شمیرپوهنه (ریاضي)

د لسم ټولګي لپاره

برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

لیکونکی:

ډاکترماخان میرې شینواری

2016

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

د لسم ټولګي لپاره

لیکونکی:

ډاکټر ماخان(میرزی) شینواری

Smakhan1946@gmail.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نيوليک

سريزه.................................... ۴
پولينومشميرنه ۶
د ګاوس الګوريتم...................... ۲۹
هورنرشيما.......................... ۴۶
اړيکي.............................. ۵۵
فنکشن(څيرونه) يا تابع ۶۵
فنکشن او په ښتفنکشن ۹۱
څلوری‌يا مربع توابع ۹۳
نورمال پارابل ۹۶
د څلوری‌تکميل له............... ۱۰۱
کرښيزبرابرونسيستم ۱۱۵
د مناسبځواب له پاره تلنلار.... ۱۲۳
مساواتسيستم بې له ۱۲۹
توان يا پوتنځ توابع ۱۳۳
کرښيزتوابع د ورکړ شوو ۱۳۸
مومړی حالت ۱۳۸
د کرښبرابرونونو ځانګړی ۱۴۲
n- مه درجه ټولراشنل توابع ۱۶۵
د ټولراشنل توابعوغوښتکي ۱۷۵
د بدلونقانونه ۱۷۸
شننيزه – يا تحليی هندسه ۱۸۳
فنکشنونه (بل بديل)............ ۲۰۲
درېکوډيکچ ۱۳۷
ګډوله – يا کمپلکسګڼونه ۲۷۹
د ليکونکيليکلياوژباړې..... ۳۱۵
د ليکوکيژنود ته لنډه کتنه...... ۳۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

سريزه

دا ځلوېښت کاله کيږي، چې زموږ هيواد هراړخيزه ستونزې لري او هر څه دې اوږده جنګ را خراب کړي

ګرانو هيوادوالو!

د نورو نيمګرتياو په څير زموږ درسي نصاب - په تيره شميرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په ځلورديوالي ونه شو، نو زه به وهڅيږم، چې دا ما ليکلي کتابونه د ن ج له لارې له تاسو سره شريک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د ښوونځي په کتابونو کې د ستااتيستيک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دی، چې زه ترې دلته تيريږم او د ښوونځي د تيرو کتابونو څخه هم هيله ده- که زما کتابونه وړاندې نه شو- چې دابرخې يا سمې يا له درسي نصاب څخه ووېستل شي. په دې برخه باور وکړی، چې نه ليکونکی بوهيږي او نه بل لوستونکی پرې پوهيدلی شي.

زما په دې د ښوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پيدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتيستيک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالوالي شميرنه راوړي او د ستاتيستيک يو ګتاب مې هم ژباړلي، چې زه به يې په مناسبوخت کې د ليدلو پتې ګرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځني کتابونه او په ډېره مننه د www.ketabton.com ن ج کې ګرانولوستونکوته وړاندې شوي.

د شميرپوهني سم اند يا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولګي کې راغلی او هغه هم لکه ستاتيستيک او ... د پوهيدلو نه دی. دا- لکه څنګه چې برېښي- دومره پيچلی نه دی، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولګي په سرکې راوړم، هيله ده چې ستونځې به رامنځ ته نه کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځئ، چې ستونځوبې(د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دئ، خو د موصوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمښتونه هم په کې شته. سره د ټولو نیګرتیاوو دا د ښوونځي له پاراه ډېره ګټوره او زه چې پوهیږم، یواځنۍ سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه ، د ځان له امله نه وایم، دګرانو زده کوونکو او ښوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دې، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولي، چې باید سمې وي.

زه به وهڅیږم، چې درسمي ښوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینۍ باید ووایم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځې راته په ګوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې ګټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د ښوونځي لیکنې سمې کړي.

د خوندیونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راونیسم.

باور وکړئ زه د دې لیکنو سره لږ ستړی شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمګړي پاتې وي، چې ستاسو پوهیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بخښنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه ګڼئ.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړئ مغذ مې ترې نورموړ دئ، نو له دې امله یې نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینومشمیرنه

پویلینوم څه شی دی؟

یو پولینوم د اووښتوني یا واریابلي –چي موږيې د x سره په نښه کوو- له ډېرواره توان د زیاتون دی: د توان ځګګښونه پیداښتي یا طبیعي ګښونه دي. زیاتون له دې برسیره پای دی.

بیلګه: $a_n \cdot x^n + ... + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

همداسي

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

یا هم:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

دلته n یو پیداښتي ګڼ اوپای دی او a_i ریلګښونه دي د ټولو $i=0,1,\ldots n$ له پاره.

پیژند: د پولینمچګګڼ n د پولینوم درجه بلل کیږي، که $a_n \neq 0$ وي.

په یاد ولری: په پورته سر کې- د پولینوم لیکنبه د توان په همغږیزجګیدونکي لیکنبه اودا کښته یې د پولینوم د توان په همغیزټیټیدونکې لیکنبه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو سره شمیرنه یا کارونې داسې لنډې څیړو

د پولینومونو زیاتون: که له

$$a_5 \cdot x^5 + ... + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

سره

$$b_5 \cdot x^5 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاته-وو، نو داسې مخ ته ځو:

په دې پورته برابرون کې ګورو، چې اووښتونې یا واریابله د څلور په جګ یعني x^4 نه شته. دا په دې مانا ده،چې څله وونی یا صریب یې صفر دی. یعني $o\ x^4$ یا

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاتونعملیه یا کارونه مح ته بیای:

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

$$(a_{5+} b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ \ + b_0\ )$$

ګورو،چېد برابر توا یا برابر جګګڼ واریابلې سره زیاتیږي.

بیلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$2x^5 + o\ x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$(a_{5+} b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ \ + b_0\ )$$

د پولینومونو کمون کارونه:

کمون یې هم په همدې بیلګه داسې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$-(b_5 \cdot x^5 + o\, x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0)$$

$$(a_5 - b_5) \cdot x^5 + (a_4 - o)x^4 + (a_3 - b_3)x^3 + (a - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

بيلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$-(2x^5 + o\, x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1)$$

$$x^5 + 6x^4 \quad -7x^3 \quad -x^2 + x + 6$$

پيژند: دوه پولينومونه سره برابر دي، که خله ووني يا صريبونه يې سره برابر وي، دا په دې مانا چې

$$a_n \cdot x^n + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

او

$$b_n \cdot x^n + \ldots + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

سره برابر دي که $b_i = a_i$ وي،د ټولو $i=1,2,:::n$ له پاره.

د پولينومونوپه هکله مو په اتم ټولګي کې د ترمونوبرخه کې پوره زده کړه کړې. په پولينوم کې هم ټول هغه شميرلارې، چې په ګڼونو کې باور لري باوري دي.

دا لاندې بيلګې دې هم داروښانه کړي:

د پولينومونوله پاره نورې بيلګې:

- $3x^2 + 2x + 5$
- $7x^3 + x^2 + 6x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- $10x^5 + 3x^4 + 2x$

د پولینوم ډولونه:

په شمیرپوهنه کې د پولینوم مختلف ډولونه شته.په شمیرپوهنه کې د بینوم لاندې یو پولینوم پوهیږو، چې له دوه غړو جوړ وي یا په بل ډول ویلی شوي، چې یو بینوم د دوه مونومونو زیاتون یا کمون دی.دا لاندې بیلګې دا هم ښايي، چې بینوم څنګه بریښي!

- $a + b$
- $x^3 + y^3$
- $x - 3$

پولینوم، چې له درې زیاتونونو جوړ دی‌ترینوم بلل کیږي. لاندې بیلګه دا روښانه کوي.

- $a^2 + b^2 + c^2$
- $6a^2 + 7a^3 + 8a^4$

زیاتون ته بیلګه

$$(-x^5-2x^4-3x^2-x+2) + (x^2+2) = -x^5-2x^4-2x^2-x+4$$

پولینومکمون ته بیلګه: په لاندې بیلګه کې ګورو، چې د برابر توانونو x یو له بل څخه کمیږي.

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x) - (3x^3 + 2x^2 + 6x) = x^4$$

ځل (ضرب):

دا لاندې درې بیلګې د ځل یا ضرب له پاره ورکړ شوي.

موږاو تاسي د دې لارې سره د بینوم فرمول او د ترمونو د ځله ونو له لارې بلد یو، چې دلته ستاسوپام ورته رااړول کیږي

$$(x-4)\cdot(x^2-2x+3) = x^3-6x^2+11x-12$$

$$(x-5)\,(x^2+3\,x+7) = x^3-2\,x^2-8\,x-35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(x-3)(4x+7) = 4x^2 - 5x - 21$$

$$(x+1)(x^2+x-6) = x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6 = \underline{\underline{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}}$$

پولينوموېش:

دا لاندې بيلګه د وېش له پاره راوړو، خو دا چې وېش لږ پيچلی دی، په دې به پوره وغږيږو.

$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x) : (x + 3) = x^3 - x^2 + 5x - 9 + (27)/(x+3)$

$-(x^4+3x^3)$
$-(-x^3-3x^2)$
$-(5x^2+15x)$
$-(-9x-27)$
پاتېRest: 27

کربنيزځلهووني سره ځل کيږي يا ضربيږي

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x-1,5)$$

د ځله ووني ۲ سره غزول کيږي.

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)(x - 1,5)$$
$$= x^3 - 1,5x^2 + 3x^2 - 4,5x + 2x - 3$$
$$= x^3 + 1,5x^2 - 2,5x - 3 \quad / \cdot 2$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولينوم وېش:

که د يوه پولينوم صفرځای معلوم وي، نو کړی شو د پولينوم وېش له لارې د پولينوم درجه په يوه کمه کړو. که دا مو مربع مساوات ته لاربشود کړي يا بوځيو نو ساده دی، چې نور صفرځايونه بيدا کړو. لاندې بېلګې دې د پولينوم وېش روښانه کړي.

د بيلګې په توګه د دريمې درجې ټولراشنل تابع صفرځايونه معلوم دي، نو کيدی شي چې د تابع مساوات د کرښيزو صريبونوپه څېر وليکلی شو:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

چيرته چې $x_1 ; x_2 ; x_3$ صفرځايونه دي.

موږ اوس په څرګنده توکه تابع يا څيرونه د څيړنې لاندې نيسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چيرته چې $x1=2$ يو صفرځای دی، ځکه چې

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

له دې سره له دې سره کېدی شي د تابع مساوات د $x1=2$ صفرځآی لاندې (له امله) په پام کې ونيسو او لکه چې لاس ته راځي و ليکو $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = (\ldots\ldots\ldots)(x - 2)$

د صفرځای ټاکلو لپاره اينبوونه : $f(x)= 0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=0$
دا افاده $x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=0$ څېړو

د نوکانو افادې يا ويينې $(\ldots)$ټاکو

دواړه لورې په $(x-2)$وېشو

$$(x^3-x^2-5x+6) :(x-2)=(\ldots)$$

په دې توګه د نوکانو افاده $(\ldots)$لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وېش د لیکنیز وېش قانون سره سم مخ ته بیایو

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x-2) = x^2 + x - 3$$
$$\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)}$$
$$x^2 - 5x$$
$$\underline{-\left(x^2 - 2x\right)}$$
$$-3x + 6$$
$$\underline{-(-3x + 6)}$$

د نوکانو افاده (...) اوس x^2+x-3 بنه لري

له دې لاس ته راځي د صفرځای ټاکنو لپاره اینوونه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=(x^2+x-3)(x-2)=0$$

نو دا مربع مساوات x^2+x-3 اوس حل کوو.

دا د p-q- فرمول سره ځوابوو:

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

صفرځایونه:

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x محور سره غوځتکي:

$$P_{x1}(2|0);\ P_{x2}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right);\ P_{x3}\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right)$$

تابع مساوات:

$$f(x)=(x-2)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\Leftrightarrow f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

د پولینوموېش او لیکنیز پولینوموېش په منځ کې اړیکې شته. په لاندې مخامخوالي کې دا د وېش بې له پاتې په حالت کې را ښایي.

$62228 : 47 = 1\ 3\ 2\ 4$	$(x^3-6x^2+11x-12) : (x-4) = x^2-2x+3$
$-47 \leftarrow 47\cdot 1$	$-(x^3-4x^2) \leftarrow (x-4)\cdot x^2$
152	$-2x^2+11x$
$-141 \leftarrow 47\cdot 3$	$-(-2x^2+8x) \leftarrow (x-4)\cdot(-2x)$
112	$3x-12$
$-94 \leftarrow 47\cdot 2$	$-(3x-12) \leftarrow (x-4)\cdot 3$
188	0
$-188 \leftarrow 47\cdot 4$	
0	

ګڼ ۶۲ د لومړیو دوه ځایونو ځخه چوړ دی د دې وېشونو ګڼونو څخه د پروېشوني (۴۷)

سره وېشل کېږي. لاس ته راوړنه (۱) د (۴۷) سره ځل یا ضرب کېږي او د ګڼ (۶۲) څخه کمېږي. د کمښت نتیجې کمښت (۱۵۲) سره په همدې ډول پرمخ ځو تر څو د کمښت لاس ته راوړنه صفر شي.

ازماېښت : $47\cdot 1324 = 62228$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right):(-2x+3)=3x^2+2x-4$$

$$-\left(-6x^3+9x^2\right)$$

$$-4x^2+14x$$

$$-(-4x^2+6x)$$

$$8x-12$$

$$-(8x-12)$$

$$0$$

Probe:

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right)=\left(3x^2+2x-4\right)(-2x+3)$$

بیلګه:

$$\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-2)=x^2+5x+4$$

$$-\left(x^3-2x^2\right)$$

$$5x^2-6x$$

$$-\left(5x^2-10x\right)$$

$$4x-8$$

$$-(4x-8)$$

$$0$$

Probe: $\left(x^2+5x+4\right)(x-2)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right) : (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\underline{-\left(a^3 + a^2b\right)}$$

$$2a^2b + 3ab^2$$

$$\underline{-\left(2a^2b + 2ab^2\right)}$$

$$ab^2 + b^3$$

$$\underline{-\left(ab^2 + b^3\right)}$$

$$0$$

ازماېښت:

$$: \left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right) = \underbrace{\left(a^2 + 2ab + b^2\right)}_{\text{1. binomische Formel}}(a+b) = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b}_{\text{Linearfaktoren}}$$

بیلګه:

$$\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right) : (x-2) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$$

$$\underline{-\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2\right)}$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$$

$$\underline{-\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right)}$$

$$-x + 2$$

$$\underline{-(-x+2)}$$

$$0$$

ازماېښت: $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1\right)(x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

$$\begin{array}{l}(2x^3 \qquad -14x-12):(x-3)=2x^2+6x+4\\ \underline{-(2x^3-6x^2)}\\ \qquad 6x^2-14x\\ \qquad \underline{-(6x^2-18x)}\\ \qquad\qquad 4x-12\\ \qquad\qquad \underline{-(4x-12)}\\ \qquad\qquad\quad 0\end{array}$$

په ځنو حالتونوکي دا ښه ده، چي د پولینوم لیکنوکي د اړتیا په وخت کبیوه تشیا پریږدو، کلکه په پورته بیلګه کي چېګورو.

یوه بله شونتیا یي داده، چي هغه تشیا د صفر سره ډکه کړو، لکه دا لاندي:

$$2x^3-14x-12=2x^3+0x^2-14x-12$$

بیلګه:

لاندي بیلګه یو وېش د پاتي سره مخ ته بیایي.لکه ښنګه چي د لیکنیز وېش ښخه راته ښرګند دی.

$$\begin{array}{l}(x^3+3x^2-6x-8):(x-1)=x^2+4x-2 \quad (\text{Rest } -10)\\ \underline{-(x^3-x^2)} \qquad\qquad \Rightarrow (x^3+3x^2-6x-8):(x-1)=x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)}\\ \qquad 4x^2-6x\\ \quad \underline{-(4x^2-4x)}\\ \qquad\qquad -2x-8\\ \qquad\quad \underline{-(-2x+2)}\\ \qquad\qquad\quad -10 \quad \text{Rest}\end{array}$$

$$\text{Probe: } \left(x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)}\right)(x-1)=(x^3+3x^2-6x-8)$$

دا چي نوي بلدې یون کي د ناسمون سره مخامخ کیږي،غوره ده چي د دې ازماېښت هم وکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوموېش په کارونه کې که د پولینوموېش یوصفرځای ځرګند وي، نو کیدی شي د پولینوم درجه په یوه وړه یا رکمه شي.

$x_1 = 2$ د پولینوم یو صفرځای دی.

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = \underbrace{x^2 + x - 3}_{\text{Restpolynom}}$$

$$\begin{array}{l} \underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\ \quad x^2 - 5x \\ \quad \underline{-\left(x^2 - 2x\right)} \\ \qquad -3x + 6 \\ \qquad \underline{-(-3x + 6)} \end{array}$$

د پاتې پولینوم صفرځایونه اوس کیدیشي د څلورۍ یا مربع پولینوم

$$x^2 + x - 3 = 0$$

له لارې پیدا کړو.

د سمون ازماېشت یې وکړی.

بیلګه: پولینوموېش او ازماېښت یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)=x^2+x-6$$

$$\underline{-\left(x^3+x^2\right)}$$

$$x^2-5x$$

$$\underline{-\left(x^2+x\right)}$$

$$-6x-6$$

$$\underline{-(-6x-6)}$$

$$\text{Probe}:(x+1)\left(x^2+x-6\right)=x^3+x^2-6x+x^2+x-6=\underline{\underline{x^3+2x^2-5x-6}}$$

پوښتنې:

لاندې پولینوموېش مخ ته بوځئ

الف- $\left(x^3-3x^2-6x+8\right):(x+1)$ ب ـ $\left(2x^3-x^2-8x+4\right):\left(x^2-4\right)$

پ - $\left(2x^3-3x+1\right):(2x-1)$ ت - $\left(6a^6+a^4b+25b^3\right):\left(3a^2+5b\right)$

ټ - $\left(8x^5-6x^7+2x\right):2x^2$

ث - $\left(9a^5b^3-12a^3b^5\right):3a^3b^3$

ج - $\left(15a^9-8a^6b+8b^3\right):\left(3a^3+2b\right)$ ،

چ ـ $\left(14a^4-a^3+5a^2-3a+1\right):\left(7a^2-4a+1\right)$

ح ـ $\dfrac{3x^5y^{n+2}+3x^2y^{3n+2}-2x^{m+3}y^{n+3}-2x^my^{3n+3}}{x^3+y^{2n}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځ - $\frac{48a^{n+x}+56a^{x}b^{x}-72a^{n}b^{c}-84b^{x+c}}{12a^{n}+14b^{x}}$

 څ - $\frac{8a^{2n+1}-10a^{2n}b+15a^{3n-2}b-12a^{3n-1}}{2a^{2n}-3a^{3n-2}}$

خ - $\frac{2a^{5}b^{x+2}-2a^{3}b^{x+5}+3a^{4}b^{2x-1}-3a^{2}b^{2x+2}}{a^{2}-b^{3}}$

پولينوم برابرون:

د يوه برابرون په کينې اوښي لور د x مختلف توانونه يو پولينوم برابرون ورکوي

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8$$

د داسېبرابرون د اوبی له پاره لومړيدا برابرون په داسي نامه صفربڼه اړوي. دا په دې مانا چي برابرون تر هغې په ورتهبڼه بدلوناړولکيږي، چې په ښيلور يواځې صفر پاتې شي.

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8 \mid -3x^2$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x=-8 \mid +8$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x+8=0$$

د صفربڼې يا- فورم په ځای د پولينوم دې بڼې ته هم نورمال بڼه وايي.
موږ د پولينوم پنځه بديلونهراړوړو

لومړی بديل:

په برابرون کې د اووښتونې x يو يواځنی توان مخ ته راځي.

$$ax^n+b=0 \Rightarrow x=\sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n ناجوړه وي،نوريښه وښتوني کيدی شي کميز ګڼ هم وي.
د رېښي ټيک يو حل شتون لري.
که n جوړه وي، نوريښه نيونی(هغه ګڼ چېريښه ېښنيول کيږي) يواځې زياتيز ګڼ کيدی شي.
دوه اوبيونې شتون لري.
بيلګه:

$$
\begin{aligned}
& 8x^3 + 27 = 0 \,|\, -27 \\
\Leftrightarrow\ & 8x^3 = -27 \,|\, :8 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 = -\frac{27}{8} \,|\, \sqrt[3]{\ } \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 2x^4 - 3 = 0 \,|\, +3 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^4 = 3 \,|\, :2 \\
\Leftrightarrow\ & x^4 = \frac{3}{2} \,|\, \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107 \Rightarrow L = \left\{\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107\right\}
\end{aligned}
$$

په لومړي حالت کې n ناجوړه دې. ريښه نيوني کميزه هم کيدی شي
اويواځې يواوبی شتون لري.
په دويم حالت کې n جوړه دی، ريښه نيونی زياتيزدی.که کميزوي بيا برابرون اوبی نه لري.

دويم بديل:

پولينومبرابرون يوځلوری‌برابرون (مربع مساوات) انځوروي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+px+q=0$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

دا د p-q- – فرمول له لارې اوبی –یا حلکیري

بيلګه

$$x^2-13x+36=0 \quad p=-13 \quad q=36$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$=\left(\frac{13}{2}\right)^2-36=\frac{169}{4}-\frac{144}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9\\ x_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow L=\{4;9\}$$

D د دېسکريمينانت له پاره ليکلکېږي چې هغې لرلو سره مخ دمخه سړی د اوبيونويا حلومو ګومره وال يا ګڼون ټاکلی شي.

که صفر $< D$ وي ، نو څلورئ برابرون دوه اوبي يا حلونه لري

که صفر $= D$ وي،نو برابرون يواځې يو دېل اوبيلري

که صفر $> D$ وي، نو برابرون اوبی نه لري په دې حالت کې نو سړی نور مخ ته نه ځي.

دريم بديل

ولينومبرابرونيو دوه-څلورئ برابرون biquadratische انځوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$ax^4+bx^2+c=0 \Leftrightarrow z^2+pz+q=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

$$x^2=z \Rightarrow x=\pm\sqrt{z} \text{ für } z\geq 0$$

$$ax^4+bx^2+c=0 \Leftrightarrow z^2+pz+q=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

$$x^2=z \Rightarrow x=\pm\sqrt{z} \text{ für } z\geq 0$$

د په ځا اېښوونې يا سبستيچيوشن z د -p-q- فرمول په مرسته يا له لارې شميرل کيدی شي

پسې دې بيرته په ځايونه په څسبستيچيوشن وکارول شي او ريښه دې ونيل شي.

ريښه تيک د   زياتيز - p-q-z -ارزښتونو   له پاره نيول کيدی شي.

بيلګه:

$$\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}=0$$

$$\text{Substitution: } z=x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}z^2-\frac{9}{5}z+\frac{81}{10}=0 \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2-18z+81=0$$

$$p=-18;\ q=81$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=81-81=0$$

$$z=-\frac{p}{2}=9$$

$$\text{Rücksubstitution}$$

$$z=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-3;3\}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې د يسکريمينانت صفر دئ، داسې چې د سبستيچيوشناووښتونې له پاره يو اوبې .(z = 9) شتون لري.
دا په دېمانا، چې د ۴ –مې درجې پولينوم ټيک دوه اوبې يا ځوابونه لري.

ځلورمبديل:
په پولينومبرابرون کې هغه همغه ارژښته يا مطلقه غړی نه لرو.

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow x\left(ax^2 + bx + c\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{2/3}$$

اووښتونې يا مجهوله x کيدی شي له نوکانو راووېستلشي.
اوبيونې د صفرځل يا – صرب له جملې شميرلکيدی شي (د فاکتورکولو تلنلار)،

بيلګه

$$\begin{aligned}
& x^3 + x^2 - 2x = 0 \\
& \Leftrightarrow x\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}} \\
& \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\
& \Rightarrow p = 1;\ q = -2 \\
& \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} \\
& \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \\
& \Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\left|\; \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{array}\right. \\
& \Rightarrow \underline{\underline{L = \{-2;0;1\}}}
\end{aligned}$$

د صفر ځلوونې يا صريب دويم ځلوونی کيدی شي د p-q - فرمولسره سادهوشميرلشي.
د صفرځلوونې جمله: يوځل يا صرب ټيک هلته صفردئ، چې يو ځلوونی صفر ړي.

پنځم بديل:
پولينومبرابرون له بديلونو ۱ – ۴ په ځير نه دئ.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

په ډېرو حالتونوکښکيدی شي، د پوينوموېشله لارې اوبی وميندلشي.
د دې له پاره بايد يواوبی معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د پولینوم یواوبی معلوم وي،نو کیدی شید پولینوم درجه د وېش له لارېیه یوه کمه شي. که دا یو ځلوری برابرون راکړي،نو اوبیونه یېبیا ساده ه، چې نور اوبي پیدا کړو.
لاندې بیلګه چې اوبی $x = 2$ معلوم دی،د پولینوم تلنلار روښانه یا معلوموي.
پولینوموېش همغه په راته څرګنده لیکنیزډول لاس ته راوړو.
Division.
وېشنه

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = x^2 + x - 3$$
$$\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)}$$
$$x^2 - 5x$$
$$\underline{-\left(x^2 - 2x\right)}$$
$$-3x + 6$$
$$\underline{-(-3x + 6)}$$

د نوکانو(....) وبینه یا افاده اوس دا بڼه $x^2 + x - 3$ لري.
له دې د نورو شمیرنوځای په ځای کول لاسته راځي

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x - 3\right)(x - 2) = 0$$

اوس دا ځلوری برابرون یا مربع مساوات $\left(x^2 + x - 3\right)$ د اوبیونې دي،چې د
-p-q فرمول له لارې سرته رسیږي.

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ 2;\ -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې د ګومان یا ازماېښت له لورې اوبی نه شي پیداکیدی، نوبیا د نومریک تلنلار څخه کار اخستلکیږي(دا به اوس زموږ دنده نه وي).

برابرونونو ته تمرینونه:

۱ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف - $\frac{1}{5}x^3 - 25 = 0$ ب - $\frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0$ پ - $8x\left(x^2 - 1\right) = -8x + 1$

۲ – برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف - $27x^3 - 8 = 0$ ب – $\frac{1}{16}x^3 - 4 = 0$ پ- $-2 + \frac{7}{8}x^3 = -\frac{5}{2}x^3 - 1$

۳ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف- $4k^2x^3 - 2k = 0; k > 0$ ب – $\frac{1}{4b}\left(x^3 - b^3\right) = 0; b > 0$ پ - $(x + 2a)^3 = \frac{1}{8}$

۴ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

$$\frac{k \cdot x^3}{4} - 2k = 0$$

۵ - ځانګړې باکتریاګانې د ۴ ساعتونو په منځ کې خپل ګڼو(تعداد) څلور برابره کوي.په یوه ساعت کې یې په سلوکې ډېروالی څومره دئ؟

۶ – د کال په پیل کې د موټروختارزښت نوی ټاکییا کره کیږي. د یوه پنځه کلن زوړ کارشوې یوم،ترپلورونکی € 8500 ورکوي.

د موټر کلنی زیان به څومره (د وختارزښت د په سلو کې) وي، که سړی له دې، که سړس داسېمخ ته لاړ شي چې دا په لومړیوپنځه کلونوکې برابر جګ وي؟

۷ – برابرونونه اوبی –یا حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف - $\frac{1}{4}x^3 - 4x = 0$ ب- $3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0$ پ - $x^3 + x^2 - 2x = 0$

۸ – برابرونونه اوبیکړئ

الف- $4x\left(x^2 - x\right) = 7x^3 - 7x^2 - 6x$ ب- $\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 = 0$

پ --- $\frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0$

دا لاندې برابرونونه اوبې کړئ

الف- $x^3 + 4x^2 - 20x - 48 = 0$ ب - $-\frac{1}{2}x^3 + 4x = \frac{1}{2}x^2 - 4$

پ - $-2x^3 + 6x^2 - 4x = \frac{1}{2}x - 1$ ت- $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2}$

ټ - $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3 + 4x^2 - 2x\right) = \frac{3}{2}$

لاندې برابرونونه حل کړئ چې یو اوبی یا حل یېمعلوم وي

الف - $x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0;\ x_1 = -1$

د پولینوم وېش ځخه کارواخلی.

-- د پولینوموېش ځخه کار واخلئ

الف- $\left(4x^3 - 6x + \frac{5}{2}\right) : (2x - 1)$ ب - $\left(x^3 - 2kx^2 - 2x + 4k\right) : \left(x^2 - 2\right)$

۱۲ – برابرون $x^3 - 4x^2 + (k + 4)x - 2k = 0$ ورکړشوی. وښایئ، چې د $x_1 = 2$ لپاره برابرون یواوبی دی. د k د کوم ارزښت لهپاره ټیک یو دبل اوبی شته؟

لاس ته راوړنه د کرښیزو ځلوونو یا صربیونوپه څیر ولیکی.

پوښتنه:

a داسې وټاکئ، چې برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0
ټیک دوه اوبیونې یا حلونه ولري
یو د دریمې درجې برابرون دا دوه { 4- ; 2 } = L اوبیونې لري.
الف ـ د اوبیونو یا حلونوپه هکله ویناوې وکړی.
ب – دوه برابرونونه ددې اوبیونې ورکړی.
۳ – برابرونونه اوبیکړی

الف- $2x^3 - x^2 - x = 0$ ب ـ $x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$

۴ – برابرونونه اوبیکړی

الف- $-3x^3 + 5x^2 + 4 = 0$ ب- $x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{6}{5} = 0$

۵- برابرونونه اوبیا حلکړی

الف ـ $x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

ب- $x^3 - 2,63x^2 - 1,45x + 3,08 = 0$

برابرونونه اوبی کړی

الف – $-u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2} = 0$ ب ـ $a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$

۷ – برابرونونه حل کړی

الف ـ $x^3 - \left(3 + \sqrt{3}\right)x^2 + 3\sqrt{3}x = 0$

ب- $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$ پ- $\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0$

ت ـ $\frac{4}{10}x^3 - \frac{6}{10} = 0$ ټ ـ $x^3 - 5x^2 + 6,25x = 0$

ث ـ $\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ج ـ $x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$

چ ـ $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ خ ـ $x^3 - 3x^2 = -4$

څ ـ $(3x - 5)\frac{(x-2)^2}{5} = 0$

پوښتنې
۱ ـ برابرونونه د پسې حل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف – $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2=0$ ب $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0$

پ - $-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}=0$ ت - $\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{5}x^2-5x+15=0$

ټ- $2x^3-x^2-5x-2=0$ ث - $(3x-1)(x+k)^2=0$

۱ ــد x پسې یې اوبی کړئ $(k\neq 0)$

الف - $\frac{1}{9k}\left(x^4+x^3-12x^2\right)=0$ ب - $\frac{k}{2}x^4-kx^3-\frac{3k}{2}x^2=0$

پ - $\frac{x^2}{5k^2}\left(x^2-3k\right)=0\,;\,k>0$ ت - $x^4-26x^2+25=0$

ټ – $-\frac{1}{2}x^4+3x^2-4=0$ ث - $\frac{1}{2}x^4-4x^2+2=0$

ج – $-\frac{1}{16}x^4+x^2-3=0$ چ - $\frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^2-3=0$

څ - $\frac{1}{3}x^4-2x^2+3=0$ ځ - $x^4-11x^2+18=0$

پوښتنې

حلونه یا اوبیونې وټاکئ

الف – $\frac{1}{3}x^4-3x^3=0$ ب - $\frac{1}{7}x^4-7=0$ پ - $\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2+1=0$

ت- $-2x^4+x^2+x=0$ ټ - $\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{4}x^3-x=0$ ث - $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^2-3=0$

ج - $\frac{2}{5}\left(x^2-9\right)(x+2)^2=0$ چ - $\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x^2+x=0$ څ - $x^4-5x^2-2x=0$

ځ - $x^4-6x^2+8=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس الګوریتم **Der Gauß- Algorithmus**

فکر دې وشي، چې دا برخه په یولسم ټولګي کې راشي. دلته یې راوړنه هم بده نه ده.

یادونه: خوارزمیة د Algorithmus
عربي مانا ده : زما په اند دا الخوارزمیّة
دی، چې په لاتین کې ترې الګوریتموس
جوړ شوی دی.

الخواریزم د الګوریتم نومورکونکی، یوه شوروي پوست مارکې چې د الخواریزم د ۱۲۰۰ کلیزې جشن په هکله راوېستلې وه.

الګوریتم د پرابلم یا د پرابلمونود ټولګي پا یوه یواځنۍ د اوبیونې تلنلار ږه.

الګوریتم یوه نړیواله تلنلار ده د په خوښه کرښیز برابرونونو سیستم اوبیونې ته

نتوتنبیلګې:

د کرښې ډول په توګه کار کوو. د لیکو له پاره اجازه شته : - بدلیدلی شي - د یوه ګڼ سره ځلیدلی شي. - په یوه ګڼ سره وېشلکیدی شي.	درې برابرونونه د درې اووښتونویا واریابلو یا متحولو سره له بنه بدلون څخه لرو	$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12$ $-x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$ $-4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$ شمیرنځیره یا شیما داسې لیکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

- سره زیاتیدی شي

- سره کم کړي

درځونه هم سره بدلیدلی شي، که اووبنتوني یا واریابلي x ورسره واخستل شي.

د اوبیوني یا حل لاس ته راوړنه د بیرته په ښت اینسووني له راې هم کیدی شي.

$$-14x_3 = -14$$
$$\Leftrightarrow x_3 = 1$$
$$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$$
$$\Leftrightarrow -11x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 0$$
$$7x_1 + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12$$
$$\Leftrightarrow 7x_1 = -7$$
$$\Leftrightarrow x_1 = -1$$

$$L = \{-1; 0; 1\}$$

ازماېښت: په لاندي کي د رښتیا له پاره ځاي په ځای دي.

$$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$$
$$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$$
$$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$$

x_1	x_2	x_3	
*	*	*	*
0	*	*	*
0	0	*	*

x_1	x_2	x_3	
7	3	−5	−12
−1	−2	4	5
−4	1	−3	1

شمیرنه داسي مخ ته بیایو: شننه یې بشي لور ته ده.

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	|·4
−1	−2	4	5	|·28
−4	1	−3	1	|·7
28	12	−20	−48	
−28	−56	112	140	II + I
−28	7	−21	7	III + I
28	12	−20	−48	|: 4
0	−44	92	92	|: 4
0	19	−41	−41	
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	|·19
0	19	−41	−41	|·11
7	3	−5	−12	
0	−209	437	437	|: 19
0	209	−451	−451	III + II
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	
0	0	−14	−14	

د بیخي نویو له پاره یادونې:

د اوبیوني له پاره تلندول کیدی شي په کوچنیو پلونو توته شي.

١ـ د اصلي ماتلانديږ سره د لیکي له لاري ځل (ضرب) سره د د ماتونو مخه ونیسی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- په لومړۍ کربښه لومړی ګڼ باید زیاتیز وي(که نه، بیا کیدی شي د ۱- سره ځل شي)

۳- د ځل یا وېش له لارې وهڅیږي چې په لومړي درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

په ۲ ـمه او ۳ ـمه لیکه کې دې لومړي ګڼونه کمیزوي.

۴- ۲ ـمې او ۳ ـمې لیکې هرې یوې ته دې لومړۍ لیکه ورزیاته شي. له دې سره په لومړي درځ کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۵- په۲ ـمه لیکه کې دې دویم ګڼ زیاتیز وي(که نه، نو د ۱- سره دې ځل شي)

۶ ـد ځل یاوېش له لارې په دې نیت کې شي، چې له ۲-مې لیکې په دویم درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

۷ - و ۲ ـمېلیکې یا کربښې ته ۳ ـمه لیکه ورزیاته کړی. له دې سره په ۳-مه لیکه کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۸ - لاس ته راوړی د اوبی یا حل په څټ لور کیږدی.

برابر پرمختګډول کیدی شي د هغو سیستمونو له پاره هم وکارول شي، چې له دریو زیات برابرونونه شتون ولري:

بڼه بدلونونه کړی شي سړی بل ډول هم مخ ته بوځي.دا چې ،، څنګه،، دا یواځې د شمیرپوهانو مهارت ته پریږدو. د زیاتو تمرینونوله لارې سړی یوه غوره لار پیدا کوي. د شونتیا پورې دې د ماتونومخه دې ونیولشي، چې د نا اړینې تیرونې مخه نیول شوي وي. که سړی ورته تازه وي، کیدی شي ډېر بڼه بدلونونه په یوه وخت جوړ کړي، له دېلارې لیکنه کیږي، خود ناسمون شونتیا زیاتیږي؟

د په څټ اینوولو له لارې د اوبي یا حل لاس ته راوړنه	لانې الماني:سره بدل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

tausche: ⇄

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	
−1	−2	4	5	$\vert\cdot(-1)$ I ⇄ II
−4	1	−3	1	
1	2	−4	−5	
7	3	−5	−12	II - 7·I
−4	1	−3	1	III + 4·I
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	$\vert\cdot 9$
0	9	-19	-19	$\vert\cdot 11$
1	2	−4	−5	
0	−99	207	207	$\vert : 9$
0	99	−209	−209	III + II
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	
0	0	-2	-2	

$-2x_3 = -2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$

$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$

$\Leftrightarrow -11y = 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$

$x_1 + 2\cdot 0 - 4\cdot 1 = -5$

$\Leftrightarrow x_1 = -7$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$

$L = \{-1; 0; 1\}$

ازماېښت:

$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$

$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$

$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$

بیلګه ۱ :(ساده یا اسانه)

د په څټ اینوولو له لارې د اوبیبا حل لاس ته راوړنه

$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8$

$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4$

$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1$

x_1	x_2	x_3		
2	−3	4	8	$\vert\cdot 6$
3	4	−5	−4	$\vert\cdot 4$
4	−6	3	1	$\vert\cdot 3$
12	−18	24	48	$\vert : 6$
12	16	−20	−16	II - I
12	−18	9	3	III - I
2	-3	4	8	
0	34	-44	-64	
0	0	-15	-45	

$-15x_3 = -45$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 3}}$

$34x_2 - 44\cdot 3 = -64$

$\Leftrightarrow 34x_2 = 68$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 2}}$

$2x_1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8$

$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 1}}$

$L = \{1; 2; 3\}$

Probe:

$2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8 \quad (w)$

$3\cdot 1 + 4\cdot 2 - 5\cdot 3 = -4 \quad (w)$

$4\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot 3 = 1 \quad (w)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ (منځنی سخته)

<table>
<tr>
<td>

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$$
$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$$
$$8x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 13$$

x_1	x_2	x_3		
3	2	−4	−2	$\|\cdot 8$
4	−5	3	9	$\|\cdot 6$
8	7	−9	13	$\|\cdot 3$
24	16	−32	−16	$\|:8$
24	−30	18	54	II - I
24	21	−27	39	III - I
3	2	-4	-2	
0	-46	50	70	$\|:2$ II ⇄ III
0	5	5	55	$\|:5$
3	2	-4	-2	
0	1	1	11	$\|\cdot 23$
0	-23	25	35	
3	2	−4	−2	
0	23	23	253	$\|:23$
0	−23	25	35	III + II
3	2	−4	−2	
0	1	1	11	
0	0	48	288	

</td>
<td>

د په ښت اینوولو له لارې د اوبي یا حل لاس ته راوړنه

$$48x_3 = 288$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 6}}$$
$$x_2 + 1\cdot 6 = 11$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 5}}$$
$$3x_1 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2$$
$$\Leftrightarrow 3x_1 = 12$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 4}}$$

$$L = \{4;5;6\}$$

ازماېښت:

$$3\cdot 4 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2 \quad (w)$$
$$4\cdot 4 - 5\cdot 5 + 3\cdot 6 = 9 \quad (w)$$
$$8\cdot 4 + 7\cdot 5 - 9\cdot 6 = 13 \quad (w)$$

</td>
</tr>
</table>

بیلګه ۳ : (سخته): لاندې درې برابرونونه غواړو اوبی کړو

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{8}x_3 = 4$$
$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 23$$
$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_1	x_2	x_3		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	4	$\vert \cdot 40$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	23	$\vert \cdot 40$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	$\vert \cdot 20$
20	−32	15	160	$\vert \cdot 12$
30	15	8	920	$\vert \cdot 8$
16	−10	5	160	$\vert \cdot 15$
240	−384	180	1920	$\vert : 12$
240	120	64	7360	II - I
240	−150	75	2400	III - I
20	−32	15	160	
0	504	−116	5440	$\vert : 4$
0	234	−105	480	$\vert : 3$
20	−32	15	160	
0	126	−29	1360	$\vert \cdot 13$
0	78	−35	160	$\vert \cdot 21$
20	−32	15	160	
0	1638	−377	17680	$\vert : 13$
0	1638	−735	3360	III - II
20	-32	15	160	
0	126	-29	1360	
0	0	-358	-14320	

د په ځښ اینوولو له لارې حل لاس ته راوړنه

$$-358x_3 = -14320$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 40}}$$
$$126x_2 - 29 \cdot 40 = 1360$$
$$\Leftrightarrow 126x_2 = 2520$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 20}}$$
$$20x_1 - 32 \cdot 20 + 15 \cdot 40 = 160$$
$$\Leftrightarrow 20x_1 = 200$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 10}}$$
$$L = \{10 ; 20 ; 40\}$$

ازمايښت:

$$\frac{1}{2} \cdot 10 - \frac{4}{5} \cdot 20 + \frac{3}{8} \cdot 40 = 4$$
$$\Leftrightarrow 5 - 16 + 15 = 4 (w)$$
$$\frac{3}{4} \cdot 10 + \frac{3}{8} \cdot 20 + \frac{1}{5} \cdot 40 = 23$$
$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 8 = 23 (w)$$
$$\frac{4}{5} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{4} \cdot 40 = 8$$
$$\Leftrightarrow 8 - 10 + 10 = 8 (w)$$

د کاروني يا استعمال بيلګی

د تولراشنل فنکشن د فنکشن برابرون د شميرلو له لارې، چي ځلور تکي يې معلوم دي،

د ګاوس الګوريتم کارونه يا استعمال

د کاروني بيلګه۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{aligned}
P_1(1|4) &\Rightarrow & f(1) &= 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 &= 4 \\
P_2(2|2) &\Rightarrow & f(2) &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 &= 2 \\
P_3(4|4) &\Rightarrow & f(4) &= 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 &= 4 \\
P_4(5|20) &\Rightarrow & f(5) &= 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 &= 20
\end{aligned}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	4	
1	2	4	8	2	II − I
1	4	16	64	4	III − I
1	5	25	125	20	IV − I
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	3	15	63	0	III − 3·II
0	4	24	124	16	IV − 4·II
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	12	96	24	IV − 2·III
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	0	12	12	

$\Rightarrow$

$$12a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$\begin{aligned}
&6a_2 + 42a_3 = 6 \\
&\Leftrightarrow 6a_2 + 42 = 6 \mid -42 \\
&\Leftrightarrow 6a_2 = -36 \mid :6 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2 \\
&\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2 \\
&\Leftrightarrow a_1 - 11 = -2 \mid +11 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4 \\
&\Leftrightarrow a_0 + 9 - 6 + 1 = 4 \\
&\Leftrightarrow a_0 + 4 = 4 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}}$$

د کارونبیلګه ۲

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{aligned}
P_1\left(1 \middle| -\frac{11}{2}\right) &\Rightarrow & f(1) &= 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 &= -\frac{11}{2} \\
P_2\left(-1 \middle| \frac{9}{2}\right) &\Rightarrow & f(-1) &= -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 &= \frac{9}{2} \\
P_3(-2|8) &\Rightarrow & f(-2) &= -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 &= 8 \\
P_4\left(-3 \middle| \frac{5}{2}\right) &\Rightarrow & f(-3) &= -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 &= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{11}{2}$	$\|\cdot 2$
1	−1	1	−1	$\frac{9}{2}$	$\|\cdot 2$
1	−2	4	−8	8	$\|\cdot 2$
1	−3	9	−27	$\frac{5}{2}$	$\|\cdot 2$
2	2	2	2	−11	
2	−2	2	−2	9	II − I
2	−4	8	−16	16	III − I
2	−6	18	−54	5	IV − I
2	2	2	2	−11	
0	−4	0	−4	20	$\|:(-2)$
0	−6	6	−18	27	$\|:3$
0	−8	16	−56	16	$\|:4$
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	−2	2	−6	9	III + II
0	−2	4	−14	4	IV + II
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	4	−12	−6	IV − 2·III
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	0	−4	−4	

$\Rightarrow$

$-4a_3 = -4 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$2a_2 - 4a_3 = -1$

$\Leftrightarrow 2a_2 - 4 = -1 \,|\, +4$

$\Leftrightarrow 2a_2 = 3 \,|\, :2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$

$2a_1 + 2a_3 = -10$

$\Leftrightarrow 2a_1 + 2 = -10 \,|\, -2$

$\Leftrightarrow 2a_1 = -12 \,|\, :2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$

$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -11$

$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 + 3 + 2 = -11$

$\Leftrightarrow 2a_0 - 7 = -11 \,|\, +7$

$\Leftrightarrow 2a_0 = -4 \,|\, :2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$

$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2$

د کاروني بیلګه ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|-16) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -16$$

$$P_2(2|11) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 11$$

$$P_3(4|-11) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = -11$$

$$P_4(6|-9) \Rightarrow \quad f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	−16	
1	2	4	8	11	II − I
1	4	16	64	−11	III − I
1	6	36	216	−9	IV − I
1	−1	1	−1	−16	
0	3	3	9	27	|: 3
0	5	15	65	5	|: 5
0	7	35	217	7	|: 7
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	1	3	13	1	III − II
0	1	5	31	1	IV − II
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	4	28	−8	IV − 2·III
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	0	8	8	

$\Rightarrow$

$$8a_3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 10a_3 = -8$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 10 = -8 \,|\, -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -18 \,|:2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -9}$$

$$a_1 + a_2 + 3a_3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 9 + 3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 6 = 9 \,|\, +6 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 15}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 15 - 9 - 1 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 25 = -16 \,|\, +25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 9}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9}}$$

د کاروني بيلګه۴ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7$$
$$P_2(-2|6) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6$$
$$P_3(3|1) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1$$
$$P_4(-3|-2) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4·II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2·II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

$\Rightarrow$

$$20a_2 = -10 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$$
$$2a_2 - 12a_3 = -7$$
$$\Leftrightarrow -1 - 12a_3 = -7 \,|\, +1$$
$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \,|: (-12) \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$$
$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1$$
$$\Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \,|\, +5$$
$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \,|: (-1) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$$
$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \,|\, -3 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 4}$$

Die Funktionsgleichung: $$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

د پررته المانیژباږه:د خیروني یا تابع برابرون

د کاروني بیلګه ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(2|22) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 22$$
$$P_2(4|44) \Rightarrow f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 44$$
$$P_3(-4|4) \Rightarrow f(-4) = -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(8|40) \Rightarrow f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = 40$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	22	
1	4	16	64	44	II − I
1	−4	16	−64	4	III − I
1	8	64	512	40	IV − I
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	−6	12	−72	−18	III + 3·II
0	6	60	504	18	IV − 3·II
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	24	336	−48	$IV - \frac{1}{2}\cdot III$
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	0	288	−72	

$\Rightarrow$

$$288a_3 = -72 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$48a_2 + 96a_3 = 48$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 - 24 = 48 \mid +24$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 = 72 \mid : 48 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 12a_2 + 56a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 18 - 14 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 4 = 22 \mid -4$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 18 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 18 + 6 - 2 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 22 = 22 \mid -22 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

Die Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x$

د پړرته المانيژباړه:د خيرونبيا تابع برابرون

د کاروني بيلکه۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|0) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 0$$

$$P_2(-1|-2) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -2$$

$$P_3(2|16) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 16$$

$$P_4(-3|-4) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -4$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	0	
1	−1	1	−1	−2	II − I
1	2	4	8	16	III − I
1	−3	9	−27	−4	IV − I
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	1	3	7	16	$III + \frac{1}{2} \cdot II$
0	−4	8	−28	−4	
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	3	6	15	|: 3
0	0	8	−24	1	|: 8
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	1	−3	0	IV − III
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	0	−5	−5	

$$\Rightarrow$$

$$-5a_3 = -5 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$a_2 + 2a_3 = 5$$

$$\Leftrightarrow a_2 + 2 = 5 \mid -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 3}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -2$$

$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -2 \mid +2$$

$$\Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 0 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 - 4}}$$

د کاروني بیلګه ۷ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|1) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 1$$
$$P_2(2|0) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$
$$P_3(-2|4) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(3|9) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	1	
1	2	4	8	0	II − I
1	−2	4	−8	4	III − I
1	3	9	27	9	IV − I
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	−3	3	−9	3	III + 3·II
0	2	8	26	8	IV − 2·II
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	2	12	10	$IV - \frac{1}{6} \cdot III$
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	0	10	10	

$\Rightarrow$

$$10a_3 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$12a_2 + 12a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 + 12 = 0 \,|\, -12$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 = -12 \,|\, :12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 3 + 7 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 4 = -1 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 - 1 + 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 = 1 \,|\, +5 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6}}$$

د کارونې بیلګه ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$P_1(1|6) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}\Big|\frac{45}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + 1a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_4\left(-\frac{3}{2}\Big|-\frac{77}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}a_3 + \frac{9}{4}a_2 - \frac{3}{2}a_1 + 1a_0 = -\frac{77}{8}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
1	3	9	27	−4	
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{45}{8}$	$\vert \cdot 8$
1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{77}{8}$	$\vert \cdot 8$
1	1	1	1	6	
2	3	9	27	−4	II − I
8	−4	2	−1	45	III − 8·I
8	−12	18	−27	−77	IV − 8·I
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	−12	−6	−9	−3	III + 6·II
0	−20	10	−35	−125	IV + 10·II
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	42	147	−63	$\vert : 21$
0	0	90	225	−225	$\vert : 45$
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	2	5	−5	IV − III
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	0	−2	−2	

$\Rightarrow$

$-2a_3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$2a_2 - 7a_3 = -3$

$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \mid -7$

$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$

$2a_1 + 8a_2 + 26a_3 = -10$

$\Leftrightarrow 2a_1 - 40 + 26 = -10$

$\Leftrightarrow 2a_1 - 14 = -10 \mid +14$

$\Leftrightarrow 2a_1 = 4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$

$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6$

$\Leftrightarrow a_0 - 2 = 6 \mid +2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$

$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کاروني یا استعمال بیلګه۹ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \mid -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{9}{2}$$

$$P_2\left(-1 \mid \frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{11}{2}$$

$$P_3\left(3 \mid -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -\frac{5}{2}$$

$$P_4\left(-\frac{5}{2} \mid -8\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8}a_3 + \frac{25}{4}a_2 - \frac{5}{2}a_1 + 1a_0 = -8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{9}{2}$	$\mid\cdot 8$
1	−1	1	−1	$\frac{11}{2}$	$\mid\cdot 8$
1	3	9	27	$-\frac{5}{2}$	$\mid\cdot 8$
1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$-\frac{125}{8}$	−8	$\mid\cdot 8$

$$-11a_3 = -11 \mid : (-11)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

8	8	8	8	−36	
8	−8	8	−8	44	II − I
8	24	72	216	−20	III − I
8	−20	50	−125	−64	IV − I
8	8	8	8	−36	|: 4
0	−16	0	−16	80	|: 4
0	16	64	208	16	|: 4
0	−28	42	−133	−28	|: 7
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	4	16	52	4	III + II
0	−4	6	−19	−4	IV − II
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	0	16	48	24	|: 8
0	0	6	−15	−24	|: 3

$\Rightarrow$

$$2a_2 + 6a_3 = 3$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 3 \mid -6$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = -3 \mid : 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$$

$$-4a_1 - 4a_3 = 20$$

$$\Leftrightarrow -4a_1 - 4 = 20 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow -4a_1 = 24 \mid : (-4)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -9$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 - 3 + 2 = -9$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 - 13 = -9 \mid +13$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 = 4 \mid : 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کاروني یا استعمال بیلګه ۱۰ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|25) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 25$$

$$P_2(-1|-49) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -49$$

$$P_3(3|27) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 27$$

$$P_4(5|5) \Rightarrow \quad f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 5$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	25	
1	−1	1	−1	−49	II − I
1	3	9	27	27	III − I
1	5	25	125	5	IV − I
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	2	8	26	2	III + II
0	4	24	124	−20	IV + 2·II
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	24	120	−168	IV − 3·III
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	0	48	48	

$\Rightarrow$

$$48a_3 = 48 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$8a_2 + 24a_3 = -72$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 + 24 = -72 \,|\, -24$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 = 96 \,|\, : 8 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -12}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -74$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -74 \,|\, +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = -72 \,|\, : (-2) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 36}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 36 - 12 + 1 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 25 = 25 \,|\, -25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x}}$$

پوښتنې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + 0x_3 = 28 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 30 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 32 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{13;15;17\}$	$\begin{vmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 12 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 11 \\ 0x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{3;2;1\}$
$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{15;12;10\}$	$\begin{vmatrix} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{-1;3;2,5\}$
$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 23 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{5;3;1\}$	$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 20 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{5;3;1\}$

$$\begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -21 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -6 & 2 & -21 \end{array} \Rightarrow L = \{1;-1;2;-1\}$$

$$\begin{vmatrix} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ x_4 = 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow L = \{-1;-1;0;5\}$$

د لاس ته راوړنې د کنترل له پاره دې ازمايښت وشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هورنر- شیما Das Horner – Schema

د دې له پاره چې د جګودرجو ټولراشنلځیرونو یا که غواړئ توابعو ګراف وکښلای شو، باید یو ارزښت جدول برابرکړو. دا به ډېر وخت اوځای ونیسي، چې د دې له پاره اړین ځیره ارزښتونه یا فنکشنارزښتونه وشمیرو.

د هورنر – شیما دا شمیرنې ډېرې ساده کوي.

بیلګه : دریمه درجه ټولراشنل فنکشن یا راشنل ځیرونه

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

د x د ډېرځله نوکانو بندولو له لارېمنځ ته راځي:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x\left[a_3x^2 + a_2x + a_1\right] + a_0 = \underbrace{x\underbrace{\left[x\left(\underbrace{a_3x + a_2}_{e_2}\right) + a_1\right]}_{e_4} + a_0}_{E}$$

که سړی غواړي چې د $x = x_1$ له پاره فنکشن ارزښت وشمیري، نوکی دی شي سړی په لاندې ډول له دننه دباندې لورته مخ ته لاړ شي:

-- ګرد نوکان وشمیري

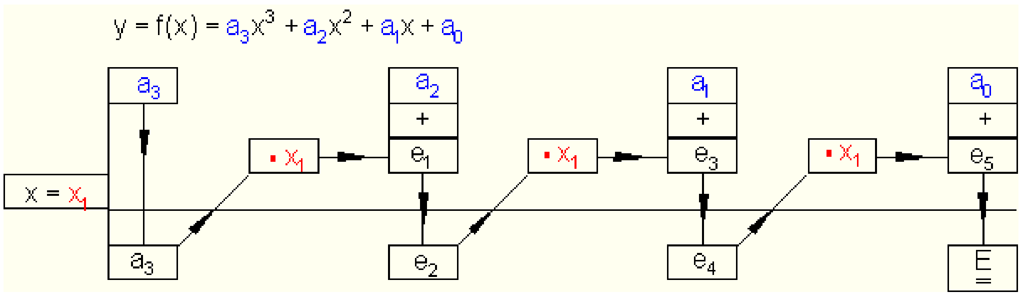
--منځ لاس ته راوړنه (ښه لیکنه به یې داسې وي: منځلاس –ته-راوړنه) د x_1 سره ځل کړي او a_1 ته یې ور زیات کړي

--لاس ته راوړنه د x_1 سره ځل کړي او a_0 ته یې ور زیات کړو

دا شمیرنکارونې یا که غواړئ شمیرنعملیې کیدی شي ځیره ډوله یا شیماتیکي داسې انځور کړو:

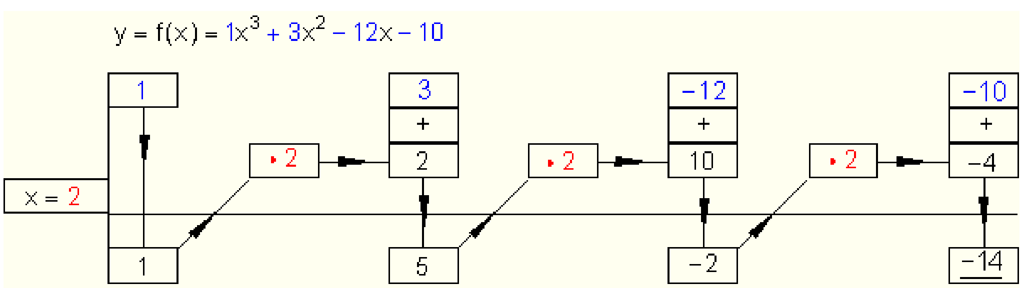
(c) ketabton.com: The Digital Library

تولیزه بڼه Allgemeines Schema:



بیلګه : $y = f (x) = x^3 + 3x^2 -12x -10$

د $x = 2$ له پاره دې د $y = f (2)$ ارزښت د هورنر – شیما له لارې وشمیرل شي.



نولاس ته راځي یا باورلری: $y = f(2) = \underline{-14}$

د یوه دریمي درجي پولینوم له پاره- چې غواړو ګراف یې رسم کړو یا کاږو- باید یو ارزښتجدول جوړکړو.

$y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad D_f = \{x \mid -4 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

$a_3 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	1	4	1	−6	
x = −4		−4	0	−4	
	1	0	1	−10	= f(−4)
	1	4	1	−6	
x = −3		−3	−3	+6	
	1	1	−2	0	= f(−3)
	1	4	1	−6	
x = −2		−2	−4	+6	
	1	2	−3	0	= f(−2)
	1	4	1	−6	
x = −1		−1	−3	+2	
	1	3	−2	−4	= f(−1)
	1	4	1	−6	
x = 1		+1	+5	+6	
	1	5	6	0	= f(1)
	1	4	1	−6	
x = 2		+2	+12	+26	
	1	6	13	20	= f(2)
	1	4	1	−6	
x = 3		+3	+21	+66	
	1	7	22	60	= f(3)
	1	4	1	−6	
x = −2,5		−2,5	−3,75	+6,875	
	1	1,5	−2,75	0,875	= f(−2,5)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتجدول؛

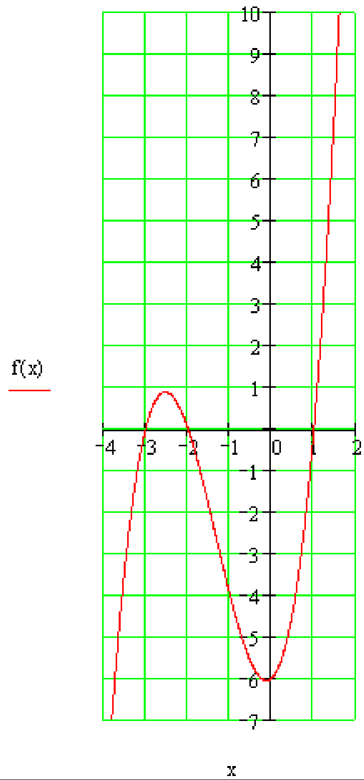
x	-4	-3	-2,5	-2	-1
f(x)	-10	0	0,875	0	-4
x	0	1	2	3	
f(x)	-6	0	20	60	

د لښتي- یا جدولارزښت سره کیدی شی په نږدې توګه ګراف وکښل شي.

که د ګراف کښلو کې څرګنده شي،چې یوبل ځای هم پاتې دی،دا کیدی شي هر وخت د هورنرشیما په مرسته پیدا شي.

ګراف په لاندې x – ځایونوکې صفر ارزښتونه لري: -3; -2;1

دا y – محور په -6 کې غوڅوي.



که په کښلوکې څرګنده شي چې یوبل ځای هم پاتې دی، نو دا کیدی شي د هورنرشیما په مرسته پیدا کړو، د بیلګیپه توګه f (0,5)

	1	4	1	-6	
x = 0,5		+0,5	+2,25	+1,624	
	1	4,5	3,25	-4,375	= f(0,5)

د پولینوم وېشني پر ځای کیدی شي د تولراشنل تابع درجه د هورنر شیما له لارې هم کمه شي.

موږ د هورنر شیما څیړو:

موږ بیرته تابع ترخیرنې لاندې نیسو

$$f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چیرته چې $x1=2$ يو صفرځای دی.

د $f(x)=x^3-x^2-5x+6$ لپاره د هورن شیما د $x1=2$ سره

موخه د ضريب (x-2) له نوکانو وتنه ده. $$\begin{array}{rrrrr} & 1 & -1 & -5 & 6 \\ x=2 & \downarrow & 2 & 2 & -6 \\ & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$	په دريمه ليکه کې درې عددونه د وېش نتيجو لپاره هم د پاتې پولينوم ضريبونه بللکيږي. $$f(x)=\underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor}}\underbrace{(1\cdot x^2+1\cdot x-3)}_{\text{Restpolynom}}$$ پاتې پولينوم کربنيز ضريب

د f (x) د نورو صفرځایونو لپاره د پاتې يا باقي پولينوم صفرځايونه شميرو. دا د اړونده مربع مساوات د حل له لارې کيږي.

نتيجه يې د لاندې پولينوم وېش بيلګې سره وګورى.

بيلګه: $f(x)=\frac{1}{4}x^3+x^2-x-4$ چيرته چې $x_1=-2$ يو صفرځای دی.

$$\begin{array}{rrrrr} & \frac{1}{4} & 1 & -1 & -4 \\ x=-2 & \downarrow & -\frac{1}{2} & -1 & 4 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{array}$$	باقي يا پاتې پولينوم: $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2$ $$f(x)=(x+2)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2\right)$$ د مربع مساوت حل $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2=0$ له دې لاس ته راځي او معکوس: $x2=2$ او $x3=-4$

بيلګه:

$f(x)=-x^3+7x-6=-x^3+0\cdot x^2+7x-6$ چيرته چې $x_1=1$ يو صفرځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

باقي پولينوم: $-1.x-1.x+6$ $f(x)=(x-1)(.x^2-x+6)$ د مربعيز مساوات حل: $.x^2-x+6$ له دې لاس تره اوپه څټ يا برعکس $x2=2$ او $x3=-3$	$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 7 & -6 \\ x=1 & \downarrow & -1 & -1 & 6 \\ \hline & -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}$

لکه بيلګه چې ښايي، د هورن شيما سره د پاتې پولينوم ټاکنه ساده ده نسبت د پولينوم وېش ته.

دا ټولې پورته تلنلارې مو د مربع مساوات حل ته لاربښودوي. که دا ونه توانيږو، نو د نومريکې تلنلارو څخه کار اخستل کيږي، چې دا دلته نه څېړل کيږي.

تمرينونه: د پولينوم وېش...

د لندې ترمونو لپاره د پولينوم وېش وکاروی:

لومړی - $\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)$ دیم - $\left(2x^3-14x-12\right):(x-3)$

دريم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-7)$ څلورم - $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+6\right):(x+2)$

پنځم - $\left(x^3+\frac{11}{2}x^2+5x-4\right):(x+2)$ شپږم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x-2)$

اوم - $\left(x^3-\frac{5}{4}x^2-\frac{23}{4}x+\frac{3}{2}\right):(x-3)$ اتم - $\left(x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{47}{3}x-5\right):(x+3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x+3)$ لسم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-1)$

تمرينونه: د ټول راشنل توابعو صفرځايونه.

تمرين ټولراشنل تابع **IV**

د صفرځايونو ټاکنه له مختلفو لارو څخه.

د يوه تاسو ته مناسب قانو له مخې د ټولراشنل توابعو صفرځايونه وټاکئ. د x محور سره د ګراف غوځتکي و ټاکي او د تابع مساوات د کربنيزو ضريبونو د ضرب په څير انځور کړئ.

اول - $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{13}{2}x^2+18$ دويم - $f(x)=x^3-4x^2+x+6$

دريم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$ څلورم - $f(x)=-\frac{3}{2}x^4+\frac{75}{2}x^2-216$

پنځم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+3$ شپږم - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x$

اوم - $f(x)=3x^4-3$ اتم - $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2$

نهم - $f(x)=2x^3-4x^2-16x$ لسم - $f(x)=2x^3+4x^2-26x+20$

پوښتنې

د ټول هوښيار يا راشنل توابعو محورغوځتکي ګرافونه

صفرځايونه وشميرئ او ګرافونه وکاږئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4+2x^3+x^2$ ب - $f(x)=x^2-6x+9$

پ - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(\frac{1}{2}x+4\right)$ ت - $f(x)=x^6-x^4$

ټ - $f(x)=3x\left(\frac{2}{3}x-2\right)(-2x+3)$ ث - $f(x)=3\left(x^2+4\right)\left(x^2-4x+10\right)$

دویم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=4x^4+6x^2-\frac{7}{4}$ پ - $f(x)=x^6-8x^4+20x^2$

دریم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=2x^3+4x^2-2x-4$ ب - $f(x)=x^3-12x+16$

پ - $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ ت - $f(x)=2x^3-10x^2-4x+20$

ټ - $f(x)=x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}$ ث - $f(x)=-3x^3+3x^2-3x+3$

ج - $f(x)=-5x^3-10x^2-\frac{5}{2}x-5$ چ - $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+9x+6$

څلورم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=-3x^4+15x^2-12$ ب - $f(x)=x^4-x^3-2x^2$

پ - $f(x)=-2x^3+2x^2+16x-24$ ت - $f(x)=\left(x^2-6x+9\right)(x-4)$

ټ - $f(x)=x^6-3x^4-4x^2$ ث - $f(x)=x^4-25x^2-60x-36$

پنځم: د لاندې ټولراشنل توبعو ګرافونه په یوه مناسب پروتولاړ یا کواودینات سیتم کې وکاږئ. د دې لپاره یو ارزښت جدول واچوئ او محور غوښتکي وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad D_f = \{x \mid -0,5 \le x \le 4,5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2 \quad D_f = \{x \mid -3,5 \le x \le 2,5\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \quad D_f = \{x \mid -0,2 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad D_f = \{x \mid -3 \le x \le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ټ - $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad D_f = \{x \mid -2,5 \le x \le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ث - ج - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x \quad D_f = \{x \mid -0,2 \le x \le 8\}_{\mathbb{R}}$

شپږم: د لاندې توابعو صفرځایونه وټاکئ او ګراف یې تر شونې پولې پورې ښه وکاږئ. ارزښتجدول کیږدئ او ځنې ارزښتونه د جبشمیري سره وشمیرئ. ځنې صفرځایونه اټکل کړئ او که شوني وي، صفرځایونه وشمیرئ.

الف- $f(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x - 1$ ب - $f(x) = 0,01\left(x^3 - x^2 - x + 1\right)$

پ - $f(x) = 0,1x^3 - 0,3x^2 - 9x - 10$ ت - $f(x) = (x - 1,7)\left(x^2 - 3\right)$

تر ۶۴۰ پورې دلته محورغوښتکیراځي؟

اړیکي "Relation":

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه اړیکهٔ له دوه شیانو جوړه ده:

۱ – یوه ویناښه

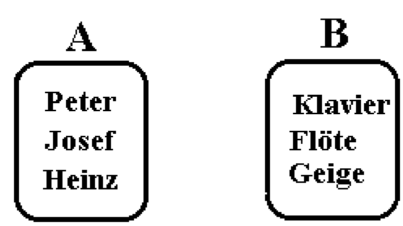
۲ – جوړه، چې دا وینا یې پوره کوي(چې ویناښه یوه رښتیا وینا کوي)۰

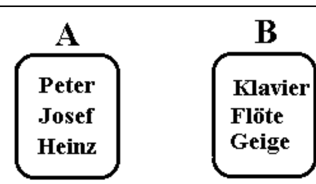
بیلګه :

دیوې کورنی د غړو ډیری A دې ورکړ شوې وي او B د لوبو یا موزیک الو ډیری۰

B	A
فوتبال	سپین
هاکي	
زیرګل	
والبال	
کوچی	

یا دا لاندې



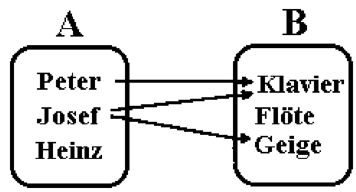
موزیک الي		د کسانونومونه:
پیانو شپیلی ګایګې		پتر یوسف هاینځ

د دواړو ډیریو په منځ کې یوه بینار ویناښه دې یوه ویناښه وي، چې سرې a اله bباندې لوبې کوي۰

جوړه ، چې ویناښه پوره کوي، کیدی شي د بیلګی په توګه لاندې جوړې وي:

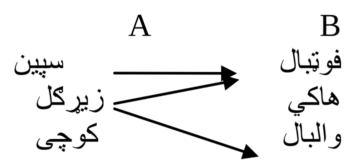
(c) ketabton.com: The Digital Library

پتر په کلاویر لوبه کوي، یوسف په کلاویر لوبه کوي ، یوسف په ګایګي لوبه کوي، د ځیری په توګه اړیکي داسي انځوریږي:



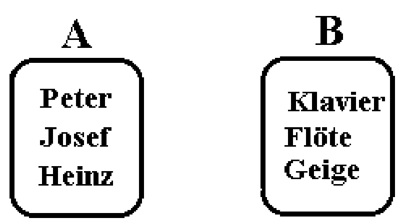
a spielt das Instrument b

یا دا لاندي



نورې بیلګې

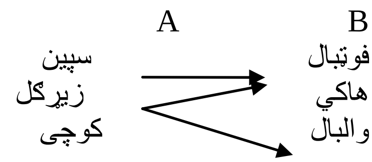
موږ د مخه دا لاندي ډیری منځ ته ر اوړي:

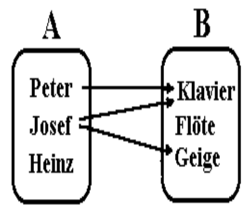


د دواړو ډیریو په منځ کي د اړیکو په څیر موږ اړیکي «په اله لوبه کوي» راوړي
یا دا لاندي

فوټبال هاکي والبال	سپین زیږګل کوچی

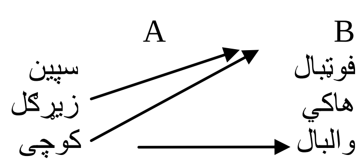
(c) ketabton.com: The Digital Library

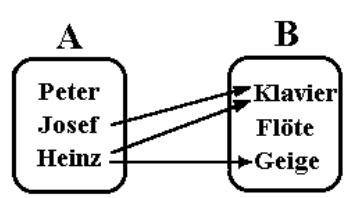




a spielt das Instrument b

په پورته کې ښوول کيږي، چې څوک په کومه اله لوبه کوي.
مورږ اوس دواړه ډيرئ A او B ساتو ، مګر د دوي ترمنځ نوې اړيکې غواړو وپيژنو يا تعريف کړو:
بينار اړيکې دې اوس داسې وي، چې « اله لري» او « په اله باندې لوبه کوي» نور نهوي٠
د دې برسيره دې اړيکې « اله لري » لاندې درې جوړې ولری :
هاينځ کلاوير لري
هاينځ يوه ګايګې لري
يوسف يوه کلاوير لري
د ځيرې په ځير انځور يږي:





a besitzt das Instrument b

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدلکیږي، چې د دوه ډېریو په منځ کې مختلفې اړیکې منځ ته راتللی شي یا ټینګیدلی شي.

شننیزه انځورونه
مخ ته تیرو مخونوکې مو زده کړل، یوې اړیکې پورې دوه شیان اړه لري: یوه وینا بڼه او یوه جوړه، چې دا وینابڼه پوره کوي.
کله اړیین نه دي یا نه شي کیدی، چې ټولې جوړې ورکړای شو، کومې چې په یوه اړیکې پورې اړه لري.

بیلګه ۱
ډېرۍ $A = \{ 1,2,3\}$ او ډېرۍ $B=\{1,2,3\}$ دې ورکړ شوي وي. وینابڼه کوچنی له یا لنډ >

هر زده کوونکی پوهیږي، چې جوړې $(1/2),(1/3)$ او $(2/3)$ دا وینابڼه پوره کوي.
جوړو ګڼلو ته اړنه یو، بلکې دا د وینابڼې مخ ته پرتې ډېرۍ A او B ته.

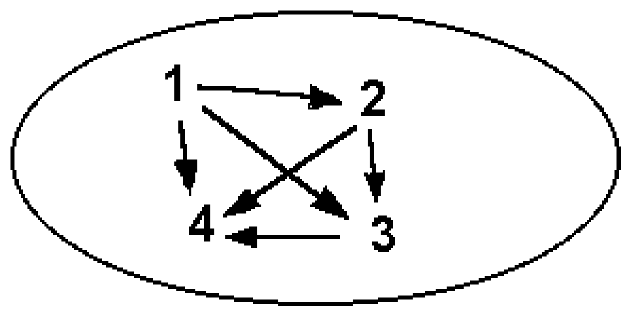
بیلګه ۲
په ځانګړې توګه دا هلته له پامه غورځول کیږي، چې ټولې جوړې وشمیرې، کله چې وینابڼو ته مخ ته پرتې ډېرۍ یا ډېرې لویې وي او یا ناپای.
بیلګه : ډېرۍ : $A = B = \{1, 2, 3, \ldots \}$
وینابڼه: له هغې، چې لیدل کیږي، چې بیخي ناشونې ده، چې ټولې جوړې وشمیرل شي، چې دا وینابڼه پوره کوي.

بیلګه ۳
کله کله اړیکه بیخي نه شي انځوریدلی.
بیلګه : ډېرۍ نارینه =M او ښځینه =F وینابڼه کې راوستل شي، چهٔ « واده له سره ».
دا څوک نه شي ګڼلی، چې څوک له چا سره واده دی او دا نه په برخه اخستونکو ډېریو M او F کې ورکړ شوې.

د یوې اړیکې تیوپ یا ډول
اړیکه په دوه ګروپونو ویشل کیدی شي.
۱ – ددوه ډېریو ترمنځ اړیکې
۲ – د یوې ډېرۍ په دننه کې اړیکې

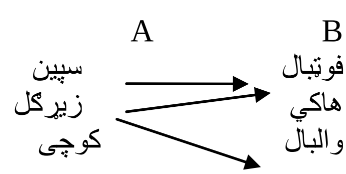
(c) ketabton.com: The Digital Library

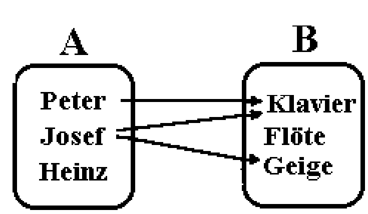
تیوپ ۱ – مورږ وپیژند
د تیوپ ۲ - لپاره بیلګه لاندې اړیکې دي(چې په څیره کې کښل شوي دي):



x له y څخه کوچنی دې

د مخ ته تیرو بیلګو په مخامخوالي یا تضاد دلته د ډیریو د توکو ترمنځ اړیکی پرتې دي
بنسټډیرۍ ،موخه ډیرۍ یا تر مخورشو پسې ورشو
Erklärungروښانه ونه
د ډیرۍ A (بنسټډیرۍ) او B (موخه ډیرۍ) په اړیکو کې په رښتوني د مخ ته ورشو (پتر ،یوس) همداسې ورپسې ورشو (کلاویر، ګایګې) اړیکې هغه توکې جوړوي، چې په کارونه کې ونډه لري۰
A د لوبغاړو نومونه دي او B د لوبو نومونه دي





Grundmenge: { بنسټډیرۍ : {سپین ، زیرګل، کوچی
Zielmenge { موخه ډیرۍ : { فوټبال ، هاکي ، واليبال

(c) ketabton.com: The Digital Library

Vorbereich ترمخورشو {Peter, Josef} :
Nachbereich ورپسي ورشو {Klavier, Geige} :

ځني شميرپوهان دا مخورشو او همداسي پسي ورشو، تعريفډيرى ،
ارزښتډيرى يا تعريفورشو همداسي ارزښتورشو بولي

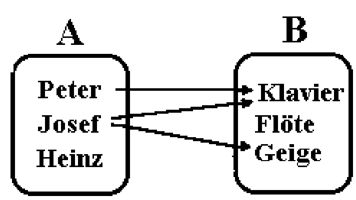
Relationstafelد اړيکو تخته

تراوسه مو تولي اړيکي د غشيدياګرام له لارې انځور کړل٠ يو شونوالی يا امکانات يې
د اړيکو تختې له لارې انځورونه ده:

د دې لپاره د بنسټډيرى او موخه ډيرى توکي په يوه جدول کې ليکو٠ د بنسټډيرى توکي په
پورته ليکه کې ليکو اود موخه ډيرىتوکي په کيڼ درځ يا کينه مته کې ليکو٠

په صليبونه سره هغه پيژند يا تعريف ورکول کيږي، چې د موخه ډيرى
په توکي باندې د بنسټډيرى يو توکی تنظيم شوی وي٠

د بيلګي په توګه بيرته همغه د ساز الو سره بيلګه راوړو



په دې پورې اړونده اړيکتخته په لاندې ډول ليدل کيږي

	Peter	Josef	Heinz
Klavier	x	x	
Flöte			
Geige		x	

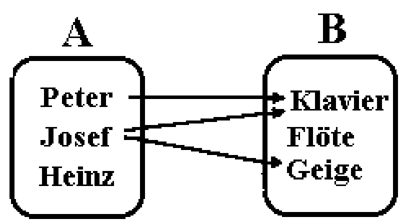
د کواوردينات سيستم انځوربنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه مو اړیکي د غشیدیاګرام او اړیکتختو له لارې انځور کړې٠ اوس یو دریم شوونوالی یا دریمه شوونتیا یا امکان غواړو وپیژنو:
انځورونه په یوه کواوردیناتسیستم کې :

د بنسټډیرۍ توکي د پروتمحور په نخښه کوو او د موخه ډیرۍ توکي په ولاړ محور په نخښه کوو ٠
د ټکو سره هغه د بنسټډیرۍ توکي او ورسره د تنظیمډیرۍ تنظیم توکو ټاکلي وي

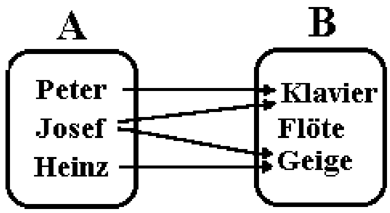
بیلګه
د بیلګی په توګه بیرته هغه بیلګه د لوبو یا موزیک الاتو سره ټاکو:
دلته په دي لاندې الماني لیکنیپا ښه یې :خیره بسیا کړی شو



په کواوردیناتسیستم کې انځورونه داسې لیدل کیږي

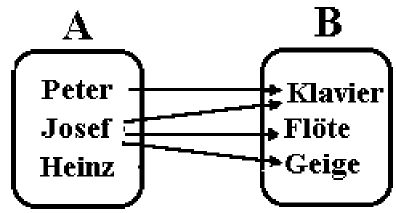
کښ پوره کیدونکی اړیکې :
د Aڅخه هرتوکی کم له کمه د B په یوه توکي تنظیمیږي(پیژندورشو یا مخ ته ورشو او بنسټیزه ډیری کټمټ دي)
ښي پوره اړیکې : دB هر توکی کم له کمه د خیرې په توګه منځ ته راځي (پسې ورشو او موخه ډیری کټمټ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



Linksvollständig

کيڼ پوره



rechtsvollständig

ښی پوره

ښی یواځنی اړیکې

د ښنسټډیرۍ (کيڼ) هر توکی په زیات ترزیاته د موخه ډیرۍ (ښی) باندې تنظیمیږي٠

پام مرسته : غشي ښي « ښيلوریز) یواځنی دي٠

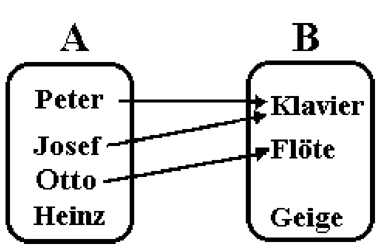
کيڼ یواځنی اړیکې :

د ښی ډیرۍ هر توکی زیات ترزیاته یو وار د یوې ډیرۍ (کینډیرۍ) د خيرې په ډول منځ ته راځي٠

پام مرسته : غشي ښي لورته یواځني دي٠

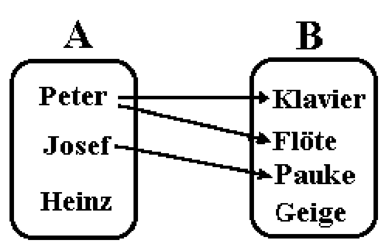
ناټیکوالی!

یا دا لاندې، چې د توپونو په ځای موزیک الې ورکړ شوي دي



rechtseindeutig

ښی



linkseindeutig

کيڼ یواځنی

یواځنی، .

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو کینپوره کیدونکی او بنی یواځنی اړیکي یواځنی اړیکي بلل کیږي (فنکشن او یا څیرونې)

په غشیدیاګرام کې یو فنکشن په دې پیژندل کیږي ، چې په هر توکی تیک یو غشی پیل کیږي

په خټ اړیکي : په خپ اړیکو کې

۱ – مخ – او پسي ورشوګاني سره بدلیږي(پیژندډیری او ارزښتډیری)

۲ – اوښتوني سره بدلیږي

رفلکسیو اړیکي reflexive relations

دیاګرام : په هرتوکي یوکړئ غشی شته

رفلکسیو اړیکي :

د رفلیکسو اړیکو پیژند : د هرو برابرو توکو جوړه اړیکو پورې اړج لري

د فرمو په څیر یې لیکنه : د تولو a لپاره باور لري:
aRa

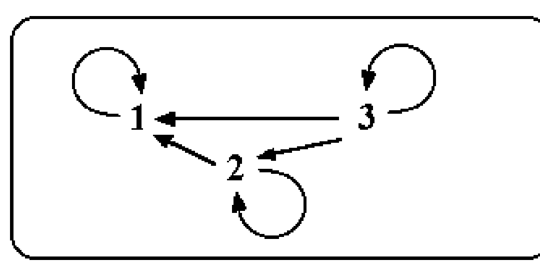
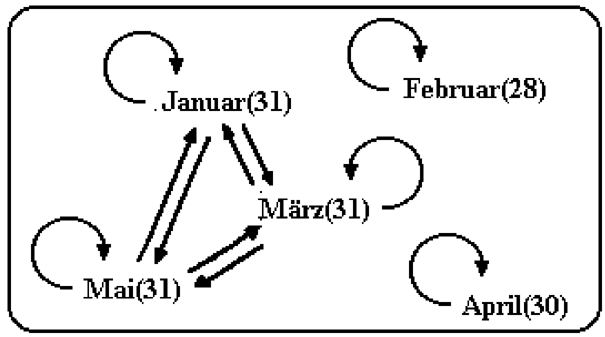


Bild: Die reflexive Relation ≥

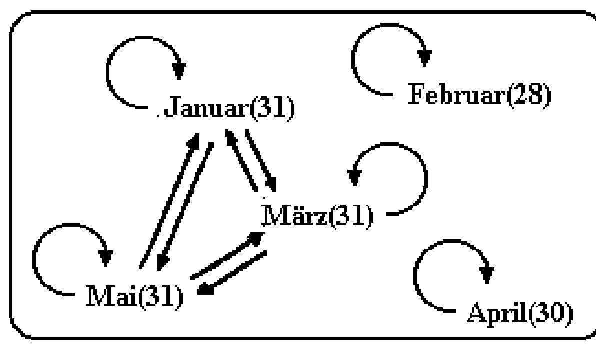
انتیرفلکسیو(ایرفلکسیو اړیکي
Antireflexive
(irreflexive)
Relationen

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند : په انتیرفلکسیو اړیکو کې په هیڅ توکي کړی غشی نه شته
د همغه توکي جوړه اړیکو پورې اړوند نه دی، یا په اړیکو ونډه نه لري٠
د فرمول په توګه لیکل یې : ¬(aRa)



سیومتریکي اړیکي : symetric relations
هر غشي ته په څټ غشی شته
که (a,b) اړیکو پورې اړه ولري ، نو   (b,a) هم په اړیکو پورې اړه لري٠
د سیومري اړیکو خیره: « همغومره ورځې لري لکه»



انتیسیومتري اړیکې: Antiasymetric reltions
د انتیسیومتري اړیکو دیاګرام : په څټ غشی نه شته ٠
که (a,b) په اړیکو اړه ولري،نو   (b,a) په اړیکو اړه نه لري، مګر که   a = b
وي٠

فرمول: a = b   <= a R b /\ b R a

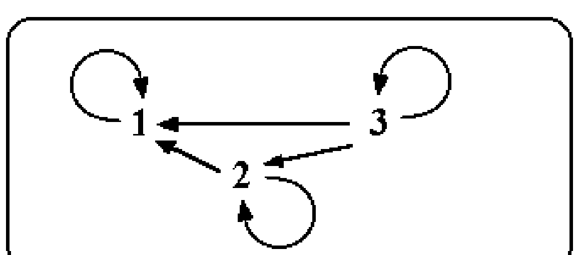


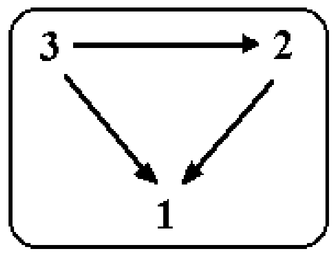
Bild: Die antisymmetrische Relation ≥

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناسیومتریک اړیکي پورته ښېره :Antiasymetric reltions

اسیومتریکي اړیکي
asymetric relations (Asymmetrische Relationen)

د اسیومتریکي اړیکو دیاګرام نه په ښت غشی لري او نه کړي غشی لري.
د اسیومتریکي اړیکو پېژند: انتیرفلیکسیو او انتیسیومتریکي اړیکي
فرمول : $\neg(bRa \Rightarrow aRb$

ښېره: اسیومتري اړیکي	

خیره کونه یا توابع **Funktionen**

p

یادونه: په انرېزي کي mapping د او الماني کي DieAbbildung په نامه ن,مولشوي، چې پښتومانا یې خیرونه یا خیره کونه ده.

فنکشندوه اوښتونپیا واریابلېلري، چې یوه خپلواکه اوبله یپواکه ده. له دېام له د فنکشن لهپاره ناسمد تابع نومورکړشویدی.

په ریاضي یا شمیرپوهنه کې خیرونه یا توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې طبیعي ، تخنیکي یا هم نورو ورځنیو کارونو کې زیات وخت یوه لویه د بلې لوي په واک کې وي یا که غواړئ د هغې تابع وي، لکه د بیلګې په توګه د یوه موټر د بنزین سوزول یا استعمالول د هغه د تللې چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی. دا ډول ساده اړیکې مو پخوا هم لوستلي او ګرافیکي مو په یوه کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کې انځور کړي.

بیلګې:

د یوه شي یا جنس قیمتت د هغه د خرڅ شوې ډیرئ یا سټ په واک کې دی یا تابع دی.

ټوله دباندنئ تودوخي د ورځې د وخت په واک کې ده.

د یوه بایسکلځغلونکي وهلې لار په مساوي چټکتیا یا سرعت د تلنې وخت په واک کې ده.

د موټر د بریک لار په روښانه توګه د هغه د چټکتیا په واک کې ده.

د یوه کوچني لوېدنه د هغه د عمر په واک ده.

د یوه ریاضي ازموېنې نمرې د لاس ته راوړول ټکو په لاس کې ده.

د یوې بډایئ د ګټې قیمت یا لاس ته راوړنه د په د مخه ټاکلې ګټې سره دوخت تیرېدنې په واک کې ده.

تمرین ۱ : د داسې یو په واکوالي یا تابعیت لپاره نورې بیلګې هم پیدا کړئ.

له پورته بیلګې څخه لیدل کیږي، چې هر دوه لویې سره تنظیمیږي.

ډیرئ یا سټ ← وخت خرڅشوې سټ په قیمت اغیزه لري.

د ورځې وخت ← تودوخي. د ورځې وخت په اندازه شوې تودوخي اغیز لري.

د لاس ته راړلو ټکو تعداد یا ګڼون ← نمرې د یوې ازموېنې نمرې د لاس ته راړلو ټکو اغیزمن کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين ۲ : د پاتې بيلګو لپاره او د هغو لپاره چې په تمرين ۱ کې مو ميندلي اړيکې پيدا کړئ.

دا يو له بل سره تظيم شوې لويې متحولې(اووښتونې يا **Variablen**) بلل کيږي.

دلته دې دې ته پام وشي، چې کوم په واکوالى يا تابعيت د دوي په منځ کې شتون لري.

د رياضي نمرې د ښوونکي له نظره د لاس ته راوړو ټکو په واک کې دي، مګر نه د نمرو د ټکو په واک کې.

سرې نمرې د بلواک يا تابع متحولو په حيث هم ښايي او د ټکو تعداد د خپلواک متحولو په حيث ښايي.

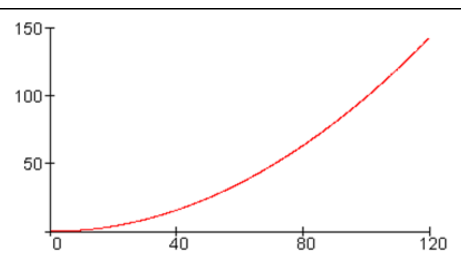
د ټکو او نمرو په منځ کې يو فنکشن يا بلواکيزې يا که غواړئ تابعيتي اړيکې شتون لري.

لکه د مخه درسونو څخه چې پوهيږو، ډېر امکانات شتون لري چې د دوه متحولو ترمنځ تابعيتي اړيکې تشريح کړو يا انځور کړو.

د مختلفو چټکتياو لپاره د بريک لار اندازه کيږي او يو ارزښت جدول ترتيبيږي.

چټکتيا په km/h(x)	20	40	60	80	100	120
د بريکنيولو لار په m(y)	4	16	36	64	100	144

که د جدول ارزښتونه په يوه پروت ولاړ – يا کواوردينات سيستم کې وکښل شي، نو سرې ګراف لاس ته راوړې وروسته له هغې چې ټکي يو له بل سره وتړل شي کوم چې د چټکتيا او بريکلار ترمنځ اړيکې تشريح کوي.



د پراته محور ، چې ابسخيز هم بلل کيږي د خپلواکي متحولې x ارزښتونه پيدا کيږي، په ولاړ محور چې اوردينات هم بل کيږي د بلواک متحولې $y = f(x)$ ارزښتونه ميندل کيږي.

تمرين ۳ : د ارزښت جدول سره سم په يوه مناسب پروتولاړ – يا کواورديناتسيستم کې اړونده ټکې وکاږئ او دا په يوه ګراف کې سره ونښلوئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بریکلار د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې وټا کئ.

پولیس یوه د90 m د بریک لار اندازه کوي؟

دا موټر د کومې چټکتیا یا سرعت سره خغلي؟

زيات وخت دا هم شونې ده چې فنکشنال یا تابیعي اړیکې د تابع مساوات له لارې انځور شي.

د بریکلار لپاره باور لري: $y = f(x) = 0{,}01\ x^2$

دلته $y = f(x)$ د بریکلار لپاره اینسوول شوی ا و دا وایي، چې y -کواوردینات په کواوردیناتسیستم کې د متحولې x په واک کې دی، یعنې د خپلواک متحولې x یو تابع دی یا په واک کې دی. تابعمساوات دی، کوم چې هغه قانون ورکوي، چې ارزښتونه د f(x) تابع یا بلواک متحولې جوړوي.

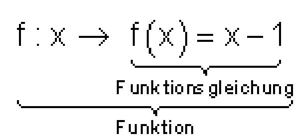
د تابع مساوات په ځای هم وایو چې $f(x) = 0{,}01\ x^2$ د تابع قانون دی.

تمرین ۴ : که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\ x^2$ وي، نو لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ؟

له دا تراوسه شوې کار څخه کیدی شي ووایو:

پیژند یا تعریف:

د یوه تابع سره د خپلواک متحولې x هر ارزښت ټیک یو تابع ارزښت f(x) باندې- یا سره تنظیمیږي. سرې دا هم وایي چې یوه تابع یو یواځنی نظم دی.



لیکندول: f

پورته لومړیې په پښتو: تابع برابرون

که په راتلونکې کې له یوه تابع غږیږو، نو د دې تشریح لپاره فقط تابع مساوات ورکوو، یعنې فقط ..... = f(x) . ی.

د تابع نوم f دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا $f(x) \leftarrow x$ لیکندود روښانه کوي، د هر x –ارزښت سره یو ټاکلی تابع ارزښت f(x)اړه لري.

تابع مساوات $f(x) = x - 1$ د شمیرلو قاعده یا قانون راکوي، چې تابع ارزښت څنګه جوړیږي.

د دې لپاره چې د نظم یواځنوالی بیا وښایو، لاندې بیلګه راوړو:

هر زده کوونکی یو ټاکلی د بوټانو لویوالی لري. دلته حتمي ده چې زیات زده کوونکي به یو- - یا هماغه د بوټانو لویوالی ولري.

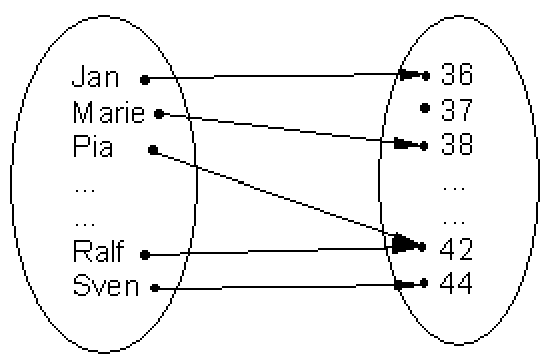
یواځنواوالی په زده کوونکو اړه لري ← د بوټانو لویوالی.

د متحولو سره کښلی یا لیکلې دا په دې معنا دی، چې د زده کوونکي نوم خپلواکه متحوله په ګوته کوي او هغه سره تنظیم شوې د بوټانو لویوالی بلواکه یا تابع متحوله جوړوی.

معکوس یا په څټ د زده کوونکو تنظیم یواځنی نه دی، ځکه چې ډېر زده کوونکي د بیلګې په توګه ۴۲ نمرې د بوټانو لویوالی لرودی شي.

دا ډول تابع د تابعمساوات نه لري، دا کیدی شي چې د ډېرئ څیرې یا ستعکس په څیر انځور شي.

یواځنی نظم(تابع یا فنکشن)

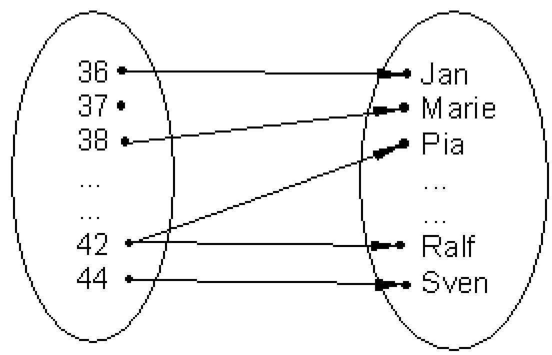


د بوټانولویوالی ډېرئ یاستې   د زده کوونکو ستې

(c) ketabton.com: The Digital Library

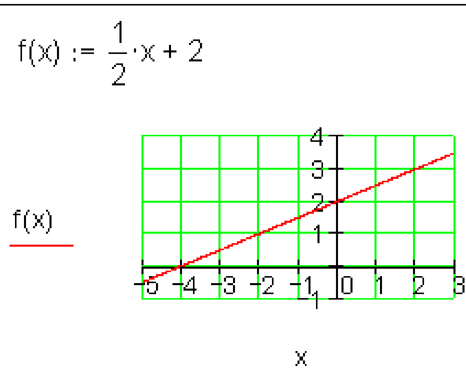
(ارزښت ډېرې)   (تعریفډېرې)

نظم يواځنی نه دی (تابع نه دی)

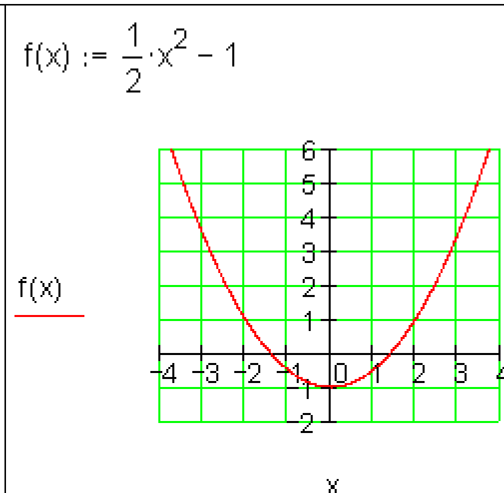


د دواړو ستونو بدلول

د رياضيکي توابعو او تابعمساواتو بيلګي (له کيڼ و ښي لورته)



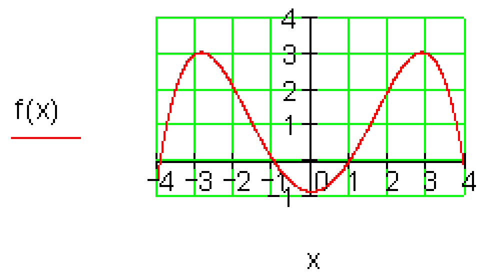
کرښيز مساوات(ګرښنه)



مربع مساوات(پارا بل)

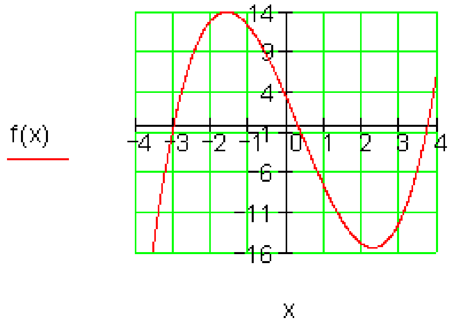
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-7}{120}\cdot x^4 + \frac{23}{24}\cdot x^2 - \frac{9}{10}$$



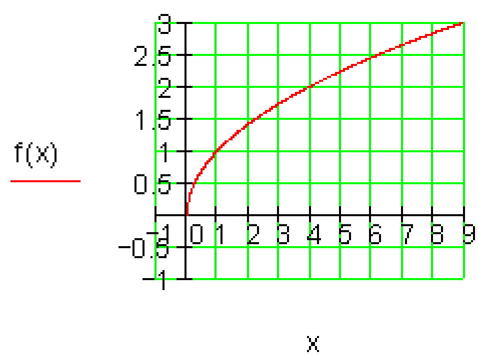
د ځلورمي درجي تولراشنل تابع

$$f(x) := x^3 - x^2 - 11x + 3$$



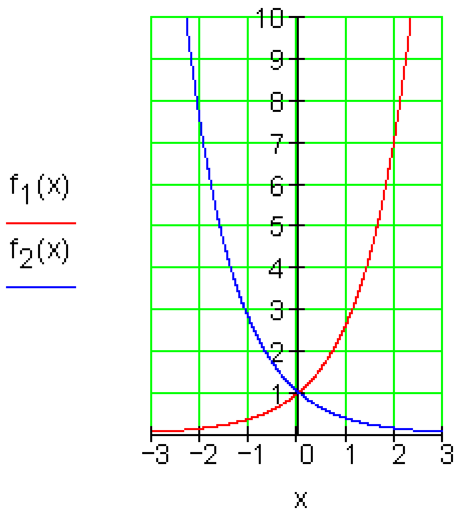
د دريمي
درجي
تولراشنل تابع

$$f(x) := \sqrt{x}$$



ريښه تابع

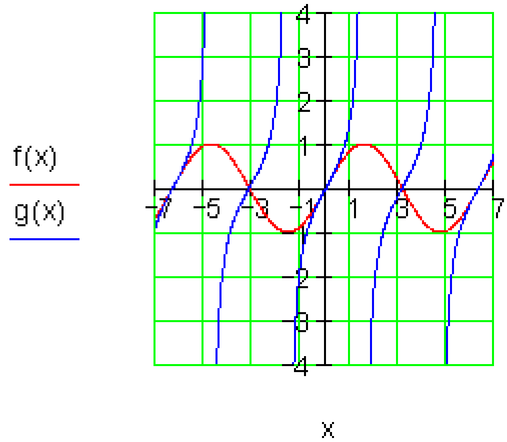
$$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{-x}$$



اكسپوننشل تابع

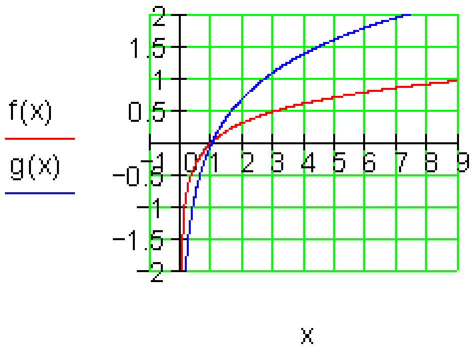
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := \sin(x) \qquad g(x) := \tan(x)$



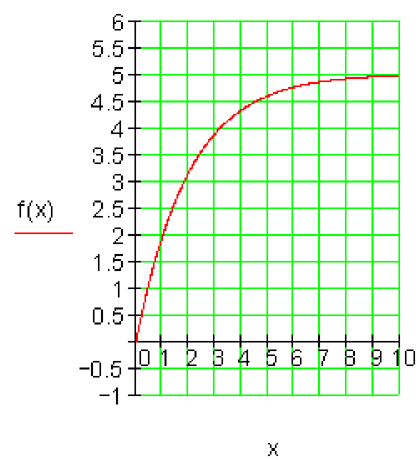
تريگونومتريکي(مثلثاتي) تابع

$f(x) := \log(x) \qquad g(x) := \ln(x)$



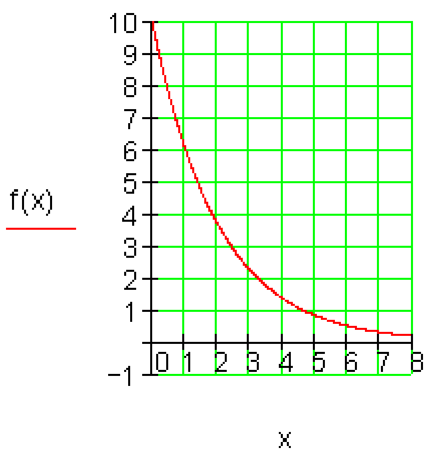
لوگاريتمتابع

$f(x) := 5\cdot\left(1 - e^{-0.5\cdot x}\right)$



اکسپوننشل مربتکره

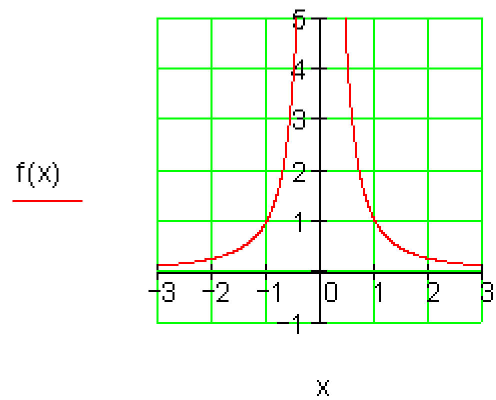
$f(x) := 10e^{-0.5\cdot x}$



اکسپيننشلي کښته کيدنه

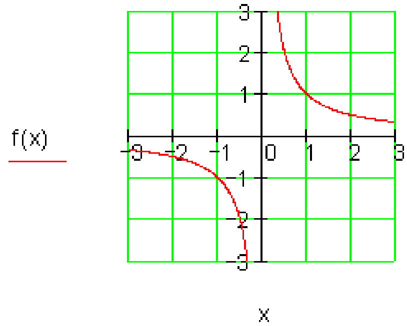
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := \frac{1}{x^2}$



های پارابول محورسیومتریک

$f(x) := \frac{1}{x}$



های پارابول ټکی سیومتریک

تعریف- او ارزښتډیرئ یا - سټ

تعریف(پیژند):

د یوه تابع تعدریفسټ **D** د ټولو خپلواکو متحولو ډیرئ یا سټ ده، د کومو لپاره چې تابع تعریف دی.

ارزښت ډیرئ **W** د ټولو تابع ارزښتونو- یا بلواکو - سټ ده، چې د D له توکو منځ ته راځي.

بیلګه:

$f(x) = \frac{1}{x}$ تعریفسټ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ تعریفسټ D=R

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره د وېش اجازه نه شته	Rد حقیقيي اعدادو ډېرئ ده

بیلګه:

$f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}\,;\, W = \mathbb{R}_+$ د تابع ارزښت په حیث فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه رامنځ ته کیږي	$f(x) = x + 1 \quad D = \mathbb{R}\,;\, W = \mathbb{R}$ تابع هر په خوښه ارزښت نیولی شي.

شمیرپو هنیزه لیکندود او د هغه معنا

$f(4) = 7$ د خپلواکو متحولو د ارزښت $x = 4$ لپاره د تابع ارزښت 7 دی.

دا د ارزښتجوړه (7 | 4)په کواوردیناتسیستم کې د ټکي (7 | 4) P کواوردیناتونه جوړوي.

$f(x) = 9$ غوښتونی د x -ارزښت دی، چې په هغه پورې تابع ارزښت 9 اړه لري.

$y = f(5)$ د $x = 5$ لپاره تابع ارزښت دی.

ټولګه:

یو یواځنی نظم، چې په هغه کې د تعریف ست D څخه خپلواکه متحوله x ټیک یو تابع ارزښت f(x) باندې تنظیم شي ځیرونه (چېموږ یې تابع بولو) یا فنکشن بلل کیږي.

تابعي(خپلواکیز) یا فنکشنلي اړوندوالی د یوه تابع مساوات(د بیلګې په توګه: f(x) = 2x + 1) سره لیکل –یا تشریح کیږي.

تابع مساوات کې د x –ارزښتونو په اینبولو سره د تابع ارزښت لاس ته راځي، چې دا د x -ارزښتونو سره یوه ارزښت جدول کې اینبولی یا انځورولی شو.

د ارزښتجدول هره جوړه په کواوردینات سیستم کې ټیک یو ټکی په ګوته کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په زياتو حالتونو کې کيدی شي دا منځ ته راغلي ټکي يوه ګراف ته سره رايوځای يا وتړل شي.

د ټول x - ارزښتونو ډېرئ، هغه چې په تابع مساوات کې ځای په ځای شي تعريف ډېرئ يا ـسټ بلل کيږي.

د ټول تابع ارزښتونو ډېرئ يا ـسټ، چې دلته منځ ته راځي، د تابع ارزښت ډېرئ W پورې اړه لري.

د تمرينونو حل

لومړی تمرين: د داسي بلواکوالي لپاره نوري بيلګې پيدا کړئ.

ځواب: - د يوه تيلسوزونکي ماشين قدرت د څرخونتعداد(د ماشين د څرخيدو تعداد) په واک کې دی.

- د يوې ګردئ يا دايرې سطحه د وړانګې يا شعاع په واک کې ده.

- د بريښنا پيسي د ثابت قيمت سره د انرژي يا بريښنا مصرف په واک کې ده.

دويم تمرين : د پاتې بيلګو او د هغو لپاره چې تاسو په لومړي تمرين کې وليدل ګډې اړيکي سره په فرمولبندي کې راوړي.

ځواب:

لار → د خوزښت وخت: په مساوي پاتې چټکتيا د خوزښت وخت په وهلې لار اغيز لري.

بريکلار → چټکتيا: د يوه موټر چټکتيا د بريکلار باندې اغيزه لري.

ټوله ګټه → د تيريدني وخت: د سرمايي ايښوني وخت د ګټې لاس ته راوړنه باندې اغيزه لري.

وده → عمر: د کوچني عمر د هغه په وده اغيزه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

قدرت ← څرخونتعداد: د یوه سوزونکي ماشین د تیلو سوزیدنه د هغه په څرخونتعداد پورې اړه لري.

سطحه ← وړانګه : د ګردئ یا دایرې وړانګه د دایرې سطحه باندې اغیز لري.

د بریښنا حساب ← انرژي سټ: د سوزولې بریښنا یا انرژئ سټ یا ډېرئ د بریښنا بل(هغه د مصارفو کاغز) اغیزمن کوي.

دریم تمرین:په یو مناسب کواوردیناتسیستم کې د ارزښت جدول اړوند ټکي وکاږئ او دا یوه ګراف ته سره وتړئ.

د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې بریکلار پیدا کړئ.

پولیس یوه د 90 m بریکلار کچوي. دا موټر دکومې چټکتیا سره تلی؟

ځواب:

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

تلنلار: په کواوردیناتسیستم یا پروتولاړ سیستم کې د x -محور(ابسڅیزا) د خپلواکو متحولو ډېرئ نمایندګي کوي، د y –محور (اوردینات) د بلواک یا تابع متحولو نماینده ده.

د مخه له دې چې په یوه کواوردیناتسیستم کې ارزښتونه لیکل –یا کښل کیږي باید وکتل شي، چې کومه خپلواک- او کومه بلواک- یا تابع متحوله ده.

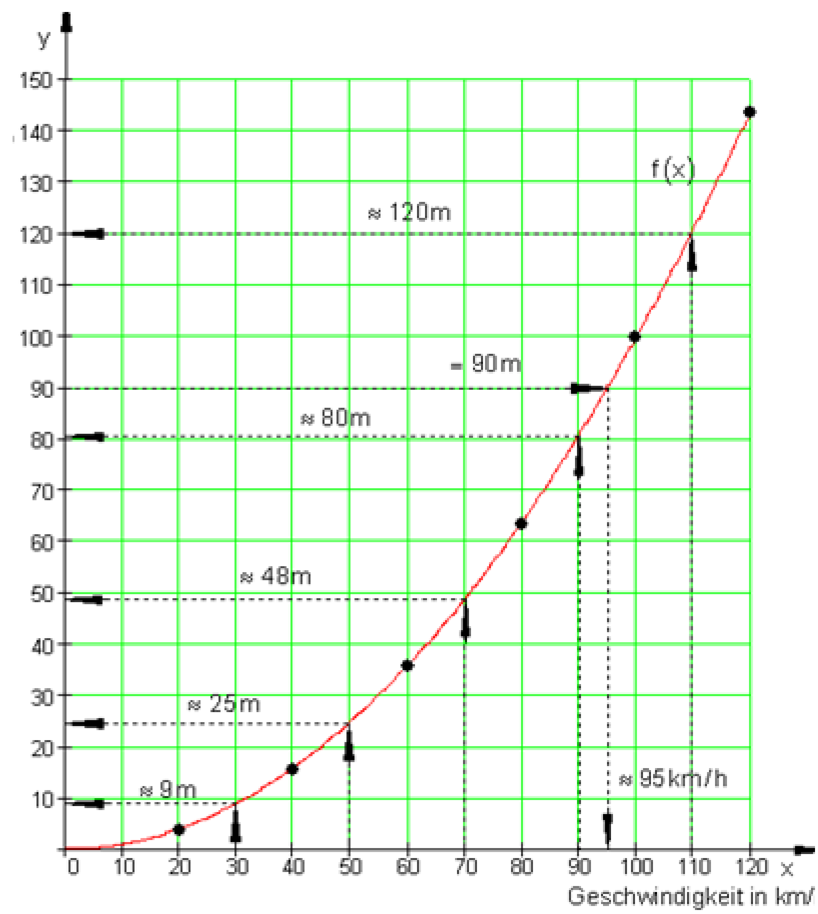
(c) ketabton.com: The Digital Library

پسي دا هم غوره ده، چې د کچوني لپاره يوو ښه کچونی يا هغه اله چې اندازه پرې کچوو بايد ومومو.
د دې لپاره د جدول لوي او کوچني ارزښتونه کتل کيږي او پرېکړه کيږي چ دواړه محورونه په څو برخو بايد وويشل شي.

وروسته له هغې چې ټول په جدول کې ټکي په کواورديناتسيستم کې ځای په ځای شوي، نو بيا دا ټکي د ګراف په توګه سره ترل – يا نښلول کيږي

کيدی شي له ګراف څخه د داسې x -ارزښتونو لپاره هغه لړ يا ډېر تابع ارزښتونه هم ولوستل شي، چې په ارزښت جدول کې مخ ته نه راځي.

معکوس کيدی شي د يوه ټاکلي تابعارزښت اړونده x -ارزښت ولوستل شي. د دې نتيجو ټيکوالی د دې په واک کې دی، چې ګراف څومره ټيک کښل شوی دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کي: پروت: چټکتیا په کیلومتر. ولاړ:بریکلار په متر

ځلورم تمرین:

لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ، که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\,x^2$ وي.

ځواب:

تابعارزښتونه داسي شمیرلکیږي، چي اړونده د x ارزښتونه په تابع مساوات کي کیښوول شي.

$$f(x) = 0{,}01x^2 = \frac{1}{100}x^2$$

$$x = 30 \Rightarrow f(30) = 0{,}01 \cdot 30^2 = 0{,}01 \cdot 900 = 9$$

$$x = 50 \Rightarrow f(50) = 0{,}01 \cdot 50^2 = 0{,}01 \cdot 2500 = 25$$

$$x = 70 \Rightarrow f(70) = 0{,}01 \cdot 70^2 = 0{,}01 \cdot 4900 = 49$$

$$x = 90 \Rightarrow f(90) = 0{,}01 \cdot 90^2 = 0{,}01 \cdot 8100 = 81$$

$$x = 110 \Rightarrow f(110) = 0{,}01 \cdot 110^2 = 0{,}01 \cdot 12100 = 121$$

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

بریکلار 90 m کچ شوي ، غواړو چټکتیا پیدا کړو.

پیل: $f(x) = 90 \Leftrightarrow 0{,}01x^2 = 90$ دا مساوات په x پسې ځواب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0{,}01x^2 = 90 \,|\!: 0{,}01 \Leftrightarrow x^2 = 9000 \,|\, \sqrt{\;}$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{9000} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{900 \cdot 10} \Leftrightarrow |x| = 30\sqrt{10}$$

ارزښت حل کړئ.

$$|x| = 30\sqrt{10} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 30 \cdot \sqrt{10} \approx \pm 94{,}9$$

نسبت و پوښتني ته فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه موخه ور دي، څکه چي موږ مثبته چټکتیا په پام کې نیسو. د 90 m بریکلار سره د موټر چټکتیا 94,9 km/h وه.

یادونه:لومړی شمیرنه تیک ارزښتونه راکوي، سره له دې هم موخه وردی، چې دا شمیرل شوي ارزښتونه په ګراف کې یا له ګراف څخه هم د لوستلو له لارې کنترول کړو.

پوښتني

تابع I

لومړی:

ټول ټکي په کواوردینات سیستم کې په نخښه کړئ، چې کواوردینات یې ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

الف- $y \le -1 \wedge x \ge 1$ ب- $y \in \mathbb{R} \wedge -2 \le x \le 3$ پ- $x \in \mathbb{R} \wedge y = 2$

ت - $0 \le x \le 4 \wedge y \ge 0$ ټ- $|x| \ge 1{,}5 \wedge |y| \le 2$ ث- $y > 0 \wedge x = -1$

دویم: په مناسب کواوردینات سیستم کې لاندې ټکي رسم کړئ.

$$A(40\,|\,220);\ B(10\,|\,250);\ C(200\,|\,300);\ D(80\,|\,240)$$

ایا د x – او y -کواوردیناتو ترمنځ کومې اړیکې شته؟ د دې لپاره یو ترم ولیکئ او نور درې ټکي ورکړئ.

دریم: د ټکو ځای وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- ټکي $P_t\left(t-1\,|\,\frac{1}{t+1}\right)$ د t€R کوم ارزښت په لومړئ څلورئکي پروت دی؟

ب- ټکي $Q_t\left(t\,|\,t^2-1\right)$ د t€R کوم ارزښت لپاره دx محور کښته لور ته پرته ده؟

څلورم:

د ټکوډېرئ یا ـسټ $A=\left\{(1|\,3);\left(2|\,\frac{3}{2}\right);(3\,|\,1);\left(4\,|\,\frac{3}{4}\right);\ldots\right\}$ ورکړ شوی دی.

د A نور دريٖ توکي ورکړئ او دا ټکي په یوه کواوردینات سیتم کي وکاږئ. ایا د x- او y -کواوردیناتونو ترمنځ اړیکی شته؟

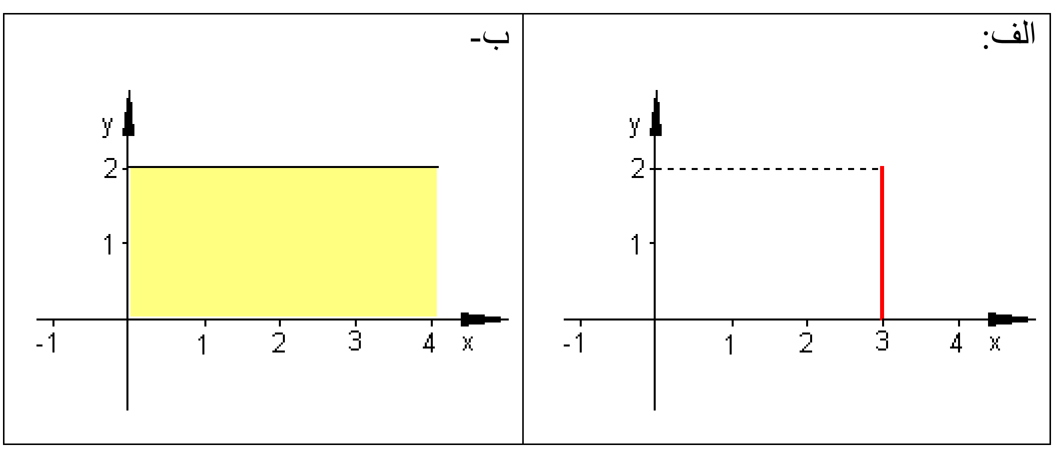
پنځم: یو ټکی $P\left(t\,|\,\frac{t}{2}+3\right)$ د t€R سره ورکړشوی دی.

د t لپاره څه ارزښتونه ورکړي او دا د دې اړونده ټکي په یوه کواوردینات سیستم کي وکاږئ.

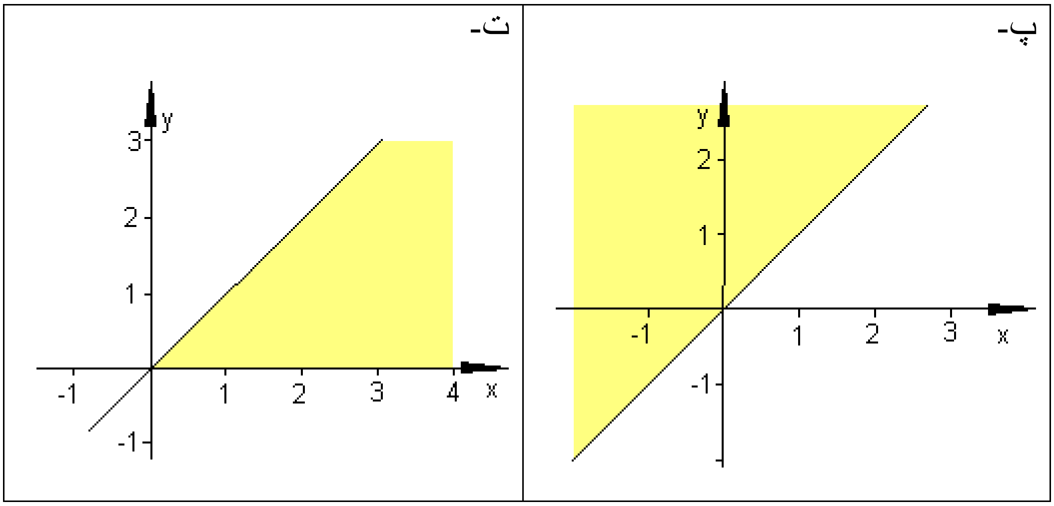
د کومو t -ارزښتونو لپاره باور لري:

د ټکي P د x -کواوردینات د ټکي د y -کواوردینات سره برابر دي؟

شپږم: په نخښه شوي کربنه او همداسي سطحه تشریح کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library



پوښتنې

توابع II

لومړی

ښاغلی برګ د یوه ملفون(لاسي یا لاسي تلفون) قرارداد د لاندې شرایطو سره وکړ:

د میاشتې € 20 ، د تلفون قیمت په دقیقه € 0,35 .

الف- که دی 40, 80 یا 120 دقیقې تلفون وکړي، نو میاشتنی حساب به یې څومره جګ وي؟

ب - لګښت لپاره یو ترم ولیکئ چې په دقیقه کې د خبرو د دوام په واک کې وي.

پ – اړیکې ګرافیکي انځور کړئ.

دویم:یوه الوتکه د سوزونموادو کیروزین 10500 Liter لیتره زخیره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 100 km دا 180 Liter سوزوي.

الف- د په لیتر مصرف جدول جوړ کړئ. یو واټن له 0 km تر 5000 km پورې وټاکئ.

ب – اړیکې یې ګرافیکي څور کړئ.

پ-له څومره کیلومتره وروسته به زخیره تمامه شوې وی؟

ت - د الوتنې د لار ترم د ټانک د خوندیونې په واکوالي کې وټاکئ.

دریم: یو د شمیراړونې جدول جوړ کړئ، چې ^{0} څلزیوس (^{0}C) په فارنهایت(^{0}F) اړوي د 20^0C - او 60^0C په ساحه یا ورشو کې. د دې لپاره اړین داتا تشریح کړئ. اړیکې ګرافیکي انځور کړئ. دا اړیکې کوم ترم په ګوته کوي؟ د ا د تبې تودوخې کچونه (ترمومتر) د ناروغ د تبې په اندازه کئ چې ده ایا دا حرارت یا تودوخي د ژوند خطر لري؟

څلورم: یوه د مالونو لیږلو مغازه غواړي لګښت له امله یو د تحفې پاکټ ولیږي. د پاکټولو تخنیکې پرابلم له امله یې یو اړخ د 35 cm سره کره ټاکلی دی. د پوست د لګښت نظم باید په پام کې نیول شوی وي

د لګښت نظم: مربع ډوله پاکټونه دننه په هیواد کې.

خورا کوچنۍ کتله(یا بهتره ډکی): اوږدوالی 15 cm ، سور 11 cm ، جګوالی1 cm .

خورا جګه کتله: اوږدوالی 60 cm ، سور 30 cm ، لوړوالی 15 cm یا اوږدوالی جمعه یې سور جمعه یې یا په ورزیات جګوالی = 90 cm. خورا زیات وزن 2 kg.

الف- د یوه ډکي یاحجم $V = 21\ dm^3$ لپاره د سور او جګوالي ترمنځ اړیکې وټاکي.

ب- دا ماکسیمال رسیدلوړ ډکی یا حجم څومره لوی دی؟

پنځم: فرمول ورکړشوی دی.

الف- ش څنګه تغیر خوري، که کوچنی شي.

ب- ایا لاندې اړیکې به د فرمول له لارې تشریح شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

A : د کرايې موټر ټول لګښت د عدد a د تللی کیلو متر او د هغه د یوه کیلو متر د قیمت c لپاره.

B : د ودرېدلو لار یا واټن a د بریکلارb او عکس العمل لارc ځخه شمیرل کیږي.

پ-شي اړیکي ورکړئ چې د فرمول له لارې تشریح کیدی شي یا روښانه کیدی شي.

شپږم: یو ولاړګوډیز یا مستطیل U = 12 cm چاپیریال یا محیط لري.

الف- اړخونه ځنګه یو د بل په واک کې کیدی شي.

ب- یو ترم وټاکئ، چې بلواکوالی د اړخ a ځخه ورکوي یا د اړخ a په واک کې یا تابع دی.

پ- د a د کوم ارزښت لپاره سطحه خورا لویه وي؟

پوښتنې

توابع III

لومړی: توابع f(x) ورکړ شوي. یو مناسب ازښتجدول وکاږئ. دې ته ا ړوند ګراف رسم کړئ.

الف - $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب - $f(x) = x^2$ پ - $f(x) = \frac{1}{x+3}$ ت- $f(x) = 3^x$

دویم: فکر وکړئ، چې ایا یو ،،یواځنی نیظم،،د x →y لپاره مخ ته لرو: $x^2+y^2=1$

دریم: ټکی P ورکړ شوی دی. ایا یوه تابع مخ ته لرو؟ که هو، نو نظمقانو وټکئ او خورا لویه تعریفسټ یا – ډېرئ هم وټاکئ.

$$P = \left\{ (2|1); \left(5|\frac{1}{4}\right); \left(10|\frac{1}{9}\right); \left(25|\frac{1}{24}\right); .....\right\}$$

څلورم: یو ارزښتجدول ولیکئ او د تابع ګراف وکاږئ:

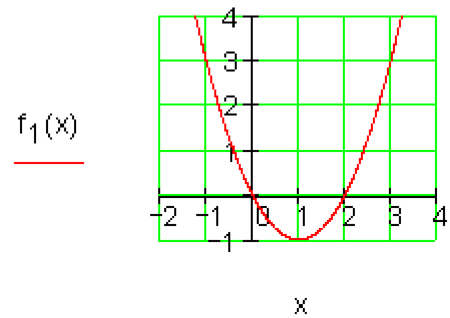
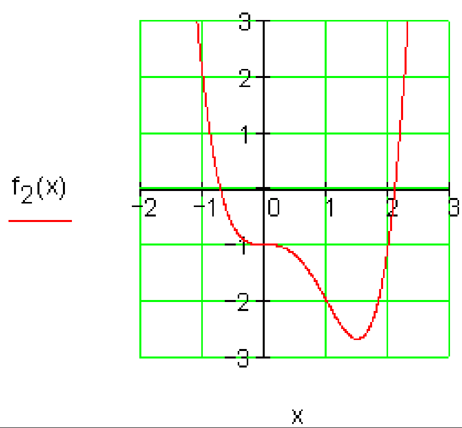
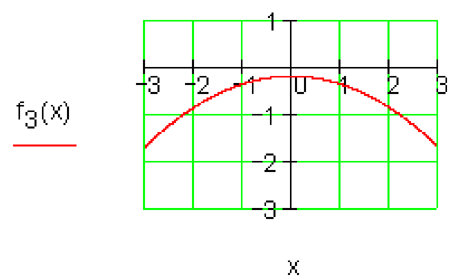
$$f(x) = \frac{1}{8}\left(x^3 - 2x - 4\right);\ x \in \mathbb{R}$$

الف- د جبشمیري سره f (3) او f (- 2) وشمیرئ.
ب- په کوم ځای کې د تابع ارزښت صفر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت 1 دی؟
ت-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت کمیز یا منفي دی؟
ټ-د کومو x -ارزښتونو لپاره باور لري:1 > f (x) کړئ، چې د کوم تابع لپاره باور لري:

پنځم: د درې توابعو f1, f2, f3 ګراف ورکړ شوی دی. پرېکړه وکړئ:

الف- د تابع ارزښتونه هر چیرته صفر دي. ب- توابع په انټروال [1 ; 0,5] منفي یا کمیز دي پ-.f (2) < f (0) ت-.f (0) = - 1 ټ-.f (- 2) = f (2)	
	

پوښتنې

توابع **IV**

لومړی: تابع f ورکړ شوې د f(x) =-0,2(2-x); x€R سره

پرېکړه وکړئ، چې ایا لاندې وېناوې رښتیا او که نارښتیا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیل ځواب مدلل کړئ.

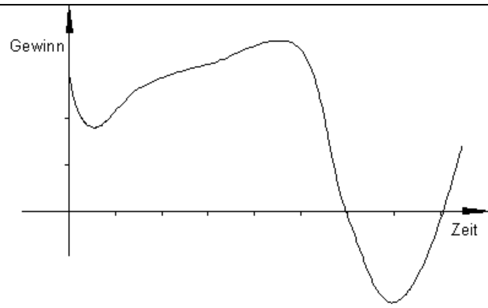
الف- د تابع ارزښتونه زیاتیز یا مثبت دي د ټول x – ارزښتونو لپاره.

ب- $f(x) < 0$ د ټولو $x€R$ لپاره.

پ- $f (x)$ د $x = 2$ لپاره منفي دی.

ت- یو ځای u شتون لري، چې د هغه لپاره $f (u) = f (u + 1)$ باور لري.

دویم: د رسم شوي تابعګراف تلنه تشریح کړئ. دلته هغه غوره ټکي په نخښخه کړئ. هغه ټکي، انتروالونه روښانه کړی یا تشریح کړئ په کومو کي چې ته اقتصادي پسمنظر(د شاته پراته دلیل) فرمولبندي کوې.



کواوردیناتسیستم کي : پروت: وخت. ولاړ: ګټه

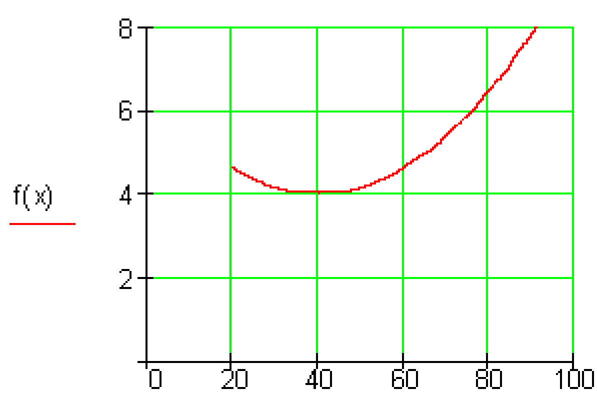
دریم: د یوه موټر د تیلو سوزول د چټکتیا په واک کي یا تابع دی. دا په ځنګ کي ځیره د تیلو سوزول ښایي په لیتر په سل کیلو متر کي او د چټکتیا په واکوالي کي، که سرې په څلورم ګیر Gang کي لاړ شي.

الف- کره یا منحني روښانه کره.

ب- په کومه چټکتیا کي استعمال ۶ لیتره په سل کیلومتر کي دی؟

پ- په کومه چټکتیا کي د تیلو سوزښت خورا کم دی؟

ت- کره به ځنګه وځغلي، که په دریم ګیر کي سرې لاړ شي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د لمبا په ډنډ کې $40\ m^3$ اوبه دي. دا اوبه د ډنډ د پاکوالي له امله د پمپ کولو سره وباسي، چې په دقیقه کې 350 Liter لیتره اوبه وځي.

الف- یو ترم د پاتې حجم یا ډکې لپاره په m^3 وټاکئ.

ب- څومره m^3 د ۲۰ دقیقو وروسته په لمباډنډ کې لا پاتې ي.

پوښتنې

توابع V

لومړی:د تابع $f(x)$ماکسیمال تعریفورشو D_{max} پیدا کړئ

الف- $f(x) = 2 - 3x$ ب - $f(x) = \sqrt{2x - 3}$

ث- $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ت - $f(x) = -x^2 + 1$

دویم: د تابع $f(x)$ ارزښتورشو وټاکئ د $D = D_{max}$ سره.

الف- $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$ ب - $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

پ - $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ت - $f(x) = x^2 - 5$

دریم: تابع $f(x)$ ورکړ شوې ده. ماکسیمال تعریفورشو D_{max} وټاکئ. د $f(x)$ګراف وکاږئ.

د $x \in \left\{k\,;\, -\frac{2}{k}\,;\, k+1\,;\, k-4\right\}$ لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

الف- $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب - $f(x) = 2x - \frac{2}{x}$ پ - $f(x) = x - x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

ت - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ ټ - $f(x)=\sqrt{4-2x}$ ث - $f(x)=2^x-1$

څلورم: تابع $f(x)$ د $f(x)x^3$ سره ورکړشوې ده.

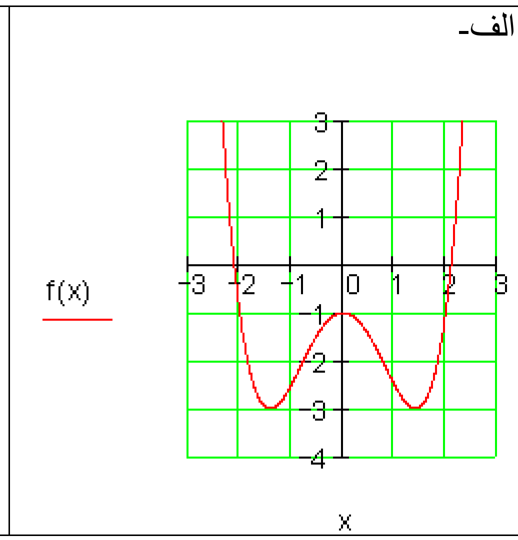
الف- ماکسيمال تعريفورشو D او ارزښتورشوW ورکړئ.

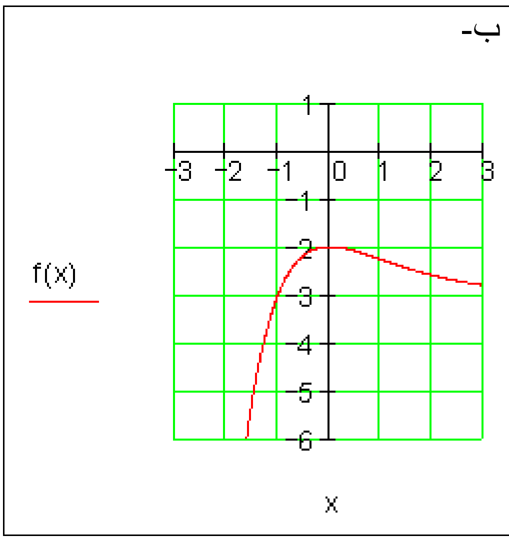
ب- د کوم $x \in D$ لپاره باور $f(x)=81$ لري؟

پ-د کوم $x \in D$ لپاره باور $f(x)\geq 9$لري؟

ت- و ښايئ: $f(x+1)=3.f(x)$ د ټولو $x \in D$ لپاره.

پنځم: تابع $f(x)$ د $D = IR$ لپاره تعريف ده. د رسمونو څخه ارزښت ډېرئ وښايئ.





پوښتنې

توابع VI

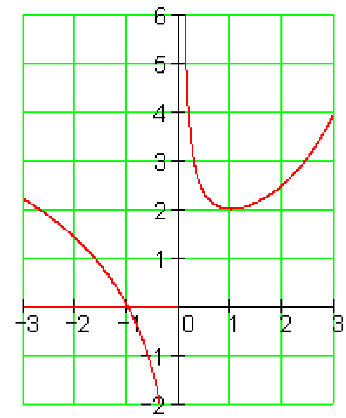
لومړی: د تابع$f(x)$ ارزښتښت د جبشميري سره وشميرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

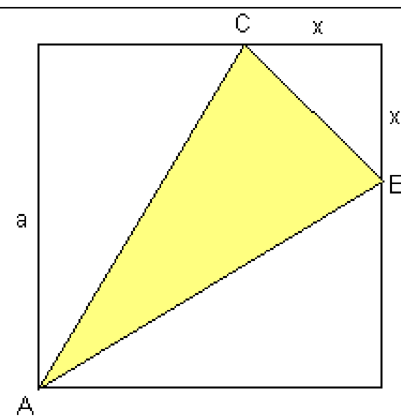
سرلیک

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{2}{5}x^3-2$$ د D=R سره.

دويم:

	دويم: ترڅنګ کړه د تابع f(x) ګراف دی؟ ايا f(x) د ټولو x€R لپاره تعريف دی؟ د x د کومو ارزښتونو لپاره تابع ارزښت - له 2 لوي دی؟ - له صفرکوچنی دی؟

دريم:

	يوه مربع يا څلورې د اړخ اوږدوالي a = 5 cm سره ورکړ شوې ده. د مثلث يا درېګوديABC د سطحې ترم A(x) وټاکئ

څلورم: د يوه مالک ټول لګښت K د يوه لاسته راوړني سټ x په واکوالي کې په سټ واحد يا ډېرئ يوون (ME) د ترم له لارې ليکل کيږي

$$K(x)=0{,}01x^3-x^2+100x+720$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- د x -ارزښتونو لپاره تر 100 پورې ټول لګښت وشمیرئ. یو مناسبتلنلاري ډول وټاکئ او د ټول لګښت لیدخیره رسم کړئ.

ب- د هر سټ – یا ډېري واحد خرڅلاو99 پیسپواحده دی. لاس ته راوني (د پیسو ځومره دي، که x(ME د سټ واحد) په بازار کې خرڅ شي؟

په لرلي کواوردیناتسیستم کې د خرڅلاو(پیسو) د لیدلو ځیره و کاږئ.

پ-د لیدځیرې ځخه ولولئ:

په کومه ورشو یا ساحه کې ګټه منځ ته راځي؟ د کوم x –ارزښتونو سره به خورا لویه ګټه لاس ته راشي؟

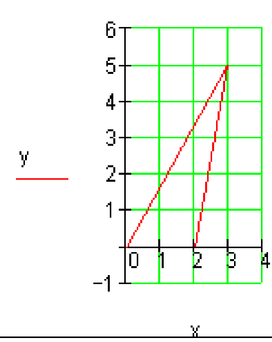
پوښتنې

توابعVII

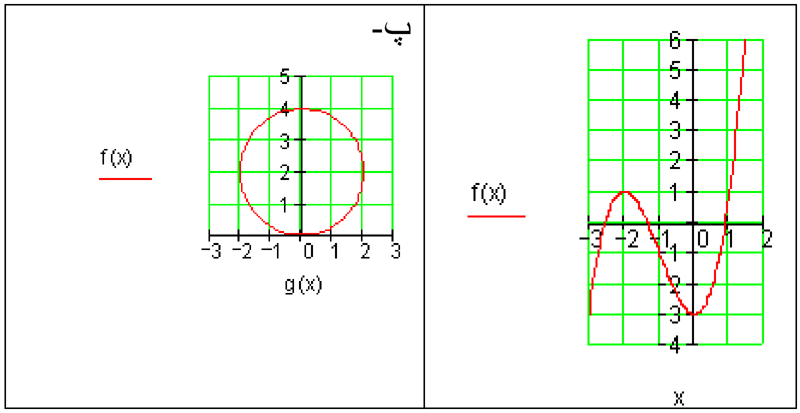
لومړی: توابع f(x) ورکړشوي دي. یو مناسب ارزښت جدول جوړ کړئ. له دې سره اړوند ګراف وکاږئ.

الف- $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب- $f(x) = x^2$

دویم: کوم ګراف په تابع $f : x \to f(x)$ پورې اړه لري؟ دلیل یې راوړئ.

الف-	ب –
	

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریم:د شمیرپوهنیز لنډ لیکدود سره یې فرمولبندي کړئ.

الف- په ځای3 کې تابع f(x) تابعارزښت 12 لري.

ب- د تابع f(x) له لارې د x -ارزښت سره عدد 4- تنظیمیږي.

پ-ټکی P (2 | 5) د f(x) په لیدخیره باندې پروت دی.

ت- f(x) د کومو ابسخیزا یا پراته ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 4 لري.

ټ- د f(x) تابع تابع ارزښت له 7لوی دی د ټول $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

ث- تابع f(x) د 17- ځای کې تا بع ارزښت 9 نیسي.

ج- توابع f او g د په ځای کې همغه ارزښت غوره کوي.

چ- په کوم ځای x کې fد تابعارزښت gد له تابعارزښت څخه کوچنی دی؟

ح- د تابع f(x) د تابع ارزښت برابر 5 دی د ټولو $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

خ- د یوه کږې ټکي K_f کواوردیناتونه سره سر خوري.

څلورم: د یوه نظم لپاره د یوې روځنۍ بیلګې نوم واخلئ، چې هغه تابع وي یا تابع نه وي.

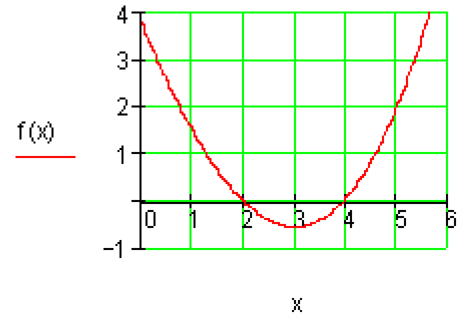
پنځم: دا ترڅنګ کړه یا منحني د تابع f(x) ګراف دی. له ګراف څخه ولولئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-د تابع ارزښت په ځای 5 کې

ب- یو ځای د $f(x)$ سره.

پ-په کوم ورشو $f(x) > 0$ باور لري؟



شيپږم:کوم ارزښت جدول یوه تابع پوري اړه لري؟

الف -

x	−1	0	1	2	3
y	4	0	−2	4	4

ب -

x	−1	0	3	3	4
y	8	7	2	4	5

توابع او په ښت - یا معکوس توابع

تولیز:

د f د نظم قانون د تابع مساوات له لارې افاده کیږي، لکه د بیلګې په توګه

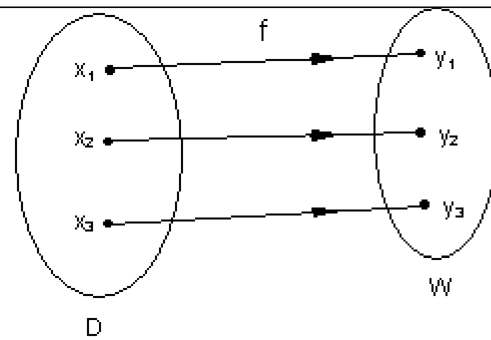
$$f = \{(x|y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{D \times W}$$

یا په لنډه توګه:$y=f(x)=2x+3$

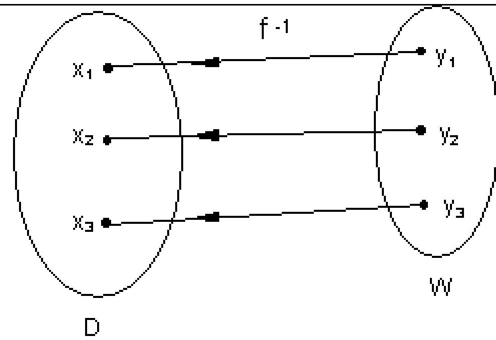
د یوه تابع د یو-یواځنوالي د f^{-1} یو-یواځنی نظم هم شتون لري.

دا نظم معکوس تابع یا په ښت تابع یا انورز inverse تابع بلل کیږي، لکه د بیلګې په توګه.

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



د کرښيز توابعو معکوس توابع

تابع: $y = f(x) = 2x + 3$ $x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$ $\Leftrightarrow 2y + 3 = x \mid -3$ $\Leftrightarrow 2y = x - 3 \mid : 2$ $\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ معکوس تابع: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$	تابع $y = f(x) = 2x + 3$ ورکړ شوی غوښتنه معکوس تابع f^{-1} او د هغه ګراف ده تابع **f** جګوالی $m = 2$ لري. دا د خپل ګراف سره پروت محور په ټکي P_x (-1,5 | 0) کې غوڅوي او ولاړ محور یا اوردینات په ټکي P_y (0 | 3) کې غوڅوي. د هغه ګراف کرښه ده. که د تابع اووښتوني یا متحولې یو له بل سره بدلې شي او د y پسې په ورته توګه بڼه بدلون منځ ته راشي، نو سړی معکوس تابع لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معکوس تابع ګراف د تابع د ګراف هندارونه(انعکاس) ده په 45^0 - محور باندې.

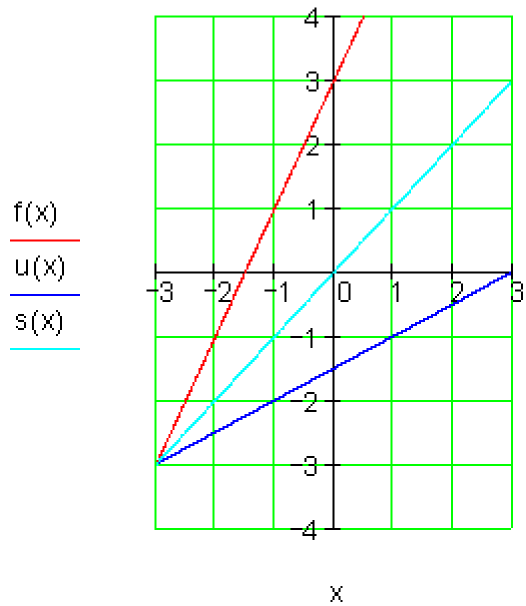
په تولیزه توګه باور لري:

تابع $y = f(x) = a_1 x + a_0$

معکوس تابع

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a_1}x + \frac{a_0}{a_1}$$

د ساده والي له امله معکوس تابع u(x) بولو.



مربع توابع

څلورى- یا مربع توابعو ته ننوتنه یا پیل

ننوتنه یا پیل

هرڅوک چې موټر زده کوي، باید پوه وي، جې د بریک په وخت کې په پاخه سرک د بریک نیولو او د موټر دریدځای په منځ کې لار یا واټن څنګه سره یوځای کیدی شي یا جمعه کیدی شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې موټر قانون سره سم له چټکتیا(سرعت) v په km/h (کيلومتر په ساعت) د عکس العمل لار r د بریک لار b په متر شمیرلکیدی شي.

پام (خبراوسه) : د بیلګې په توګه د المان پخوانی او له څخه نوي قانون.

له څخه د تملار په وچ اسفالت شوي سرک د پل بریکلار سره شمیرل کیږي.

د برېک لار $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ د عکس العمل لار $r = \frac{v}{10}\cdot 3$

یادونه: د څه وخت را په دې خوا په جرمني کې د بریکلار لپاره دا فرمول باور لري.:

$$b = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v}{10}\right)^2$$

د بریک همدا ډول د عکس العمل لار په متر (m) راوځي، که چټکتیا یا سرعت په کیلومتر په ساعت (km/h)وي.

الف – د دواړو حالتونو لپاره د s = f(v) تابع مساوات و ټاکی ، د کوم لپاره چې په هره تللي چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب - د تابع مشاوات s = f(v) د دواړو حالتونو لپاره د وهل شوی سرعت v = 0, 10, 20, 30, ... 100 km/h سره د ه یوه د ودرېد - یا توقف لار چې شمیرل کیږي.

پ : په کواوردیناتسیستم کې یا د وضعیه قیمتسیستم کې ګراف رسم کړی.

ت: ټوله لاس ته راوړې نتیجه تشریح کړی.

د پرابلم حل: Problemlösung:

الف: د تابع مساوات:

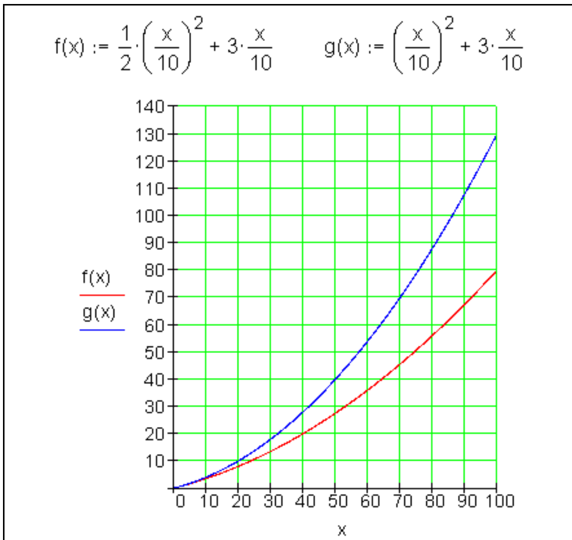
$f(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10}\cdot 3 = \frac{1}{100}v^2 + \frac{3}{10}v$	زوړ قانون:
$f(v) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10}\cdot 3 = \frac{1}{200}v^2 + \frac{3}{10}v$	نوی قانون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - : ارزښتجدول(په کيلو متر په ساعت کې)

v (in km/h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
f(v) (in m)	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	alt
f(v) (in m)	0	3,5	8	13,5	20	27,5	36	45,5	56	67,5	80	neu

پ - ګرافونه



د x محور هر ه وهل شوي لار په km/h په ګوته کوي.

د y - محور د هر همغه د توقفلار په m په ګوته کوي.

ت – کومنتار

د نوي نظم وروسته د د چټکتيا(سرعت) زياتيدني توپير تل زياتيږي. د 50 km/h چټکتيا سره نوی د تم کيدلو لار 27,5 m ده، دا د زړې لار40 m نږدې 69% ده. په 100 km/h دا نوي لار نوره فقط ده، دا د زړې 130 m لارېا نږدې 61% ده. د بريک نيولو لار کمېدنه د بريک ښه کيدو(ABS) سره موخه وره ده.

د تابع مساوات د ټيک پامورتيا او ګراف له امله موږ کره کوو، چې دا نه کرښيز مساوات دی او نه يوه کرښه. انځوروي.

د تابع مساوات لاندې بڼه لري:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

داسې تابع مربع تابع بولو او يا هم د2 –مې درجې ټول(تام) راشنل توابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګرافونه يې پارابول بلل کيږي.

تمرينونه:

د لاندې پارابولونو ګرافونه وکاږئ.

د دې لپاره ارزښت جدول وليکئ

اول - $f(x) = x^2 + 4x - 5$ دويم $f(x) = x^2 + 2x + 5$

دريم - $f(x) = -x^2 + x + 6$ څلورم - $f(x) = x^2 - x$

پنځم - $f(x) = x^2 - \frac{1}{9}$ شپږم - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ اتم - $f(x) = -2x^2 + 8x - 11$

نهم م- $f(x) = 3x^2 - 3x$ لسم - $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{2}x + 10$

نورمال پارابل، بنه ځل يا - ضريب او راکښنې

د کار قرارداد:

د a2 د مختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x) = a_2x^2$ وڅيرئ او ګراف په وضعيه قيمت سيستم کې وکاږئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$

د انځور شوي پارابل تابع مساوات یو له بل د x^2 ضریب a_2 له امله توپیروي.

$f_1(x) = x^2$

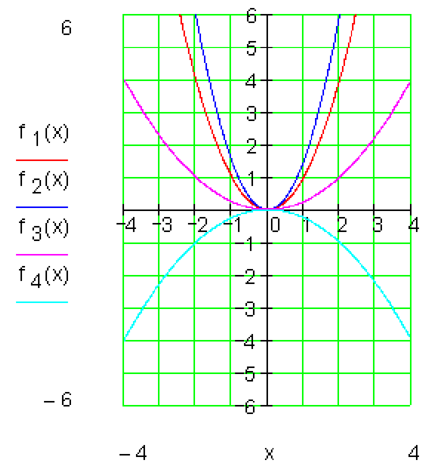
$f_2(x) = \frac{3}{2}x^2$

$f_3(x) = \frac{1}{4}x^2$

$f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$

دا ضریب a_2 د پارابل د بنې لپاره مسول او له دې امله د بنې ضریب بلل کیږي.

د تقاطع ټکی S وضعیه قیمتونه S (0 | 0) لري.



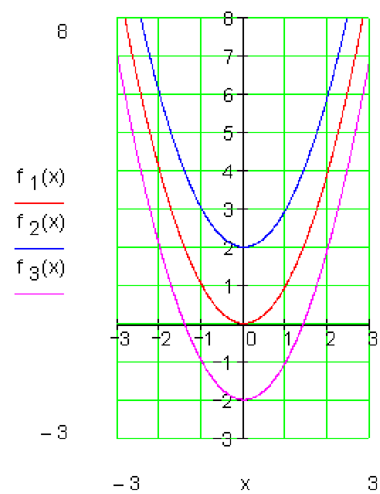
بنه ضریب د پارابل قوارې یا شکل ته څنګه تغیر ورکوي؟

ضریب بنې		د پارابول په نخښنه ونه
$a = 1$	→	نورمال پارابو ل
$a > 1$	→	غزېدلی پارابول
$0 < a < 1$	→	کېکاږلی پارابول
$a = -1$	→	پهx محور هنداره شوی نورمال پارابول
$a < -1$	→	غزېدلی پارابول، په x -محور هنداره شوی
$-1 < a < 0$	→	کیکاږلی پاربول، په x –محور هنداره شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کار قرارداد:

د a_0 د مختلفو ارزښتونو لپاره د $f(x) = x^2 + a_n$ تابع مطالع کړی او په وضعيه قيمتسيستم کې يې ګراف رسم کړی: $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$

دا يو راکښلی نورمال پارابل دی، چې ککرئ ټکی(د ر آس نقطه) S دa_0 په واحدونو راکښل شوې ده. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$ راکښنه دy محور په اوږدوالي باندې صورت نيسي ، چېرته چې د راکښني لور د a_0د مخنخښي له لارې ټاکل کيدی شي. د تقاطع ټکی S کواوردينات $S (0 \mid a_0)$ لري. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$	

د کار ورکوني قرارداد:

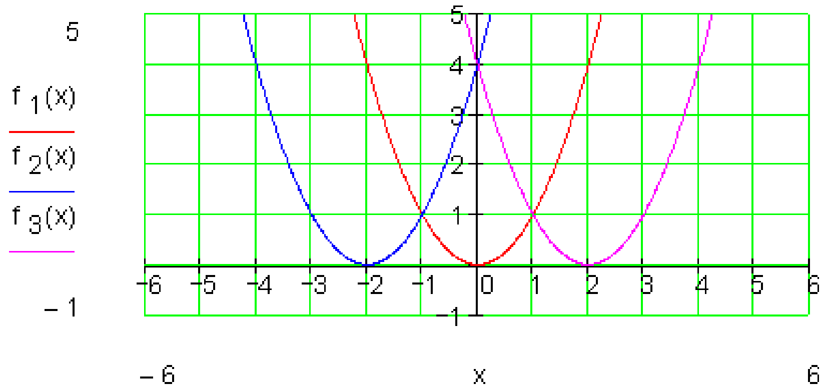
د$f(x) = (x+u)^2$ تابع د u د مختلفو ارزښتونو لپاره راکښنه وڅيړی او ګراف يې په وضعيه قيمتسيستم کې x رسم کړی

$f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = (x + 2)^2$ $f_3(x) = (x - 2)^2$

د ارزښت جدول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f_1	x	−2	−1	0	1	2	f_2	x	−4	−3	−2	−1	0	f_3	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4



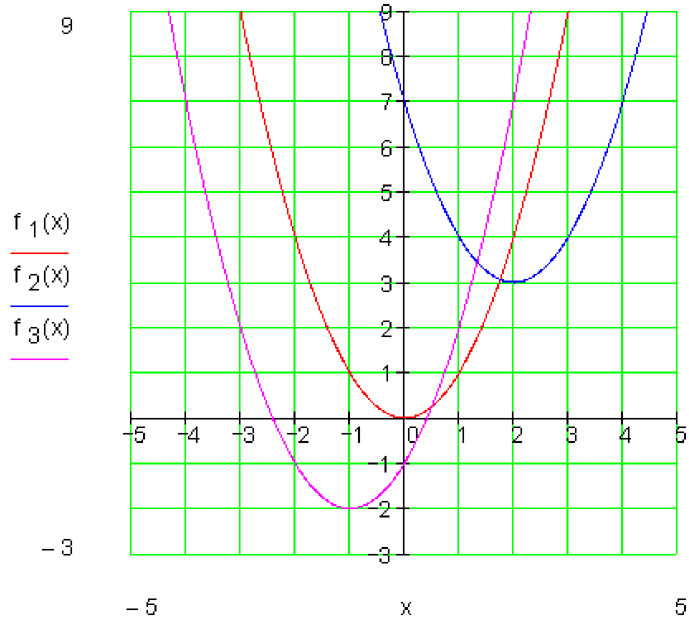
د ا یو راکښلی (چې ځای ته یې تغیر ورکړ شوی وي) نورمال پارابول دی، چې ککرۍ ټکی(د رأس نقطه) S یې د u په واحدونو(یوونونو) دx په محور راکښل یا کښول شوې ده. دS غوښتکی(نقطه تقاطع) یې کواوردینات $S(-u \mid 0)$ لري.

کيڼې لور ته ښرخون یا ښرخول، ککرۍ ټکیS په u واحدونو یا یوونوو د پیل یا سرچینې کیڼ لورت پروت دی.	u>0 =>
ښی ښرخون یا ښرخول، ککرټکی S په u واحدونو د پیل یا سرچینې ښیۍ لورته پروت دی.	u<0 =>

د کار (ورکونې) قرارداد: د u او a0 دمختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x) = (x+u)^2 + a0$ وڅیړی او ګراف یې په یوه کواوردینات(پروت ولاړ) سیستم کې انځور کړی.

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = (x-2)^2 + 3 \qquad f_3(x) = (x+1)^2 - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د f_2 (x) ګراف بیرته یو نورمال پارابول دی، چې ککرئ ټکی S یې په دوه واحده ښی لور ته او په درې واحده پورته لور ته راکښلی دی.

د f_3 (x) ګراف هم یو نورمال پارابول دی، چې ککرټکی S (د رأسټکی) په یوه واحد(یوون) کیڼ او په درې واحده لاندې لور ته کښول شوی دی.

د $f(x) = (x+u)^2 + a_0$ ډول تابع د مربع تابع د ککرئ ټکي(رأس ټکي) بڼې تابع بلل کیږي.

د تابع ګراف نورمال پاربول دی، چې په u ارزښت دx محور په لور او په a_0 د yمحور په لور راکښل شوی دی.

که ککرټکی د $S(x_s \mid y_s)$ سره په نخښه کړو، نو د ککرټکي بڼې مربع تابع په دې ډول ده:

$$f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډه بڼه:	$S(x_s \mid y_s) \Leftrightarrow f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$
بېلګه:	$S(3 \mid -1) \Leftrightarrow f(x) = (x - 3)^2 - 1$

تر اوسه مو فقط نورمال پارابول راکښلی (را کش شوی) وو.

همدا یا برابره راکښنه کیدی شي د یوه په خوښه پارابول سره ترسره ورسول شي.

دلته دې بیا فاکتور a_2 په پام کې ونیول شي.

په ټولیزه توګه باور لري:

$Ist\ f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ د یوه نورمال پارابول تابع (بلوان) دی، چي ککرټکی (د رأس ټکی)
$S(x_s \mid y_s)$ لری، نو $f(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s$ د ککرټکي د تابع مساوات دي.

د خلوری تکمیلوني له لارې د رآس ټکي(ککری ټکي) ټاکل

موږ پوهیږو چي صدق کوي:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \Leftrightarrow a_2(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow S(x_s \mid y_s)$$

په ککرټکي کې د ټولیز تابع مساواتو د ترم تابع له لارې کیدی شي د یوه پارابول ککرټکی (د ککری ټکی) وشمیرل شي.

بیلګه:

$F(x) = 3x^2 - 12x + 15$ دي په ککرئ ټکي مساوات واړول شي.

لوړمی پل(قدم) : د x^2 تر مخه ضریب دې له نوکانو راوه وېستل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\Rightarrow f(x) = 3[x^2-4x+5]$$

دویم پل : مربع تکمیلونه [ ] او بنه بدلون

$$\Rightarrow f(x) = 3.[x^2 - 4x +(2)^2 -(2)^2 +5] = 3.[(x-2)^2+1]=3.(x-2)^2 +3$$
$$\Rightarrow S(2;3)$$

بیلګه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 8\right] = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 8\right]$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow S\left(3 \mid -\frac{1}{2}\right)$$

بیلګه:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right] = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$$
$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow S\left(-\frac{3}{4} \mid -\frac{9}{16}\right)$$

تمرینونه: د مربع تکمیلوني له لارې د رآس ټکي(ککرۍ ټکي) ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه پارابل تابع مساوات ورکړشوي دي(د دویمې درجې ټول راشنل تابع). د لاندې بارابولونو لپاره رآسټکو بڼه او رآسټکي پیدا کړی.

ګرافونه یې وکاږی:

لومړی: $f(x) = x^2 + 2x + 5$ دویم: $f(x) = x^2 + 4x + 1$

دریم: $f(x) = x^2 - 4x + 1$ څلورم: $f(x) = x^2 - 3x + 3{,}5$

پنځم: $f(x) = x^2 + x - 3$ شپږم: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

اووم: $f(x) = -x^2 + 5x - 5$ اتم: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

نهم: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$ لسم: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

بیلګه 1 :

د ټول راشنل تابع ګراف چې رسم کړای شو،په زیاتو حالتونو کې اړیند دی، چې ارزښتجدول وپیژنو. د دې لپاره جبشمیري له لارې کیدی شي. خو دا هم تل اړیین دی.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د متحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = 0 : f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$
$$x = 1 : f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$
$$x = 2 : f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$
$$x = 3 : f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$
$$x = 4 : f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$
$$x = 5 : f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$
$$x = 6 : f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له 10 $\pm$ لوی شي، کېدی شي چې پع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کيږي.

$$x = -1 : f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$
$$x = -2 : f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې کښل کيږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د f(x) ګراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسې شميرل کېدی شي

د بيلګې په توګه $x = \pm ½$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-\frac{1}{2}:f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}+2+3=5\frac{1}{4}=5{,}25$$

$$x=\frac{1}{2}:f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-2+3=1\frac{1}{4}=1{,}25$$

هر څوک له جبشميري سره بنه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شميروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

په لاندې کې HN د اصلي ګډ مخرج (ماتلاندې) په معنا دی.

يوه غوره بيلګه، چې ځنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي

د تابع مساوات $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

بادونه: په لاندې زيات ځايونه HN راغلي، دا د اصلی مخرج په مانا دي.

موږ د $x=0$ سره پيل کوو

$$x=0:f(0)=\frac{4}{5}\cdot0^2-\frac{3}{4}\cdot0-\frac{7}{2}\;=0-0-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}=-3{,}5$$

$$x=1:f(1)=\frac{4}{5}\cdot1^2-\frac{3}{4}\cdot1-\frac{7}{2}\;=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\equiv}\frac{16}{20}-\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{69}{20}=-3{,}45$$

$$x=2:f(2)=\frac{4}{5}\cdot2^2-\frac{3}{4}\cdot2-\frac{7}{2}\;=\frac{16}{5}-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\equiv}\frac{32}{10}-\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}$$

$$=-1{,}8$$

$$x=3:f(3)=\frac{4}{5}\cdot3^2-\frac{3}{4}\cdot3-\frac{7}{2}\;=\frac{36}{5}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\equiv}\frac{144}{20}-\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{29}{20}=1{,}45$$

$$x=4:f(4)=\frac{4}{5}\cdot4^2-\frac{3}{4}\cdot4-\frac{7}{2}\;=\frac{64}{5}-3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\equiv}\frac{128}{10}-\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{63}{10}=6{,}3$$

$$x=5:f(5)=\frac{4}{5}\cdot5^2-\frac{3}{4}\cdot5-\frac{7}{2}\;=20-\frac{15}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=4}{\equiv}\frac{80}{4}-\frac{15}{4}-\frac{14}{4}=\frac{51}{4}=12{,}75$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې لیکل کیږي.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسي شمیرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x = \pm\, 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په پورته کې (HN(Hauptnenner داصلې مخرج(ماتلاندې) یا مخرج مشترک په معنا دی.

د دې لپاره چې د یوه ټول ریښتوني یا تام راشنل تابع ګراف انځور کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړیین دی، چې ارزښت جدول وکاږو. د دې لپاره یو جبشمیروني ته اړتیا لرو.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د تحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

$$
\begin{aligned}
x = 0 &: f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3 \\
x = 1 &: f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0 \\
x = 2 &: f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \\
x = 3 &: f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 \\
x = 4 &: f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3 \\
x = 5 &: f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8 \\
x = 6 &: f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له ± 10 لوی شي، کېدی شي چې پع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کیږي.

$$
\begin{aligned}
x = -1 &: f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8 \\
x = -2 &: f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښنل کیږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د $f(x)$ ګراف رسم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمېرل کیدی شي

د بېلګې په توګه $x = \pm ½$

$$x=-\frac{1}{2}: f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}+2+3=5\frac{1}{4}=5{,}25$$

$$x=\frac{1}{2}: f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-2+3=1\frac{1}{4}=1{,}25$$

هر څوک له جبشمېري سره ښه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شميروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

یوه غوره بیلګه، چې ځنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي:

د تابع مساوات $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

موږ د $x = 0$ سره بيل کوو

$$x=0: f(0)=\frac{4}{5}\cdot 0^2-\frac{3}{4}\cdot 0-\frac{7}{2}=0-0-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}=-3{,}5$$

$$x=1: f(1)=\frac{4}{5}\cdot 1^2-\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}-\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{69}{20}=-3{,}45$$

$$x=2: f(2)=\frac{4}{5}\cdot 2^2-\frac{3}{4}\cdot 2-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}-\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}=-1{,}8$$

$$x=3: f(3)=\frac{4}{5}\cdot 3^2-\frac{3}{4}\cdot 3-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}-\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{29}{20}=1{,}45$$

$$x=4: f(4)=\frac{4}{5}\cdot 4^2-\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}-3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}-\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{63}{10}=6{,}3$$

$$x=5: f(5)=\frac{4}{5}\cdot 5^2-\frac{3}{4}\cdot 5-\frac{7}{2}=20-\frac{15}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=4}{=}\frac{80}{4}-\frac{15}{4}-\frac{14}{4}=\frac{51}{4}=12{,}75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\equiv}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\equiv}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\equiv}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\equiv}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې ليکل کيږي.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کيدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسي شميرل کيدی شي

د بيلګې په توګه $x=\underline{+}\,5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{\equiv}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{\equiv}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

پوښتني

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټونه مربع توابع II

لومړی - د لاندې پارابولونو د تابع مساوات ورکړی:

الف- $f(x) = x^2 - 4x + 2$ ب – $f(x) = x^2 + 4x + 2$

پ – $f(x) = -x^2 - 4x + 3$ ت- $f(x) = -x^2 + 8x - 9$

ټ- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ ث – $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

ج – $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2$ چ – $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + 6$

ح- $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 7$ خ - $f(x) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

(۱) د ککرئ ټکي بڼه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوڅټکي وشمیری.

(۳) پل په پل تشریح کړی، چیf(x) د نورمال پارابول حخه څنګه منځ ته راځي او دا څنګه واز دی.

(۴) په یوه مناسب پروتولاړسیستم کې د f(x) ګراف وکاږی

دويم – سړی کړی شي د نورمال پارابول څخه هر په خوښه پارابول د د غوڅټکي د راکښني له لارې او د پرسېدني یا غزوني له لارې منځ ته اوړي. که دا کښته لور ته واز وي، نو دا دx محور باندې هنداره کیږي یا منعکس کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه پارابول په هکله لاندې ټکي پیژنو:

د y په لور راکښنه یا بدلون	د x په لور راکښنه یا ځای بدلون	Formfaktor بڼه ضریب	
په 2 واحدونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 1$	a)
په 4 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کیڼ لورته	$a_2 = -1$	b)
په 4 واحدونو کښته لور ته	په 2 واحدونو کیڼ لورته	$a_2 = \frac{1}{2}$	c)
په 5 واحدونو پورته لور ته	په 1 واحد ښي لورته	$a_2 = -2$	d)
په 3 واحدونو پورته لور ته	په 4 واحدونو کیڼ لورته	$a_2 = -\frac{1}{4}$	e)
په 6 واحدونو کښنه لور ته	په 2,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{3}{2}$	f)
په 3 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کیڼ لورته	$a_2 = -\frac{3}{4}$	g)
په 4,5 واحدونو کښنه لور ته	په 3,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 2$	h)
په 3 واحدونو یا یوونونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{1}{3}$	i)
په3 واحدونو پورته لور ته		$a_2 = -\frac{2}{3}$	j)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 4 واحدونو ښي لورته

(۱) د ککرئ ټکي ښه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوځټکي وشميری.

(۳) د تابع مساوات په پولينوم ښه $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$? ځنګه دي؟

(۴) په يو مناسب کواوردينات سيسم کې د f(x) ګراف وکارِی.

پوښتني

د مربع توابعو ښستيونه IV

لومړی:

تابع f(x) ورکړ شوی دی. د شمېرني له لارې وښايې، چې ګراف تابع په x محور کې لمسوي. ګراف وکارِی.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} \quad x \in \mathbb{R}$$

دويم: د تابع مساوات(f(x د محور غوځټکي وشميری، او ککری ټکي. ګراف يې رسم کړی.

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ پ- $f(x) = x^2 + 4x + 1$

ت - $f(x) = -0,25(4x^2 + 12x + 9)$ ټ _ $f(x) = 3x(1-x)$ _ ث-

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3}$$

دريم: د$U = 18\ cm$ محيط سره کوم مستطيل(ولاړکوډيز) خورا لويه سطحه لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د توابعو $f(x)$ او$g(x)$ ګرافونه چيرته د x محور غوڅوي؟ ککرۍ چيرته پرتې دي؟ د دواړو ګرافونو ترمنځ کومې اړيکې پرتې دي؟ د ارزښت جدول په مرسته پوښتنې ځواب کړئ.

الف –

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-3{,}5$	$0{,}5$	$2{,}5$	$2{,}5$	$0{,}5$	$-3{,}5$
$g(x)$	4	0	-2	-2	0	4

ب –

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-12	-5	0	3	4	3
$g(x)$	$3{,}5$	0	$-2{,}5$	-4	$-4{,}5$	-4

پنځم: د اړونده ګراف کوم خويونه د تابع مساوات څخه سيده لوستل کيدی شي؟

$$f(x) = -x^2 - x + 6; \quad g(x) = (2-x)(x+3); \quad h(x) = -(x+0{,}5)^2 + \frac{25}{4}$$

د مربع-يا څلورئ توابعو معکوس تابع

تلنلار (که غواړې: طريقه يا قانون) همداسې ده لکه پورته په کرښيزو توابعو کې چې وښوول شوه.

$y=(f(x)=x^2$

د متحولو x او y بدلول

$x=f(y)=y^2 \Leftrightarrow y^2=x$

ريښه نيونه:

له دې لاس ته راځي او برعکس

$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$

يا $y = -\sqrt{x}$

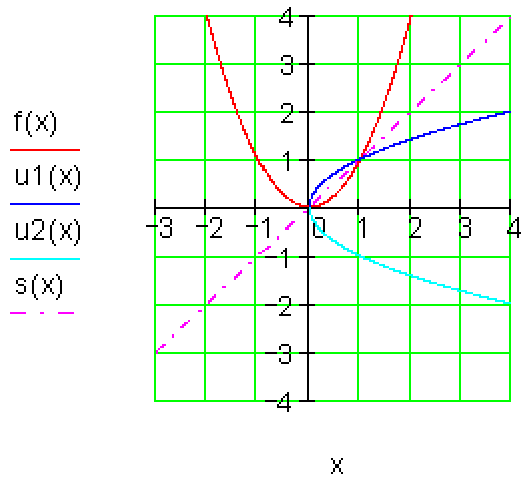
نو دوه معکوس توابع شتون لري:

$y = u_1(x) = \sqrt{x}$

او

$y = u_2(x) = -\sqrt{x}$

د معکوس تابع جوړولو سره تعريفورشو محدوده شوه، د دې لپاره چې يواځنی نظم منځ ته راشي



(c) ketabton.com: The Digital Library

کربنیزبرابرونسیستم د ۲ برابرونونو او ۲ متحولو سره.

داسي سیستم له دوه مساوتو څخه جوړ دی. غوښتونی د دواړو مساواتو ګډ حل دی. مختلفي تلنلارې شته، چې سرې حل ته ورسیږي

په لاندي einsetzen in = په ... کې اینوول.

د جمعې تلنلار:

مساواتسیستم: (I) $5x - 2y = 1$ (II) $3x + 3y = 9$	د حل پل(قدم) غوښي(قطاع، که قطعه؟) د جمعې تلنلار ته لومړی امکان یا واریانت
(I) $5x - 2y = 1 \mid \cdot 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$ (I) $7,5x - 3y = 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$	لومړی: مساوات ورته داسي بڼه بدل کړئ، چې ضریبونه (ترمخ عددونه) د yمتحولي تر مخنښي پورې سره سروخوري.
(I) $7,5x - 3y = 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$ + $10,5x = 10,5 \mid : 10,5$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$	دویم: منځ ته راغلي مساوات سره جمعه کړې او د **x** - متحولي پسې یې حل کړئ
په $3x + 3y = 9$ کې اینوونه: $x = 1$	دریم: د **x** لپاره میندل شوي ارزښتونه د دواړو څخه په یوه مساوات کې کیږدئ او **y** پسې یې حل کړې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$3\cdot 1+3y=9$ $\Leftrightarrow 3+3y=9 \mid -3$ $\Leftrightarrow \quad 3y=6 \mid :3$ $\Leftrightarrow \quad y=2$	
$L=\{(1\mid 2)\}$	خلورم: حلست یا حلدېرئ ولیکئ

پنځم:

ازماېښت د اېنووني له لارې

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x-2y=1$$
$$(II)\quad 3x+3y=9$$

د حل پلونه قدمونه د جمعي تلنلار لپاره

دويم واریانت

لومړی: مساوات داسې ورته بنهبدل کړئ، چې د **x** ضریبونه(

ترمخعددونه) تر مخنخښي پورې سره یوغږیز شي.

$$(I)\quad 5x-2y=1 \mid \cdot 3$$
$$(II)\quad 3x+3y=9 \mid \cdot(-5)$$
$$(I)\quad 15x-6y=3$$
$$(II)\quad -15x-15y=-45$$

دويم: منځ ته راغلی مساوات سره جمعه کړئ او متحولې **y** پسې یې حل کړئ.

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & 15x-6y=3\\ (II) & -15x-15y=-45\end{array}\right\}+$$
$$-21y=-42 \mid :(-21)$$
$$\Leftrightarrow \quad y=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: بني لورته الماني د اينوونې په مانا ده

$y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

د x لپاره ميندل شوي ارزښتونه له دې دوه پهيوه مساوت کې کيږدئ او د متحولې x پسې يې حال کړئ.

$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

څلروم: حلستې يا د حلډېرئ وليکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

پنځم: د اينوونې له لارې ازماېښت

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د برابراينوونې تلنلار

د حل پل د برابراينوونې تلنلار ته

واريانت 1

مساواتسيستم

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{lll} (I) & 5x - 2y = 1 & \mid +2y \\ (II) & 3x + 3y = 9 & \mid -3y \end{array}$$

لومړی: دواړه مساوات د اووښتوني یا متحولې **x** پسې حل کیږي.

$$\begin{array}{lll} (I) & 5x = 1 + 2y & \mid : 5 \\ (II) & 3x = 9 - 3y & \mid : 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (I) & x = \frac{1+2y}{5} \\ (II) & x = \frac{9-3y}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (I) & x = \frac{1+2y}{5} \\ (II) & x = 3 - y \end{array}$$

دویم: د مساوات ښي ا ړخونه برابر اینسول کیږي او د متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$\frac{1+2y}{5} = 3 - y \mid \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2y = 15 - 5y \mid +5y$$

$$\Leftrightarrow 1 + 7y = 15 \mid -1$$

$$\Leftrightarrow 7y = 14 \mid : 7$$

$$\Leftrightarrow y = 2$$

دریم: (د کیڼ لور الماني په پښتو: اینسول په ..کي)

$y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

د **y** میندل شوی ارزښت د دواړو څخه په یوه وتونمساوات کې اینسول کیږي، او دا بیا د متحولې **x** پسې حل کیږي.

$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$

$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid : 3$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

څلورم: حلسټ یا ـدېرئ ولیکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم: د ځا په ځای کولو یا ایښوولو له لارې ازماېښت

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د حل پل د برابرایښوولو له لارې

واریانت 2

مساواتسیستم

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1$$

$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9$$

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1 \mid -5x$$

$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9 \mid -3x$$

$$\text{(I)}\quad -2y = 1 - 5x \mid : (-2)$$

$$\text{(II)}\quad 3y = 9 - 3x \mid : 3$$

لومړی: دواړه مساوت د اووښتونې یا متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$\text{(I)}\quad y = \frac{1 - 5x}{-2}$$

$$\text{(II)}\quad y = \frac{9 - 3x}{3}$$

$$\text{(I)}\quad y = \frac{5x - 1}{2}$$

$$\text{(II)}\quad y = 3 - x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم: د دواړو مساواتو ښئ خوا برابره لیکل یا ایښوول کیږي او د متحولې **x** پسې حل کیږي.

$$\frac{5x-1}{2} = 3-x \mid \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 5x-1 = 6-2x \mid +2x$$
$$\Leftrightarrow 7x-1 = 6 \mid +1$$
$$\Leftrightarrow 7x = 7 \mid :7$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

درى(ښئ الماني: ایښوول په ...کې)

د **x** میندل شوى ارزښت د دداړو وتونمساواتو څخه په یوه کې ایښوول کیږي، دا بیا د متحولې **y** پسې حل کیږي.

x = 1 eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$3\cdot 1 + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \mid -3$$
$$\Leftrightarrow 3y = 6 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

څلورم: د حلسټ ولیکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$$

پنځم د ایښووني له لارې ازمایښت

$$(I)\quad 5x-2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5-4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x+3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3+6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د ایښووني تلنلار: د ایښووني تلنلار لپاره د حل پلونه(قدمونه)

وارینت 1

مساواتسیستم

$$(I)\qquad 5x-2y = 1$$
$$(II)\qquad 3x+3y = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: مساوات **(I)** د **x** پسې حل کيږي.

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1 \mid +2y$$
$$\Leftrightarrow 5x = 2y + 1 \mid :5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$
$$3\left(\frac{2}{5}y + \frac{1}{5}\right) + 3y = 9$$

دويم: د بنې اړخ ميندل شوی ترم په مساوات **(II)** کې اېښوول کيږي او د **y** پسې حل کيږي.

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + \frac{3}{5} + 3y = 9 \mid -\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + 3y = 9 - \frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{21}{5}y = \frac{42}{5} \mid \cdot 5$$
$$\Leftrightarrow 21y = 42 \mid :21$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

دريم: د **y** لپاره ميندل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساواتو کې اېښوول کيږي، دا بياپه **x** پسې حل کيږي.

$$y = 2 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$
$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

څلورم: د حل سټ وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$$

پنځم: د اېښوولو له لارې حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

د حل پلونه(قدمونه) د اینوولو تلنلار لپاره

واریانت 2

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x-2y=1$$
$$(II)\quad 3x+3y=9$$

لومړی: مساوات**(II)** د متحولي **y** پسې حل کیږي.

$$(II)\quad 3x+3y=9 \mid -3x$$
$$\Leftrightarrow \quad 3y=9-3x \mid :3$$
$$\Leftrightarrow \quad y=3-x$$

دویم: دښی لور میندل سوی ترم په مساوات **(I)**کې کیږدئ او په **x** پسې یې حل کړئ.

$$y=3-x \text{ eingesetzt in } (I): 5x-2y=1$$
$$5x-2(3-x)=1$$
$$\Leftrightarrow 5x-6+2x=1 \mid +6$$
$$\Leftrightarrow 7x=7 \mid :7$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$$

3. دریم: د **x** لپاره میندل شوی ارزښت په یو د دې دوه وتونمساوتو کې اینوول کیږي، او دا بیا د متحولي **y** پسې حل کیږي.

$$x=1 \text{ eingesetzt in } (II): 3x+3y=9$$
$$3\cdot 1+3y=9$$
$$\Leftrightarrow 3+3y=9 \mid -3$$
$$\Leftrightarrow 3y=6 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: جلسټ ولیکئ

$$L = \{(1 | 2)\}$$

پنځم: ازماېښت د اېښوولو له لارې

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

ټولې درې تلنلارې د هغه د واریانتو سره په یوه ټکلي مساوتسیستم وکارول شو. که ځوک یوګونې تلنلرې ټیک وګورې، پیژني، چې په واریانت ۲ کې لږ د شمیرلو کار غوښتونی دی.

په یوه ټاکلي تلنلار د شمیرلو کار د دې حل کوونکي مساوتسیستم په واک کې دی. له دې امله دې لومړی پام وشي، چې کومه تلنلار د لږ کار سره سرته رسیدی شي. د دې لپاره نو یو ځو بیلګو ته اړ یو. لاندې بیګې دې د دې لپاره یوه کوچنۍ مرسته وي، چې مناسب د حل – یا ځواب تلنلار پیداشي.

د مناسب ځواب تلنلار لپاره بیلګې

بیلګه ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

x1=-1 په (1) کې اینسوونه y=7x+8 $y = 7\cdot(-1)+8$ $\Leftrightarrow y = -7+8$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1}}$ حل: L={(-1|1)} ازماینت (I) $y = 7x+8 \Rightarrow y = 7\cdot(-1)+8$ $\Leftrightarrow y = -7+8 \Leftrightarrow y = 1$ (w) (II) $y = -2x-1 \Rightarrow y = -2\cdot(-1)-1$ $\Leftrightarrow y = 2-1 \Leftrightarrow y = 1$ (w)	(I) $y = 7x+8$ (II) $y = -2x-1$ د برابر اینسوونې لار $7x+8 = -2x-1 \mid +2x$ $\Leftrightarrow 9x+8 = -1 \mid -8$ $\Leftrightarrow 9x = -9 \mid :9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1}}$

بیلګه۲:

Y=3 اینسوونه په (1) کې 2x+4y=8 حل: $2x - 12 = 8 \mid +12$ $\Leftrightarrow 2x = 20 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 10}}$ ازماینت (I) $2x+4y = 8 \Rightarrow 2\cdot 10+4\cdot(-3) = 8$ $\Leftrightarrow 20-12 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8$ (w) (II) $2x-5y = 35 \Rightarrow 2\cdot 10-5\cdot(-3) = 35$ $\Leftrightarrow 20+15 = 35 \Leftrightarrow 35 = 35$ (w)	(I) $2x+4y = 8$ (II) $2x-5y = 35$ د جمعي تلنلار: (II) $2x-5y = 35 \mid \cdot(-1)$ (I) $2x+4y = 8$ (II) $-2x+5y = -35$ } + $9y = -27 \mid 9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ :

(I) $x + 2y = 5$ (II) $-x + y = 1$ د اینوونې لار; (II) په y پسې حل کړئ $-x + y = 1 \mid +x$ $\Leftrightarrow \quad y = x + 1$ په (I) کې کیږدئ x+2y=5 $x + 2(x + 1) = 5$ $\Leftrightarrow x + 2x + 2 = 5 \mid -2$ $\Leftrightarrow \quad 3x = 3 \mid : 3$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$	X=1 په (1) کې کیږدئ x+2y=5 $1 + 2y = 5 \mid -1$ $\Leftrightarrow 2y = 4 \mid : 2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$ حل: L= {(1|2)} ازماېښت (I) $x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 4 = 5$ $\Leftrightarrow 5 = 5 \ (w)$ (II) $-x + y = 1 \Rightarrow -1 + 2 = 1 = 35$ $\Leftrightarrow 1 = 1 \ (w)$ wد ربښتیا لپاره

بیلګه ۴ : په لاندې: einsetzen اینوونه په (1)کې اوبیونه یا حل:Lösung
ازماېښتProbe د زیاتون یا جمعې
لار:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{(I)} \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$\text{(II)} \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$$

Additionsverfahren:

$$\text{(I)} \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \mid \cdot 2$$

$$\text{(II)} \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \mid : (-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4 \\ \text{(II)} & -\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2 \end{array}\right\} +$$

$$-\frac{10}{y} = 2 \mid \cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10 = 2y \mid : 2$$

$$\Leftrightarrow -5 = y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -5}}$$

$y = -5$ eingesetzt in (I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 \mid -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \mid \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x \mid \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

Lösung: $L = \{(2 \mid -5)\} \quad x, y \neq 0$

Probe:

$$\text{(I)} \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \ (w)$$

$$\text{(II)} \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II) & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2\,|-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{aligned}(I)\quad & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II)\quad & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{aligned}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$
$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$
$$\Leftrightarrow -5=y$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

$y=-5$ eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$
$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2\,|\,-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\Leftrightarrow 2=2\ (w)$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$
$$\Leftrightarrow 6-2=4\Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

يادونه:

مساواتسيستم د کسرونو ترمونو څخه جوړ دی. دا چي مخرج دد صفر کيدو اجازه نه لري يا نه شي صفر کيدی، تعريفسټ بايد ورکړ شي. داسئ مساواتسيستم کرښيز نه دی.

د رسموني لار

$$(I)\qquad x-y=-2\qquad L_I=\{(-2\,|\,0);(-1\,|\,1);(0\,|\,2);(1\,|\,3);\ldots\}$$
$$(II)\ \wedge\ -2x-y=1\qquad L_{II}=\{(-2\,|\,3);(-1\,|\,1);(0\,|\,-1);(1\,|\,-3);\ldots\}$$

دواړه مساوات د y پسي حل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هر مساوات لپاره ارزښتجوړي د حل سټ په ګوته کوي.

$$\begin{array}{ll} (I) & x - y = -2 \mid +y \\ (II) & -2x - y = 1 \mid +y \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (I) & x = -2 + y \mid +2 \\ (II) & -2x = 1 + y \mid -1 \end{array}$$

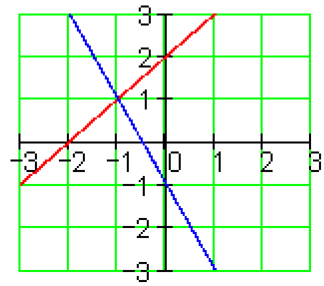
$$\begin{array}{ll} (I) & x + 2 = y \Leftrightarrow y = x + 2 \\ (II) & -2x - 1 = y \Leftrightarrow y = -2x - 1 \end{array}$$

کا دا په يوه کواورديناتسيستم کې وکښل شي، نو دوه کرښې ترې لاس ته راځي. د کرښو په غوڅېدلو يا نقطه تقاطع کې د دواړو مساواتو حلسټ پروت دی.

حلسټ يا-ډېرئ: L={(-1|1)}

په هر مساوات کې د x لپاره عددونه اېښوول کيږي.

x	−2	−1	0	1
y_I	0	1	2	3
y_{II}	3	1	−1	−3



د رسموني لار د مساوات او کرښو ترمنځ هندسي(ځمککچيزې) اړيکې ليدوړ کوي. د حل لار په حيث زيات وخت مناسب نه دی، چې د ګډغوڅېدلو کواودينات په ګرفيک کې ناټيک لوستل کيدی شي.

برابرون – يا مساواتسيستم بې له يواځني حل څخه

رسميزه حل يا درسم له لارې حل د مساوات او کرښې ترمنځ هندسي اړيکې ليدوړ کوي.

- دوه کرښې کيدی شي چې نسبت يو بل ته مختلف پروتځايونه ولري.

- دا کيدی چې په يو ټکې کې سره غوڅې کړي، لکه پورته بېلګه چې ليدوړ کوي، د دواړو کرښيز مساوات لپاره ټک يو حل شتون لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دا کيدی شي يو بل سره غبرګې وي، نو په دې حالت کې کوم ټکی نه شته، چې دواړه کربښې يې يو له بل سره ګډ ولري. له دې سره اړونده مساوات له دې امله حل نه لري.

- دا کيدی شي يو په بل پرتې وي، يعنې کټمټ وي، نو هر ټکی د يوې کربښې به د بلې کربښې ټکی هم وي. نو له دې امله به دااړونده مساوات ناپای زيات حلونه ولري.

مساوات سيستم حل نه لري چې دا د حل پيل مو يوه . ليدوړ دا په دې معنا دی، ې ځغلي او کوم ګډ ټکی نه لري.	$(I)\quad 10x+4y=4$ $(II)\quad 5x+2y=1 \mid \cdot(-2)$ $(I)\quad 10x+4y=4$ $(II)\ -10x-4y=-2 \mid$ $\}+$ 0=2 نو دا ناټيک وينا ده، له دې لاس ته را ځي L={}

دا مساواتسيستم ناپای ډېر ځوابونه يا حلونه لري

د ورته بڼه بدلون وروسته د مساوات (I) او مساوات (II) جمعه کونې يو بل سره پورته کوي يا له منځه وړي، دا په دې معنا چې مساوات ورته يا ايدنتيک دي. هره د اعدادو جوړه، چې مساوات (I) پوره کوي،دا مساوات (II)هم پوره کوي. ليدوړ دا په دې معنا دی، چې کربښې يو په بل پرتې دي.	$(I)\quad 10x+4y=2$ $(II)\quad 5x+2y=1 \mid \cdot(-2)$ $(I)\quad 10x+4y=2$ $(II)\ -10x-4y=-2 \mid$ $\}+$ 0=0 له دې لاس ته راځي ربښتيا وينا

پوښتنې

مساواتسيستم I

مساوات سيستم ته د دوه متحولو سره ګډوله پوښتنې، کربښېزمساواتسيستم، سيستم د کسري ترمونو سره او شي پوښتنې(د متن سره پ،ښتنې)

لومړی: د لاندې مساواتسيستم حلسټ وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف- $\begin{cases} (I) & 5y - 3x = 1 \\ (II) & x = y + 1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} (I) & 4x + 5y = 32 \\ (II) & y = 5x - 11 \end{cases}$

پ- $\begin{cases} (I) & 15y - 4x = -50 \\ (II) & x = y + 7 \end{cases}$ ت - $\begin{cases} (I) & 3x = y + 15 \\ (II) & 2y - 10 = 2x \end{cases}$

د ویم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $\begin{cases} (I) & 2y = 2x - 40 \\ (II) & 3x = 10 - 2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} (I) & \frac{x}{2} - \frac{3y}{5} = 3 \\ (II) & \frac{x}{4} + y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (I) & \frac{2x}{15} + \frac{7y}{12} = 3 \\ (II) & \frac{7x}{25} - \frac{5y}{16} = \frac{3}{20} \end{cases}$ d) $\begin{cases} (I) & \frac{x+5}{y-7} = \frac{4}{3} \\ (II) & \frac{x+2}{y-5} = \frac{5}{8} \end{cases}$

دریم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $\begin{cases} (I) & \frac{4}{3x+1} = \frac{2}{3y-13} \\ (II) & \frac{2}{5x-10} = \frac{4}{7y-6} \end{cases}$ b) $\begin{cases} (I) & \frac{7}{x} - \frac{12}{y} = \frac{5}{6} \\ (II) & \frac{4}{y} + \frac{5}{2} = \frac{9}{x} \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c)

$$(I)\quad \frac{4}{x}+\frac{8}{y}=\frac{5}{3}$$

$$(II)\quad \frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-\frac{1}{6}$$

d)

$$(I)\quad \frac{3}{2x-1}-\frac{8}{3y+2}=-\frac{1}{5}$$

$$(II)\quad \frac{5}{2x-1}+\frac{4}{3y+2}=\frac{8}{15}$$

څلورم: د لاندې مساواتسيستم حلسټ وټاکئ

$$(I)\quad \frac{7}{2x-5}-\frac{9}{7y+5}=\frac{10}{3} \qquad (II)\quad \frac{24}{2x-5}+\frac{15}{7y+5}=\frac{19}{3}$$

پنځم: يو پلار په دې لحضه کې څلورواره دومره عمر لري لکه ځوي يې او په ۵ کاله کې به فقط درې واره دومره عمر ولري. دا دواړه همدا اوس څومره عمر لري؟

شپږم: په کوم وخا کې به يو (اوبه) ساتونی (بيلر؟) له دوه نلونو څخه نيمم ډک شي، چې لومړی نل د ټول ساتوني د ډکولو لپاره ۱۸ دقيقې اودويم د دې لپاره ۲۲ دقيقو ته اړتيا ولري يا په کار ولري؟

اوم: د يوه مستېيل يا ولاړکونجيزچاپيريال يا محيط ۱۸۰ سانتي متره دی. اړخa څومره اوږد دی، که اړخ b ۳۰ سانتي متره وي؟

اتم: که د دوه ارزښتځاييزه پرته جمعه يا پروت زياتون عدد9 دی. که ارزښتونه بدل شي، نو نوی عدد لاس ته راځي چې د زاړه عدد 7/4 ده. دواړه ځا ارزښتونه څومره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

توان- یا پوتنځ توابع

توان توابع

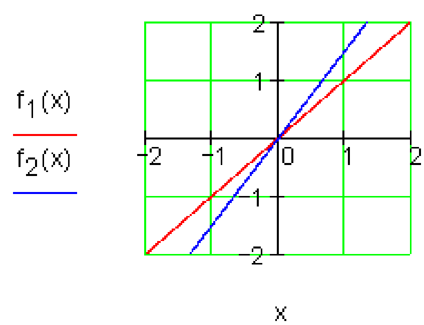
تعریف:

یوه تابع د تابع مساوات $f(x) = a_n x^n \quad ; n \in \mathbb{N} \quad ; a_n \in \mathbb{R}$ سره پوتنځ تابع بلل کیږي.

د n اکپوننت یا جګعدد د پوتنځ تابع درجه ټاکي او ضریب an د ګراف بڼه یا فورم او هغه د بڼي ضریب بلل کیږي.

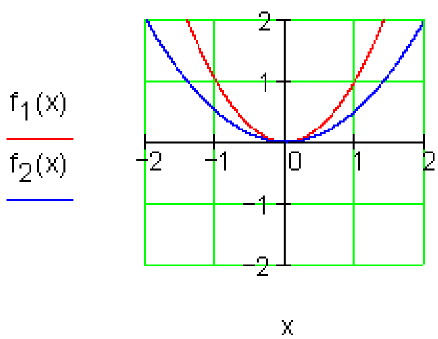
بیلګي:

$f_1(x) := x$ $\qquad f_2(x) := \frac{3}{2} \cdot x$



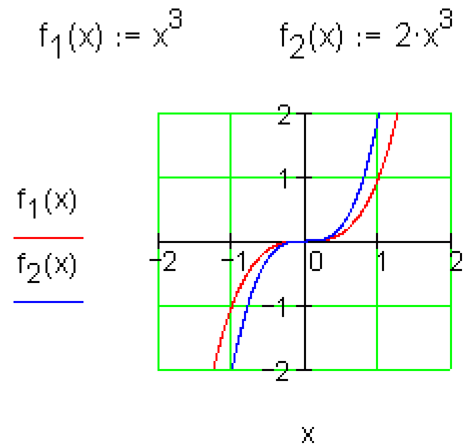
د لومړی دزجې توان تابع(کرښه)

$f_1(x) := x^2$ $\qquad f_2(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2$

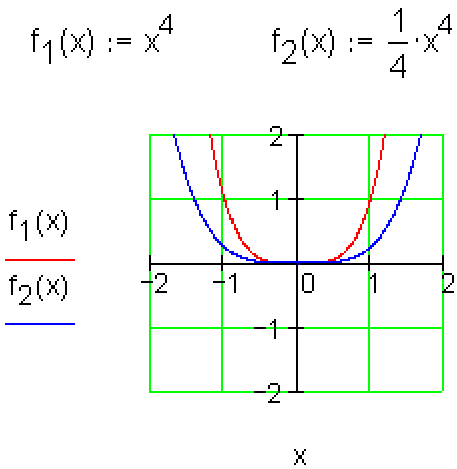


د دویمي درجي توان تابع (پارابول)

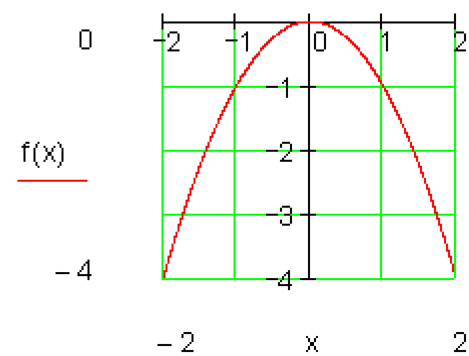
(c) ketabton.com: The Digital Library



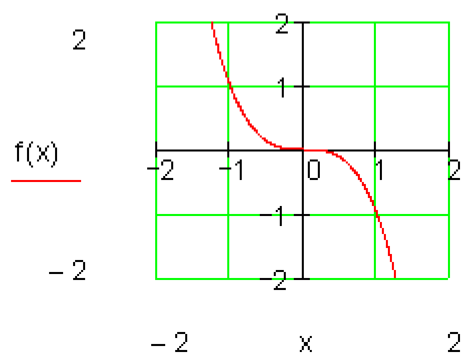
د دريمې درجې توانتابع



د څلورمې درجې توانتابع



تابع مساوات ولیکی



تابع مساوات ولیکی

لاندې پوښتنې ځواب کړی:

ب – دn درجه او د a_n مخنښنه د ګراف په تلنه کومه اغيزه لري؟

پ – د پوتنځ تابع n درجه د ګراف په سيومتري کومه اغيزه لري؟

ت – د پوتنځ تابع د n په واکولي او د a_n مخنښې له امله کوم ارزښتسټ(ارزښتډيری) لري؟

ټ - د a_n مطلق ارزښت د ګراف په تلنه کوم اِيز لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه لړ وروسته راځي.

سيومتري

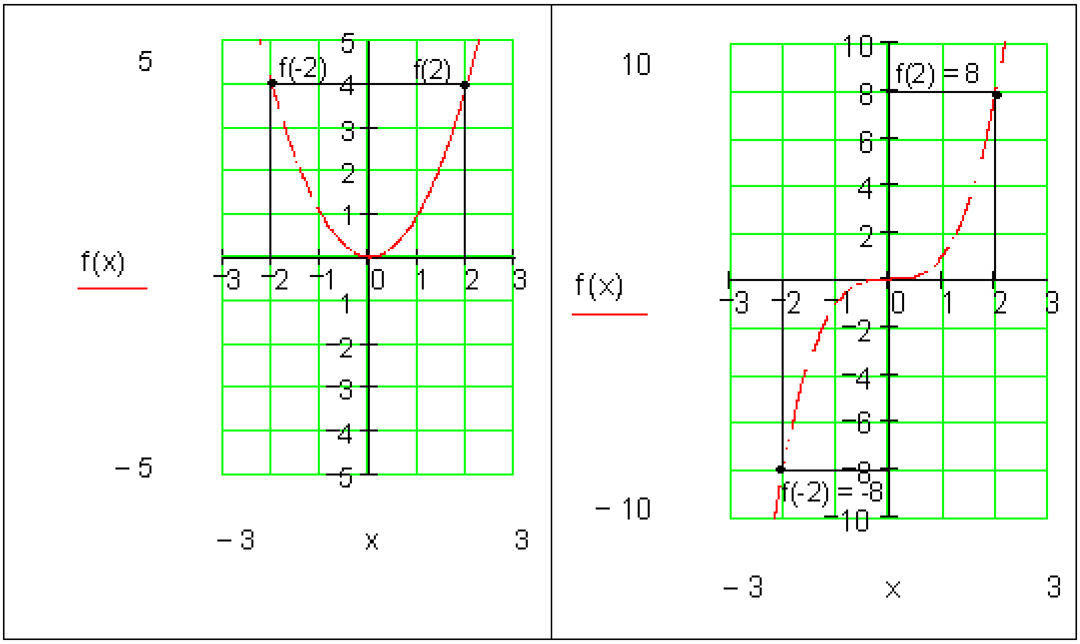
په سيومتري څنګه قضاوت کيدی شي، که څوک فقط د يوه توان(پوتنځ) تابع تابع مساوات پيژني؟

د دې لپاره د لاندې توابعو ګرافونه کاږو:

$f(x)=x^2$ او $f(x) = x^3$

او تابع د $x=-2$ او $x=2$ په ځايونو کې تر ځيرنې لاندې نيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګومان مو نږدې دی چې لاندې باور لري:

دx د جوړه ځګعدد سره د تابع ارزښتونه برابر دي. دا په دې معنا چې :

محورسيمتريک، نو $f(-x) = f(x)$

د x ناجوړه(طاقو) ځګعددونو لپاره د تابع ارزښت برابر مطلق قيمت لري، مګر متضادي مختخښي لري.

دا په دي معنا چې:

ټکی سيومتريک، نو $f(-x) = -f(x)$

دا اړيکي د ټولو تانتوابعو لپاره باور لري (بې له ښوونې).

د يوه توان - يا طاقت تابع محورسيومتريک دی، که د ټولو $x \in D$ ؛ لپاره باور ولري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه توانتابع ګراف ټکی سيمتريک دی،که د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري $f(-x) = - f(x)$

ټولګه:

د $a_n > 0$ لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سيومتريک دي. دا له II د I. څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکيسيومتريک دي. دوی له III.او I. څلورمې(ربع) ته ځغلې(خوزي).

د ټولو 0 > لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سيومتريک دي. دا له III د IV. څلورمي ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکيسيومتريک دي. دوی له II.او IV. څلورمې(ربع) ته ځغلې(خوزي).

تمرينونه:

د توان تابع خويونه.

د لاندې توانتوابعو درجه وټاکی، په سيمتريکي حالت، د ګراف په تلنه او او ارزښت دېرې يې يوه وينا وکړی د د هر ګراف يې په پروت ولاړسيستم (کواوردينات سيستم) کې رسم کړئ.

لومړی - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ دويم - $f(x) = \frac{1}{4}x$

دريم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^4$ څلورم - $f(x) = \frac{1}{5}x^3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^5$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^3$ اتم - $f(x) = 2x^2$

نهم - $f(x) = \frac{1}{5}x^4$ لسم - $f(x) = -\frac{2}{5}x^4$

کربنيز ې توابع د ورکړشوو شرايطو سره

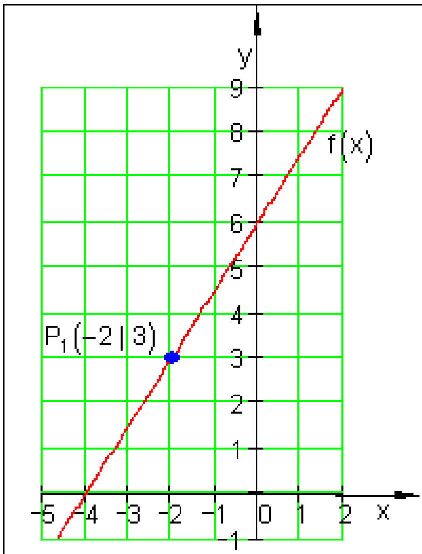
. لومړی حالت : د P تکي ځخه تيرې کربښې د a_1 جګوالي سره

بيلګه:

يوه کربښه د a_1 د جګوالي سره د $P_1(x_1 \mid y_1)$ په تکي کې ځغلي.

د $f(x) = a_1x + a.$ تابع مساوات دې پيدا شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



جګوالی: $a_1 = 1,5$: تکی $P_1(-2|3)$

وتونمساوات $f(x) = a_1x + a_0$

جګوالی ځای په ځای کړی

$$f(x) = 1,5 \cdot x + a_0$$

د a_0 لپاره دې ارزښت وشمیرل شي.

د $P_1(-2|3)$: لپاره ازمایښت

$$\begin{aligned} f(-2) = 3 \;&\Leftrightarrow\; 1,5\cdot(-2) + a_0 = 3 \\ &\Leftrightarrow\; -3 + a_0 = 3 \,|+3 \\ &\Leftrightarrow\; a_0 = 6 \end{aligned}$$

د تابع مساوات $f(x) = 1,5 \cdot x + 6$

ازمایښت:

$$P_1(-2|3) \Leftrightarrow f(-2) = 3$$

$$f(-2) = 1,5\cdot(-2) + 6 = -3 + 6 = 3$$

بیلګه:

د حیواناتو ساتونکی د وښو اوتومات څخه د روځې 7,5 kg خوراک شته. دولس روځې، وروسته له هغې چې زیرمه له غذايي موادو ډکه شوې وه، هلته نور 250 kg پاتې دي.

الف - یو تابع مساوات ولیکی، چې دا حالت تشریح کړي

ب - په څومره سټ یا ډېرې به دا د وښو زیرمه دولس ورځې د مخه ډکه شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل و الف ته - دx محور: وخت په ورځو

y محور : د وښو زېرمه په کيلوګرامkg .

$$f(x) = -7{,}5x + a_0$$

$$P(12\,|\,250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7{,}5 \cdot 12 + a_0 = 250$$

$$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 \,|\, +90$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -7{,}5x + 340}}$$

حل و ب ته- د ډکيدنې وخت $x = 0$ دی.

$$\Rightarrow f(0) = -7{,}5 \cdot 0 + 340 = 340$$

د وښو شتون دولس12 ورځې د مخه په 340 kg ډک شوی .

لکه څنګه په لومړي حالت کې چې د يوې کرښې جګوالی او يو ټکی معلوم دي، شمېرنه په همغه ډول د ورکړشوو داتن يا داتا Daten سره مخ ته ځي.

په داسې حالت کې شمېرنه تويزه سرته رسيږي. دا مو بيا يو فرمول ته لاربنوده وي.

يوه کرښه دa_1 جګوالي سره د$P_1(x_1\,|\,y_1)$ ټکي څخه تيرېږي.

د کرښمساواتو تولیز فرمول دی: $f(x) = a_1x + a_0$

$$P_1(x_1\,|\,y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 \,|\, -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$$

دا د ټکی - جګوالي فرمول هم بلل کيږي.

بيلګه:

په $a_1 = -2;\, P_1(-3\,|\,4)$: $f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$ کې ځا په ځای کړی

$$f(x) = -2(x - (-3)) + 4 = -2(x + 3) + 4 = -2x - 6 + 4 = \underline{\underline{-2x - 2}}$$

.

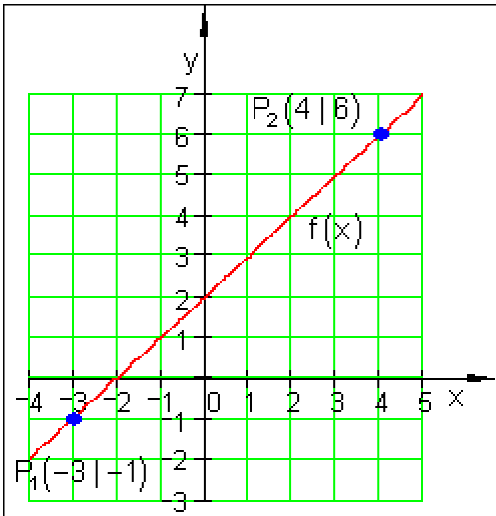
(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم حالت: کرښه له دوه ټکو تيريږي

بيلګه:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په يوه کرښه پراته دي.

د $f(x) = a_1x + a_0$ تابع مساوات غواړو پيداکړو.



$P_1(-3 \mid -1)$ $\qquad P_2(4 \mid 6)$

وتونمساوات: $f(x) = a_1x + a_0$

د جګوالي ټاکنه:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-1)}{4-(-3)} = \frac{6+1}{4+3} = \frac{7}{7} = 1$$

جګوالی وضعه کړی $f(x) = 1 \cdot x + a_0$

وروسته له دې چې جګيدنه معلومه شوه، دا پوښتنه داسې حل کيږي لکه په لومړي حالت کې.

د ټکو ازمايښت لپاره بې پروا ده چې د دې لپاره کوم ټکي کارول کيږي، ځکه چې دواړه ټکي به په کرښه پراته وي.

د ټکو ازمايښت د $P_2(4 \mid 6)$ يا P_1 لپاره

$$P_2(4 \mid 6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

بيلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فزیک څخه پوهیږو چې د حرارت معلومولو (ګرمۍ کچونې) لپاره مختلفې دد حرارت سکالا کارول کیږي. د څلزیوس سکالاCelsiusskala او د فارنهایټ سکالا Fahrenheitskala

د دواړو ترمنځ کرښیزې اړیکې موجود دي.

$100\,^0C$ برابرې دي د $212\,^0F$ سره . $0\,^0C$ برابر د ی په $32\,^0F$ سره.

د یوه تابع مساوات غواړو پیداکړو، چې د هغې په مرسته ^0C په ^0F اړول کیږي.

خپلواکه متحوله x په ^0C او بلواکه یا تابع متحوله $y = f(x)$ په ^0F .

ځګوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$$

$$P_1(0\,|\,32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

په بدل شوی تابع x په C° کې کیږدی نتیجه یې ده.

د بیلګې په دول:

$$x = 20\,^0C : f(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20\,^0C \triangleq 68\,^0F$$

د دویم حالت لپاره هم کیدی شي شمیرنه په ټولیزه توګه مخ ته بوتلی شی:

دوه ټکی $P_1(x_1\,|\,y_1)$ او $P_2(x_2\,|\,y_2)$ په یوه کرښه پراته دي.

د مساواتو عمومي بڼه ده:. $f(x) = a_1x + a_0$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګوالی: $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0$

$$P_1(x_x \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 =$$

$$= y_1 \mid - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

دا په دوه ټکو کې د کرښیزېومساواتو یو تولیزه بڼه ده .

په زیاتو ادبیاتو کې په لاندې ډول ده:

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; ; x_1 \neq x_2$ چیرته چې $y = f(x)$ باور لري.

د عملي کاروني لپاره لاندې بڼه مساعده ده:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

بیلګه:

$P_1(2 \mid -1); P_2(-3 \mid 2)$ په $f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ کي ځای په ځای کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{2-(-1)}{-3-2}(x-2)+(-1)=\frac{2+1}{-5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}-\frac{5}{5}$$
$$=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$$

تمرين:

د ^0F په ^0C باندې شميرنې لپاره يو تابع مساوات وليکئ

2.2.3.تمرين: د تابعمساواتو شميرنه

يو کرښيز مساوات د a_1 جګوالی لري او د P له ټکي تيريږي.

د f(x) تابعمساوات معلوم کړئ او د محورونو قاطع ټکي يا غوځټکي او ګراف انځور کړئ

اول - $P(2|-2)$ $a_1=\frac{1}{2}$ دويم - $P(-1|3)$ $a_1=\frac{3}{4}$

دريم - $P(3|-1)$ $a_1=2$ څلورم - $P\left(\frac{3}{2}\middle|4\right)$ $a_1=\frac{4}{5}$

يوه کرښه له ټکو P_1 او P_2 تيريږي.

د f(x) تابع مساوات پيدا کړئ او د محور قاطع ټکي او ګراف رسم کړئ.

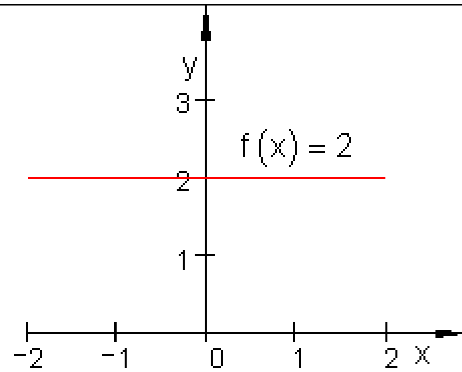
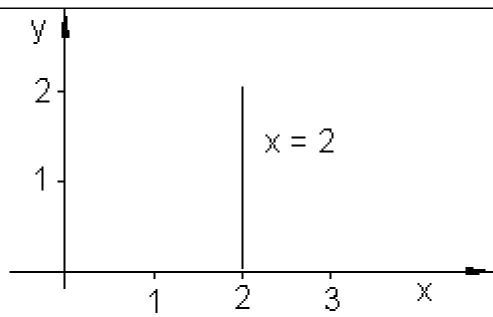
پنځم - $P_2(5|4)$ $P_1(2|1)$ شپږم - $P_2(2|3)$ $P_1(-3|-2)$

اوم - $P_2(4|-1)$ $P_1(-2|3)$ اتم - $P_2(3|1)$ $P_1(-4|-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $P_2(4 \mid -1)$ $P_1\left(-3 \,\middle|\, \frac{9}{2}\right)$ لسم - $P_2\left(\frac{7}{2} \,\middle|\, 4\right)$ $P_1(-4 \mid -2)$

. د کرښبرابروتو ځانګړی حالت:

د x- محور سره غبرګ کرښه: $f(x) = a_0 ; a_0 \in \mathbb{R}$ يو د 0 درجي تام راشنل تابع ده او ثابته تابع هم بلل کيږي. x- محور هم يوه ثابته تابع ده د تابع مساوات $f(x) = 0$ سره. د ثابتي تابع جګوالی تل صفر دی.	
د y- محور سره غبرګه. $x = a ; a \in \mathbb{R}$ کرښه د محور سره غبرګه (موازي) ځغلي. دا د يوه تابع مساوات سره نه شي ليکل کيدی، ځکه چي يواځنی تنظيم نه شته يعني تابع نه ده. $x = 0$ د y - محور مساوات دي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

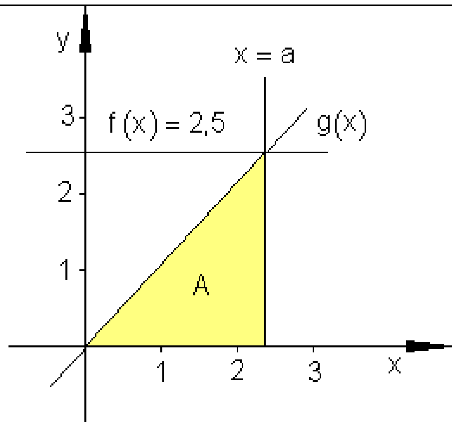
بیلګه:

یو $f(x) = 2,5$ ور کړ شوی او y- محور سره موازي دa واټن د $a > 0$ سره.

یوه سرچینیزه کرښه g د($P(a \mid f(x))$ ټکي څخه تیریږي.

دا دx - محور او د y- محور سره غبرګې کرښې سره یو مثلث جوړوي.

a داسې وټاکی چې وسطحه د سطحې څلور واحدونه (یوونونهFE) جوړ کړي. د دې حالت لپاره د$g(x)$ تابع مساوات څنګه دي؟



$A=\frac{g\cdot h}{2}$ د $g = a$ او

$h=f(x) = 2,5$ سره

د مثلث سطه $\Rightarrow A=\frac{2,5\cdot a}{2}=\frac{5}{4}a$

$A=4\Leftrightarrow\frac{5}{4}a=4\,\Big|\cdot\frac{4}{5}\Leftrightarrow a=\frac{16}{5}$

(ځکه چې د سرچینې کرښه $g(x)=a_1x\ (a_0=0$

د جګېدو له مثلث څخه $a_1=\frac{5}{2}:\frac{16}{5}=\frac{25}{32}$

د تابع مساوات : $g(x)=\frac{25}{32}x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین: د ^0F بدلون شمیرنه په ^0C لپاره د تابع مساوات ولیکئ

حل :

د ^0C اړونه یا بدلون په^0F د متحولې لپاره دا معنا لري:

x په ^0F مستقله یا خپلواکه متحوله ده او $y = f(x)$ په^0C بلواکه یا تابع متحوله ده.

$$212\,^0F \triangleq 100\,^0C \Rightarrow P_1(212\,|\,100) \quad \text{او} \quad 32\,^0F \triangleq 0\,^0C \Rightarrow P_1(32\,|\,0)$$

دا چې د حرارت الو ترمنځ یوه کرښیزه ا ړیکه پرته ده، نو ټکي P_1 اوP_2 په یوه کرښه پراته دي.

د کرښې عمومي کرښیزه بڼه په دې ډول ده:. $f(x) = a_1x + a_0$

دلته ضریبونه a_1 او a_0 د ټاکلو دي.

جګوالی: $$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100-0}{212-32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0$$

ټکي ازمایښت د $P_1(32\,|\,0)$ سره.

$$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9}\cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{8} + a_0 = 0 \,|\, -\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$$
$$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x-32)$$

د ^0F اړونې په ^0C لپاره باور لري.

$$^0F \text{ in } ^0C \text{ gilt: } f(x) = \frac{5}{9}(x-32)$$

xپه ^{0}F او y په ^{0}C .

پوښتنې:

کرښيزي توابع III

لومړی: د g کرښو مساوات وټاکی

الف: $P_1(-4|-2)$ او $P_2(2|0)$ په g پراته دي،

ب- g په $P_1(-3|1)$ او $P_2\left(1|\frac{11}{3}\right)$ کې ځغلي

پ- $P_1(1|-2)$ او $P_2(-2|10)$ په g پراته دي

ت- g محورونه په x = 2 او y = 6 کې غوڅوي(قطع کوي)

ټ- g له (P(-6;1 تیریږي او له h سره غبرګ دی د $h(x)=-\frac{2}{3}x+2$ مساوات سره

ث- g جګوالی $a_1=-4,5$ لري او له (P(1;1,5 څخه تیریږي.

ج- g جګوالی $a_1 = 3$ لري او له P(1;,1,5) څخه تیریږي

چ- g دx محور په x = 3 کې غوڅوي او د hکرښه د h(x) = 4x - 2 سره په x = -1 کې غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم: د دوه کرښو g او h کرښيز مساوات پيدا کړی، چې له ټکی P(3;-2) تيرېږي.

دريم: يوه کرښه g د کرښيز تابع f(x) سره پيدا کړی، چې له ټکو P_1 او P_2 تيرېږي او تابع مساوات وټاکی.

الف- $P_1(1,5 \mid 3);\, P_2(3 \mid 2,5)$ ب - $P_1(-3 \mid 5);\, P_2(1 \mid 2,5)$

پ- $P_1(4 \mid 0);\, P_2\left(-1 \mid -\sqrt{2}\right)$ ت - $P_1(k \mid 3);\, P_2(2k \mid -1)$

ټ - $P_1(1 \mid 0);\, P_2(-1 \mid k+1)$ ث - $P_1\left(2\sqrt{k} \mid \sqrt{2k}\right);\, P_2\left(\sqrt{k} \mid 0\right)$

څلورم: د f(x) کرښيزې تابع مساوات وټاکی.که معلوم وي:

الف-کرښه د $a_1 = \frac{5}{4}$ جګيدني سره له P(4;-1) څخه تيرېږي.

ب-کرښه له ټکو $P_1(-5 \mid -3)$ او $P_2(0 \mid 3)$ څخه تيرېږي.
پ-کرښه له P(4,5;2,7) ټکي تيرېږي. او د x محور سره 45° مايله ده.

ت-کرښه له P(-1,5;0) تيرېږي او دh(x) = 2x+2 سره غبرګه (موازي) ده.

پنځم: کر ښه g و کاږی او کرښيز مساوات وټاکی.

الف- $P(3 \mid -1) \in g$ او g دy محور سره غبر؛(موازي) څغلي.

ب- $P(3,5 \mid 2,5) \in g$ او g دx محور سره موازي څغلي.

پ- g له P(-5;1)تېرېږي او د $h(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ سره موازي ده.

ت- g له $P\left(1 \mid \frac{3}{2}\right)$ تېرېږي او د کرښو سره چې له ټکو $P_1(-2 \mid -3)$ او $P_2\left(\frac{3}{2} \mid -5\right)$ تېرېږي، موازي څغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

کرښيز مساوات VI

لومړی –

د لاندې کرښيزو توابعو ګرافونه و کاږی او د ارزښت سټ يا – دېرى W و ټاکی

الف- $f(x) = -2x + 2;\ D = \{x \mid -3 \le x \le 5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4};\ D = \{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3;\ D = \{x \mid -2 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x) = 3x - 6;\ D = \{x \mid -1 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

دويم –

ټکی P_1 او P_2 ورکړ شوي، چې په کرښه پراته دي. د f (x) تابعمساوات پيدا کړی او ګراف يي وکاږی

الف- $P_1(3 \mid 4);\ P_2(7 \mid -1);\ D = \{x \mid 0 \le x \le 7\}_{\mathbb{R}}$

ب - $P_1(-8 \mid 1);\ P_2(2 \mid -3);\ D = \{x \mid -8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

پ - $P_1(4 \mid 3);\ P_2(-7 \mid -1);\ D = \{x \mid -7 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $P_1(-4 \mid -4);\ P_2(4 \mid 2);\ D = \{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

دريم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې مساواتو حلسټ یا حلډېرۍ پیداکړئ. مساوات چې کسری راشنل ترمونه ولري، باید د هغو تعریفورشو هم ورکړل شي.

الف- $9 = 5 - x$ ب - $25 = x + 8$ پ - $\frac{3}{4} = \frac{2}{3} - x$ ت - $\frac{1}{3} - x = \frac{5}{9}$

ټ - $16 - 4x = 88$ ث - $a + bx = 3b + a$ ج - $2 = (5 + x) - 8$

چ - $9 + (5 - x) = 6$ ح = $(x-6)(x+3) = (x-5)(x-2)$ خ -

خ - $(x+3)(x+7) = (x+2)(x+9)$ $\frac{x}{4} + \frac{5x}{6} + \frac{5}{6} = \frac{x}{2} + x$

ځ - $\frac{3}{2x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{9} + \frac{7}{3x}$ د - $\frac{ax}{b} - \frac{b}{ac} = \frac{a}{bc} - \frac{bx}{a}$ ډ - $\frac{x}{a-b} + \frac{x}{a+b} = a$

ذ- $23a - \{5ax - [9ax + (12a - 6ax)] - (3a - 8ax)\} - 15a = 5ax - 7a$

ځلورم:د لاندې توابعو د محورونو سره د تقاطع ټکي هم پیدا کړئ.

الف- $f(x) = 2x - 7$ ب - $f(x) = -2x + 6$ پ - $f(x) = 3x - 3$

ت - $f(x) = 2x + \frac{2}{3}$ ټ - $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ ث - $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{4}{5}$

ج - $f(x) = 3{,}5x + \frac{1}{2}$ چ – $f(x) = -2{,}5x + 2\frac{1}{2}$ ح - $f(x) = 1\frac{3}{4}x - 3\frac{2}{3}$

پنځم: د یوې کرښې دوه ټکي P_1 او P_2 ورکړ شوي د لاندې توابعو له I تر IV لپاروه وټاکئ:

I. $P_1(3 \mid 4); P_2(7 \mid -1); D = \{x \mid -2 \le x \le 8\}_{\mathbb{R}}$

II. $P_1(-8 \mid 1); P_2(2 \mid -3); D = \{x \mid -8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

III. $P_1(4 \mid 3); P_2(-7 \mid -1); D=\{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

IV. $P_1(4 \mid 2); P_2(-4 \mid -4); D=\{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

الف- د جګیدنې ضریب.m

ب - د کرښې تابعمساوات

پ - دy محور سره د تقاطع ټکی P_y

ت - د تقاطع ټکی P_y د x محور سره

ټ - پهW باندې ارزښتډېری .W

ث - په D کې د تابع ګراف

شپږم: لاندې مساواتسیستمونه حل کړی:

الف- $\begin{cases} \text{I} & 5y-3x=1 \\ \text{II} & x=y+1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} \text{I} & 4x+5y=32 \\ \text{II} & y=5x-11 \end{cases}$ پ - $\begin{cases} \text{I} & 15y-4x=-50 \\ \text{II} & x=y+7 \end{cases}$

ت - $\begin{cases} \text{I} & 3x=y+15 \\ \text{II} & 2y-10=2x \end{cases}$ ټ - $\begin{cases} \text{I} & 2y=2x-40 \\ \text{II} & 3x=10-2y \end{cases}$ ث - $\begin{cases} \text{I} & x+y=a+b \\ \text{II} & x-y=a-b \end{cases}$

پوښتنې

کرښیز مساوات IX

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:کرښه g له ټکو P1(4;-3,5) او P2(2,5;-1) تیرېږي.

کرښه h له ټکو $P_3(5|2,5)$ او $P_4\left(\frac{3}{2}|\frac{25}{3}\right)$. تیرېږي.

کرښې یو بل ته څه موقعیت لري یا څنګه پرتې دي؟

دویم:د f(x) کرښیزې تابع د تابع ترم او ارزښتساحه(ارزښتورشو) و ټاکئ، که صدق ولري:

الف- $f(0)=20\,;\,f(12)=32\,;\,x>0$ ب- $f(-3)=6\,;\,f(2)=-8\,;\,x\in[-3\,;\,3]$

دریم:

د f(x)کرښیزې تابع ګراف په 3 LE اوږدوالی واحده کیڼ لور

ته خوزېږي. د راکښل شوې کرښې د f*(x) مساوات څنګه دي؟

$$f(x)=\frac{5}{3}x-2 \quad D=\mathbb{R}$$

څلورم: د f(x) او g(x) توابع ورکړ شوې دي. د کوم ارزښت لپاره f(x) > g(x) صدق کوي؟

$f(x)=2x-3 \quad ; \quad g(x)=-0{,}5x+1 \quad x\in\mathbb{R}$

پنځم: یوه g(x)کرښه ورکړ شوې.. دا د یوې کرښې h(x) له خوا قطع کیږي. د h(x)مساوات وټاکئ، که باور ولري: $g(x)=-3x+2$

الف- قاطع یا غوڅی دx محور سره . ب - قاطع(غوڅی) په x = -5 کې

شپږم:

یوه د پیل کرښه د $a_1=-0{,}125$ جګوالي سره و داسی کښنول کیږي. چې کرښه h د مساوات	$h(x)=-1{,}5(x-2)$ ؛

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره دx په محور قطع کوي. راکښنه تشریح کړی او د راکښنل شوې کرښې ګراف و کاږی.	

اوم: یوه $f(x)$کرښیزه تابع ورکړ شوې. کرښه د $x = u$ مساوات سره د $f(x)$ ګراف په P کې قطع کوي او د x محور په Q کې قطع کوي. یوه سکیڅې ترتیب کړی.

الف- د P او Q کواوردینات وټاکی، که $f(x) = 0{,}75x + 2$ وي.

ب- دu د کوم ارزښت لپاره P دx محور پورته لور ته پرته ده.

ت- $P(u \mid f(u))$ په 1 څلوری یا ربع کې پروت دی.$R(0 \mid 0), Q$ اوP د یوه مثلث رآسونه (ککرټکي)جوړوي. د دې مثلث د مساحت A لپاره ترم وټاکی. u (محیط) داسي وټاکی، چې $A(u) = 10$ صدق وکړي.

اتم: دg کرښې ته موازي او عمود مساوات داسي وټاکی، چې له P ټکي تیر شي.

الف- $g: x + 2 - 3y = 0 ; P(0 \mid 3)$ ب- $g(x) = \frac{2}{3}x - 3 ; P(1 \mid 4)$

پ - $g(x) = -1{,}5kx ; P(1 \mid 0)$

نهم: کرښه g له ټکوP_1 اوP_2 تیریږي. دh کرښې ته یې ځای مطالعه کړی او د امکان په حالت کې یې د قاطع ټکی معلوم کړی.

$$P_1(-1 \mid 1{,}5) ; P_2(-2 \mid -2{,}5) \qquad h: \ -x - 6 - 4y = 0$$

لسم: و ښایی: کرښه g او کرښه h عمود دي.

$$g: \ y - \sqrt{2}x = 1 \qquad h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0$$

$$g(x) = -3x + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یولسم:

د A, B او C ټکي د یوه مثلث د رآس ټکي دي. د$k > 0$ د کوم ارزښت لپاره دا مثلث قایم الزاویه (ولاړګوډیز) دی؟ (ښی رآس په C پروت دی)	$A\left(\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right);B\left(-\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right);C(0\mid k)$

پوښتې

کرښیز توابع **XI**

لومړی-

$$f_1(x)=\frac{1}{4}x+2\frac{1}{4};f_2(x)=-4x-2;D=\{x\mid -9\le x\le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع f_1 (x) سره د دویمي کرښي د تابع(x) f_2 سره غوځیږي. وټاکی:

الف – د کواوردیناتونو x_s او y_s سره غوڅټکی S .

ب – د دواړو کرښو غوڅټکي د y محور سره .

پ – د دواړو کرښو غوڅټکي دx محور سره .

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کي .

دویم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4\,;\, D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(3 \mid y_s)$ کې د تابع $f_2(x)$ سره له کرښې څخه غوځيږي.

وټاکئ:

الف-د S پوره کواودينات

ب-تابع .$f_2(x)$.

پ-د دواړو کرښو غوځټکي د کواوردينات محورونو سره.

ت-په D کې د دواړو توابعو ګراف.

دريم:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1;\, D = \{x \mid -7 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(-4 \mid y_s)$ کې کې له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې پروتمحور په 7- کې غوځوي، غوځيږي.

وټاکئ:

الف – د S پوره کواوردينات.

ب – تابع $f_2(x)$.

پ – د دواړو کرښو غوځټکي د کواودينات د محورونو سره.

ت – د واړو توابعو ګراف په D کې..

څلورم –

د يوه درېکوډي يا مثل ټکي P_1, P_2 او P_3 ورکړ شوي دي. د درېکوډي د اړخونو تابع وټاکئ. پخوا له دې يو پلان نقشه ترتيب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(-6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(-2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(-4 \mid 3)$$

ب –

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(4 \mid 3)$$

پنځم -

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3 ; P_2(-2 \mid -3) ; D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع f_1 (x) سره د دویمې کرښې څخه د تابع f_2 (x) سره ، چې له ټکيP_2 تیریږي ، په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوځیږي.

وټاکئ:

الف - دf_2 (x) جګوالی m_2 .

ب- تابع f_2 (x) .

پ – د دواړو کرښو غوځټکی S .

ت - د دواړ کرښو محورغوځټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

کرښیز توابع XII

لومړی -

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3\,;\, P_2(2\,|\,-3)\,;\, D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له یوې دویمې کرښې د تابع $f_2(x)$ سره، چې له ټکي P_2 تیرېږي په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوڅېږي.

وټاکئ.

لومړی:

الف – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ب – تابع $f_2(x)$.

پ - د دواړو کرښو غوڅټکی S .

ت - د دواړو کرښو د محور غوڅټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

دویم –

د کرښې تابع $f_2(x)$ وټاکئ، چې پروتمحور په P_{x2} کې غوڅوي او له کرښې څخه د تابع $f_1(x)$ سره په S کې غوڅېږي. د واړو کرښو غوڅټکي وشمیرئ او د دواړو کرښو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف- $f_1(x) = \frac{3}{2}x + 6\,;\, P_{x2}(-6\,|\,0)$ ، $S\left(x_s \,\middle|\, \frac{3}{2}\right); D = \{x \mid -6 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 3\,;\, P_{x2}(4\,|\,0)$ ، $S(3 \mid y_s)\,;\, D = \{x \mid -1 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

دریم -

$$P_1(-5\,|\,5)\,;\, P_2(-1\,|\,-1)\,;\, S(x_s \mid 2)\,;\, D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 او P_2 تیرېږي او په ټکي S کې ولاړکونجیز له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره غوڅېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وټاکی:

الف- د $f_1(x)$ جګوالی m_1 .

ب – تابع $f_1(x)$.

پ – دS پوره کواوردينات.

ت – د$f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ – تابع$f_2(x)$.

ث – د $f_1(x)$ او$f_2(x)$ ګرافونه
څلورم -

$$P_1(5\,|\,5);\, P_2(1\,|-1);\, S(3\,|\,y_s);\, D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کربښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 اوP_2 څخه تیرېږي او په ټکي S کې ولاړکونجيزه له کربښې د تابع $f_2(x)$ سره غوځيږي.

وټاکی:

الف – د $f_1(x)$ جګوالی m_1 . ب - تابع $f_1(x)$.

پ - د S پوره کواوردیناتونه ت – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ - تابع $f_2(x)$. د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ګرافونه.

پنځم -

$$f_2(x)=3x-3;\, S\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{3}{2}\right);\, D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجيزه غوځيږي.

وټاکی:

الف - تابع $f_1(x)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوځتکي.

پ – د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پوښتنې

کرښيزې توابع برخه XIII

لومړی -

$$f_2(x)=\frac{4}{5}x+\frac{9}{10}\,;\,S\left(2\,\middle|\,\frac{5}{2}\right);\,D=\{x\,|\,-1\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجيز(قايم الزاويه) غوځيږي.

وټاکی:

الف: تابع $f_1(x)$.

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوځتکي.

پ – د دواړو توابعو ګرافونه په D کې.

$$g:\quad y-\sqrt{2}x=1\qquad\Rightarrow g(x)=\sqrt{2}x+1$$

$$h:-2y-\sqrt{2}x+6=0\Rightarrow h(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}x+3$$

د اورتوګوناليټي شرايط: $a_{1g}=-\frac{1}{a_{1h}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{1g} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad q.e.d$$

دویم:

د دوه کرښنو توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ورکړشوي او د يوې دريمې کرښې جګوالی m_3 د تابع $f_3(x)$ سره. تابع $f_3(x)$ داسې وټاکئ، چې ګراف يې د نورو دواړو کرښنو غوڅټکي څخه تير شي. د درېواړو کرښنو محور غوڅټکي وټاکئ او د درېواړو توابعو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف-

$$f_1(x) = -4x - 2 \,;\, m_3 = \frac{1}{4}$$

$$f_2(x) = 2x + 4 \,;\; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

ب –

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4} \,;\, m_3 = -4$$

$$f_2(x) = 2x + 4 \,;\; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

دريم: کرښه دتابع $f_1(x)$ سره له ټکي P_1 تيرېږي او له يوې دويمې کرښې چې له ټکي P_2 تيريږي په ټکي S کې غوڅيږي. توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ وټاکئ د هغو محورغوڅټکي اوپه D کې يې ګراف وکاږئ.

$$P_1\left(-2 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right); P_2(3 \mid 5); S\left(2 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right); D = \{x \mid -8 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

څلورم:

$$P_1\left(-1 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right); P_2\left(-3 \,\middle|\, \frac{11}{2}\right); D = \{x \mid -9 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره محور په 8- کې غوڅوي. $f_1(x)$ ته غبرګه یوه دویمه کرښه د تابع $f_2(x)$ سره پروت محور په 4- کې غوڅوي. دواړه کرښې له یوې دریمې کرښې چې تابع $f_3(x)$ لري او له ټکو P_1 او P_2 تیریږي په ټکو P_3 او P_4 کې ولاړکونجیزه(قایوم الزاویه) غوڅوي. وټاکئ:

الف- تابع $f_3(x)$ ب - تابع$f_1(x)$

پ – تابع $f_2(x)$ ت – د دریواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

$$A\left(-\frac{13}{2}\,\middle|\,-\frac{3}{2}\right);B(3\mid 2);D=\{x\mid -8\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د یوه قایوم الزاویه مثلث(ولاړکونجیز درې ګودي) څخه، چې ولاړ کونج(قایم الزاویه) یې پهC کې پرته ده، ټکي A اوB ورکړ شوي. د مثلث اړخ یا ضلع [BC] د تابع $f_3(x)$ سره د اوردینات یا ولاړ محور په 3 کې غوڅوي.

وټاکئ:

الف- د اړخ [AB] تابع $f_1(x)$ ب- د اړخ یا ضلعې [BC]تابع $f_3(x)$

پ- د اړخ [AC] تابع $f_2(x)$ ت- د ټکي C کواوردیناتونه

ټ په D کې ګرافونه.

پوښتنې

کرښیزې توابع **XIV**

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: $A(-8|-6);\ C(-1|5);\ D=\{x\,|\,-8\le x\le 2\}_{\mathbb{R}}$

له یوه قایمالزاویه مثلث، چې قایمه زاویه یې په B پرته ده، ټکی A او C ورکړ شوي دي. د مثلث ضلع (اړخ)[BC] د اوردینات محور (ولاړمحور) په 3کې قطع کوي.

دا وټاکئ:

الف-

$[AB] = f_1$; $[BC] = f_2$; $[AC] = f_3$ د مثلث درې د ضلعو توابع.

ب- د B ټکي کواودینات یا وضعیه قیمت کې د ټکي B محورونه

پ -په D کې ګراف.

دویم:

$A(-4|-1);\ B(2|-4);\ D=\{x\,|\,-4\le x\le 5\}_{\mathbb{R}}$

د یوه مثلث ټکيA او B ورکړ شوي دي. د مثلث [BC] ضلع دy محور په 12-کې قطع کوي; ضلع [AC] د x محور په 3- کې غوڅوي.

دا وټاکئ:

الف-تابع $f_1(x)$ ضلع .[AB] قطع کوي

ب - تابع $f_2(x)$ ضلع [BC] غوڅوي.

پ - تابع $f_3(x)$ ضلع [AC]

ت - د C ټکي وضعیه قیمتونه

ټ - د D ټکي وضعیه قیمتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: توابع $y = f(x) = 3x - 4$ او $g(x) = ax + 3$ ورکړ شوي.

د دواړو توابعو ګرافونه په ټکي $S(3 \mid 5)$ کې غوځوي.

د $h(x)$ تابع مساوات داسې وکاږئ، چې ګراف په ټکي S عمود څغلي. په یوه وضیه قیمتسیستم کې دریواړه ګرافونه رسم کړئ.

څلورم:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}\,;\ f_2(x) = -4x - 2\,;\ D = \{x \mid -10 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$$

د $f_1(x)$ تابع سره کرښه د دویمې کرښې د $f_2(x)$ تابع سره قطعه کوي.

دا وټاکئ:

الف- د S قاطع ټکی د x_s او y_s کواودینات سره.

ب - د دواړو کرښو د قاطع ټکي د x محور سره.

پ - د دواړو کرښو قاطع ټکي د x محو سره.

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

د $g(x)$ تابع ، چې په $f(x)$ عمود ده پیدا کړئ. د $g(x)$ ګراف د y محور په $P_y(0 \mid 3)$ ټکي قطع کوي. دواړه کرښې په یوه وضعیه قیمت سیستم(پروت ولاړ سیستم) کې رسم کړئ.

الف - $f(x) = -2x + 2$ ب - $f(x) = 3x - 6$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ت - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

شپږم: د دواړو کرښو غوځټکی (نقاط تقاطع) و ټاکئ او ګراف یې وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f_1(x)=\frac{1}{4}x+2\frac{1}{4}\,;\,f_2(x)=-4x-2\,;\,D=\{x\,|\,-10\le x\le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x)=-2x+2\,;\,f_2(x)=3x-6\,;\,D=\{x\,|\,-2\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f_1(x)=-\frac{2}{3}x+4\,;\,f_2(x)=\frac{3}{2}x-2\frac{1}{2}\,;\,D=\{x\,|\,-1\le x\le 7\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f_1(x)=-\frac{3}{8}x+1\,;\,f_2(x)=\frac{5}{6}x+5\frac{5}{6}\,;\,D=\{x\,|\,-8\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

n -مه درجه ټول مات- یا راشنل توابع

n -مه درجه ټول راشن لفنکشن

یو تابع $f(x)$د

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

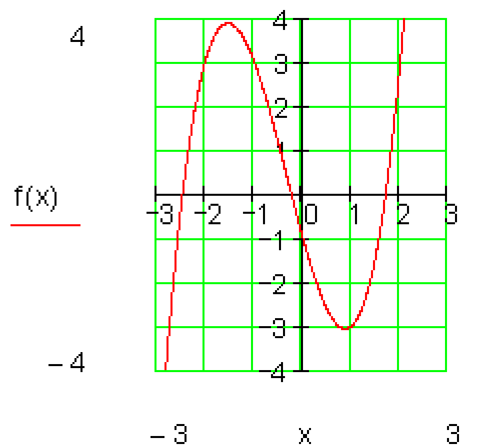
سره n -مه درجه ټول راشنل تابع بلل کیږي.

عددونه $a_n\,;\,a_{n-1}\,;\,a_{n-2}\,;\,\ldots\,a_2\,;\,a_1\,;\,a_0$ ضریبونه بلل کیږي.

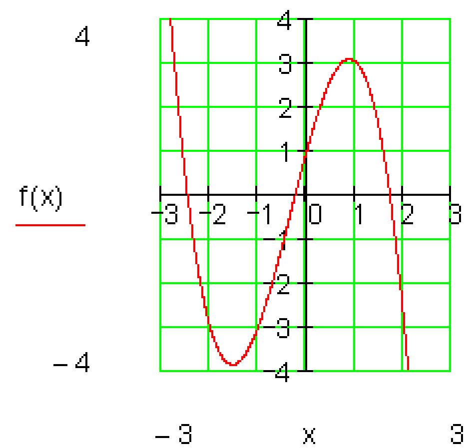
ټول راشنل یا هوښیار توابع د توان توابعو یوځای اینوولو له لارې لاس ته راځي.

بیلګې:

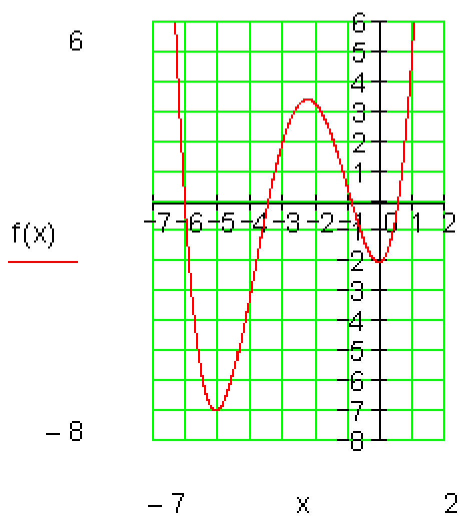
(c) ketabton.com: The Digital Library



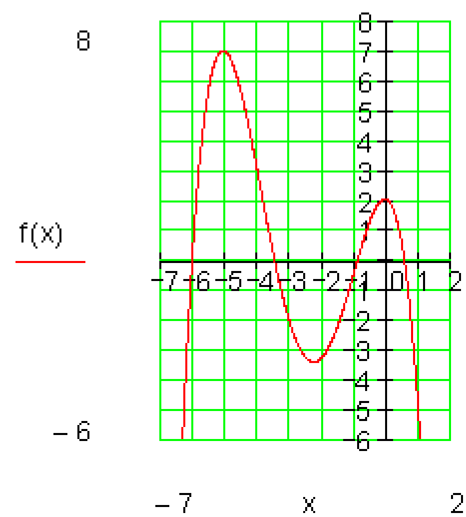
$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$



$f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 1$



$f(x) = 0,2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x - 2$



$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x + 2$

د گراف تلنه

جمله:
د ټول راشنل تابع گراف تلنه د خورا جگ توان زیاته وونی (د جمعي غړي) سره تاکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	n جوړه	n ناجوړه(طاق)
$a_n>0$	تلنه له II و I ته.	تلنه له III و I ته.
$a_n<0$	تلنه له III و IV ته.	تلنه له II و IV ته.

بيلګه: د الماي پينتو: ناجوړه(طاق) جوړه (جفت) ناجوړه

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7 \qquad n = 3\ (\text{ungerade}) \wedge a_n = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - I}}$$

$$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7 \qquad n = 4\ (\text{gerade}) \wedge a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - IV}}$$

$$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9 \qquad n = 5\ (\text{ungerade}) \wedge a_n = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$$

سيومتري

ګومان مو نږدې دی، هغه توابع، چې فقط د جوړه جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، محور سيومتريک دي او توابع چې فقط د ناجوړه(طاقو) جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، ټکی سيومتريک دي.

جمله

د يوه ټولراشنل تابع ګراف تيم هلته محورسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط جوړه جګعددونه ولري.

د يوه ټولراشنل تابع ګراف ټيک هلته ټکيسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط ناجوړه (طاق) جګعددونه ولري.

بيلګه:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

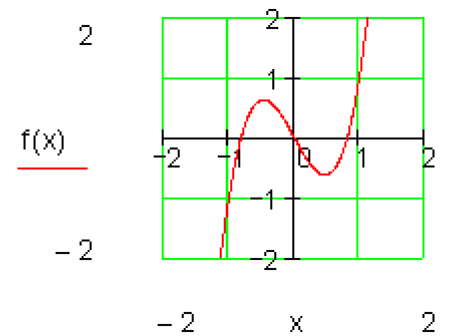
$$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$$

محورسیومتریک

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -\left(3x^3 - 2x\right) = -f(x) \Rightarrow$$

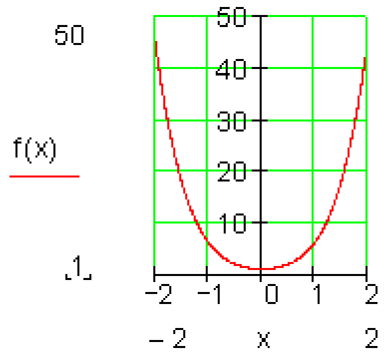
تکی سیومتریک



$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

سرچینې ته سیومتریک دی

(تکی سیومتري)



$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

yمحور ته سیومتریک دی

(محورسیومتریک)

تمرینونه:

د ټول هوښیارو توابعو خویونه.

د لاندې تاوبعو په سیمتری، ټلنه او د صفرځایونو تعداد یا ګټون باندي وېناوې وکړی.

لومړی - $f(x) = 2x^2 - 1$ دویم - $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ريم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 2$ ځلورم - $f(x) = -x^5 - x^3 + x$

پنځم - $f(x) = x^6 - x^4 + 1$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^2 - 2x$

اوم - $f(x) = \frac{1}{10}x^7 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$ اتم - $f(x) = \frac{1}{100}x^{10} - \frac{1}{50}x^6 + \frac{1}{10}x^2$

نهم - $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x - 1$ لسم - $f(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x$

په یوه خوښه ټکي ته سیومتریک

که د یوه ټکي سیومستري تابع ګراف په خوښه راکښل شي، نو سیومتري سرچینې ته ځي، چې موږ یې ټکی سیومتري بولو له منځه ځي. نسبت و موخښتکی ته دا ساتلې پاتې کیږي.

بیلګه:

د $f(x)=0,5x^3-1,5x$ تابع ګراف ټکی سیومتریک دی، یعنې سرچینې ته سیومتریک.

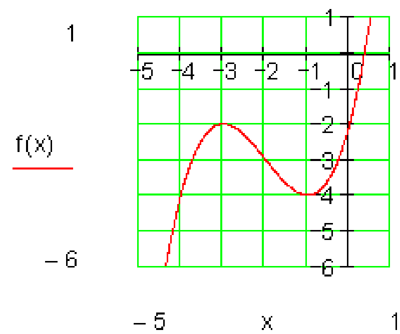
دا ګراف دې په ۲ واحدونو یا یوونونو کینې لور ته او په ۳ یوونونو یا واحدونو کښته لور ته راکښل شي.

د راکښلشوي ګراف تابع مسساوات دي:

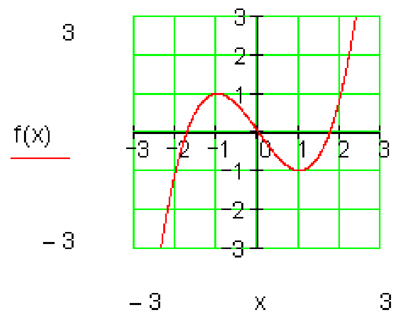
$$g(x) = 0,5(x+2)^3 - 1,5(x+2) - 3 = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$$

$g(x)$ و ټکی $P_0(-2|-3)$ ته سیومتریک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$



$f(x) = 0,5x^3 - 1,5x$

کواوردينانسيستم د گراف په بنه کوم رول نه لوبوي. تنها تابع مساواتوتغير خوړلی.

د حالت بيلگه: بايد وازمايل شي، چې ايا د دريمي درجې د يوه ټول هوښيار تابع گراف يوه ټاکلي ټکی ته ټکی سيومتريک دی.

ترمخ راوړنه.

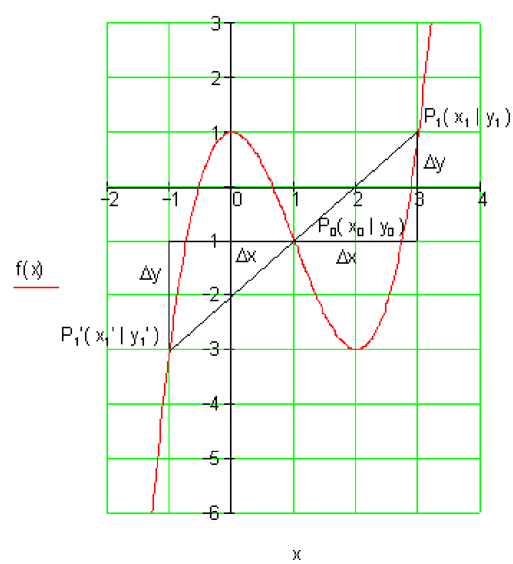
چمتووالی:

د ټکو کواوردينات لپاره باور لري:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y$$
$$x_1{}' = x_0{}' - \Delta x$$
$$y_1{}' = y_0{}' - \Delta y$$
$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$\Delta y = y_1 - y_0$$

د هنداره-يا منعکس شوي ټکو کواوردیناتونه:

$$x_1{}' = x_0 - (x_1 - x_0) = \underline{\underline{2x_0 - x_1}}$$
$$y_1{}' = y_0 - (y_1 - y_0) = \underline{\underline{2y_0 - y_1}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دې قاعدې یا لار سره تل کېدی شي پهP_0 و P_1 ته یوه هندارونه یا انعکاسونه کې اړونده هندارونه P_1' وټاکل شي.

بیلګه:

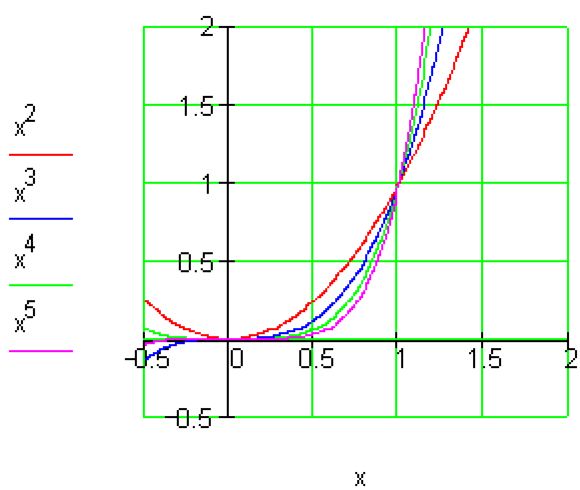
که هنداورنه په ګراف نه وي پرته ، نو ګراف وP_0 ته ټکی سیومتریک نه دی.

پوښتنې

ټول مات- یا راشنل توابع I

د توانتوابعو خویونه

لومړی –

	دا ترخنګ په 1 . ځلورمه کې ګراف تر څېرنې لاندې ونیسی د x ارزښتونو لپاره د 0 او 1 ترمنځ دجګو درجو یو د توان تابع ګراف پروت دی د یوه توان تابع د ګراف لاندې یا کښته د ټیټې درجې. د$x > 1$ لپاره دا ټیک برعکس کېدونکې دي. د دې حالت لپاره لایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – د دریمې درجې توان تابع کراف دې په دوه واحده کینې لور ته او ترڅنګ په درې واحده پورته لور ته و کښل شي.

د دې راکښل شوې تابع مساوات لپاره دې د تابع مساوات ورکړ شي.

دریم –

د څلورمې درجې توان تابع ګراف دې په درې واحده ښی لور ته او پسې تړلی دې په دوه ضریبه وغزول شي.

الف – د راکشل شوي ګراف لپاره تابع مساوات ورکړئ

ب – وښایی، چې ګراف نه محور – او نه ټکی سیومتریک دی.

څلورم –

په کوم توان تابع $f(x) = x^n$ کې ټکی په ګراف اړه لري؟

د دې توان توابعو مساوات ورکړئ.

الف - $P(-3 \mid -27)$ ب - $P(-2 \mid 16)$ پ - $P(0,5 \mid 0,25)$ ت - $P\left(\frac{1}{3} \middle| \frac{1}{27}\right)$

ټ - $P(0,1 \mid 0,0001)$ ث - $P(-1 \mid 1)$ ج - $P(-2 \mid 8)$ چ - $P\left(\frac{3}{4} \middle| \frac{81}{256}\right)$

پنځم –

د لاندې توان توابعو سیومتري او د ګراف تلنه وټاکی او د هر یوه ارزښتډېری(ارزشتسټ) او درجه ورکړې.

الف - $f(x) = 4x^3$ ب - $f(x) = -160x^2$ پ - $f(x) = -1500x$

ت - $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$ ټ- $f(x) = 5$ ث - $f(x) = -25x^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم –

لاندې تابع مساوات د پولینوم په بڼه انځور کړی.

هر ځل یې درجه ورکړی.

الف - $f(x)=(x-2)^2-4x^3$ ب- $f(x)=4(x+5)^3+(x-2)(x+2)$

پ- $f(x)=2x^3-(x-1)^2$ ت - $f(x)=(x-4)(x+1)^2$

ټ - $f(x)=(x^2-4)(x^3-x^2+4)$ ث - $f(x)=\frac{x-5}{8}(x-2)+\frac{3}{4}x^2$

اوم -

دلیل راړی:

د یوه ناجوړه(طاق) درجې ټولراشنل تابع ګراف دx محور لږ ترلږه په یوه ځل غوځوي.

دا هلته هم باور لري که درجه حوړه یا جفتوي؟

پوښتنې

ټول راشنل توابع II

سیومتری او تلنه

لومړی – و څېړی، چې ایا f(x) یو ټولراشنل تابع دی. په ورکړشوي حالت کې د تابع ګراف، درجه او د ضریبونو $a_0; a_1; a_2; ...$ an ارزښتونه ورکړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f(x)=2$ ب - $f(x)=4x$ پ - $f(x)=2^x$ ت - $f(x)=\frac{x^3-4x}{8}$

ټ - $f(x)=\sqrt{3}x^4$ ث - $f(x)=\frac{1}{x}$ ج - $f(x)=\sqrt{x}$ چ - $f(x)=\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

ح - $f(x)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$ خ - $f(x)=16x^3-2x^2+5x^2-4$

دویم – د لاندې ټولراشنل توابعو څخه کوم يې محور سيومتريک او کوم يې ټکی سيومتريک دي؟

الف - $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=x^3+3x+1$ پ - $f(x)=(x-2)(x+2)$

ت - $f(x)=x^6-6x^2+\sqrt{3}$ ټ - $f(x)=(x-2)^3(x-1)$ ث - $f(x)=x^4-\sqrt{5}x^2$

ج - $f(x)=\left(2x^4+2x^2+5\right)x$ چ - $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)(x+1)(x-1)$

ح - $f(x)=1-3x^2+x^6$

دريم – د c متحوله داسې وټاکئ، چې د تابع ګراف ټکی سيومتريک او همداسې محورسيومتريک شي.

الف - $f(x)=x^3+4x+c$ ب - $f(x)=(x-c)(x+4)$ پ - $f(x)=x^5+x^c$

ت - $f(x)=x^3\left(x^2-cx\right)$ ټ - $f(x)=c+x^3$ ث - $f(x)=4x^3+x^2+cx^2+5x$

څلورم : د لاندې توابعو د ګراف تلنه معلومه کړئ.

الف - $f(x)=2x^5-6x^3$ ب - $f(x)=-4x^4+3$

پ - $f(x)=2x-5$ ت - $f(x)=-2x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ ـ $f(x)=4x^4-3x^2+4x-5$ ث ـ $f(x)=-6x+3$

ج ـ $f(x)=4x^4+3x^3-6x^5$ چ ـ $f(x)=-2x^5+6x^3$

پنځم ـ د لاندې توابعو د ګراف تلنه او سيومتري ورکړئ.

الف ـ $f(x)=\sqrt{3}x^2-\sqrt{5}x^4-2$ ب ـ $f(x)=x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(8-\frac{1}{2}x\right)$

پ ـ $f(x)=5x^6-4x^4+5$ ت ـ $f(x)=x^5+x^3-2x$

ټ ـ $f(x)=5$ ث ـ $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(x^2+6x+9\right)$

ج ـ $f(x)=x^5+4x^4+4x^3$ چ ـ $f(x)=\left(4x^2-4\right)\left(x^3+8x^2+16x\right)\left(x^3+27\right)$

ح ـ $f(x)=-3$ خ ـ $f(x)=-x^5+x^3-2$

شپږم : د لاندې تابعو صفرځيونه وشمېرئ:

الف ـ $f(x)=(x-4)(x-2)(x+1)$ ب ـ $f(x)=(x-4)(-x+2)$

پ ـ $f(x)=x(x+5)^2$ ت ـ $f(x)=3(x-4)^3(x+2)$

ټ ـ $f(x)=(2x-4)(x+3)x^3$ ث ـ $f(x)=x^3-2x^2$

د پولراشنل توابعو محور غوځېکي (د محور د تقاطع نقطی)

د پولراسنل توابعو محور غوځېکي (د محور د تقاطع نقطی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y محور سره غوڅټکی $P_y(0|y_s)$: $P_y(0|y_s)$ شرط: $y_s = f(0)$

بيلګه : د يا په معنا

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = 3 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$
$$\Rightarrow P_y(0|-3) \text{ oder } P_y(0|f(0))$$

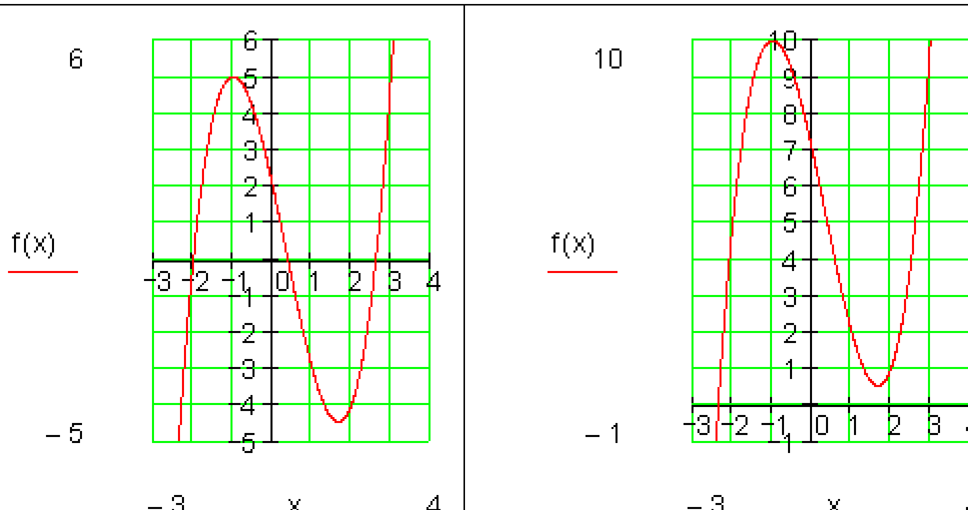
د P_y د y کواوردينات تل د ضريبونو a_0 سره کټمټ ده.

دا تل د تابع مساوات څخه لوستل کيدی شي.

د x-محور سره غوڅټکی $P_y(x_s|0)$ صفرځای : شرط: $f(x) = 0$

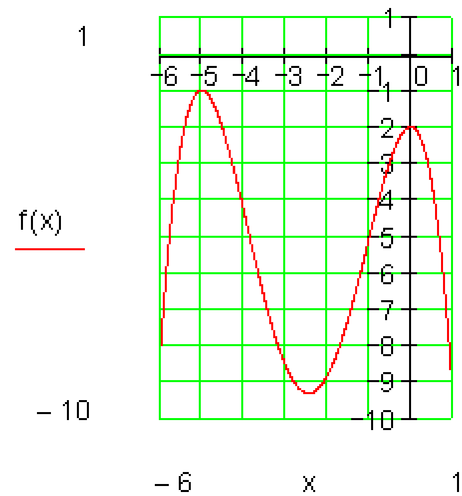
د مربع تابع (د دويمي درجې ټولراشنلتابع) څخه بوهيږو، چې دا دوه ، يو ، يا هيڅ صفرځايونه لرودی شي. دا د جګ درجو ټول راشنلتابع سره څنګه دی؟

بيلګه:



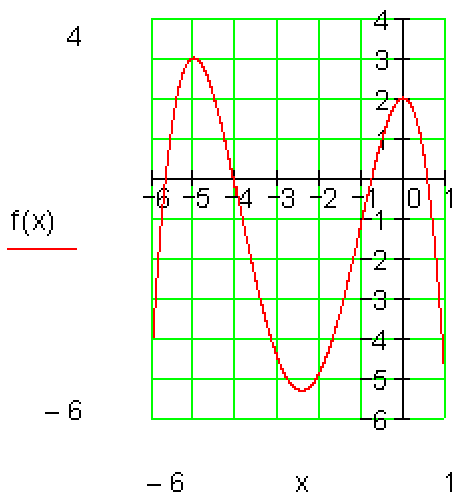
$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$	$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$
دري صفرځايونه لري	صفرځای نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x - 2$$

د صفرځای نه شتون



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x + 2$$

څلور صفرځايونه لري.

جمله:

یو د n -مي درجي تولراشنل تابع زيات له زياته n صفرځايونه لري.

کهn جوړه وي، نو دا لرترلږه يو صفرځای لري.

د صفرځايونو شميرني لار(تګلار)

د فکتوري کونو يا صريبونو تګلار:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

فاكتور x له نوکانو راوتلی شي.

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 2x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

او په نوکانو کي افاده يا وبينه صفر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

مربع مساوات دی.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \,|\, :2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$p = -1;\ q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array}\right.$$

صفرځايونه :

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -1$$

د x محور سره غوځتکی

$$P_{x1}(0|0);\ P_{x2}(2|0);\ P_{x3}(-1|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

(پورته) د کربنيز ضريبونو ضرب

د بدلون قانون substitution:

يادونه: په دې معنا چې د يوې اووښتونې يا متحولې لپاره بله متحوله ځا په ځای کوو.

$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ بې مربعيز (بي ځلوريز) مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون: $x^2=z$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

بدلون په څټ- یا بیرته ګرځوو:

$$x^2 = z_1 = 9 \,|\, \sqrt{\ } \qquad x^2 = z_2 = 4 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{9} \qquad |x| = \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3 \qquad x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

د x محور سره غوځتکی

$$P_{x1}(3|0); P_{x2}(-3|0); P_{x3}(2|0); P_{x4}(-2|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

د کرښیز ضریبونو ضرب

پوښتنې

محور غوځتکي او د تیولراشنل یا ماتتوابعو ګرافونه II

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړۍ: د درېيمې درجې يو ټولهوښيار يا ــراشنل تابع سرچينې سره سيومتريک ده، که
الف- له ټکو $P_1(1|2)$ او $P_2(3|-2)$ څخه تيره شي.
ب- که کرښهg د $g(x)=3x$ سره پارابول په$P(0|0)$ کې لمس کړي.
دويم: تابع $f(x)$ د پيژندورشو يا تعريف ساحې$D = IR$ سره ورکړ شوې ده. تابع$f(x)$ په سيومتري وڅيړۍ، صفرځايونه وشميرۍ او ګراف وکاږۍ.

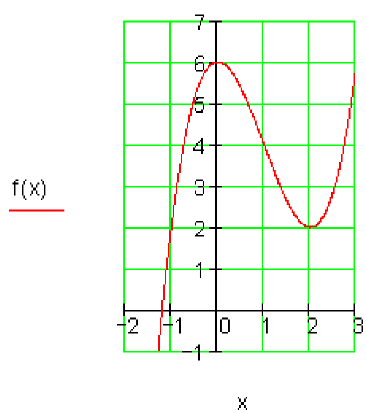
الف – $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2$ ب – $f(x)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

پ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$ ت - $f(x)=\frac{1}{48}x^3-x$

ټ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$ ث - $f(x)=\frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$

ج - $f(x)=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2$ چ = $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{9}{2}$

دريم: تابع $f(x)=x^3-3x^2+6\,;\,D=\mathbb{R}$ ورکړشوې ده.



الف - وښايۍ:
د $f(x)$ صفرځاى د (1- ; 2-) ترمنځ پروت دى
مدلل کړۍ، چې$f(x)$ ټيک يو صفرځاى لري، دا ګراف بايد څنګه راکښل
شي، چې له هغې سره دا ټيک دوه صفرځايونه ولري؟
ب- کرښه $x = u$ د $f(x)$ ګراف په ټکي Q او د x محور په P کې غوڅوي.
د لاندې درېګوډي يا مثلث 0PQ سطحه د$u = 2$ لپاره وښايۍ.
د مثلث د (خوندي) سطحې ترم د u په واکوالي کې د $u > 0$ لپاره ورکړۍ.
$g(x)$ څومره صفرځايونه د $g(x)=3.f(x)$ سره لري؟
دلايل يې راوړۍ.

څلورم: تابع $f(x)=5x^3-10{,}8x+4$ ورکړ شوې ده. وښاى: $x=0{,}4$ يو صفرځاى دى.
پسې نور صفرځايونه وشميرۍ.

$f(x)=5x^3-10{,}8x+4\,;\,D=\mathbb{R}$

پنځم: د اووښتونې يا متحولې c په واکوالي کې د صفرځايونو تعداد وټاکۍ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=x^3+2x^2+2cx\,;\,D=\mathbb{R}$$

$$x^2+2x+2c=0\Rightarrow p=2\,;\,q=2c\Rightarrow D=1-2c$$
$$\text{für } D>0\Rightarrow 1-2c>0\Leftrightarrow c<0{,}5$$
$$\text{für } D=0\Rightarrow 1-2c=0\Leftrightarrow c=0{,}5\Rightarrow x_{2/3}=-1$$
$$\text{für } D<0\Rightarrow 1-2c<0\Leftrightarrow c>0{,}5$$
$$\text{für } c=0\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x+2)=0\Rightarrow x_2=0\,;\,x_3=-2$$

اړيکې:

د $c>0{,}5$ لپاره $f(x)$ تيک يو صفرځای لري:$P_x(0\,|\,0)$

د $c=0{,}5$ يا د $c=0$ لباره$f(x)$ تيک دوه صفرځايونه لري.

د$c<0{,}5$ او c د صفر سره نامساوي لپاره $f(x)$ تيک درې صفرځايونه لري.

پوښتنې

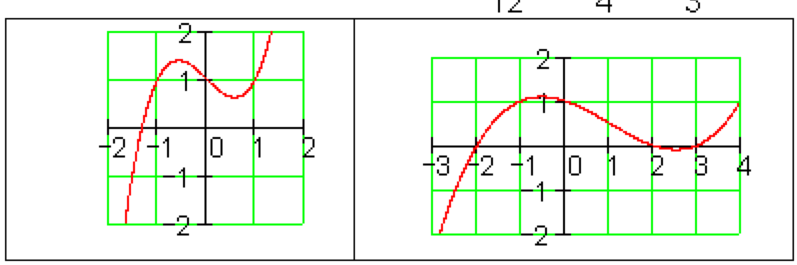
د ټول راشنل توابعو محور غوښتکي او ګرافونه III

تابع په يوه ګراف تنظيمېږي.

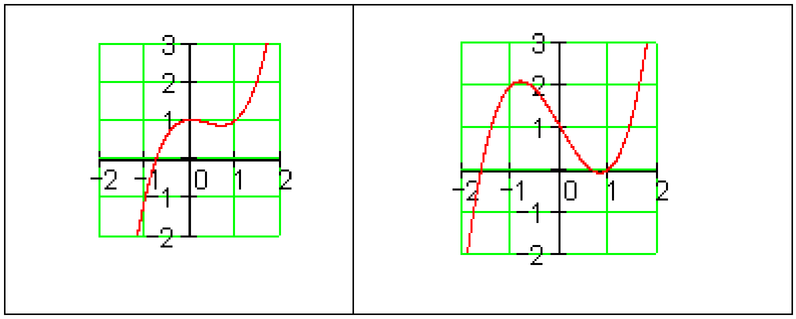
لومړی: هر د يوه تابع ترم سره تنظيم کړی او خپله پرېکړه په دليل کلکه کړی.

$$f_1(x)=x^3-x+1;\ f_2(x)=x^3-2x+1$$

$$f_3(x)=x^3-x^2+1;\ f_4(x)=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+1$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



دویم: هر هغه څوک چې د لایسنس اخستلو لپاره ځان چمتو کوي، باید وپوهیږي، چې د یوه بریک وهونکي موټر تمکیدني واټن په یوه وچ پاخه سرک)چې طبعأ باید هوار وي) د عکسالعمل لار او د بریک لار څخه یوځای جوړه ده. د لاندې د موټي قانون یا لار(د دري ګوتو) څخه کیدی شي د چټکتیا v په km/h د عکسالعمل لار r او د بریک لار b په متر وشمیرل شي.

د بریک لار: $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ همداسې $b = \frac{\left(\frac{v}{10}\right)^2}{2}$ ، د عکس العمل لار: $r = \frac{v}{10} \cdot 3$

د المان د3.3.04 راپن اخبار د اول له جولای1. Juli 2004 په وچ سره د تمځای لار په بل بریکلار شمیرل کیږي.(په افغانستن کې به داڅنګه وي ؟نه پوهیږم)

الف- تابع مساوات $s = f(v)$ وټاکې، د کوم سره چې د هرې تلنې د چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب – د لاندې تلل شوی چټکتیا$v = 0, 10, 20, 30, ... 50$ km/h لپاره په یوه ارزښت جدول کې د هغه هر یوه تمځای s سره یوځای کړی

پ – له دې سره د (60 ... 100 km/h) لپاره دs یو څونور ارزښتونه وشمیرئ او د دې تابع ګراف وکاږئ.

ت – د نوي بریک نیولو قانون(المانی) سره دا تراوسه شمیرل شوي ارزښتونه وشمیرئ او دا په همغه کواودینات سیستم کې وکاږئ او توله نتیجه په شننه یا کومنتار سره روښانه کړئ.

دریم: داتابعورکړ شوئ: $f(x) = x^3 - 0,5x^2 - 3x + 1,5 ; D = \mathbb{R}$

الف- وښایئ: $f(x) = 0,5(2x-1)(x^2-3)$

ب –ګراف د شوونتیا تر پولي ټیک وکاږئ.

پ – د x د کوم ارزښتونو لپاره$f(x)>0$ باور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

شننيزه ځمککچپوهنه يا تحليلي هندسه:

تحليلی هندسه(وکتورهندسه هم) د هندسي يوه برخه ده، چې د هندسي پرابلمونو د حل د پاره د الجبري مرستندوی موادو (په تولیزه توګه له کرښيز الجبر) څخه جمتو کوي. دا په ډېرو حالتونو کې ممکن کوي، چې ځمککچيزې پوښتنکوني سوچه شميرنيز حل کړی شو، بې له دې چې ليدوني يې مرستې ته راوبولي يعني چې شکل څنګه برېښي يا دی.

۱۶ - د سطحې شننيزه (تحليلي) هندسه

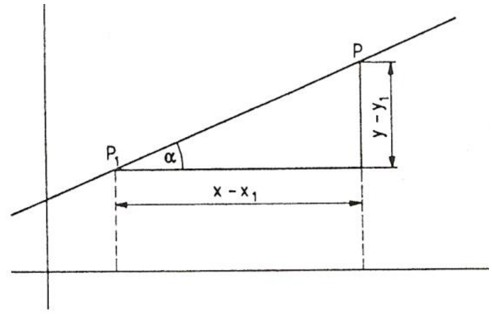
په دې برخه کی يوڅود تحليلي (شننيزې يا سپړنيزې) ځمککچپوهنې يا هندسي ټاکلي پرابلمونه څېړل کيږي.د تحليلي هندسي بنسټيزه تګلار به څرګنده (وشول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننيزې يا تحليلي څرګندونويی د هندسي خويونو جوړښت بنايي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو توټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چې يوه کرښه يواځنی کره تعين کړای شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو يا - مساواتو مختلفی بڼی شته دی. يوه کرښه د يوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کيدي شي . (ټکی او د ټکی ميلان معلوم دی) .

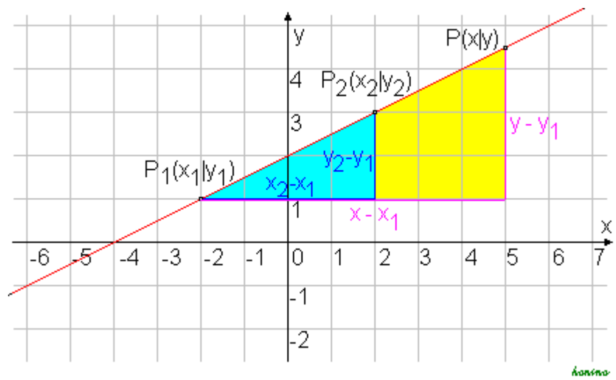
دلته دې(P1(x1 , y1دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د ځګيدو کونج،وي، چې د کرښې لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او(P(x,y په کرښه يو اووښتونی (واريابل) ټکی دی٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو د کرښې د ميلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته ځيره دې وکتل شي(لاددې ځيره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16,1)$$

پورته د کرښې ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو $x1= 0, y1 = b$ سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: (y - b = m (x - 0 په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16.2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

يوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دوه ټکي دي(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (څيره ش ۱۶ . ۲) د جګيدونکی يا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

او

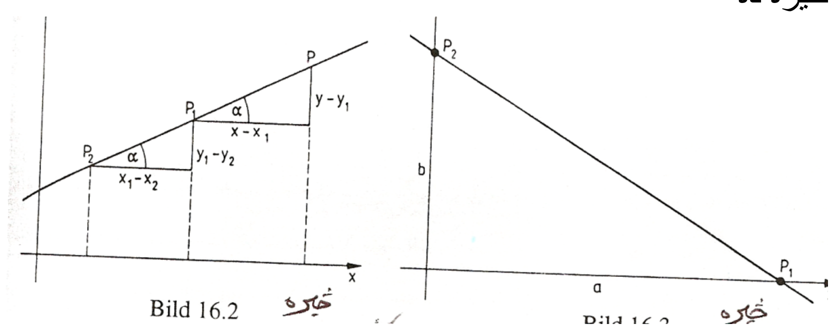
m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x \ - x_1};..................(16,3)$$

پورته د کربنی دوه ټکیزبرابرون

څيره ده



که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردينات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردينات x1= 0, y2 = b|= 0
سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کربنو د غوځي برابرون

څلور پورتنی کربنمساوات ټول په x او y کی لاينيز دي.د مساوات عمومي فورم)يا ټوليزه بڼه (داسی دی:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (16 . 5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)
دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري یا په بر کی نیسي
$y = y0$ ($A = 0$,$B|=0$)
او($x=x0(A|=0,B=0$ چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بیلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون یا لاینیز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تیریږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30°$ یی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی لیکل کیږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم یي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بیلګه ۱۶ . ۲ :

د لاینیزبرابرون یا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2) او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم $y=4x-8$ لرو(**اته** ناسم، په ځای یې شپږ دي)

بیلګه ۱۶ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون   سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او جګوالی يی 2/3 -   دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغيريدل په يو دy - ارزښت په 2/3 - تغيروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بيلګی په توګه
p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ځيره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې   )

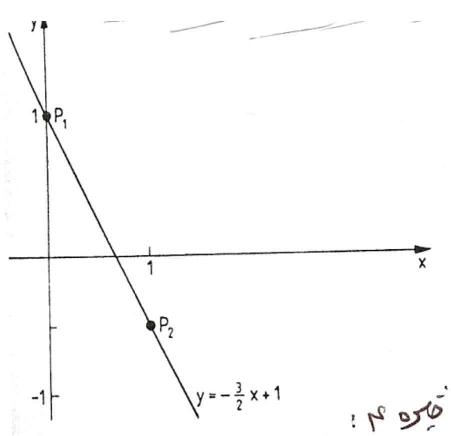
بيلګه ۱۶ . ۴ :

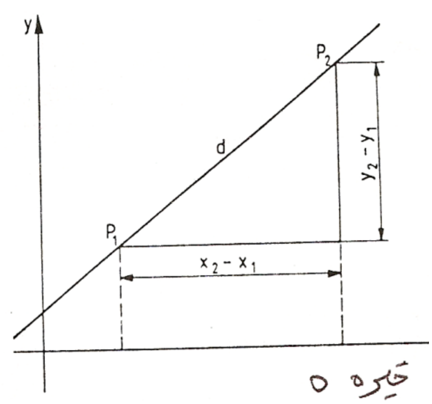
د کرښی د برابرونونو   عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوځيدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردينات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي.
په يوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d =   وي د پيتاګوراس(فيساغورس) له جملی (ځيره . ۱۶ . ۵) داسی ده

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};.........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ځيرې ۱۶ . ۴ او - ۵





بيلګه ۱۶ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درېکوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجتکي یی دادي(A(3,1),B(- 1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کښمتی) چی (یو د بلی سره) غبرګي نه وي ټیك یو غوڅټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی ، نو د دواړو کواوردیناتو برابرون باید پوره کړي . په دې حالت کي د غوڅټکي کواوردیناتو، د دوه لاینیزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونې یا

ناپیژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه ترې لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابرونسیستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي یو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.

که ناپای ډیرې اوبیونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه یوه کرښه ښایي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي یوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بیلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کرښو

الف) g2: -2x+y = 1,

ب) g3: 3x -y=5, ,

پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3

سره څیرو

اوبیونه : د g1 برابرونونو څیره داسی بدلیږي : 3x-y=2

الف) د برابرونونو سیستم 3x-y=2، -2x+y=1

ټیك یوه اوبنونه لري: x1=3 , y1=7

ددې څخه څرګندیږي چی ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوڅټکی دی .

ب) د برابرونونو سیستم

3x - y = 2

3 x - y = 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی نه لري : برابرونونه يو بل ردوي يه نه زغمي . د g1 او g2 کربنی يو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سيستم 3x-y=2

-x+(1/3)y=-2/3

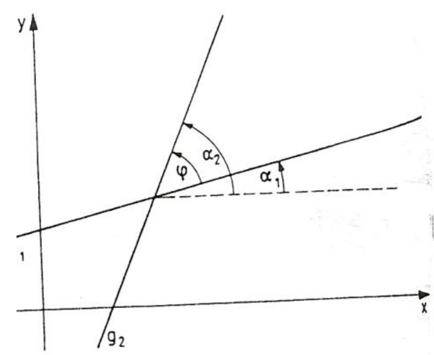
ناپای ډير ې اوبيونې يا حلونه لري. برابرونونه يو بل سره برابر يا يو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ٠

که د دوه کربنو

g 1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوڅکونج ϕ تاکو، نو د دواړو کربنو ځګيد کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت يا توپير)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶)



ځېره ۱۶ . ۶

د کربنی له برابرونونو پوهيږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زياتون تيورم (بنستيزه جمله) (برخه ۶ . ۵) ځخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

د کوم ځخه چی د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 . m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کربنو غوڅکونج دير.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته ځېرې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4}-1}{1+1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180-\phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښې یوبل سره غبرګې ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1+m_1.m_2} = 0$$

ګورو چې د 0 = m2 - m1 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښې یو په بل (نیغې) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m-m)/(1+m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

یعنی د m2= -1/m1 لپاره (m1|=0,m2|= 0)

په کرښه(y=y0 (m1=0 باندې کرښه(x=x0(m2=oe نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

m2 = m1 (16, 8)

د اورتوګونالیتې Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$m2 = -1 / m1$ (16 . 9)

بیلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي(P (2,-1 تیریږي، او له کرښی g1 : y = -2x +1 سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نیغه) ځغلي اوبیونه:

الف) د g2 کرښی میلان (جګوالی m2 = m1 = -2)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : (y+1=-2(x-2 همداسی y = -2x +3

ب) د g2 کرښي میلان یاجګیدنه ده m2=-1/m1=1/2 د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2

بیلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کیږي چي د(P1(1/3,-1/6 ټکی تیریږي او په کرښه چی له ټکو(P2(-1,1 او(P3(-2,-1 تیریږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له P3, P2 ټکو تیریږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري (y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تیریدونکی کرښي برابرون د m_2 میلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي: y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بیلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوځټکي S واټن له ټکي(P(6,13څومره دی او د کرښي برابرون څنګه دی چي د کواوردینات له سرچینی تیریږي او د S او P څخه تیریدونکی کربنه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوځټکي کواوردینات د لاندې برابرونونو سیستم څخه لاس ته راځي

2x-y=1

3x+2y=5

یعنی: xS=1 , yS=1

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \sqrt{(1-6)+(1-13)^2} = 13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S او P تیریږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: (m = 12 / 5)

له S او P تکو تیریدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي میلان

m2 = -1/m = -5/12

د (P0 (0,0څخه تیریدونکی کرښه د m2 میلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیریږي او د x–محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, = 30º, b) $P_1(-3,2)$ = 45º

c) $P_1(-1,-4)$, = 120º , d) $P_1(4,4)$, = 0º

e) $P_1(0,0)$, =150º , f) $P_1(1,-1)$, = 90º

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوځې (لنډ : محورغوځې) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوځټکو واټن d د محورغوځټکو سره چې یو له بل یې لري وټاکئ.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ – یو دریګوټی دا لاندې ګوټټکی لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات ځنګه دي، په کومو چې د دریګوټیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګوټي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برختوټینه یا –فورم څنګه دی؟

a) 3x -5y +15 = 0 , b) 4x -3y -18 = 0

c) -4x +2y -10 = 0 , d) -3x -4y +15 = 0 ?

۶ – د کرښې $y = -(12 / 5)x +2$ پروتځای د کرښو

a) y+2,4x - 6 = 0 , b) 28x +10y = 0 , c) 8x + 5y =2,

d) 5y +12x -10 = 0 . e) y +(12/5)x = 3 , f) 6x +2,5y = 5

سره وڅیړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د لاندې کرښو د غوڅټکو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) 2x +3y = 7 b) y = (1 / 2)x +1 c) y -x = 7

3x -y = 5 , y = -2x+ 6, y = 7,

d) x/3 - y/2 = 1 e) 6x -2y +10 = 0 f) y = 4x-1

-x/2 + y/3 = 1 , y = 3x +6 , y = -3x +5 !

۸ – کومه کرښه د کرښې x - y = 4 ، کرښې 3x + y = 8 او برسیره پر دې له غوڅټکی P(0,5) څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندې گوټو A(-4,-1), B(2,-2), C (1,3) سره د دریګوډي دننه کونجونه څومره لوي دي ؟ (پیلونه: دریکونجی وکاږئ)

۱۰ – د ولاړپریوتې کرښې یا زوړندې مساوات له ټکی P(2,0) څخه په کرښه y = 2x + 1 څنگه دي؟

۱۱ – د ولاړ کرښې مساوات په کرښه y = 2x +1 باندې په ټکي P(-1,-2) څنگه د

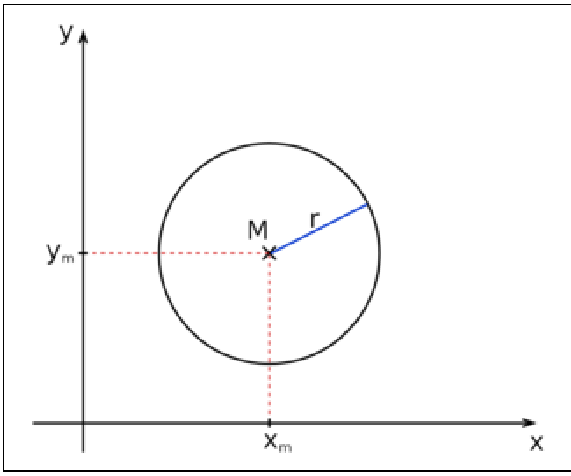
۱۲ – د کرښې y = 2x + 1 سره د غبرگې کرښې مساوات چې له ټکي P(-1,-3) تیریږي، څنگه دي؟

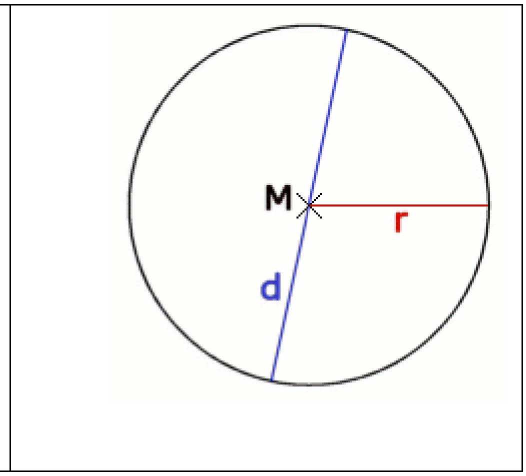
۲ . ۱۶ گردی (داېره)

داېره(گردی) د ټولو هغو ټکو ډیری(سټ) ده، چې د یوه کره ځای په ځای ټکي ، داسي په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانگه وایو او په rیی په نخښنه کوو. فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې داېره (گردی) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډیری(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \left\{ X \in E | \ |\overline{MX}| = r \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





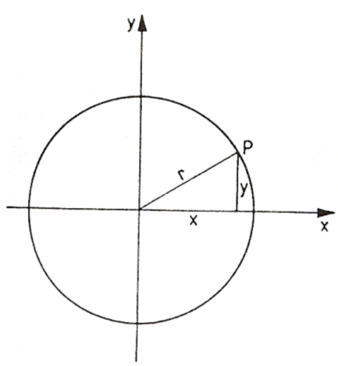


Bild 16.7 شکره

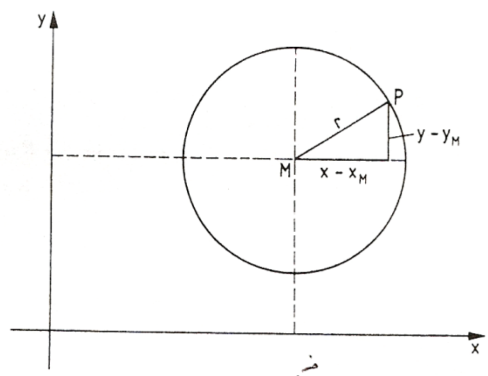


Bild 16.8 شکره

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې ګردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردی ټوليز برابرون

دا برابرون د پېژند او پيتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د يوې ګردی ځانګړي حالت او د کواورديناتسيستم سره، چې منځټکی يې د کواوردينات په سرچينه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

که د ګردی منځ ټکی د کواورديناتسيستم (شيره ۱۶ . ۷) په سرچينه پروت وي، نو د پيوتاګوراس د جملی له مخی (د ګردي په خوښنه ټکي P(x,y) لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردی منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردینات (xM,yM) ولري (څیره ۱۶ . ۸) نو د ګردی د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغیر وعمومي) ، پس پیژندل کیږي چی د ګردیبرابرون د څلوری یا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاینیز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی یوه غړي په څیري سره یوځای شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټولیز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه ۰
که د ګردي برابرون په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه یی څرګندده کوو یا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د څلوری پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه څیرې پورته وګوری

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردی برابرون دې په ټولیزه - یا عمومي توګه وي:

$$2x^2+2y^2 +4x-12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وویشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د څلوری پوره کونه یا مربع تکمیلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y +9 = 3+4+9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبینوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$
ګردۍ منځټکی($M(-2,3)$ او وړانګه $r=4$ لري.

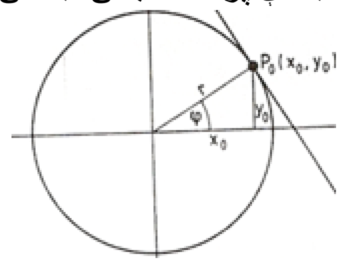
بیلګه ۱۶ . ۱۲ :
د ګردۍ برابرون ولیکی چی منځټکی یی($M(2;0)$ وي او په کوم چی ټکی($P(6,4-3)$ روت دی؟
اوبیونه : د($M(2,0)$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دی
$(x-2)^2 + y^2 = r^2$
د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2 + (4-3)^2 = r^2$
له دې څخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د ګردۍ برابرون:
$(x-2)^2 + y^2 = 64$
ګردۍ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي
۱ - کرښه ګردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده(سیکانتې)
۲ – کرښه ګردۍ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)
۳ - کرښه ټوله له ګردی دباندې پرته ده (له ګردۍ تیریدونکی، لنډ : تیریدونې)
د غوڅټکي(د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سرې د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی ږدي(y یا x پسی حل یا اوبۍ شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (څلورۍ برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو رییل ډبل اوبی او یا هېڅ رییل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بیلګه ۱۶ . ۱۳:
کوم پروت ځایونه ګردی k چی راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ اولاندې کرښی و یو بل ته لري؟
$g1 : 2x+y=4 , g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردیبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+4-3)^2=5 \iff 5x-8x=0$
ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به g1 د ګردي غوڅوونی یا (Sekantسکانت) وي.
که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 \iff x^2-8x+16=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډبل اوبونې $x_{1,2} = 4$, $y_{1,2} = 4$ سره $g2$ یو تانجنت دی.
که $g3 : y=2x+6$ د ګردۍ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 \Leftrightarrow 5x^2+x+8=0$
دا څلورۍ برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه $g3$ له ګردۍ k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.



په ګردي $x^2+y^2 = r^2$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی($P_0(x_0,y_0)$د مساوات $x_0^2+y_0^2 = r^2 > 0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دی
د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او
له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت

$$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0; \text{..........}(16,13)$$

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

$$y-y=-(x_0/y_0)(x-x_0) \Leftrightarrow xx_0+yy_0=x_0^2+y_0^2=r^2$$

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16 . 14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه($P_0(\pm r,0)$او($P_0(0,\pm r)$ په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

(c) ketabton.com: The Digital Library

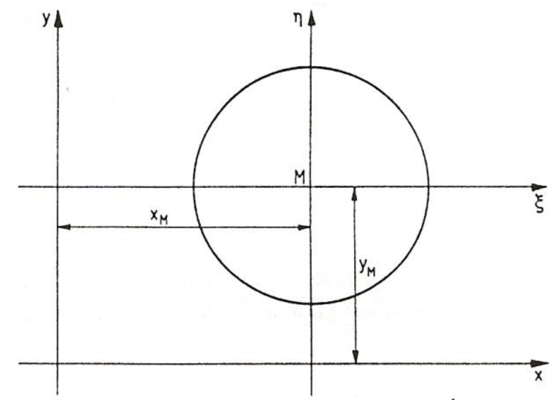


Bild 16.10

يادونه : که له دې مخ ته يا وروسته x0,y0 يا xM,yMاو x_0, y_0 يا x_M, y_M ګورو نو کتمټ دي

بيلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبيونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پيداکوو. دا بايد دګردی برابرون پوره کړي . ټکی P1 بايد په تنجنت پروت وي يعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) بايد پوره کړي.
نو باور لري

$x_0^2+y_0^2 = 16$ او $-12x_0 + 4y_0 = 16$

که دا لاينيزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي يو ځلوری برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي

$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبيونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پوري اړه لري

$y_{01}=4$, $y_{02}=-16/5$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو(P01(0,4 او(P02(-12/5,16/5- د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$0.x+4y=16 \Leftrightarrow y=4$

او

$(-12/5)x-(16/5)y=16 \Leftrightarrow y=(-3/4)x-5.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د گردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي (M(xM,yM سره د η,ζ -کواوردینات سیستم کی ، چی سرچینه یي په M کی پرته ده)(؟ څیره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري٠

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;..................................(16,15)$$

د η,ζ -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم یو غبرگ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتی دي ٠

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;..........................(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بیا دا دy,x -کواوردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي(کشوي یا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي(Po(x0,y0 کی د گردۍ تنجنت برابرو په گردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بیلگه ۱۶ . ۱۵:

په گردۍ چی برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، دx - محور باندې، په ټکو

$$x_1 = x_2 =-5$$

سره تنجنت وکاږو(کیږدو). برابرون یی څنگه دي؟

اوبیونه : د گردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدلیږي:

$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$

$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8 ,\ y_M = 2 ,\ r = 5$$

د گردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو گردۍ ټکو په گردبیرابرون کی ځایوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې داسې لاس ته راغلي دy لپاره ځلورېبرابرون یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6 , y2 = -2$

د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 <=> 3x+4y=9$

او

$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 <=> 3x-4y=-7$

تمرینونه:

۱۳ – د لاندې مساواتو سره ګردیمنځټکی او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) $x^2+y^2 9y = 0$, d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$, f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ – د لاندې ګردیو مساوات وښیې

الف) چی منځ ټکی $M(-2,-1)$ لری او له سرچینی تیریږي

ب) هغه چی دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5, 5 -3)$, $P_3($ 5 ؛3,-1) یی د غاړو ټ

پ) چی وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11)$,$P_2(5,5)$ څخه تیریږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4 / 3)x + 13$ په ټکي $(4,3)$ ₂ لمسوي.

ټ) چي منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4 / 3)x +13$ لمسوي.

ث) چي د هغي منځټکی په کرښه $y = 3x -19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$ او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ – کوم پروتخایونه ګردی k چي فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندي کرښي یو له بل سره لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,
d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتخاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی
الف) په ټکي $P_0(5, y_0)$ چی په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،
ب) په ټکی $P_0(x_0, -2)$ چی په ګردی $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ – د هغو ګردیو منځټکي پیداکړی چې وړانګه یې $r = 5$ وي، کومی چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکی $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!

۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

فنکشنونه(بلواك یا تابع)

د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی ځیرونی، چی په هندسه کی خورا ډېره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د بلواك او بیا زیاته د فنکشن په نامه څموږ په دې کار کی بلل شوي چی موږ ورسره تراوسه د تابع د نامه لاندې هم بلد یو، څما په اند یا فکر که دا موږ ځیرونه وبولو، نو موخه ور یا هدفمند به مو نومولی وي او تابع خوبې له هغې بلواک دی. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی څموږ د ځیرلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې ریيلی واریابلی (اووښتونې یا متحولې) Rریيل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن یا
څیرونه) د ریيلو ګڼونو ډیری باندې ، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه یواځنی څیرونه ده.
D دپیژند ډیری نومیږي .
د ټولو ارزښتونو ډیری چې y یې د ځان لپاره غوره کولی شي، که د x
پیژنددیری یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .
د دې قانونمندی f له مخی هرx ∈ Mیواځنې یوه y ∈ W باندې تنظیمیږي یا څیره کیږي :

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y
بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي، له دې امله تابع، چې موږوایو، د څیرونې هغه څیره
شوې خوا ده. (د فنکشن یا څیرونې او تابع یا بلواک توپیر)

د فنکشن مختلف انځوردولونو په منځ کې سرې توپیروي. د دې کلیمه انځورونه کې له
ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیرید شو،خو ، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح
شکل دی، چې

په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر ریيل ګڼ د همغه ریيلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل یا څیره
کیدل..

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګڼ او صفر به د
هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهنی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن
تشریح ده. دلته x اوy د نورو ریيلو ګڼونو سره د بنستیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون،
کمون ، ځل ، ویش ، او د بنستیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته :

$y=|x|$ د $x<0$ لپاره
$y=x^2$ د $x>0$ لپاره
دلته $D=R, W = [0,oe)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي چې په داسې حالت کې له کيڼ و ښې لور ته يا ګډوډ لوستل کيږی يعنی داسی لولو:
x دy مطلقه ارزښت سره مساوي دی، که چیرې x له 0 کوچنی وي.

داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کيږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیځیت(واضح)روښانه و څرګند) explizit نوميږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ ۱او ۱۵ . ۲ چی په یوه د y په لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y = f(x)$
که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیځیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کيږي یا نوميږي . د بیلګی په توګه به $2y-x-1=0$,D=R,W=R فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپلیځیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیځیت شنینیزه بڼه (ایمپلیځیت تحلیلي فورم) کیدی شي په اکسپلیځیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي.
د بیلګی په توګه:
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیځیت حل کیدونکی نه دی.
د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)
$x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: $x=2t$, $y=t+1$; $-oe< t <oe$ به یوه پارامتري انځورونه وی
او $x = t$, $y = t/2 + 1$ به یوه بله پارامتري انځورونه وي.
زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کيږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X ....-2	-1	0	1	2 ....
Y 2	0,5	1	1,5	2 .....

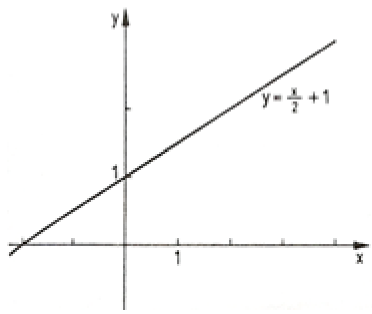
بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

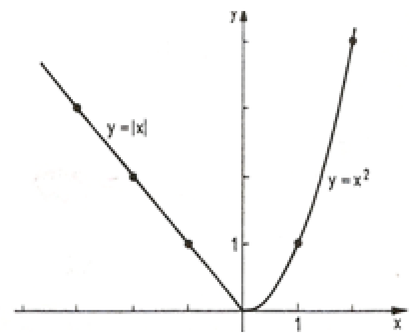
X....-3	2	-1	0	1	2	3 ...

(c) ketabton.com: The Digital Library

Y....3 2 1 0 1 4 9 ...

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرښې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو یا اووښتونوجوړې د x,y- هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي . ځیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲ () بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته





۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایټروال] a,b [کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی (مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو $x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د $x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1)\leq f(x2)$ $(f(x1)>f(x2))$
که د برابرونتخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دی

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټیدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په يوه اينتروال [a,a-] کی يو تعريف شوی فنکشن ($y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) يا سيومتريك symetrisch,(ناجوړه (طاق) يا نا- يا انتيسيومتريكantisymetrisch بلل کيږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو ګيږي اکسيال يا محوري سيومتريك و y - محور ته ځغلي) دلته هم ګيره شته ، نو تل به همغه څه ليکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچينی ته منځني يا مرکزي سيومتريك ځغلي) بيا هم ګيره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

بيلګه ۱۵ . ۴

فنکشن $y= x^3 ,D= R$

يو ناجوړه يا طاق فنکشن دی :

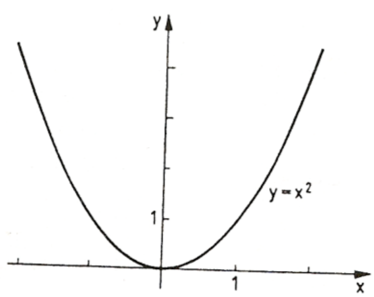
$$(-x^3) = -x^3$$

بيلګه ۱۵ . ۳ :

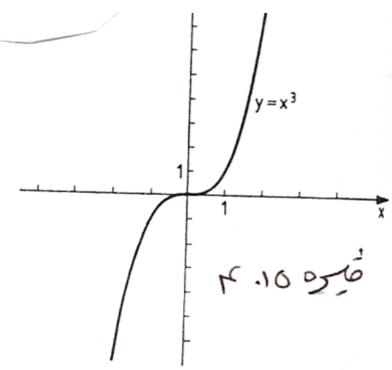
فنکشن $y=x^2,D=R$

يو جوړه يا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$



ګيره ۱۵.۳



د بيلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه يا جفت او نه ناجوړه يا طاق دي

پيژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تيك هلته په D (پيژنديری ده) بند يا رابند(محدود)بلل کيږي که يو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري:

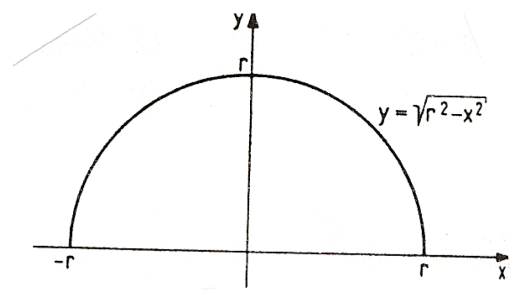
$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بيلګه ۱۵ . ۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$
رابند يا راګير(محدود» زه به دا له دي وروسته
بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی ځیره ده(

ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$



پيژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د
دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p) = f(x)$$

د دورانی یا تل راکځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپيکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه
دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

پيژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځايونه بلل کیږي.

د فنکشن صفرځايونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پيدا کیږي. داحلونه
د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\,x + 1$ صفرځايونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (ځيره
۱۵ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 , \quad x2 = -2$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم څیر ۱۵ . ۶ (

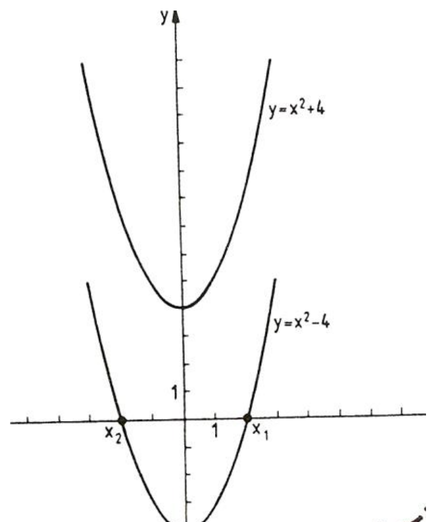


Bild 15.6

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \;\; , \;\; y \in W \;\; y = f(x),$

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ خیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (y = f(xیو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ښکیدونکی دی ، دا په دي مانا چي دا یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په ښت یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په ښت فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه څیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیژندونکی دي د y=f(x) په ښت یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په ښت فنکشن سره کتمټ(- ورته) identic دی۰د په ښت یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرافیکی څیره $y = x$ په کرښه د $y = f(x)$(هندارونه) یعنی په هنداره کی څیرونه او لنډ یی: هندارونه) ده٠

بيلګي ١٥ ، ١ ته :

د فنکشن $y = f(x) = x/2 + 1$ چپه یا په ښت فنکشن داسی دی
$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$
سړی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x = 2y - 2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(څیره. ١٥ ٧ الف)
ړ

بيلګي ١٥ . ٣ ته : فنکشن
$y = x^2$, $x \in D$
څیرره ش ١٥ . ٣) په ښتکیدونکی دي یا په ښتکیدونکی نه دی.
هر $y \in W$ =[0,oe] پورې دوه $x \in D$ = [-oe,oe] اړه لري، یعنی $x=+y$او $x=-y$
مګر $y = x^2$کلك مونوتون جګیدونکی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2, x \geq 0$
ته چپه- یا په ښت فنکشن $y=+x$ دی، او $y = x^2$, $x < 0$ ته چپه- یا په ښت فنکشن $y = -x$ دی. (څیره ١٥ . ٧ ب) .
په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ١٥ . ١ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په ښت فنکشن $y = f^{-1}(x)$
موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

١٥ . ٣ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کې بنسټيز فنکشنونه تعريفيږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او څیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړډوله خویونو له مخی وڅیړل شي. په برخه ١٥ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنونه) وځيرل شي. د فنکشنونو ځيرل به د هغو ځانګړوله يا کرکتريستيکي خويونو له مخې هلته هم دوام ومومي، که د ديفرنشل شميرنې کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پيژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعريف دی او n - مه درجه ټولريشنلفنکشن نوميږي.دي ډول فنکشنونو ته پولينوم فنکشنونه(يا لنډ : پولينوم) هم ويل کيږي

يو ساده ټول ريشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) يالايني فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کې پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لايني فنکشنونو ځيره(ګراف) يوه کرښه ده چې په y = n کې دy - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m = \tan\alpha$

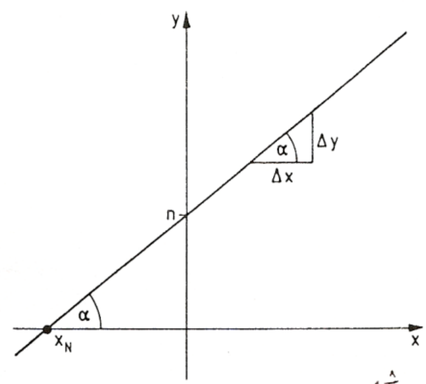


Bild 15.8

لري (ځيره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغير د x - ارزښت تغير سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګيږي که $m > 0$ او لويږي يا ټيټيږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که 0 =|m نیول شوی وي، ټیك يو␊صفرځاي (y = 0 لري: $x_N = -n/m$ ␊

که را په غاړه شي چې د يوې کرښې برابرون، چې له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تيريږي، پيدا کړو چي پو په بل نيغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرېټکی يا نوره ښه غوڅېکی n په y - محور د برابرونسيستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخې پيدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو
(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)␊

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولريشنل فنکشنونه يا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو
لکه په (۱ . ۱۵) کې $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$
␊ $y=ax^2+bx+c , a \ne 0$ (15 .3)

د مربع فنکشنونو څيره) ګراف (پارابول دی چې د هغي سيومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوايفيڅينت) ځله ووني يا ځليدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.
␊موږ د مربع فنکشن يو څو ځانګړي حالتونه تر څيړني لاندې نيسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردينات: $x_s = 0 , y_s = 0$
(خ . ۱۵ . ۹)

␊ 2. $y=x^2+px+q$ (a=1 , b=p , c=q) (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د څلورې - يا مربع تکميلولو ورزياتونی څخه لاس ته راځي:
$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2$ (15,5)
يو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل (رابنکل-يا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چې په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:
$x_s = -p/2 , y_s = q - p^2/4$
␊
بيلګه ۱۵ . ۷:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=x^2+6x+10$, $x_s=-6/2=-3, y_s=10-6^2/2=1$
(خ،۱۵ . ۹)

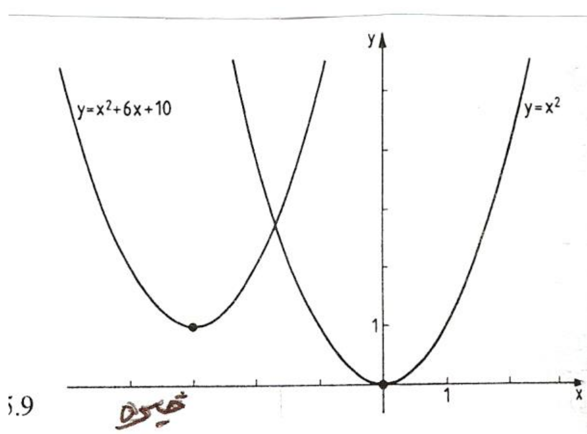
3. $y = ax^2$ ($a|=0, b=0, c = 0$)
د ککرۍ (سر يا رآس) کواوردينات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسيدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بيلګه ۱۵ . ۸:
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$
(خ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردينات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی يی چی مخ ته تللي يو)
$$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c-b^2/4a^2$$



بيلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,($a=-1/2$, $b=1$, $c=4$)
دککرۍ کواوردينات:
$$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4-12/(4.(-1/2)) = 9/2$$
دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسيدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

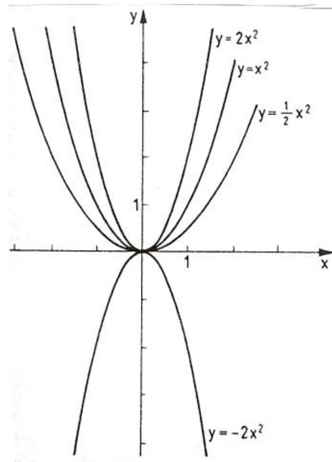


Bild 15.10

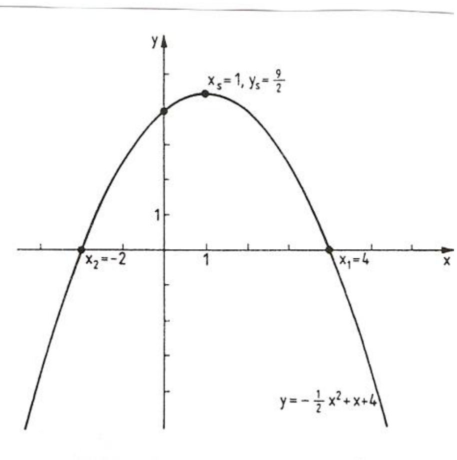


Bild 15.11

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1=4, x_2=-2$ دي٠

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته:
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-10}=-3\pm\sqrt{-1}=-3\pm i$ څخه لاس ته راځي
چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري.

فنکشن $y=x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2}=0$ دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$y=[a_3x^2+a_2x+a_1]x+a_0=[(a_3x+a_2)x+a_1)x+a_0$ $x_{4,5}=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm 2i$

هغه ورکړ شوي خپلواک x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1=f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 له x1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یې له x1سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (څرکندوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

	a_2	a_1	a_0	خلونه یا ضریبونه
	a_3x_1	$(a_3x_1+a_2)x_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	منځنی خلونه
a_3	$a_3x_1+a_2$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$	منځنی زیاتون

ددې شیما پو هیدل ډېر نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پو هیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.

اوبیونه) :

که چېرې ددریمی درجې ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګې ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5): (x-5) =x^2+3x+1$ له دې امله لرو:
$y = x^3-2x^2 -5 = (x^2 + 3x +1) (x-5)$
د ویش پولینومونو څلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لارې د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړی کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او $f (x1) = 0$ چی د $(x-x_1)$سره د څلوني له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د څلورې – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجې فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د څلونې په څېر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ریشنل ۥرززنۥ
ۥرۥطۥتظداغظطافنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه ځوځله هم رامنځ ته شي، ریيل او یا جوړه کونجوګيري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیڅینت یا ځله ووني لپاره دې صفر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :

5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن
$y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$ لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	2	0	-6	-20	-8	80
x_1 = 2		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
x_2 = 2		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
x_3 = -2		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $(2$ $x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$

لپاره لاندې د حٔل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i$
$)(x+1+ 2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي
$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$

ددې لپاره چی د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفیرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري
چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره ($f(x$تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی
xn -> oe

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي
او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زياتيز يا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
(کرِه له oe - ځخه oe د په لور ځي) .
که n جوړه او a_n کميز يا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کرِه د oe - ځخه د oe - په لور ځي).

که n ناجوړه او a_n کميز يا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کرِه له oe - ځخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_n کميز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
کرِه لهoe ځخه د oe - په لور ځي)

پيژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$
$$n,m\in N_0; a_k,b_i\in R; Q_m\neq 0$$

مات ريشنلفنکشن بلل کيږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعريف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نوميږي، که n<m وي او نااصلي مات دی
که n ≥ m ، نااصل مات فنکشن کيدی شي چي د پولينوم ويش له لارې تجزيه
(ټوټه) شي او د يوه ټول ريشنلفنکشن او يوه ريښتونی ماتی برخی د زياتون په ځير
وليکل شي.

بيلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن
باندې دماتباندې فنکشن ويش ځخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$پاتې (باقي) سره. پس لرو:

$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$

فنكشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره يو صفرځاي لري، كه $x = x0$وي نو باور لري:
$P_n(x_0)=0$ مگر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x = x_L$لپاره تشځاي (Lücke) لري،كه وي: $P_n(x_0)=0$ او $Q_m(x)=0$

د $x = x_P$لپاره يو قطب pol لري كه وي: $P_n(x_P)\neq 0$ مگر $Q_m(x_P)=0$

بيلګه ۱۵ . ۱۳ :

فنكشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x$ د ماتباندي- او ماتلاندي فكشنونو توتي كولو وروسته په لاندې فورم د لايني فاكتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندي صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندي فنكشنونه د $x = x; L = -2$ لپاره صفر دي (تشځای)

د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندي صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب)

كه x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای (تيك ناپای ځای بللكيږي) xpکی کره داسیمپتوتي كربني $x = xP$ ته نزدې كيږي.د يوه تشځای xL په حالت کی ماتفنكشن د نامعلومی افادې $0 / 0$ شكل غوره كوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنكشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنكشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ يعنی x^m د ماتباندي او ماتلاندي د ويش څخه لاس ته راځی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ځیره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کیږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه ټولریشنل برخه.

د نااصل مات فنکشن ځیره د ±oe <- x سره ، ځان خپل ټولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

الف: $y = x/(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او دx -> ± oeلپاره دx- محور ($y = 0$) د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3 =0$) په $x1 =-3$ او $x1=1$کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x = -2$اسیمپتوتی دی، او د x →±oe لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو: فنکشن

$$y=x^n;n\in Z\setminus\{0,1\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15,8_a)$$

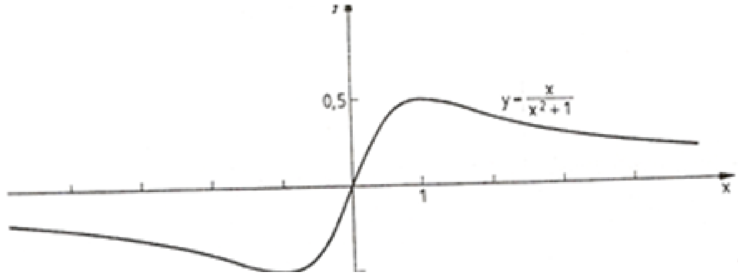
یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

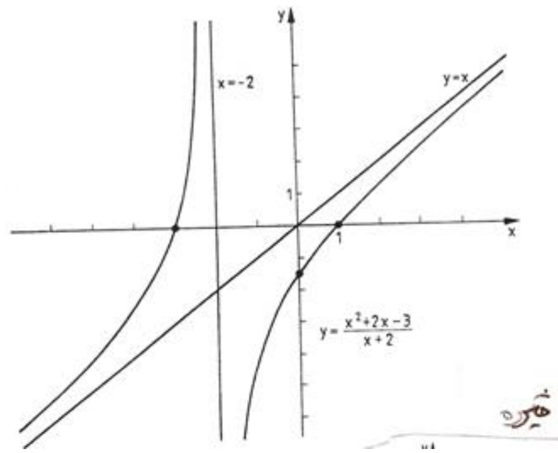
(15.8)د زېات یز زیاتیز یا مثبت ټولګڼ n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګڼ nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګڼ n لپاره ټولی کرېې د تعریف ډېری(-) = D oe,oe، د ارزښت ډېری(W=(0,oeاو ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري.

(څیره ١٤ الف ١٥) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe

او(W = (-oe,oe دي او (-1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library





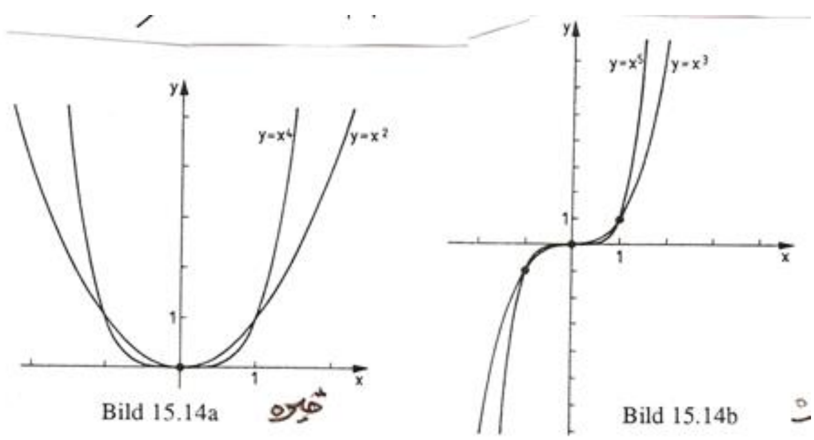


Bild 15.14a

Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په $x = 0$ کی د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپټوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز) nلپاره ټولی کرږې د پیژند ډیري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ارزښت ډيري(W = (0,oe لري اوګډټکي (1,1), (-1,1) D = (-oe,oe)\{0}
؟؟؟ خيره ش. ۱۵/۱۵الف) .
د ناجوړه ګڼون (کميز n)لپاره{ 0}\(D = (-oe,oe او(W=(-oe,oe او(1-،1-) (1-) (1,1)
ګډ ټکی دی (ځيره »۱۵ . ۱۵ ب) .
دوه ځيرې دي

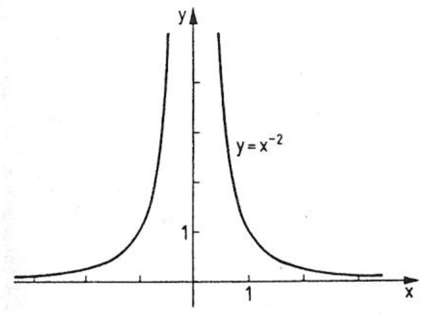


Bild 15.15a

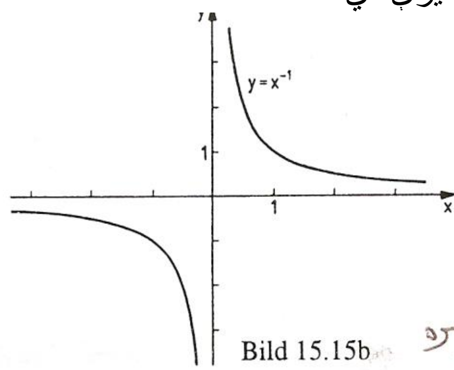


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر څټ بلواک لپاره دې د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي.(پرتله بيلګه(بيلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- يا پر څټ فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ ,\ n \in N \setminus \{1\}\ ,\ D = [0,\infty), W = [0,\infty) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15,8_b)$$

او ريښه فنکشن نوميږي (پيژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کيدی شي و ريشنل ايکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ريشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ ,\ a \in Q\ ,\ x > 0 \qquad (15\ .\ 8c)$$

نو د ريښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په ځير وپوهيدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرڅټ بيرته پوتنځ فنکشن دی.
ټوليز پوتنځ فنکشن پيژند د رييل ايکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رييلګڼونو کليمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

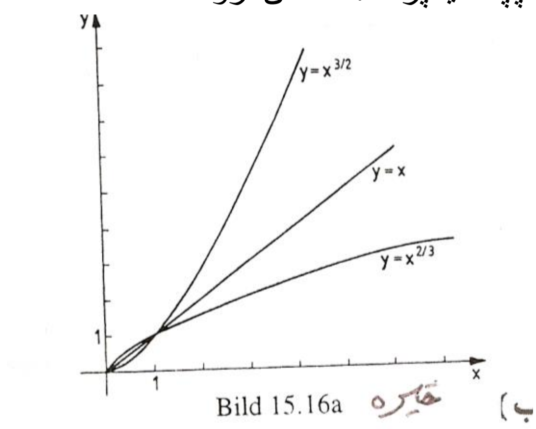
پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R \ , x > 0 \qquad (15.8d)$

پوتنخ فنکشن نومیږي

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} , x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښئ فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} , x \geq 0$



(څیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

څیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2 , x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یواځی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښت فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په پام کی وي.

د بیلګي په توګه فنکشن $y=x^3$ په ټول تعریفیدیري کي مونوتون پورته کیدونکی دی او له دې امله ټول په ښت کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژندیدیری) $D = [0,\infty$ کی پر ښت فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د$y= x^3$ پرښت فنکشن د] $D= (-\infty,0$ سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=a^{x}, a>0, a\neq 1 \quad\quad (15,9)$$

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي٠

(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پیژند ۴ . ۱ وکتل شي)

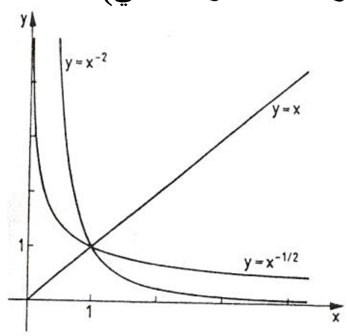


Bild 15.16b

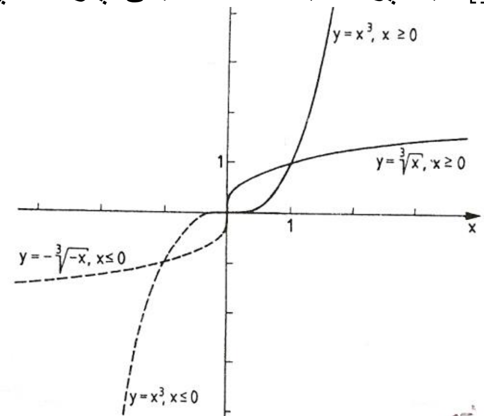
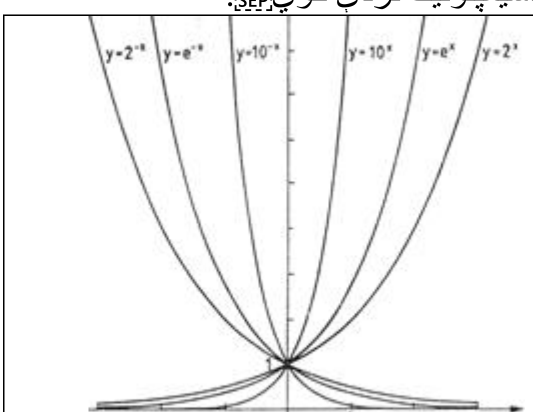


Bild 15.17

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژنددیری(D=(-oe,oe او ارزښتدیری(W=(o,oe لري. د $a^{0}=1$ له امله تکی(0,1 () د ټولو کږو ګډ تکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹) په کلکه مونوتونجګیدونګی دی اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنږدې کیږي. د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د x -> oe سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نږدې کوي.



کسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګګی
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10
څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$$y = \log_a x \, , \, a > 0 \, , \, a \,|= 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژندديری
$D = (0.oe \;)$ او د ارزښتديری$W=(-oe,oe \;)$ لري.

د $y = \log_a x$ کرږې د ګرږو $y=a^x$ هنداروند ده، په کرښه $y=x$ ۰ تکی(1,0) د ټولوکرږو ګډ
تکی دی (ځیره شته دی)

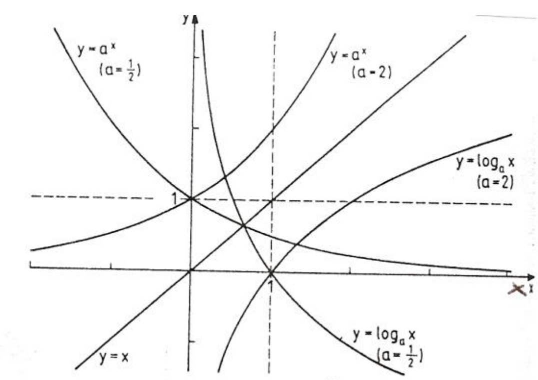


Bild 15.19 شکله

د $a>1$لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی او د $x\to0$لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y -
محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او
د $x>0$ لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نژې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹
کی $y=a^x$ او په څېر یی یعنې $y = \log_a x$
د $a=2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي.
په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10} x = \lg x \, , \, y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریگونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کيږي یا راوړل کيږي.

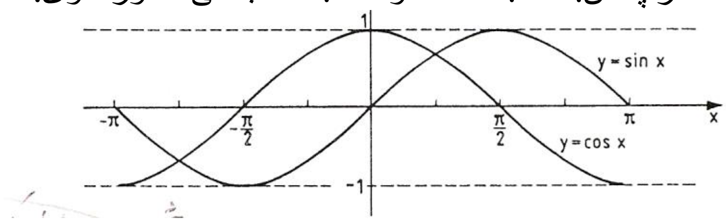
$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]$...$(15,11_a)$

$y = \cos x; D = R, W = [-1,1]$...$(15,11_b)$

$y = \tan x = \sin x / \cos x; D = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}, W = R, k \in Z$....$(15,11_c)$

$y = \cot x = \cos x / \sin x; D = R \setminus \{k\pi\}, W = R, k \in Z$..........$(15,11_d)$

د دې کږوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریگونومتریکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریگونومتريکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه y=sinx , y= cosx پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin (x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi) = \cos x , k \in Z$

لاندې فنکشنونه پریود π

(c) ketabton.com: The Digital Library

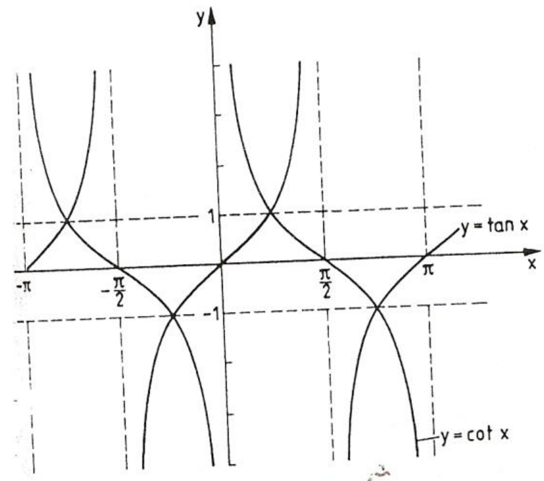


Bild 15.20b

لري y=tanx , y=cotx .دا په دې مانا چي

$\tan(x + k\pi) = \tan x, \ \cot(x + k\pi) = \cot x, \ k \in Z$

د تریګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k \in Z$

د y=tanx, $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , k \in Z$ y=sinx لپاره او د y = cos

x لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري , y = cot x

یعني y = tan x په $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , k \in Z$ او y = cot x په $x_k = k\pi \quad , k \in Z$ کی.

د تریګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دی او په

ایتروال $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د y = sin x لپاره جګیدونکی یا پورته کیدونکی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کيدونکی دی۰

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګيدونکی دی

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګيدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اينترروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ايتروالونه واز اينترروالونه دي.د ساين فنکشنونه د بيلګي په توګه د وخت په پريوديکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوينګونګ: رپيدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واريابل په t نخښنه کيږي.فنکشن

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پيژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی يا ځنځيري فنکشن دی. موږ ترڅيرني لاندې نيسو چي د سا ين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل t او زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږنځيره باندې څه تاسير اچوي.

۱ ـ د فاکتور a تاثير په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول يا راکشول دی که (|a| > 1)او يا پرسول دي که |a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a ـ ځله د فنکشن ارزښت y = sin t دی، چيرته چی برسيره پردې د a < 0 لپاره په t ـ محور يوه اينه څيرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2 په فنکشن کی a امپليتودې Amplitude(جګوالی(نوميږي او د شوينګنګ Schwingung رپيدنی پراخوالی يا بڼه : سور باندې تاثير اچوي.
څيره شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

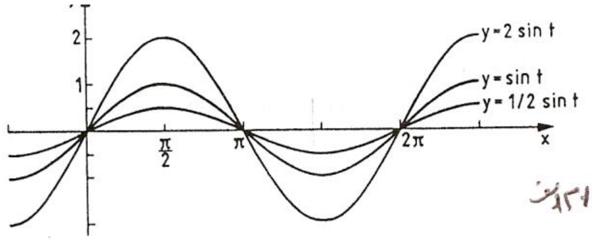


Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کې فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې یو وختني غزول که $|\omega|<1$ یا پرسول که $|\omega|>1$ وي تاثیر اچوي.چیرته چې د $\omega < 0$ لپاره برسیره پردې یو په y- محور اینونه هم ده.

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ یوه فنکشن ارزښت، د$y = \sin t$ خپلواك ω-ځله ، یعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څیره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).

ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کیږي، دا په پریودې تاثیر اچوي

او $y = \omega t$ پریودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

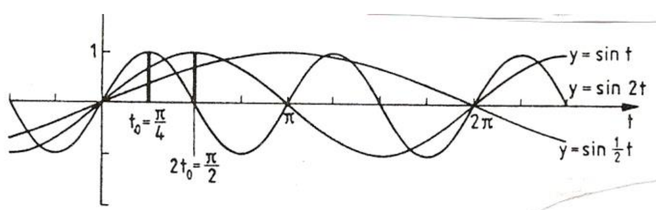


Bild 15.21b

۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور $\varphi>0$ او یا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$ لپاره۰

د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(څیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$

په فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a.\sin\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

کی φ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کره $y = a.\sin\omega t$

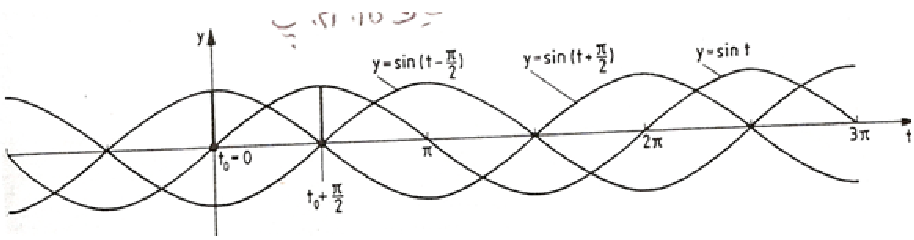
د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.

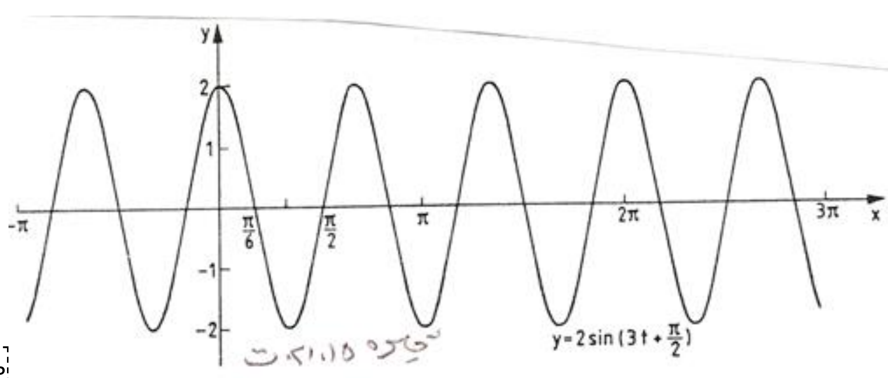
په شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2.\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ انځوردی.

هغه امپلیتود $a = 2$ لري، پریودې یی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کي

د $\sin t$ و کینې لورته راکښل شوی دی.

خیره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$





د تریگونومتري فنکشنونو(یواځني) په معکوسوالي یا په څیړوالي کی مورږ په ځانگړو یوغږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند ۱۵. ۰ ۱۴ : د لاندې فنکشنونو

1. $y = \sin x,$	$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$	$W = [-1, 1]$	(15.12a)
2. $y = \cos x,$	$D = [0, \pi]\,,$	$W = [-1, 1]$	(15.12b)
3. $y = \tan x\,,$	$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$	$W = \mathbf{R}$	(15.12c)
4. $y = \cot x\,,$	$D = (0, \pi)\,,$	$W = \mathbf{R}$	(15.12d)

پرځېِ یا چپه فنکشنونه لاندې ښکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \mathrm{Arc}\sin x\,,$	$D = [-1, 1]\,,$	$W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	(15.13a)
2. $y = \mathrm{Arc}\cos x\,,$	$D = [-1, 1]\,,$	$W = [0, \pi]$	(15.13b)
3. $y = \mathrm{Arc}\tan x\,,$	$D = \mathbf{R}\,,$	$W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	(15.13c)
4. $y = \mathrm{Arc}\cot x\,,$	$D = \mathbf{R}\,,$	$W = (0, \pi)$	(15.13d)

د ټریګونومتري فنکشنونو برخې په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ښیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

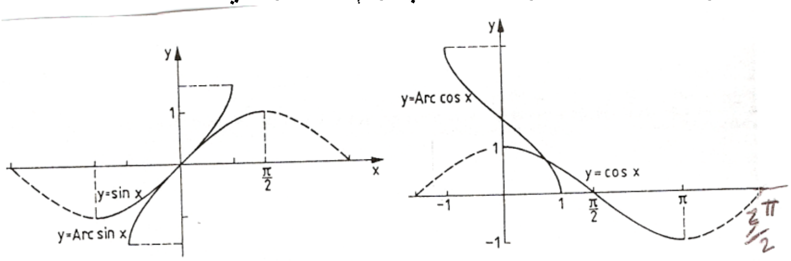


Bild 15.22 Bild 15.23

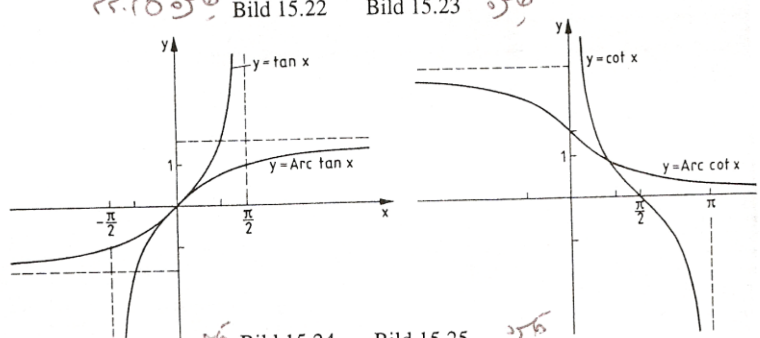


Bild 15.24 Bild 15.25

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ . ۴ ځنځيري (تړلي) فنکشنونه

پيژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$ لپاره يو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتديري W سره ورکړ شوی او برسيره
پر دې د $z \in W$ لپاره يو فنکشن $y= f(z)$ ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15 . 14)$$

د x تړلی (ځنځيري) فنکشن بلل کيږي.

يادونه : يو تړلی فنکشن کيدی شي چې زياتو ځنځيرونو سره هم رامنځ ته شي: د بيلګي
په توګه $z = f(x)$
د $x\in D, z\in W$ لپاره او $w=h(z)$ د $z\in W, w\in W^*$ لپاره
او $y=f(w)$ د $W^*\in W$ لپاره لرو،
نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x يو تړلی فنکشن دی

بيلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي.

ب : په تړلي فنکشن $y = \sin x^2$ کې $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی. په تړلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کې $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی

پ : د

$$y = \cos w \quad w = \sqrt{z} \quad , \quad z = 2x + 4,$$

سره تړلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په تړلي فنکشن $y=\text{Arctan}1/(x-1)$ کی $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\text{Arctan } w$ دباندنی فنکشن دی.

يادونه : د يوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځيري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شميرنی له » دننه « پيل کيږي.

بيلګي ۱۵ . ۱۶ ته:

ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942; y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1$; $w=1/z=1/1=1$

$y=\text{Arctan}w=\text{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشريح:

$y=f(x)$ تحليلي(شننيزه) وينا بلل کيږي، که $f(x)$ له رييل ګڼونواو بستيزو فنکشنونوڅخه د زياتون، کمون،ځل، ويش، له لارو تړلی يا ناتړلي(ځنځيري يا نا ځنځيري) جوړيږي

د بيلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندي فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول راديکاند منفی نه شي کيدلی، او يا بايد مثبت وي، چی د لوګاريتم نومروس بايد مثبت وي او $\text{Arc} \sin f(x)$ همداډول $\text{Arc} \cos f(x)$ ټيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پيژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفډيري پيداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D =(-oe , - 3]\cup[3 ,oe]$

ب) $y=\lg(x+2)+1/(3+2x-x^2)$ له لمړي زياتونی کی بايد $\text{Numerus} > 0$ نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 \Leftrightarrow x >-2$ ،

پس $D1=(-2,oe)$

په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي ($\neq 0$) وي . د مات لاندې صفرځايونه

له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن تعريفډيرى بايد دا اول زياتونى او همداسى د دوم زياتونى تعريفډيري وي يعنى د

$D1$ او $D2$

غوڅډيرى: $D = D_1 \cap D_2 = (2, oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = \text{Arc} \sin (x-1)/5$ د اركوس ساين-فنكشن د تعريفډيري په پام کی نيولو سره بايد باور ولري-

$-1 \le (x-1)/5 \le 1 \Leftrightarrow -5 \le x-1 \le 5 \Leftrightarrow -4 \le x \le 6 \Rightarrow D = [-4,6]$

ت $(y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)}$

راديكاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow x>2$ يا $x<-2$

نو دی $D = (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

۱۵ . ۵ تمرينونه

۱ – د ايمپليځيت توابعو ايکسپليځيت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y – 8 = 0$

۲ – لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x = 2t \quad y = -t^2 + 3t$ b) $x = \sqrt{t} \quad y = 2t+1$

c) $x = 1/t \quad y = 2(t-3)$ d) $x(/2)t - 1 \quad y = t^2$

پارامتر له منځه يوسی او په دې سره ورکړی $y = f(x)$

۳ – لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅيړی، او که ممکن وي نو مونوتونو اينټروالونه په تعريفډيريو بيل (تجزيه) کړی، يا لږ تر لږه کړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړئ چې لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 / 2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړئ

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په ځټ فنکشونونه پیدا کړئ

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1, \infty)$, $W = [0, \infty)$, d) $y = x^3 / 2$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x - 1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x + 1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x - 3y - 7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پیدا شي، او صفرځایونه x_N و ګنئ!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 - 10x + 12$ f) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ - د لاندې ټولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګنل شي. فنکشنونه د ګراف د خلفورم باندې انخور شي

a) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1 , x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; x_1 = 1/5 \quad x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x \quad ; x_1 = -2 \quad x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 \; 32x + 40 ; x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6 ; x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2$

۱۱ - مات ریشنل فنکشنونه وګړي رسم شي :

a) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ b) $y = \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

c) $y = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$ d) $y = \frac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$

e) $y = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$.

صفرځایونه دې وګنل شي، پول. تشځایونه او د x -> ± 8 لپاره ځان نیونه!

۱۲ - لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R , W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R , W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) y = ln(x-1) , D =(1,œ), W = R

۱۳ - لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشتونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ - تړلي فنکشنونه y = f[h(g(x))] په دننه او دباندې فنکشنونو

$y = f(w) \;, w = h(z) \;, z = g(x)$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = (e^{x+1})^2$ c) $y = \lg\sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan\sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan\sqrt{x} - 3$ i) $y = \operatorname{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y = \sin\ln(x + \frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y = \operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو
$$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$$
بیل کړی(د تعریف– او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2-1\right)+1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x+1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندې شننیزویا سپړنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3-x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2-9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2+x-6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x-4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریکوډیکچ یا تریکونومتري Trigonometrie

تعریفونه

د دریکوډیکچ یا تریکونومتري دنده ده چی په هواره یا په هوا کی دریکوډي کچ کړي ، د څانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریکونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکی یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پیښې (موږ یی تل راګرځیدوني بللی شو) څیړل کیږي.

تریکونمتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کی مړ شوی او بیا له هندې او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونی یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریکوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمك اندازونی، نقشو علم، او ابادی او نوتیك Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کی مومي.

د تریکونومتري مانا یا مهموالی په څانګړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کی نغښتی، چی د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چی دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښه لوحی یا په بله عبارت د زوږي او پیچومی لیکتختی(دې ته دې پام وي چی ما دا کلیمی هر چیرې د زوږي او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چی په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کيدی شي؟
پيچومی يا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی يو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کيږي، دا ۱۲ متره ټيك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پيچومی يا جګوالی تی کيږي، نو په عمومي ډول يا ټوليزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پيچومی يا جګوالی. له يو کيلومتر وروسته دا پيچومی يا جګوالي ليديدونکي ۱۲۰ متره ته جګيږي. کتل کيري يا ليدل کيږي، چی په ورکړشوي پيچومي يا جګوالي کی د پيچومي توپير متناسب يا په ځانئيونه و هوارې فاصلي ته تغير خوري . د پايکرښو تناسب يا ځانئيونه تابث يا ځاي په ځاي پاتيږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

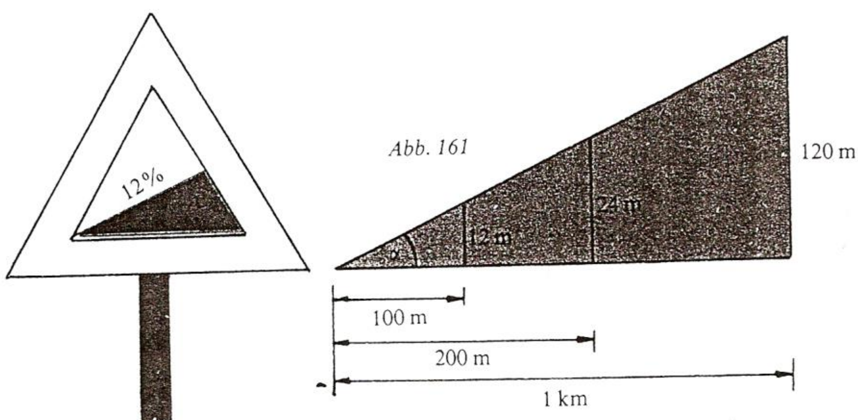


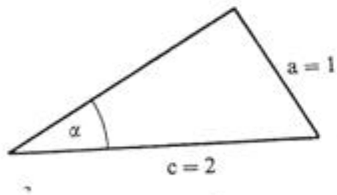
Abb. 161

خيره ۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن لپاره ما بلواک لیکلی یعنې همغه د درې له تابع څخه مې را اخستي، چې نورو ژبو کې يې بلواک خیره ده، چې دې امله يې خیره نمونه سمه ده اوکارونه يې خیرونه ده.

ساینبلواك sinusfunktion بلیکه:

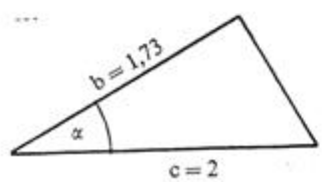


$\sin 30° = \frac{1}{2}$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}$$

خیره ۱۹۶

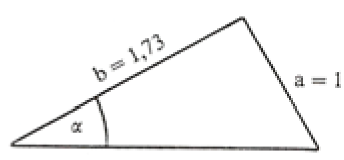
کوسایبلوك Cosinusfunktion بیلګه:



$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}$$

تنجنتبلواك Tangensfunktion بیلګه:



$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

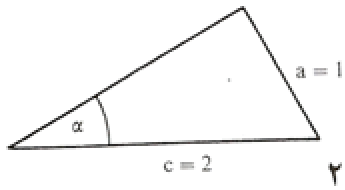
خیره ۱۹۸

$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

د کونجونو د پینونوموونې (دا ټول شته، خو بیاهم اړیین دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواک Kosekansfunktion بیلگه:



$$Cosec\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزي}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۲۰۱

$$\cos ec\alpha = \frac{2}{1} = 2$$

موږ به زیات وخت لمړنی دړې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواګه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

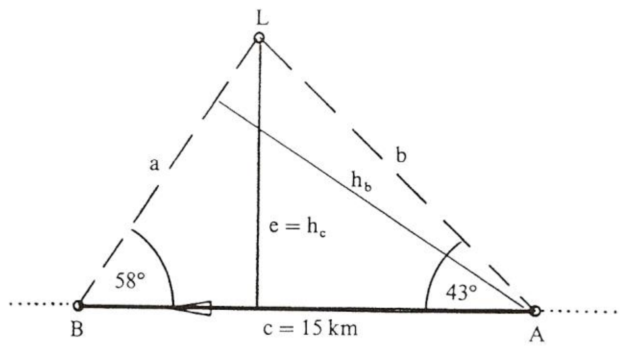
په خوښه دریګوډیو کی شمیرنه

سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه
یوه کیښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $\alpha = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوه تګ پايکرښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کی کيښتی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کيښتی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



څيره ۲۰۲

اوبی يا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبيول يا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ km$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43^\circ = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58^\circ} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کې مرستندوي لویې له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کې د اړخونو ځانښیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځانښیونه یا تناسب دی.

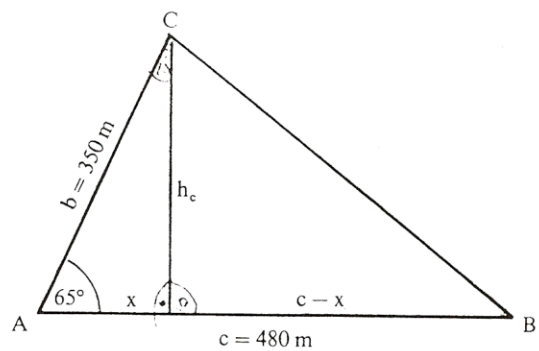
$\sin \alpha / \sin \beta = a / b$ $\sin \beta / \sin \gamma = b / c$

$\sin \gamma / \sin \alpha = c / a$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کې هم باورلري(تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کې نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چې دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350\ m$ او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.
د B ځخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



شیره ۲۰۳

اوبی یا حل :
جګوالی یا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.
دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،
ځکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی . د پیتاګوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^{\,2} + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos \gamma$$

په هر یوه دریګوډي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوډي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوډیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوډي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin \alpha$$

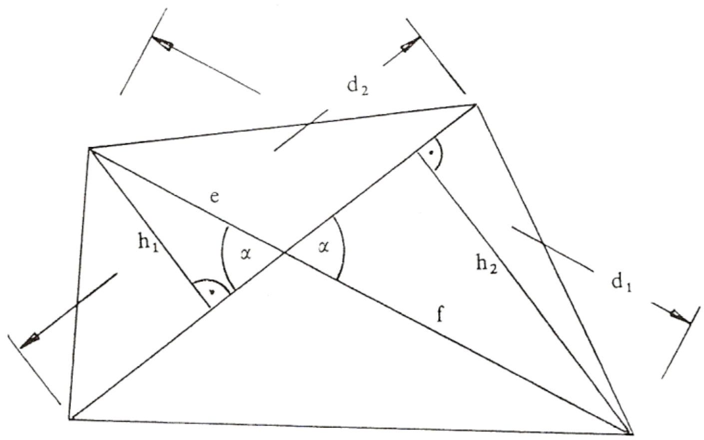
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي .

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2(e + f)\sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \sin\alpha$$



شیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریگونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواك، نه یوائی د دننه لورته تیرو درېگوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنگه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

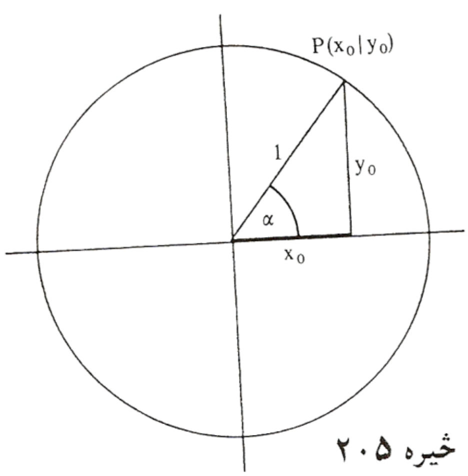
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردی ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردی ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردی منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردینات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردی ځنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردي په منځ یا ځنتر پروت دی، (ځیره ۴۳۱) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ځخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ځلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردی ،د کونجټکی $P(x|_0 y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیوربډرځونو په ځیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په ځیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



ځیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

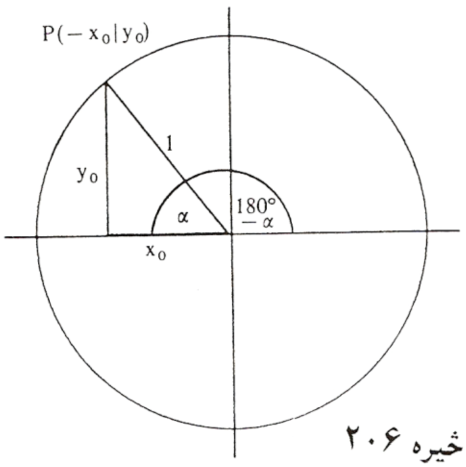
(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاهیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو کونج α جوړ کړي، یعني ښتریکونج یی α - °180 وي.
د « سیوروڅیرو» ښخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښایي.



څیره ۲۰۶

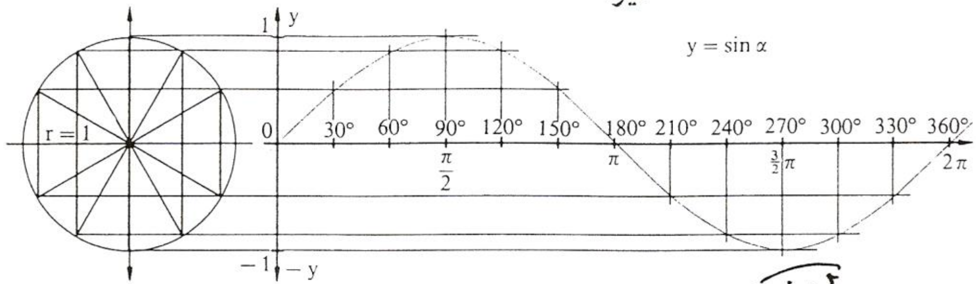
په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج α+°360 لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د α+720 لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ |۱٥|) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

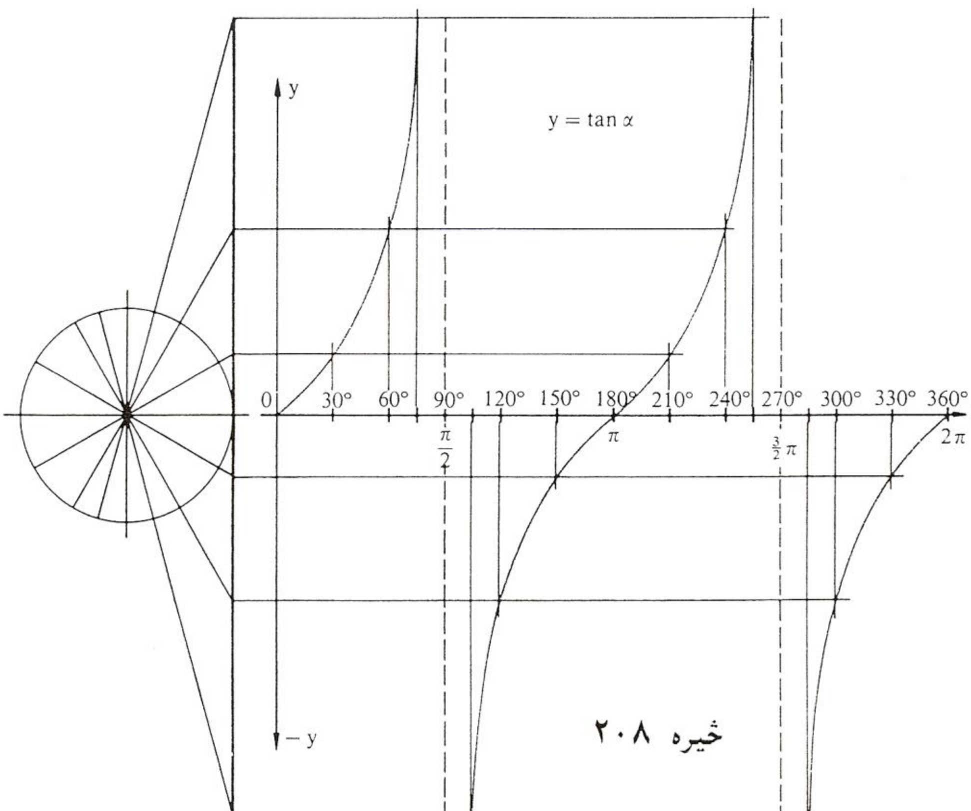
(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

د ساین کږه

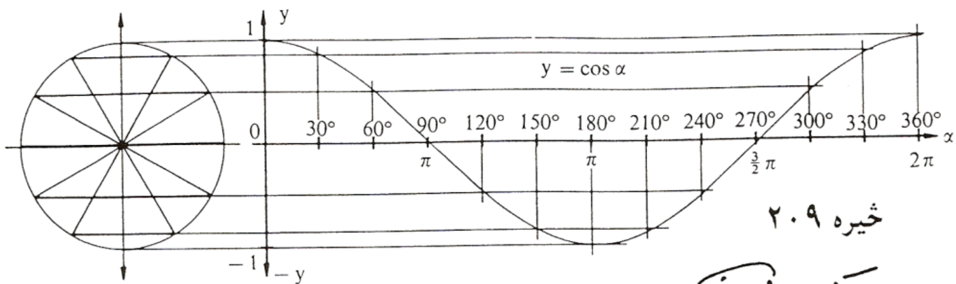


خیره ۲۰۸

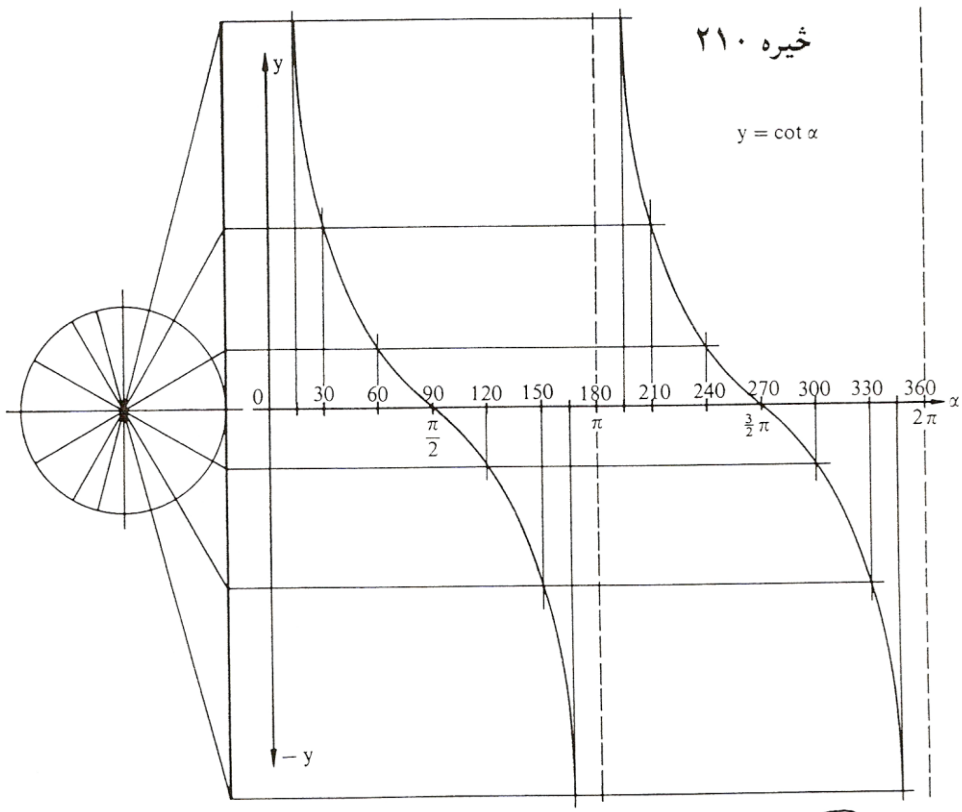
Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

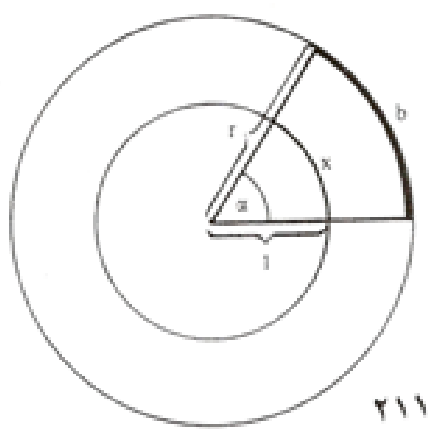


Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه(لینده کچ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو(دمخه ولیدل، چې ۳۶۰ درجې پوره ګردي بنايي. هغه، چې لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چې ګردي په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دوارو کچیوونونو یا کچواحدونو کې ګډ دي، چې په ګښونو اندازه کیږي، بې له کچ یوون ارزښتدیري ربیلګښونه دي، په داسې حال کې چې وتل ګښونه (= د تعریف ډیري ګښونه) یو یوون یا واحد(درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کې مورږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.



ځیره ۲۱۱

کونج لویې په واقعیت کې یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کې کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهخوي. دا کونجکچونه چې د کونج لپاره په تریګونومتریکې بلواکو کې ابېښودل کیږي (د بیلګې په توګه sin) ارګومنت (Argument تعریفډیري) بلل کیږي. په تعریفډیري کې کیدی شي چې نوې درجه ، زره درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکې دې پام ولري چې په جیښمیري کې همغه مودوس په کار اچول شوي دي(راتلونکې دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو (ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پورې یوه ګردبرخه یا ګردی لینده اړه لري، نو ټولی ګردی پورې ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج ∝ پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپېری ځانګړی همداسی نیسي لکه په پیل کی ∝ و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګڼ دی : $\pi = 3{,}14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $\alpha = 60°$ له ګردی د ۱۰ سانتیمتره وړانګي سره یوه په لاندې ډول ګردی لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10{,}47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردی چاپیری دی : $U = 20\pi = 62{,}83$ cm
همغه کونج ∝ د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګردیلینده
$b = 10\pi . 60° : 360° = 5{,}236$ cm
غوڅوي. دا ګردی لاندې چاپیری لري: $U = 10 = 31{,}416$ cm .
له ګردی د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څټ یا برعکس کونج ګردیلینده
$b = 2\pi . 60° : 360° = 1{,}047$ cm
غوڅوي» د دې ګردي چاپیری فقط $U = 2\pi = 6{,}283$ دی .

له بیلګي څرګندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردي د ګردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې خیره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ).\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\, 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه رییلګڼونه پرېښوول شوي.

بېلګې :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175 \text{ (rad)} \qquad \alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځاننیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږی یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواك ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفېږي ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواك پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواك دی، دا په دې مانا ، چې د بلواك ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

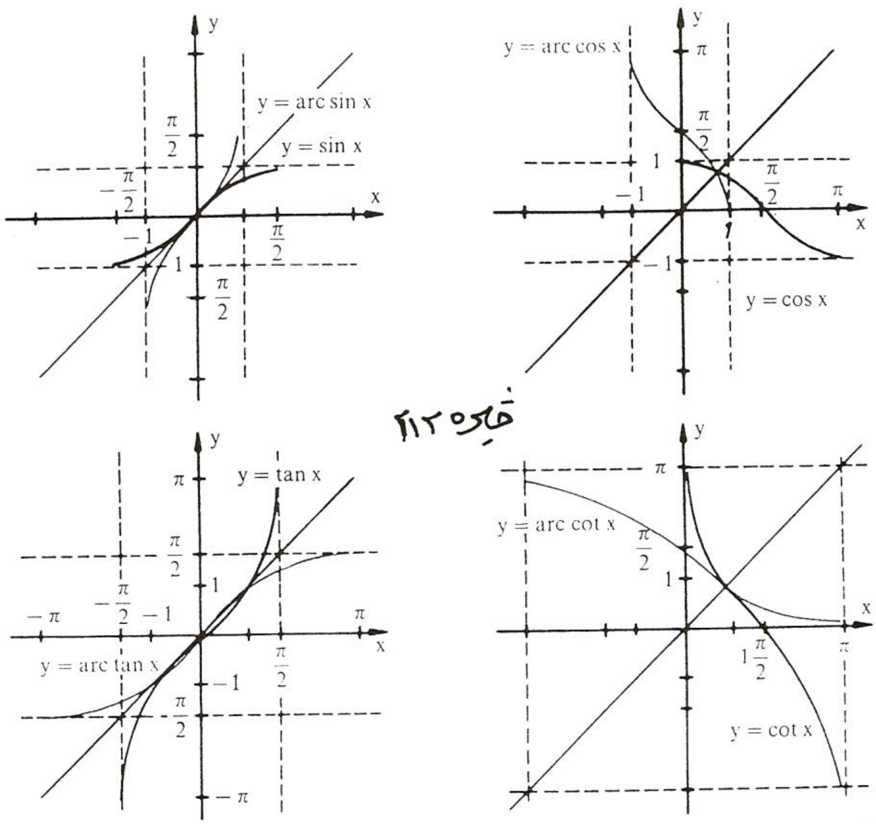
مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تكراريږي. د دي لپاره چې په څرګندنه ممكن شي، نو بايد د خپل تعريف ډيرى په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

> **تعريف** : د يوه (رابند يا محدود) تريګونومتريكي بلواك په څټ بلواكونه اركوس بلواك Arcusfunktion بلل كيږي يا څيكلومتريكي بلواك (لاتين اركوس: Arcus = Bogen = لينده)

دلته arc sin(x) لوستل كيږي »دx اركوس ساين. د كونجبلواك تعريفډيرى دلته اړونده اركوسبلواك ارزښتډيرى دى او په څټ اركومنت يا تعريفډيرى دلته تل يو ريېلګڼ دى.

Trigonometrische Funktion تريګونومتريکي بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle| -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle| -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \le y \le \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle| -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \rightarrow \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \rightarrow \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شکل ۲۱۲

Beispiele: بېلګې:

1. arcsin (0,8) $= 0{,}9273\,(\text{rad}) = 53{,}13°$

2. arccos (1) $= 0\,(\text{rad}) = 0°$

3. arctan (−100) $= -1{,}5608\,(\text{rad}) = -89{,}43°$

4. arccot (−70) $= -0{,}0143\,(\text{rad}) = -0{,}82°$

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك یو د بل په څېر بلواك دي نو باور لري·

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$
$$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$$
$$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$$

یعنې په لاندې توګه چې

$$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$$
$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$$
$$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$$
$$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشميري کاروني يا استعمال لپاره

داچي پخوا معمول جدولونه د بلواك تعريفېدېري او ارزښتېدېري شميرلو لپاره له كاره غورځول شوي دي او دنده يې ايلكترونيكي ماشينونو نيولې ده، غواړو چي د جبشميري استعمال په هكله هم څه ووايو

كوركمپيوتر زيات وخت داسې فنكشنونه يا بلواكي لري يا وظيفې په كللك اختيار كې لري، چې د درجي اوړون په لينده كچ او په څپ كوي، مګر شميردرځ په توګه بايد د شميرونكې په پروګرام كې ځاى په ځاي شوى وي.

پوره اسانتياوې او زياته كارونه د جبشميرې په غاړه پرته ده، دلته دې توكمې د < .... > سره په نخښه شي:

په قاعده كې دريې بلواك وركړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > كوتنجنت بيا داسې شميرلكيدى شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توكمي سره سړى اركوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > اركوس ساين دى. په عمومي توګه كونج – بي پروا كه په لينده كچ او يا درجه كچ وركړ شوي وي – بايد د فنكشن له مخه وركړ.

بيلګي

س

١ لاندې جدول همغه د كاروني يا اتعمال لپاره د جبشميري چمتووالى ښاى :

Winkelmaß كونجكچ	TR-Modus په نخښونه	Beispiel بېلګه.
Altgrad زړه درجه	DEG	$\sin 45° = 0{,}7071$
Neugrad نوې درجه	GRAD	$\sin 50^g = 0{,}7071$
Bogenmaß لينده كچ	RAD	$\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin\frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0,5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1{,}047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه – یا نوي درجې همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د < <-- DRG > سره سورت نیسي.
بیرته یا په ښتې سړی داسی راځي- لکه چی لرل مو- د <INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنې جشميري په دې برسيره نور زيات امكانات هم لري ، نتيجې يې په ګراد دقيقې، ثانيې اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تكمې <DMS-Dd> سره صورت نيسي:

26.75° 30°15′	⟨inv⟩⟨DMS – Dd⟩ ⟨DMS – Dd⟩	26°45′ 30.25°

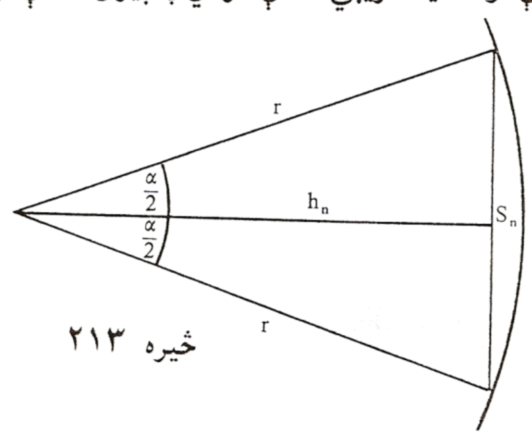
د " 15″ °30 " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميرۍ د لاس کتاب ښخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چې داسې شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کې نه لرو ، خو په هر صورت يې ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پيلبيلګه: دلته دې S_n د يوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چې په يوه ګردۍ کې چې وړانګه يې $r = 5\ cm$ ده، راګير دی.

الف) وښايي چې

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د يوه داسې n– ګوډي چاپيرې U_n وشميرئ ، چې $n = 8;16;32;128$ وي، او په نږدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيرې د دې وړانګې r سره وښايئ .



شيره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نزدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A وښایی .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي. د هغو د څینتریکونج ∝ لپاره باور لري $\propto = 360° / n$. د جګی یا جګوالی h_c د کنبلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r . \sin\frac{\propto}{2} = 2r . \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin(180°/n) = 10n.\sin(180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړیپرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180° ⟨STO⟩ ⟨:⟩ 8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 8 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 30.614675
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 16 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.214452
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 32 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.365485
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 64 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.403312
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.412773

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r . \sin(180°/ n)$$

له امله داسی دی

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cos\left(\frac{180°}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$$

له دې سره د نرۍ

```
360° ⟨STO⟩ ⟨:⟩   8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   8 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 70.710678
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  16 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 76.536686
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  32 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.036129
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  64 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.413712
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.508279
```

د یوه جشمیرې سره ، چې له یوې زخیرې زیاتی ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتي هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروګرامور ماشین سره کیدي شي چي د دا ډول شمیرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو یا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تریګونومتریکي بلواکو خویونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چی یوه کونج بلواك تعریفېږی یا α او یا x وي. ددې لپاره چی د یوه بلواك خوي باندې ټینګار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.
د لاندې خویونو لمړی ډله یوائې له تعریفمساوات (د مخه راغلی) او د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې gegeben ورکړې او gesucht غوښتونې یا پلټونې په مانا دي

gegeben ورکړې / gesucht غوښتونې	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	$\sin x$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
cos x	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
tan x	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cot x}$
cot x	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	$\cot x$

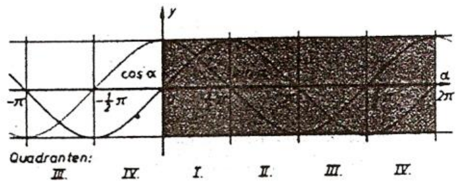
لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړې شو

تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکي دي، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کې تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجې) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجې (180°)) لري.

$$\left.\begin{aligned}\sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x\\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x\end{aligned}\right\}\ k \in N$$

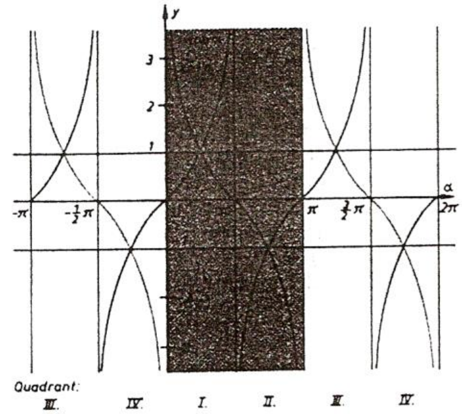
$$\left.\begin{aligned}\cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x\\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x\end{aligned}\right\}\ k \in N$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن پریودیانی راګرځیدنه



د تنجنت او کوتنجنت فنکشن پریود بیلګې :

$\sin 50°$	$= \sin(50° + 360°)$	$= \sin(50° - 720°)$	$= 0{,}76604$	
$\cos -30°$	$= \cos(-30° - 360°)$	$= \cos(-30° + 1080°)$	$= 0{,}86603$	
$\tan 2{,}5$	$= \tan(2{,}5 - \pi)$	$= \tan(2{,}5 + 5\pi)$	$= -0{,}74702$	
$\cot 10$	$= \cot(10 + \pi)$	$= \cot(10 - \pi)$	$= 1{,}54235$	
$\sin 35°$	$= \sin(180° - 35°)$	$= -\sin(180° + 35°)$	$= -\sin(360° - 35°)$	$= 0{,}573576$
$\cos 35°$	$= -\cos 145°$	$= -\cos 215°$	$= \cos 325°$	$= 0{,}81952$
$\tan 0{,}6109$	$= -\tan 2{,}5307$	$= \tan 3{,}7525$	$= -\tan 5{,}6723$	$= 0{,}700208$
$\cot 0{,}6109$	$= -\cot 2{,}5307$	$= \cot 3{,}7525$	$= -\cot 5{,}6723$	$= 1{,}428042$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو نو په دې برسیره په ټینګه روښانیږي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګی:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	− 0,573576	− 0,573576
cos	0,819152	− 0,819152	− 0,819152	0,819152
tan	0,700208	− 0,700208	0,700208	− 0,700208
cot	1,428148	− 1,428148	1,428148	− 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیري یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
$\sin x$ bzw. $\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$ bzw. $\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
$\tan x$ bzw. $\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
$\cot x$ bzw. $\cot\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

د دغه سمبول د جدول په مانا دي او پیدا نه شي یا جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې جدول څخه کېدی شي په خيال کی يا ګوماني لاس ته راوړی شو

sinx = cos (/2 -x) cos x = sin (/2 -x)
tan x = cot (/2 - x) cot x = tan (/2 -x)

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجيز دريګوډي کي د تعريف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

sin = a / c او cos ß = a / c

د – 90° = ß له امله لاس ته راځي :

sin = cos (90° -)

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له ځيرو څخه هم لاس ته راوړل کيدی شي، څکه د ساين او کوساين بلواکو يا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د 2/ = x کرښی ته يو بل سره محورسيومتري څغلي :

له ځيرو او بيلګو څخه په دې برسيره لاس ته راځي:

تعريف: د کوساين بلواك جفت دی ، لرو:

cos (x) = cos (-x)

ساين – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

sin (x) = -sin(-x), tan(x) = -tan(-x) ; cot (x) = -cot(-x)

يادونه : په دې نلواکو کي کيدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگی:

$$\sin 60^\circ = -\sin(-60^\circ) = 0,86603$$

$$\cos 0,75 = \cos(-0,75) = -0,70711$$

$$\tan 150^\circ = -\tan(-150^\circ) = -0,57735$$

$$\cot 1,3 = -\cot(-1,3) = o,27762$$

د زیاتون قضيي يا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لايني نه دي(د فنكشنگراف كرښه نه ده،بلكه كږه ده) ، نو ډېل تعريفډيري پورې ساده ډبل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$\sin 30^\circ = 0,5 \quad \sin 90^\circ = 1 \quad \sin 180^\circ = 0$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو يا په همدي ډول د دوه كونجونو پو په بل زياتولو د يوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلگی :

1. $\sin(x + y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

1'. $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

2. $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2'. $cis(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3. $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

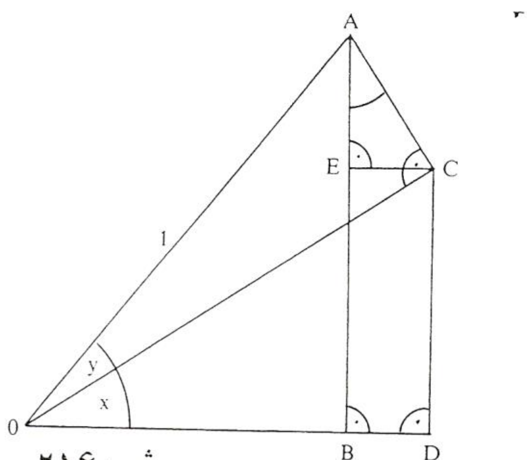
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x-y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



خیره ۲۱۶

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$

$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$

$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

برسېره پر دې لرو:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ګانې په ځای کولو څخه ثبوت په لاس راځي

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1'. 2'.:

3. ι 4.: $x = y$. ګانې په ځای کړه

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2};\ t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

پس لرو

$$\sin x = \sin(z + t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

همداراز

$$\sin y = \sin(z - t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ثبوت په ورته توګه څخه راځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x + y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

د ویشنې ثبوتي له لارې ثبوت لرو

8.: $(*)\ \sin^2\frac{z}{2}$ durch $1 - \cos^2\frac{z}{2}$. په (*) کې ولیکه یا لیکه بدله

9-10: د 11 برخې له 1 او 2 او ټینګښت د تعریف څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) + d$

لکه چي په پیل کی مو وویل په طبیعت او تخنيك کي ډيرې پيښي شته دی چي تل بيرته راکرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديکي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه کوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ۱− او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلې لور داواقعي د کونج په واك کی نه دي بلکه د وخت په واك کي دي د يوې راګرځيدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولکيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې کارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه کی راڅول شويدي، ګراف يی ورزياتی ځيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د کوسائن بلواك چي په $\pi/2$ سره راکښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له یې لوړ ځه)

بیلګی	دکارونی ساحه	تاثیر	بلواك
ځیره ۲۱۷	ټولی تلبیرته راګرځيدونی تعامولونه		$y = \sin(x)$
ځیره ۲۱۸	د یوه مساوي او برل ښپیالونګ یو په بل پرلوتل	د y-لور پاندې راکښنه	$y = \sin(x) + d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

y = sin(x+c)	د فاز تغییر یا ځای بدلون	په بدل برېښنا جریان کې د برېښنا او شیانو تغییر دونښانو نه	څېره ۲۱۹
y = a . sin(x)	د امپلیتود د ځای بدلون فاکتور -1 د 180° فاز ځای بدلون دی	د یوه پندول څوزېدنه	څېره ۲۲۰
y = sin(bx)	د پریود تغییر یا بدلون b>1 سرعت 0<b<1 په کرار کېدل b <0 په شپږ ګرځېدنه کم محور دی	د یو بستیتونو څرخېدونکي څېرونه په یوه وخت د ادرونه له ډهڅې پورته لمزه له ټکه په د منځ الو په اوازونو کې	د څېره ۲۲۱
y = a . sin(bx+c)+d	عمومي حالت	کمپلکس پریودیک جریان یا عمل	څېره ۲۲۲

تمرينونه

۱ – د لاندې ورکړې سره څېره بله کړئ

4°6' = 4,1° ; 10° , 5' = 10°30

a) 6,75° = b = 120,48° = c) -75,65° =

d) 52°16' = e) 97°13' = f) 44°44' 44'' =

۲ – په درجه کچ ي وليکئ

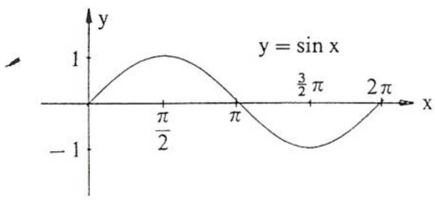
a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x (2/3)\pi$

d) x = 4 e) x = -3 f) x = 4,7

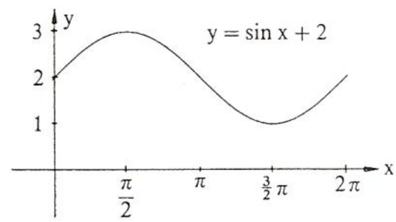
۳ – په لينده کچ يې وليکئ

a) 15° b) -60° c) 540° d) 20°15' e) 15,75°

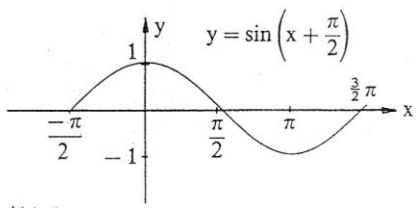
(c) ketabton.com: The Digital Library



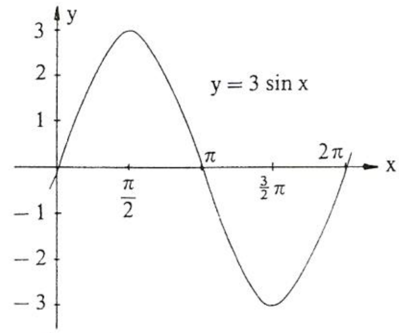
شیره ۲۱۷



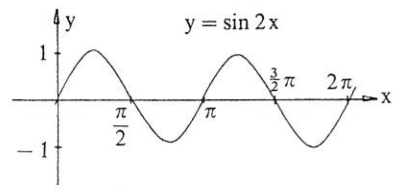
شیره ۲۱۸



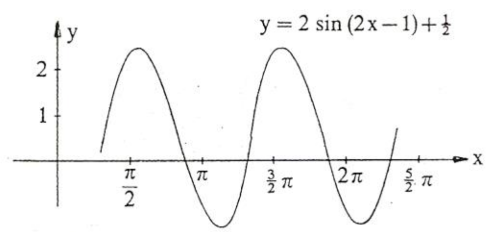
شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۰



شیره ۲۲۱



شیره ۲۲۲

د دي بلواك ګراف د ساين كرېږ $y = \sin x$ څخه لكه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کيدل

۲ – د نیمی راګرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه

۳ – په يوه يوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په 1 / 2 پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) sin20° b) sin(-30°) c) sin 172° d) din1°4'

e) cos 35° f) cos 380° g) cos(-27°) h) cos47,9°

i) tan 11° k) tan (-15°) l) tan 33,33° m) tan 13°13'

n) cot 870° o) cot (-11°) p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8 s) cos α = 0,9 t) tan α = 2,5

u) cot α =-1 v) sin φ = 0,3 w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4 y) cot φ = 0,3 z) arcsin(x) = π /2

۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی ټوټې وشمیری

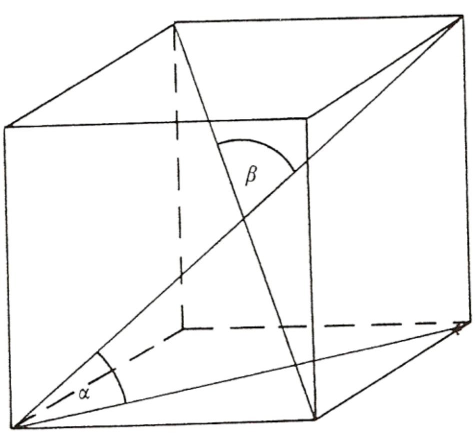
۶ – په مساوي پښیز دریګوډي کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی ټوټي وشمیري



شیره ۲۲۳

۷ – د یوه پڅکونجیز (α > 90°) دریګوډي لپاره ساین وشمیری

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز دریګوډي لپاره وشمیری (α > 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی

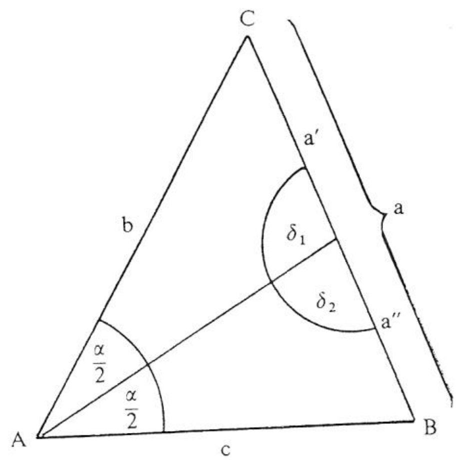
$r_1 = 5\ cm \quad , r_2 = 4\ cm$

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8cm$ ورکړ شوی دی.

دد دواړو ګردیو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکی

او د کډي غوڅونی اوږدوالی .



څیره ۲۲۴

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه

کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی

ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملی په مرسته حل

(اوبی) کړی(څیره۲۲۴).

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،

چي ۱،۵۰ متره جګ دی،

یوه زینه ورجګه شي

میلانکونج ∠ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوځي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا

کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟

پ) د یوه زوړندي پټېلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره

لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴ – یو د اوبو بیلر (کتله = ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه دړه پورته خیژول کیږي، چې میلانکونج = 25° لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور (د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹، ۸۱ نیوټن 1 kg = 9,81N).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چې هره یوه یې ۵۳ متره اوږده ده، ډرول کیږي. درسیو میلانکونج 60° دی په پښه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې ۵۳ متره جګې ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په څمکه لمروړانګې په کوم جګوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه ۵ متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چې جګیدونکوج یې = 18,5° او ښنیټکی یې β=8° لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یې پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یې د ښنی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چې ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په څمکې ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چې د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یې ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

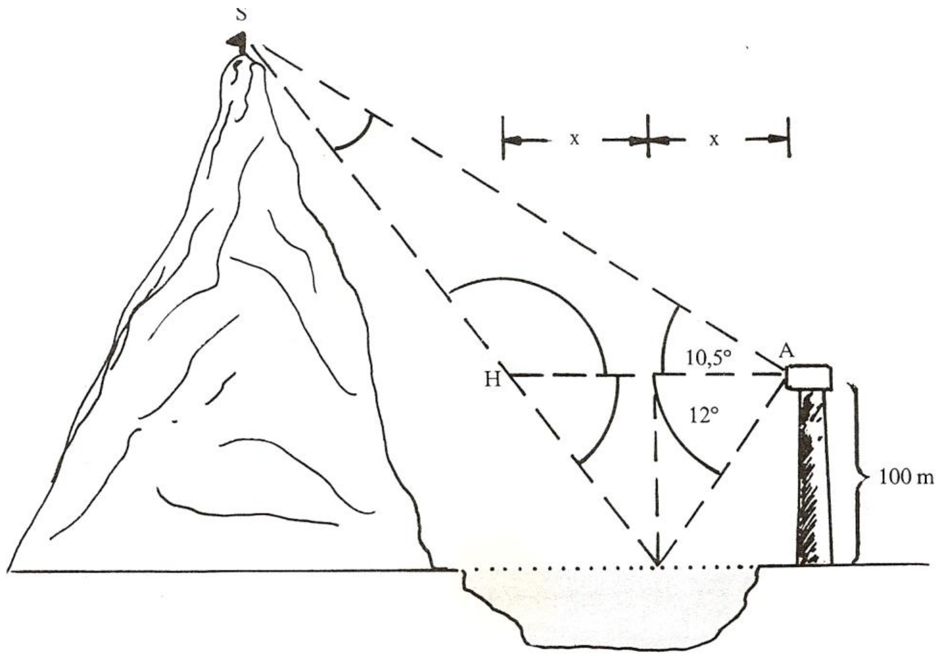
۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ
د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنګهوارې دریواړه دنننی کونجونه څومره لوي دي؟

۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنستهسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته
لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی
یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

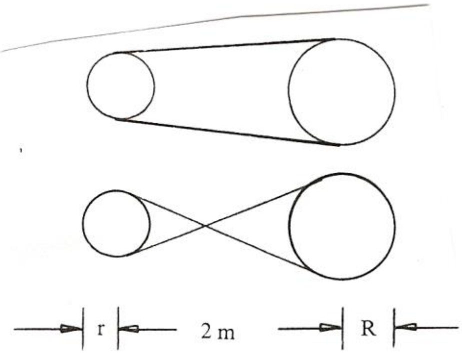
۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د
بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ
څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د
غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی
دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په
لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې
لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ
باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۵



۲۳ - الف) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکبنولو چیترو باندي راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندي اندازي ولري $r = 22\ cm$, $R = 35\ cm$, $|M_1M_2| = 2m$?

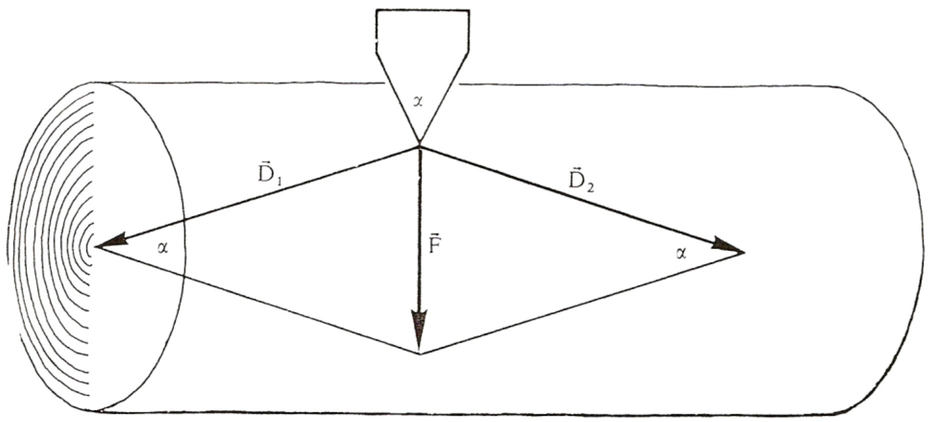
خیره ۲۲۶

ب) دا کړی به څومره اوږدي وي که د اتیران په څیر له چیتروګانو یا تیکلیو راکی ځیدلي وي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

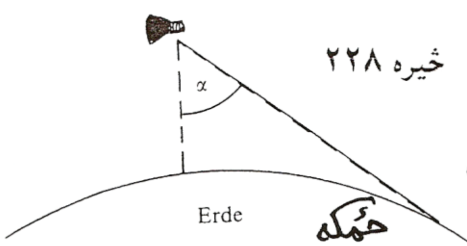
۲۴ الف) د ونی په ستنه یو کایل)موړی) په څنډ د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چې د ستنی درڅونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|F|=|D|$ ؟



څیره ۲۲۷

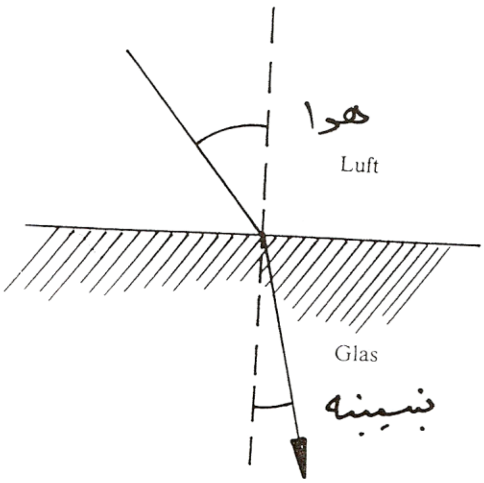
۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه α کونج لاندې لیدل کیږي (څیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکی وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)



څیره ۲۲۸

۲۶ – یو ګادی د $v_\alpha = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $\alpha = 115°$ کونج

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډي د اوسپنی
ټیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي.
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو
د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟

۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو
طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر
یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius
د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د
ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون
وایي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او
ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر
دې لاندې اړیکې باور لري یا صدق کوي:

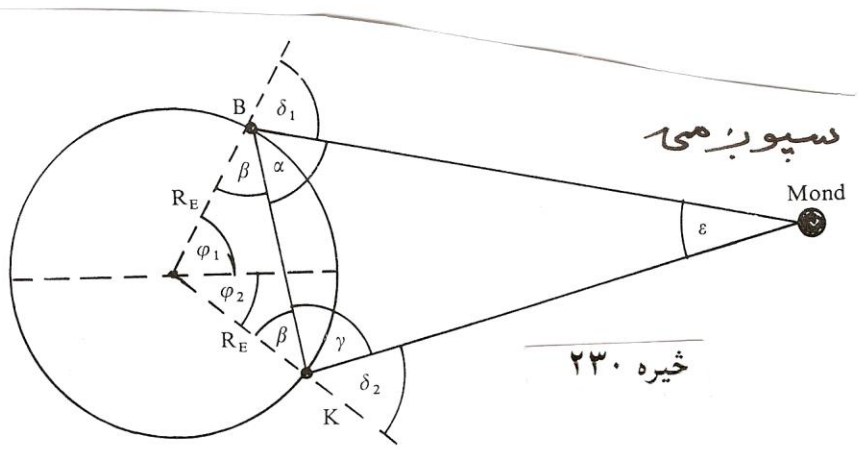
$$\sin \alpha \;/\; \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1{,}5\ (1{,}33)$ دی. وښایي،
چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل
شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هیلو
په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د
سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
$\delta_2 = 55,72°$ او $\delta_1 = 32,08°$.
وشمیری $|KM|$, ß , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .

(c) ketabton.com: The Digital Library



۲۹ – لړځیدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t تړواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin (2 \pi /T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2 \pi / T) t = x$ هغه کونج دی ، کوم چي په T وخت کی وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼدیرۍ پر بله ګڼدیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په ریيلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, \ldots\ldots\ldots (7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د ریيل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: د $i^2 = -1$

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,3)$$

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7,4)$$

د (7,1) ځای نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i ریيل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کيدی شي په لاندې ډول وليکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ايماجينار ګڼ يوون(واحد) توليز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ايماجيناريوون(واحد)z= i يو ځانګړی ايماجينارګڼ b=1 دی

د توليزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

په لاندې ډول د څلوری پوره کولو يا مربع تکميلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

لاس ته راځی يالرو<=

$$x^2 + px + q = (x+ p/2)^2 = +(q-p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x+p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4-q},......................(7,12)$$

د$p^2 = 4q$ لپاره رييل «دبل» اوبی يا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رييل اوبيونې يا حلونه منځ ته راوړي٠

که $P^2 < 4q$ وي، نو رييل اوبی نه شته دی

د ايماجينار ګڼ په مرسته کيدی شي وليکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} = \sqrt{[q-\frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q-p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبيونې يا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a,b \in R$$

د دې فورم يا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتين: پوره کوونکي - يا پوره کيدونکي-) بلل کيږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 =-1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډيرۍ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a-bi,..................................(7,14)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي٠ لنډ کنجوګيري کمپلکس ګڼ يا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ...(5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنګه ايماجينار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رييل او ايماجينار برخه کې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اېښول شوي

ګډوله يا کمپلکس عدد کيدی شي په سطحه يا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سړی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شميرنه کوي، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نيسي چې:$i^2 = -1$

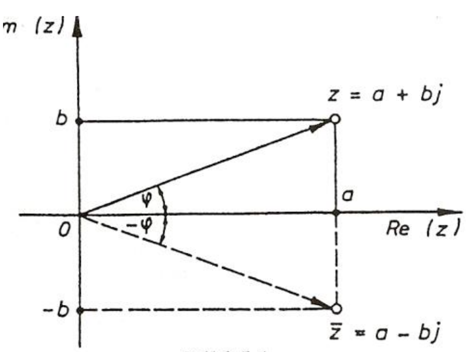


Bild 5.1

موږ دې سيستم ته پروت ولاړ سيستم وايو يا کواورديناتسيستم Koordinaten systm

پورته خيره دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطڅې ریيلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته یېایماجینار برخه وایې لکه څنګه، انځور شوي دي٠ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر احي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي٠(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوریږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۱۰۷ زیاتون او کمون:

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې ریيل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۱۰۷ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعني د(z2-) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

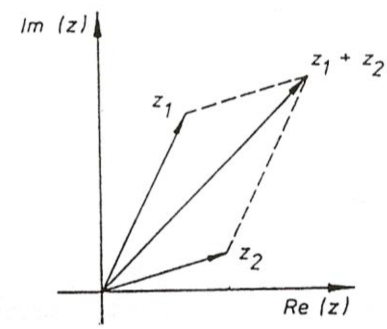


Bild 5.2 7.2 څېره

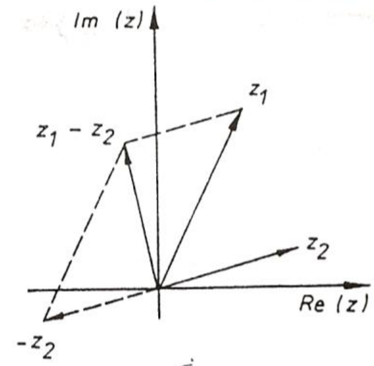
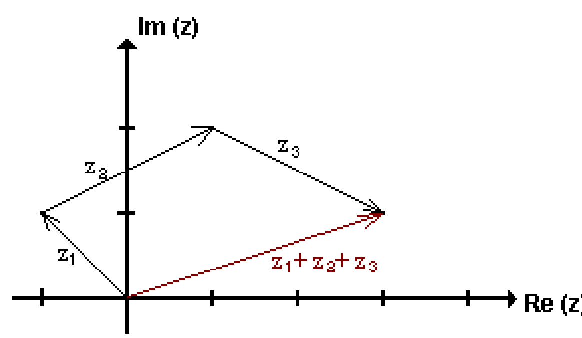
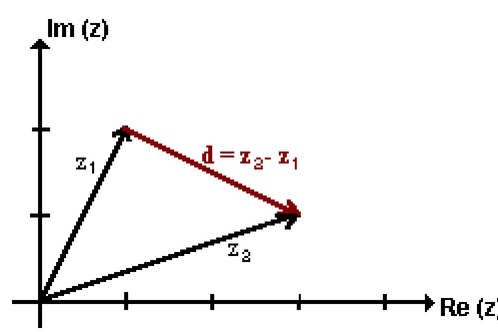


Bild 5.3 7 څېره

یا لاندې:



په پورته او لاندې ځېرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي۰



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي۰

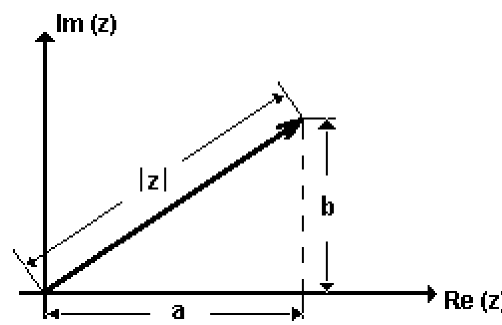
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د په |z| سره ښايو او د پيتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کيږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی ليکه

هم وکتل شي٠ مخامخ ځيره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښايي



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$

په درې ګوډي کې د اړخونو ځاننيونه يا تباسب له امله باور لري

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, ...(7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اينوولو له لارې لاس ته راځي

$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$

$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2(-1)$

$\Rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 +a_2 b_1)i \qquad (7,20)$$

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي٠ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z} = \bar{z}_1.\bar{z}_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab + ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7,22)$$

۷ ۰ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1i):(a_2+b_2i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسی لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوهمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د او $Z1$ لپاره له $Z2$ سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3} i)$ d) $z = -1 - i$

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22+5i)+(2+i)$ b) $(3+2i)-(5+2i)$

c) $(1+2i)-(1+2i)$ d) $i-(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x+y\,i)(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63+16i}{4+3i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

4.1. a) z_1+z_2 b) z_1-z_2 c) $z_1\cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1+z_2|$ b) $|z_1-z_2|$ c) $\bar{z}_1+\bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1-\bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1|\cdot|z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1\cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $x^2 + (1 + i)\, x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\, x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\, x + 1 = 0$

d) $16\, x^2 + 8\,(i + 1)\, x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

همدا موضوع له بلکتاب څخه

7 . ایماجینار او کمپلکس ګنونه

Inhaltsverzeichnisخونديونه

- د ریيلو ګنونو بنستونه او نیوني یا فرضيي
- ایماجیارګنونه

کمپلکسګنونه

- په ګنونهواره کې د کمپلکس ګنونو انځوورونه
- د کمپلکس ګنونو سره شمیرنه
- د کمپلکسګنونو زیاتون ، کمون
- د کمپلکسګنونو ځل
- د کمپلکس ګنونو ویش
- د کمپلکس ګنونو تولګنیز په توان
- د بینوم درسي جمله
- د موفري فرمول 5.6 Die Moivreschen Formeln
- د کمپلکس ګنونو ریښه 5.7 Wurzeln aus komplexen Zahlen
- توان د مختلفو جګګنونو سره
- 5.8 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

د ریيلګنونو بنستونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریيلګڼونو ډیری لکه د مخه مو ، چې ګوته ورته ونیوله د راشنل او ایراشنل ګڼونو له ډیریو جوړه ده (د ریيلګڼونو برخه دې وکتل شي).

ایماجینار ګڼونه Imaginäre Zahlen

د ریيل ګڼونو سیستم پوره نه دی، ګورو، چې د یوه ګڼ څلوری یامربع، چې د کمیز ګڼ سره برابره وي، ریيله اوبیونه یا حل نه لري لکه لاندې

$$x^2 = -1$$

داسې یو ریيل ګڼ نه شته، چې پورته پوره کړي

یوه فورمال اوبیونه یې په لاندې ډول ده

$$x = \pm\sqrt{-1}\,,$$

چیرته ، چې $\sqrt{-1}$ ریيله اوبیونه نه ده.

دا څلوری یا مربع ریښه د i سره په نخښه کوو، چې له دې پرابلم څخه ووتی شو او څلوری یې په 1 - سره په نخښه کوو.

د دې i لپاره باور لري:

$$i^2 = -1$$

اوس کړی شو، چې ولیکو

$$x_{1,2} = \pm i\,.$$

که ګڼ i د ریيلګڼونو سره زیات ځل یا ضرب کړو، نو د ګڼونو یوه د نوو ګڼونو ډیری ترې لاس ته راځي، د بیلګې په توګه :

$$2i,\ 3i,\ -i,\ 1+i,\ 2+i,\ 1+2i,\ -23+78i,\ 0.45-0.93i$$

او داسې نور.

تولیزه بڼه یې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$a + bi\,,$$

پورته ګڼ کمپلکس ګڼ دئ او a او b رییلګڼونه٠ له دې سره هم لګۀ د نورو ګڼونو سره ساده شمیرل کیږي، چیرته، چې د i^2 په ځای 1 - لیکلی شو یا په ځټ: لاندې کې یې بیلګې ګورو

$$(1+2i)+(3+4i)=(1+3)+(2+4)i=4+6i$$

په ټولیزه توګه:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

له دې سره ویش هم کړی شو، خودا ، چې ستونځمن دئ وروسته یې راوړو.

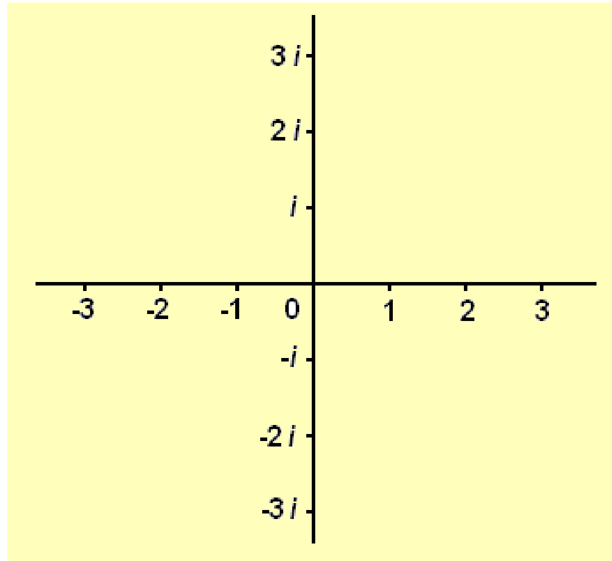
دا لاندې هم لرو

i.2i,i,0,-i,-2i,-3i٠٠٠3.....

دا ایماجینار ټولګڼونه بلل کیږ ي یا بولو ، چې دا هم صفرلري

موږ په لاندې کې د هوارې پروت محور لاندې د رییلګڼونو محور پوهیږو او ولاړ محور یا څرخونی یې د ایماجینار ګڼونو محور دی، چې د دواړو زیاتون کمپلکس ګڼونه دي یا د کمپلکس ګڼونو هواره انځوروي٠.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په لاندې کې يو کپلکس ګڼ په يوه رييل ګڼ يا پيداينتي ګڼ ويشل کيږي

$$mi : n = \frac{m}{n} i \ .$$

په پورته کې m او n رييلګنونه دي او ايماجينار

$$x^2 = -a^2$$

په پورته کې a رييلګڼ دی، خو x غواړو لاس ته راوړو، لاس ته راوړنه يې يو ايماجينار ګڼ دی.

د دوه ايماجينار ګڼونو زياتون او کمون::

$$a\,i \pm b\,i = (a \pm b)\ i \ .$$

ځل او ويش يې

$$\frac{i}{i} = 1 \ .$$

د دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$pi \cdot qi = -pq$$

او

$$\frac{pi}{qi} = \frac{p}{q} \,,$$

چیرته چي p او q ریللګنونه دي.

لاس ته راوړنه : د دوه ایماجینار ګنونو ځل یا ضرب او ویش څخه ریيلګڼ لاس ته راځي، چي په لاندي کې یې ګورو ۰

$$i^2 = -1 \,, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i \,, \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1 \,, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i \,, \ldots$$

د ټولګڼ n لپاره لرو:

$$i^{-n} \equiv \frac{1}{i^n}$$

لاس ته راوړنی یې

Error!

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i \,, \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1 \,, \quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i \,, \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1 \,, \ldots$$

د سره شمیرل ورسته کیدونکي دي.

Komplexe Zahlen کملکس ګنونه

ګډ یا مخطلت خلورۍ ـ یا مربع برابرون شمیرو

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځلورۍ پوره کوونې يا تکميلونې له لارې ، چې ورسره بلد يو ، اوبيونه يا حل پيداکوو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\,i\ .$$

د دې برابرن اوبيونه نه رييل ګڼ دئ او نه ايماجينار ۰ دې ګڼ ته موږ کمپلکس ګڼ وايو **komplexe Zahlen**.

د کمپلکس ګڼونو او د دې سره سره شميرنه ۰

موږ دا لاندې کمپلکس ګڼ لرو :

$$z = a + b\,i,$$

چيرته، چې a او b رييل ګڼونه دي

د کمپلکس ګڼونو په مرسته کړای شو، چې بې بنديزه ځلورۍ- يا مربع فرمولونه اوبې کړو

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

لاس ته راځي.

دلته چې څه راځي هغه ګران لوستنکی پخپله هم پيدا کولی شي، زه به وهڅيږم، چې دا پرابلمونه پورته کړم يا لرې کړم ،

د لاندې لپاره

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

يو يا دوه رييل اوبيونې لاس ته راځي۰

د

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره اوبیوني په لاندې ډول لیکل کیږي

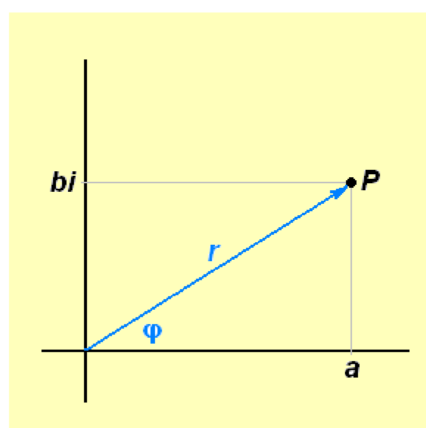
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\ .$$

اوبیوني کنجوګیري کمپلکس دې، دا په دې مانا، چې یو له بل د مختخښي له مخه توپیر کیږي٠

په ګڼونهواره یا ګڼسطحه کې د کمپلکس ګڼونو انځورونه

د کمپلکس ګڼونو ګرافیکي انځوروني لپاره هواره ځان رامنځ ته کوي، چې د رییل او ایماجینارګڼکرښو ځخه غزیدلې ده٠

کمپلکس ګڼونه a + bi د ټاکني له مخې(په بدل وار یا همغه وخت) د یوه ټکي P ، چې کواوردینات یا پروت ولاړ محوورونه یې a او b ، چیرته، چې محور b ټکی bi په ایماجینار ګڼکرښی باندې په ګوته کوي، یا د» ښوونکرښي « OP سره انځور کیدی شي٠ دا د یوې اوږ دې r سره ښایو او د رییلي محور سره کونج fi جوړوي٠ (دا همغه د ټکی P انځورول دي په پولار کواوردینات کې، r د کمپلکس ګڼ مطلق ارزښت دی، fi یې فاز بلل کیږي٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دواړو انځوربنې لپاره لاندې ترانفورمیشنبرابرون باور لري(له دې څخه نوج زده کوونکې تیریدلی شي، چې ترانسفورمیشن باندې نه پوهیږي)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}\,, \qquad a \neq 0$$

$$a = r\cos\varphi\,, \quad b = r\sin\varphi\,.$$

له $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ لاس ته راځي

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + k\cdot 2\pi, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{b}{a} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } k \text{ ganzzahlig ist.}$$

په پورته کې wobei د کوم سره یا چیرته چې په مانا دی او k ټولګې دی ۰

ارزښت

$$\varphi_0 = \arctan\frac{b}{a}$$

د φ في اصلي ارزښت بلل کیږي۰ له دې نور ارزښتونه د k او 2π له زیاتون څخه لاس ته راځي۰

د دې له مخې کیدی شي، چې کمپلکس ګڼ په لاندې توګه ولیکل شي ۰

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\,.$$

" وروسته د اویلر فرمول "Eulerschen Formel په مرسته ترې لاس ته راځی

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

دریمه انځورونه یې لاندې ده:

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r\,e^{i\varphi}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کمپلکس ګڼ دا درې انځورونې په ترتیب داسې بلل کیږي اریتمیتیکي بڼه کونومتریکي (یا تریګنومتریکي بڼه) او اکسپوننشل بڼه.

دا چې د اویلر فرمول وروسته ښوول کیږي، اکسپوننشل بڼهٔ دې دلته راوړل شوې وي، خو د ښوونې لپاره دې ترې کار نه اخستل ک یږي.

Rechnen mit komplexen Zahlen

د کملپکس ګڼونو سره شمیرنه

دوه کملپکس ګڼونه دې ورکړ شوي وي

$$z_1 = a_1 + b_1 i\,, \quad z_2 = a_2 + b_2 i\,.$$

د کمپلکش ګڼونو زیاتون او کمون

په زیاتون او کمون کې د الجبر ي قوانینو له مخې i هم داسې په کار اچول کیږي لکه هره بله کومه د تورو لویه ، چې په کار اچول کیږي یا کارول کیږي

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$$

د کملپکس ګڼونو « ښوونکرښه» (دا هغه کرښه ده، چهٔ د دواړو محورونو صفر ټکو څخه د هغه په هواره موخه ور ټکی په لور ګزیدلی وي، یاني د صفر ټکی څخه د هغه بل موخه ټکی په لور ، ځکه لوریزه ده)لکه وکتورونه سره زیاتیدلی او کمیدلی شي

Das Produkt komplexer Zahlen

د کمپلکس ګڼونو ځل

دی

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

دا ځل ترلی پیژند وړ لیدونکي مانا نه لري(یاني سملاسي ترې څه نه شو پوهیدلی) . که د دې په ځټ » پولارکواودینات » وکارول شي، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_1a_2 - b_1b_2 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) = r_1r_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right) = r_1r_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right).$$

او له دې سره t

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right].$$

نو دی

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{او} \quad \varphi\left(z_1z_2\right) = \varphi_1 + \varphi_2.$$

د ځل – یا ضرب ارزښت د ارزښتونو ځل دی٠ د ځل یا ارګومنت یا فازې د ارګومنت یا فازې د زیاتون سره برابر دی٠

سملاسي پیژندل کیږي، چې دا د دوه فاکتورونو څخه زیاتو فاکتورو یا ځله وونو لپاره هم باور لري

$$|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n| = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n| \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n.$$

د کمپلکس ګڼونو ویش Division komplexer Zahlen

په ورته توګه پیدا کیږی، که z_2 د صفر سره برابر نه وي

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

که کیږدو $z_1 = 1$ او $z_2 = z$, نو لاس ته راځي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\left[\cos(0-\varphi) + i\sin(0-\varphi)\right] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په ځانګړي ډول د $z = i$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

Ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl

د کمپلکس ګڼونو توان (کپلکس ګڼ د يوه ناکميز توان سره د رييل ګڼونو په څير دی)

$$z^{-n} \equiv \frac{1}{z^n}.$$

د کمپلکس ګڼونو ځل دې وکتل شي

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

د همغه ځله وون يا ضريب z لپاره ترپلاس ته راځي

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

موږ لرو

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{p \cdot q}, \quad z_1^p \cdot z_2^p = (z_1 \cdot z_2)^p, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \frac{z_1^p}{z_2^p} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p.$$

Der binomische Lehrsatz

د بينوم درسي جمله

د بينوم جملي لپاره هم لرو

د نوکانو د چاون قانون او ځل قانونو د زياتيز جګ ګڼ لپاره د بينوم جمله همغسي باور لري

$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \ldots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \ldots + \binom{n}{n} z_2^n.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځايه ښکته د ښوونځي زده کوونکو لپاره ستونځمن دی.

Die Moivreschen Formeln د موفری قانون

له برابرون څخه (پورته دې وکتلشي)

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

لاس ته راځي

$$|z| = 1 : \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

له بلې خوا د زياتيز ټولګنيز جګګڼ يا اکسپوننت سره د بينوم جملې څخه لاس ته راځئ:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

$$-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi + \ldots + i^n\binom{n}{n}\sin^n\varphi.$$

که د برابرون دوا

ړه خواوې برابار کېښول شي او بيا په پام کې ونيول شي، چې رييل او ايماجينار برخه دواړه بايد برابر وينو د موفري برابرون ترې لاس ته راځي **Moivreschen Formeln**:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - + \ldots,$$

او

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - + \ldots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چيرته، چې ښى لور ترهغې پوره شي، تر څو چې ځله وونى يا ضريب صفر شي.

د کمپلکس ګڼونو ريښه Wurzeln aus komplexen Zahlen

د برابرون اوبيونه

$$x^n = z \qquad \text{n positiv ganzzahlig}$$

پورته کى n زياتيز ټولګڼ دى
د کمپلکس ګڼ z n -مه ريښه بلل کيږي :

$$x = \sqrt[n]{z}.$$

ږدو

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

او

$$x = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right),$$

د $z = x^n$ له امله لاس ته راځي

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi$$

او د دې پسې

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي

په ويشنه کې بايد په پام کې ونيول شي، چې ارګومنت يا پروتمحور φ پريودي يا تل بيرته راګرځيدونی دی د پريودې يا راګرځيدنی π2 سره ، نو

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

پسي د ψ لپاره تيک n مختلف ارزښتونه لاس ته راځي، يانې

$$\psi = \frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2 \cdot 2\pi}{n}, \ \ldots \ \frac{\varphi + (n-1) \cdot 2\pi}{n}.$$

د $n = k$ ځانلۀ د مخه ارزښتونه (له دويم پسې) تکراريږي، نو باور لري:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)$$

هر له دې ارزښتونو د کمپلکس ګڼ z د n-مې رينبه بلل کيږي

$$\sqrt[n]{z} \quad \text{oder} \quad z^{\frac{1}{n}}$$

دا ټول n ارزښتونه په ګنهواره په يوې ګردی په O په يوه منظم n - ګوډي پرته ده , د ځلوری رينبی لپاره له

$$i = i \sin \frac{\pi}{2}$$

لاندې ارزښتونه ترې لاس ته راځي

$$\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4},$$

او د ځلوری رينبي لپاره له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-i = i \sin \frac{3\pi}{2}$$

پیداکیږي

$$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}.$$

که موږ ونیسو لکه د رییل ګڼونو لپاره

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^{m}$$

دې وي، چیرته چې n یو پیداینتج ګڼ او m یو په خوښه ټولګڼ دی، نو له دې سره د کمپلکس ګڼ سره جګګن یا کسپوننت وپیژندل شو یا تعریف شو٠ اوس نو اخرنی پل پاتې ، چې هغه د ایراشنلجګګڼ دی .

توان د په خوښه رییل جګګڼ سره

Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

اوس دې z له صفر مختلف په خوښه کمپلکس ګڼ وي .

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r\left[\cos\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right)\right],$$

چیرته چې

$$k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

دی ، نو د z^{ν} (reellرییل ν) لاندې هر دالاندې کمپلکس ګڼ پوهیږو:

$$r^{\nu}\left[\cos\nu\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right) + i\sin\nu\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right)\right].$$

لاربښود : د داسې په ټولیز پیژند یا تعریف سره د کمپلکس ګڼونو توان لپاره د د توان شمیرنې بنسټیز قوانین باور لري ، یانې

$$z^{\mu}\cdot z^{\nu} = z^{\mu+\nu}, \quad z_1^{\mu}\cdot z_2^{\mu} = \left(z_1\cdot z_2\right)^{\mu}, \quad \left(z^{\mu}\right)^{\nu} = z^{\mu\cdot\nu}$$

nicht mehrنور بس دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسځندنت برابرونونه یه ـ مساوات

دلته یواځي هغه ترانسځندنت مساوات څیړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي. دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په رېښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بنه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتي اوبیوني یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په رېښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی ریيل اوبیوني پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 ....(13,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په څټ یا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b......................(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دی

$$l\,og_b\, x = c..................................(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c...(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ : $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبیونه په لاندې تولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b\, f(x) = c...(13,5)$$

دلته f(x) یوه الجبري وبینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c...(13,6)$$

تولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x^2+x+6=2^3=8$ (همداسی) $\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

او لاندې اوبيونې لري

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}; x_1=-2; x_2=1$$

يو د (۱۳ . ۵) ډول (تيپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کينه لور (ارخ) ته يود لوګاريتم ريشنل لاينيز کمبينشن الجبري وبينه يا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاريتم قوانينو (۷. ۷) ، (۷. ۹)کاروني يا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}...................................(13,8)$$

بيلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه رينه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،
د کوم له څلوری يا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ يعني $x^2-x-81=0$
د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515; x_2=-8,515$$

ټيك دا $x1=9,515$ پيل برابرون پوره کوي
. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پېژند نه لري يا تعريف نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[\,(2x+3)/(x-1)] = 1$$

او نور پسې $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پيل وېينه يا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره يا هدفمنده ده، يعني که $1<(b+3)/b-2)$ وي.

د $b>2$ يعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دې لرو $-2<3$ دا د ټولو b لپاره پوره دی

د. $b \le 2$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي

اودا د هيڅ b لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \le 2$ لپاره اوبيونه نه شته دی.

د لاندې لوګاريتمي تيپ برابرون هم کيدی شي په الجبري مساواتو بيرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13\,.\,9)$$

چيرته چی F او هم f الجبريزې وېينې يا افادې دي. د بدلون کاروايي يا عمليه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x)\ldots\ldots\ldots\ldots(13{,}10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13\,.\,11)$$

ددې اوبيونه ..$y1,y2,$ په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تيپ (۱۳/۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چې و ازمائيلي شو چې ايادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبيونې يا ځوابونه بايد په پيل برابرون (۱۳/۹) کې کېښوول شي يا ځاي په ځاى شي،

بيلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستيټيوشن(بدلون) $y=\lg x$سره په څلورى برابرون $y^2-y-2=0$ بدليږي .
د $y1 = 2$ او $y2 = -1$ ځوابونو سره
.له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$x1 = 10^2=100$ او $x_2 = 10^{-1} = \dfrac{1}{10}$

دواړه ځوابونه د پيل برابرون ځوابونه دي.

بيلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6/(\lg x+1)) + (8/(\lg x-1)) = 3$
د,$x>0$ مګر ($x \neq 1/10,\ x \neq 10$) چې د اصلي ماتلاندي
$(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره ځل شي، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$,\quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$
$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلورى بڼې يا مربعفورم ته بيايي:

$$3y^2-14y-5=0\ ,\ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1=lox_1=5; y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5; x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پيل مساوات پوره کوي.
که په يوه برابرون کی لوګاريتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي،
نو کيدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بيلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

ځخه دلاندي برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1)=\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1)+\frac{1}{2}\log_2(x-1)-1=0,\ \log_2(x-1)=\frac{2}{3},\ x-1=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4},$$

$$x=1+\sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پيل برابرون اوبی يا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4}+\log_4\sqrt[3]{4}-1=\frac{1}{3}\log_2 4+\frac{1}{3}\log_4 4-1=\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}-1=0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – يا په ځګګڼ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x=b; a>0, a\neq 1, b>0 \qquad (13,14)$$

کيدی شي چی د لوګاريتم نيولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x=\log_a b=\lg_b/\lg_a=\ln b/\ln a \qquad (13,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ)
برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلگه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0, \text{ bzw. } 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x, \text{ bzw. } \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري ویینې یا افادې(f (x اکسپوننتونه
یاجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0, a|=1, b>0 \qquad (13\,.\,16)$$

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b............................(13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د (۱۳ . ۱۶) ځوابونه هم دی.

بیلگه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$
مو لاندې خلوری برابرون یا مربع مساوات ته بیایي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پیل برابرون اوبیونې یا
ځوابونه هم دي۰

بیلگه ۱۳ . ۱۰ : په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د
بل پوتنځ د بنسټ په څېر ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3\ ,\ x_2 = -4$$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چې ناپېژندونکی د اکسپونتت یا په جګ ځخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \qquad \text{یا oder } \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ (۱۳ . ۱۶) مساوات دی، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;..................................(13,18)$$

ځخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + \ldots - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - \ldots\ldots = \lg c \qquad (13.19)$$

که يو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د يوه اکسپوننشل افادې
يوه الجبري وبينه يا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبيونو $y_1, y_2, y_3; \ldots\ldots\ldots\ldots$ لپاره بايد

$$a^{f(x)} = y_i ; i=1,2,3\ldots\ldots \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 \ldots\ldots \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بيلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^{x} = 2$ کيدی شي چی د بدلون $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$
سره په څلوری

برابرون يا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بيرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبيونه نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}}-\sqrt{e^{x^2-1}-1}=\sqrt{2e^{x^2-1}-1}\text{..........................}(13,25)$$

کې داسې بدلوو:

$$y=e^{x^2-1}\text{......................................}(13,26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};\text{..............................}(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 \Rightarrow y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

تیك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;\text{..}(13,28)$$

باید اوسی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

x²-1=ln1=0,

x1 = 1 , x2 =-1

دواړه ارزښتونه پیلبرابرون پوره کوي۰

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخې ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګې په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\ln^2 x - \ln x + 1 = \log_2 8 = 3$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا ځلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2 - y - 2 = 0$

لاس ته راځي،د ځوابونو

$y_1 = -1 , y_2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x = -1 , \ln x = 2, x_1 = e^{-1} = 1/e , x_2 = e^2$

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې اوژباړې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب   په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

شپږم: د شميرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل   دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

<u>Bonn (Germany): 2003</u>

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو تولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي چاپ شوی

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي) چاپ شوی

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

رياضي براى صنف دوازده

.

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرﯨ شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکي میني د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پيل او د دويم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي ښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library