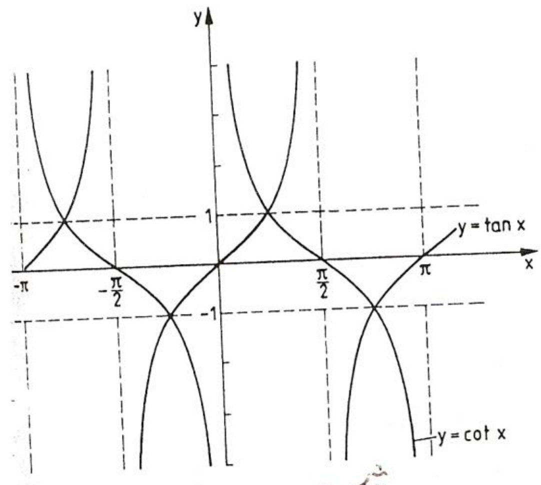


Bild 15.20b

لري $y=\tan x$, $y=\cot x$.دا په دې مانا چي

$$\tan(x+k\pi)=\tan x,\quad \cot(x+k\pi)=\cot x,\ k\in Z$$

د تریگونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k=k\pi, k\in Z$

د $y=\tan x$, $k\in Z$, $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $y=\sin x$ لپاره او د $y=\cos$

x , $y=\cot x$ لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري

یعني $y=\tan x$ په $k\in Z$, $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ او $y=\cot x$ په $k\in Z$, $x_k=k\pi$ کی.

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلگي په توگه

فنکشن $y=\sin x$ په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جگیدونکی دی او په

ایتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $y=\sin x$ لپاره جگیدونکی یا پورته کیدونکی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه
د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کيدونکی دی٠
د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی
د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دی
د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګيدونکی دی ،

په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساين فنکشنونه د بيلګي په توګه د وخت په پريوديکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوينګونګ: رپيدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واريابل په t نخښنه کيږي.فنکشن

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پيژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی يا ځنځيري فنکشن دی. موږ ترڅيرني لاندې نيسو چي د سا ين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل t او زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږښځيره باندې څه تاسير اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثير په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول يا راکشول دی که (|a| > 1)او يا پرسول دي که
|a| < 1(وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت
y = sin t دی، چيرته چی برسيره پردې د a < 0 لپاره په t - محور يوه اينه څيرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2)
په فنکشن کی a امپليتودې Amplitude(جګوالی(نوميږي او د شوينګنګ Schwingung رپيدنی پراخوالی يا بنه : سور باندې تاثير اچوي.
څيره شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

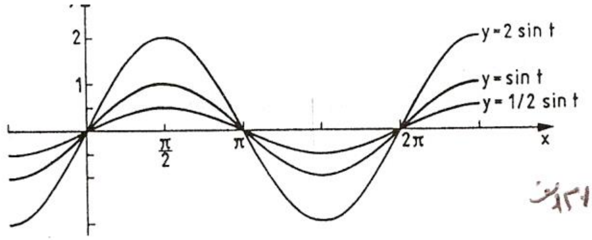


Bild 15.21a

شکل ۱۵.۲۱ الف

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کې فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې يو وختني غزول که $|\omega|<1$ يا پرسول که $|\omega|>1$ وي تاثير اچوي.چيرته چې د $\omega < 0$ لپاره برسيره پردې يو په y- محور اينونه هم ده.

د يوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ يوه فنکشن ارزښت، د$y = \sin t$ خپلواك ω-ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (ځيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).

ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودې تاثير اچوي

او $y = \omega t$ پريودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

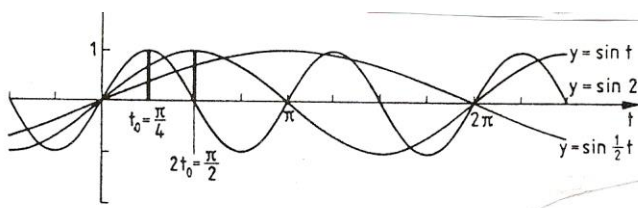


Bild 15.21b

۳ – زياتيدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کې د $y = \sin t$ باندې ديوې راکښنې تاثير په $|\varphi|$ له کينې لور $\varphi>0$ او يا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .

د يوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره يو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$ لپاره٠

د φ په کچه راکښل شوی (يعنی د يوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، يعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(ځيره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi=-\frac{\pi}{2})$

په فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a.\sin\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

کی φ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کږه $y = a.\sin\omega t$

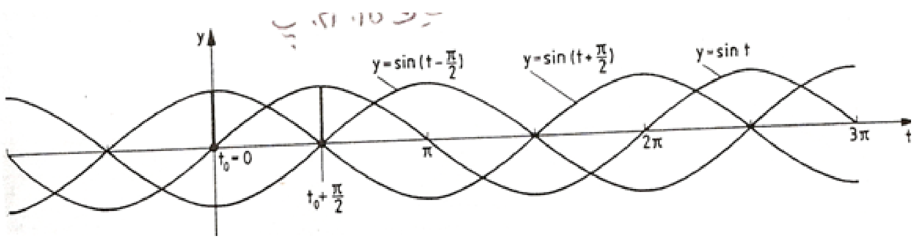
د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.

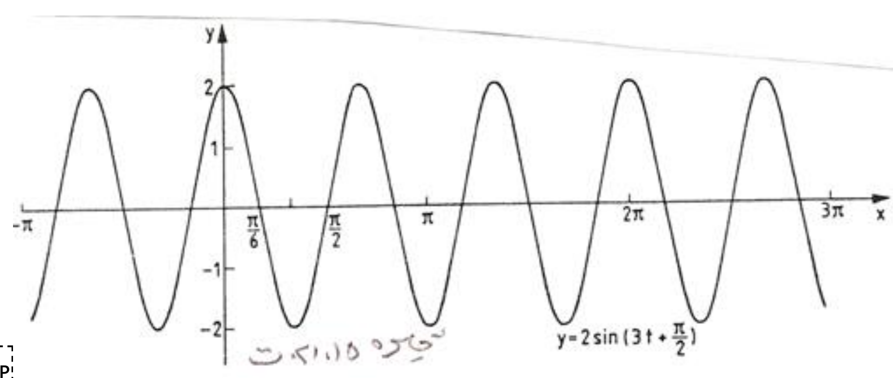
په شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارمونيفنکشن $y = 2.\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ انځوردی.

هغه امپلیتود $a = 2$ لري، پریودې یی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کي

د $\sin t$ و کینۍ لورته راکښل شوی دی.

خېره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$





د تریګونومتري فنکشنونو(یواځني) په معکوسوالي یا په ځتوالي کی موږ په ځانګړو یو غږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند. ۱۵ ۰ ۱۴ : د لاندې فنکشنونو

1. $y = \sin x,$	$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$	$W = [-1, 1]$	(15.12a)
2. $y = \cos x,$	$D = [0, \pi],$	$W = [-1, 1]$	(15.12b)
3. $y = \tan x,$	$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$	$W = \mathbf{R}$	(15.12c)
4. $y = \cot x,$	$D = (0, \pi),$	$W = \mathbf{R}$	(15.12d)

پرځبې یا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \mathrm{Arc}\sin x,$	$D = [-1, 1],$	$W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	(15.13a)
2. $y = \mathrm{Arc}\cos x,$	$D = [-1, 1],$	$W = [0, \pi]$	(15.13b)
3. $y = \mathrm{Arc}\tan x,$	$D = \mathbf{R},$	$W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	(15.13c)
4. $y = \mathrm{Arc}\cot x,$	$D = \mathbf{R},$	$W = (0, \pi)$	(15.13d)

د تریګونومتري فنکشنونو برخې په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

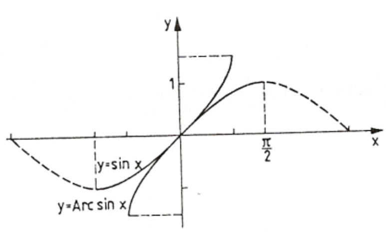


Bild 15.22

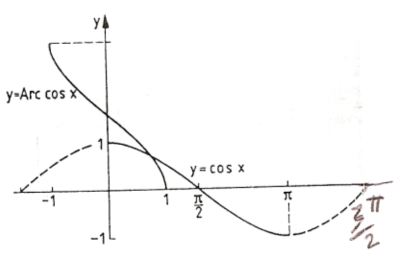


Bild 15.23

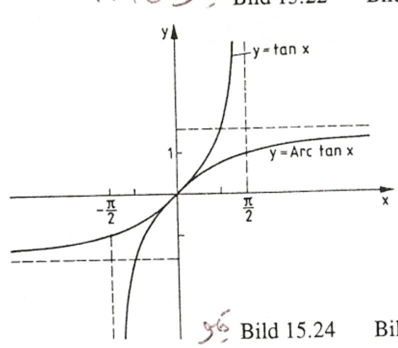


Bild 15.24

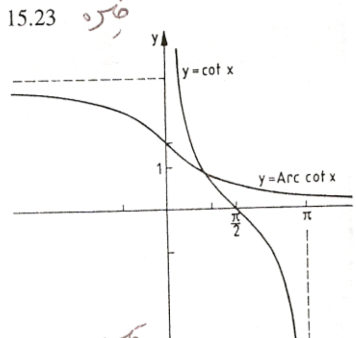


Bild 15.25

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵. ۴ ځنځيري (تړلي) فنکشنونه

پيژند ۱۵ . ۱۵ :

د x ∈ Dلپاره يو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتډيري W سره ورکړ شوی او برسيره
پر دې د z ∈ Wلپاره يو فنکشن $y= f(z)$ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x تړلی (ځنځيري) فنکشن بلل کيږي٠

یادونه : يو تړلی فنکشن کيدی شي چې زياتو ځنځيرونو سره هم رامنځ ته شي: د بيلګي
په توګه $z = f(x)$
د$x \in D, z \in W$لپاره او $w=h(z)$ د$z \in W, w \in W^*$لپاره
او$y=f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،
نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x يو تړلی فنکشن دی

بيلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي.
ب : په تړلي فنکشن $y = \sin x^2$ کې $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی. په تړلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کې $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی
پ : د
$z = 2x + 4, \quad w = \sqrt{z} \quad , y = \cos w$,
سره تړلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي
ت : په تړلي فنکشن $y=\mathrm{Arctan}\,1/(x-1)$ کی$z=x-1$ دننني، $w=1/z$منځنی او $y=\mathrm{Arctan}\, w$دباندنی فنکشن دی.

یادونه : د يوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځيري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شميرنی له » دننه « پيل کيږي.

بيلګي ۱۵ . ۱۶ ته:
ب) د $x = 0.5$ لپاره دی
$z=x^2=0,5^2=0,25; y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$
او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$z=\sin x=\sin 0{,}5=0{,}47942; y=\sin^2 x=z^2=0{,}47942^2=0{,}22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1 ; w=1/z=1/1=1$

$y=\mathrm{Arctan}\,w=\mathrm{Arctan}\,1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که $f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو تړلی یا ناتړلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید مثبت وي او $\mathrm{Arc}\sin f(x)$ همداډول $\mathrm{Arc}\cos f(x)$ ټیك د $x \in [-1,1]$ لپاره پیژند لري یا تعریف دي

بیلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحلیلي ویناو لپاره دې تعریفډیري پیداکړی شي.

الف) $y = \sqrt{x^2 - 3}$

رادیکاند باید کمیز یا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq 3 \; (x \geq \sqrt{3} \;\; v \;\; x \leq -\sqrt{3})$

نو لرو $D =(-oe , - 3]\cup[3 ,oe]$

ب) $y=\lg(x+2)+1/(3+2x-x^2)$ له لمړي زیاتونی کی باید $\text{Numerus} > 0$ نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 \Leftrightarrow x >-2$ ،

پس $D1=(-2,oe)$

په دوم زیاتوني کی باید مات لاندې په صفر برابر نه وي $(\neq 0)$ وي . د مات لاندې صفرځایونه

له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن تعریفډیری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفډیري وي یعنی د
D1 او D2
غوڅډیری: $D = D_1 \cap D_2 = (2, \infty) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = \text{Arc sin}\,(x-1)/5$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفډیري په پام کی نیولو سره باید باور ولري-
$-1 \le (x-1)/5 \le 1 \Leftrightarrow -5 \le x-1 \le 5 \Leftrightarrow -4 \le x \le 6 \Rightarrow D = [-4,6]$

ت) $y = 1/\sqrt{(x^2-4)}$
رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی
$x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow x>2$ یا $x<-2$
نو دی $D=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیځیت توابعو ایکسپلیځیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ – لاندې فنکشنونه په پارامترانځوروني ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y=2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۳ – لاندی فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتونی اینتروالونه په تعریفډیریو بیل (تجزیه) کړیء یا لوَ تهَ کړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، تاجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y\ 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y\ x^2 / 2$ h) $y = x^5$ i) $y\ |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په ځپ فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, D = [0 , œ), W = [o,œ)

c) $y = (x+1)^2$, D =[-1,œ),W=[0,œ), d) $y = x^3 / 2$, D =[o,œ),W=[0,œ)

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0{,}4x - 1{,}6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x + 1{,}5)$

d) $y = 2$ e) $3x - 3y - 7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پیدا شي، او صفرځایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1,1) او/ (3,7) c) (-1,0) او/ (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 - 10x + 12$ f) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګټل شي او پارابول دې انځور شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ – د لاندې ټولريشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشيما د استعمال له لارې وګنل شي. فنکشنونه د د خلفورم باند بانخور شي

a) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1 , x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; x_1 = 1/5 \quad x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x \quad ; x_1 = -2 \quad x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 \; 32x + 40 ; x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6 ; x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2$

۱۱ – مات ريشنل فنکشنونه ورکړ شي :

a) $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ b) $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

c) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$ d) $y = \dfrac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$

e) $y = \dfrac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$.

صفرځايونه دې وګنل شي، پول. تشځايونه او د 8 ± <- x لپاره ځان نيونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R , W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R , W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) y = ln(x-1) , D =(1,œ), W = R

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوټوني اينتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشنونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ – تړلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$$y = f(w) \;, w = h(z) \;, z = g(x)$$

بیل (تجزيه) کړی(د تعريف–او ارزښتدیریووړکولو څخه کيدی شي تيرشو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = (e^{x+1})^2$ c) $y = \lg\sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan\sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan\sqrt{x} - 3$ i) $y = \mathrm{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\mathrm{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y = \sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y = \mathrm{Arc}\cot e^{2x+1}$.

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندي او دتنه فنکشنونو

$$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$$

بیل کړی(د تعریف– او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\mathrm{Arc}\cot(e^x+1)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\mathrm{Arc}\cot(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln(x^2-1)+1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x+1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندي شننیزویا سپرنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3-x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2-9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2+x-6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \mathrm{Arc}\cos(2x-4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريګوډيکچ يا تريګونومتري Trigonometrie

تعريفونه

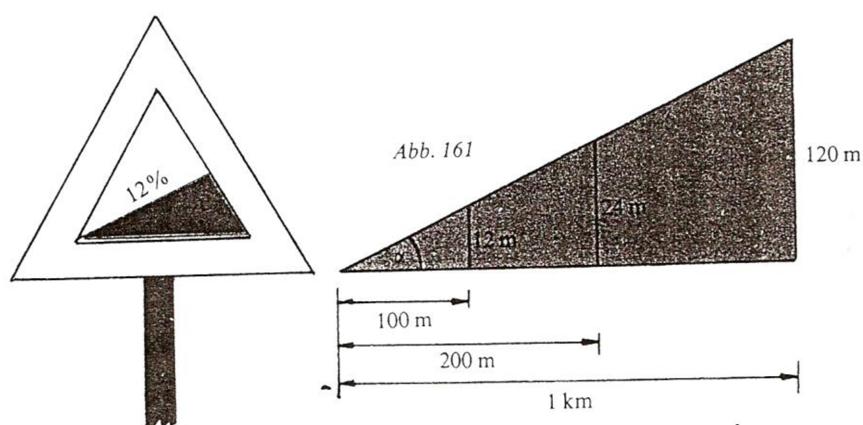
د دريګوډيکچ يا تريګونومتري دنده ده چې په هواره يا په هوا کې دريګوډي کچ کړي ، د ځانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تريګونومتريبلواکو. برسيره پر دې د دې په مرسته پريوديکې يعنې په منظمه فاصله پرلپسې تکراريدونکې پيښې(موږ يې تل راګرځيدوني بللې شو) څيړل کيږي.
تريګونمتري تر هيپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقيبيدی شي، وروسته له مصري پتوليمويس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بيا له هندې او عربو شميرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پيل دا د کاروني يا عملي کيدو د ستونځو سره مخامخ وه. دريګوډيکچ خپل کارونه په استرنومي او فزيك، د ځمککچ يا اندازه کولو، د ځمك اندازونې، نقشو علم، او ابادۍ او نوتيك Nautik (د کيشتيو د لارو نقشه ويستلو پوهنه) کې مومي.
د تريګونومتري مانا يا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ريښتينوالی يا واقعيت کې نغښتی، چې د دې په مرسته د پايکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چې دا تړاو شميرپوهينيز مفهوم لري).

پيلبيلګه: د په مانايا مهم جګوالي يا لويدکرښو نخښه لوحی يا په بله عبارت د زوړي او پيچومی ليکتختی(دې ته دې پام وي چې ما دا کليمی هر چيرې د زوړي او پيچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځانییونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځانیونه ثابت یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

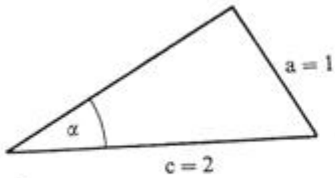


خیره۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن لپاره ما بلواک لیکلی یعنې همغه د درې له تابع څخه مې را اخستي، چې نورو ژبو کې یې بلواک څیره ده، چې دې امله یې څیره نمونه سمه ده اوکارونه یې څیرونه ده.

سا ینبلواک sinusfunktion :بلیګه:

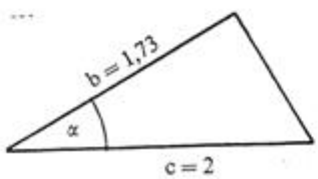


$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

څیره ۱۹۶

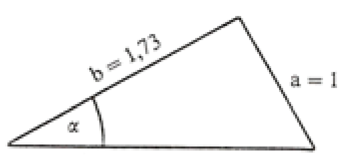
کوسا یبلوک Cosinusfunktion :بیلګه:



$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

تنجنتبلواک Tangensfunktion :بیلګه:



$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$

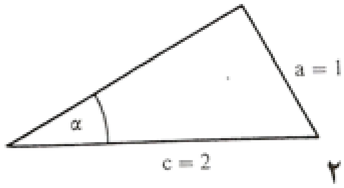
څیره ۱۹۸

$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

د کونجونو د پینونوموونې (دا ټول شته، خو بیاهم اړیین دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلگه:



$$Cosec\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هيپوتينوزي}}{\text{مخامخ کاتيت}}$$

خیره ۲۰۱

$$\cos ec\alpha = \frac{2}{1} = 2$$

موږ به زیات وخت لمړنی دري یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

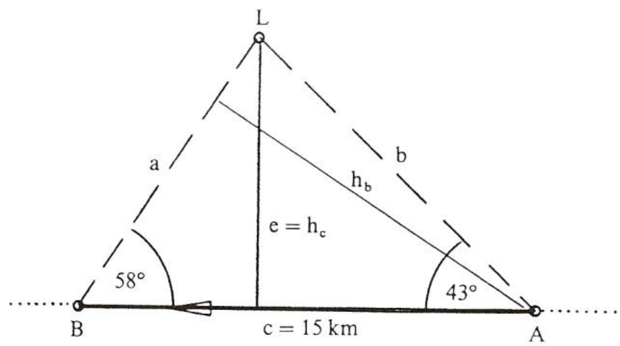
په ښوبنه دریګوډیو کی شمیرنه

سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه
یوه کیښتی د رڼاډزکري(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $\alpha = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکرښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کی کیښتی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لري دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبی‌ول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ km$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43^\circ = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58^\circ} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کې مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کی د اړخونو ځاننیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننیونه یا تناسب دی.

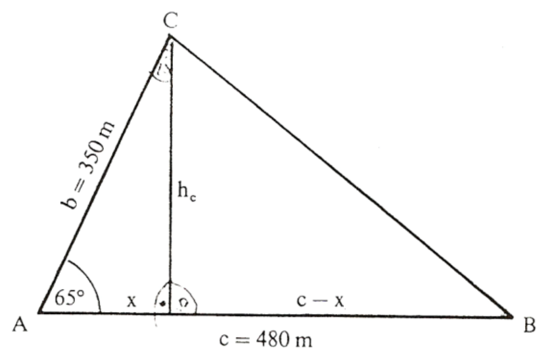
$\sin \alpha / \sin \beta = a / b$ $\sin \beta / \sin \gamma = b / c$

$\sin \gamma / \sin \alpha = c / a$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کي هم باورلري(تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چې دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيلبيلګه : په يوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350\ m$ او $c = 480\ m$ دي او يو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.
د B څخه و C ته به د نښلولو ستن يا تير څومره لوي وي ؟



شيره ۲۰۳

اوبی يا حل :
جګوالی يا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ويشي.
دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،
ځکه چې $\cos\alpha = x / b$ دی . د پيتاګوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

په هر یوه دریګوډي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوډي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوډیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوډي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin\alpha$$

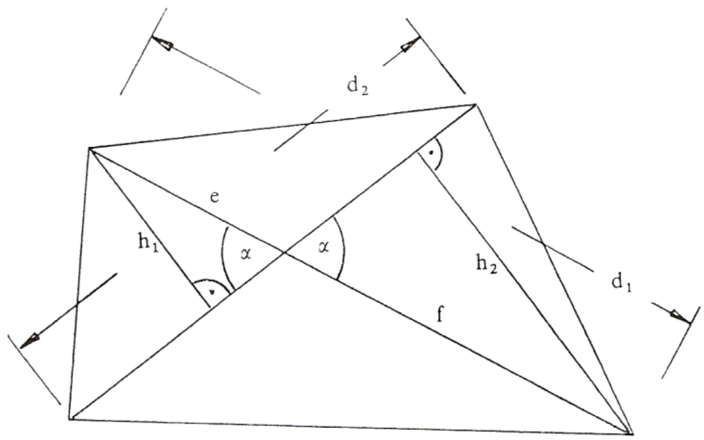
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي .

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2(e+f)\sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1\, \sin\alpha$$



ځیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواك، نه یوائی د دننه لورته تیرو درېګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

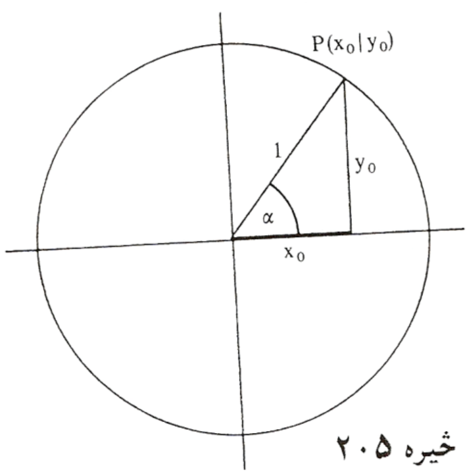
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردی ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردی ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردی منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردی څنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا څنتر پروت دی، (ځیره ۲۰۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي څخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي څلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردی ،د کونجټکی $P(x_0|y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0, \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په څیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مروند په څیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



ځیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

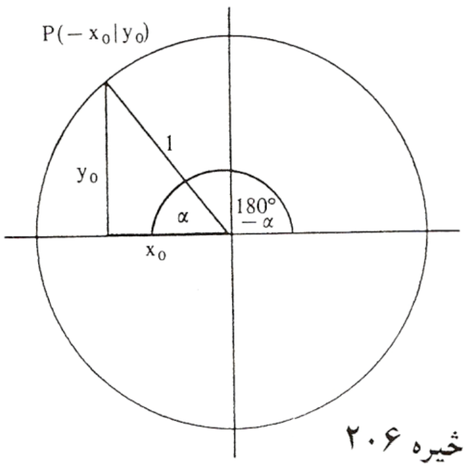
(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاځیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو کونج α جوړ کړي، یعني څنتریکونج یی $180° - \alpha$ وي.
د « سیوروڅیرو» څخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښايي.



څیره ۲۰۶

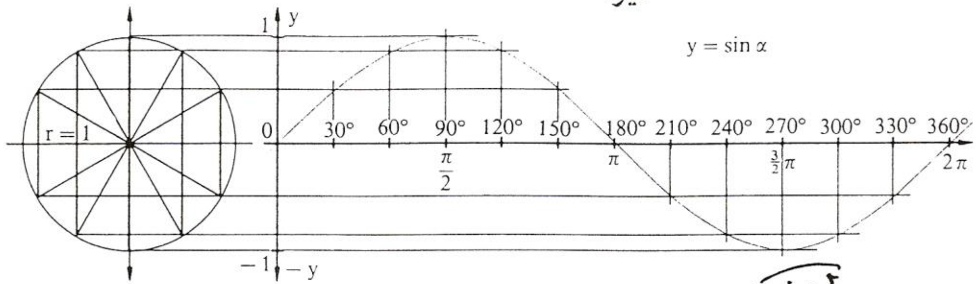
په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج $\alpha+360°$ لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د $\alpha+720$ لپاره اوهمداسی نور. په دي توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ | ۵ |) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دي امله لاندي د بلواکګرافونه لاس ته راځی

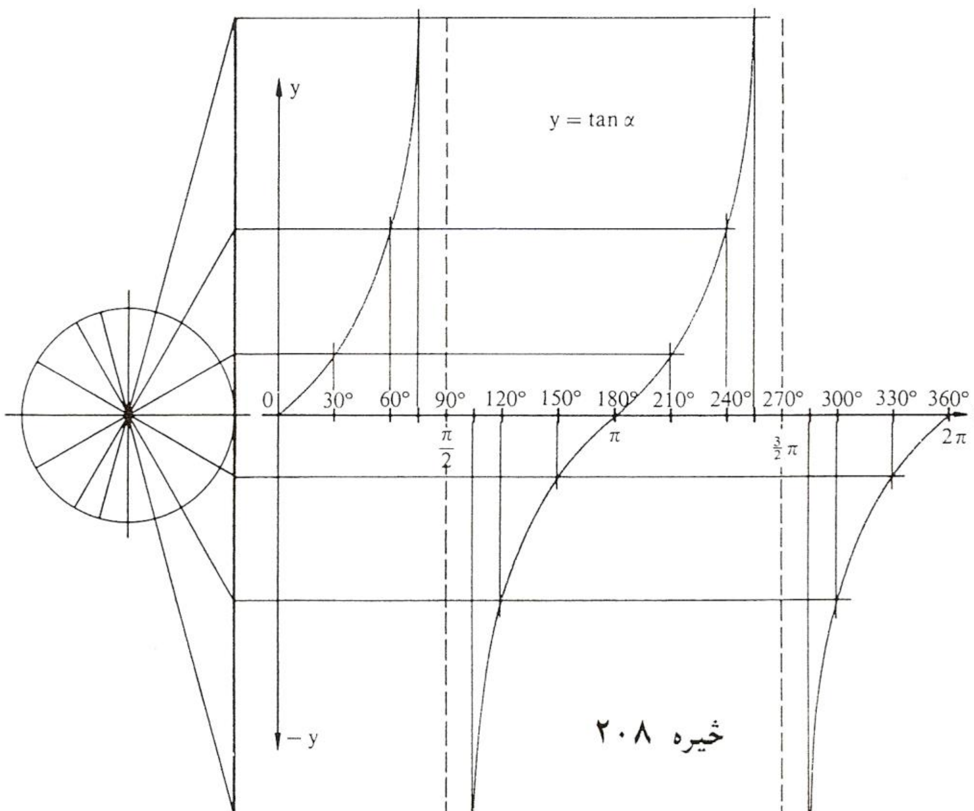
(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

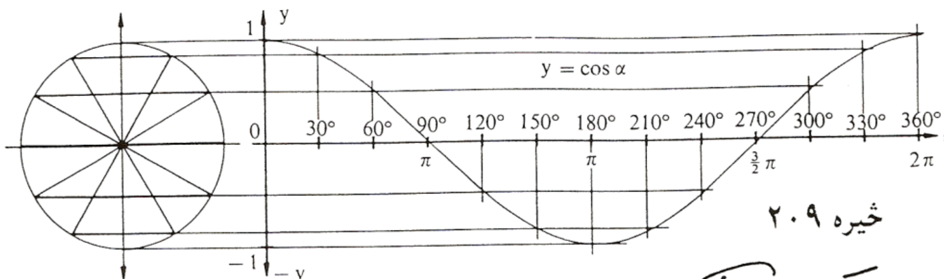
د ساین کږه



Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library

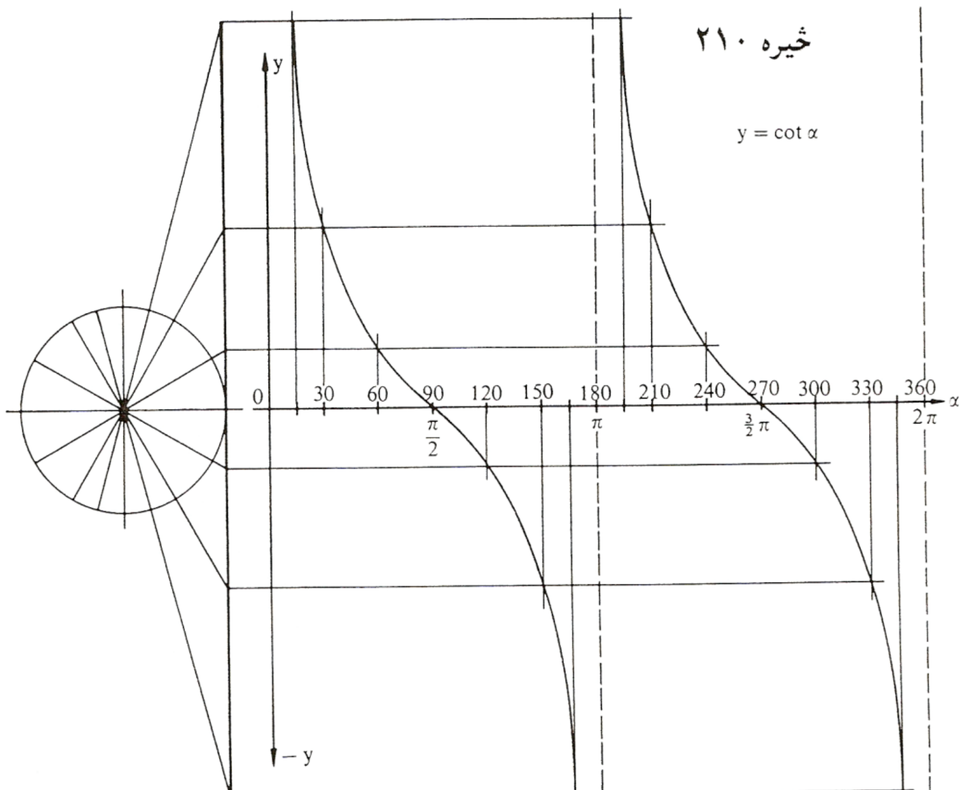


ثیره ۲۰۹

Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1;\ 1]$

دکوساین کږه

ثیره ۲۱۰



Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

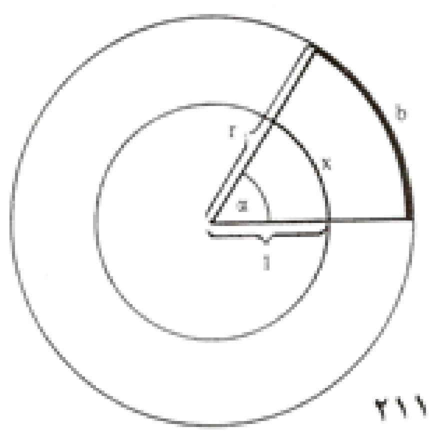
دکوتنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زړه درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چې ۳۶۰ درجې پوره ګردۍ جوړوي. هغه، چې لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چې ګردۍ په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کې ګډ دي، چې په ګڼونو اندازه کیږي، بې له کچ یوون ارزښتڅیري ریبلګڼونه دي، په داسې حال کې چې وتل ګڼونه (= د تعریف ډیري ګڼونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کې مورږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندي کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.

کونج لوېي په واقعیت کې یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کې کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهڅوي. دا کونجکچونه چې د کونج لپاره په تریګونومتریکې بلواکو کې اېښودل کیږي (د بیلګې په توګه sin)



څیره ۲۱۱

ارګومنټ (Argument تعریفڅیري) بلل کیږي. په تعریفڅیري کې کیدی شي چې نوې درجه ، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چې په جیښمیري کې همغه موډوس په کار اچول شوي دي(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه ګرديبرخوکی وښوول شو (ګرديبرخی د مخه څيړل شوي دي) چی هر کونج پورې يوه ګردبرخه يا ګردی لينده اړه لري، نو ټولی ګردی پورې ۳۶۰ درجی کونج يا $2\pi r$ اړه لري، يوه کونج ∝ پورې بيا يوه لينده b اړه لري، کومه چی په چاپېری کی ځانګړی همداسی نيسي لکه په پيل کی ∝ و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګرديګڼ دی : ....$\pi = 3{,}14$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پيلبيلګه:

کونج $\propto = 60°$ له ګردی د ۱۰ سانتيمتره وړانګي سره يوه په لاندې ډول ګردی لينده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10{,}47$ cm غوځوي يا بيلوي. د ګردی چاپيری دی : $U = 20\pi = 62{,}83$ cm

همغه کونج ∝ د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګرديلينده

$$b = 10\pi . 60° : 360° = 5{,}236 \text{ cm}$$

غوځوي. دا ګردی لاندې چاپيری لري: $U = 10 = 31{,}416$ cm .

له ګردی د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څېر يا برعکس کونج ګرديلينده

$$b = 2\pi . 60°: 360° = 1{,}047 \text{ cm}$$

غوځوي» د دې ګردي چاپيری فقط $U = 2\pi = 6{,}283$ دی .

له بيلګي څرګنديږي، چی لينده اندازه په همغه اندازه زياتيږي لکه وړانګه. له دې امله کيدی شي خپله شميرنه په يوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده يا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعريف: په يوونګردي د ګرديلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتريکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې خيره شوي، لينده کچ بلل کيږي. لاندې شميراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180°).\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\,180° = \frac{x}{\pi}\cdot 180°$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړيدی شي، نو له دې امله د لينده کچ لپاره په خوښه رييلګڼونه پرېښوول شوي.

بيلګی :

$$\alpha = 1° \Leftrightarrow x = \frac{1°}{180°}\pi = 0,0175\ (rad) \qquad \alpha = 180° \Leftrightarrow x = \frac{180°}{180°}\pi = \pi = 3,1416$$

$$\alpha = 30° \Leftrightarrow x = \frac{30°}{180°}\pi = \frac{\pi}{6} = 0,5236 \qquad \alpha = 360° \Leftrightarrow x = \frac{360°}{180°}\pi = 2\pi = 6,2832$$

$$\alpha = 45° \Leftrightarrow x = \frac{45°}{180°}\pi = \frac{\pi}{4} = 0,7854 \qquad \alpha = 720° \Leftrightarrow x = \frac{720°}{360°}\pi = 4\pi = 12,5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60° \Leftrightarrow x = \frac{60°}{180°}\pi = \frac{\pi}{3} = 1,0472$$

$$\alpha = 90° \Leftrightarrow x = \frac{90°}{180°}\pi = \frac{\pi}{2} = 1,5708 \qquad \alpha = -75° \Leftrightarrow x = \frac{-75°}{180°}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1,309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زيات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کيږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځاننيونو راپيداشوې کونجونه څنګه معلوميږي يا څنګه راځرګنديږی يا بهتره څنګه ځانونه نيسی. ددې لپاره چی دا پوښتنه ځواب شي، بايد امکانات ولټول شي، چی د کونجبلواك ارزښتونو څخه څنګه بيرته کونج يا په همدې توګه د هغه تعريفيږي ته، په لينده کچ راتلی شو. دا کونجبلواك پريوديکی يا تل بيرته راګرځيدونکي بلواك دی، دا په دې مانا ، چې د بلواك ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره يا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

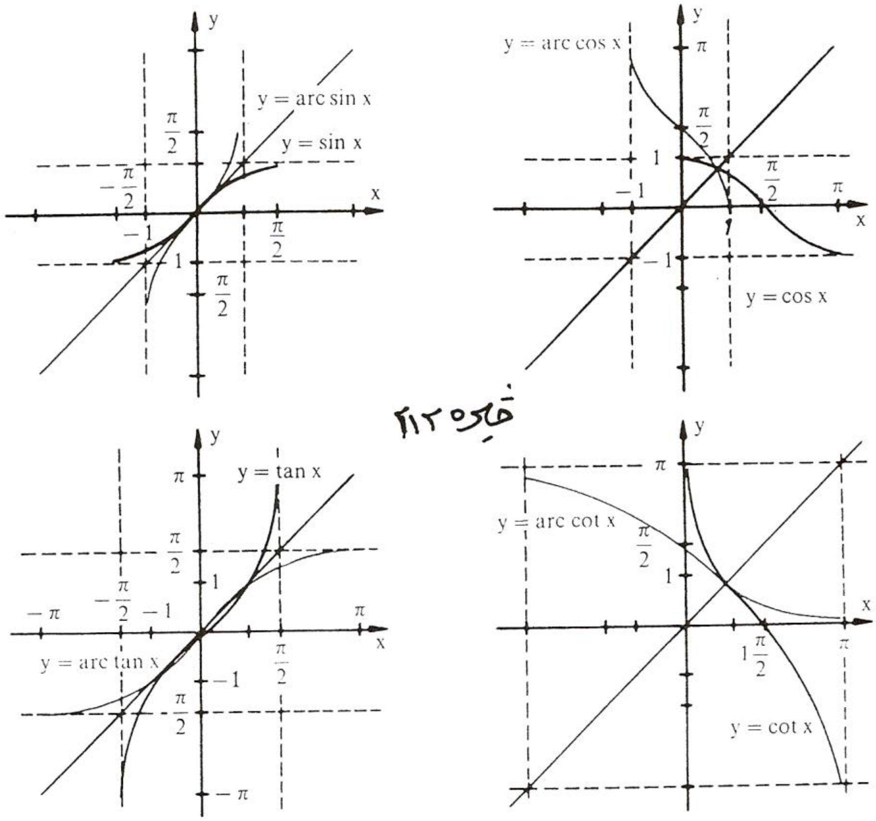
مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکراريږي. د دې لپاره چې په څرګندنه ممکن شي، نو باید د خپل تعریف ډیری په یوه برخه ډیري رابند یا محدود شي.

> **تعریف** : د یوه (رابند یا محدود) تریګونومتریکي بلواك په څټ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کیږي یا څیکلومتریکي بلواك (لاتین ارکوس: Arcus = Bogen = لینده)

دلته $\arcsin(x)$ لوستل کیږي «د x ارکوس ساین. د کونجبلواك تعریفډیری دلته اړونده ارکوسبلواك ارزښتډیری دی او په څټ ارګومنت یا تعریفډیری دلته تل یو ریيلګڼ دی.

Trigonometrische Funktion تریګونومتریکي بلواك	Arcusfunktion ارکوسبلواك
$f\colon x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$f^{-1}\colon x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
$f\colon x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$f^{-1}\colon x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \le y \le \pi\}$
$f\colon x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}\colon x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
$f\colon x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$	$f^{-1}\colon x \to \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شکل ۲۱۲

Beispiele: بېلګې:

1. $\arcsin(0{,}8) = 0{,}9273\,(\text{rad}) = 53{,}13°$
2. $\arccos(1) = 0\,(\text{rad}) = 0°$
3. $\arctan(-100) = -1{,}5608\,(\text{rad}) = -89{,}43°$
4. $\text{arccot}(-70) = -0{,}0143\,(\text{rad}) = -0{,}82°$

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك يو د بل په څېر بلواك دي نو باور لري·

$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$

$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$

$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$

$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$

یعنې په لاندې توګه هم

$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$

$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$

$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$

$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشميري كاروني يا استعمال لپاره

داچي پخوا معمول جدولونه د بلواك تعريفېدېري او ارزښتېدېري شميرلو لپاره له كاره غورځول شوي دي او دنده يې ايلكترونيكي ماشينونو نيولې ده، غواړو چي د جبشميري استعمال په هكله هم څه ووايو

كوركمپيوتر زيات وخت داسې فنكشنونه يا بلواكي لري يا وظيفې په كلك اختيار كې لري، چې د درجي اوړون په لينده كچ او په ځپ كوي، مګر شميردرځ په توګه بايد د شميرونكې په پروګرام كې ځاى په ځاي شوى وي.

پوره اسانتياوې او زياته كارونه د جبشميرې په غاړه پرته ده، دلته دې توكمې د < .... > سره په نخښه شي:

په قاعده كې دريې بلواك وركړشوي دي : < cot > ; < cos > ; < sin > كوتنجنت بيا داسې شميرلكيدې شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توكمي سره سړى اركوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > اركوس ساين دې. په عمومې توګه كونج – بې پروا كه په لينده كچ او يا درجه كچ وركړ شوي وي – بايد د فنكشن له مخه وركړ.

بيلګې

١ لاندې جدول همغه د كاروني يا اتعمال لپاره د جبشميري چمتووالې ښاى :

Winkelmaß كونجكچ	TR-Modus په نخښنونه	Beispiel بېلګه.
Altgrad زړه درجه Neugrad نوې درجه Bogenmaß لينده‌كچ	DEG GRAD RAD	$\sin 45° = 0{,}7071$ $\sin 50^{g} = 0{,}7071$ $\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0,5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1{,}047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه ») د زاړه – یا نوي درجي همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د < <-- DRG > سره سورت نیسي. بیرته یا په څټ سړی داسی راځي- لکه چی لرل مو- د <INV > - تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنې جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجی يی په ګراد دقيقی، ثانيي اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمی <DMS-Dd> سره صورت نيسی:

26.75° 30°15′	⟨inv⟩⟨DMS – Dd⟩ ⟨DMS – Dd⟩	26°45′ 30.25°

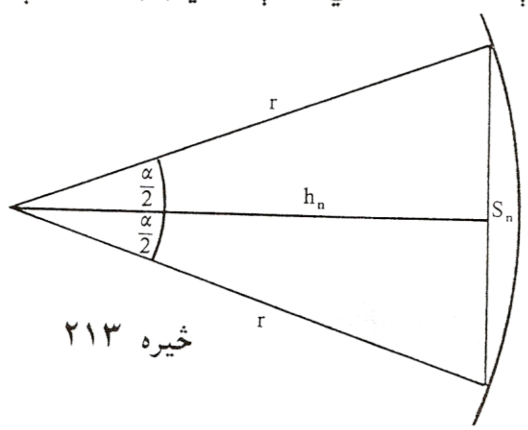
د " "15 °30 " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميری د لاس کتاب ځخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چی داسی شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کي نه لرو ، خو په هر صورت يي ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پيلبيلګه: دلته دې S_n د يوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چی په يوه ګردی کی چی وړانګه يی $r = 5$ cm ده، راګير دی.

الف) وښايي چی

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د يوه داسی n– ګوډي چاپيری U_n وشميری ، چی $n = 8;16;32;128$ وي، او په نزدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيری د دې وړانګې r سره وښايی .



خيره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نزدې توګه یا تقریبي د ګردی ــــ هواره A وښایي .

اوبې (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي. د هغو د څینتریکونج ∝ لپاره باور لري $\propto = 360° / n$. د جګی یا جګوالی h_c د کنبلو سره په هر مساوي پښيز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r \cdot \sin\frac{\propto}{2} = 2r \cdot \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin(180°/n) = 10n.\sin(180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړیپرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

```
180° ⟨STO⟩ ⟨:⟩    8⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩    8⟨·⟩10⟨=⟩30.614675
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩   16⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩   16⟨·⟩10⟨=⟩31.214452
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩   32⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩   32⟨·⟩10⟨=⟩31.365485
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩   64⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩   64⟨·⟩10⟨=⟩31.403312
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  128⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩  128⟨·⟩10⟨=⟩31.412773
```

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی د هر دریګوډي هواره ده: $0,5.S_n.h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r \cdot \sin(180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cos\left(\frac{180°}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$$

له دې سره د نرې [illegible]

360° ⟨STO⟩ ⟨ : ⟩ 8 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 8 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 70.710678
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 16 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 16 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 76.536686
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 32 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 32 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.036129
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 64 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 64 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.413712
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 128 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 128 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.508279

د یوه جشمیرې سره ، چې له یوې زخیرې زیاتی ولري ، لکه چې پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتي هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروګرامور ماشین سره کیدي شي چې د دا ډول شمیرنو لپاره د ګوډونو ګڼ ځخه ت شو یا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تریګونومتریکي بلواکو خویونه

دا چې کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چې یوه کونج بلواك تعریفېدیری یا α او یا x وي. ددې لپاره چې د یوه بلواك خوي باندې ټینګار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.
د لاندې خویونو لمړۍ ډله یوائي له تعریفمساوات (د مخه راغلی) او د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \ ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندې کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

gegeben (ورکړي) / gesucht (غوښتونې)	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
cos x	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	cos x	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
tan x	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	$\dfrac{1}{\cot x}$
cot x	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	cot x

لکه چی د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چی تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقايسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

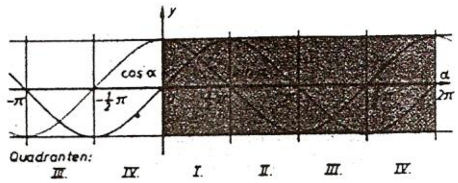
تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چی د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراريږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجی) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجی (180°)) لري.

$$\left.\begin{aligned}\sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x\\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x\end{aligned}\right\}\ k \in N$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x\\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x\end{aligned}\right\}\ k \in N$$

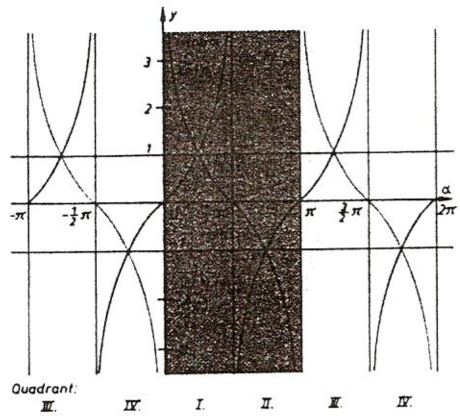
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن
پرېود یا تن راګرځیدنه



د تنجنت او کوتنجنت فنکشن پرېود
ښکلي :

$\sin 50°$	$= \sin(50° + 360°)$	$= \sin(50° - 720°)$	$= 0{,}76604$	
$\cos -30°$	$= \cos(-30° - 360°)$	$= \cos(-30° + 1080°)$	$= 0{,}86603$	
$\tan 2{,}5$	$= \tan(2{,}5 - \pi)$	$= \tan(2{,}5 + 5\pi)$	$= -0{,}74702$	
$\cot 10$	$= \cot(10 + \pi)$	$= \cot(10 - \pi)$	$= 1{,}54235$	
$\sin 35°$	$= \sin(180° - 35°)$	$= -\sin(180° + 35°)$	$= -\sin(360° - 35°)$	$= 0{,}573576$
$\cos 35°$	$= -\cos 145°$	$= -\cos 215°$	$= \cos 325°$	$= 0{,}81952$
$\tan 0{,}6109$	$= -\tan 2{,}5307$	$= \tan 3{,}7525$	$= -\tan 5{,}6723$	$= 0{,}700208$
$\cot 0{,}6109$	$= -\cot 2{,}5307$	$= \cot 3{,}7525$	$= -\cot 5{,}6723$	$= 1{,}428042$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو نو په دې برسیره په ټینګه روښانیږي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګې:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

د دغه جدول د هراړخیز په مانا دی او ډیری تشریح ته اړتیا نلری.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

$\sin x = \cos(\ /2 - x)$ $\cos x = \sin(\ /2 - x)$
$\tan x = \cot(\ /2 - x)$ $\cot x = \tan(\ /2 - x)$

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

$\sin\ = a / c$ او $\cos \beta = a / c$

د $\beta = 90° -$ له امله لاس ته راځي :

$\sin\ = \cos(90° - \ )$

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس
ته راتلی شي.

دا له خیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، څکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د $x = \ /2$ کرښی ته یو بل سره محورسیومتري څغلي :

له خیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

$\cos(x) = \cos(-x)$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$\sin(x) = -\sin(-x),\ \tan(x) = -\tan(-x);\ \cot(x) = -\cot(-x)$

یادونه : په دې نلواکو کي کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلگی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$$

$$\cos 0{,}75 \quad = \cos(-0{,}75 \quad) = -0{,}70711$$

$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$$

$$\cot 1{,}3 \quad = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$$

د زياتون قضيي يا تيورمونه

دا چي كونجبلواك لايني نه دي(د فنكشنگراف كربښه نه ده،بلكه كږه ده) ، نو ډېل تعريفدېږي پوري ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.

لكه

$$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$$

د داسى په نامه زياتونمسئلى په مرسته ممكن كيږي، چى د بلواك ارزښت د كونج په دوه برابرولو يا په همدې ډول د دوه كونجونو پو په بل زياتولو د يوگونو كونجونو لپاره ارزښتونه رابي كړى شو.

بيلگى :

1 . $\sin(x + y) = \sin x .\cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $cis(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

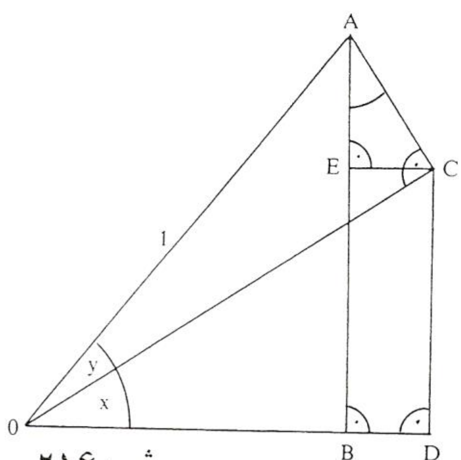
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x-y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



شیره ۲۱۶

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y$; $|OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x+y)$; $|OB| = \cos(x+y)$

$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$

$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

بر سېره پر دې لرو :

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ګای په ځای کولو څخه ثبوتونه په لاس راځي

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1′. 2′.:

3. 4.: $x = y$. ګای په ځای کړه

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x + y}{2};\ t = \frac{x - y}{2}$ کېږده

$\sin x = \sin(z + t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$ پس لرو

$$= \sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} + \cos\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}$$

$\sin y = \sin(z - t) = \sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} - \cos\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}$ همدارنګه

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2}$$

6. ثبوتونه په ورته توګه څخه ځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x + y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

د دولسمې ثبوتي له لارې ثبوتونه لرو

8.: $(*)\ \sin^2\frac{z}{2}$ durch $1 - \cos^2\frac{z}{2}$. په (*) کې ولیکه یا کېږده

9 - 10: د ۱۱ پرتکي له ۱ او ۲ او ټنجنت د تعریف څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواك یا فنکشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لکه چی په پیل کی مو وویل په طبیعت او تخنیك كي ډيرې پیښې شته دی چي تل بیرته راکرځي یا لنډ: راګرځي، یعني پریودیکي دي. د دې د تشریح لپاره په خپل سوچه یا خالصه بڼه تل د ساین بلواك بسیا نه کوي.
دا زیات علتونه لري : لمړی د ساینبلواك د ۱- او ۱ ترمنځ ارزښت نیسي، له بلې لور داواقعي د کونج په واك کی نه دي بلکه د وخت په واك كي دي د یوې راګرځیدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانیولکیدی. له دې امله د ساین بلواك د دې کارونو د روښانوولو لپاره باید موډیفیځیر شي یا یی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثیر په لاندې لیدنه کی راټول شویدي، ګراف یی ورزیاتی ځیرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کي مګر یواځي د ساینبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د کوسایین بلواك چي په $\pi/2$ سره راکښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له ښي لور څخه)

بیلګی	دکارونی ساحه	تاثیر	بلواك
ځیره ۲۱۷	ټولی تلبیرته راګرځیدونی تعامولونه		$y = \sin (x)$
ځیره ۲۱۸	د یوه مساوي او بدل شېپالړنګ یو په بل پرلوتل	د y - لور باندې راکښنه	$y = \sin(x) +d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

y = sin(x+c)	د فاز تغیرپا ځای بدلون	په بدل بریښنا جریان کې د بریښنا او ښیالونک تخنیکي دوبنسالوبه	څیره ۲۱۹
y = a . sin(x)	د امپلیټود د ځای بدلون فاکتور- 1 د 180° فاز ځای بدلون دی	دیوه پندول حوزبدنه	څیره ۳۲۰
y = sin(bx)	د پیریود تغیرپا بدلون b>1 سرعت 0<b<1 په کراره کیدل b <0 په شاتګ کیدنه له محور دی	دیوه بنسټیزې ځړېدونکې خیږنه پدې وخت دا د پړنه او دهغې بوزې لیږزه لې تکلیه د موزیک الو په او ازولو کې	د څیره ۲۲۱
y = a . sin(bx+c)+d	عمومي حالت	کمپلکس پریودیک جریان یا عمل	څیره ۲۲۲

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره ښیره بله کړی

$4°6' = 4,1°$; $10°, 5' = 10°30$

a) $6,75° =$ b = $120,48° =$ c) $-75,65° =$

d) $52°16' =$ e) $97°13' =$ f) $44°44' 44'' =$

۲ – په درجه کچ ي ولیکی

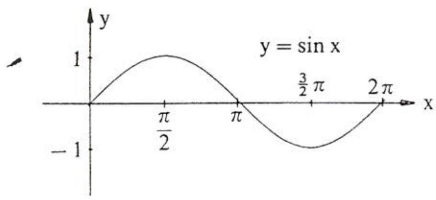
a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x (2/3)\pi$

d) $x = 4$ e) $x = -3$ f) $x = 4,7$

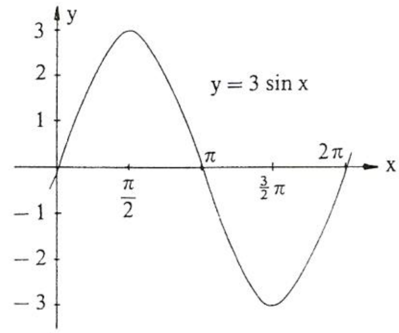
۳ – په لینده کچ یی ولیکي

a) 15° b) -60° c) 540° d) 20°15' e) 15,75°

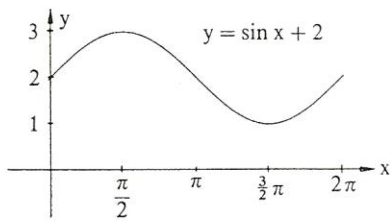
(c) ketabton.com: The Digital Library



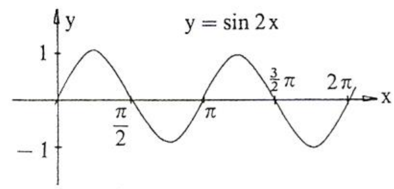
شیره ۲۱۷



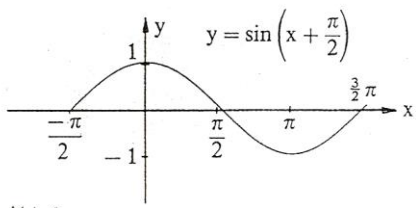
شیره ۲۲۰



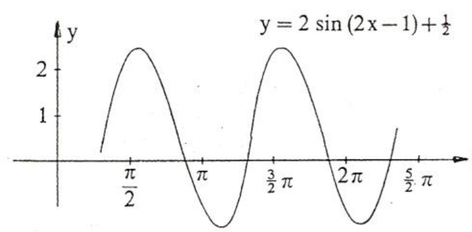
شیره ۲۱۸



شیره ۲۲۱



شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۲

د دې بلواك گراف د ساین کږې $y = \sin x$ څخه لکه چې گورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کیدل

۲ – د نیمی راگرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه

۳ – په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په 1 / 2 پورته لورته %100 راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) sin20° b) sin(-30°) c) sin 172° d) din1°4'

e) cos 35° f) cos 380° g) cos(-27°) h) cos47,9°

i) tan 11° k) tan (-15°) l) tan 33,33° m) tan 13°13'

n) cot 870° o) cot (-11°) p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8 s) cos α = 0,9 t) tan α = 2,5

u) cot α =-1 v) sin φ = 0,3 w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4 y) cot φ = 0,3 z) arcsin(x) = π /2

۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی ټوټې وشمیری

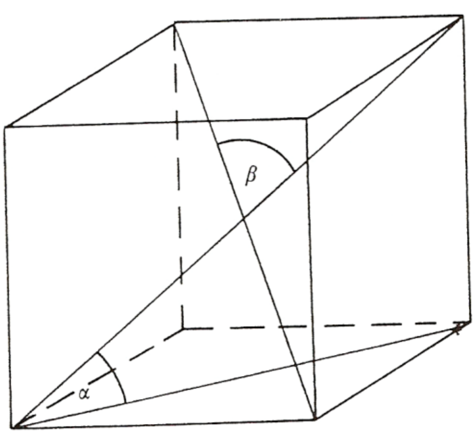
۶ – په مساوي پښیز دریګوډي کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی ټوټې وشمیري



شیره ۲۲۳

۷ – د یوه پڅکونجیز (α > 90°) دریګوډي لپاره ساین وشمیری

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز دریګوډي لپاره وشمیری (α > 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی

$r_1 = 5\text{ cm}\ \ , r_2 = 4\text{ cm}$

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8\text{cm}$ ورکړ شوی دی.

دد دواړو ګردیو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکی

او د کډې غوڅونی اوږدوالی .

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه

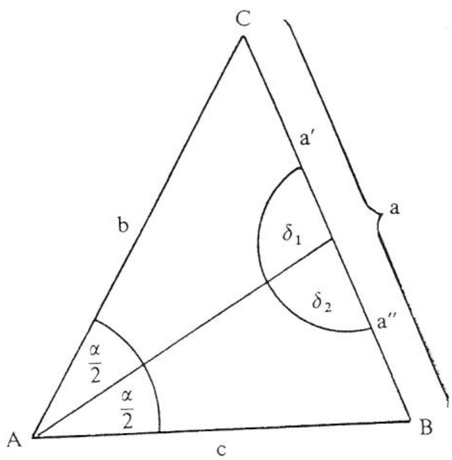
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی

ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملی په مرسته حل

(اوبی) کړی(څیره۲۲۴).



څیره ۲۲۴

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،

چي ۱،۵۰ متره جګ دی،

یوه زینه ورجګه شي

میلانکونج ∡ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوځي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟

پ) د یوه زوړندې پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴ – یو د اوبو بیلر (کتله = ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه دړه پورته خیژول کیږي، چې میلانکونج $\measuredangle = 25°$ لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور(د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹، ۸۱ نیوټن $1\ kg = 9{,}81N$).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی **۵۳** متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج $60°$ دی په پښه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې **۵۳** متره جګې ونی سیوری **۵** ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه **۵** متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی $\measuredangle = 18{,}5°$ او پښیټکی یی $\beta = 8°$ لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري

الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟

ب) د څنګهوارې دریواړه دننی کونجونه څومره لوي دي؟

۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی

الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟

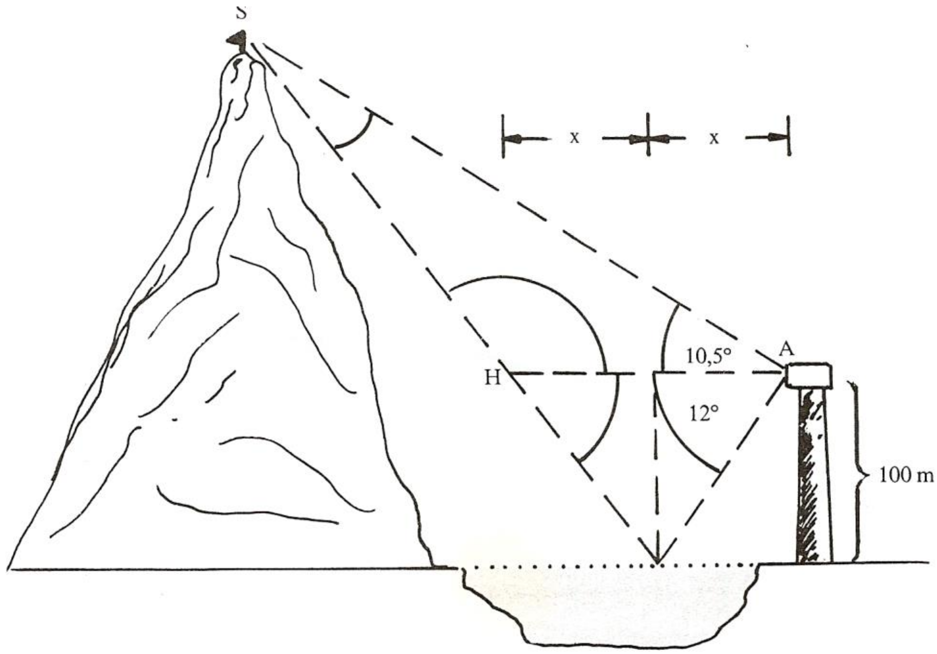
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د بحیرې لور ته °14 میلان لري، د دننه لور ته °28 میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

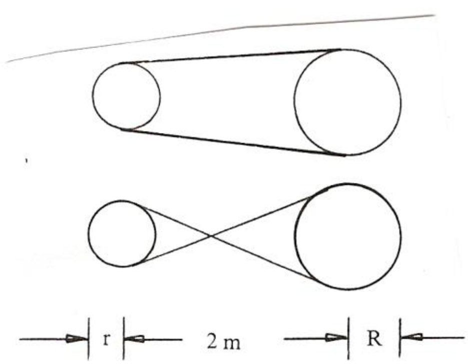
۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د °12 پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج °11 لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟

څیره

(c) ketabton.com: The Digital Library



خيره ۲۲۵



خيره ۲۲۶

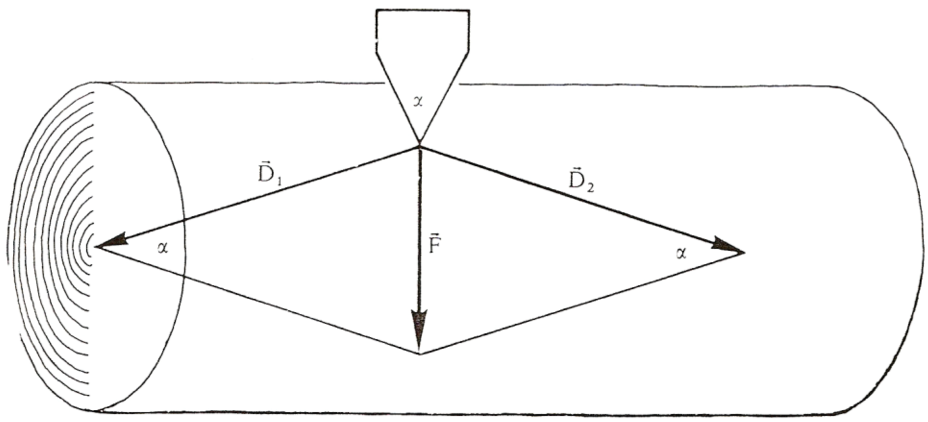
۲۳ - الف) يوه د کشولو کړۍ، چې په دوه دکښولو چيترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري $r = 22\text{ cm}$, $R = 35\text{ cm}$, $|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړۍ به څومره اوږدې وي که د اتيران په څير له چيتروګانو يا تيکليو راکي څيدلي وي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

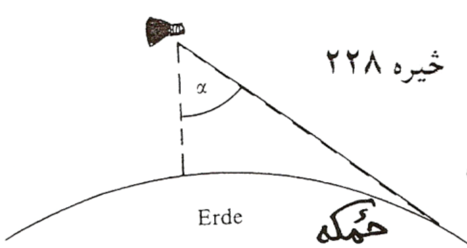
۲۴ الف) د ونی په ستنه یو کایل)موړی) په څنك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چې د ستنې درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $6° = \alpha$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: |F|=|D| ؟



څیره ۲۲۷

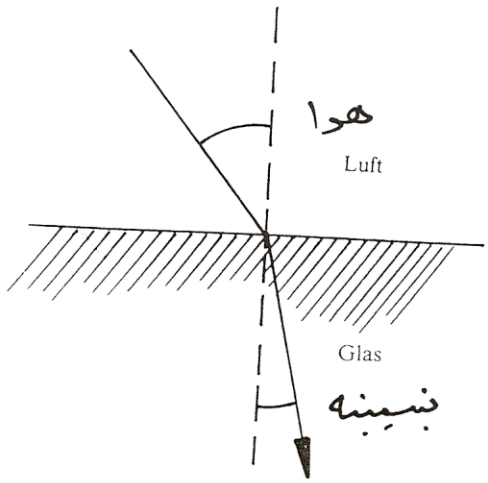
۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه α کونج لاندې لیدل کیږي (څیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکې وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)



څیره ۲۲۸

۲۶ – یو ګاډی د $v_{\alpha} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $115° =$ کونج

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډي د اوسپنی
ټیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي.
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو
د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟

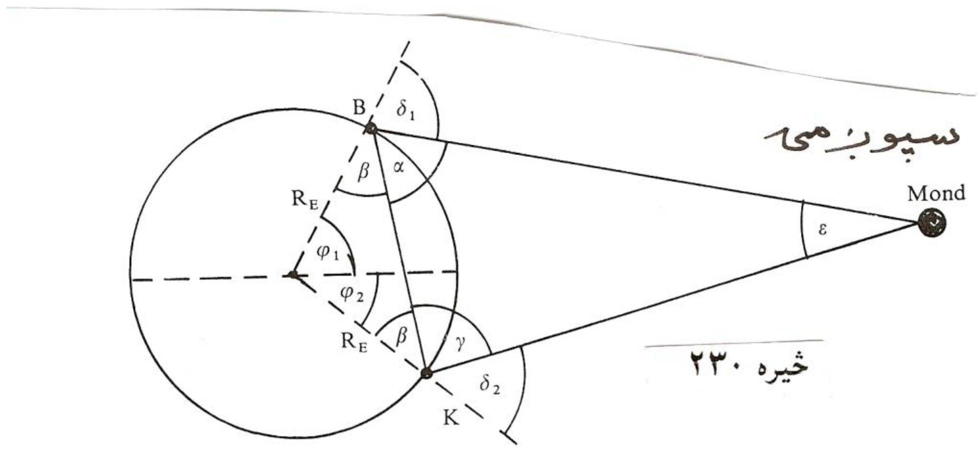
۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون وایي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

$$\sin \alpha \ / \ \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو (1,33) n = 1,5 دی. وښایي، چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

۲۸ – په ۱۸ اـمه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هیلو په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
. $\delta_2 = 55,72°$ او $\delta_1 = 32,08°$
وشمیری |KM| , ß , |BK| او له دې څخه d_{EM} .



۲۹ – لړځيدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شميرل کيږي يعني د وخت t
تړواك لاندې دي. دا د بلواك ($y = a . (\sin (2 \pi /T)) .t + k)$ له لارې
ورکړ شوي. دلته $(2 \pi / T) t = x$ هغه کونج دی، کوم چي په T وخت
کی وهلکيږي. $1 / T = f$ د يوه څرخون پريود يا راګرځيدنی وخت په ګوته
کوي او د لړځيدنی دوام بلل کيږي» f فرکونځ frequenz بلل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګنډیری پر بله ګنډیری ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \qquad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیری کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیری وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7, 4)$$

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کيدی شي په لاندې ډول وليکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a.i}, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a.i}$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ايماجينار ګڼ يوون(واحد) ټوليز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ايماجيناريوون(واحد) $z= i$ يو ځانګړی ايماجينارګڼ $b=1$ دی

د ټوليزې ځلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

په لاندې ډول د ځلوری پوره کولو يا مربع تکميلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

=>لاس ته راځی يالرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x+p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, ...(7,12)$$

د$p^2 = 4q$ لپاره رییل «دبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیونې یا حلونه منځ ته راوړي۰

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیری په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, ...(7,14)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي٠ لنډ کنجوګيري کمپلکس ګڼ يا اوښتي ګڼ

$$| z |= \sqrt{a^2 + b^2},............................(5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنګه ايماجينار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رييل او ايماجينار برخه کې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اېښول شوي

ګډوله يا کمپلکس عدد کيدی شي په سطحه يا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سړی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شميرنه کوي، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نيسي چې:$i^2 = -1$

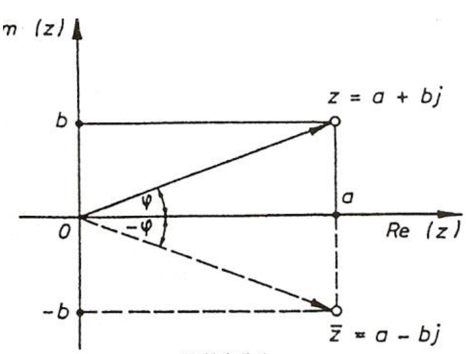


Bild 5.1

موږ دې سيستم ته پروت ولاړ سيستم وايو يا کواورديناتسيستم Koordinaten systm

پورته ځيره دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وايي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطځې ریيلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته یېایماجینار برخه وایې لکه څنګه، انځور شوي دي٠ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر ائي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي٠(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوریږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې ریيل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښنه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعني د(z2-) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

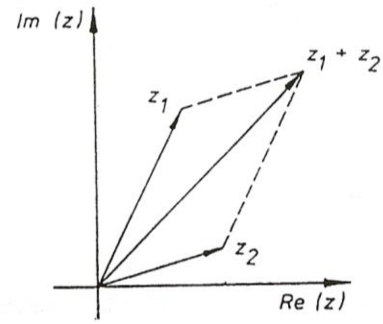


Bild 5.2 7.2 ځېره

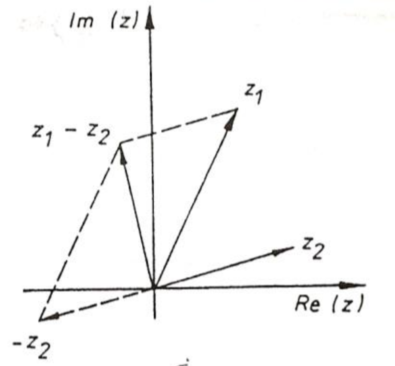
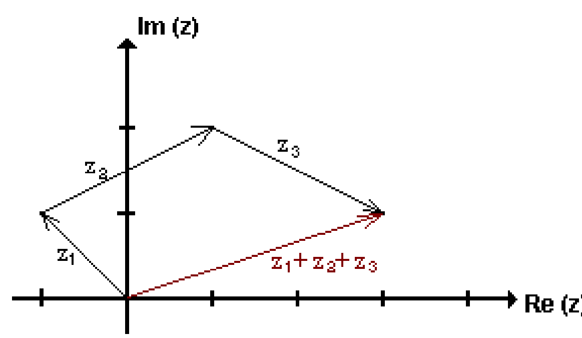
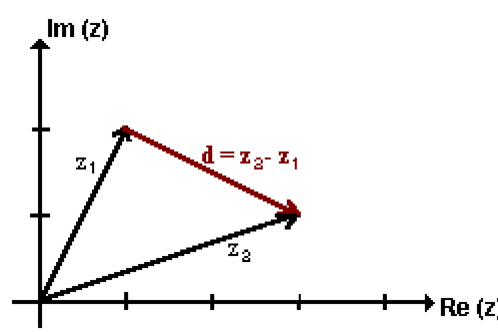


Bild 5.3 7.3 ځېره

يا لاندې:



په پورته او لاندې ځېرو کې د کملپکس ګڼونو د زياتون او کمون انځور ليدلکيږي٠



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کيږي٠

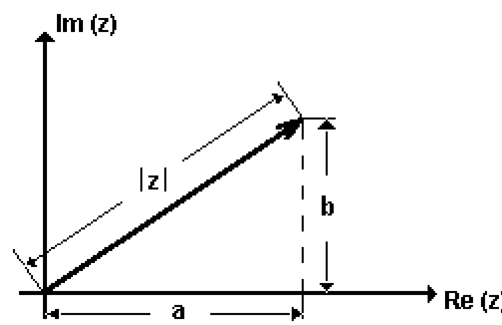
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د پە |z| سره ښايو او د پيتاګوراس(فيثاغورث) د جملې

سره ښوول کيږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی ليکه

هم وکتل شي٠ مخامخ څيره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښايي



$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

په درې ګوډي کې د اړخونو ځانئيونه يا تباسب له امله باور لري

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

٧ . ٢ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اينوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$$
$$\Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 +a_2 b_1)i \qquad (7,20)$$

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتين توري په بدل ډول ليکل شوي، چې دا هم زما تخنيکي ستونځې دي، دا که په هرځايکې وي،دا به راته ګران د شميرپوهنې مينه وال وبخښي٠ دا لاندې هم ساده ازمايل کيدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بيلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab + ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7,22)$$

۷ ۰ ۳ ويش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1i):(a_2+b_2i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{\bar{z}}_2}{z_1\bar{\bar{z}}_2} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې لاس ته راځي

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوهمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z_1}.Z_2}{\overline{Z_2}.Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د او $Z1$ لپاره له $Z2$ سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سیحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3} i)$ d) $z = -1 - i$

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22+5i)+(2+i)$ b) $(3+2i)-(5+2i)$

c) $(1+2i)-(1+2i)$ d) $i-(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}i).(3-2\sqrt{2}i)$

c) $(1+\sqrt{5}i).(1-\sqrt{5}i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x+yi)(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}i)(-c-2\sqrt{d}i)$

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}i}{7-2\sqrt{5}i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63+16i}{4+3i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

4.1. a) z_1+z_2 b) z_1-z_2 c) $z_1\cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1+z_2|$ b) $|z_1-z_2|$ c) $\bar{z}_1+\bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1-\bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1|\cdot|z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1\cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $x^2 + (1 + i)\, x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\, x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\, x + 1 = 0$

d) $16\, x^2 + 8\,(i + 1)\, x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

همدا موضوع له بلکتاب څخه

7 . ایماجینار او کمپلکس ګنونه

Inhaltsverzeichnisخوندیونه

- د ریيلو ګنونو بنستونه او نیوني یا فرضيي
- ایماجیارګنونه

کمپلکسګنونه

- په ګنونهواره کې د کمپلکس ګنونو انځورونه
- د کمپلکس ګنونو سره شمیرنه
- د کمپلکسګنونو زیاتون ، کمون
- د کمپلکسګنونو ځل
- د کمپلکس ګنونو ویش
- د کمپلکس ګنونو تولګنیز په توان
- د بینوم درسي جمله
- د موفري فرمول 5.6 Die Moivreschen Formeln
- د کمپلکس ګنونو ریښه 5.7 Wurzeln aus komplexen Zahlen
- توان د مختلفو جګګنونو سره
- 5.8 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

د ریيلګنونو بنستونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریيلګڼونو ډیری لکه د مخه مو ، چې ګوته ورته ونیوله د راشنل او ایراشنل ګڼونو له ډیریو جوړه ده (د ریيلګڼونو برخه دې وکتل شي).

ایماجینار ګڼونه Imaginäre Zahlen

د ریيل ګڼونو سیستم پوره نه دی، ګورو، چې د یوه ګڼ څلوری یامربع، چې د کمیز ګڼ سره برابره وي، ریيله اوبیونه یا حل نه لري لکه لاندې

$$x^2 = -1$$

داسې یو ریيل ګڼ نه شته، چې پورته پوره کړي

یوه فورمال اوبیونه یې په لاندې ډول ده

$$x = \pm\sqrt{-1}\,,$$

چیرته ، چې $\sqrt{-1}$ ریيله اوبیونه نه ده.

دا څلوری یا مربع ریښه د i سره په نخښه کوو، چې له دې پرابلم څخه ووتی شو او څلوری یې په 1 - سره په نخښه کوو.

د دې i لپاره باور لري:

$$i^2 = -1$$

اوس کړی شو، چې ولیکو

$$x_{1,2} = \pm i\,.$$

که ګڼ i د ریيلګڼونو سره زیات ځل یا ضرب کړو، نو د ګڼونو یوه د نوو ګڼونو ډیری ترې لاس ته راځي، د بیلګې په توګه :

$$2i,\ 3i,\ -i,\ 1+i,\ 2+i,\ 1+2i,\ -23+78i,\ 0.45-0.93i$$

او داسې نور.

تولیزه بڼه یې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$a + bi\,,$$

پورته ګڼ کمپلکس ګڼ دئ او a او b ريیلګڼونه٠ له دې سره هم لګۀ د نورو ګڼونو سره ساده شميرل کیږي، چیرته، چې د i^2 په ځای 1 - ليکلی شو يا په څټ: لاندې کې يې بيلګې ګورو

$$(1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i$$

په ټوليزه توګه:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

له دې سره ويش هم کړی شو، خودا ، چې ستونځمن دئ وروسته يې راوړو.

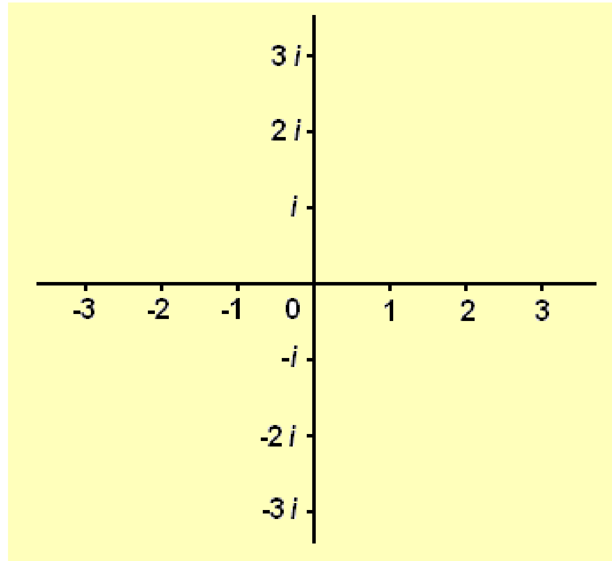
دا لاندې هم لرو

i.2i,i,0,-i,-2i,-3i٠٠٠3.....

دا ايماجينار ټولګڼونه بلل کیږ ي يا بولو ، چې دا هم صفرلري

موږ په لاندې کې د هوارې پروت محور لاندې د ريیلګڼونو محور پوهيږو او ولاړ محور يا څرخونی يې د ايماجينار ګڼونو محور دی، چې د دواړو زياتون کمپلکس ګڼونه دي يا د کمپلکس ګڼونو هواره انځوروي٠.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په لاندې کې يو کپلکس ګڼ په يوه رييل ګڼ يا پيداينتي ګڼ ويشل کيږي

$$mi : n = \frac{m}{n} i \ .$$

په پورته کې m او n رييلګنونه دي او ايماجينار

$$x^2 = -a^2$$

په پورته کې a رييلګڼ دی، خو x غواړو لاس ته راوړو، لاس ته راوړنه يې يو ايماجينار ګڼ دی.

د دوه ايماجينار ګڼونو زياتون او کمون::

$$a\,i \pm b\,i = (a \pm b)\ i\ .$$

ځل او ويش يې

$$\frac{i}{i} = 1\ .$$

د دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$pi \cdot qi = -pq$$

او

$$\frac{pi}{qi} = \frac{p}{q} \, ,$$

چیرته چي p او q ریللګنونه دي.

لاس ته راوړنه : د دوه ایماجینار ګنونو ځل یا ضرب او ویش څخه ریيلګڼ لاس ته راځي، چي په لاندې کې يې ګورو٠

$$i^2 = -1 \, , \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i \, , \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1 \, , \quad i^5 = i^4 \cdot i = i \, , \ldots$$

د تولګڼ n لپاره لرو:

$$i^{-n} \equiv \frac{1}{i^n}$$

لاس ته راوړنی یي

!Error

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i \, , \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1 \, , \quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i \, , \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1 \, , \ldots$$

.د سره شمیرل ورسته کیدونکي دي

Komplexe Zahlen کملکس ګنونه

ګډ یا مخطلت څلوری - یا مربع برابرون شمیرو

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څلورې پوره کوونې یا تکمیلونې له لارې ، چې ورسره بلد یو ، اوبیونه یا حل پیداکوو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\,i\ .$$

د دې برابرن اوبیونه نه رییل ګڼ دئ او نه ایماجینار ۰ دې ګڼ ته موږ کمپلکس ګڼ وایو **komplexe Zahlen**.

د کمپلکس ګڼونو او د دې سره سره شمیرنه ۰

موږ دا لاندې کمپلکس ګڼ لرو :

$$z = a + b\,i,$$

چیرته، چې a او b رییل ګڼونه دي

د کمپلکس ګڼونو په مرسته کړای شو، چې بې بندیزه څلورۍ- یا مربع فرمولونه اوبې کړو

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

لاس ته راځي.

دلته چې څه راځي هغه ګران لوستنکی پخپله هم پیدا کولی شي، زه به وهڅیږم، چې دا پرابلمونه پورته کړم یا لرې کړم ،

د لاندې لپاره

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

یو یا دوه رییل اوبیونې لاس ته راځي۰

د

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره اوبيوني په لاندې ډول ليکل کيږي

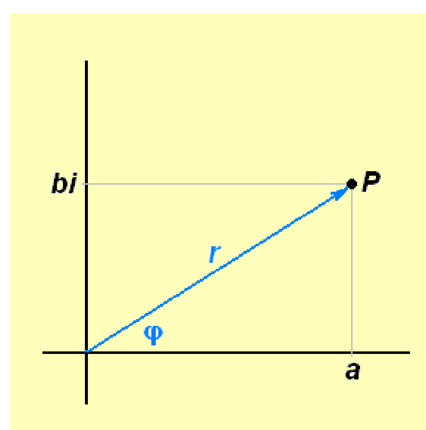
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\ .$$

اوبيوني کنجوګيري کمپلکس دې، دا په دې مانا، چې يو له بل د مختخښي له مخه توپير کيږي٠

په ګڼونهواره يا ګڼسطحه کې د کمپلکس ګڼونو انځورونه

د کمپلکس ګڼونو ګرافيکي انځوروني لپاره هواره ځان رامنځ ته کوي، چې د رييل او ايماجينارګڼکرښو څخه غزيدلې ده٠

کمپلکس ګڼونه a + bi د ټاکني له مخې(په بدل وار يا همغه وخت) د يوه ټکي P ، چې کواوردينات يا پروت ولاړ محورونه يې a او b ، چيرته، چې محور b ټکی bi په ايماجينار ګڼکرښی باندې په ګوته کوي، يا د» ښوونکرښې « OP سره انځور کيدی شي٠ دا د يوې اوږدې r سره ښايو او د رييلي محور سره کونج fi جوړوي٠ (دا همغه د ټکی P انځورول دې په پولار کواوردينات کې، r د کمپلکس ګڼ مطلق ارزښت دی، fi يې فاز بلل کيږي٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دواړو انځوربڼي لپاره لاندې ترانفورميشنبرابرون باور لري(له دې څخه نوج زده کوونکې تيريدلی شي، چې ترانسفورميشن باندې نه پوهيږي)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}\,, \qquad a \neq 0$$

$$a = r\cos\varphi\,, \quad b = r\sin\varphi\,.$$

له $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ لاس ته راځي

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + k\cdot 2\pi, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{b}{a} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } k \text{ ganzzahlig ist.}$$

په پورته کې wobei د کوم سره یا چيرته چې په مانا دی او k ټولګڼ دی ۰

ارزښت

$$\varphi_0 = \arctan\frac{b}{a}$$

د في φ اصلي ارزښت بلل کيږي۰ له دې نور ارزښتونه د k او 2π له زياتون څخه لاس ته راځي۰

د دې له مخې کيدئ شي، چې کمپلکس ګڼ په لاندې توګه وليکل شي ۰

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\,.$$

" وروسته د اويلر فرمول "Eulerschen Formel په مرسته ترې لاس ته راځی

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

دريمه انځورونه يې لاندې ده:

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r\,e^{i\varphi}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کمپلکس ګڼ دا درې انځورونې په ترتیب داسې بلل کیږي اریتمیتیکي بڼه کونومتریکي (یا تریګنومتریکي بڼه) او اکسپوننشل بڼه.

دا چې د اویلر فرمول وروسته ښوول کیږي، اکسپوننشل بڼهٔ دي دلته راوړل شوي وي، خو د ښوونې لپاره دي ترې کار نه اخستل ک یږي.

Rechnen mit komplexen Zahlen

د کملپکس ګڼونو سره شمیرنه

دوه کملپکس ګڼونه دې ورکړ شوي وي

$$z_1 = a_1 + b_1 i\,, \quad z_2 = a_2 + b_2 i\,.$$

د کمپلکش ګڼونو زیاتون او کمون

په زیاتون او کمون کې د الجبر ي قوانینو له مخې i هم داسې په کار اچول کیږي لکه هره بله کومه د تورو لویه ، چې په کار اچول کیږي یا کارول کیږي

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\,i$$

د کملپکس ګڼونو « ښوونکرښه» (دا هغه کرښه ده، چهٔ د دوارو محورونو صفر ټکو څخه د هغه په هواره موخه ور ټکی په لور ګزیدلی وي، یانې د صفر ټکی څخه د هغه بل موخه ټکی په لور ، ځکه لوریزه ده)لکه وکتورونه سره زیاتیدلی او کمیدلی شي

Das Produkt komplexer Zahlen

د کمپلکس ګڼونو ځل

دی

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,i.$$

دا ځل ترلی پیژند وړ لیدونکي مانا نه لري(یانې سملاسي ترې څه نه شو پوهیدلی) . که د دې په ښت « پولارکواودینات » وکارول شي، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_1a_2 - b_1b_2 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) = r_1r_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right) = r_1r_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right).$$

او له دې سره ؛

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right].$$

نو دی

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{او} \quad \varphi\left(z_1z_2\right) = \varphi_1+\varphi_2.$$

د ځل – یا ضرب ارزښت د ارزښتونو ځل دی۰ د ځل یا ارګومنت یا فازې د ارګومنت یا فازې د زیاتون سره برابر دی۰

سملاسې پیژندل کیږي، چې دا د دوه فاکتورونو څخه زیاتو فاکتورو یا ځله وونو لپاره هم باور لري

$$|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n| = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n| \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n.$$

د کمپلکس کېونو ویش Division komplexer Zahlen

په ورته توګه پيدا کيږی، که z_2 د صفر سره برابر نه وي

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

که کيږدو $z_1 = 1$ او $z_2 = z$, نو لاس ته راځي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\left[\cos(0-\varphi) + i\sin(0-\varphi)\right] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په ځانګړي ډول د $z = i$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

Ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl

د کمپلکس ګڼونو توان (کپلکس ګڼ د يوه ناکميز توان سره د رييل ګڼونو په څير دی)

$$z^{-n} \equiv \frac{1}{z^n}.$$

د کمپلکس ګڼونو ځل دې وکتل شي

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

د همغه ځله وون يا ضريب z لپاره ترپلاس ته راځي

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

موږ لرو

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{p \cdot q}, \quad z_1^p \cdot z_2^p = (z_1 \cdot z_2)^p, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \frac{z_1^p}{z_2^p} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p.$$

Der binomische Lehrsatz

د بينوم درسي جمله

د بينوم جملي لپاره هم لرو

د نوکانو د چاون قانون او ځل قانونو د زياتيز جګ ګڼ لپاره د بينوم جمله همغسي باور لري

$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \ldots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \ldots + \binom{n}{n} z_2^n.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځايه ښکته د ښوونځي زده کوونکو لپاره ستونځمن دی.

د موفری قانون Die Moivreschen Formeln

له برابرون څخه (پورته دې وکتلشي)

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right)$$

لاس ته راځي

$$|z| = 1: \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

له بلې خوا د زياتيز ټولګنيز جګګڼ يا اکسپوننت سره د بينوم جملې څخه لاس ته راځئ:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

$$-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi + \ldots + i^n\binom{n}{n}\sin^n\varphi.$$

که د برابرون دوا

ړه خواوې بربار کېښول شي او بيا په پام کې ونيول شي، چې رييل او ايماجينار برخه دواړه بايد برابر وينو د موفري برابرون ترې لاس ته راځي **Moivreschen Formeln**:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - + \ldots,$$

او

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - + \ldots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چيرته، چې ښی لور ترهغې پوره شي، تر څو چې ځله وونی يا ضريب صفر شي.

د کمپلکس ګڼونو ريښه Wurzeln aus komplexen Zahlen

د برابرون اوبيونه

$$x^n = z \qquad \text{n positiv ganzzahlig}$$

پورته کی n زياتيز ټولګڼ دی
د کمپلکس ګڼ z n -مه ريښه بلل کيږي :

$$x = \sqrt[n]{z}.$$

ږدو

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

او

$$x = \rho\,(\cos\psi + i\sin\psi)\,,$$

د $z = x^n$ له امله لاس ته راځي

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi$$

او د دې پسې

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي

په ويشنه کې بايد په پام کې ونيول شي، چې ارګومنت يا پروتمحور φ پريودي يا تل بيرته راګرځيدونی دی د پريودې يا راګرځيدنی π2 سره ، نو

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

پسي د ψ لپاره تيک n مختلف ارزښتونه لاس ته راځي، ياني

$$\psi = \frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2 \cdot 2\pi}{n}, \ \ldots \ \frac{\varphi + (n-1) \cdot 2\pi}{n}.$$

د $n = k$ ځانلۀ د مخه ارزښتونه (له دويم پسې) تکراريږي، نو باور لري:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)$$

هر له دې ارزښتونو د کمپلکس ګڼ z د n-مې رېښه بلل کيږي

$$\sqrt[n]{z} \quad \text{oder} \quad z^{\frac{1}{n}}$$

دا ټول n ارزښتونه په ګڼهواره په يوې ګردی په O په يوه منظم n - ګوډي پرته ده , د څلوری ريښی لپاره له

$$i = i \sin\frac{\pi}{2}$$

لاندې ارزښتونه ترې لاس ته راځي

$$\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4},$$

او د څلوری ريښي لپاره له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-i = i \sin \frac{3\pi}{2}$$

پیداکیږي

$$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}.$$

که موږ ونیسو لکه د رییل ګڼونو لپاره

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

دې وي، چیرته چې n یو پیداینتج ګڼ او m یو په خوښه ټولګڼ دی، نو له دې سره د کمپلکس ګڼ سره جګګڼ یا کسپوننت وپیژندل شو یا تعریف شو٠ اوس نو اخرنی پل پاتې ، چې هغه د ایراشنلجګګڼ دی .

توان د په خوښه رییل جګګڼ سره

Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

اوس دې z له صفر مختلف په خوښه کمپلکس ګڼ وي .

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r\left[\cos\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right)\right],$$

چیرته چې

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

دی ، نو د z^ν (ν رییلreell) لاندې هر دالاندې کمپلکس ګڼ پوهیږو:

$$r^\nu\left[\cos\nu\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right) + i\sin\nu\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right)\right].$$

لاربنود : د داسې په ټولیز پیژند یا تعریف سره د کمپلکس ګڼونو توان لپاره د د توان شمیرنې بنسټیز قوانین باور لري ، یانې

$$z^\mu \cdot z^\nu = z^{\mu+\nu}, \quad z_1^\mu \cdot z_2^\mu = \left(z_1 \cdot z_2\right)^\mu, \quad \left(z^\mu\right)^\nu = z^{\mu\cdot\nu}$$

nicht mehrنور بس دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسځندنت برابرونونه يه ـ مساوات

دلته يواځي هغه ترانسځندنت مساوات څيړل کيږي، کوم چی بيرته په الجبري مساواتو اړول کيدی شي. دا بيرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په رېښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کيږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون يا بنه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کيدی شي چی اړولی فرمول زياتي اوبيوني يا حلونه نسبت د پيل برابرون ته ولري. له دې امله بايد د اړول شوي برابرون ټولې اوبيونې په پيل برابرون کی ځاي په ځاي يا کيښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پيل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ريښه يي برابرونونو يا مساواتو کی ، دلته هم يواځی رېيل اوبيوني پلټل کيږي.

۱۳ . ۱ لوګاريتمي مساوات

د لوګاريتمي مساواتو او اکسپوننشل يا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پيدا کولو لپاره اړيين يا ضرور(ضروري يا اړيين شرايط) دی، چی د يو عدد(ګڼ) aلوګاريتم، د b په بنسټ، معلوم کړو يا وڅيړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په ځنې یا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b ....(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دی

$$l\,og_b\, x = c ....(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ : $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبیونه په لاندې تولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b\, f(x) = c ....(13,5)$$

دلته (f(x یوه الجبري وبینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کتمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

تولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کتمټ دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x^2+x+6=2^3=8$ (همداسی) ⇔ $x^2+x-2=0$

او لاندې اوبيونې لري

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}; x_1=-2; x_2=1$$

يو د (۱۳ . ۵) ډول (تيپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کينه لور (ارخ) ته يود لوگاريتم ريشنل لاينيز کمبينشن الجبري وبينه يا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل گڼونه دي. د لوگاريتم قوانينو (۷. ۷) ، (۷. ۹)کاروني يا استعمال څخه، ۷ برخه وگورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}....................................(13,8)$$

بيلگه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه رېينه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،
د کوم له څلوری يا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ يعني $x^2-x-81=0$
د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515; x_2=-8,515$$

تيك دا x1 = 9,515 پيل برابرون پوره کوي
. د x=x2<0 لپاره log x او په همدې ډول (log(x-1 پيژند نه لري يا تعريف نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$
$b+3=x(b-2)$
$x=(b+3)/b-1)$

پیل وییته یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني که $(b+3)/b-2)>1$ وي.
د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$
له دې لرو $3>-2$دا د ټولو b لپاره پوره دی
.د $b \le 2$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $3 \le 2$ لاس ته راځي
اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .
له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \le 2$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13 . 9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وییني یا افادې دي. د بدلون کاروايي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x) ....(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13 . 11)$$

ددې اوبیونه ..y1,y2 په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳/۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاريتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i ; \quad i = 1,2,3,........ \qquad (13 . 12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13 . 13)$$

ددې لپاره چې و ازمائیلی شو چې ایادا هم   برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳/۹) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

بیلګه ۱۳ . ۵ :   برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y=\lg x$سره په څلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .
د $y1 = 2$ او $y 2 = -1$ ځوابونو سره
.له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$x1 = 10^2=100$ او $x_2=10^{-1}=\dfrac{1}{10}$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$
د,$x>0$ مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندي $(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$,\quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$
$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلوری بنې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0 \ , \ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1=lox_1=5; y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5; x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پيل مساوات پوره کوي.
که په يوه برابرون کی لوګاريتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي، نو کيدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بيلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1)+\log_4(x-1)-1=0$

 څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1)=\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1)+\frac{1}{2}\log_2(x-1)-1=0,\ \log_2(x-1)=\frac{2}{3},\ x-1=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4},$$

$$x=1+\sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پيل برابرون اوبی يا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4}+\log_4\sqrt[3]{4}-1=\frac{1}{3}\log_2 4+\frac{1}{3}\log_4 4-1=\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}-1=0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – يا په ځګګڼ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x=b; a>0, a\neq 1, b>0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,14)$$

کيدی شي چی د لوګاريتم نيولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x=\log_a b=\lg_b/\lg_a=\ln b/\ln a \qquad (13,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^{x}+3^{x+2}-2^{x+2}-3^{x+1}=0.$$

$$2^{x}(1-2^{2})+3^{x}(3^{2}-3)=0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^{x}=3\cdot 2^{x},\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=2,$$

$$x=\frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}}=\frac{\lg 2}{\lg 2-\lg 3}=-1{,}7095.$$

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وييني يا افادي(f (x اکسپوننتونه ياجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b,a>0\ ,a|=1,b>0 \qquad (13\ .\ 16)$$

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې يو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13{,}17)$$

د کومو ځوابونه چې د (۱۳ . ۱۶) ځوابونه هم دی.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4}=4$

مو لاندې خلورى برابرون يا مربع مساوات ته بيايي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2 , x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پيل برابرون اوبيونې يا ځوابونه هم دي۰

بیلګه ۱۳ . ۱۰ : په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کې د يوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څېړ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 \ , \ x_2 = -4$$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کی کیدی شي چی ناپیژندونکی د اکسپوننت یا په جګ ځخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \qquad \text{يا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ (۱۳ . ۱۶) مساوات دی، ځکه چی باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کيڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ويشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کيدی شي چی د لوګاريتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c; ....(13,18)$$

ځخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13.19)$$

که يو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د يوه اکسپوننشل افادې يوه الجبري وبينه يا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x))})=0 ;..................................(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبيونو y_1, y_2, y_3;............... لپاره بايد

$$a^{f(x)} = y_i ; i=1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 .... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بيلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x}+3^x = 2$ کيدی شي چی د بدلون $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$ سره په ځلوری

برابرون يا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بيرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې ځخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبيونه نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}}-\sqrt{e^{x^2-1}-1}=\sqrt{2e^{x^2-1}-1}\text{..........................}(13,25)$$

کې داسې بدلوو:

$$y=e^{x^2-1}\text{......................................}(13,26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};\text{..............................}(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

تیك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;\text{..}(13,28)$$

باید اوبی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1$, $x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پیلبرابرون پوره کوي٠

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخې ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کې انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاې رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګې په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln^2 x - \ln x + 1 = \log_2 8 = 3$$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا ځلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2 - y - 2 = 0$

لاس ته راځي،د ځوابونو

$$y_1 = -1 , y_2 = 2$$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$$\ln x = -1 , \ln x = 2, x_1 = e^{-1} = 1/e , x_2 = e^2$$

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې اوژباړې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب   په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: څمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

شپږم: د شمیرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اتم: دفرنڅیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

<u>Bonn (Germany): 2003</u>

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواريد ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ښخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ښخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ښخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې چاپ شوی

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي) چاپ شوی

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګریزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

رياضي برای صنف دوازده

.

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

	ماخان په اولني نوم میرږي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي. د هسکې مینې د لومړنې بنوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(بنوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي ښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library