شمیرپوهنه (رياضي)

د لسم ټولګي لپاره

برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

ليکونکی:

ډاکترماخان ميري شينواری

2016

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

د لسم ټولګي لپاره

لیکونکی:

ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری

Smakhan1946@gmail.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

سریزه.................................... ۴	n- مه درجه ټولراشنل توابع ۱۶۵
پولینومشمیرنه ۶	د ټولراشنل توابعوغوښتکي ۱۷۵
د ګاوس الګوریتم.................... ۲۹	د بدلونقانونه ۱۷۸
هورنرشیما.......................... ۴۶	شننیزه – یا تحلیی هندسه ۱۸۳
اړیکې.............................. ۵۵	فنکشنونه (بل بدیل)........... ۲۰۲
فنکشن(ځیرونه) یا تابع ۶۵	دریکوډیکچ ۱۳۷
فنکشن او په ښتفنکشن ۹۱	ګډوله – یا کمپلکسګڼونه ۲۷۹
ځلوری‌یا مربع توابع ۹۳	د لیکونکیلیکلیاوژباړې..... ۳۱۵
نورمال پارابل ۹۶	د لیکوکیژنود ته لنډه کتنه...... ۳۲۰
د ځلوری‌تکمیل له............... ۱۰۱	
کربنیزبرابرونسیستم ۱۱۵	
د مناسبځواب له پاره تلنلار.... ۱۲۳	
مساواتسیستم بې له ۱۲۹	
توان یا پوتنځ توابع ۱۳۳	
کربنیزتوابع د ورکړ شوو ۱۳۸	
مومړی حالت ۱۳۸	
د کربنبرابرونونو ځانګړی ۱۴۲	

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

دا ځلوېښت کاله کیږي، چې زموږ هیواد هراړخیزه ستونزې لري او هر څه دې اوږده جنګ را خراب کړي

ګرانو هیوادوالو!

د نورو نیمګرتیاو په څیر زموږ درسي نصاب - په تیره شمیرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په څلوردیوالي ونه شو، نو زه به وهڅیږم، چې دا ما لیکلي کتابونه د ن ج له لارې له تاسو سره شریک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د ښوونځي په کتابونو کې د ستااتیستیک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دی، چې زه ترې دلته تیریږم او د ښوونځي د تیرو کتابونو څخه هم هیله ده- که زما کتابونه وړاندې نه شو- چې دابرخې یا سمې یا له درسي نصاب څخه ووېستل شي. په دې برخه باور وکړئ، چې نه لیکونکی بوهیږي او نه بل لوستونکی پرې پوهیدلی شي.

زما په دې د ښوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پیدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتیستیک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالوالي شمیرنه راوړي او د ستاتیستیک یو ګتاب مې هم ژباړلي، چې زه به یې په مناسبوخت کې د لیدلو پتې ګرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځني کتابونه او په ډېره مننه د www.ketabton.com ن ج کې ګرانولوستونکوته وړاندې شوي.

د شمیرپوهنې سم اند یا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولګي کې راغلی او هغه هم لکه ستاتیستیک او ... د پوهیدلو نه دی. دا- لکه څنګه چې برېښي- دومره پیچلی نه دی، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولګي په سرکې راوړم، هیله ده چې ستونځې به رامنځ ته نه کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځئ، چې ستونځوبې(د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دئ، خو د موصوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمښتونه هم په کې شته. سره د ټولو نیګرتیاوو دا د ښوونځي له پاراه ډېره ګټوره او زه چې پوهیږم، یواځنۍ سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه ، د ځان له امله نه وایم، دګرانو زده کوونکو او ښوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دې، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولي، چې باید سمې وي.

زه به وهڅیږم، چې درسمي ښوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینۍ باید ووایم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځې راته په ګوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې ګټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د ښوونځي لیکنې سمې کړي.

د خوندیونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راونیسم.

باور وکړئ زه د دې لیکنو سره لږ ستړی شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمګړي پاتې وي، چې ستاسو پوهیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بخښنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه ګڼئ.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړئ مغذ مې ترې نورموړ دئ، نو له دې امله یې نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولينومشميرنه

پویلینوم څه شی دی؟

یو پولینوم د اووښتوني یا واريابلي –چې موږيې د x سره په نښه کوو- له ډېرواره توان د زياتون دی: د توان جګګنونه پیداښتي يا طبيعي ګڼونه دي. زياتون له دې برسيره پای دی.

بیلګه: $a_n \cdot x^n + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

همداسې

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

یا هم:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

دلته n یو پیداښتي ګڼ اوپای دی او a_i ريلګڼونه دي د ټولو i=0,1,...n له پاره.

پيژند: د پولينمچګڼ n د پولينوم درجه بلل کيږي، که $a_n \neq 0$ وي.

په ياد ولری: په پورته سر کې- د پولينوم ليکنښه د توان په همغږيزجګيدونکي ليکنښه اودا کښته يي د پولينوم د توان په همغيزټيټيدونکي ليکنښه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو سره شمیرنه یا کارونې داسې لنډې څیړو

د پولینومونو زیاتون: که له

$$a_5 \cdot x^5 + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

سره

$$b_5 \cdot x^5 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاته-وو، نو داسې مخ ته ځو:

په دې پورته برابرون کې ګورو، چې اووښتونې یا واریابله د څلور په جګ یعني x^4 نه شته. دا په دې مانا ده،چې څله وونی یا ضریب یې صفر دی. یعنې $o\ x^4$ یا

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاتونعملیه یا کارونه مح ته بیای:

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

$$(a_{5+} b_5)x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

ګورو،چېد برابر توا یا برابر جګګې واریابلې سره زیاتیږي.

بیلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$2x^5 + o\ x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$(a_{5+} b_5)x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

د پولینومونو کمون کارونه:

کمون یې هم په همدې بیلګه داسې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$a_5\cdot x^5 + a_4\cdot x^4 + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$$

$$-(b_5\cdot x^5 + o\, x^4 + b_3\cdot x^3 + b_2\cdot x^2 + b_1\cdot x + b_0)$$

$$(a_5 - b_5)\cdot x^5 + (a_4 - o)x^4 + (a_3 - b_3)x^3 + (a - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

بيلګه:

$$3\cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4\cdot x^2 + 2\cdot x + 7$$

$$-(2x^5 + o\, x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1)$$

$$x^5 + 6x^4 \quad -7x^3 \quad -x^2 + x + 6$$

پيژند: دوه پولينومونه سره برابر دي، که خله وونې يا صريبونه يې سره برابر وي، دا په دې مانا چې

$$a_n\cdot x^n + \dots + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$$

او

$$b_n\cdot x^n + \dots + b_3\cdot x^3 + b_2\cdot x^2 + b_1\cdot x + b_0$$

سره برابر دي که $b_i = a_i$ وي،د ټولو $i=1,2,:::n$ له پاره.

د پولينومونوپه هکله مو په اتم ټولګي کې د ترمونوبرخه کې پوره زده کړه کړې. په پولينوم کې هم ټول هغه شميرلارې، چې په ګڼونو کې باور لري باوري دي.

دا لاندې بيلګې دې هم داروښانه کړي:

د پولينومونوله پاره نورې بيلګې:

- $3x^2 + 2x + 5$
- $7x^3 + x^2 + 6x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

o $10x^5 + 3x^4 + 2x$

د پولینوم ډولونه:

په شمیرپوهنه کې د پولینوم مختلف ډولونه شته.په شمیرپوهنه کې د بینوم لاندې یو پولینوم پوهیږو، چې له دوه غړو جوړ وي یا په بل ډول ویلی شوي، چې یو بینوم د دوه مونومونو زیاتون یا کمون دی.دا لاندې بیلګې دا هم ښایي، چې بینوم څنګه برېښي!

- $a + b$
- $x^3 + y^3$
- $x - 3$

پولینوم، چې له درې زیاتونونو جوړ دی‌ترینوم بلل کیږي. لاندې بیلګه دا روښانه کوي.

- $a^2 + b^2 + c^2$
- $6a^2 + 7a^3 + 8a^4$

زیاتون ته بیلګه

$$(-x^5-2x^4-3x^2-x+2) + (x^2+2) = -x^5-2x^4-2x^2-x+4$$

پولینومکمون ته بیلګه: په لاندې بیلګه کې ګورو، چې د برابر توانونو x یو له بل څخه کمیږي.

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x) – (3x^3 + 2x^2 + 6x) = x^4$$

ځل (ضرب):

دا لاندې درې بیلګې د ځل یا ضرب له پاره ورکړ شوي.

موږ‌او تاسې د دې لارې سره د بینوم فرمول او د ترمونو د ځله ونو له لارې بلد یو، چې دلته ستاسوپام ورته رااړول کیږي

$$(x-4)\cdot(x^2-2x+3) = x^3-6x^2+11x-12$$

$$(x-5)(x^2+3x+7) = x^3-2x^2-8x-35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(x-3)(4x+7) = 4x^2 - 5x - 21$$

$$(x+1)(x^2+x-6) = x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6 = \underline{\underline{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}}$$

پولینوموېش:

دا لاندې بېلګه د وېش له پاره راوړو، خو دا چې وېش لږ پیچلی دی، په دې به پوره وغږېږو.

$$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x) : (x + 3) = x^3 - x^2 + 5x - 9 + (27)/(x+3)$$

$-(x^4+3x^3)$
$-(-x^3-3x^2)$
$-(5x^2+15x)$
$-(-9x-27)$
پاتې Rest: 27

کربنیزځله ووني سره ځل کیږي یا ضربیږي

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x-1,5)$$

د ځله ووني ۲ سره غزول کیږي.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 3x + 2)(x - 1,5) \\ &= x^3 - 1,5x^2 + 3x^2 - 4,5x + 2x - 3 \\ &= x^3 + 1,5x^2 - 2,5x - 3 \quad / \cdot 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولينوم وېش:

که د يوه پولينوم صفرځای معلوم وي، نو کړی شو د پولينوم وېش له لارې د پولينوم درجه په يوه کمه کړو. که دا مو مربع مساوات ته لارښود کړي يا بوځيو نو ساده دی، چې نور صفرځايونه بيدا کړو. لاندې بېلګې دې د پولينوم وېش روښانه کړي.

د بيلګې په توګه د دريمې درجې ټولراشنل تابع صفرځايونه معلوم دي، نو کيدی شي چې د تابع مساوات د کرښيزو صريبونوپه څېر وليکلی شو:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

چيرته چې $x_1; x_2; x_3$ صفرځايونه دي.

موږ اوس په څرګنده توکه تابع يا څېرونه د څېړنې لاندې نيسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چيرته چې $x1=2$ يو صفرځای دی، ځکه چې

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

له دې سره له دې سره کېدی شي د تابع مساوات د $x1=2$ صفرځآی لاندې (له امله) په پام کې ونيسو او لکه چې لاس ته راځي و ليکو $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = (.........)(x - 2)$

د صفرځای ټاکلو لپاره اينوونه : $f(x)= 0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=0$
دا افاده $x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=0$ څېړو

د نوکانو افادې يا وييني $(\ldots)$ټاکو

دواړه لورې په $(x-2)$وېشو

$$(x^3-x^2-5x+6) :(x-2)=(\ldots)$$

په دې توګه د نوکانو افاده $(\ldots)$لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

وېش د لیکنیز وېش قانون سره سم مخ ته بیایو

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x-2) = x^2 + x - 3 \\
\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\
\quad x^2 - 5x \\
\quad \underline{-\left(x^2 - 2x\right)} \\
\qquad -3x + 6 \\
\qquad \underline{-(-3x + 6)}
\end{array}
$$

د نوکانو افاده (...) اوسx^2+x-3 بنه لري

له دې لاس ته راځي د صفرځای ټاکنو لپاره اینوونه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=(x^2+x-3)(x-2)=0$$

نو دا مربع مساوات x^2+x-3 اوس حل کوو.

دا د p-q- فرمول سره ځوابوو:

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

صفرځایونه:

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x محور سره غوځتکي:

$$P_{x1}(2|0);\ P_{x2}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right);\ P_{x3}\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right)$$

تابع مساوات:

$$f(x)=(x-2)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\Leftrightarrow f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

د پولینوموېش او لیکنیز پولینوموېش په منځ کې اړیکې شته. په لاندې مخامخوالي کې دا د وېش بې له پاتې په حالت کې را ښايي.

$62228 : 47 = 1324$		$(x^3-6x^2+11x-12):(x-4)=x^2-2x+3$	
-47	← $47\cdot 1$	$-(x^3-4x^2)$	← $(x-4)\cdot x^2$
152		$-2x^2+11x$	
-141	← $47\cdot 3$	$-(-2x^2+8x)$	← $(x-4)\cdot(-2x)$
112		$3x-12$	
-94	← $47\cdot 2$	$-(3x-12)$	← $(x-4)\cdot 3$
188		0	
-188	← $47\cdot 4$		
0			

ګڼ ۶۲ د لومړيو دوه ځايونو څخه چوړ دی د دې وېشونو ګنونو څخه د پروېشوني (۴۷)

سره وېشل کيږي. لاس ته راوړنه (۱) د (۴۷) سره څل يا ضرب کيږي او د ګڼ (۶۲) څخه کميږي. د کمښت نتيجې کمښت (۱۵۲) سره په همدې ډول پرمخ ځو تر څو د کمښت لاس ته راوړنه صفر شي.

ازمايښت : $47\cdot 1324=62228$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right):(-2x+3)=3x^2+2x-4$$

$$\underline{-\left(-6x^3+9x^2\right)}$$

$$-4x^2+14x$$

$$\underline{-(-4x^2+6x)}$$

$$8x-12$$

$$-\underline{(8x-12)}$$

$$0$$

Probe:

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right)=\left(3x^2+2x-4\right)(-2x+3)$$

بیلګه:

$$\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-2)=x^2+5x+4$$

$$\underline{-\left(x^3-2x^2\right)}$$

$$5x^2-6x$$

$$\underline{-\left(5x^2-10x\right)}$$

$$4x-8$$

$$\underline{-(4x-8)}$$

$$0$$

Probe: $\left(x^2+5x+4\right)(x-2)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right) : (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$
$$\underline{-\left(a^3 + a^2b\right)}$$
$$2a^2b + 3ab^2$$
$$\underline{-\left(2a^2b + 2ab^2\right)}$$
$$ab^2 + b^3$$
$$\underline{-\left(ab^2 + b^3\right)}$$
$$0$$

ازماېښت:

$$: \left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right) = \underbrace{\left(a^2 + 2ab + b^2\right)}_{\text{1. binomische Formel}}(a+b) = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

بیلګه:

$$\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right) : (x-2) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$$
$$\underline{-\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2\right)}$$
$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$$
$$\underline{-\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right)}$$
$$-x + 2$$
$$\underline{-(-x+2)}$$
$$0$$

ازماېښت: $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1\right)(x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 \qquad -14x-12):(x-3)=2x^2+6x+4 \\
\underline{-(2x^3-6x^2)} \\
\qquad 6x^2-14x \\
\qquad \underline{-(6x^2-18x)} \\
\qquad\qquad 4x-12 \\
\qquad\qquad \underline{-(4x-12)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

بیلګه:

په ځنو حالتونوکي دا ښه ده، چي د پولینوم لیکنوکي د اړتیا په وخت کبیوه تشیا پرېږدو، کلکه په پورته بیلګه کي چېکورو.

یوه بله شونتیا یي داده، چي هغه تشیا د صفر سره ډکه کړو، لکه دا لاندي:

$$2x^3-14x-12=2x^3+0x^2-14x-12$$

بیلګه:

لاندي بیلګه یو وېش د پاتي سره مخ ته بیایي.لکه څنګه چي د لیکنیز وېش څخه راته څرګند دی.

$$
\begin{array}{l}
(x^3+3x^2-6x-8):(x-1)=x^2+4x-2 \ (\text{Rest } -10) \\
\underline{-(x^3-x^2)} \qquad \Rightarrow (x^3+3x^2-6x-8):(x-1)=x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)} \\
\qquad 4x^2-6x \\
\quad \underline{-(4x^2-4x)} \\
\qquad\quad -2x-8 \\
\qquad \underline{-(-2x+2)} \\
\qquad\qquad -10 \quad \text{Rest}
\end{array}
$$

$$\text{Probe: } \left(x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)}\right)(x-1)=(x^3+3x^2-6x-8)$$

دا چي نوي بلدي یون کي د ناسمون سره مخامخ کیږي،غوره ده چي د دې ازمابېنت هم وکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوموېش په کارونه کې که د پولینوموېش یوصفرځای ځرګند وي، نو کیدی شي د پولینوم درجه په یوه وړه یا رکمه شي.

$x_1 = 2$ د پولینوم یو صفرځای دی.

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = \underbrace{x^2 + x - 3}_{\text{Restpolynom}}$$

$$\begin{array}{l} -\left(x^3 - 2x^2\right) \\ \hline \quad x^2 - 5x \\ \quad -\left(x^2 - 2x\right) \\ \hline \qquad -3x + 6 \\ \qquad -(-3x + 6) \\ \hline \end{array}$$

د پاتې پولینوم صفرځایونه اوس کیدیشي د څلورۍ یا مربع پولینوم

$$x^2 + x - 3 = 0$$

له لارې پیدا کړو.

د سمون ازماېښت یې وکړی.

بیلګه: پولینوموېش او ازماېښت یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)=x^2+x-6$$
$$\underline{-\left(x^3+x^2\right)}$$
$$x^2-5x$$
$$\underline{-\left(x^2+x\right)}$$
$$-6x-6$$
$$\underline{-(-6x-6)}$$

Prob e: $(x+1)\left(x^2+x-6\right)=x^3+x^2-6x+x^2+x-6=\underline{\underline{x^3+2x^2-5x-6}}$

پوښتنې:

لاندې پولینوموېش مخ ته بوځئ

الف- $\left(x^3-3x^2-6x+8\right):(x+1)$ ب – $\left(2x^3-x^2-8x+4\right):\left(x^2-4\right)$

پ - $\left(2x^3-3x+1\right):(2x-1)$ ت - $\left(6a^6+a^4b+25b^3\right):\left(3a^2+5b\right)$

ټ - $\left(8x^5-6x^7+2x\right):2x^2$

ث - $\left(9a^5b^3-12a^3b^5\right):3a^3b^3$

ج - $\left(15a^9-8a^6b+8b^3\right):\left(3a^3+2b\right)$ ،

چ – $\left(14a^4-a^3+5a^2-3a+1\right):\left(7a^2-4a+1\right)$

ح – $\dfrac{3x^5y^{n+2}+3x^2y^{3n+2}-2x^{m+3}y^{n+3}-2x^my^{3n+3}}{x^3+y^{2n}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځ - $\dfrac{48a^{n+x}+56a^{x}b^{x}-72a^{n}b^{c}-84b^{x+c}}{12a^{n}+14b^{x}}$

څ - $\dfrac{8a^{2n+1}-10a^{2n}b+15a^{3n-2}b-12a^{3n-1}}{2a^{2n}-3a^{3n-2}}$

خ - $\dfrac{2a^{5}b^{x+2}-2a^{3}b^{x+5}+3a^{4}b^{2x-1}-3a^{2}b^{2x+2}}{a^{2}-b^{3}}$

پولينوم برابرون:

د يوه برابرون په کينې اوښي لور د x مختلف توانونه يو پولينوم برابرون ورکوي

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8$$

د داسېبرابرون د اوبی له پاره لومړيدا برابرون په داسي نامه صفربڼه اړوي. دا په دې مانا چي برابرون تر هغې په ورتهبڼه بدلوناړولکيږي، چې په ښيلور يواځې صفر پاتې شي.

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8\,|-3x^2$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x=-8\,|+8$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x+8=0$$

د صفربڼې يا- فورم په ځای د پولينوم دې بڼې ته هم نورمال بڼه وايي.
موږ د پولينوم پنځه بديلونهراړوړو

لومړی بديل:

په برابرون کې د اووښتونې x يو يواځنی توان مخ ته راځي.

$$ax^n+b=0 \Rightarrow x=\sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n ناجوړه وي،نوريښه وېښتوني کيدی شي کميز ګڼ هم وي.
د رېښي ټيک يو حل شتون لري.
که n جوړه وي، نوريښه نيونی(هغه ګڼ چېريښه يېښيول کيږي) يواځې زياتيز ګڼ کيدی شي.
دوه اوبيوني شتون لري.
بيلګه:

$$
\begin{aligned}
& 8x^3 + 27 = 0 \,|\, -27 \\
\Leftrightarrow\ & 8x^3 = -27 \,|\, :8 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 = -\frac{27}{8} \,|\, \sqrt[3]{\ } \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 2x^4 - 3 = 0 \,|\, +3 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^4 = 3 \,|\, :2 \\
\Leftrightarrow\ & x^4 = \frac{3}{2} \,|\, \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107 \Rightarrow L = \left\{\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107\right\}
\end{aligned}
$$

په لومړي حالت کې n ناجوړه دې. ريښه نيوني کميزه هم کيدی شي اويواځې يواوبی شتون لري.
په دويم حالت کې n جوړه دی، ريښه نيونی زياتيزدی.که کميزوي بيا برابرون اوبی نه لري.

دويم بديل:

پولينومبرابرون يوڅلورىبرابرون (مربع مساوات) انځوروي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

دا د -p-q- – فرمول له لارې اوبی –یا حلکیري

بيلګه

$$x^2 - 13x + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$= \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ x_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow L = \{4;9\}$$

D د دېسکريمينانت له پاره ليکلکېري چې هغې لرلو سره مخ دمخه سړی د اوبيونويا حلومو څومره وال يا ګڼون ټاکلی شي.

که صفر $< D$ وي ، نو څلورئ برابرون دوه اوبي یا حلونه لري

که صفر $= D$ وي،نو برابرون يواځې يو ډبل اوبيلري

که صفر $> D$ وي، نو برابرون اوبی نه لري په دې حالت کې نو سړی نور مخ ته نه ځي.

دريم بديل

ولينومبرابرونيو دوه-څلورئ برابرون biquadratische انځوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

د په ځا اېښووني یا سبستیچیوشن z د -p-q- فرمول په مرسته یا له لارې شمیرل کیدی شي
پسي دې بیرته په ځایونه په ځسبستیچیوشن وکارول شي او ریښه دې ونیل شي.
ریښه تیک د زیاتیز - p-q-z -ارزښتونو له پاره نیول کیدی شي.

بیلګه:

$$\frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0$$

$$\text{Substitution: } z = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0 \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18;\ q = 81$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

$$z = -\frac{p}{2} = 9$$

$$\text{Rücksubstitution}$$

$$z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-3; 3\}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې د يسکريمينانت صفر دئ، داسې چې د سبستيچيوشناووښتونې له پاره يو اوبي .(z = 9) شتون لري.
دا په دېمانا، چې د ۴ –مې درجې پولينوم تيک دوه اوبي يا ځوابونه لري.

ځلورمبديل:
په پولينومبرابرون کې هغه همغه ارژښته يا مطلقه غړی نه لرو.

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow x\left(ax^2 + bx + c\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{2/3}$$

اووښتونې يا مجهوله x کيدی شي له نوکانو راووېستلشي.
اوبيونې د صفرځل يا – صرب له جملې شميرلکيدی شي (د فاکتورکولو تلنلار)،

بيلګه

$$\begin{aligned}
& x^3 + x^2 - 2x = 0 \\
& \Leftrightarrow x\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}} \\
& \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\
& \Rightarrow p = 1;\ q = -2 \\
& \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} \\
& \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \\
& \Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\left|\; \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{array}\right. \\
& \Rightarrow \underline{\underline{L = \{-2;\ 0;\ 1\}}}
\end{aligned}$$

د صفر ځلوونې يا صريب دويم ځلوونی کيدی شي د p-q - فرمولسره سادهوشميرلشي.
د صفرځلوونې جمله: يوخل يا صرب تيک هلته صفردئ، چې يو ځلوونی صفر ږي.

پنځم بديل:
پولينومبرابرون له بديلونو ۱ – ۴ په ځير نه دئ.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

په ډېرو حالتونوکبکيدی شي، د پوينوموېشله لارې اوبی وميندلشي.
د دې له پاره بايد يواوبی معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د پولینوم یو اوبی معلوم وي،نو کیدی شید پولینوم درجه د وېش له لارېیه یوه کمه شي. که دا یو څلوری برابرون راکړي،نو اوبیونه ییېیا ساده ه، چې نور اوبي پیدا کړو.
لاندې بیلګه چې اوبی $x = 2$ معلوم دی،د پولینوم تلنلار روښانه یا معلوموي.
پولینوموېش همغه په راته څرګنده لیکنیزډول لاس ته راوړو.
Division.
وېشنه

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = x^2 + x - 3$$
$$-\left(x^3 - 2x^2\right)$$
$$x^2 - 5x$$
$$-\left(x^2 - 2x\right)$$
$$-3x + 6$$
$$-(-3x + 6)$$

د نوکانو(....) ویینه یا افاده اوس دا بڼه $x^2 + x - 3$ لري.
له دې د نورو شمیرنوځای په ځای کول لاسته راځي
$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x - 3\right)(x - 2) = 0$$
اوس دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $\left(x^2 + x - 3\right)$ د اوبیونې دي،چې د
-p-q فرمول له لارې سرته رسیږي.

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$
$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array}\right.$$
$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$
$$\Rightarrow L = \left\{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ 2;\ -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چيرې د ګومان يا ازماېښت له لورې اوبې نه شي پيداکيدی، نوبيا د نومريک تلنلار ځخه کار اخستلکيږي(دا به اوس زموږ دنده نه وي).

برابرونونو ته تمرينونه:

۱ - برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

الف - $\frac{1}{5}x^3 - 25 = 0$ ب - $\frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0$ پ - $8x\left(x^2 - 1\right) = -8x + 1$

۲ – برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

الف - $27x^3 - 8 = 0$ ب – $\frac{1}{16}x^3 - 4 = 0$ پ- $-2 + \frac{7}{8}x^3 = -\frac{5}{2}x^3 - 1$

۳ - برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

الف- $4k^2x^3 - 2k = 0; k > 0$ ب – $\frac{1}{4b}\left(x^3 - b^3\right) = 0; b > 0$ پ - $(x + 2a)^3 = \frac{1}{8}$

۴ - برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

$$\frac{k \cdot x^3}{4} - 2k = 0$$

۵ - ځانګړې باکترياګاني د ۴ ساعتونو په منځ کې خپل ګڼو(تعداد) څلور برابره کوي.په يوه ساعت کې يې په سلوکې ډېروالی څومره دی؟

۶ – د کال په پيل کې د موټروختارزښت نوی ټاکييا کره کيږي. د يوه پنځه کلن زوړ کارشوې يوم،ترپلورونکی € 8500 ورکوي.

د موټر کلنی زيان به څومره (د وختارزښت د په سلو کې) وي، که سړی له دې، که سړس داسېمخ ته لاړ شي چې دا په لومړيوپنځه کلونوکې برابر جګ وي؟

۷ – برابرونونه اوبی –يا حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف - $\frac{1}{4}x^3 - 4x = 0$ ب- $3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0$ پ - $x^3 + x^2 - 2x = 0$

۸ – برابرونونه اوبیکړئ

الف- $4x\left(x^2 - x\right) = 7x^3 - 7x^2 - 6x$ ب- $\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 = 0$

پ --- $\frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0$

دا لاندې برابرونونه اوبي کړئ

الف- $x^3 + 4x^2 - 20x - 48 = 0$ ب - $-\frac{1}{2}x^3 + 4x = \frac{1}{2}x^2 - 4$

پ - $-2x^3 + 6x^2 - 4x = \frac{1}{2}x - 1$ ت- $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2}$

ټ - $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3 + 4x^2 - 2x\right) = \frac{3}{2}$

لاندې برابرونونه حل کړئ چې یو اوبی یا حل یېمعلوم وي

الف - $x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0;\ x_1 = -1$

د پولینوم وېش څخه کارواخلی.

-- د پولینوموېش څخه کار واخلئ

الف- $\left(4x^3 - 6x + \frac{5}{2}\right):(2x - 1)$ ب - $\left(x^3 - 2kx^2 - 2x + 4k\right):\left(x^2 - 2\right)$

۱۲ – برابرون $x^3 - 4x^2 + (k + 4)x - 2k = 0$ ورکړشوی. وښایئ، چې د $x_1 = 2$ لپاره برابرون یواوبی دی. د k د کوم ارزښت لهپاره ټیک یو ډبل اوبی شته؟

لاس ته راوړنه د کرښیزو څلوونو یا صربیونوپه څیر ولیکی.

پوښتنه:

a داسې وټاکئ، چې برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$(ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0$

ټيک دوه اوبيونې يا حلونه ولري

يو د دريمي درجې برابرون دا دوه { 2 ; -4 } = L اوبيونې لري.

الف - د اوبيونو يا حلونوپه هکله ويناوې وکړی.

ب – دوه برابرونونه ددې اوبيونې ورکړی.

۳ – برابرونونه اوبيکړی

الف- $2x^3 - x^2 - x = 0$ ب - $x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$

۴ – برابرونونه اوبيکړی

الف- $-3x^3 + 5x^2 + 4 = 0$ ب- $x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{6}{5} = 0$

۵- برابرونونه اوبيا حلکړی

الف - $x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

ب- $x^3 - 2,63x^2 - 1,45x + 3,08 = 0$

برابرونونه اوبی کړی

الف – $-u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2} = 0$ ب - $a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$

۷ – برابرونونه حل کړی

الف - $x^3 - \left(3 + \sqrt{3}\right)x^2 + 3\sqrt{3}x = 0$

ب- $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$ پ- $\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0$

ت - $\frac{4}{10}x^3 - \frac{6}{10} = 0$ ټ - $x^3 - 5x^2 + 6,25x = 0$

ث - $\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ج - $x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$

چ - $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ خ - $x^3 - 3x^2 = -4$

ځ - $(3x - 5)\frac{(x - 2)^2}{5} = 0$

پوښتنې

۱ - برابرونونه د پسې حل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف – $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2=0$ ب $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0$

پ - $-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}=0$ ت - $\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{5}x^2-5x+15=0$

ټ- $2x^3-x^2-5x-2=0$ ث - $(3x-1)(x+k)^2=0$

۱ ـ د x پسې یې اوبی کړی $(k\neq 0)$

الف - $\frac{1}{9k}\left(x^4+x^3-12x^2\right)=0$ ب - $\frac{k}{2}x^4-kx^3-\frac{3k}{2}x^2=0$

پ - $\frac{x^2}{5k^2}\left(x^2-3k\right)=0;\ k>0$ ت - $x^4-26x^2+25=0$

ټ – $-\frac{1}{2}x^4+3x^2-4=0$ ث - $\frac{1}{2}x^4-4x^2+2=0$

ج – $-\frac{1}{16}x^4+x^2-3=0$ چ - $\frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^2-3=0$

څ - $\frac{1}{3}x^4-2x^2+3=0$ ځ - $x^4-11x^2+18=0$

پوښتنې

حلونه یا اوبیونې وټاکئ

الف – $\frac{1}{3}x^4-3x^3=0$ ب - $\frac{1}{7}x^4-7=0$ پ - $\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2+1=0$

ت- $-2x^4+x^2+x=0$ ټ - $\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{4}x^3-x=0$ ث - $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^2-3=0$

ج - $\frac{2}{5}\left(x^2-9\right)\left(x+2\right)^2=0$ چ - $\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x^2+x=0$ څ - $x^4-5x^2-2x=0$

ځ - $x^4-6x^2+8=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس الګوریتم **Der Gauß- Algorithmus**

فکر دې وشي، چې دا برخه په یولسم ټولګي کې راشي. دلته يې راوړنه هم بده نه ده.

یادونه: خوارزمیة د Algorithmus
عربي مانا ده : زما په اند دا الخوارزمیّة
دی، چې په لاتین کې ترې الګوریتموس
جوړ شوی دی.
الخواريزم د الګوریتم نومورکونکی، یوه
شوروي پوست مارکي چې د الخواریزم د
۱۲۰۰ کلیزې جشن په هکله راوېستلې وه.

الګوریتم د پرابلم یا د پرابلمونود ټولګي پا
یوه یواځنۍ د اوبیونې تلنلار ړه.

الګوریتم یوه نړیواله تلنلار ده د په خوښه
کړښيز برابرونونو سیستم اوبیونې ته

ننوتنبيلګې:

د کرښي ډول په توګه کار کوو. د لیکو له پاره اجازه شته : - بدلیدلی شي - د یوه ګڼ سره ځلیدلی شي. - په یوه ګڼ سره وېشلکیدی شي.	درې برابرونونه د درې اووښتونویا واریابلو یا متحولو سره له بنه بدلون څخه لرو	$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12$ $-x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$ $-4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$ شمیرنخیره یا شیما داسې لیکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

- سره زياتيدی شي

- سره کم کړي

درځونه هم سره بدليدلی شي، که اووبنتوني يا واريابلي x ورسره واخستل شي.

د اوبيوني يا حل لاس ته راوړنه د بيرته په ښت اينسووني له راې هم کيدی شي.

$$-14x_3 = -14$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$$
$$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$$
$$\Leftrightarrow -11x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$$
$$7x_1 + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12$$
$$\Leftrightarrow 7x_1 = -7$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$$

$$L = \{-1; 0; 1\}$$

ازمايښت: په لاندي کي د رښتيا له پاره ځاي په ځای دي.

$$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$$
$$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$$
$$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$$

x_1	x_2	x_3	
7	3	-5	-12
-1	-2	4	5
-4	1	-3	1

x_1	x_2	x_3	
*	*	*	*
0	*	*	*
0	0	*	*

شميرنه داسې مخ ته بيايو: شننه يې بشي لور ته ده.

x_1	x_2	x_3		
7	3	-5	-12	|·4
-1	-2	4	5	|·28
-4	1	-3	1	|·7
28	12	-20	-48	
-28	-56	112	140	II + I
-28	7	-21	7	III + I
28	12	-20	-48	|: 4
0	-44	92	92	|: 4
0	19	-41	-41	
7	3	-5	-12	
0	-11	23	23	|·19
0	19	-41	-41	|·11
7	3	-5	-12	
0	-209	437	437	|: 19
0	209	-451	-451	III + II
7	3	-5	-12	
0	-11	23	23	
0	0	-14	-14	

د بيخي نويو له پاره يادوني:

د اوبيوني له پاره تلندول کيدی شي په کوچنيو پلونو توته شي.

۱ـ د اصلي ماتلاندې سره د ليکي له لارې ځل (ضرب) سره د د ماتونو مخه ونيسی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- په لومړۍ کربښه لومړی ګڼ باید زیاتیز وي(که نه، بیا کیدی شي د ـ۱ سره ځل شي)

۳- د ځل یا وېش له لارې وهڅیږي چې په لومړي درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

په ۲ ـمه او ۳ ـمه لیکه کې دې لومړي ګڼونه کمیزوي.

۴- ۲ ـمې او ۳ ـمې لیکې هرې یوې ته دې لومړۍ لیکه ورزیاته شي. له دې سره په لومړي درځ کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۵- په۲ ـمه لیکه کې دې دویم ګڼ زیاتیز وي(که نه، نو د ـ۱ سره دې ځل شي)

۶ ـد ځل یاوېش له لارې په دې نیت کې شي، چې له ۲-مې لیکې په دویم درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

۷ - و ۲ ـمېلیکې یا کربښې ته ۳ ـمه لیکه ورزیاته کړی. له دې سره په ۳-مه لیکه کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۸ - لاس ته راوړی د اوبی یا حل په څټ لور کیږدی.

برابر پرمختګږول کیدی شي د هغو سیستمونو له پاره هم وکارول شي، چې له دریو زیات برابرونونه شتون ولري:

بڼه بدلونونه کړی شي سړی بل ډول هم مخ ته بوځي.دا چې ،، څنګه،، دا یواځې د شمیرپوهانو مهارت ته پرېږدو. د زیاتو تمرینونوله لارې سړی یوه غوره لار پیدا کوي. د شونتیا پورې دې د ماتونومخه دې ونیولشي، چې د نا اړینې تیرونې مخه نیول شوي وي. که سړی ورته تازه وي، کیدی شي ډېر بڼه بدلونونه په یوه وخت جوړ کړي، له دېلارې لیکنه کیږي، خود ناسمون شونتیا زیاتیږي؟

د په څټ اینوولو له لارې د اوبي یا حل لاس ته راوړنه	لانې الماني:سره بدل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

tausche: ⇄

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	
−1	−2	4	5	$\mid \cdot(-1)$ I ⇄ II
−4	1	−3	1	
1	2	−4	−5	
7	3	−5	−12	II - 7·I
−4	1	−3	1	III + 4·I
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	$\mid \cdot 9$
0	9	-19	-19	$\mid \cdot 11$
1	2	−4	−5	
0	−99	207	207	$\mid : 9$
0	99	−209	−209	III + II
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	
0	0	-2	-2	

$-2x_3 = -2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$

$-11x_2 + 23 \cdot 1 = 23$

$\Leftrightarrow -11y = 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$

$x_1 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -5$

$\Leftrightarrow x_1 = -7$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$

$L = \{-1; 0; 1\}$

ازماېښت:

$7 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = -12 \quad (w)$

$-1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 5 \quad (w)$

$-4 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 1 \quad (w)$

بیلګه ۱ :(ساده یا اسانه)

د په ځټ اینوولو له لارې د اوبیبا حل لاس ته راوړنه

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8$$
$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4$$
$$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1$$

x_1	x_2	x_3		
2	−3	4	8	$\mid \cdot 6$
3	4	−5	−4	$\mid \cdot 4$
4	−6	3	1	$\mid \cdot 3$
12	−18	24	48	$\mid : 6$
12	16	−20	−16	II - I
12	−18	9	3	III - I
2	-3	4	8	
0	34	-44	-64	
0	0	-15	-45	

$-15x_3 = -45$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 3}}$

$34x_2 - 44 \cdot 3 = -64$

$\Leftrightarrow 34x_2 = 68$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 2}}$

$2x_1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8$

$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 1}}$

$L = \{1; 2; 3\}$

Probe:

$2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8 \quad (w)$

$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -4 \quad (w)$

$4 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1 \quad (w)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ (منځنۍ سخته)

د په څټ اینوولو له لارې د اوبې یا حل لاس ته راوړنه

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$$
$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$$
$$8x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 13$$

x_1	x_2	x_3		
3	2	−4	−2	|·8
4	−5	3	9	|·6
8	7	−9	13	|·3
24	16	−32	−16	|: 8
24	−30	18	54	II - I
24	21	−27	39	III - I
3	2	-4	-2	
0	-46	50	70	|:2 II ⇄ III
0	5	5	55	|:5
3	2	-4	-2	
0	1	1	11	|·23
0	-23	25	35	
3	2	−4	−2	
0	23	23	253	|: 23
0	−23	25	35	III + II
3	2	−4	−2	
0	1	1	11	
0	0	48	288	

$$48x_3 = 288$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 6}}$$
$$x_2 + 1\cdot 6 = 11$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 5}}$$
$$3x_1 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2$$
$$\Leftrightarrow 3x_1 = 12$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 4}}$$

$$L = \{4\,;\,5\,;\,6\}$$

ازمايښت:

$$3\cdot 4 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2 \quad (w)$$
$$4\cdot 4 - 5\cdot 5 + 3\cdot 6 = 9 \quad (w)$$
$$8\cdot 4 + 7\cdot 5 - 9\cdot 6 = 13 \quad (w)$$

بیلګه ۳ : (سخته): لاندې درې برابرونونه غواړو اوبی کړو

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{8}x_3 = 4$$
$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 23$$
$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_1	x_2	x_3		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	4	$\mid\cdot 40$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	23	$\mid\cdot 40$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	$\mid\cdot 20$
20	−32	15	160	$\mid\cdot 12$
30	15	8	920	$\mid\cdot 8$
16	−10	5	160	$\mid\cdot 15$
240	−384	180	1920	|: 12
240	120	64	7360	II - I
240	−150	75	2400	III - I
20	−32	15	160	
0	504	−116	5440	|: 4
0	234	−105	480	|: 3
20	−32	15	160	
0	126	−29	1360	$\mid\cdot 13$
0	78	−35	160	$\mid\cdot 21$
20	−32	15	160	
0	1638	−377	17680	|: 13
0	1638	−735	3360	III - II
20	-32	15	160	
0	126	-29	1360	
0	0	-358	-14320	

د په څټ ايښوولو له لارې حل لاس ته راوړنه

$$-358x_3 = -14320$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 40}}$$
$$126x_2 - 29\cdot 40 = 1360$$
$$\Leftrightarrow 126x_2 = 2520$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 20}}$$
$$20x_1 - 32\cdot 20 + 15\cdot 40 = 160$$
$$\Leftrightarrow 20x_1 = 200$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 10}}$$
$$L = \{10\,;\,20\,;\,40\}$$

ازمايښت:

$$\frac{1}{2}\cdot 10 - \frac{4}{5}\cdot 20 + \frac{3}{8}\cdot 40 = 4$$
$$\Leftrightarrow 5 - 16 + 15 = 4\,(w)$$
$$\frac{3}{4}\cdot 10 + \frac{3}{8}\cdot 20 + \frac{1}{5}\cdot 40 = 23$$
$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 8 = 23\,(w)$$
$$\frac{4}{5}\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 20 + \frac{1}{4}\cdot 40 = 8$$
$$\Leftrightarrow 8 - 10 + 10 = 8\,(w)$$

د کاروني يا استعمال بيلګې
د ټولراشنل فنکشن د فنکشن برابرون د شميرلو له لارې، چې څلور ټکي يې معلوم دي،
د ګاوس الګوريتم کارونه يا استعمال

د کاروني بيلګه۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|4) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_2(2|2) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 2$$
$$P_3(4|4) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(5|20) \Rightarrow \quad f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 20$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	4	
1	2	4	8	2	II − I
1	4	16	64	4	III − I
1	5	25	125	20	IV − I
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	3	15	63	0	III − 3·II
0	4	24	124	16	IV − 4·II
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	12	96	24	IV − 2·III
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	0	12	12	

$\Rightarrow$

$$12a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$6a_2 + 42a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 + 42 = 6 \mid -42$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 = -36 \mid :6 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -6}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 11 = -2 \mid +11 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 9 - 6 + 1 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 4 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}}$$

د کارونبیلګه ۲

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \mid -\frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{11}{2}$$
$$P_2\left(-1 \mid \frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{9}{2}$$
$$P_3(-2 \mid 8) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 8$$
$$P_4\left(-3 \mid \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = \frac{5}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{11}{2}$	$\mid\cdot 2$
1	−1	1	−1	$\frac{9}{2}$	$\mid\cdot 2$
1	−2	4	−8	8	$\mid\cdot 2$
1	−3	9	−27	$\frac{5}{2}$	$\mid\cdot 2$
2	2	2	2	−11	
2	−2	2	−2	9	II − I
2	−4	8	−16	16	III − I
2	−6	18	−54	5	IV − I
2	2	2	2	−11	
0	−4	0	−4	20	$\mid:(-2)$
0	−6	6	−18	27	$\mid:3$
0	−8	16	−56	16	$\mid:4$
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	−2	2	−6	9	III + II
0	−2	4	−14	4	IV + II
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	4	−12	−6	IV − 2·III
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	0	−4	−4	

$\Rightarrow$

$$-4a_3 = -4 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 4a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 - 4 = -1 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = 3 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 2a_3 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 2 = -10 \mid -2$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = -12 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -11$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 + 3 + 2 = -11$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 7 = -11 \mid +7$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = -4 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2}}$$

د کاروني بیلګه ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|-16) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -16$$
$$P_2(2|11) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 11$$
$$P_3(4|-11) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = -11$$
$$P_4(6|-9) \Rightarrow \quad f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	−16	
1	2	4	8	11	II − I
1	4	16	64	−11	III − I
1	6	36	216	−9	IV − I
1	−1	1	−1	−16	
0	3	3	9	27	|: 3
0	5	15	65	5	|: 5
0	7	35	217	7	|: 7
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	1	3	13	1	III − II
0	1	5	31	1	IV − II
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	4	28	−8	IV − 2·III
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	0	8	8	

$\Rightarrow$

$$8a_3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 10a_3 = -8$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 10 = -8 \,|\, -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -18 \,|: 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -9}$$

$$a_1 + a_2 + 3a_3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 9 + 3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 6 = 9 \,|\, +6 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 15}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 15 - 9 - 1 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 25 = -16 \,|\, +25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 9}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9}}$$

د کاروني بيلګه۴ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(-1|7) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7$

$P_2(-2|6) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6$

$P_3(3|1) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1$

$P_4(-3|-2) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -2$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4·II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2·II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

$\Rightarrow$

$20a_2 = -10 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$

$2a_2 - 12a_3 = -7$

$\Leftrightarrow -1 - 12a_3 = -7 \,|\, +1$

$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \,|\, :(-12) \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$

$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$

$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1$

$\Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \,|\, +5$

$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \,|\, :(-1) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$

$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$

$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \,|\, -3 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 4}$

Die Funktionsgleichung: $\quad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$

د پررته المانیژباړه:د خیروني یا تابع برابرون

د کاروني بیلګه ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$P_1(2|22) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 22$$
$$P_2(4|44) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 44$$
$$P_3(-4|4) \Rightarrow \quad f(-4) = -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(8|40) \Rightarrow \quad f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = 40$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	22	
1	4	16	64	44	II − I
1	−4	16	−64	4	III − I
1	8	64	512	40	IV − I
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	−6	12	−72	−18	III + 3·II
0	6	60	504	18	IV − 3·II
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	24	336	−48	$IV - \frac{1}{2}\cdot III$
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	0	288	−72	

$\Rightarrow$

$$288a_3 = -72 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$48a_2 + 96a_3 = 48$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 - 24 = 48 \,|\, +24$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 = 72 \,|\, :48 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 12a_2 + 56a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 18 - 14 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 4 = 22 \,|\, -4$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 18 \,|\, :2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 18 + 6 - 2 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 22 = 22 \,|\, -22 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

Die Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x$

د پړرته المانیژباړه:د خیرونبیا تابع برابرون

د کاروني بیلکه۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{aligned}
P_1(1|0) &\Rightarrow & f(1) &= 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 &= 0 \\
P_2(-1|-2) &\Rightarrow & f(-1) &= -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 &= -2 \\
P_3(2|16) &\Rightarrow & f(2) &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 &= 16 \\
P_4(-3|-4) &\Rightarrow & f(-3) &= -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 &= -4
\end{aligned}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	0	
1	−1	1	−1	−2	II − I
1	2	4	8	16	III − I
1	−3	9	−27	−4	IV − I
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	1	3	7	16	$III + \frac{1}{2} \cdot II$
0	−4	8	−28	−4	
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	3	6	15	|: 3
0	0	8	−24	1	|: 8
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	1	−3	0	IV − III
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	0	−5	−5	

$\Rightarrow$

$$-5a_3 = -5 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$a_2 + 2a_3 = 5$$
$$\Leftrightarrow a_2 + 2 = 5 \,|\, -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 3}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -2 \,|\, +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 0 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 - 4}}$$

د کاروني بيلګه ۷ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|1) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 1$$
$$P_2(2|0) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$
$$P_3(-2|4) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(3|9) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	1	
1	2	4	8	0	II − I
1	−2	4	−8	4	III − I
1	3	9	27	9	IV − I
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	−3	3	−9	3	III + 3·II
0	2	8	26	8	IV − 2·II
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	2	12	10	$IV - \frac{1}{6} \cdot III$
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	0	10	10	

$\Rightarrow$

$$10a_3 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$12a_2 + 12a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 + 12 = 0 \,|\, -12$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 = -12 \,|\, :12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 3 + 7 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 4 = -1 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 - 1 + 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 = 1 \,|\, +5 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6}}$$

د کارونې بیلګه ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{45}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + 1a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_4\left(-\frac{3}{2}\,\Big|\,-\frac{77}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}a_3 + \frac{9}{4}a_2 - \frac{3}{2}a_1 + 1a_0 = -\frac{77}{8}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
1	3	9	27	−4	
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{45}{8}$	$\mid\cdot 8$
1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{77}{8}$	$\mid\cdot 8$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
2	3	9	27	−4	II − I
8	−4	2	−1	45	III − 8·I
8	−12	18	−27	−77	IV − 8·I

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	−12	−6	−9	−3	III + 6·II
0	−20	10	−35	−125	IV + 10·II

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	42	147	−63	$\mid : 21$
0	0	90	225	−225	$\mid : 45$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	2	5	−5	IV − III

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	0	−2	−2	

$\Rightarrow$

$$-2a_3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 7a_3 = -3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \mid -7$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$$

$$2a_1 + 8a_2 + 26a_3 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 40 + 26 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 14 = -10 \mid +14$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 2 = 6 \mid +2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کاروني یا استعمال بیلګه۹ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1\,|\,-\frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{9}{2}$$

$$P_2\left(-1\,|\,\frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{11}{2}$$

$$P_3\left(3\,|\,-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -\frac{5}{2}$$

$$P_4\left(-\frac{5}{2}\,|\,-8\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8}a_3 + \frac{25}{4}a_2 - \frac{5}{2}a_1 + 1a_0 = -8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{9}{2}$	$\|\cdot 8$
1	−1	1	−1	$\frac{11}{2}$	$\|\cdot 8$
1	3	9	27	$-\frac{5}{2}$	$\|\cdot 8$
1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$-\frac{125}{8}$	−8	$\|\cdot 8$

$$-11a_3 = -11 \,|:(-11)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

8	8	8	8	−36	
8	−8	8	−8	44	II − I
8	24	72	216	−20	III − I
8	−20	50	−125	−64	IV − I
8	8	8	8	−36	|: 4
0	−16	0	−16	80	|: 4
0	16	64	208	16	|: 4
0	−28	42	−133	−28	|: 7
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	4	16	52	4	III + II
0	−4	6	−19	−4	IV − II
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	0	16	48	24	|: 8
0	0	6	−15	−24	|: 3

$\Rightarrow$

$$2a_2 + 6a_3 = 3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 3 \,|\, -6$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -3 \,|: 2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$$

$$-4a_1 - 4a_3 = 20$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 - 4 = 20 \,|\, +4$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 = 24 \,|: (-4)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 - 3 + 2 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 13 = -9 \,|\, +13$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = 4 \,|: 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کاروني يا استعمال بيلګه ۱۰ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|25) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 25$$

$$P_2(-1|-49) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -49$$

$$P_3(3|27) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 27$$

$$P_4(5|5) \Rightarrow \quad f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 5$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	25	
1	−1	1	−1	−49	II − I
1	3	9	27	27	III − I
1	5	25	125	5	IV − I
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	2	8	26	2	III + II
0	4	24	124	−20	IV + 2 · II
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	24	120	−168	IV − 3 · III
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	0	48	48	

$\Rightarrow$

$$48a_3 = 48 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$8a_2 + 24a_3 = -72$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 + 24 = -72 \,|\, -24$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 = 96 \,|: 8 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -12}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -74$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -74 \,|\, +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = -72 \,|: (-2) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 36}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 36 - 12 + 1 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 25 = 25 \,|\, -25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x}}$$

پوښتني:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + 0x_3 = 28 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 30 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 32 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{13\,;15\,;17\}$$

$$\begin{vmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 12 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 11 \\ 0x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{3\,;2\,;1\}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{15\,;12\,;10\}$$

$$\begin{vmatrix} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{-1\,;3\,;2{,}5\}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 23 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{5\,;3\,;1\}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 20 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{5\,;3\,;1\}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -21 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -6 & 2 & -21 \end{array} \Rightarrow L = \{1;-1;2;-1\}$$

$$\begin{vmatrix} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ x_4 = 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow L = \{-1;-1;0;5\}$$

د لاس ته راوړنې د کنترل له پاره دې ازمايښت وشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هورنر- شیما Das Horner – Schema

د دې له پاره چې د جګودرجو ټولراشنلځیرونو یا که غواړئ توابعو ګراف وکښلای شو، باید یو ارزښت جدول برابرکړو. دا به ډېر وخت اوځای ونیسي، چې د دې له پاره اړین ځیره ارزښتونه یا فنکشنارزښتونه وشمیرو.

د هورنر – شیما دا شمیرنې ډېرې ساده کوي.

بیلګه : دریمه درجه ټولراشنل فنکشن یا راشنل ځیرونه

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

د x د ډېرځله نوکانو بندولو له لارېمنځ ته راځي:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x\left[a_3x^2 + a_2x + a_1\right] + a_0 = \underbrace{x\underbrace{\left[x\left(\underbrace{a_3x + a_2}_{e_2}\right) + a_1\right]}_{e_4} + a_0}_{E}$$

که سړی غواړي چې د $x = x_1$ له پاره فنکشن ارزښت وشمیري، نوکی دی شي سړی په لاندې ډول له دننه دباندې لورته مخ ته لاړ شي:

-- ګرد نوکان وشمیري

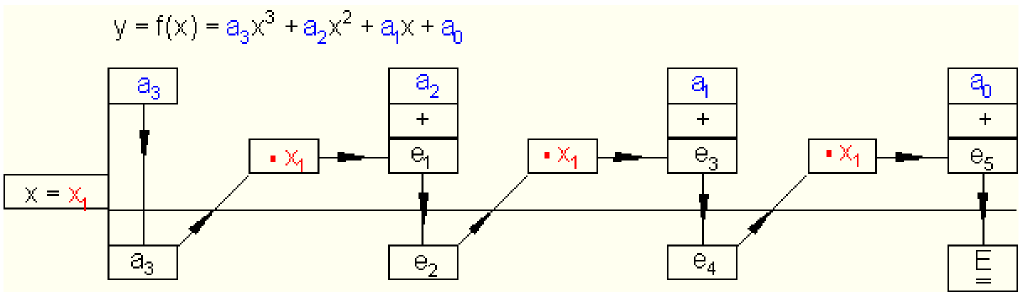
--منځ لاس ته راوړنه (ښه لیکنه به یې داسې وي: منځلاس –ته-راوړنه) د x_1 سره ځل کړي او a_1 ته یې ور زیات کړي

--لاس ته راوړنه د x_1 سره ځل کړي او a_0 ته یې ور زیات کړو

دا شمیرنکارونې یا که غواړئ شمیرنعملیې کیدی شي ځیره ډوله یا شیماتیکي داسې انځور کړو:

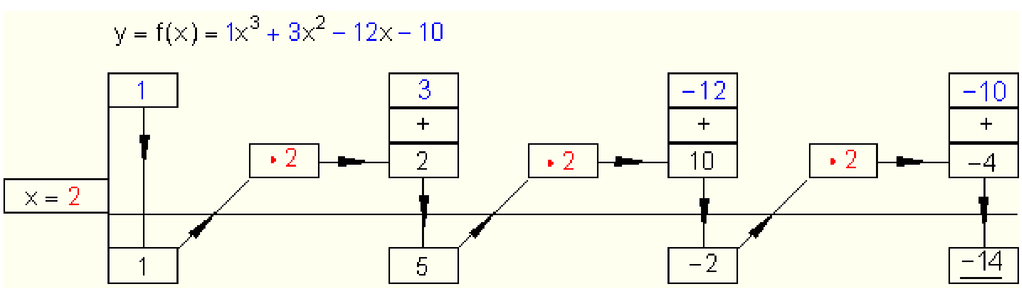
(c) ketabton.com: The Digital Library

تولیزه بڼه Allgemeines Schema:



بیلګه : $y = f\ (x) = x^3 + 3x^2 -12x -10$

د $x = 2$ له پاره دې د $y = f\ (2)$ ارزښت د هورنر – شیما له لارې وشمیرل شي.



نو لاس ته راځي یا باورلری: $y = f(2) = \underline{-14}$

د یوه دریمې درجې پولینوم له پاره- چې غواړو ګراف یې رسم کړو یا کاږو- باید یو ارزښتجدول جوړکړو.

$y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad D_f = \{x \mid -4 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$

$a_3 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	1	4	1	−6	
x = −4		−4	0	−4	
	1	0	1	−10	= f(−4)
	1	4	1	−6	
x = −3		−3	−3	+6	
	1	1	−2	0	= f(−3)
	1	4	1	−6	
x = −2		−2	−4	+6	
	1	2	−3	0	= f(−2)
	1	4	1	−6	
x = −1		−1	−3	+2	
	1	3	−2	−4	= f(−1)
	1	4	1	−6	
x = 1		+1	+5	+6	
	1	5	6	0	= f(1)
	1	4	1	−6	
x = 2		+2	+12	+26	
	1	6	13	20	= f(2)
	1	4	1	−6	
x = 3		+3	+21	+66	
	1	7	22	60	= f(3)
	1	4	1	−6	
x = −2,5		−2,5	−3,75	+6,875	
	1	1,5	−2,75	0,875	= f(−2,5)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتجدول؛

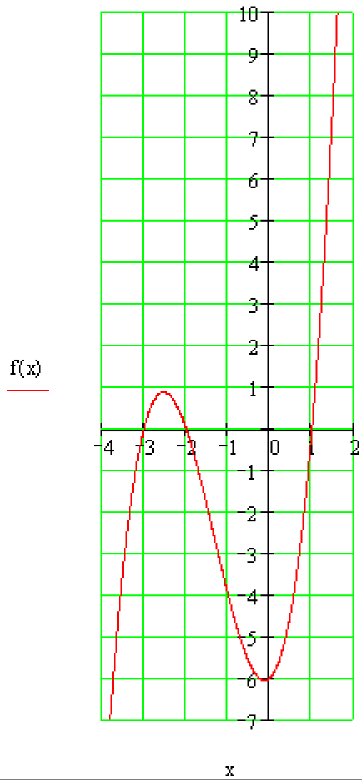
x	-4	-3	-2,5	-2	-1
f(x)	-10	0	0,875	0	-4
x	0	1	2	3	
f(x)	-6	0	20	60	

د لښتي- یا جدولارزښت سره کیدی شی په نږدې توګه ګراف وکښل شي.

که د ګراف کښلو کي څرګنده شي،چي یوبل ځای هم پاتي دی،دا کیدی شي هر وخت د هورنرشیما په مرسته پیدا شي.

ګراف په لاندې x – ځایونوکي صفر ارزښتونه لري: -3; -2;1

دا y – محور په -6 کې غوڅوي.



که په کښلوکي څرګنده شي چي یوبل ځای هم پاتي دی، نو دا کیدی شي د هورنرشیما په مرسته پیدا کړو،د بیلګبپه توګه f (0,5)

x = 0,5	1	4	1	-6	
		+0,5	+2,25	+1,624	
	1	4,5	3,25	-4,375	= f(0,5)

د پولینوم وېشنې پر ځای کیدی شي د تولراشنل تابع درجه د هورنر شیما له لارې هم کمه شي.

موږ د هورنر شیما څیړو:

موږ بیرته تابع ترڅیرنې لاندې نیسو

$$f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چيرته چي $x1=2$ يو صفرځاى دى.

د $f(x)=x^3-x^2-5x+6$ لپاره د هورن شيما د $x1=2$ سره

موخه د ضريب $(x-2)$ له نوکانو وتنه ده. $\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -5 & 6 \\ x=2 & \downarrow & 2 & 2 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$	په دريمه ليکه کې درې عددونه د وېش نتيجو لپاره هم د پاتې پولينوم ضريبونه ښلکيږي. $f(x) = \underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(1\cdot x^2 + 1\cdot x - 3)}_{\text{Restpolynom}}$ پاتې پولينوم کربنيز ضريب

د $f(x)$ د نورو صفرځايونو لپاره د پاتې يا باقي پولينوم صفرځايونه شميرو. دا د اړونده مربع مساوات د حل له لارې کيږي.

نتيجه يې د لاندې پولينوم وېش بيلګې سره وګورى.

بيلګه: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x - 4$ چيرته چي $x_1 = -2$ يو صفرځاى دى.

$\begin{array}{c|cccc} & \frac{1}{4} & 1 & -1 & -4 \\ x=-2 & \downarrow & -\frac{1}{2} & -1 & 4 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{array}$	باقي يا پاتې پولينوم: $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ $f(x) = (x+2)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right)$ د مربع مساوت حل $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$ له دې لاس ته راځي او معکوس: $x2=2$ او $x3=-4$

بيلګه:

$f(x) = -x^3 + 7x - 6 = -x^3 + 0\cdot x^2 + 7x - 6$ چيرته چي $x_1 = 1$ يو صفرځاى دى

(c) ketabton.com: The Digital Library

باقي پولينوم:-1.x-1.x+6 f(x)=(x-1)(.x²-x+6) د مربعيز مساوات حل: .x²-x+6له دي لاس تره اوپه ځټ يا برعکس x2=2 او x3=-3	$\begin{array}{r\|rrrr} & -1 & 0 & 7 & -6 \\ x=1 & \downarrow & -1 & -1 & 6 \\ \hline & -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}$

لکه بيلګه چې ښايي، د هورن شيما سره د پاتې پولينوم ټاکنه ساده ده نسبت د پولينوم وېش ته.

دا ټولې پورته تلنلارې مو د مربع مساوات حل ته لاربښودوي. که دا ونه توانيږو، نو د نومريکې تلنلارو څخه کار اخستل کيږي، چې دا دلته نه څېړل کيږي.

تمرينونه: د پولينوم وېش...

د لندې ترمونو لپاره د پولينوم وېش وکاروی:

لومړی - $\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)$ دیم - $\left(2x^3-14x-12\right):(x-3)$

دريم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-7)$ څلورم - $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+6\right):(x+2)$

پنځم - $\left(x^3+\frac{11}{2}x^2+5x-4\right):(x+2)$ شپږم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x-2)$

اوم - $\left(x^3-\frac{5}{4}x^2-\frac{23}{4}x+\frac{3}{2}\right):(x-3)$ اتم - $\left(x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{47}{3}x-5\right):(x+3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x - 3\right) : (x+3)$ لسم - $\left(3x^3 - 15x^2 - 51x + 63\right) : (x-1)$

تمرینونه: د ټول راشنل توابعو صفرځایونه.

تمرین ټولراشنل تابع **IV**

د صفرځایونو ټاکنه له مختلفو لارو څخه.

د یوه تاسو ته مناسب قانو له مخې د ټولراشنل توابعو صفرځایونه وټاکی. د x محور سره د ګراف غوڅټکي و ټاکي او د تابع مساوات د کرښیزو ضریبونو د ضرب په څیر انځور کړی.

اول - $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{13}{2}x^2 + 18$ دویم - $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

دریم - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ څلورم - $f(x) = -\frac{3}{2}x^4 + \frac{75}{2}x^2 - 216$

پنځم - $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{4}x + 3$ شپږم - $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x$

اوم - $f(x) = 3x^4 - 3$ اتم - $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 2$

نهم - $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 16x$ لسم - $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 26x + 20$

پوښتنې

د ټول هوښیار یا راشنل توابعو محورغوڅټکي ګرافونه

صفرځایونه وشمیرئ او ګرافونه وکاږئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4+2x^3+x^2$ ب - $f(x)=x^2-6x+9$

پ - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(\frac{1}{2}x+4\right)$ ت - $f(x)=x^6-x^4$

ټ - $f(x)=3x\left(\frac{2}{3}x-2\right)(-2x+3)$ ث - $f(x)=3\left(x^2+4\right)\left(x^2-4x+10\right)$

دویم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=4x^4+6x^2-\frac{7}{4}$ پ - $f(x)=x^6-8x^4+20x^2$

دریم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=2x^3+4x^2-2x-4$ ب - $f(x)=x^3-12x+16$

پ - $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ ت - $f(x)=2x^3-10x^2-4x+20$

ټ - $f(x)=x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}$ ث - $f(x)=-3x^3+3x^2-3x+3$

ج - $f(x)=-5x^3-10x^2-\frac{5}{2}x-5$ چ - $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+9x+6$

څلورم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=-3x^4+15x^2-12$ ب - $f(x)=x^4-x^3-2x^2$

پ - $f(x)=-2x^3+2x^2+16x-24$ ت - $f(x)=\left(x^2-6x+9\right)(x-4)$

ټ - $f(x)=x^6-3x^4-4x^2$ ث - $f(x)=x^4-25x^2-60x-36$

پنځم: د لاندې ټولراشنل توبعو ګرافونه په یوه مناسب پروتولاړ یا کواودینات سیتم کې وکاږئ. د دې لپاره یو ارزښت جدول واچوئ او محور غوښتکي وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad D_f = \{x \mid -0,5 \le x \le 4,5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2 \quad D_f = \{x \mid -3,5 \le x \le 2,5\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \quad D_f = \{x \mid -0,2 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad D_f = \{x \mid -3 \le x \le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ټ - $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad D_f = \{x \mid -2,5 \le x \le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ث - ج - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x \quad D_f = \{x \mid -0,2 \le x \le 8\}_{\mathbb{R}}$

شپږم: د لاندې توابعو صفرځایونه وټاکئ او ګراف یې تر شونې پولې پورې ښه وکاږئ. ارزښتجدول کیږدئ او ځنې ارزښتونه د جبشمیري سره وشمیرئ. ځنې صفرځایونه اټکل کړئ او که شوني وي، صفرځایونه وشمیرئ.

الف- $f(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x - 1$ ب - $f(x) = 0,01\left(x^3 - x^2 - x + 1\right)$

پ - $f(x) = 0,1x^3 - 0,3x^2 - 9x - 10$ ت - $f(x) = (x - 1,7)\left(x^2 - 3\right)$

تر ۶۴۰ پورې دلته محورغوښتکیراځي؟

ا ړیکې "Relation":

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

یوه اړیکهٔ له دوه شیانو جوړه ده:

۱ – یوه وینابڼه

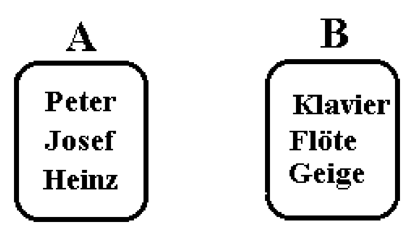
۲ – جوړه، چي دا وینا یي پوره کوي(چي وینابڼه یوه رښتیا وینا کوي)٠

بیلګه :

دیوې کورنی د غړو ډیری A دې ورکړ شوې وي او B د لوبو یا موزیک الو ډیری٠

B	A
فوتبال	سپین
هاکي	
زیرګل	
والبال	
کوچی	

یا دا لاندې



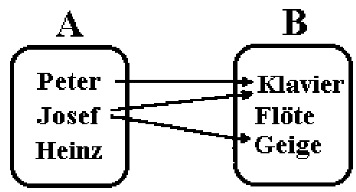
موزیک الي		د کسانونومونه:
پیانو شپیلی ګایګي		پتر یوسف هاینخ

د دواړو ډیریو په منځ کي یوه بینار وینابڼه دې یوه وینابڼه وي، چي سړی a اله bباندې لوبي کوي٠

جوړه ، چي وینابڼه پوره کوي، کیدی شي د بیلګی په توګه لاندې جوړې وي:

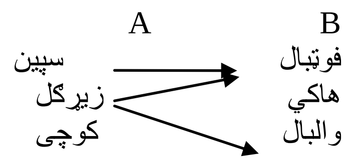
(c) ketabton.com: The Digital Library

پتر په کلاویر لوبه کوي، یوسف په کلاویر لوبه کوي ، یوسف په ګایګې لوبه کوي، د ځیری په توګه اړیکې داسې انځوریږي:



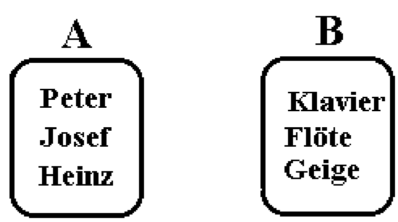
a spielt das Instrument b

یا دا لاندې



نوري بیلګی

موږ د مخه دا لاندې ډیرې منځ ته ر اوړې:

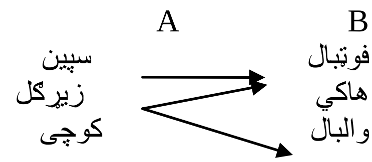


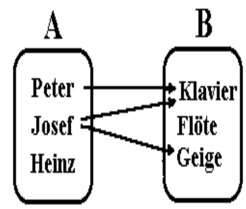
د دواړو ډیریو په منځ کې د اړیکو په څیر موږ اړیکې «په اله لوبه کوي» راوړې یا دا لاندې

فوټبال هاکي والبال	سپین زیړګل کوچی

(c) ketabton.com: The Digital Library

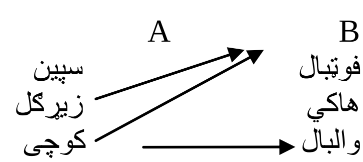
سرلیک

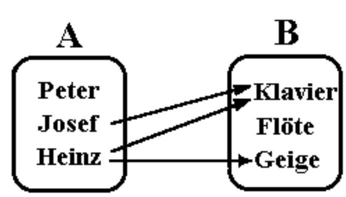




a spielt das Instrument b

په پورته کې ښوول کیږي، چې څوک په کومه اله لوبه کوي.
موږ اوس دواړه ډیرئ A او B ساتو ، مګر د دوي ترمنځ نوې اړیکې غواړو وپیژنو یا تعریف کړو:
بینار اړیکې دې اوس داسې وي، چې « اله لري» او « په اله باندې لوبه کوي» نور نهوي٠
د دې برسیره دې اړیکې « اله لري » لاندې درې جوړې ولری :
هاینځ کلاویر لري
هاینځ یوه ګایګې لري
یوسف یوه کلاویر لري
د ډیرې په ډیر انځور یږي:





a besitzt das Instrument b

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدلکیږي، چې د دوه ډیریو په منځ کې مختلفې اړیکې منځ ته راتللی شي یا ټینګیدلی شي.

شننیزه انځورونه
مخ ته تیرو مخونوکې مو زده کړل، یوې اړیکې پورې دوه شیان اړه لري: یوه وینا بڼه او یوه جوړه، چې دا وینابڼه پوره کوي.
کله اړیین نه دي یا نه شي کیدی، چې ټولې جوړې ورکړای شو، کومې چې په یوه اړیکې پورې اړه لري.

بیلګه ۱
ډیری $A = \{ 1,2,3\}$ او ډیری $B=\{1,2,3\}$ دې ورکړ شوي وي. وینابڼه کوچنی له یا لنډ >

هر زده کوونکی پوهیږي، چې جوړې $(1/2),(1/3)$ او $(2/3)$ دا وینابڼه پوره کوي.
جوړو ګڼلو ته اړنه یو، بلکې دا د وینابڼې مخ ته پرتې ډیری A او B ته.

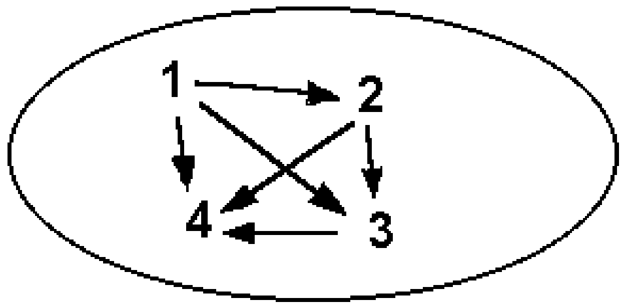
بیلګه ۲
په ځانګړې توګه دا هلته له پامه غورځول کیږي، چې ټولې جوړې وشمیري، کله چې وینابڼو ته مخ ته پرتې ډیری یا ډیرې لویې وي او یا ناپای.
بیلګه : ډیری : $A = B = \{1, 2, 3, \ ... \}$
وینابڼه: له هغې، چې لیدل کیږي، چې بیخي ناشوني ده، چې ټولې جوړې وشمیرل شي، چې دا وینابڼه پوره کوي.

بیلګه ۳
کله کله اړیکه بیخي نه شي انځوریدلی.
بیلګه : ډیری نارینه =M او ښځینه =F وینابڼه کې راوستل شي، چۀ « واده له سره ».
دا څوک نه شي ګڼلی، چې څوک له چا سره واده دی او دا نه په برخه اخستونکو ډیریو M او F کې ورکړ شوې.

د یوې اړیکې تیوپ یا ډول
اړیکه په دوه ګروپونو ویشل کیدی شي.
۱ – ددوه ډیریو ترمنځ اړیکې
۲ – د یوې ډیری په دننه کې اړیکې

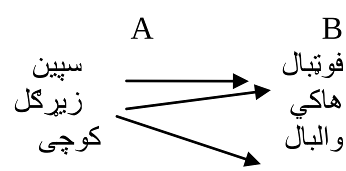
(c) ketabton.com: The Digital Library

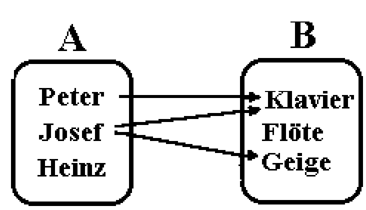
تیوپ ۱ – مورږ وپیژند
د تیوپ ۲ - لپاره بیلګه لاندې اړیکي دي(چې په څیره کې کښل شوي دي):



x له y څخه کوچنی دی

د مخ ته تیرو بیلګو په مخامخوالي یا تضاد دلته د ډیریو د توکو ترمنځ اړیکی پرتې دي
بنسټډیرۍ ،موخه ډیرۍ یا تر مخورشو پسې ورشو
Erklärungروښانه ونه
د ډیرۍ A (بنسټډیرۍ) او B (موخه ډیرۍ) په اړیکو کې په ریښتوني د مخ ته ورشو (پتر ،یوس) همداسې ورپسې ورشو (کلاویر، ګایګې) اړیکې هغه توکي جوړوي، چې په کارونه کې ونډه لري۰
A د لوبغاړو نومونه دي او B د لوبو نومونه دي





Grundmenge: { کوچی ،زیرګل ، سپين} : بنسټډیرۍ
Zielmenge { واليبال ، هاکي ، فوتبال } : موخه ډیرۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

Vorbereich ترمخورشو {Peter, Josef} :
Nachbereich وروپسي ورشو {Klavier, Geige} :

ځني شميرپوهان دا مخورشو او همداسي پسي ورشو، تعريفډيرى ، ارزښتډيرى يا تعريفورشو همداسي ارزښتورشو بولي

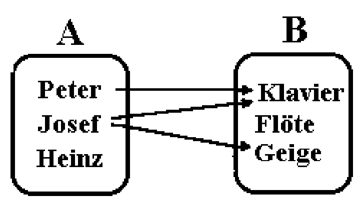
د اړيکو تختهRelationstafel

تراوسه مو توليي اړيکي د غشيدياګرام له لارې انځور کړل. يو شونوالى يا امکانات يي د اړيکو تختې له لارې انځورونه ده:

د دې لپاره د بنسټډيرى او موخه ډيرى توکي په يوه جدول کې ليکو . د بنسټډيرى توکي په پورته ليکه کې ليکو اود موخه ډيرىتوکي په کيڼ درځ يا کينه متّه کې ليکو .

په صليبونه سره هغه پيژند يا تعريف ورکول کيږي، چي د موخه ډيرى په توکي باندې د بنسټډيرى يو توکى تنظيم شوى وي.

د بيلګي په توګه بيرته همغه د ساز الو سره بيلګه راوړو



په دې پورې اړونده اړيکتخته په لاندې ډول ليدل کيږي

	Peter	Josef	Heinz
Klavier	x	x	
Flöte			
Geige		x	

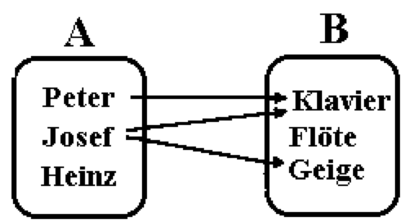
د کواوردينات سيستم انځوربنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه مو اړيکې د غشيدياګرام او اړيکتختو له لارې انځور کړې۰ اوس يو دريم شوونوالی يا دريمه شوونتيا يا امکان غواړو وپيژنو:
انځورونه په يوه کواوردیناتسيستم کې :

د بنسټيزې توکي د پروتمحور په نخښه کوو او د موخه ډيرۍ توکي په ولاړ محور په نخښه کوو ۰
د ټکو سره هغه د بنسټيزی توکي او ورسره د تنظيمډيرۍ تنظيم توکو ټاکلي وي

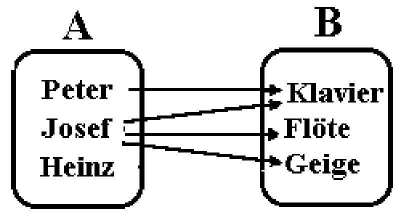
بيلګه
د بيلګی په توګه بيرته هغه بيلګه د لوبو يا موزيک الاتو سره ټاکو:
دلته په دې لاندې الماني ليکنپيا ښه يې :څيره بسيا کړی شو



په کواوردیناتسيستم کې انځورونه داسې ليدل کيږي

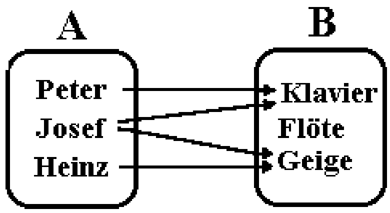
کڼ پوره کيدونکی اړيکې :
د Aڅخه هرتوکی کم له کمه د B په يوه توکي تنظيميږي(پيژندورشو يا مخ ته ورشو او بنسټيزه ډيری کڼمټ دي)
ښي پوره اړيکې : دB هر توکی کم له کمه د څيرې په توګه منځ ته راځي (پسې ورشو او موخه ډيری کڼمټ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



rechtsvollständig

بنی پوره



Linksvollständig

کيڼ پوره

بنی یواځنی اړیکې

د بنسټډیری (کيڼ) هر توکی په زیات ترزیاته د موخه ډیری (ښی باندې تنظیمیږي٠

پام مرسته : غشي ښي « ښیلوریز) یواځنی دي٠

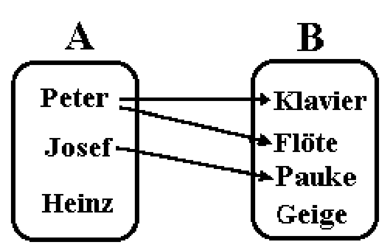
کيڼ یواځنی اړیکې :

د ښی ډیری هر توکی زیات ترزیاته یو وار د یوې ډیری (کینډیری) د خیرې په ډول منځ ته راځي٠

پام مرسته : غشي ښي لورته یواځني دي٠

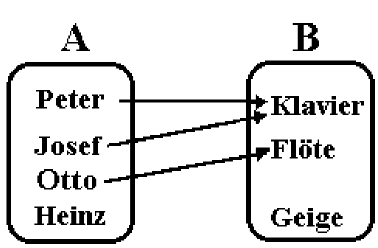
ناټیکوالی!

یا دا لاندې، چې د توپونو په ځای موزیک الې ورکړ شوي دي



linkseindeutig

کيڼ یواځنی



rechtseindeutig

ښی

یواځنی، .

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو کینپوره کیدونکی او بنی یواځنی اړیکي یواځنی اړیکي بلل کیږي (فنکشن او یا څیروني)

په غشیدیاګرام کې یو فنکشن په دې پیژندل کیږي ، چې په هر توکی تیک یو غشی پیل کیږي

په ښت اړیکي : په خپ اړیکو کې

١ – مخ – او پسي ورشوګاني سره بدلیږي(پیژندډیری او ارزښتډیری)

٢ – اوښتوني سره بدلیږي

رفلکسیو اړیکي reflexive relations

دیاګرام : په هرتوکي یوکړئ غشی شته

رفلکسیو اړیکي :

د رفلیکسو اړیکو پیژند : د هرو برابرو توکو جوړه اړیکو پورې اړ ج لري

د فرمو په څیر یې لیکنه : د تولو a لپاره باور لري:
aRa

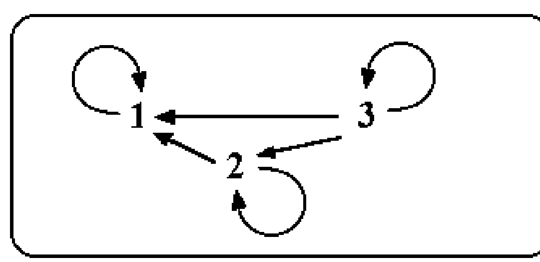
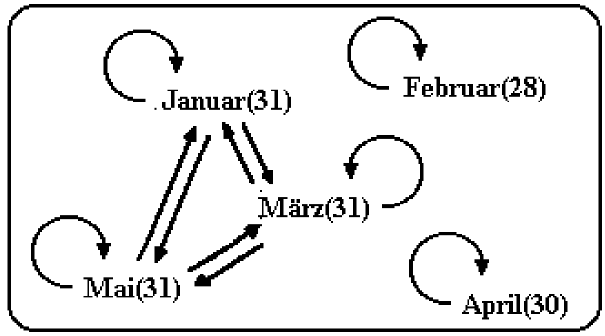


Bild: Die reflexive Relation ≥

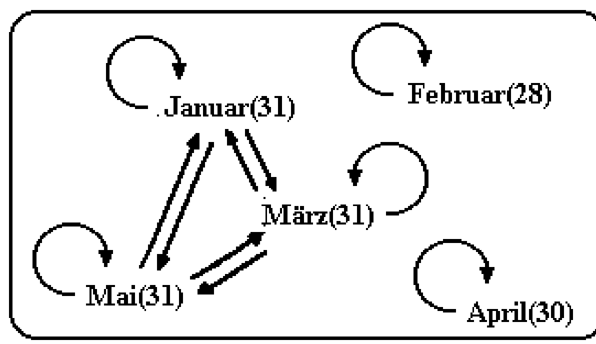
انتیرفلکسیو(ایرفلکسیو اړیکي
Antireflexive (irreflexive) Relationen

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند : په انتیرفلکسیو اړیکو کې په هیڅ توکي کړۍ غشی نه شته
د همغه توکي جوړه اړیکو پورې اړوند نه دی، یا په اړیکو ونډه نه لري٠
د فرمول په توګه لیکل یې : ¬(aRa)



سیومتریکي اړیکي : symetric relations
هر غشي ته په ځټ غشی شته
که (a,b) اړیکو پورې اړه ولري ، نو (b,a) هم په اړیکو پورې اړه لري٠
د سیومري اړیکو خیره: « همغومره ورځې لري لکه»



انتیسیومتري اړیکې: Antiasymetric reltions
د انتیسیومتري اړیکو دیاګرام : په ځټ غشی نه شته ٠
که (a,b) په اړیکو اړه ولري،نو (b,a) په اړیکو اړه نه لري، مګر که a = b وي٠

فرمول: $a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$

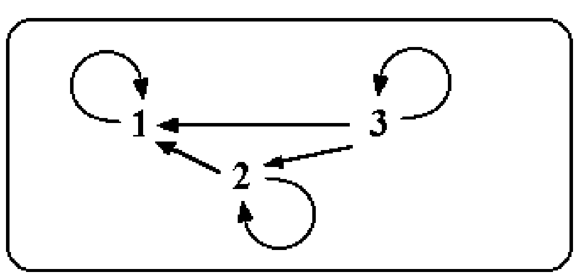


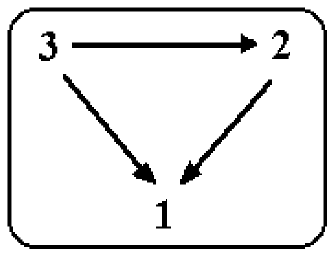
Bild: Die antisymmetrische Relation ≥

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناسیومتریک اړیکي پورته ښېره :Antiasymetric reltions

اسیومتریکي اړیکي
asymetric relations (Asymmetrische Relationen)

د اسیومتریکي اړیکو دیاګرام نه په ښت غشی لري او نه کړي غشی لري٠
د اسیومتریکي اړیکو پیژند: انتیرفلیکسیو او انتیسیومتریکي اړیکي
فرمول : $\neg(bRa \Rightarrow aRb$

ښېره: اسیومتري اړیکي	

خیره کونه یا **توابع** **Funktionen**

p

یادونه: په انرېزي کي mapping د او الماني کي DieAbbildung په نامه ن,مولشوي، چې پښتومانا يي خيرونه يا خيره کونه ده.

فنکشندوه اوښتونپیا واریابلپلري، چې یوه خپلواکه اوبله یپواکه ده. له دیام له د فنکشن لهپاره ناسمد تابع نومورکړشویدی.

په رياضي يا شميرپوهنه کي خيرونه يا توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې طبیعي ، تخنیکي یا هم نورو ورځنیو کارونو کې زیات وخت یوه لویه د بلې لوي په واک کې وي یا که غواړئ د هغې تابع وي، لکه د بیلګې په توګه د یوه موټر د بنزین سوزول یا استعمالول د هغه د تللې چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی. دا ډول ساده اړیکې مو پخوا هم لوستلي او ګرافیکي مو په یوه کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کې انځور کړي.

بیلګې:

د یوه شي یا جنس قیمتت د هغه د خرڅ شوې ډیرئ یا سټ په واک کې دی یا تابع دی.

ټوله دباندنئ تودوخي د ورځې د وخت په واک کې ده.

د یوه بایسکلځغلونکي وهلې لار په مساوي چټکتیا یا سرعت د تلنې وخت په واک کې ده.

د موټر د بریک لار په روښانه توګه د هغه د چټکتیا په واک کې ده.

د یوه کوچني لوېدنه د هغه د عمر په واک ده.

د یوه ریاضي ازموېنې نمرې د لاس ته راوړول ټکو په لاس کې ده.

د یوې بډایئ د ګټې قیمت یا لاس ته راوړنه د په د مخه ټاکلې ګټې سره دوخت تیرېدنې په واک کې ده.

تمرین ۱ : د داسې یو په واکوالي یا تابعیت لپاره نورې بیلګې هم پیدا کړئ.

له پورته بیلګې څخه لیدل کیږي، چې هر دوه لویې سره تنظیمیږي.

ډیرئ یا سټ ← وخت خرڅشوې سټ په قیمت اغیزه لري.

د ورځې وخت ← تودوخي. د ورځې وخت په اندازه شوې تودوخي اغیز لري.

د لاس ته راړلو ټکو تعداد یا ګڼون ← نمرې د یوې ازموېنې نمرې د لاس ته راړلو ټکو اغیزمن کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین ۲ : د پاتې بیلګو لپاره او د هغو لپاره چې په تمرین ۱ کې مو میندلي اړیکې پیدا کړئ.

دا یو له بل سره تظیم شوي لویې متحولې(اووښتوني یا **Variablen**) بلل کیږي.

دلته دې دې ته پام وشي، چې کوم په واکوالی یا تابعیت د دوي په منځ کې شتون لري.

د ریاضي نمرې د ښوونکي له نظره د لاس ته راوړو ټکو په واک کې دي، مګر نه د نمرو د ټکو په واک کې.

سرې نمرې د بلواک یا تابع متحولو په حیث هم ښایي او د ټکو تعداد د خپلواک متحولو په حیث ښايي.

د ټکو او نمرو په منځ کې یو فنکشن یا بلواکیزې یا که غواړئ تابعیتي اړیکې شتون لري.

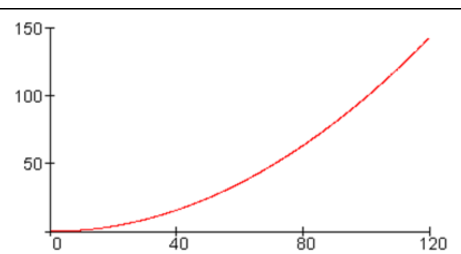
لکه د مخه درسونو څخه چې پوهیږو، ډیر امکانات شتون لري چې د دوه متحولو ترمنځ تابعیتي اړیکې تشریح کړو یا انځور کړو.

د مختلفو چټکتیاو لپاره د بریک لار اندازه کیږي او یو ارزښت جدول ترتیبیږي.

چټکتیا په km/h(x)	20	40	60	80	100	120
د بریکنیولو لار په m(y)	4	16	36	64	100	144

که د جدول ارزښتونه په یوه پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم کې وکښل شي، نو سرې ګراف لاس ته راوړي ورروسته له هغې چې ټکي یو له بل سره وتړل شي کوم چې د چټکتیا او بریکلار ترمنځ اړیکي تشریح کوي.

د پراته محور ، چې ابسځیز هم بلل کیږي د خپلواکي متحولي x ارزښتونه پیدا کیږي، په ولاړ محور چې اوردینات هم بل کیږي د بلواک متحولي (y = f(x ارزښتونه میندل کیږي.



تمرین ۳ :   د ارزښت جدول سره سم په یوه مناسب پروتولاړ – یا کواوردیناتسیستم کې اړونده ټکې وکاږئ او دا په یوه ګراف کې سره ونښلوئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بریکلار د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې وټا کئ.

پولیس یوه دm 90 د بریک لار اندازه کوي؟

دا موټر د کومې چټکتیا یا سرعت سره خغلي؟

زیات وخت دا هم شونې ده چې فنکشنال یا تابیعي اړیکې د تابع مساوات له لارې انځور شي.

د بریکلار لپاره باور لري: $y = f(x) = 0,01\ x^2$

دلته $y = f(x)$ د بریکلار لپاره اینبوول شوی ا و دا وایي، چې y -کواوردینات په کواوردیناتسیستم کې د متحولي x په واک کې دی، یعنې د خپلواک متحولېx یو تابع دی یا په واک کې دی. تابعمساوات دی، کوم چې هغه قانون ورکوي، چې ارزښتونه د $f(x)$ تابع یا بلواک متحولې جوړوي.

د تابع مساوات په ځاي هم وایو چې $f(x) = 0,01\ x^2$ د تابع قانون دی.

تمرین ۴ : که تابع مساوات $f(x) = 0,01\ x^2$ وي، نو لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ؟

له دا تراوسه شوې کار څخه کیدی شي ووایو:

پیژند یا تعریف:

د یوه تابع سره د خپلواک متحولېx هر ارزښت ټیک یو تابع ارزښت $f(x)$ باندې- یا سره تنظیمیږي. سرې دا هم وایي چې یوه تابع یو یواځنی نظم دی.

لیکندول:f
$$\underbrace{f : x \rightarrow \underbrace{f(x) = x - 1}_{\text{Funktionsgleichung}}}_{\text{Funktion}}$$

پورته لومړیې په پښتو: تابع برابرون

که په راتلونکې کې له یوه تابع غږیږو، نو د دې تشریح لپاره فقط تابع مساوات ورکوو، یعني فقط $f(x) = ...$ ی.

د تابع نوم f دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا $f(x) \leftarrow x$ ليکندود روښانه کوي، د هر x –ارزښت سره يو ټاکلی تابع ارزښت f(x)اړه لري.

تابع مساوات $f(x) = x - 1$ د شميرلو قاعده يا قانون راکوي، چې تابع ارزښت څنګه جوړيږي.

د دې لپاره چې د نظم يواځنوالی بيا وښايو، لاندې بيلګه راوړو:

هر زده کوونکی يو ټاکلی د بوټانو لويوالی لري. دلته حتمې ده چې زيات زده کوونکي به يو- - يا هماغه د بوټانو لويوالی ولري.

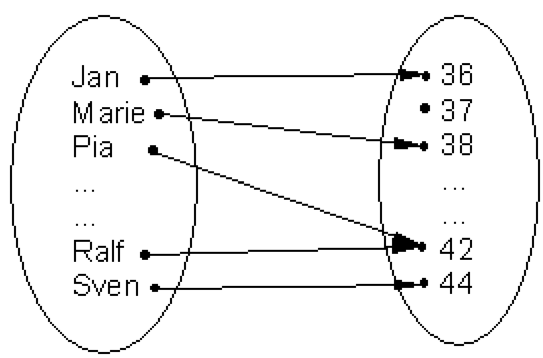
يواځنواوالی په زده کوونکو اړه لري ← د بوټانو لويوالی.

د متحولو سره کښلی يا ليکلې دا په دې معنا دی، چې د زده کوونکي نوم خپلواکه متحوله په ګوته کوي او هغه سره تنظيم شوې د بوټانو لويوالی بلواکه يا تابع متحوله جوړوی.

معکوس يا په څټ د زده کوونکو تنظيم يواځنی نه دی، ځکه چې ډېر زده کوونکي د بيلګې په توګه ۴۲ نمرې د بوټانو لويوالی لرودی شي.

دا ډول تابع د تابعمساوات نه لري، دا کيدی شي چې د ډېرئ څيرې يا سټعکس په څير انځور شي.

يواځنی نظم(تابع يا فنکشن)

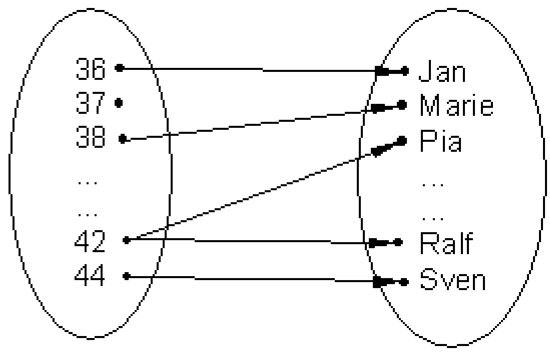


د بوټانولويوالی ډېرئ ياسټ   د زده کوونکو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

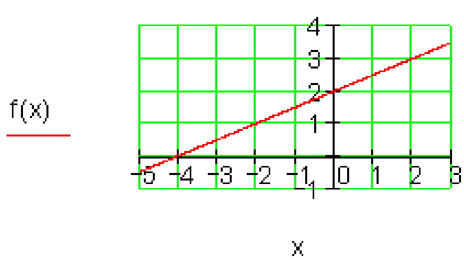
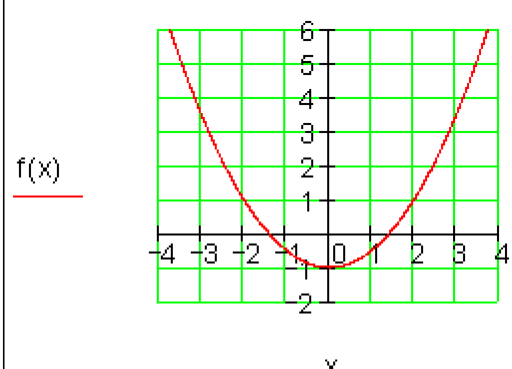
(ارزښت ډېرئ)　　　　(تعریفډېرئ)

نظم یواځنی نه دی (تابع نه دی)



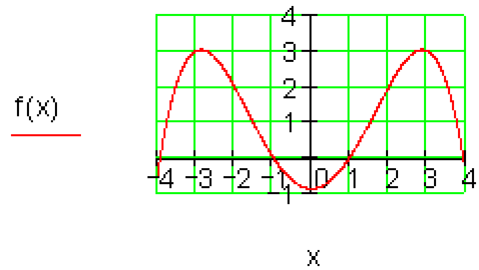
د دواړو سټونو بدلول

د ریاضیکي توابعو او تابعمساواتو بیلګي (له کیڼ و ښي لورته)

$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x + 2$  کربنیز مساوات(ګربنه (	$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1$  مربع مساوات(پارا بل)

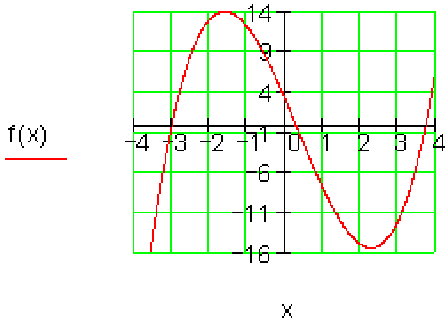
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-7}{120}\cdot x^4 + \frac{23}{24}\cdot x^2 - \frac{9}{10}$$



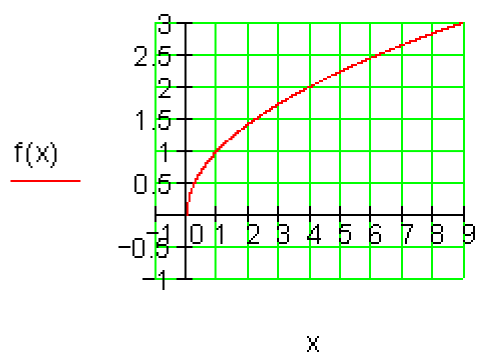
د ځلورمي درجي تولراشنل تابع

$$f(x) := x^3 - x^2 - 11x + 3$$



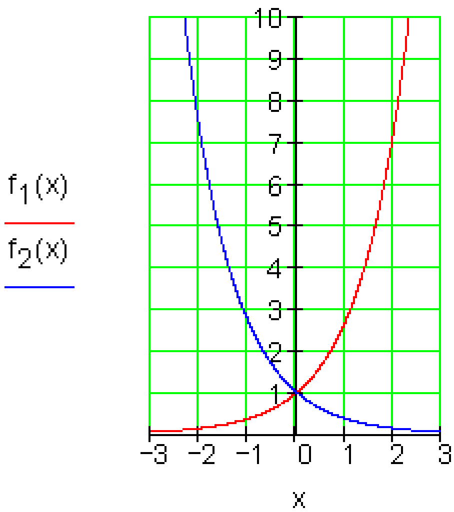
د دریمي
درجي
تولراشنل تابع

$$f(x) := \sqrt{x}$$



ریښه تابع

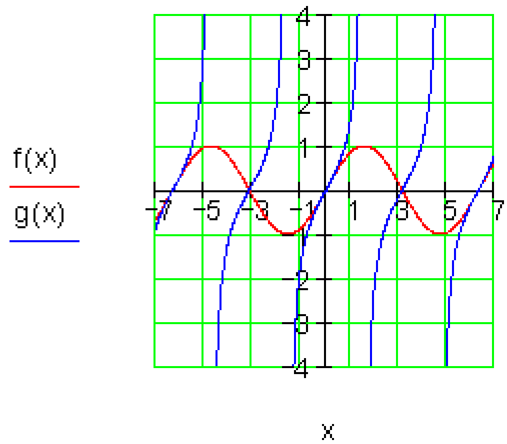
$$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{-x}$$



اکسپوننشل تابع

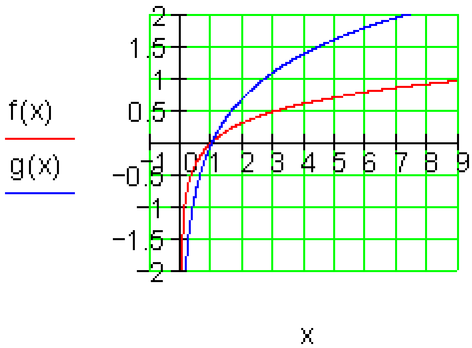
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := \sin(x) \qquad g(x) := \tan(x)$



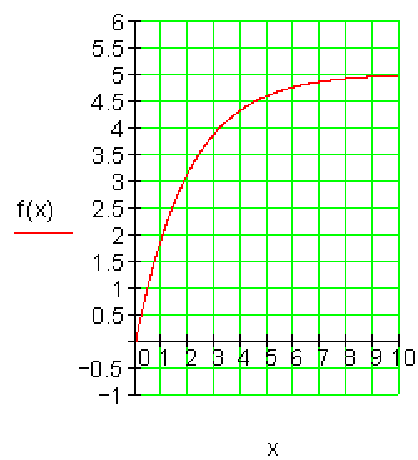
تريگونومتريكي(مثلثاتي) تابع

$f(x) := \log(x) \qquad g(x) := \ln(x)$



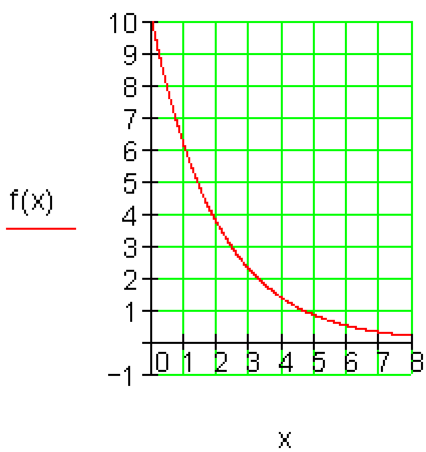
لوگاريتمتابع

$f(x) := 5\cdot\left(1 - e^{-0.5\cdot x}\right)$



اكسپوننشل مرښتكړه

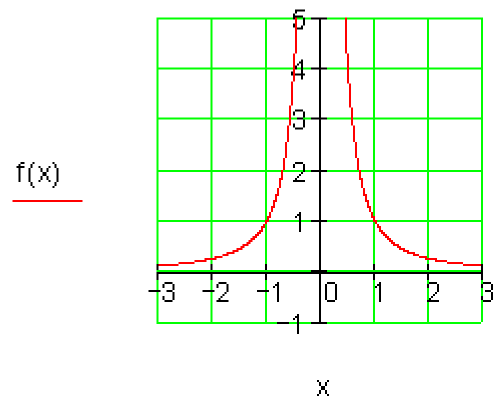
$f(x) := 10e^{-0.5\cdot x}$



اكسپننشلي كښته كيدنه

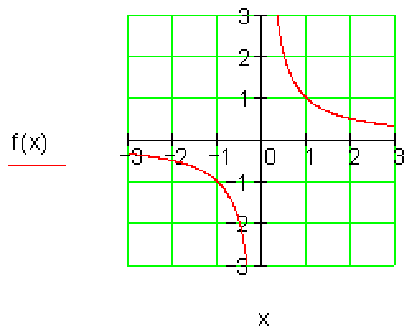
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := \frac{1}{x^2}$



های پارابول محورسیومتریک

$f(x) := \frac{1}{x}$



های پارابول تکی سیومتریک

تعریف- او ارزښتډېرئ یا - سټ

تعریف(پیژند):

د یوه تابع تعدریفسټ **D** د ټولو خپلواکو متحولو ډیرئ یا سټ ده، د کومو لپاره چې تابع تعریف دی.

ارزښت ډیرئ **W** د ټولو تابع ارزښتونو- یا بلواکو - سټ ده، چې د D له توکو منځ ته راځي.

بیلګه:

$f(x) = \frac{1}{x}$ تعریفسټ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ تعریفسټ D=R

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره د وېش اجازه نه شته	Rد حقیقيي اعدادو ډېرئ ده

بیلګه:

$f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}_+$ د تابع ارزښت په حیث فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه رامنځ ته کیږي	$f(x) = x + 1 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}$ تابع هر په خوښه ارزښت نیولی شي.

شمیرپو هنیزه لیکندود او د هغه معنا

$f(4) = 7$ د خپلواکو متحولو د ارزښت $x = 4$ لپاره د تابع ارزښت 7 دی.

دا د ارزښتجوړه (7 | 4)په کواوردیناتسیستم کې د ټکي (7 | 4) P کواوردیناتونه جوړوي.

$f(x) = 9$ غوښتونی د x -ارزښت دی، چې په هغه پورې تابع ارزښت 9 اړه لري.

$y = f(5)$ د $x = 5$ لپاره تابع ارزښت دی.

ټولګه:

یو یواځنی نظم، چې په هغه کې د تعریف سټ D څخه خپلواکه متحوله x ټیک یو تابع ارزښت f(x) باندې تنظیم شي خیرونه (چیموږ یې تابع بولو) یا فنکشن بلل کیږي.

تابعي(خپلواکیز) یا فنکشنلي اړوندوالی د یوه تابع مساوات(د بیلګې په توګه: f(x) = 2x + 1) سره لیکل –یا تشریح کیږي.

تابع مساوات کې د x –ارزښتونو په اینولو سره د تابع ارزښت لاس ته راځي، چې دا د x -ارزښتونو سره یوه ارزښت جدول کې اینولی یا انځورولی شو.

د ارزښتجدول هره جوړه په کواوردینات سیستم کې ټیک یو ټکی په ګوته کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په زياتو حالتونو کې کيدی شي دا منځ ته راغلي ټکي يوه ګراف ته سره رايوځای يا وتړل شي.

د ټول x - ارزښتونو ډېرئ، هغه چې په تابع مساوات کې ځای په ځای شي تعريف ډېرئ يا –سټ بلل کيږي.

د ټول تابع ارزښتونو ډېرئ يا –سټ، چې دلته منځ ته راځي، د تابع ارزښت ډېرئ W پورې اړه لري.

د تمرينونو حل

لومړی تمرين: د داسې بلواکوالي لپاره نورې بيلګې پيدا کړئ.

ځواب: - د يوه تيلسوزونکې ماشين قدرت د څرخونتعداد(د ماشين د څرخيدو تعداد) په واک کې دی.

- د يوې ګردئ يا دايرې سطحه د وړانګې يا شعاع په واک کې ده.

- د بريښنا پيسې د ثابت قيمت سره د انرژي يا بريښنا مصرف په واک کې ده.

دويم تمرين : د پاتې بيلګو او د هغو لپاره چې تاسو په لومړي تمرين کې وليدل ګډې اړيکې سره په فرمولبندۍ کې راوړي.

ځواب:

لار → د خوزښت وخت: په مساوي پاتې چټکتيا د خوزښت وخت په وهلې لار اغيز لري.

بريکلار → چټکتيا: د يوه موټر چټکتيا د بريکلار باندې اغيزه لري.

ټوله ګټه → د تيريدني وخت: د سرمايې ايښوني وخت د ګټې لاس ته راوړنه باندې اغيزه لري.

وده → عمر: د کوچني عمر د هغه په وده اغيزه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

قدرت ⇜ څرخونتعداد: د یوه سوزونکي ماشین د تیلو سوزیدنه د هغه په څرخونتعداد پورې اړه لري.

سطحه ⇜ وړانګه : د ګردۍ یا دایرې وړانګه د دایرې سطحه باندې اغیز لري.

د بریښنا حساب ⇜ انرژي سټ: د سوزولې بریښنا یا انرژۍ سټ یا ډېرۍ د بریښنا بل(هغه د مصارفو کاغز) اغیزمن کوي.

دریم تمرین:په یو مناسب کواوردیناتسیستم کې د ارزښت جدول اړوند ټکي وکاږۍ او دا یوه ګراف ته سره وتړۍ.

د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې بریکلار پیدا کړۍ.

پولیس یوه د 90 m بریکلار کچوي. دا موټر دکومې چټکتیا سره تلی؟

ځواب:

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

تلنلار: په کواوردیناتسیستم یا پروتولاړ سیستم کې د x -محور(ابسڅیزا) د خپلواکو متحولو ډېرۍ نمایندګي کوي، د y –محور (اوردینات) د بلواک یا تابع متحولو نماینده ده.

د مخه له دې چې په یوه کواوردیناتسیستم کې ارزښتونه لیکل –یا کښل کیږي باید وکتل شي، چې کومه خپلواک- او کومه بلواک- یا تابع متحوله ده.

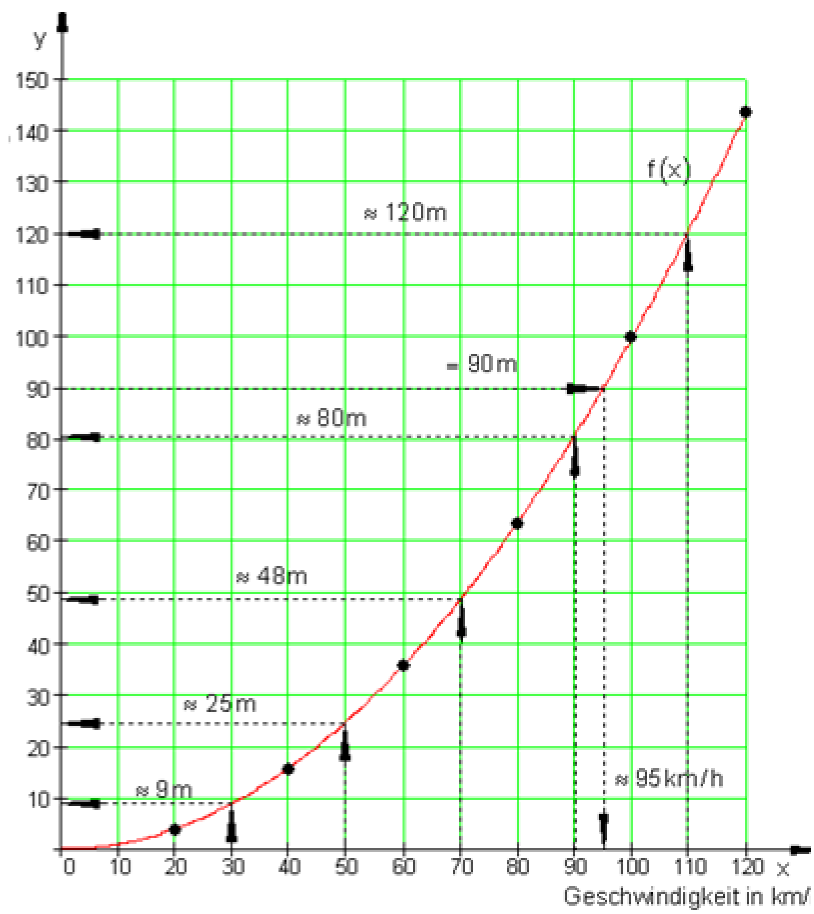
(c) ketabton.com: The Digital Library

پسي دا هم غوره ده، چې د کچوني لپاره یوو ښه کچونی یا هغه اله چې اندازه پرې کچوو باید ومومو.
د دې لپاره د جدول لوي او کوچني ارزښتونه کتل کيږي او پرېکړه کيږي چ دواړه محورونه په څو برخو باید وویشل شي.

وروسته له هغې چې ټول په جدول کې ټکي په کواوردیناتسیستم کې ځای په ځای شوي، نو بیا دا ټکي د ګراف په توګه سره تړل – یا نښلول کيږي

کیدی شي له ګراف څخه د داسي x -ارزښتونو لپاره هغه لړ یا ډېر تابع ارزښتونه هم ولوستل شي، چې په ارزښت جدول کې مخ ته نه راځي.

معکوس کیدی شي د یوه ټاکلي تابعارزښت اړونده x -ارزښت ولوستل شي. د دې نتیجو ټیکوالی د دې په واک کې دی، چې ګراف څومره ټیک کښل شوی دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کي: پروت: چټکتیا په کیلومتر. ولاړ:بریکلار په متر

ځلورم تمرین:

لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ، که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\,x^2$ وي.

ځواب:

تابعارزښتونه داسې شمیرلکیږي، چې اړونده د x ارزښتونه په تابع مساوات کې کېښوول شي.

$$f(x) = 0{,}01x^2 = \frac{1}{100}x^2$$

$$x = 30 \Rightarrow f(30) = 0{,}01 \cdot 30^2 = 0{,}01 \cdot 900 = 9$$

$$x = 50 \Rightarrow f(50) = 0{,}01 \cdot 50^2 = 0{,}01 \cdot 2500 = 25$$

$$x = 70 \Rightarrow f(70) = 0{,}01 \cdot 70^2 = 0{,}01 \cdot 4900 = 49$$

$$x = 90 \Rightarrow f(90) = 0{,}01 \cdot 90^2 = 0{,}01 \cdot 8100 = 81$$

$$x = 110 \Rightarrow f(110) = 0{,}01 \cdot 110^2 = 0{,}01 \cdot 12100 = 121$$

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

بریکلار 90 m کچ شوې ، غواړو چټکتیا پیدا کړو.

پیل: $f(x) = 90 \Leftrightarrow 0{,}01x^2 = 90$ دا مساوات په x پسې ځواب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0,01x^2 = 90 \,|: 0,01 \Leftrightarrow x^2 = 9000 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{9000} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{900 \cdot 10} \Leftrightarrow |x| = 30\sqrt{10}$$

ارزښت حل کړئ.

$$|x| = 30\sqrt{10} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 30 \cdot \sqrt{10} \approx \pm 94,9$$

نسبت و پوښتنې ته فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه موخه ور دي، څکه چې موږ مثبته چټکتیا په پام کې نیسو. د 90 m بریکلار سره د موټر چټکتیا 94,9 km/h وه.

یادونه:لومړی شمیرنه تیک ارزښتونه راکوي، سره له دې هم موخه وردی، چې دا شمیرل شوي ارزښتونه په ګراف کې یا له ګراف څخه هم د لوستلو له لارې کنترول کړو.

پوښتنې

تابع I

لومړی:

ټول ټکي په کواوردینات سیستم کې په نخښه کړئ، چې کواوردینات یې ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

الف- $y \le -1 \wedge x \ge 1$ ب- $y \in \mathbb{R} \wedge -2 \le x \le 3$ پ- $x \in \mathbb{R} \wedge y = 2$

ت - $0 \le x \le 4 \wedge y \ge 0$ ټ- $|x| \ge 1,5 \wedge |y| \le 2$ ث- $y > 0 \wedge x = -1$

دویم: په مناسب کواوردینات سیستم کې لاندې ټکي رسم کړئ.

$$A(40\,|\,220);\ B(10\,|\,250);\ C(200\,|\,300);\ D(80\,|\,240)$$

ایا د x – او y -کواوردیناتو ترمنځ کومې اړیکې شته؟ د دې لپاره یو ترم ولیکئ او نور درې ټکي ورکړئ.

دریم: د ټکو ځای وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- ټکي $P_t\left(t-1 \mid \frac{1}{t+1}\right)$ د t€R کوم ارزښت په لومړئ څلورئکي پروت دی؟

ب- ټکي $Q_t\left(t \mid t^2-1\right)$ د t€R کوم ارزښت لپاره دx محور کښته لور ته پرته ده؟

څلورم:

د ټکوډېرئ یا –سټ $A=\left\{(1 \mid 3);\left(2 \mid \frac{3}{2}\right);(3 \mid 1);\left(4 \mid \frac{3}{4}\right);\ldots\right\}$ ورکړ شوی دی.

د A نور درې توکي ورکړئ او دا ټکي په یوه کواوردینات سیتم کې وکاږئ. ایا د x- او y -کواوردیناتونو ترمنځ اړیکې شته؟

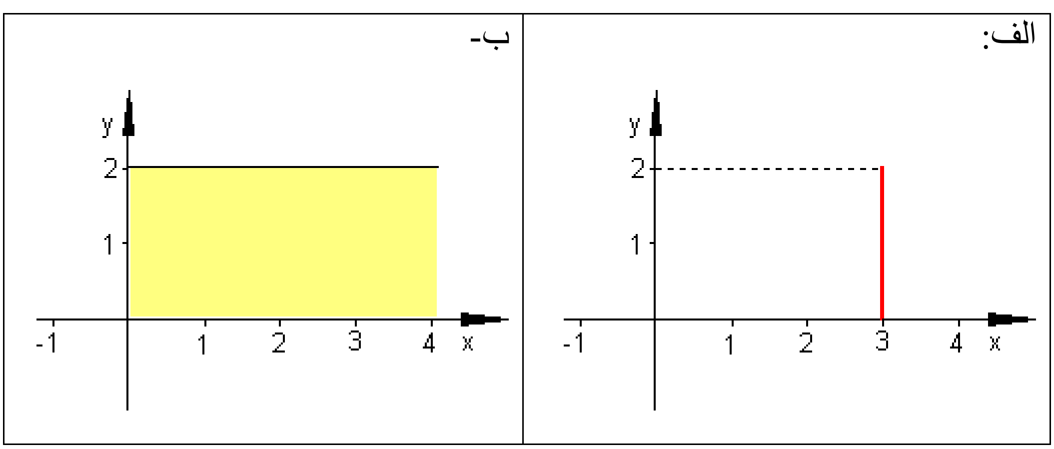
پنځم: یو ټکی $P\left(t \mid \frac{t}{2}+3\right)$ د t€R سره ورکړشوی دی.

د t لپاره څه ارزښتونه ورکړي او دا د دې اړونده ټکي په یوه کواوردینات سیستم کې وکاږئ.

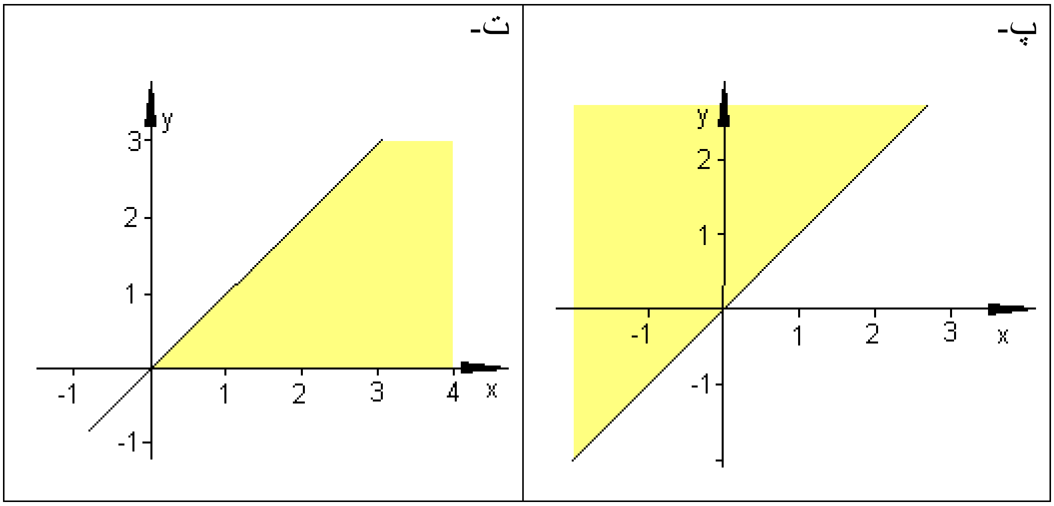
د کومو t -ارزښتونو لپاره باور لري:

د ټکي P د x -کواوردینات د ټکي د y -کواوردینات سره برابر دي؟

شپږم: په نخښه شوي کرښه او همداسي سطحه تشریح کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library



پوښتنې

توابع II

لومړی

ښاغلی برګ د یوه ملفون(لاسي یا لاسي تلفون) قرارداد د لاندې شرایطو سره وکړ:

د میاشتې € 20 ، د تلفون قیمت په دقیقه € 0,35 .

الف- که دی 80 ,40 یا 120 دقیقې تلفون وکړي، نو میاشتنی حساب به یې څومره جګ وي؟

ب - لګښت لپاره یو ترم ولیکئ چې په دقیقه کې د خبرو د دوام په واک کې وي.

پ – اړیکې ګرافیکي انځور کړئ.

دویم:یوه الوتکه د سوزونموادو کیروزین 10500 Liter لیتره زخیره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 100 km دا 180 Liter سوزوي.

الف- د په لیتر مصرف جدول جوړ کړئ. یو واټن له 0 km تر 5000 km پورې وټاکئ.

ب – اړیکې یې ګرافیکي ځور کړئ.

پ-له څومره کیلومتره وروسته به زخیره تمامه شوې وی؟

ت - د الوتنې د لار ترم د ټانک د خوندیونې په واکوالي کې وټاکئ.

دریم: یو د شمیراړونې جدول جوړ کړئ، چې ^{0} څلزیوس (^{0}C) په فارنهایت(^{0}F) اړوي د 20^{0}C - او 60^{0}C په ساحه یا ورشو کې. د دې لپاره اړین داتا تشریح کړئ. اړیکې ګرافیکي انځور کړئ. دا اړیکې کوم ترم په ګوته کوي؟ د ا د تبې تودوخئ کچونه (ترمومتر) د ناروغ د تبې په اندازه کئ چې ده ایا دا حرارت یا تودوخي د ژوند خطر لري؟

څلورم: یوه د مالونو لیږلو مغازه غواړي لګښت له امله یو د تحفې پاکټ ولیږي. د پاکټولو تخنیکي پرابلم له امله یې یو اړخ د 35 cm سره کره ټاکلی دی. د پوست د لګښت نظم باید په پام کې نیول شوی وي

د لګښت نظم: مربع ډوله پاکټونه دننه په هیواد کې.

خورا کوچنئ کتله(یا بهتره ډکی): اوږدوالی 15 cm ، سور 11 cm ، جګوالی1 cm .

خورا جګه کتله: اوږدوالی 60 cm ، سور 30 cm ، لوړوالی 15 cm یا اوږدوالی جمعه یې سور جمعه یې یا په ورزیات جګوالی = 90 cm. خورا زیات وزن 2 kg.

الف- د یوه ډکي یاحجم V = 21 dm^{3} لپاره د سور او جګوالي ترمنځ اړیکې وټاکي.

ب- دا ماکسیمال رسیدلوړ ډکی یا حجم څومره لوي دی؟

پنځم: فرمول ورکړشوی دی.

الف- ش څنګه تغیر خوري، که کوچنی شي.

ب- ایا لاندې اړیکې به د فرمول له لارې تشریح شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

A : د کرايې موټر ټول لګښت د عدد a د تللی کيلو متر او د هغه د يوه کيلو متر د قيمت c لپاره.

B : د ودرېدلو لار يا واټن a د بريکلار b او عکس العمل لار c څخه شميرل کيږي.

پ-شي اړيکي ورکړئ چې د فرمول له لارې تشريح کيدی شي يا روښانه کيدی شي.

شپږم: يو ولاړګوديز يا مستطيل $U = 12\ cm$ چاپيريال يا محيط لري.

الف- اړخونه څنګه يو د بل په واک کې کيدی شي.

ب- يو ترم وټاکئ، چې بلواکوالی د اړخ a څخه ورکوي يا د اړخ a په واک کې يا تابع دی.

پ- د a د کوم ارزښت لپاره سطحه خورا لويه وي؟

پوښتنې

توابع III

لومړی: توابع f(x) ورکړ شوي. يو مناسب ارزښتجدول وکاږئ. دې ته اړوند ګراف رسم کړئ.

الف - $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب - $f(x) = x^2$ پ - $f(x) = \frac{1}{x+3}$ ت- $f(x) = 3^x$

دويم: فکر وکړئ، چې ايا يو ،،بيواځنی نيظم،،د $x \rightarrow y$ لپاره مخ ته لرو: $x^2+y^2=1$

دريم: ټکی P ورکړ شوی دی. ايا يوه تابع مخ ته لرو؟ که هو، نو نظمقانو وټکئ او خورا لويه تعريفستې يا – ډېرئ هم وټاکئ.

$$P = \left\{ (2|1); \left(5|\frac{1}{4}\right); \left(10|\frac{1}{9}\right); \left(25|\frac{1}{24}\right); \ldots \right\}$$

څلورم: يو ارزښتجدول وليکئ او د تابع ګراف وکاږئ:

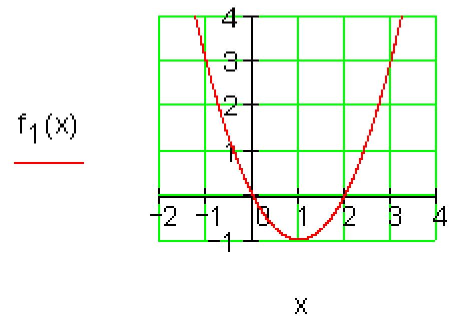
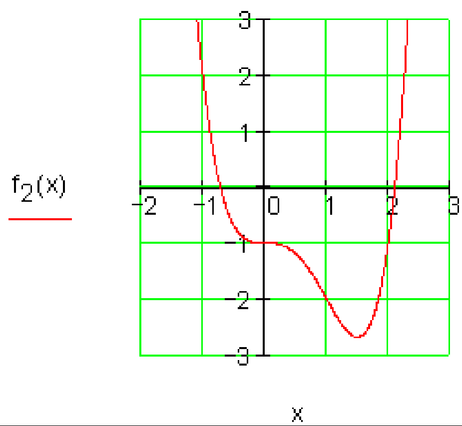
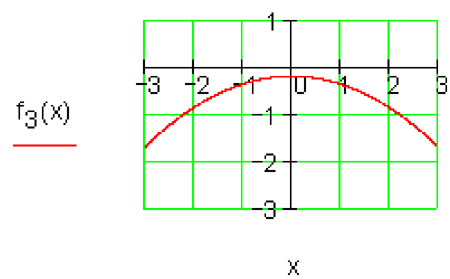
$$f(x) = \frac{1}{8}\left(x^3 - 2x - 4\right);\ x \in \mathbb{R}$$

الف- د جبشميري سره f (3) او f (- 2) وشميرئ.

ب- په کوم ځای کې د تابع ارزښت صفر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت 1 دی؟
ت-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت کميز يا منفي دی؟
ټ-د کومو x -ارزښتونو لپاره باور لري:1 > f (x) کړئ، چې د کوم تابع لپاره باور لري:
پنځم: د درې توابعو f1, f2, f3 ګراف ورکړ شوی دی. پرېکړه وکړئ:

الف- د تابع ارزښتونه هر چيرته صفر دي. ب- توابع په انټروال [1 ; 0,5] منفي يا کميز دي پ-.f (2) < f (0) ت-.f (0) = - 1 ټ-.f (- 2) = f (2)	
	

پوښتنې

توابع **IV**

لومړی: تابع f ورکړ شوې د f(x) =-0,2(2-x); x€R سره

پرېکړه وکړئ، چې ايا لاندې ويناوې رښتيا او که نارښتيا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیل ځواب مدلل کړئ.

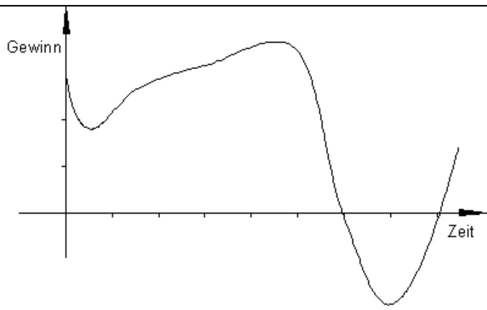
الف- د تابع ارزښتونه زیاتیز یا مثبت دي د ټول x – ارزښتونو لپاره.

ب- $f(x) < 0$ د ټولو x€R لپاره.

پ- $f(x)$ د $x = 2$ لپاره منفي دی.

ت- یو ځای u شتون لري، چې د هغه لپاره $f(u) = f(u + 1)$ باور لري.

دویم: د رسم شوي تابعګراف تلنه تشریح کړئ. دلته هغه غوره ټکي په نخښخه کړئ. هغه ټکي، انتروالونه روښانه کړی یا تشریح کړئ په کومو کې چې ته اقتصادي پسمنظر(د شاته پراته دلیل) فرمولبندي کوې.



کواوردیناتسیستم کې : پروت: وخت. ولاړ: ګټه

دریم: د یوه موټر د تیلو سوزول د چټکتیا په واک کې یا تابع دی. دا په ښنک کې ښیره د تیلو سوزول ښایي په لیتر په سل کیلو متر کې او د چټکتیا په واکوالي کې، که سرې په څلورم ګیر Gang کې لاړ شي.

الف- کړه یا منحني روښانه کړه.

ب- په کومه چټکتیا کې استعمال ۶ لیتره په سل کیلومتر کې دی؟

پ- په کومه چټکتیا کې د تیلو سوزښت خورا کم دی؟

ت- کړه به ښنګه وځغلي، که په دریم ګیر کې سرې لاړ شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د لمبا په ډنډ کې $40\ m^3$ اوبه دي. دا اوبه د ډنډ د پاکوالي له امله د پمپ کولو سره وباسي، چې په دقیقه کې 350 Liter لیتره اوبه وځي.

الف- یو ترم د پاتې حجم یا ډکي لپاره په m^3 وټاکئ.

ب- څومره m^3 د ۲۰ دقیقو وروسته په لمباډنډ کې لا پاتې ي.

پوښتنې

توابع V

لومړی:د تابع $f(x)$ماکسیمال تعریفورشوD_{max} پیدا کړئ

الف- $f(x) = 2 - 3x$ ب - $f(x) = \sqrt{2x-3}$

ث- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ ت - $f(x) = -x^2 + 1$

دویم: د تابع $f(x)$ ارزښتورشو وټاکئ د $D = D_{max}$ سره.

الف- $f(x) = \dfrac{3}{2}x - 4$ ب - $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

پ - $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ت - $f(x) = x^2 - 5$

دریم: تابع $f(x)$ ورکړ شوې ده. ماکسیمال تعریفورشوD_{max} وټاکئ. د $f(x)$ګراف وکاږئ.

د $x \in \left\{k;\ -\dfrac{2}{k};\ k+1;\ k-4\right\}$ لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

الف- $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ ب - $f(x) = 2x - \dfrac{2}{x}$ پ - $f(x) = x - x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ ټ - $f(x)=\sqrt{4-2x}$ ث - $f(x)=2^x-1$

څلورم: تابع $f(x)$ د $f(x)x^3$ سره ورکړشوې ده.

الف- ماکسیمال تعریفورشو D او ارزښتورشوW ورکړئ.

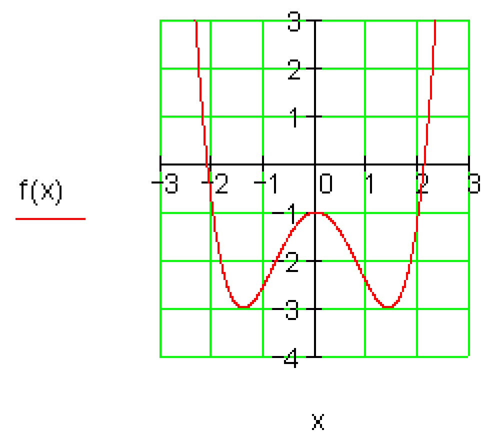
ب- د کوم $x\in D$ لپاره باور $f(x)=81$ لري؟

پ-د کوم $x\in D$ لپاره باور $f(x)\geq 9$لري؟

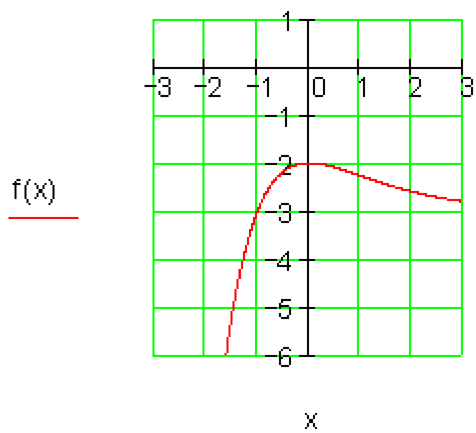
ت- و ښایئ: $f(x+1)=3.f(x)$ د ټولو $x\in D$ لپاره.

پنځم: تابع $f(x)$ د $D = IR$ لپاره تعریف ده. د رسمونو څخه ارزښت ډېرئ وښایئ.

الف-



ب-



پوښتنې

توابع VI

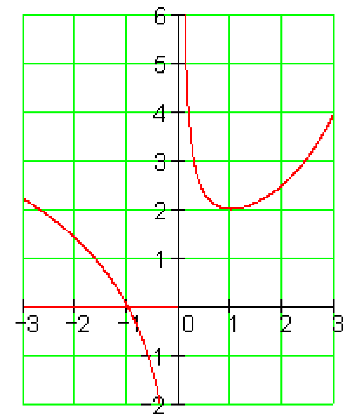
لومړی: د تابع$f(x)$ ارزښتښت د جبشمیري سره وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{2}{5}x^3-2$$ د D=R سره.

دویم:



دویم: ترڅنګ کړه د تابع f(x) ګراف دی؟

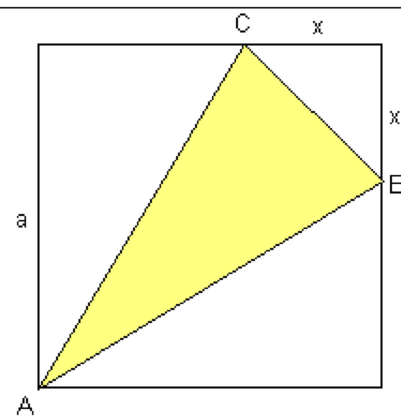
ایا f(x) د ټولو x€R لپاره تعریف دی؟

د x د کومو ارزښتونو لپاره تابع ارزښت

- له 2 لوي دی؟

- له صفرکوچنی دی؟

دریم:



یوه مربع یا خلورې د اړخ اوږدوالي

a = 5 cm سره ورکړ شوې ده.

د مثلث یا درېګودې ABC د سطحې ترم A(x) وټاکئ

څلورم: د یوه مالک ټول لګښت K د یوه لاسته راوړنې سټ x په واکوالي کې په سټ واحد یا ډېرئ یوون (ME) د ترم له لارې لیکل کیږي

$$K(x)=0{,}01x^3-x^2+100x+720$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- د x -ارزښتونو لپاره تر 100 پورې ټول لګښت وشمیرئ. یو مناسبتلنلاري ډول وټاکئ او د ټول لګښت لیدخیره رسم کړئ.

ب- د هر سټ – یا ډیري واحد خرڅلاو99 پیسپواحده دی. لاس ته راوني (د پیسو ځومره دي، که x(ME د سټ واحد) په بازار کې خرڅ شي؟

په لرلي کواوردیناتسیستم کې د خرڅلاو(پیسو) د لیدلو ځیره و کاږئ.

پ-د لیدخیرې ځخه ولولئ:

په کومه ورشو یا ساحه کې ګټه منځ ته راځي؟ د کوم x –ارزښتونو سره به خورا لویه ګټه لاس ته راشي؟

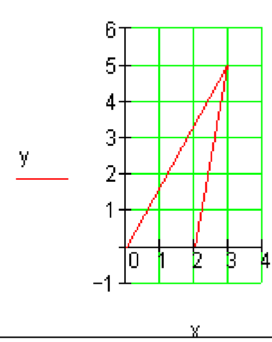
پوښتنې

توابعVII

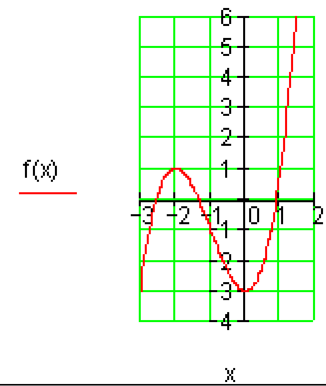
لومړی: توابع f(x) ورکړشوي دي. یو مناسب ارزښت جدول جوړ کړئ. له دې سره اړوند ګراف وکاږئ.

الف- $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ب- $f(x)=x^2$

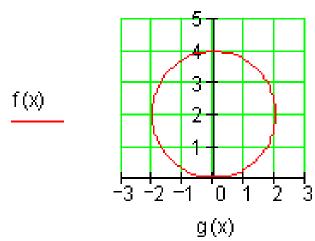
دویم: کوم ګراف په تابع $f:x\to f(x)$ پورې اړه لري؟ دلیل یې راوړئ.

الف-	ب –
	

(c) ketabton.com: The Digital Library



پ-



دریم:د شمیرپو هنیز لنډ لیکدود سره یې فرمولبندي کړئ.

الف- په ځای3 کې تابع f(x) تابعارزښت 12 لري.

ب- د تابع f(x) له لارې د x -ارزښت سره عدد 4- تنظیمیږي.

پ-ټکی (5 | 2) P د f(x) په لیدخیره باندې پروت دی.

ت- f(x) د کومو ابسځیزا یا پراته ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 4 لري.

ټ- د f(x) تابع تابع ارزښت له 7لوی دی د ټول $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

ث- تابع f(x) د 17- ځای کې تا بع ارزښت 9 نیسي.

ج- توابع f او g د په ځای کې همغه ارزښت غوره کوي.

چ- په کوم ځای x کې fد تابعارزښت gد له تابعارزښت څخه کوچنی دی؟

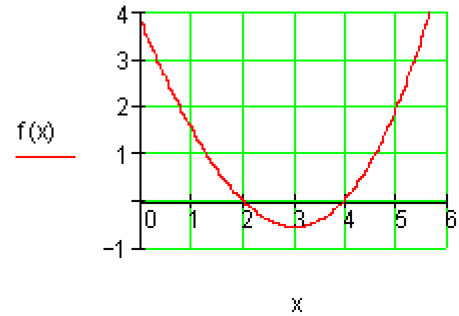
ح- د تابع f(x) د تابع ارزښت برابر 5 دی د ټولو $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

خ- د یوه کړې ټکي K_f کواوردیناتونه سره سر خوري.

څلورم: د یوه نظم لپاره د یوې روځنۍ بیلګې نوم واخلئ، چې هغه تابع وي یا تابع نه وي.

پنځم: دا ترڅنګ کره یا منحني د تابع f(x) ګراف دی. له ګراف څخه ولولئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف-د تابع ارزښت په ځای 5 کې

ب- یو ځای د f(x) سره.

پ-په کوم ورشو $f(x) > 0$ باور لري؟

شیپړم:کوم ارزښت جدول یوه تابع پورې اړه لري؟

الف -

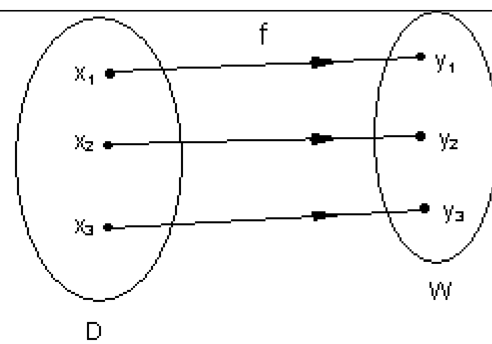
x	−1	0	1	2	3
y	4	0	−2	4	4

ب -

x	−1	0	3	3	4
y	8	7	2	4	5

توابع او په ښت - یا معکوس توابع

تولیز:



د f د نظم قانون د تابع مساوات له لارې افاده کیږي، لکه د بیلګې په توګه

$$f = \{(x|y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{D \times W}$$

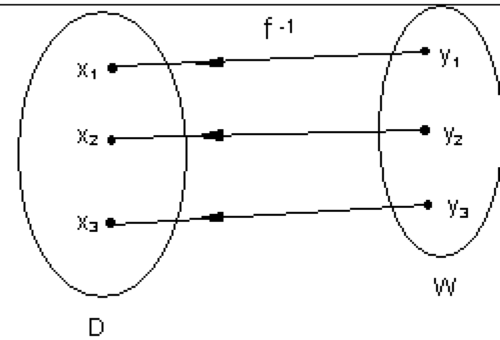
یا په لنډه توګه: $y=f(x)=2x+3$

د یوه تابع د یو-یواځنوالي د f^{-1} یو-یواځنی نظم هم شتون لري.

دا نظم معکوس تابع یا په ښت تابع یا انورز inverse تابع بلل کیږي، لکه د بیلګې په توګه.

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

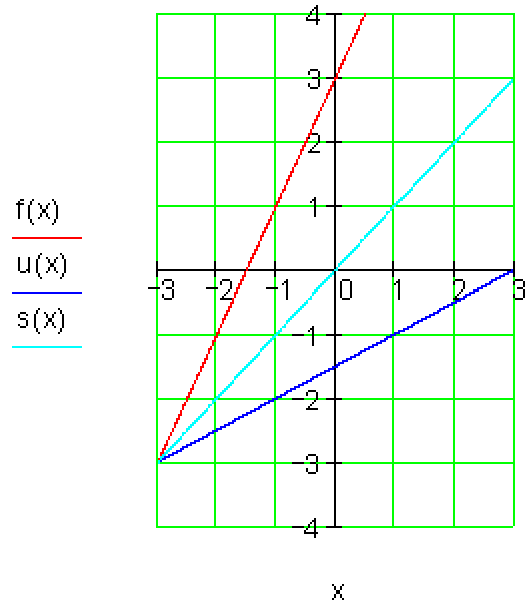
(c) ketabton.com: The Digital Library



د کرښیز توابعو معکوس توابع

تابع: $y = f(x) = 2x + 3$ $x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$ $\Leftrightarrow 2y + 3 = x \mid -3$ $\Leftrightarrow 2y = x - 3 \mid : 2$ $\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ معکوس تابع: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$	تابع $y = f(x) = 2x + 3$ ورکړ شوی غوښتنه معکوس تابع f^{-1} او د هغه ګراف ده تابع **f** جګوالی $m = 2$ لري. دا د خپل ګراف سره پروت محور په ټکي $P_x(-1,5 \mid 0)$ کې غوڅوي او ولار محور یا اوردینات په ټکي $P_y(0 \mid 3)$ کې غوڅوي. د هغه ګراف کرښنه ده. که د تابع اووښتوني یا متحولې یو له بل سره بدلې شي او د y پسې په ورته توګه بڼه بدلون منځ ته راشي، نو سړی معکوس تابع لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معکوس تابع ګراف د تابع د ګراف هندارونه(انعکاس) ده په 45^{0}- محور باندې. په تولیزه توګه باور لري: تابع $y = f(x) = a_1 x + a_0$ معکوس تابع $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a_1}x + \frac{a_0}{a_1}$ د ساده والي له امله معکوس تابع u(x) بولو.	

مربع توابع

څلورۍ- یا مربع توابعو ته ننوتنه یا پیل

ننوتنه یا پیل

هرڅوک چې موټر زده کوي، باید پوه وي، جې د بریک په وخت کې په پاخه سرک د بریک نیولو او د موټر دریدځای په منځ کې لار یا واټن څنګه سره یوځای کیدی شي یا جمعه کیدی شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې موټر قانون سره سم له چټکتیا(سرعت) v په km/h (کیلومتر په ساعت) د عکس العمل لار r د بریک لار b په متر شمیرلکیدی شي.

پام (خبراوسه) : د بیلګې په توګه د المان پخوانی او له څخه نوي قانون.

له څخه د تملار په وچ اسفالت شوي سرک د پل بریکلار سره شمیرل کیږي.

د بریک لار $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ د عکس العمل لار $r = \frac{v}{10} \cdot 3$

یادونه: د څه وخت را په دې خوا په جرمني کې د بریکلار لپاره دا فرمول باور لري.:

$r: b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$

د بریک همدا ډول د عکس العمل لار په متر (m) راوځي، که چټکتیا یا سرعت په کیلومتر په ساعت (km/h)وي.

الف – د دواړو حالتونو لپاره د s = f(v) تابع مساوات و تاکی ، د کوم لپاره چې په هره تللي چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب - د تابع مشاوات s = f(v) د دواړو حالتونو لپاره د وهل شوی سرعت v = 0, 10, 20, 30, ... 100 km/h سره د ه یوه د ودرېد - یا توقف لار چې شمیرل کیږي.

پ : په کواوردیناتسیستم کې یا د وضعیه قیمتسیستم کې ګراف رسم کړی.

ت: ټوله لاس ته راوړې نتیجه تشریح کړی.

Problemlösung: د پرابلم حل:

الف: د تابع مساوات:

زوړ قانون:	$f(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{100}v^2 + \frac{3}{10}v$
نوی قانون:	$j: f(v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{200}v^2 + \frac{3}{10}v$

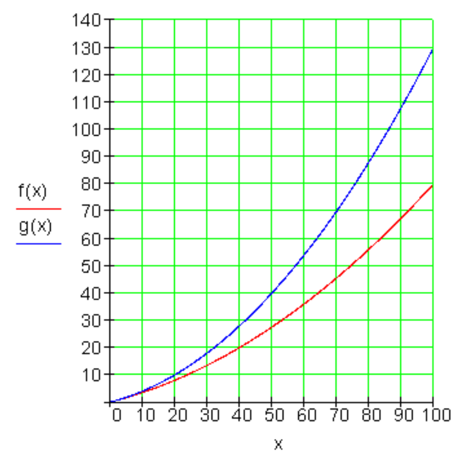
(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - : ارزښتجدول(په کيلو متر په ساعت کې)

v (in km/h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
f(v) (in m)	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	alt
f(v) (in m)	0	3,5	8	13,5	20	27,5	36	45,5	56	67,5	80	neu

پ - ګرافونه

$f(x) := \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{10}\right)^2 + 3\cdot\frac{x}{10}$ $g(x) := \left(\frac{x}{10}\right)^2 + 3\cdot\frac{x}{10}$



د x محور هر ه وهل شوې لار په km/h په ګوته کوي.

د y - محور د هر همغه د توقفلار په m په ګوته کوي.

ت – کومنتار

د نوي نظم وروسته د د چټکتيا(سرعت) زياتيدني توپير تل زياتيږي. د 50 km/h چټکتيا سره نوی د تم کيدلو لار 27,5 m ده، دا د زړې لار40 m نږدې 69% ده. په 100 km/h دا نوې لار نوره فقط ده، دا د زړې 130 m لارېا نږدې 61% ده. د بريک نيولو لار کمېدنه د بريک ښه کيدو(ABS) سره موخه وره ده.

د تابع مساوات د ټيک پامورتيا او ګراف له امله موږ کره کوو، چې دا نه کرښيز مساوات دی او نه يوه کرښه. انځوروي.

د تابع مساوات لاندې بڼه لري:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

داسې تابع مربع تابع بولو او يا هم د2 –مې درجې ټول(تام) راشنل توابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګرافونه يې پارابول بلل کيږي.

تمرينونه:

د لاندې پارابولونو ګرافونه وکاږئ.

د دې لپاره ارزښت جدول ولیکئ

اول - $f(x)=x^2+4x-5$ دويم $f(x)=x^2+2x+5$

دريم - $f(x)=-x^2+x+6$ څلورم - $f(x)=x^2-x$

پنځم - $f(x)=x^2-\frac{1}{9}$ شپږم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+3$

اوم - $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ اتم - $f(x)=-2x^2+8x-11$

نهم م- $f(x)=3x^2-3x$ لسم - $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{2}x+10$

نورمال پارابل، بڼه ځل يا - ضريب او راکښنې

د کار قرارداد:

د a2 د مختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x)=a_2x^2$ وڅیړئ او ګراف په وضعيه قيمت سيستم کې وکاږئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$

د انځور شوي پارابل تابع مساوات يو له بل د x^2 ضريب a_2 له امله توپيروي.

$$f_1(x) = x^2$$

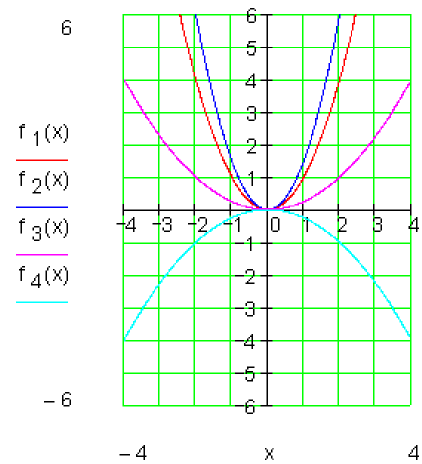
$$f_2(x) = \frac{3}{2}x^2$$

$$f_3(x) = \frac{1}{4}x^2$$

$$f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

دا ضريب a_2 د پارابل د بني لپاره مسول او له دي امله د بني ضريب بلل کيږي.

د تقاطع ټکی S وضعيه قيمتونه S (0 | 0) لري.



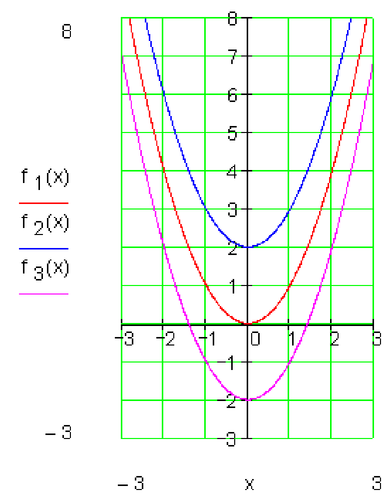
بنه ضريب د پارابل قواري يا شکل ته څنګه تغيرورکوي؟

ضريب بني		د پارابول په نخښه ونه
$a = 1$ $a > 1$ $0 < a < 1$ $a = -1$ $a < -1$ $-1 < a < 0$	→ → → → → →	نورمال پارابو ل غزېدلی پارابول کېکاږلی پارابول پهx محور هنداره شوی نورمال پارابول غزېدلی پارابول، په x -محور هنداره شوی کیکاږلی پاربول، په x –محور هنداره شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کار قرارداد:

د a_0 د مختلفو ارزښتونو لپاره د $f(x) = x^2 + a_n$ تابع مطالع کړی او په وضعیه قیمتسیستم کې یې ګراف رسم کړی: $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$

 	دا یو راکښلی نورمال پارابل دی، چې ککړئ ټکی(د ر آس نقطه) S دa_0 په واحدونو راکښل شوې ده. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$ راکښنه دy محور په اوږدوالي باندې صورت نیسي ، چېرته چې د راکښنې لور د a_0د مخنخښې له لارې ټاکل کیدی شي. د تقاطع ټکی S کواوردینات S (0 | a_0) لري. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$

د کار ورکوني قرارداد:

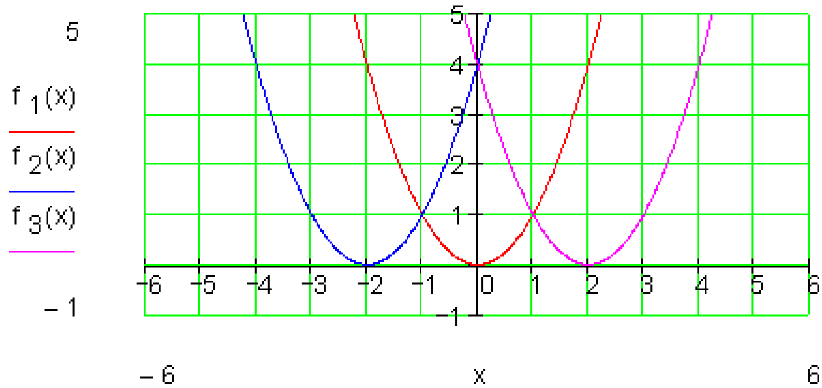
د$f(x) = (x+u)^2$ تابع د u د مختلفو ارزښتونو لپاره راکښنه وڅیړی او ګراف یې په وضعیه قیمتسیستم کې x رسم کړی

$f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = (x+2)^2$ $f_3(x) = (x-2)^2$

د ارزښت جدول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f_1	x	−2	−1	0	1	2	f_2	x	−4	−3	−2	−1	0	f_3	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4



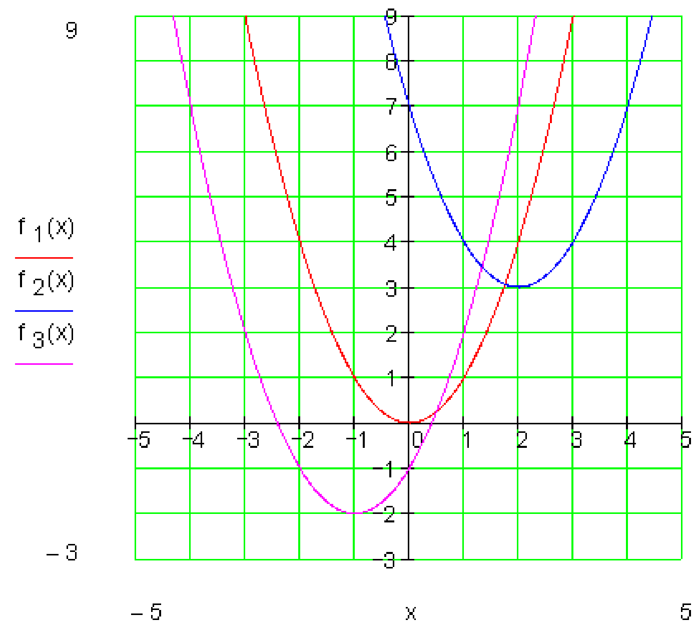
د ا يو راکښلی (چې ځای ته يې تغير ورکړ شوی وي) نورمال پارابول دی، چې ککرۍ ټکی(د رأس نقطه) S يې د u په واحدونو(يوونونو) دx په محور راکښل يا کښول شوې ده. دS غوڅتکی(نقطه تقاطع) يې کواوردينات (-u | 0)Sلري.

کيڼې لور ته څرخون يا څرخول، ککرۍ ټکیS په u واحدونو يا يوونوو د پيل يا سرچينې کيڼ لورت پروت دی.	u>0 =>
ښی څرخون يا څرخول، ککرټکی S په u واحدونو د پيل يا سرچينې ښیَ لورته پروت دی.	u<0 =>

د کار (ورکونې) قرارداد: د u او a0 دمختلفو ارزښتونو لپاره تابع f(x) = (x+u)² + a0 وڅيړی او ګراف يې په يوه کواوردينات(پروت ولاړ) سيستم کې انځور کړیَ.

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = (x-2)^2 + 3 \qquad f_3(x) = (x+1)^2 - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د f_2 (x) ګراف بیرته یو نورمال پارابول دی، چې ککرۍ ټکی S یې په دوه واحده ښی لور ته او په درې واحده پورته لور ته راکښلی دی.

د f_3 (x) ګراف هم یو نورمال پارابول دی، چې ککرټکی S (د رأسټکی) په یوه واحد(یوون) کیڼ او په درې واحده لاندې لور ته کښول شوی دی.

د $f(x) = (x+u)^2 + a_0$ ډول تابع د مربع تابع د ککرۍ ټکي(رأس ټکي) بڼې تابع بلل کیږي.

د تابع ګراف نورمال پاربول دی، چې په u ارزښت دx محور په لور او په a_0 دy محور په لور راکښل شوی دی.

که ککرټکی د $S(x_s \mid y_s)$ سره په نخښه کړو، نو د ککرټکي بڼې مربع تابع په دې ډول ده:

$$f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډه بڼه:	$S(x_s \mid y_s) \Leftrightarrow f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$
بېلګه:	$S(3 \mid -1) \Leftrightarrow f(x) = (x - 3)^2 - 1$

تر اوسه مو فقط نورمال پارابول راکښلی (را کش شوی) وو.

همدا یا برابره راکښنه کیدی شي د یوه په خوښه پارابول سره سرته ورسول شي.

دلته دې بیا فاکتور a_2 په پام کې ونیول شي.

په ټولیزه توګه باور لري:

$\mathrm{Ist}\ f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ د یوه نورمال پارابول تابع (بلوان) دی، چې ککرتکی (د رأس ټکی) $S(x_s \mid y_s)$ لری، نو $f(x) = a_2 (x - x_s)^2 + y_s$ د ککرتکي د تابع مساوات دي.

د خلورې تکمیلوني له لارې د رآس ټکي(ککرې ټکي) ټاکل

موږ پوهیږو چې صدق کوي:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \Leftrightarrow a_2 (x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow S(x_s \mid y_s)$$

په ککرټکي کې د ټولیز تابع مساواتو د ترم تابع له لارې کیدی شي د یوه پارابول ککرټکی (د ککرې ټکی) وشمیرل شي.

بیلګه:

$F(x) = 3x^2 - 12x + 15$ دي په ککرئ ټکي مساوات واړول شي.

لوړمی پل(قدم) : د x^2 تر مخه ضریب دې له نوکانو راوه وېستل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\Rightarrow f(x) = 3[x^2-4x+5]$$

دویم پل : مربع تکمیلونه [ ] او بنه بدلون

$$\Rightarrow f(x) = 3.[x^2 - 4x +(2)^2 -(2)^2 +5] = 3.[(x-2)^2+1]=3.(x-2)^2 +3$$
$$\Rightarrow S(2;3)$$

بیلګه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 8\right] = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 8\right]$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow S\left(3 \,|\, -\frac{1}{2}\right)$$

بیلګه:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right] = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$$
$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow S\left(-\frac{3}{4} \,|\, -\frac{9}{16}\right)$$

تمرینونه: د مربع تکمیلونې له لارې د رآس ټکي(ککرۍ ټکي) ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه پارابل تابع مساوات ورکړشوي دي(د دويمې درجې ټول راشنل تابع). د لاندې بارابولونو لپاره رآسټکو بڼه او رآسټکي پيدا کړئ.

ګرافونه يې وکاږئ:

لومړی: $f(x) = x^2 + 2x + 5$ دويم: $f(x) = x^2 + 4x + 1$

دريم: $f(x) = x^2 - 4x + 1$ څلورم: $f(x) = x^2 - 3x + 3{,}5$

پنځم: $f(x) = x^2 + x - 3$ شپږم: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

اووم: $f(x) = -x^2 + 5x - 5$ اتم: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

نهم: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$ لسم: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

بيلګه 1 :

د ټول راشنل تابع ګراف چې رسم کړای شو،په زياتو حالتونو کې اړيند دی، چې ارزښتجدول وپيژنو. د دې لپاره جبشميري له لارې کيدی شي. خو دا هم تل اړيين دی.

يو ه ساده بيلګه بې له جبشميري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د متحولې $x = 0$ څخه پيل کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=0: f(0)=0^2-4\cdot 0+3=0-0+3=3$$
$$x=1: f(1)=1^2-4\cdot 1+3=1-4+3=0$$
$$x=2: f(2)=2^2-4\cdot 2+3=4-8+3=-1$$
$$x=3: f(3)=3^2-4\cdot 3+3=9-12+3=0$$
$$x=4: f(4)=4^2-4\cdot 4+3=16-16+3=3$$
$$x=5: f(5)=5^2-4\cdot 5+3=25-20+3=8$$
$$x=6: f(6)=6^2-4\cdot 6+3=36-24+3=15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له 10 $\pm$ لوی شي، کېدی شي چې پع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کیږي.

$$x=-1: f(-1)=(-1)^2-4\cdot(-1)+3=1+4+3=8$$
$$x=-2: f(-2)=(-2)^2-4\cdot(-2)+3=4+8+3=15$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کیږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f (x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د f(x) ګراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمیرل کېدی شي

د بیلګې په توګه $x = \pm ½$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-\frac{1}{2}: f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}+2+3=5\frac{1}{4}=5,25$$

$$x=\frac{1}{2}: f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-2+3=1\frac{1}{4}=1,25$$

هر څوک له جبشميري سره بنه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شميروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

په لاندي کې HN د اصلي ګډ مخرج (ماتلاندې) په معنا دی.

يوه غوره بيلګه، چې ځنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي

د تابع مساوات $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

بادونه: په لاندې زيات ځايونه HN راغلي، دا د اصلی مخرج په مانا دي.

موږ د $x = 0$ سره پيل کوو

$$x=0: f(0)=\frac{4}{5}\cdot 0^2-\frac{3}{4}\cdot 0-\frac{7}{2}=0-0-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}=-3,5$$

$$x=1: f(1)=\frac{4}{5}\cdot 1^2-\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\overset{\text{ټ}}{\equiv}}\frac{16}{20}-\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{69}{20}=-3,45$$

$$x=2: f(2)=\frac{4}{5}\cdot 2^2-\frac{3}{4}\cdot 2-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\overset{\text{ټ}}{\equiv}}\frac{32}{10}-\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}$$

$$=-1,8$$

$$x=3: f(3)=\frac{4}{5}\cdot 3^2-\frac{3}{4}\cdot 3-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\overset{\text{ټ}}{\equiv}}\frac{144}{20}-\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{29}{20}=1,45$$

$$x=4: f(4)=\frac{4}{5}\cdot 4^2-\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}-3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\overset{\text{ټ}}{\equiv}}\frac{128}{10}-\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{63}{10}=6,3$$

$$x=5: f(5)=\frac{4}{5}\cdot 5^2-\frac{3}{4}\cdot 5-\frac{7}{2}=20-\frac{15}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=4}{\overset{\text{ټ}}{\equiv}}\frac{80}{4}-\frac{15}{4}-\frac{14}{4}=\frac{51}{4}=12,75$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې ليکل کيږي.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دي ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کيدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسي شميرل کيدی شي

د بيلګې په توګه $x=\pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$

$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$

$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په پورته کې (HN(Hauptnenner داصلې مخرج(ماتلاندې) یا مخرج مشترک په معنا دی.

د دې لپاره چې د یوه ټول ریښتوني یا تام راشنل تابع ګراف انځور کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړیین دی، چې ارزښت جدول وکاږو. د دې لپاره یو جبشمیروني ته اړتیا لرو.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د تحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

$$
\begin{aligned}
x = 0 &: f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3 \\
x = 1 &: f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0 \\
x = 2 &: f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \\
x = 3 &: f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 \\
x = 4 &: f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3 \\
x = 5 &: f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8 \\
x = 6 &: f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له ± 10 لوی شي، کېدی شي چې پرې کړې.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کيږي.

$$
\begin{aligned}
x = -1 &: f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8 \\
x = -2 &: f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کيږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د f(x) ګراف رسم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمېرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x = \pm ½$

$$x = -\frac{1}{2}: f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 2 + 3 = 5\frac{1}{4} = 5,25$$

$$x = \frac{1}{2}: f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 2 + 3 = 1\frac{1}{4} = 1,25$$

هر څوک له جبشمېري سره ښه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شمیروني یا کمپیوتر څخه کار واخلي.

یوه غوره بیلګه، چې ځنې برخې یې د جبشمیري په مرسته حل شوي دي:

د تابع مساوات $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

موږ د $x = 0$ سره بیل کوو

$$x = 0: f(0) = \frac{4}{5}\cdot 0^2 - \frac{3}{4}\cdot 0 - \frac{7}{2} = 0 - 0 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} = -3,5$$

$$x = 1: f(1) = \frac{4}{5}\cdot 1^2 - \frac{3}{4}\cdot 1 - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{16}{20} - \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{69}{20} = -3,45$$

$$x = 2: f(2) = \frac{4}{5}\cdot 2^2 - \frac{3}{4}\cdot 2 - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{32}{10} - \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5} = -1,8$$

$$x = 3: f(3) = \frac{4}{5}\cdot 3^2 - \frac{3}{4}\cdot 3 - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{144}{20} - \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{29}{20} = 1,45$$

$$x = 4: f(4) = \frac{4}{5}\cdot 4^2 - \frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} - 3 - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{128}{10} - \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{63}{10} = 6,3$$

$$x = 5: f(5) = \frac{4}{5}\cdot 5^2 - \frac{3}{4}\cdot 5 - \frac{7}{2} = 20 - \frac{15}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=4}{=} \frac{80}{4} - \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{51}{4} = 12,75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې لیکل کیږي.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f (x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمیرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x = \pm\, 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټونه مربع توابع II

لومړی - د لاندې پارابولونو د تابع مساوات ورکړی:

الف- $f(x)=x^2-4x+2$ ب – $f(x)=x^2+4x+2$

پ – $f(x)=-x^2-4x+3$ ت- $f(x)=-x^2+8x-9$

ټ- $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+5$ ث – $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+6$

ج – $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2$ چ – $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{4}x+6$

ح- $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x-7$ خ - $f(x)=\frac{4}{5}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

(۱) د ککرئ ټکي بڼه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوڅټکي وشمیری.

(۳) پل په پل تشریح کړی، چی f(x) د نورمال پارابول حخه څنګه منځ ته راځي او دا څنګه واز دی.

(۴) په یوه مناسب پروتولاړسیستم کې د f(x) ګراف وکاږی

دویم – سړی کړی شي د نورمال پارابول څخه هر په خوښه پارابول د د غوڅټکي د راکښني له لارې او د پرسېدني یا غزوني له لارې منځ ته اوړي. که دا کښته لور ته واز وي، نو دا دx محور باندې هنداره کیږي یا منعکس کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه پارابول په هکله لاندې ټکي پېژنو:

	Formfaktor بڼه ضریب	د x په لور راکښنه یا ځای بدلون	د y په لور راکښنه یا بدلون
a)	$a_2 = 1$	په 2 واحدونو ښي لورته	په 2 واحدونو کښنه لور ته
b)	$a_2 = -1$	په 3 واحدونو کېڼ لورته	په 4 واحدونو پورته لور ته
c)	$a_2 = \frac{1}{2}$	په 2 واحدونو کېڼ لورته	په 4 واحدونو کښته لور ته
d)	$a_2 = -2$	په 1 واحد ښي لورته	په 5 واحدونو پورته لور ته
e)	$a_2 = -\frac{1}{4}$	په 4 واحدونو کېڼ لورته	په 3 واحدونو پورته لور ته
f)	$a_2 = \frac{3}{2}$	په 2,5 واحدونو ښي لورته	په 6 واحدونو کښنه لور ته
g)	$a_2 = -\frac{3}{4}$	په 3 واحدونو کېڼ لورته	په 3 واحدونو پورته لور ته
h)	$a_2 = 2$	په 3,5 واحدونو ښي لورته	په 4,5 واحدونو کښنه لور ته
i)	$a_2 = \frac{1}{3}$	په 2 واحدونو ښي لورته	په 3 واحدونو یا یوونونو کښنه لور ته
j)	$a_2 = -\frac{2}{3}$		په3 واحدونو پورته لور ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 4 واحدونو ښي لورته

(۱) د ککرئ ټکي ښه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوځټکي وشميری.

(۳) د تابع مساوات په پولينوم بڼه $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$? څنګه دي؟

(۴) په يو مناسب کواوردينات سيسم کې د f(x) ګراف وکاږی.

پوښتني

د مربع توابعو ښستيونه IV

لومړی:

تابع f(x) ورکړ شوی دی. د شمېرني له لاري وښايی، چې ګراف تابع په x محور کې لمسوي. ګراف وکاږی.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} \quad x \in \mathbb{R}$$

دويم: د تابع مساوات(f(x د محور غوځټکي وشميری، او ککری ټکي. ګراف يې رسم کړی.

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ پ- $f(x) = x^2 + 4x + 1$

ت - $f(x) = -0,25\left(4x^2 + 12x + 9\right)$ ټ _ $f(x) = 3x(1-x)$ ث-

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3}$

دريم: دU = 18 cm محيط سره کوم مستطيل(ولاړکوډيز) خورا لويه سطحه لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د توابعو f(x) او g(x) ګرافونه چيرته د x محور غوڅوي؟ ککرۍ چيرته پرتې دي؟ د دواړو ګرافونو ترمنځ کومې اړيکې پرتې دي؟ د ارزښت جدول په مرسته پوښتنې ځواب کړئ.

الف –

x	–3	–2	–1	0	1	2
f(x)	–3,5	0,5	2,5	2,5	0,5	–3,5
g(x)	4	0	–2	–2	0	4

ب –

x	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	–12	–5	0	3	4	3
g(x)	3,5	0	–2,5	–4	–4,5	–4

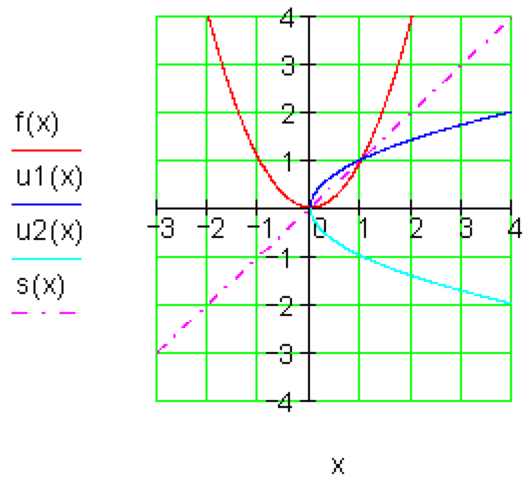
پنځم: د اړونده ګراف کوم خويونه د تابع مساوات څخه سيده لوستل کيدی شي؟

$$f(x) = -x^2 - x + 6; \quad g(x) = (2-x)(x+3); \quad h(x) = -(x+0,5)^2 + \frac{25}{4}$$

د مربع-يا څلورئ توابعو معکوس تابع

تلنلار (که غواړې: طريقه يا قانون) همداسې ده لکه پورته په کرښيزو توابعو کې چې وښوول شوه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=(f(x)=x^2$ د متحولو x او y بدلول $x=f(y)=y^2 \Leftrightarrow y^2=x$ ريښه نيونه: له دې لاس ته راځي او برعکس $\Leftrightarrow \lvert y\rvert = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$ يا $y = -\sqrt{x}$ نو دوه معکوس توابع شتون لري: $y = u_1(x) = \sqrt{x}$ او $y = u_2(x) = -\sqrt{x}$ د معکوس تابع جوړولو سره تعريفورشو محدوده شوه، د دې لپاره چې يواځنی نظم منځ ته راشي	

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښیزبرابرونسیستم د ۲ برابرونونو او ۲ متحولو سره.

داسي سیستم له دوه مساوتو څخه جوړ دی. غوښتونی د دواړو مساواتو ګډ حل دی. مختلفي تلنلارې شته، چې سرې حل ته ورسیږي

په لاندې einsetzen in = په ... کې اینوول.

د جمعي تلنلار:

مساواتسیستم: (I) $5x - 2y = 1$ (II) $3x + 3y = 9$	د حل پل(قدم) غوڅي(قطاع، که قطعه؟) د جمعي تلنلار ته لومړی امکان یا واریانت
(I) $5x - 2y = 1 \mid \cdot 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$ (I) $7{,}5x - 3y = 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$	لومړی: مساوات ورته داسي بڼه بدل کړئ، چې ضریبونه (ترمخ عددونه) د yمتحولي تر مخنخښي پورې سره سروخوري.
(I) $7{,}5x - 3y = 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$ + $10{,}5x = 10{,}5 \mid : 10{,}5$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$	دویم: منځ ته راغلي مساوات سره جمعه کړې او د **x** - متحولي پسې یې حل کړئ
په $3x + 3y = 9$ کې اینوونه: $x = 1$	دریم: د **x** لپاره میندل شوي ارزښتونه د دواړو څخه په یوه مساوات کې کیږدئ او **y** پسې یې حل کړې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$3 \cdot 1 + 3y = 9$ $\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \mid -3$ $\Leftrightarrow 3y = 6 \mid :3$ $\Leftrightarrow y = 2$	
$L = \{(1 \mid 2)\}$	خلورم: حلست یا حلډېرئ ولیکئ

پنځم:

ازماېښت د اېنووني له لارې

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x - 2y = 1$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9$$

د حل پلونه قدمونه د جمعي تلنلار لپاره

دویم واریانت

لومړی: مساوات داسي ورته بنهبدل کړئ، چي د **x** ضریبونه(ترمخعددونه) تر مخنښي پورې سره یوغږیز شي.

$$\begin{array}{ll} (I) & 5x - 2y = 1 \mid \cdot 3 \\ (II) & 3x + 3y = 9 \mid \cdot (-5) \\ \hline (I) & 15x - 6y = 3 \\ (II) & -15x - 15y = -45 \end{array}$$

دویم: منځ ته راغلی مساوات سره جمعه کړئ او متحولې **y** پسې یې حل کړئ.

$$\begin{array}{ll} (I) & 15x - 6y = 3 \\ (II) & -15x - 15y = -45 \\ \hline & -21y = -42 \mid : (-21) \\ \Leftrightarrow & y = 2 \end{array} \quad +$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: بني لورته الماني د اینووني په مانا ده

$$y = 2 \text{ eingesetzt in } (II): \; 3x + 3y = 9$$

د x لپاره میندل شوي ارزښتونه له دي دوه پهیوه مساوت کي کیږدئ او د متحولې x پسې يې حال کړئ.

$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \,|\, -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \,|\, :3$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

څلروم: حلسټ یا د حلډیرئ ولیکئ

$$L = \{(1 | 2)\}$$

پنځم: د اینووني له لارې ازماېښت

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د برابراینووني تلنلار

د حل پل د برابراینووني تلنلار ته

واریانت 1

مساواتسیستم

$$(I) \qquad 5x - 2y = 1$$
$$(II) \qquad 3x + 3y = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} &(I) \quad 5x - 2y = 1 \mid +2y \\ &(II) \quad 3x + 3y = 9 \mid -3y \end{aligned}$$

لومړی: دواړه مساوات د اووښتوني یا متحولې **x** پسې حل کیږي.

$$\begin{aligned} &(I) \quad 5x = 1 + 2y \mid : 5 \\ &(II) \quad 3x = 9 - 3y \mid : 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(I) \quad x = \frac{1+2y}{5} \\ &(II) \quad x = \frac{9-3y}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(I) \quad x = \frac{1+2y}{5} \\ &(II) \quad x = 3 - y \end{aligned}$$

دویم: د مساوات ښي ا ړخونه برابر اینسول کیږي او د متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$\begin{aligned} \frac{1+2y}{5} &= 3 - y \mid \cdot 5 \\ \Leftrightarrow 1 + 2y &= 15 - 5y \mid +5y \\ \Leftrightarrow 1 + 7y &= 15 \quad \mid -1 \\ \Leftrightarrow 7y &= 14 \quad \mid : 7 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{= 2}} \end{aligned}$$

دریم: (د کین لور الماني په پښتو: اینسول په ..کې)

y = 2 eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

د **y** میندل شوی ارزښت د دواړو څخه په یوه وتونمساوات کې اینسول کیږي، او دا بیا د متحولې **x** پسې حل کیږي.

$$\begin{aligned} 3x + 3 \cdot 2 &= 9 \\ \Leftrightarrow 3x + 6 &= 9 \mid -6 \\ \Leftrightarrow 3x &= 3 \mid : 3 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}} & \end{aligned}$$

څلورم: حلسټ یا ـدېرئ ولیکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم: د ځا په ځای کولو یا ایښوولو له لارې ازماېښت

$$\text{(I)}\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$
$$\text{(II)}\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

$$\text{(I)}\quad 5x-2y=1$$
$$\text{(II)}\quad 3x+3y=9$$

د حل پل د برابرايښوولو له لارې

واريانت 2

$$\text{(I)}\quad 5x-2y=1 \mid -5x$$
$$\text{(II)}\quad 3x+3y=9 \mid -3x$$

$$\text{(I)}\quad -2y=1-5x \mid :(-2)$$
$$\text{(II)}\quad 3y=9-3x \mid :3$$

لومړی: دواړه مساوت د اووښتونې یا متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$\text{(I)}\quad y=\frac{1-5x}{-2}$$
$$\text{(II)}\quad y=\frac{9-3x}{3}$$

$$\text{(I)}\quad y=\frac{5x-1}{2}$$
$$\text{(II)}\quad y=3-x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم: د دواړو مساواتو ښئ خوا برابره ليکل يا اينسوول کيږي او د متحولي **x** پسي حل کيږي.

$$\frac{5x-1}{2} = 3-x \,|\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 5x-1 = 6-2x \,|\, +2x$$
$$\Leftrightarrow 7x-1 = 6 \quad |+1$$
$$\Leftrightarrow 7x = 7 \quad |:7$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

درى(ښئ الماني: اينسوول په ...کې)

د **x** ميندل شوى ارزښت د دداړو وتونمساواتو څخه په يوه کې اينسوول کيږي، دا بيا د متحولي **y** پسي حل کيږي.

x = 1 eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$3\cdot 1 + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \,|\, -3$$
$$\Leftrightarrow 3y = 6 \,|:3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

څلورم: د حلسټ وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1|\,2)\}}}$$

پنځم د اينسووني له لارې ازماېښت

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \;\Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \;\Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د اينسووني تلنلار: د اينسووني تلنلار لپاره د حل پلونه(قدمونه)

وارينت 1

مساواتسيستم

$$\text{(I)}\qquad 5x - 2y = 1$$
$$\text{(II)}\qquad 3x + 3y = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: مساوات(I) د x پسې حل کیږي.

$$(I)\ 5x-2y=1|+2y$$
$$\Leftrightarrow 5x=2y+1|:5$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}$$

$$x=\frac{2}{5}y+\frac{1}{5} \text{ eingesetzt in } (II):\ 3x+3y=9$$

دويم: د بني اړخ مينډل شوی ترم په مساوات (II) کې اينبوول کيږي او د y پسې حل کيږي.

$$3\left(\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}\right)+3y=9$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y+\frac{3}{5}+3y=9|-\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y+3y=9-\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{21}{5}y=\frac{42}{5}|\cdot 5$$
$$\Leftrightarrow 21y=42|:21$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=2}}$$

دريم: د y لپاره مينډل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساواتو کې اينبوول کيږي، دا بياپه x پسې حل کيږي.

$$y=2 \text{ eingesetzt in } (II):\ 3x+3y=9$$
$$3x+3\cdot 2=9$$
$$\Leftrightarrow 3x+6=9|-6$$
$$\Leftrightarrow 3x=3|:3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$$

څلورم: د حل سټ وليکئ

$$\underline{\underline{L=\{(1|2)\}}}$$

پنځم: د اينسوولو له لارې حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

د حل پلونه(قدمونه) د اينوولو تلنلار لپاره

واريانت 2

مساواتسيستم

$$(I)\quad 5x-2y=1$$

$$(II)\quad 3x+3y=9$$

لومړی: مساوات**(II)** د متحولې **y** پسې حل کيږي.

$$(II)\quad 3x+3y=9 \,|\, -3x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3y=9-3x \,|: 3$$

$$\Leftrightarrow \quad y=3-x$$

دويم: دبنی لور ميندل سوی ترم په مساوات **(I)**کې کيږدئ او په **x** پسې يې حل کړئ.

$$y=3-x \text{ eingesetzt in } (I): 5x-2y=1$$

$$5x-2(3-x)=1$$

$$\Leftrightarrow 5x-6+2x=1 \,|\, +6$$

$$\Leftrightarrow 7x=7 \,|: 7$$

$$\Leftrightarrow \quad x=1$$

3. دريم: د **x** لپاره ميندل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساوتو کې اينوول کيږي، او دا بيا د متحولې **y** پسې حل کيږي.

$$x=1 \text{ eingesetzt in } (II): 3x+3y=9$$

$$3\cdot 1+3y=9$$

$$\Leftrightarrow 3+3y=9 \,|\, -3$$

$$\Leftrightarrow \quad 3y=6 \,|: 3$$

$$\Leftrightarrow \quad y=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم: جلسټ ولیکئ

$$L = \{(1|\ 2)\}$$

پنځم: ازماېښت د اینوولو له لارې

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

ټولې درې تللارې د هغه د واریانتو سره په یوه ټکلي مساوتسیستم وکارول شو. که څوک یوګونې تللرې ټیک وګوري، پېژني، چې په واریانت ۲ کې لږ د شمیرلو کار غوښتونی دی.

په یوه ټاکلي تللار د شمیرلو کار د دې حل کوونکي مساوتسیستم په واک کې دی. له دې امله دې لومړی پام وشي، چې کومه تللار د لږ کار سره سرته رسیدی شي. د دې لپاره نو یو څو بیلګو ته اړ یو. لاندې بیګې دې د دې لپاره یوه کوچنۍ مرسته وي، چې مناسب د حل – یا څواب تللار پیداشي.

د مناسب ځواب تللار لپاره بیلګې

بیلګه ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(I)\ \ y = 7x + 8$ $(II)\ y = -2x - 1$ د برابر اینوونې لار $7x + 8 = -2x - 1 \mid +2x$ $\Leftrightarrow 9x + 8 = -1 \mid -8$ $\Leftrightarrow 9x = -9 \mid :9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1}}$	x1=-1 په (1) کې اینوونه y=7x+8 $y = 7\cdot(-1) + 8$ $\Leftrightarrow y = -7 + 8$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1}}$ حل: L={(-1|1)} ازماېښت $(I)\ \ y = 7x + 8 \Rightarrow y = 7\cdot(-1) + 8$ $\Leftrightarrow y = -7 + 8 \Leftrightarrow y = 1\ (w)$ $(II)\ y = -2x - 1 \Rightarrow y = -2\cdot(-1) - 1$ $\Leftrightarrow y = 2 - 1 \Leftrightarrow y = 1\ (w)$

بیلګه۲:

$(I)\ \ 2x + 4y = 8$ $(II)\ 2x - 5y = 35$ د جمعي تلنلار: $(II)\ 2x - 5y = 35 \mid \cdot(-1)$ $\left.\begin{array}{ll}(I) & 2x + 4y = 8 \\ (II) & -2x + 5y = -35\end{array}\right\}+$ $9y = -27 \mid 9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -3}}$	Y=3 اینوونه په (1) کې 2x+4y=8 حل: $2x - 12 = 8 \mid +12$ $\Leftrightarrow 2x = 20 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 10}}$ ازماېښت $(I)\ \ 2x + 4y = 8 \Rightarrow 2\cdot 10 + 4\cdot(-3) = 8$ $\Leftrightarrow 20 - 12 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8\ (w)$ $(II)\ 2x - 5y = 35 \Rightarrow 2\cdot 10 - 5\cdot(-3) = 35$ $\Leftrightarrow 20 + 15 = 35 \Leftrightarrow 35 = 35\ (w)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ :

X=1 په (1) کې کیږدئ x+2y=5 $1+2y=5 \mid -1$ $\Leftrightarrow 2y=4 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y=2}}$ حل: L= {(1|2)} ازماېښت $(I)\ \ x+2y=5 \Rightarrow 1+4=5$ $\Leftrightarrow 5=5\ (w)$ $(II)\ \ -x+y=1 \Rightarrow -1+2=1=35$ $\Leftrightarrow 1=1\ (w)$ w د ربښتیا لپاره	$(I)\ \ x+2y=5$ $(II)\ \ -x+y=1$ د اینوونې لار; (II) په y پسې حل کړئ $-x+y=1 \mid +x$ $\Leftrightarrow \quad y=x+1$ په (I) کې کیږدئ x+2y=5 $x+2(x+1)=5$ $\Leftrightarrow x+2x+2=5 \mid -2$ $\Leftrightarrow \quad 3x=3 \mid :3$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=1}}$

بیلګه ۴ : په لاندې: einsetzen اینوونه په (1)کې اوبیونه یا حل:Lösung
ازماېښتProbe د زیاتون یا جمعې
لار:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(I)} & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ \text{(II)} & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

$y=-5$ eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2\,|\,-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II) & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

y = −5 eingesetzt in $(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,\Big|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,\Big|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2|-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4 \\ (II) & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

$y=-5$ eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2|-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

یادونه:

مساواتسیستم د کسرونو ترمونو څخه جوړ دی. دا چې مخرج دد صفر کیدو اجازه نه لري یا نه شي صفر کیدی، تعریفست باید ورکړ شي. داسې مساواتسیستم کرښیز نه دی.

د رسمونې لار

$$(I)\qquad x-y=-2\qquad L_I=\{(-2|0);(-1|1);(0|2);(1|3);\ldots\}$$

$$(II)\ \wedge\ -2x-y=1\qquad L_{II}=\{(-2|3);(-1|1);(0|-1);(1|-3);\ldots\}$$

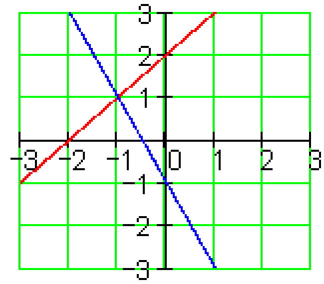
دواړه مساوات د y پسې حل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هر مساوات لپاره ارزښتجوړي د حل سټ په ګوته کوي.

کا دا په یوه کواوردیناتسیستم کې وکښل شي، نو دوه کرښې ترې لاس ته راځي. د کرښو په غوښتکي یا نقطه تقاطع کې د دواړو مساواتو حلسټ پروت دی.

حلسټ یا-دپرئ: L={(-1|1)}



$$\begin{array}{ll} (I) & x - y = -2 \mid +y \\ (II) & -2x - y = 1 \mid +y \\ \hline (I) & x = -2 + y \mid +2 \\ (II) & -2x = 1 + y \mid -1 \\ \hline (I) & x + 2 = y \Leftrightarrow y = x + 2 \\ (II) & -2x - 1 = y \Leftrightarrow y = -2x - 1 \\ \hline \end{array}$$

په هر مساوات کې د x لپاره عددونه اېښوول کيږي.

x	-2	-1	0	1
y_I	0	1	2	3
y_{II}	3	1	-1	-3

د رسموني لار د مساوات او کرښو ترمنځ هندسي(څمككچيزي) اړيکې ليدوړ کوي. د حل لار په حيث زيات وخت مناسب نه دی، چې د ګډغوښتکي کواودينات په ګرفيک کې ناتیک لوستل کيدی شي.

برابرون – يا مساواتسيستم بې له يواځني حل څخه

رسميزه حل يا درسم له لارې حل د مساوات او کرښي ترمنځ هندسي اړيکې ليدوړ کوي.

- دوه کرښې کيدی شي چې نسبت يو بل ته مختلف پروتځايونه ولري.

- دا کيدی چې په يو ټکي کې سره غوځي کړي، لکه پورته بيلګه چې ليدوړ کوي، د دواړو کرښيز مساوات لپاره ټک يو حل شتون لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دا کیدی شي یو بل سره غبرګې وي، نو په دې حالت کې کوم ټکی نه شته، چې دواړه کرښې یې یو له بل سره ګډ ولري. له دې سره اړونده مساوات له دې امله حل نه لري.

- دا کیدی شي یو په بل پرتې وي، یعنې کټمټ وي، نو هر ټکی د یوې کرښې به د بلې کرښې ټکی هم وي. نو له دې امله به دااړونده مساوات ناپای زیات حلونه ولري.

$(I)\quad 10x + 4y = 4$ $(II)\quad 5x + 2y = 1 \mid \cdot(-2)$ $\left.\begin{array}{l}(I)\quad 10x + 4y = 4\\(II)\ -10x - 4y = -2\mid\end{array}\right\}+$ 0=2 نو دا ناټیک وینا ده، له دې لاس ته را ځي{}=L	مساوات سیستم حل نه لري چې دا د حل پیل مو یوه . لیدوړ دا په دې معنا دی، ې ځغلي او کوم ګډ ټکی نه لري.

دا مساواتسیستم ناپای ډېر ځوابونه یا حلونه لري

$(I)\quad 10x + 4y = 2$ $(II)\quad 5x + 2y = 1 \mid \cdot(-2)$ $\left.\begin{array}{l}(I)\quad 10x + 4y = 2\\(II)\ -10x - 4y = -2\mid\end{array}\right\}+$ 0=0 له دې لاس ته راځي ربښتیا وینا	د ورته بڼه بدلون وروسته د مساوات (I) او مساوات (II) جمعه کونې یو بل سره پورته کوي یا له منځه وړي، دا په دې معنا چې مساوات ورته یا ایدنتیک دي. هره د اعدادو جوړه، چې مساوات (I) پوره کوي،دا مساوات (II)هم پوره کوي. لیدوړ دا په دې معنا دی، چې کرښې یو په بل پرتې دي.

پوښتنې

مساواتسیستم I

مساوات سیستم ته د دوه متحولو سره ګډوله پوښتنې، کرښیزمساواتسیستم، سیستم د کسري ترمونو سره او شي پوښتنې(د متن سره پ،ښتنې)

لومړی: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف- $\begin{cases} (I) & 5y - 3x = 1 \\ (II) & x = y + 1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} (I) & 4x + 5y = 32 \\ (II) & y = 5x - 11 \end{cases}$

پ- $\begin{cases} (I) & 15y - 4x = -50 \\ (II) & x = y + 7 \end{cases}$ ت - $\begin{cases} (I) & 3x = y + 15 \\ (II) & 2y - 10 = 2x \end{cases}$

د ویم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $\begin{cases} (I) & 2y = 2x - 40 \\ (II) & 3x = 10 - 2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} (I) & \frac{x}{2} - \frac{3y}{5} = 3 \\ (II) & \frac{x}{4} + y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (I) & \frac{2x}{15} + \frac{7y}{12} = 3 \\ (II) & \frac{7x}{25} - \frac{5y}{16} = \frac{3}{20} \end{cases}$ d) $\begin{cases} (I) & \frac{x+5}{y-7} = \frac{4}{3} \\ (II) & \frac{x+2}{y-5} = \frac{5}{8} \end{cases}$

دریم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $\begin{cases} (I) & \frac{4}{3x+1} = \frac{2}{3y-13} \\ (II) & \frac{2}{5x-10} = \frac{4}{7y-6} \end{cases}$ b) $\begin{cases} (I) & \frac{7}{x} - \frac{12}{y} = \frac{5}{6} \\ (II) & \frac{4}{y} + \frac{5}{2} = \frac{9}{x} \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c)

$$\text{(I)}\quad \frac{4}{x}+\frac{8}{y}=\frac{5}{3}$$

$$\text{(II)}\quad \frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-\frac{1}{6}$$

d)

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{2x-1}-\frac{8}{3y+2}=-\frac{1}{5}$$

$$\text{(II)}\quad \frac{5}{2x-1}+\frac{4}{3y+2}=\frac{8}{15}$$

څلورم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

$$\text{(I)}\quad \frac{7}{2x-5}-\frac{9}{7y+5}=\frac{10}{3}\qquad\qquad \text{(II)}\quad \frac{24}{2x-5}+\frac{15}{7y+5}=\frac{19}{3}$$

پنځم: یو پلار په دې لحضه کې څلورواره دومره عمر لري لکه ځوي يې او په ۵ کاله کې به فقط درې واره دومره عمر ولري. دا دواړه همدا اوس څومره عمر لري؟

شپږم: په کوم وخا کې به یو (اوبه) ساتونی (بیلر؟) له دوه نلونو څخه نیمم ډک شي، چې لومړی نل د ټول ساتوني د ډکولو لپاره ۱۸ دقیقې اودویم د دې لپاره ۲۲ دقیقو ته اړتیا ولري یا په کار ولري؟

اوم: د یوه مستېيل یا ولاړکونجيزچاپيريال یا محیط ۱۸۰ سانتي متره دی. اړخa څومره اوږد دی، که اړخ b ۳۰ سانتي متره وي؟

اتم: که د دوه ارزښتځاییزه پرته جمعه یا پروت زیاتون عدد9 دی. که ارزښتونه بدل شي، نو نوی عدد لاس ته راځي چې د زاړه عدد 7/4 ده. دواړه ځا ارزښتونه څومره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

توان- يا پوتنځ توابع

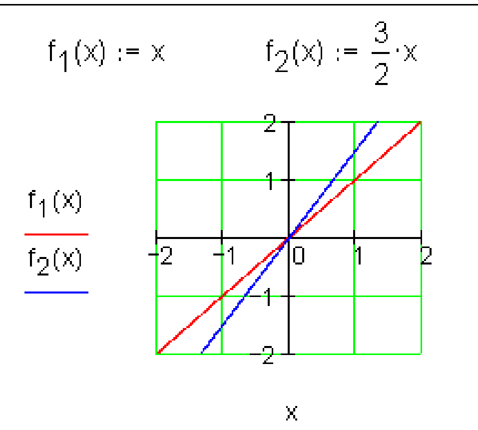
توان توابع

تعريف:

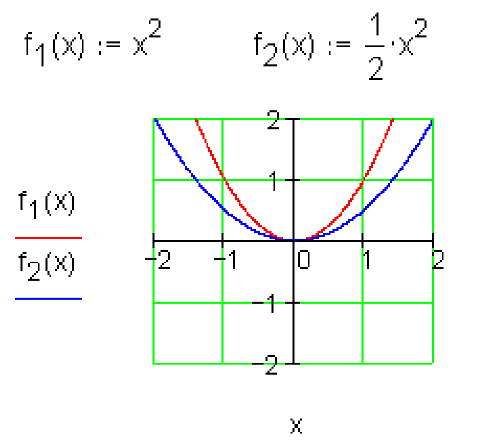
يوه تابع د تابع مساوات $f(x) = a_n x^n \quad ; n \in \mathbb{N} \quad ; a_n \in \mathbb{R}$ سره پوتنځ تابع بلل کيږي.

د n اکپوننت يا جګعدد د پوتنځ تابع درجه ټاکي او ضريب an د ګراف بڼه يا فورم او هغه د بنې ضريب بلل کيږي.

بيلګې:

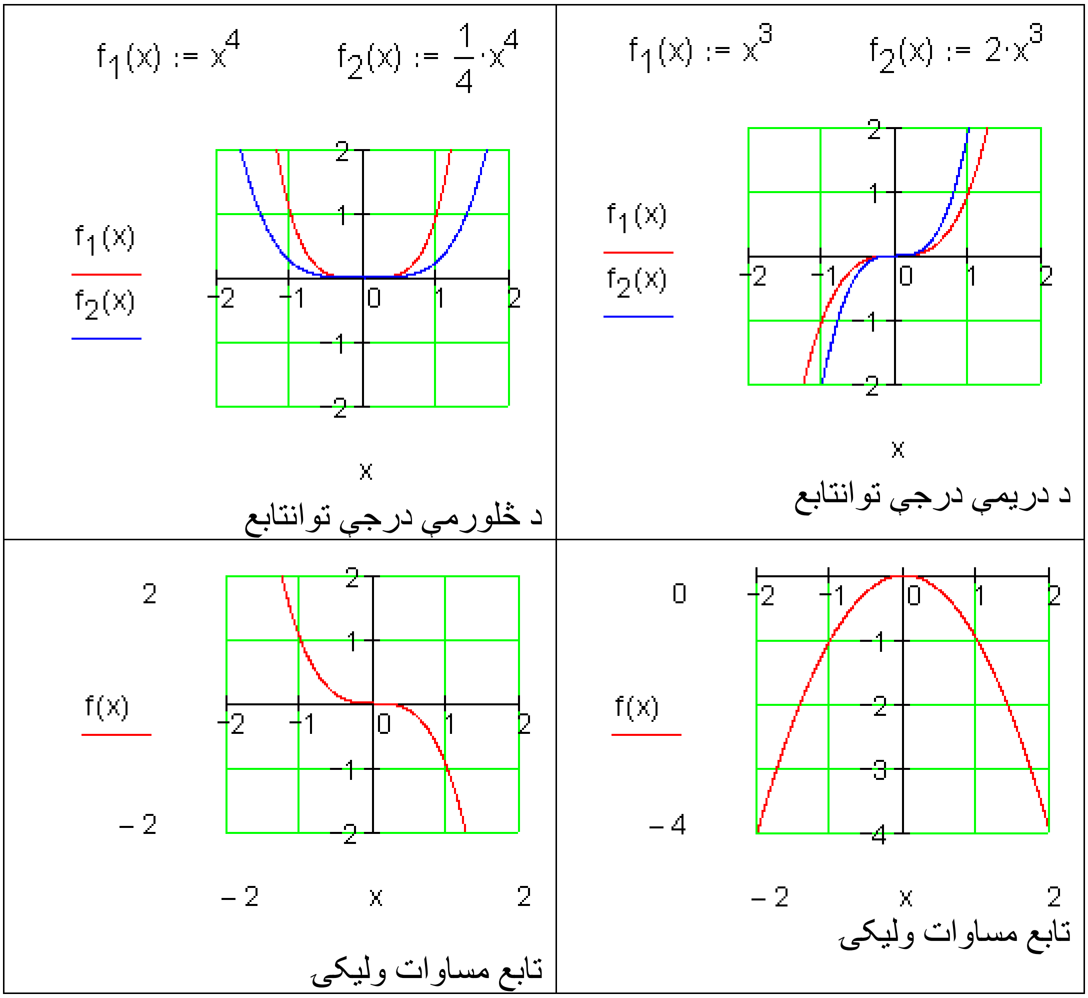


د لومړۍ دزجې توان تابع(کرښه)



د دويمې درجې توان تابع (پارابول)

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دریمي درجي توانتابع

د خلورمي درجي توانتابع

تابع مساوات ولیکی

تابع مساوات ولیکی

لاندې پوښتنې ځواب کړی:

ب – د n درجه او د a_n مخنښه د ګراف په تلنه کومه اغیزه لري؟

پ – د پوتنخ تابع n درجه د ګراف په سیومتري کومه اغیزه لري؟

ت – د پوتنخ تابع د n په واکولي او د a_n مخنښي له امله کوم ارزښتسټ(ارزښتډېرى) لري؟

ټ - د a_n مطلق ارزښت د ګراف په تلنه کوم اِیز لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه لږ وروسته راځي.

سيومتري

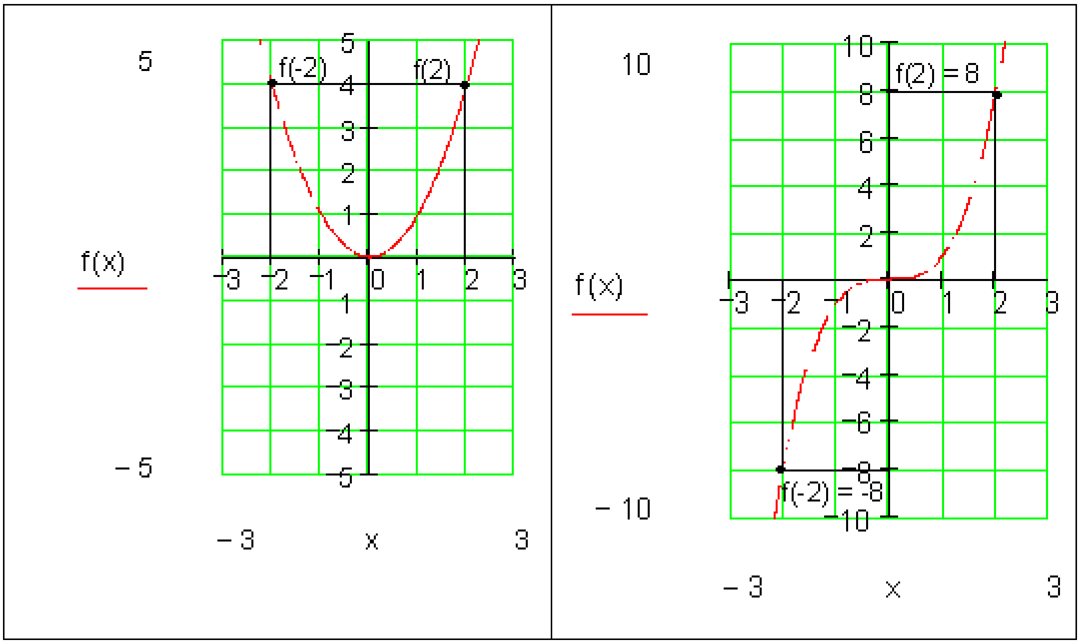
په سيومتري څنګه قضاوت کيدی شي، که څوک فقط د يوه توان(پوتنځ) تابع تابع مساوات پيژني؟

د دې لپاره د لاندې توابعو ګرافونه کاږو:

$f(x) = x^3$ او $f(x)=x^2$

او تابع د $x=-2$ او $x=2$ په ځايونو کې تر څيړنې لاندې نيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګومان مو نږدې دی چې لاندې باور لري:

د x د جوړه جګعدد سره د تابع ارزښتونه برابر دي. دا په دې معنا چې :

محورسيمتريک، نو $f(-x) = f(x)$

د x ناجوړه(طاقو) جګعددونو لپاره د تابع ارزښت برابر مطلق قيمت لري، مګر متضادې مختخښې لري.

دا په دې معنا چې:

ټکی سيومتريک، نو $f(-x) = -f(x)$

دا اړيکې د ټولو تانتوابعو لپاره باور لري (بې له ښوونې).

د يوه توان - يا طاقت تابع محورسيومتريک دی، که د ټولو $x \in D$ ؛ لپاره باور ولري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه توانتابع ګراف ټکی سیمتریک دی،که د ټولو $x \in D$؛ لپاره باور ولري $f(-x)= - f(x)$

ټولګه:

د $a_n > 0$ لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سیومتریک دي. دا له II د I. ځلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکیسیومتریک دي. دوی له III.او I. ځلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

د ټولو 0 > لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سیومتریک دي. دا له III د IV. ځلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکیسیومتریک دي. دوی له II.او IV. ځلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

تمرینونه:

د توان تابع خویونه.

د لاندې توانتوابعو درجه وټاکی، په سیمتریکي حالت، د ګراف په تلنه او او ارزښت دېرې یې یوه وینا وکړی د د هر ګراف یې په پروت ولاړسیستم (کواوردینات سیستم) کې رسم کړی.

لومړی - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ دویم - $f(x) = \frac{1}{4}x$

دریم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^4$ څلورم - $f(x) = \frac{1}{5}x^3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^5$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^3$ اتم - $f(x) = 2x^2$

نهم - $f(x) = \frac{1}{5}x^4$ لسم - $f(x) = -\frac{2}{5}x^4$

کرښيز ې توابع د ورکړشوو شرايطو سره

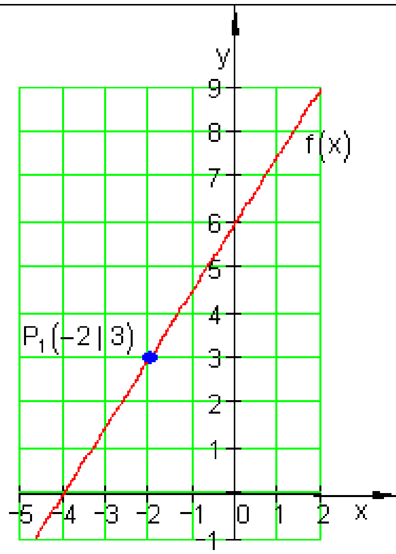
. لومړی حالت : د P تکي څخه تيرې کرښې د a_1 جګوالي سره

بيلګه:

يوه کرښه د a_1 د جګوالي سره د $P_1(x_1 \mid y_1)$ په تکي کې ځغلي.

د $f(x) = a_1x + a.$ تابع مساوات دې پيدا شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	جګوالی: $a_1 = 1,5$: ټکی $P_1(-2\|3)$ وتونمساوات $f(x) = a_1x + a_0$ جګوالی ځای په ځای کړی $f(x) = 1,5 \cdot x + a_0$ د a_0 لپاره دې ارزښت وشمیرل شي. د $P_1(-2\|3)$: لپاره ازمايښت $f(-2) = 3 \Leftrightarrow 1,5 \cdot (-2) + a_0 = 3$ $\Leftrightarrow -3 + a_0 = 3 \| +3$ $\Leftrightarrow a_0 = 6$ د تابع مساوات $f(x) = 1,5 \cdot x + 6$ ازمايښت: $P_1(-2\|3) \Leftrightarrow f(-2) = 3$ $f(-2) = 1,5 \cdot (-2) + 6 = -3 + 6 = 3$

بیلګه:

د حیواناتو ساتونکی د وښو اوتومات څخه د روځې 7,5 kg خوراک شته. دولس روځې، وروسته له هغې چې زیرمه له غذايي موادو ډکه شوې وه، هلته نور 250 kg پاتې دي.

الف - یو تابع مساوات ولیکی، چې دا حالت تشریح کړي

ب - په څومره سټ یا ډیری به دا د وښو زیرمه دولس ورځې د مخه ډکه شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل و الف ته - دx محور: وخت په ورځو

y محور : د وښو زېرمه په کيلوګرامkg .

$f(x) = -7{,}5x + a_0$

$P(12 \mid 250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7{,}5 \cdot 12 + a_0 = 250$

$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 \mid +90$

$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow f(x) = -7{,}5x + 340$

حل و ب ته- د ډکيدنې وخت x = 0 دی.

$\Rightarrow f(0) = -7{,}5 \cdot 0 + 340 = 340$

د وښو شتون دولس12 ورځې د مخه په 340 kg ډک شوی .

لکه څنګه په لومړي حالت کې چې د يوې کرښې جګوالی او يو ټکی معلوم دي، شمېرنه په همغه ډول د ورکړشوو داتن يا داتا Daten سره مخ ته ځي.

په داسې حالت کې شميرنه تويزه سرته رسيږي. دا مو بيا يو فرمول ته لاربنوده وي.

يوه کرښه دa_1 جګوالي سره د$P_1(x_1 \mid y_1)$ ټکي څخه تيريږي.

د کرښمساواتو ټوليز فرمول دی: $f(x) = a_1x + a_0$

$P_1(x_1 \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 \mid -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$

$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$

$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$

دا د ټکی - جګوالي فرمول هم بلل کيږي.

بيلګه:

په $a_1 = -2; P_1(-3 \mid 4)$ کې ځا په ځای کړی $f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$:

$f(x) = -2(x - (-3)) + 4 = -2(x + 3) + 4 = -2x - 6 + 4 = -2x - 2$

.

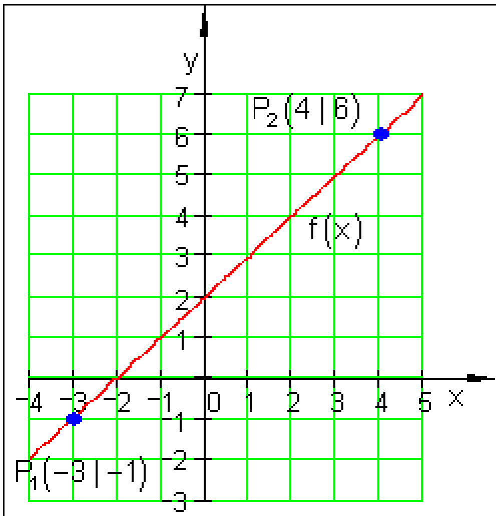
(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت: کرښه له دوه ټکو تیرېږي

بیلګه:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په یوه کرښه پراته دي.

د $f(x) = a_1x + a_0$ تابع مساوات غواړو پیداکړو.



$P_1(-3\mid -1)$ $P_2(4\mid 6)$

وتونمساوات: $f(x) = a_1x + a_0$

د جګوالي ټاکنه:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-1)}{4-(-3)} = \frac{6+1}{4+3} = \frac{7}{7} = 1$$

جګوالی وضعه کړی $f(x) = 1 \cdot x + a_0$

وروسته له دې چې جګیدنه معلومه شوه، دا پوښتنه داسې حل کیږي لکه په لومړي حالت کې.

د ټکو ازمایښت لپاره بې پروا ده چې د دې لپاره کوم ټکي کارول کیږي، ځکه چې دواړه ټکي به په کرښه پراته وي.

د ټکو ازمایښت د $P_2(4\mid 6)$ یا P_1 لپاره

$$P_2(4\mid 6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1\cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فزیک څخه پوهیږو چې د حرارت معلومولو (ګرمۍ کچونې) لپاره مختلفې دد حرارت سکالا کارول کیږي. د څلزیوس سکالاCelsiusskala او د فارنهایټ سکالا Fahrenheitskala

د دواړو ترمنځ کرښیزې اړیکې موجود دي.

$100\,^0C$ برابری دي د ^0F 212 سره . $0\,^0C$ برابر د ی په $32\,^0F$ سره.

د یوه تابع مساوات غواړو پیداکړو، چې د هغې په مرسته ^0C په ^0F اړول کیږي.

خپلواکه متحوله x په ^0C او بلواکه یا تابع متحوله $y = f(x)$ په ^0F .

ځګوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$$

$$P_1(0 \mid 32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

په بدل شوی تابع x په C° کې کیږدی نتیجه یې ده.

د بیلګې په دول:

$$x = 20\,^0C : f(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20\,^0C \triangleq 68\,^0F$$

د دویم حالت لپاره هم کیدی شي شمیرنه په ټولیزه توګه مخ ته بوتلی شی:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په یوه کرښه پراته دي.

د مساواتو عمومي بڼه ده:. $f(x) = a_1x + a_0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګوالی: $$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0$$

$$P_1(x_x \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 =$$

$$= y_1 \mid - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

دا په دوه ټکو کې د کرښيزږومساواتو يو توليزه بڼه ده .

په زياتو ادبياتو کې په لاندې ډول ده:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; ; x_1 \neq x_2$$ چيرته چې $y = f(x)$ باور لري.

د عملي کاروني لپاره لاندې بڼه مساعده ده:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

بيلګه:

$P_1(2 \mid -1); P_2(-3 \mid 2)$ په $f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ کې ځای په ځای کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{2-(-1)}{-3-2}(x-2)+(-1)=\frac{2+1}{-5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}-\frac{5}{5}$$
$$=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$$

تمرین:

د ^0F په ^0C باندې شمیرنې لپاره یو تابع مساوات ولیکئ

2.2.3.تمرین: د تابعمساواتو شمیرنه

یو کرښیز مساوات د a_1 جګوالی لري او د P له ټکي تیریږي.

د f(x) تابعمساوات معلوم کړئ او د محورونو قاطع ټکي یا غوځټکي او ګراف انځور کړئ

اول - $P(2|-2)$ $a_1=\frac{1}{2}$ دویم - $P(-1|3)$ $a_1=\frac{3}{4}$

دریم - $P(3|-1)$ $a_1=2$ څلورم - $P\left(\frac{3}{2}\middle|4\right)$ $a_1=\frac{4}{5}$

یوه کرښه له ټکو P_1 او P_2 تیریږي.

د f(x) تابع مساوات پیدا کړئ او د محور قاطع ټکي او ګراف رسم کړئ.

پنځم - $P_2(5|4)$ $P_1(2|1)$ شپږم - $P_2(2|3)$ $P_1(-3|-2)$

اوم - $P_2(4|-1)$ $P_1(-2|3)$ اتم - $P_2(3|1)$ $P_1(-4|-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $P_2(4 \mid -1)$ $P_1\left(-3 \,\middle|\, \frac{9}{2}\right)$ لسم - $P_2\left(\frac{7}{2} \,\middle|\, 4\right)$ $P_1(-4 \mid -2)$

. د کرښبرابروتو ځانګړی حالت:

د x- محور سره غبرګ کرښه:

$f(x) = a_0 ; a_0 \in \mathbb{R}$

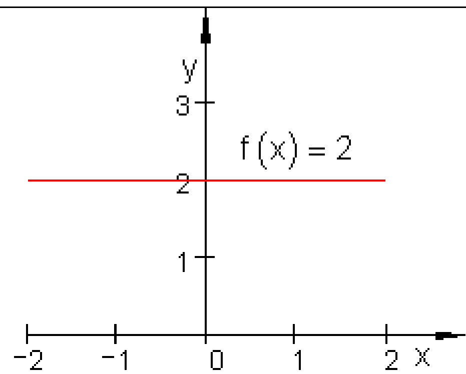
یو د 0 درجې تام راشنل تابع ده او

ثابته تابع هم بلل کیږي.

x- محور هم یوه ثابته تابع ده د

تابع مساوات $f(x) = 0$ سره.

د ثابتې تابع جګوالی تل صفر دی.



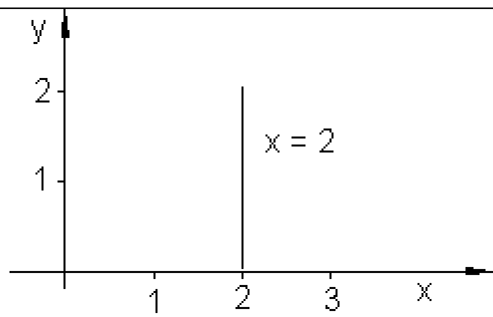
د y- محور سره غبرګه.

$x = a ; a \in \mathbb{R}$

کرښه د محور سره غبرګه (موازي) ځغلي.

دا د یوه تابع مساوات سره نه شي لیکل کیدی، ځکه چې یواځنی تنظیم نه شته یعني تابع نه ده.

$x = 0$ دy - محور مساوات دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

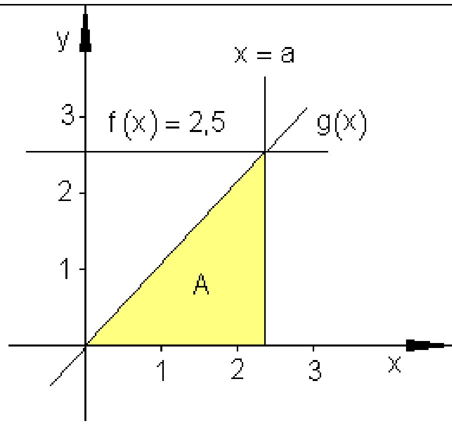
بیلګه:

یو $f(x) = 2,5$ ور کړ شوی او y- محور سره موازي دa واټن د $a > 0$ سره.

یوه سرچینییزه کرښه g د($P(a \mid f(x))$ ټکي څخه تیریږي.

دا دx - محور او د y- محور سره غبرګې کرښې سره یو مثلث جوړوي.

a داسې وټاکئ چې وسطحه د سطحې څلور واحدونه (یوونونهFE) جوړ کړي. د دې حالت لپاره د(g(x تابع مساوات څنګه دي؟



$A = \frac{g \cdot h}{2}$ د $g = a$ او

$h = f(x) = 2,5$ سره

د مثلث سطه $\Rightarrow A = \frac{2,5 \cdot a}{2} = \frac{5}{4}a$

$A = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4}a = 4 \mid \cdot \frac{4}{5} \Leftrightarrow a = \frac{16}{5}$

(ځکه چې د سرچیني کرښه $g(x) = a_1 x \ (a_0 = 0$

د جګېدو له مثلث ځخه $a_1 = \frac{5}{2} : \frac{16}{5} = \frac{25}{32}$

د تابع مساوات : $g(x) = \frac{25}{32}x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین: د ^0F بدلون شمیرنه په ^0C لپاره د تابع مساوات ولیکئ

حل :

د ^0C اړونه یا بدلون په^0F د متحولي لپاره دا معنا لري:

x په ^0F مستقله یا خپلواکه متحوله ده او $y = f(x)$ په^0C بلواکه یا تابع متحوله ده.

$$212\,^0F \triangleq 100\,^0C \Rightarrow P_1(212\,|\,100)$$ او $$32\,^0F \triangleq 0\,^0C \Rightarrow P_1(32\,|\,0)$$

دا چې د حرارت الو ترمنځ یوه کرښیزه ا ړیکه پرته ده، نو ټکي P_1 اوP_2 په یوه کرښه پراته دي.

د کرښي عمومي کرښیزه بڼه په دې ډول ده:.$f(x) = a_1x + a_0$

دلته ضریبونه a_1 او a_0 د ټاکلو دي.

جګوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100-0}{212-32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0$$

ټکي ازمایښت د $P_1(32\,|\,0)$ سره.

$$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9}\cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{8} + a_0 = 0\,|-\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x-32)$$

د ^0F اړونې په ^0C لپاره باور لري.

$$^0F \text{ in } ^0C \text{ gilt: } f(x) = \frac{5}{9}(x-32)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

xپه ^{0}F او y په ^{0}C .

پوښتني:

کرښيزي توابع III

لومړی: د g کرښو مساوات وټاکی

الف: $P_1(-4|-2)$ او $P_2(2|0)$ په g پراته دي،

ب- g په $P_1(-3|1)$ او $P_2\left(1|\frac{11}{3}\right)$ کي ځغلي

پ- $P_1(1|-2)$ او $P_2(-2|10)$ په g پراته دي

ت- g محورونه په x = 2 او y = 6 کي غوڅوي(قطع کوي)

ټ-g له P(-6;1)) تيرېږي او له h سره غبرګ دی د $h(x)=-\frac{2}{3}x+2$ مساوات سره

ث- g جګوالی $a_1=-4,5$ لري او له P(1;1,5) څخه تيرېږي.

ج- g جګوالی $a_1=3$ لري او له P(1;,1,5) څخه تيرېږي

چ- g دx محور په x = 3 کي غوځوي او د hکرښه د h(x) = 4x - 2 سره په x = -1 کي غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم: د دوه کرښو g او h کرښیز مساوات پیدا کړی، چې له ټکی P(3;-2) تیرېږي.

دریم: یوه کرښه g د کرښیز تابع f(x) سره پیدا کړی، چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي او تابع مساوات وټاکی.

الف- $P_1(1,5 \mid 3); P_2(3 \mid 2,5)$ ب - $P_1(-3 \mid 5); P_2(1 \mid 2,5)$

پ- $P_1(4 \mid 0); P_2(-1 \mid -\sqrt{2})$ ت - $P_1(k \mid 3); P_2(2k \mid -1)$

ټ - $P_1(1 \mid 0); P_2(-1 \mid k+1)$ ث - $P_1(2\sqrt{k} \mid \sqrt{2k}); P_2(\sqrt{k} \mid 0)$

ځلورم: د f(x) کرښیزې تابع مساوات وټاکی.که معلوم وي:

الف-کرښه د $a_1 = \frac{5}{4}$ جګیدنې سره له P(4;-1) څخه تیرېږي.

ب-کرښه له ټکو $P_1(-5 \mid -3)$ او $P_2(0 \mid 3)$ څخه تیرېږي.
پ-کرښه له P(4,5;2,7) ټکي تیرېږي. او د x محور سره 45° مایله ده.

ت-کرښه له P(-1,5;0) تیرېږي او د h(x) = 2x+2 سره غبرګه (موازي) ده.

پنځم: کر ښه g و کاږی او کرښیز مساوات وټاکی.

الف- $P(3 \mid -1) \in g$ او g دy محور سره غبر؛(موازي) څغلي.

ب- $P(3,5 \mid 2,5) \in g$ او g دx محور سره موازي څغلي.

پ- g له P(-5;1)تېرېږي او د $h(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ سره موازي ده.

ت- g له $P\left(1 \mid \frac{3}{2}\right)$ تېرېږي او د کرښو سره چې له ټکو $P_1(-2 \mid -3)$ او $P_2\left(\frac{3}{2} \mid -5\right)$ تېرېږي، موازي څغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

کرښیز مساوات VI

لومړی –

د لاندې کرښیزو توابعو ګرافونه و کاږئ او د ارزښت سټ یا – دېرئ W و ټاکئ

الف- $f(x) = -2x + 2;\ D = \{x \mid -3 \le x \le 5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4};\ D = \{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3;\ D = \{x \mid -2 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x) = 3x - 6;\ D = \{x \mid -1 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

دویم –

ټکی P_1 او P_2 ورکړ شوي، چې په کرښه پراته دي. د f (x) تابعمساوات پیدا کړئ او ګراف یې وکاږئ

الف- $P_1(3 \mid 4);\ P_2(7 \mid -1);\ D = \{x \mid 0 \le x \le 7\}_{\mathbb{R}}$

ب - $P_1(-8 \mid 1);\ P_2(2 \mid -3);\ D = \{x \mid -8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

پ - $P_1(4 \mid 3);\ P_2(-7 \mid -1);\ D = \{x \mid -7 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $P_1(-4 \mid -4);\ P_2(4 \mid 2);\ D = \{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

دریم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې مساواتو حلسټ يا حلډېرۍ پيداکړئ. مساوات چې کسرى راشنل ترمونه ولري، بايد د هغو تعريفورشو هم ورکړل شي.

الف- $x-5=9$ ب - $8+x=25$ پ - $x-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$ ت - $\frac{5}{9}=x-\frac{1}{3}$

ټ - $88=4x-16$ ث - $a+bx=3b+a$ ج - $8-(x+5)=2$

چ - $9+(5-x)=6$ ح = $(x-6)(x+3)=(x-5)(x-2)$ خ -

څ - $(x+3)(x+7)=(x+2)(x+9)$ $\frac{x}{4}+\frac{5x}{6}+\frac{5}{6}=\frac{x}{2}+x$

ځ - $\frac{3}{2x}+\frac{2}{3x}=\frac{1}{9}+\frac{7}{3x}$ د - $\frac{ax}{b}-\frac{b}{ac}=\frac{a}{bc}-\frac{bx}{a}$ ډ - $\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}=a$

ذ- $23a-\{5ax-[9ax+(12a-6ax)]-(3a-8ax)\}-15a=5ax-7a$

څلورم:د لاندې توابعو د محورونو سره د تقاطع ټکي هم پيدا کړئ.

الف- $f(x)=2x-7$ ب - $f(x)=-2x+6$ پ - $f(x)=3x-3$

ت - $f(x)=2x+\frac{2}{3}$ ټ - $f(x)=\frac{3}{4}x+2$ ث - $f(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}$

ج - $f(x)=3,5x+\frac{1}{2}$ چ – $f(x)=-2,5x+2\frac{1}{2}$ ح - $f(x)=1\frac{3}{4}x-3\frac{2}{3}$

پنځم: د يوې کرښې دوه ټکي P_1 اوP_2 ورکړ شوي د لاندې توابعو له I تر IV لپاروه وټاکئ:

I. $P_1(3\mid 4);P_2(7\mid -1);D=\{x|-2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

II. $P_1(-8\mid 1);P_2(2\mid -3);D=\{x|-8\le x\le 2\}_{\mathbb{R}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

III. $P_1(4 \mid 3);\ P_2(-7 \mid -1);\ D=\{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

IV. $P_1(4 \mid 2);\ P_2(-4 \mid -4);\ D=\{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

الف-   د جګیدنې ضریب.m

ب - د کرښې تابعمساوات

پ - دy محور سره د تقاطع ټکی P_y

ت - د تقاطع ټکی P_y د x محور سره

ټ - په W باندې ارزښتډېری .W

ث - په D کې د تابع ګراف

شپږم: لاندې مساواتسیستمونه حل کړی:

الف- $\begin{cases} \text{I} & 5y-3x=1 \\ \text{II} & x=y+1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} \text{I} & 4x+5y=32 \\ \text{II} & y=5x-11 \end{cases}$ پ - $\begin{cases} \text{I} & 15y-4x=-50 \\ \text{II} & x=y+7 \end{cases}$

ت - $\begin{cases} \text{I} & 3x=y+15 \\ \text{II} & 2y-10=2x \end{cases}$ ټ - $\begin{cases} \text{I} & 2y=2x-40 \\ \text{II} & 3x=10-2y \end{cases}$ ث - $\begin{cases} \text{I} & x+y=a+b \\ \text{II} & x-y=a-b \end{cases}$

پوښتنې

کرښیز مساوات IX

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:کرښه g له ټکو P1(4;-3,5) او P2(2,5;-1) تیریږي.

کرښه h له ټکو $P_3(5|2,5)$ او $P_4\left(\frac{3}{2}|\frac{25}{3}\right)$. تیریږي.

کرښې یو بل ته څه موقعیت لري یا څنګه پرتې دي؟

دویم:د f(x) کرښیزې تابع د تابع ترم او ارزښتساحه(ارزښتورشو) و ټاکی، که صدق ولري:

الف- $f(0)=20\,;\,f(12)=32\,;\,x>0$ ب- $f(-3)=6\,;\,f(2)=-8\,;\,x\in[-3\,;\,3]$

دریم:

د f(x)کرښیزې تابع ګراف په 3 LE اوږدوالی واحده کینې لور

ته خوزیږي. د راکښل شوې کرښې د f*(x) مساوات څنګه دي؟

$$f(x)=\frac{5}{3}x-2 \quad D=\mathbb{R}$$

څلورم: د f(x) او g(x) توابع ورکړ شوې دي. د کوم ارزښت لپاره f(x) > g(x) صدق کوي؟

$f(x)=2x-3 \quad ; \quad g(x)=-0,5x+1 \quad x\in\mathbb{R}$

پنځم: یوه g(x)کرښه ورکړ شوې.. دا د یوې کرښې h(x) له خوا قطع کیږي. د h(x)مساوات وټاکی، که باور ولري: $g(x)=-3x+2$

الف- قاطع یا غوڅی دx محور سره . ب - قاطع(غوڅی) په x = -5 کې

شپږم:

یوه د پیل کرښه د $a_1=-0,125$ جګوالي سره و داسی کښنول کیږي. چې کرښه h د مساوات	$h(x)=-1,5(x-2)$;

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره د x په محور قطع کوي. راکښنه تشریح کړئ او د راکښل شوې کرښې ګراف و کاږئ.	

اوم: یوه $f(x)$کرښیزه تابع ورکړ شوې. کرښه د $x = u$ مساوات سره د $f(x)$ ګراف په P کې قطع کوي او د x محور په Q کې قطع کوي. یوه سکیڅې ترتیب کړئ.

الف- د P او Q کواوردینات وټاکئ، که $f(x) = 0,75x + 2$ وي.

ب- دu د کوم ارزښت لپاره P دx محور پورته لور ته پرته ده.

ت- $P(u \mid f(u))$ په 1 څلوری یا ربع کې پروت دی.Q, $R(0 \mid 0)$ اوP د یوه مثلث رآسونه (ککرتکې)جوړوي. د دې مثلث د مساحت A لپاره ترم وټاکئ. u (محیط) داسې وټاکئ، چې $A(u) = 10$ صدق وکړي.

اتم: دg کرښې ته موازي او عمود مساوات داسې وټاکئ، چې له P ټکي تیر شي.

الف- $g: x + 2 - 3y = 0; P(0 \mid 3)$ ب- $g(x) = \frac{2}{3}x - 3; P(1 \mid 4)$

پ - $g(x) = -1,5kx; P(1 \mid 0)$

نهم: کرښه g له ټکوP_1 اوP_2 تیریږي. دh کرښې ته یې ځای مطالعه کړئ او د امکان په حالت کې یې د قاطع ټکئ معلوم کړئ.

$$P_1(-1 \mid 1,5); P_2(-2 \mid -2,5) \qquad h: \ -x - 6 - 4y = 0$$

لسم: و ښایئ: کرښه g او کرښه h عمود دي.

$$g: \ y - \sqrt{2}x = 1 \qquad h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0$$

$$g(x) = -3x + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يولسم:

د A, B او C ټکي د يوه مثلث د رآس ټکي دي. د$k > 0$ د کوم ارزښت لپاره دا مثلث قايم الزاويه (ولاړګوډيز) دی؟ (ښی رآس په C پروت دی)	$A\left(\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right); B\left(-\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right); C(0\mid k)$

پوښتې

کرښيز توابع **XI**

لومړی-

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}; f_2(x) = -4x - 2; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع $f_1(x)$ سره د دويمې کرښې د تابع$f_2(x)$ سره غوځيږي. وټاکی:

الف – د کواورديناتونو x_s او y_s سره غوڅټکی S .

ب – د دواړو کرښو غوڅټکي د y محور سره .

پ – د دواړو کرښو غوڅټکي دx محور سره .

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې .

دويم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4;\ D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کربښه له تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(3 \mid y_s)$ کې د تابع $f_2(x)$ سره له کربښې څخه غوڅیږي.

وټاکئ:

الف-د S پوره کواودينات

ب-تابع $f_2(x)$. .

پ-د دواړو کربښو غوڅټکي د کواوردينات محورونو سره.

ت-په D کې د دواړو توابعو ګراف.

دريم:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1;\ D = \{x \mid -7 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

کربښه د تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(-4 \mid y_s)$ کې کې له کربښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې پروتمحور په 7- کې غوڅوي، غوڅیږي.

وټاکئ:

الف – د S پوره کواوردينات.

ب – تابع $f_2(x)$.

پ – د دواړو کربښو غوڅټکي د کواودينات د محورونو سره.

ت – د واړو توابعو ګراف په D کې..

څلورم –

د يوه دربېکوډي يا مثل ټکي P_1, P_2 او P_3 ورکړ شوي دي. د دربېکوډي د اړخونو تابع وټاکئ. پخوا له دې يو پلان نقشه ترتيب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(-6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(-2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(-4 \mid 3)$$

ب –

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(4 \mid 3)$$

پنځم -

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3 ; P_2(-2 \mid -3) ; D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع f_1 (x) سره د دویمې کرښې څخه د تابع f_2 (x) سره ، چې له ټکي P_2 تیریږي ، په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوځیږي.

وټاکئ:

الف - د(x) f_2 جګوالی m_2 .

ب- تابع f_2 (x) .

پ – د دواړو کرښو غوځټکی S .

ت - د دواړ کرښو محورغوځټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

کرښيز توابع XII

لومړی -

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3 ; P_2(2 \mid -3) ; D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع f_1 (x) سره له يوې دويمې کرښې د تابع f_2 (x) سره، چې له ټکي P_2 تيريږي په ټکي S کې ولاړکونجيزه غوځيږي.

وټاکئ.

لومړی:

الف – د f_2 (x) جګوالی m_2 .

ب – تابع f_2 (x) .

پ - د دواړو کرښو غوڅټکی S .

ت - د دواړو کرښو د محورغوڅټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

دويم –

د کرښې تابع f_2 (x) وټاکئ، چې پروتمحور په P_{x2} کې غوڅوي او له کرښې څخه د تابع f_1 (x) سره په S کې غوڅيږي. د واړو کرښو غوځټکي وشميرئ او د دواړو کرښو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف- $f_1(x) = \frac{3}{2}x + 6 ; P_{x2}(-6 \mid 0)$; $S\left(x_s \middle| \frac{3}{2}\right) ; D = \{x \mid -6 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 3 ; P_{x2}(4 \mid 0)$; $S(3 \mid y_s) ; D = \{x \mid -1 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

دريم -

$$P_1(-5 \mid 5) ; P_2(-1 \mid -1) ; S(x_s \mid 2) ; D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع f_1 (x) سره له ټکو P_1 او P_2 تيريږي او په ټکي S کې ولاړکونجيز له کرښې څخه د تابع f_2 (x) سره غوځيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وټاکئ:

الف- د $f_1(x)$ جګوالی m_1 .

ب – تابع $f_1(x)$.

پ – دS پوره کواوردینات.

ت – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ – تابع $f_2(x)$.

ث – د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ګرافونه

څلورم -

$$P_1(5\,|\,5);\, P_2(1\,|\,-1);\, S(3\,|\,y_s);\, D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 او P_2 څخه تیریږي او په ټکي S کې ولاړکونجیزه له کرښې د تابع $f_2(x)$ سره غوڅیږي.

وټاکئ:

الف – د $f_1(x)$ جګوالی m_1 . ب - تابع $f_1(x)$.

پ - د S پوره کواوردیناتونه ت – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ - تابع $f_2(x)$. د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ګرافونه.

پنځم -

$$f_2(x)=3x-3;\, S\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{3}{2}\right);\, D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجیزه غوڅیږي.

وټاکئ:

الف - تابع $f_1(x)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅټکي.

پ – د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پوښتنې

کرښيزې توابع برخه XIII

لومړی -

$$f_2(x)=\frac{4}{5}x+\frac{9}{10};\ S\left(2\,\middle|\,\frac{5}{2}\right);\ D=\{x\,|\,-1\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع(x) f_1 ګراف په ټکي S کې د تابع (x) f_2 له ګراف څخه ولاړکونجيز(قايم الزاويه) غوڅيږي.

وټاکی:

الف: تابع (x) f_1 .

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅټکي.

پ – د دواړو توابعو ګرافونه په D کې.

$$g:\quad y-\sqrt{2}x=1\qquad\Rightarrow g(x)=\sqrt{2}x+1$$

$$h:-2y-\sqrt{2}x+6=0\Rightarrow h(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}x+3$$

د اورتوګوناليټي شرايط: $a_{1g}=-\dfrac{1}{a_{1h}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{1g} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad q.e.d$$

دویم:

د دوه کرښنو توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ورکړشوي او د یوې دریمي کرښي جګوالی m_3 د تابع $f_3(x)$ سره. تابع $f_3(x)$ داسې وټاکئ، چې ګراف یې د نورو دواړو کرښنو غوښتکي څخه تیر شي. د دریواړو کرښنو محور غوښتکي وټاکئ او د دریواړو توابعو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف-

$$f_1(x) = -4x - 2\,;\; m_3 = \frac{1}{4}$$

$$f_2(x) = 2x + 4\,;\;\; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

ب –

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}\,;\; m_3 = -4$$

$$f_2(x) = 2x + 4\,;\;\; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

دریم: کرښه دتابع $f_1(x)$ سره له ټکي P_1 تیرېږي او له یوې دویمي کرښي چې له ټکي P_2 تیریږي په ټکي S کې غوځیږي. توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ وټاکئ د هغو محورغوښتکي اوپه D کې یې ګراف وکاږئ.

$$P_1\left(-2 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right); P_2(3 \mid 5); S\left(2 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right); D = \{x \mid -8 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

څلورم:

$$P_1\left(-1 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right); P_2\left(-3 \,\middle|\, \frac{11}{2}\right); D = \{x \mid -9 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره محور په 8- کې غوڅوي. $f_1(x)$ ته غبرګه یوه دویمه کرښه د تابع $f_2(x)$ سره پروت محور په 4- کې غوڅوي. دواړه کرښې له یوې دریمې کرښې چې تابع $f_3(x)$ لري او له ټکو P_1 او P_2 تیریږي په ټکو P_3 او P_4 کې ولاړکونجیزه(قایوم الزاویه) غوڅوي. وټاکئ:

الف- تابع $f_3(x)$ ب - تابع$f_1(x)$

پ – تابع $f_2(x)$ ت – د دریواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

$$A\left(-\frac{13}{2} \,\middle|\, -\frac{3}{2}\right); B(3 \mid 2); D=\{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د یوه قایوم الزاویه مثلث(ولاړکونجیز درې ګودي) څخه، چې ولاړ کونج(قایم الزاویه) یې پهC کې پرته ده، ټکي A اوB ورکړ شوي. د مثلث اړخ یا ضلع [BC] د تابع $f_3(x)$ سره د اوردینات یا ولاړ محور په 3 کې غوڅوي.

وټاکئ:

الف- د اړخ [AB] تابع $f_1(x)$ ب- د اړخ یا ضلعې [BC]تابع $f_3(x)$

پ- د اړخ [AC] تابع $f_2(x)$ ت- د ټکي C کواوردیناتونه

ټ په D کې ګرافونه.

پوښتنې

کرښیزې توابع **XIV**

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: $A(-8|-6); C(-1|5); D=\{x|-8 \leq x \leq 2\}_{\mathbb{R}}$

له یوه قایمالزاویه مثلث، چې قایمه زاویه یې په B پرته ده، ټکی A او C ورکړ شوي دي. د مثلث ضلع (اړخ)[BC] د اوردینات محور (ولاړمحور) په 3کې قطع کوي.

دا وټاکئ:

الف-

$[AB] = f_1 ; [BC] = f_2 ; [AC] = f_3$ د مثلث درې د ضلعو توابع.

ب- د B ټکي کواودینات یا وضعیه قیمت کې د ټکي B محورونه

پ -په D کې ګراف.

دویم:

$A(-4|-1); B(2|-4); D=\{x|-4 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}}$

د یوه مثلث ټکيA او B ورکړ شوي دي. د مثلث [BC] ضلع دy محور په 12-کې قطع کوي; ضلع [AC] د x محور په 3- کې غوڅوي.

دا وټاکئ:

الف-تابع $f_1(x)$ ضلع .[AB] قطع کوي

ب - تابع $f_2(x)$ ضلع [BC] غوڅوي.

پ - تابع $f_3(x)$ ضلع [AC]

ت - د C ټکي وضعیه قیمتونه

ټ - د D ټکي وضعیه قیمتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: توابع $y = f(x) = 3x - 4$ او $g(x) = ax + 3$ ورکړ شوي.

د دواړو توابعو ګرافونه په ټکي $S(3 \mid 5)$ کې غوڅوي.

د $h(x)$ تابع مساوات داسې وکاږئ، چې ګراف په ټکي S عمود څغلي. په یوه وضیه قیمتسیستم کې دریواړه ګرافونه رسم کړئ.

څلورم:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}\,;\ f_2(x) = -4x - 2\,;\ D = \{x \mid -10 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$$

د $f_1(x)$ تابع سره کرښه د دویمې کرښې د $f_2(x)$ تابع سره قطعه کوي.

دا وټاکئ:

الف- د S قاطع ټکی د x_s او y_s کواودینات سره.

ب - د دواړو کرښو د قاطع ټکي د x محور سره.

پ - د دواړو کرښو قاطع ټکي د x محو سره.

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

د $g(x)$ تابع ، چې په $f(x)$ عمود ده پیدا کړئ. د $g(x)$ ګراف د y محور په $P_y(0 \mid 3)$ ټکي قطع کوي. دواړه کرښې په یوه وضعیه قیمت سیستم(پروت ولاړ سیستم) کې رسم کړئ.

الف - $f(x) = -2x + 2$ ب - $f(x) = 3x - 6$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ت - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

شپږم: د دواړو کرښو غوڅټکی (نقاط تقاطع) و ټاکئ او ګراف یې وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}\,;\, f_2(x) = -4x - 2\,;\, D = \{x \mid -10 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x) = -2x + 2\,;\, f_2(x) = 3x - 6\,;\, D = \{x \mid -2 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4\,;\, f_2(x) = \frac{3}{2}x - 2\frac{1}{2}\,;\, D = \{x \mid -1 \le x \le 7\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1\,;\, f_2(x) = \frac{5}{6}x + 5\frac{5}{6}\,;\, D = \{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

n -مه درجه ټول مات- یا راشنل توابع

n -مه درجه ټول راشن لفنکشن

یو تابع $f(x)$ د

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

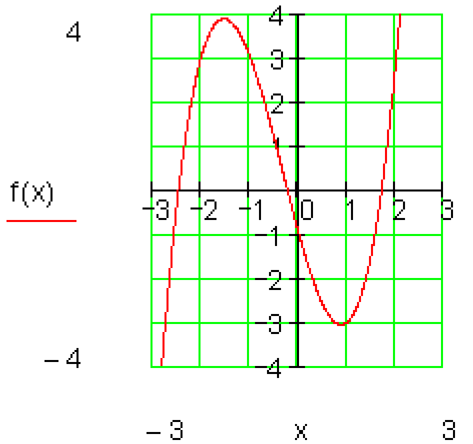
سره n -مه درجه ټول راشنل تابع بلل کيږي.

عددونه $a_n ; a_{n-1} ; a_{n-2} ; \ldots . a_2 ; a_1 ; a_0$ ضريبونه بلل کيږي.

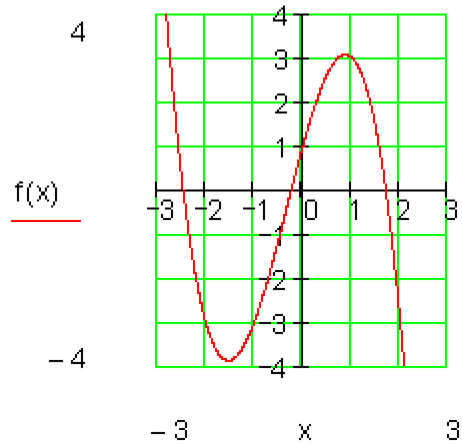
ټول راشنل یا هوښیار توابع د توان توابعو یوځای اینوولو له لارې لاس ته راځي.

بیلګې:

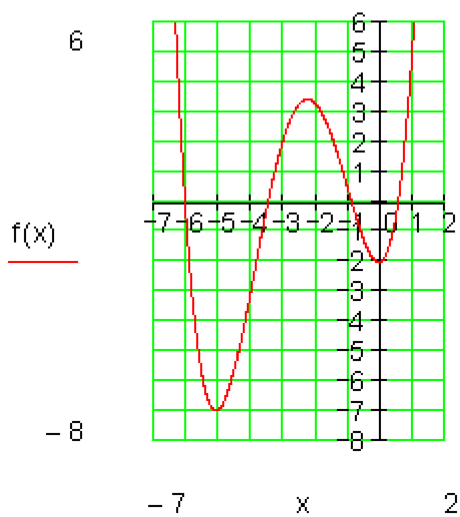
(c) ketabton.com: The Digital Library



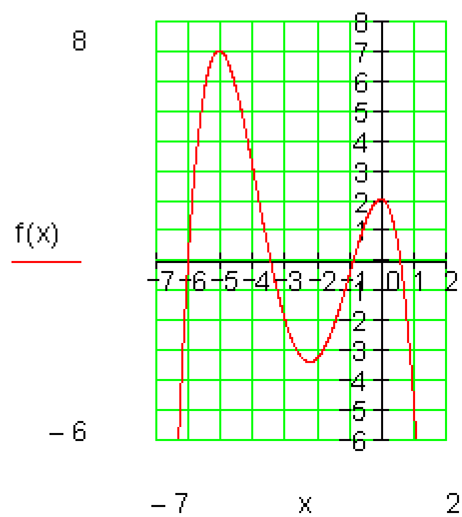
$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$



$f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 1$



$f(x) = 0,2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x - 2$



$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x + 2$

د ګراف تلنه

جمله:

د ټول راشنل تابع ګراف تلنه د خورا جګ توان زیاته ووني (د جمعي غړي) سره ټاکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	n جوړه	n ناجوړه(طاق)
$a_n>0$	تلنه له II و I ته.	تلنه له III و I ته.
$a_n<0$	تلنه له III و IV ته.	تلنه له II و IV ته.

بيلګه: د الماي پېنتو: ناجوړه(طاق) جوړه (جفت) ناجوړه

$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7 \qquad n = 3\,(\text{ungerade}) \wedge a_n = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - I}}$

$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7 \qquad n = 4\,(\text{gerade}) \wedge a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - IV}}$

$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9 \qquad n = 5\,(\text{ungerade}) \wedge a_n = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$

سيومتري

ګومان مو نږدې دی، هغه توابع، چې فقط د جوړه جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، محور سيومتريک دي او توابع چې فقط د ناجوړه(طاقو) جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، ټکی سيومتريک دي.

جمله

د يوه ټولراشنل تابع ګراف تيم هلته محورسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط جوړه جګعددونه ولري.

د يوه ټولراشنل تابع ګراف ټيک هلته ټکيسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط ناجوړه (طاق) جګعددونه ولري.

بيلګه:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

$$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$$

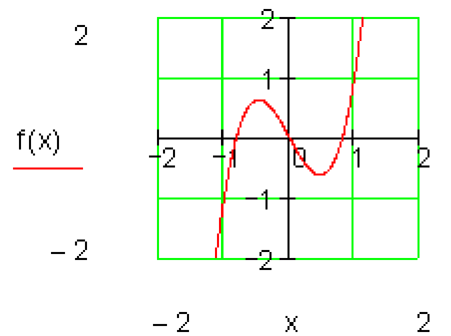
(c) ketabton.com: The Digital Library

محورسیومتریک

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -(3x^3 - 2x) = -f(x) \Rightarrow$$

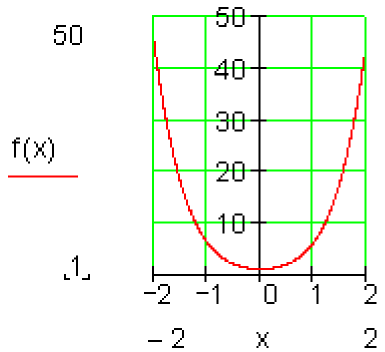
تکی سیومتریک



$f(x) = 3x^3 - 2x$

سرچینې ته سیومتریک دی

(تکی سیومتري)



$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$

yمحور ته سیومتریک دی

(محورسیومتریک)

تمرینونه:

د ټول هوښیارو توابعو خویونه.

د لاندې تاوبعو په سیمتری، ټلنه او د صفرځایونو تعداد یا ګڼون باندې وېناوې وکړی.

لومړی - $f(x) = 2x^2 - 1$ دویم - $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ریم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 2$ ځلورم - $f(x) = -x^5 - x^3 + x$

پنځم - $f(x) = x^6 - x^4 + 1$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^2 - 2x$

اوم - $f(x) = \frac{1}{10}x^7 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$ اتم - $f(x) = \frac{1}{100}x^{10} - \frac{1}{50}x^6 + \frac{1}{10}x^2$

نهم - $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x - 1$ لسم - $f(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x$

په یوه خوښه ټکي ته سیومتریک

که د یوه ټکي سیومستري تابع ګراف په خوښه راکښل شي، نو سیومتري سرچینې ته ځي، چې موږ یې ټکی سیومتري بولو له منځه ځي. نسبت و موخېټکی ته دا ساتلې پاتې کیږي.

بیلګه:

د $f(x)=0{,}5x^3-1{,}5x$ تابع ګراف ټکی سیومتریک دی، یعنې سرچینې ته سیومتریک.

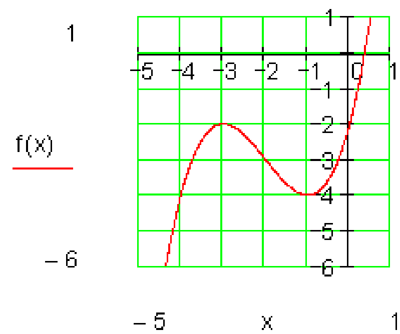
دا ګراف دې په ۲ واحدونو یا یوونونو کیڼ لور ته او په ۳ یوونونو یا واحدونو کښته لور ته راکښل شي.

د راکښلشوي ګراف تابع مساوات دي:

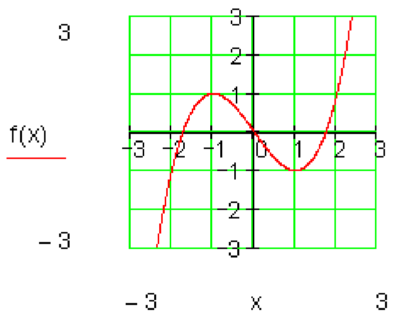
$$g(x) = 0{,}5(x+2)^3 - 1{,}5(x+2) - 3 = 0{,}5x^3 + 3x^2 + 4{,}5x - 2$$

$g(x)$ و ټکی $P_0(-2|-3)$ ته سیومتریک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$



$f(x) = 0,5x^3 - 1,5x$

کواوردینانسیستم د ګراف په بڼه کوم رول نه لوبوي. تنها تابع مساواتوتغیر خوړلی.

د حالت بیلګه: باید وازمایل شي، چې ایا د دریمې درجې د یوه ټول هوښیار تابع ګراف یوه ټاکلي ټکی ته ټکی سیومتریک دی.

ترمخ راوړنه.

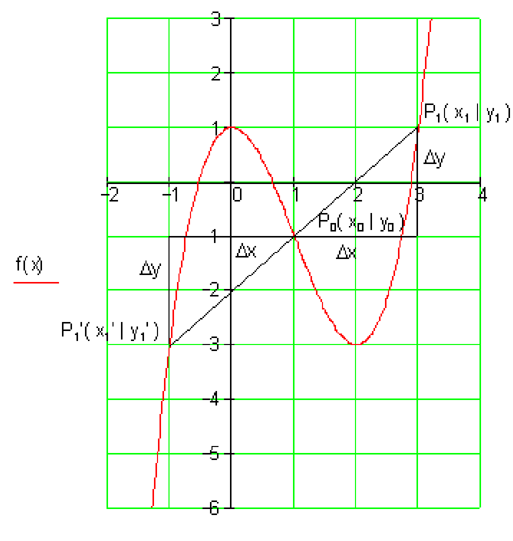
چمتووالی:

د ټکو کواوردینات لپاره باور لري:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y$$
$$x_1' = x_0' - \Delta x$$
$$y_1' = y_0' - \Delta y$$
$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$\Delta y = y_1 - y_0$$

د هنداره-یا منعکس شوي ټکو کواوردیناتونه:

$$x_1' = x_0 - (x_1 - x_0) = \underline{\underline{2x_0 - x_1}}$$
$$y_1' = y_0 - (y_1 - y_0) = \underline{\underline{2y_0 - y_1}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دې قاعدې یا لار سره تل کېدی شي پهP_0 و P_1 ته یوه هنداورنه یا انعکاسونه کې اړونده هنداورنه P_1' وټاکل شي.

بیلګه:

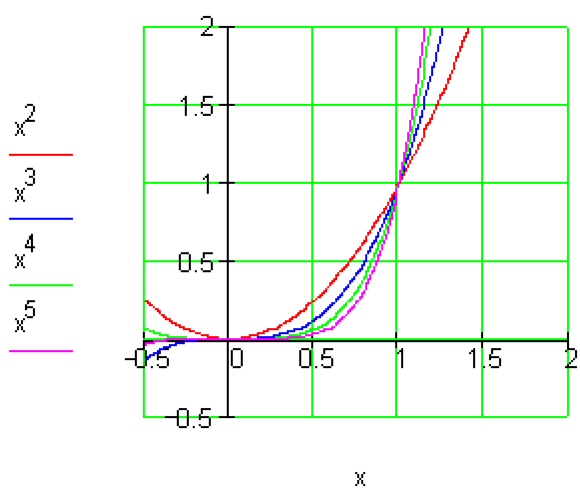
که هنداورنه په ګراف نه وي پرته ، نو ګراف وP_0 ته ټکی سیومتریک نه دی.

پوښتنې

تول مات- یا راشنل توابع I

د توانتوابعو خویونه

لومړی –

	دا ترخنګ په 1 . خلورمه کې ګراف تر څیرنې لاندې ونیسی د x ارزښتونو لپاره د 0 او 1 ترمنځ دجګو درجو یو د توان تابع ګراف پروت دی د یوه توان تابع د ګراف لاندې یا کښته د ټیټې درجې. د$x > 1$ لپاره دا ټیک برعکس کېدونکې دي. د دې حالت لپاره لایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – د دریمې درجې توان تابع ګراف دې په دوه واحده کینې لور ته او ترلی په درې واحده پورته لور ته و کښل شي.

د دې راکښل شوې تابع مساوات لپاره دې د تابع مساوات ورکړ شي.

دریم –

د څلورمې درجې توان تابع ګراف دې په درې واحده ښی لور ته او پسې ترلی دې په دوه ضریبه وغزول شي.

الف – د راکشل شوي ګراف لپاره تابع مساوات ورکړئ

ب – وښایئ، چې ګراف نه محور – او نه ټکی سیومتریک دی.

څلورم –

په کوم توان تابع $f(x) = x^n$ کې ټکی په ګراف اړه لري؟

د دې توان توابعو مساوات ورکړئ.

الف - $P(-3 \mid -27)$ ب - $P(-2 \mid 16)$ پ - $P(0,5 \mid 0,25)$ ت - $P\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{27}\right)$

ټ - $P(0,1 \mid 0,0001)$ ث - $P(-1 \mid 1)$ ج - $P(-2 \mid 8)$ چ - $P\left(\frac{3}{4} \mid \frac{81}{256}\right)$

پنځم –

د لاندې توان توابعو سیومتري او د ګراف تلنه وټاکئ او د هر یوه ارزښتدیرئ(ارزشتسټ) او درجه ورکړې.

الف - $f(x) = 4x^3$ ب - $f(x) = -160x^2$ پ - $f(x) = -1500x$

ت - $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$ ټ- $f(x) = 5$ ث - $f(x) = -25x^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم –

لاندې تابع مساوات د پولینوم په بڼه انځور کړی.

هر ځل يې درجه ورکړی.

الف - $f(x)=(x-2)^2-4x^3$ ب- $f(x)=4(x+5)^3+(x-2)(x+2)$

پ- $f(x)=2x^3-(x-1)^2$ ت - $f(x)=(x-4)(x+1)^2$

ټ - $f(x)=(x^2-4)(x^3-x^2+4)$ ث - $f(x)=\frac{x-5}{8}(x-2)+\frac{3}{4}x^2$

اوم -

دليل راړی:

د یوه ناجوړه(طاق) درجې ټولراشنل تابع ګراف دx محور لږ ترلږه په یوه ځل غوځوي.

دا هلته هم باور لري که درجه جوړه یا جفتوي؟

پوښتنې

ټول راشنل توابع II

سیومتری او تلنه

لومړی – و څېړی، چې ایا f(x) یو ټولراشنل تابع دی. په ورکړشوي حالت کې د تابع ګراف، درجه او د ضریبونو $a_0; a_1; a_2; \ldots an$ ارزښتونه ورکړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f(x) = 2$ ب - $f(x) = 4x$ پ - $f(x) = 2^x$ ت - $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{8}$

ټ - $f(x) = \sqrt{3}x^4$ ث - $f(x) = \frac{1}{x}$ ج - $f(x) = \sqrt{x}$ چ - $f(x) = \left(x - \sqrt{3}\right)^2$

ح - $f(x) = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$ خ - $f(x) = 16x^3 - 2x^2 + 5x^2 - 4$

دویم – د لاندې ټولراشنل توابعو څخه کوم یې محور سیومتریک او کوم یې ټکی سیومتریک دي؟

الف - $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ ب - $f(x) = x^3 + 3x + 1$ پ - $f(x) = (x-2)(x+2)$

ت - $f(x) = x^6 - 6x^2 + \sqrt{3}$ ټ - $f(x) = (x-2)^3(x-1)$ ث - $f(x) = x^4 - \sqrt{5}x^2$

ج - $f(x) = \left(2x^4 + 2x^2 + 5\right)x$ چ - $f(x) = \left(x^2 - 2x + 3\right)(x+1)(x-1)$

ح - $f(x) = 1 - 3x^2 + x^6$

دریم – د c متحوله داسې وټاکئ، چې د تابع ګراف ټکی سیومتریک او همداسې محورسیومتریک شي.

الف - $f(x) = x^3 + 4x + c$ ب - $f(x) = (x-c)(x+4)$ پ - $f(x) = x^5 + x^c$

ت - $f(x) = x^3\left(x^2 - cx\right)$ ټ - $f(x) = c + x^3$ ث - $f(x) = 4x^3 + x^2 + cx^2 + 5x$

څلورم : د لاندې توابعو د ګراف تلنه معلومه کړئ.

الف - $f(x) = 2x^5 - 6x^3$ ب - $f(x) = -4x^4 + 3$

پ - $f(x) = 2x - 5$ ت - $f(x) = -2x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x)=4x^4-3x^2+4x-5$ ث - $f(x)=-6x+3$

ج - $f(x)=4x^4+3x^3-6x^5$ چ - $f(x)=-2x^5+6x^3$

پنځم - د لاندې توابعو د ګراف تلنه او سيومتري ورکړی.

الف - $f(x)=\sqrt{3}x^2-\sqrt{5}x^4-2$ ب - $f(x)=x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(8-\frac{1}{2}x\right)$

پ - $f(x)=5x^6-4x^4+5$ ت - $f(x)=x^5+x^3-2x$

ټ - $f(x)=5$ ث - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(x^2+6x+9\right)$

ج - $f(x)=x^5+4x^4+4x^3$ چ - $f(x)=\left(4x^2-4\right)\left(x^3+8x^2+16x\right)\left(x^3+27\right)$

ح - $f(x)=-3$ خ - $f(x)=-x^5+x^3-2$

شپږم : د لاندې تابعو صفرځيونه وشمېرئ:

الف - $f(x)=(x-4)(x-2)(x+1)$ ب - $f(x)=(x-4)(-x+2)$

پ - $f(x)=x(x+5)^2$ ت - $f(x)=3(x-4)^3(x+2)$

ټ - $f(x)=(2x-4)(x+3)x^3$ ث - $f(x)=x^3-2x^2$

د ټولراشنل توابعو محور غوځېکي (د محور د تقاطع نقطی)

د ټولراسنل توابعو محور غوځېکي (د محور د تقاطع نقطی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y محور سره غوڅټکی $P_y(0|y_s)$: $P_y(0|y_s)$ شرط: $y_s = f(0)$

بيلګه : د يا په معنا

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = 3 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$
$$\Rightarrow P_y(0|-3) \text{ oder } P_y(0|f(0))$$

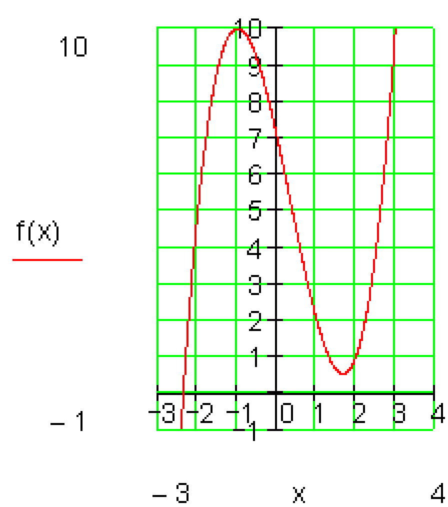
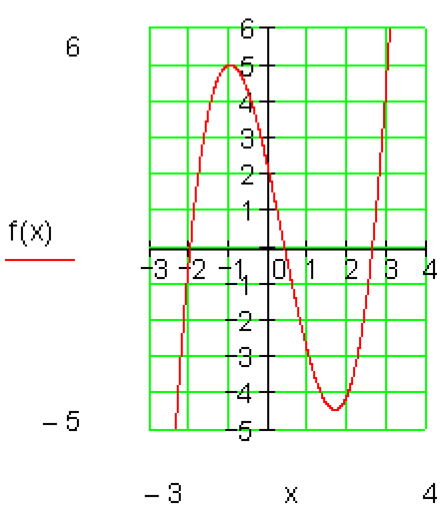
د P_y د y کواوردينات تل د ضريبونو a_0 سره کټمټ ده.

دا تل د تابع مساوات څخه لوستل کيدی شي.

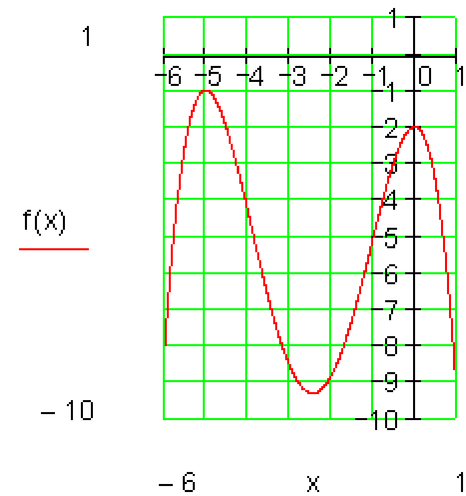
د x-محور سره غوڅټکی $P_y(x_s|0)$ صفرځای : شرط: $f(x) = 0$

د مربع تابع (د دويمي درجې ټولراشنلتابع) څخه بوهيږو، چې دا دوه ، يو ، يا هيڅ صفرځايونه لرودی شي. دا د جګ درجو ټول راشنلتابع سره څنګه دی؟

بيلګه:

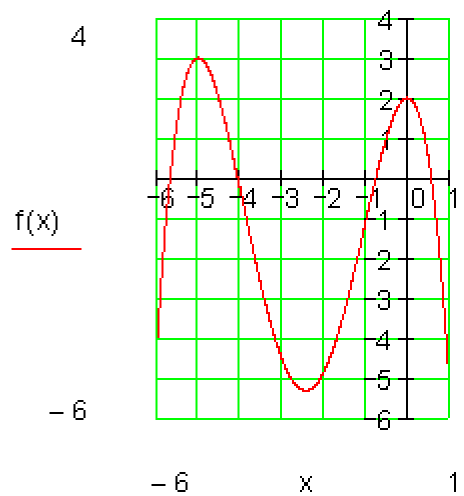
 $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$ صفرځای نه لري	 $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ دري صفرځايونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x - 2$$

د صفرځای نه شتون



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x + 2$$

خلور صفرځایونه لري.

جمله:

یو د n -مي درجي تولراشنل تابع زیات له زیاته n صفرځایونه لري.

کهn جوړه وي، نو دا لږترلږه یو صفرځای لري.

د صفرځایونو شمیرنې لار(تګلار)

د فکتوري کونو یا صریبونو تګلار:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

فاکتور x له نوکانو راوتلی شي.

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 2x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

او په نوکانو کي افاده یا وبینه صفر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

مربع مساوات دی.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \,|\, : 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$p = -1;\ q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

صفرځايونه :

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -1$$

د x محور سره غوځتکی

$$P_{x1}(0|0);\ P_{x2}(2|0);\ P_{x3}(-1|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

(پورته) د کرښيز ضريبونو ضرب

د بدلون قانون substitution:

يادونه: په دې معنا چې د يوې اووښتونې يا متحولې لپاره بله متحوله ځا په ځای کوو.

بې مربعيز(بي ځلوريز) مساوات $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون: $x^2=z$

$$\Rightarrow f(z)=z^2-13z+36=0 \quad p=-13 \quad q=36$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(\frac{13}{2}\right)^2-36=\frac{169}{4}-\frac{144}{4}=\frac{25}{4}\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\left|\begin{array}{l} z_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9 \\ z_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4\end{array}\right.$$

بدلون په څټ- یا بیرته ګرځوو:

$$x^2=z_1=9\,|\sqrt{\ } \qquad x^2=z_2=4\,|\sqrt{\ }$$
$$\Rightarrow |x|=\sqrt{9} \qquad |x|=\sqrt{4}$$
$$\Rightarrow x_1=3 \quad x_2=-3 \qquad x_3=2 \quad x_4=-2$$

د x محور سره غوڅټکی

$$P_{x1}(3|0);P_{x2}(-3|0);P_{x3}(2|0);P_{x4}(-2|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x)=\underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}}\Leftrightarrow f(x)=x^4-13x^2+36$$

د کرښيز ضريبونو ضرب

پوښتني

محور غوڅټکي او د تيلراشنل يا ماتتوابعو ګرافونه II

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د درېيمې درجې يو ټولهوښيار يا ـراشنل تابع سرچينې سره سيومتريک ده، که

الف- له ټکو $P_1(1|2)$ او $P_2(3|-2)$ څخه تيره شي.

ب- که کربنهg د g(x)=3x سره پارابول په P(0|0) کې لمس کړي.

دويم: تابع f(x) د پيژندورشو يا تعريف ساحې D = IR سره ورکړ شوې ده. تابع f(x) په سيومتري وڅيړی، صفرځايونه وشميرئ او ګراف وکاږئ.

الف – $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2$ ب – $f(x)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

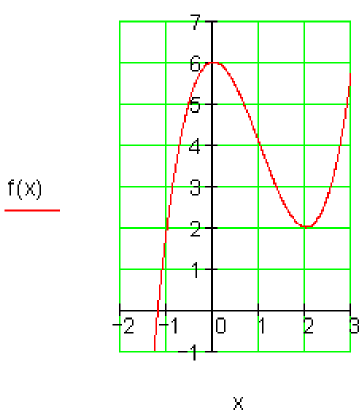
پ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$ ت - $f(x)=\frac{1}{48}x^3-x$

ټ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$ ث - $f(x)=\frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$

ج - $f(x)=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2$ چ = $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{9}{2}$

دريم: تابع $f(x)=x^3-3x^2+6\,;\,D=\mathbb{R}$ ورکړشوې ده.

<table>
<tr>
<td>



</td>
<td>

الف - وښايئ:
د f(x) صفرځای د (1- ; 2-) ترمنځ پروت دی مدلل کړئ، چې f(x) تيک يو صفرځای لري، دا ګراف بايد ښکاره راکښل شي، چې له هغې سره دا تيک دوه صفرځايونه ولري؟

ب- کربنه x = u د f(x) ګراف په ټکي Q او د x محور په P کې غوڅوي.
د لاندې دربېګوډي يا مثلث 0PQ سطحه د2 = u لپاره وښايئ.
د مثلث د (خوندي) سطحې ترم د u په واکوالي کې د 0 < u لپاره ورکړئ.
g(x) څومره صفرځايونه د g(x)=3.f(x) سره لري؟
دلايل يې راوړئ.

</td>
</tr>
</table>

څلورم: تابع $f(x)=5x^3-10{,}8x+4$ ورکړ شوې ده. وښاي: x=0,4 يو صفرځای دی.
پسې نور صفرځايونه وشميرئ.

$$f(x)=5x^3-10{,}8x+4\,;\,D=\mathbb{R}$$

پنځم: د اووښتونې يا متحولې c په واکوالي کې د صفرځايونو تعداد وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2cx\,;\, D = \mathbb{R}$$

$$x^2 + 2x + 2c = 0 \Rightarrow p = 2\,;\, q = 2c \Rightarrow D = 1 - 2c$$

$$\text{für } D > 0 \Rightarrow 1 - 2c > 0 \Leftrightarrow c < 0{,}5$$

$$\text{für } D = 0 \Rightarrow 1 - 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0{,}5 \Rightarrow x_{2/3} = -1$$

$$\text{für } D < 0 \Rightarrow 1 - 2c < 0 \Leftrightarrow c > 0{,}5$$

$$\text{für } c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0\,;\, x_3 = -2$$

اړيکې:

د $c > 0{,}5$ لپاره $f(x)$ تيک يو صفرځای لري:($P_x(0 \mid 0)$

د $c = 0{,}5$ يا د $c = 0$ لباره $f(x)$ تيک دوه صفرځايونه لري.

د$c < 0{,}5$ او c د صفر سره نامساوي لپاره $f(x)$ تيک درې صفرځايونه لري.

پوښتنې

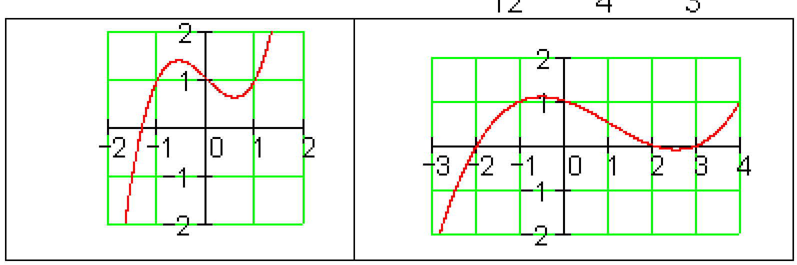
د ټول راشنل توابعو محور غوښتکي او گرافونه III

تابع په يوه گراف تنظيمېږي.

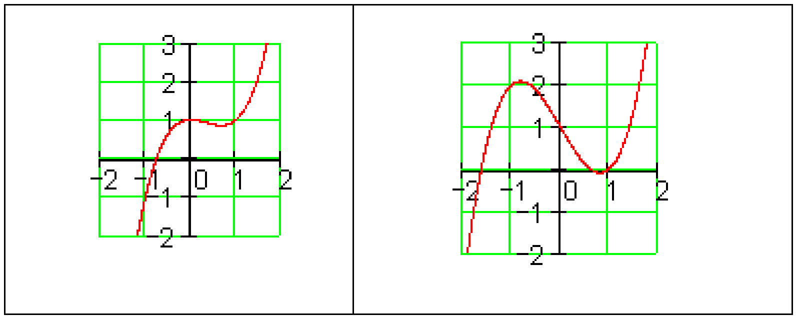
لومړی: هر د يوه تابع ترم سره تنظيم کړی او خپله پرېکړه په دليل کلکه کړی.

$$f_1(x) = x^3 - x + 1;\; f_2(x) = x^3 - 2x + 1$$

$$f_3(x) = x^3 - x^2 + 1;\; f_4(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



دويم: هر هغه څوک چې د لايسنس اخستلو لپاره ځان چمتو کوي، بايد وپوهيږي، چې د يوه بريک وهونکي موټر تمکيدني واټن په يوه وچ پاخه سرک)چې طبعاً بايد هوار وي) د عکسالعمل لار او د بريک لار څخه يوځای جوړه ده. د لاندې د موټې قانون يا لار(د درې ګوتو) څخه کيدی شي د چټکتيا v پهkm/h د عکسالعمل لارr او د بريک لار b په متر وشميرل شي.

د بريک لار: $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ همداسي $b = \frac{\left(\frac{v}{10}\right)^2}{2}$ ، د عکس العمل لار: $r = \frac{v}{10} \cdot 3$

د المان د3.3.04 راين اخبار د اول له جولای1. Juli 2004 په وچ سره د تمځای لار په بل بريکلار شمیرل کيږي.(په افغانستن کي به داښګه وي ؟نه پوهيږم)

الف- تابع مساوات s = f(v) وټاکی، د کوم سره چې د هرې تلنې د چټکتيا يا سرعت تملار شميرل کيدی شي.

ب – د لاندې تلل شوی چټکتياv = 0, 10, 20, 30, ... 50 km/h لپاره په يوه ارزښت جدول کې د هغه هر يوه تمځای s سره يوځای کړی

پ – له دې سره د (60 ... 100 km/h) لپاره دs يو څونور ارزښتونه وشميری او د دې تابع ګراف وکاږی.

ت – د نوي بريک نيولو قانون(المانی) سره دا تراوسه شميرل شوي ارزښتونه وشميری او دا په همغه کواوډينات سيستم کې وکاږی او توله نتيجه په شننه يا کومنتار سره روښانه کړی.

دريم: داتابعورکړ شوی: $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 3x + 1{,}5 \,;\, D = \mathbb{R}$

الف- وښايی: $f(x) = 0{,}5(2x-1)(x^2-3)$

ب –ګراف د شوونتيا تر پولې ټيک وکاږی.

پ – د x د کوم ارزښتونو لپاره$f(x)>0$ باور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

شننيزه ځمككچپوهنه يا تحليلي هندسه:

تحليلی هندسه(وكتورهندسه هم) د هندسې يوه برخه ده، چې د هندسې پرابلمونو د حل د پاره د الجبري مرستندوی موادو (په ټوليزه توګه له كرښيز الجبر) څخه جمتو كوي. دا په ډېرو حالتونو كې ممكن كوي، چې ځمككچيزې پوښتنکونې سوچه شميرنيز حل كړی شو، بې له دې چې ليدونې يې مرستې ته راوبولې يعنې چې شكل څنګه بريښي يا دی.

۱۶ - د سطحې شننيزه (تحليلي) هندسه

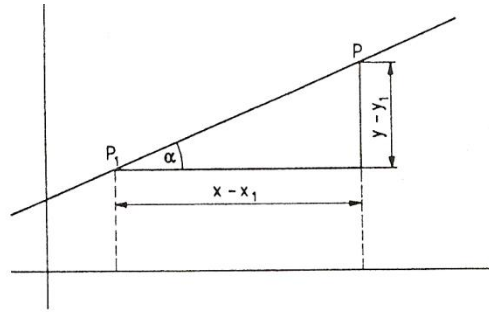
په دې برخه کی يوڅود تحليلي (شننيزې يا سپړنيزې) ځمككچپوهنې يا هندسي ټاكلي پرابلمونه څيړل كيږي.د تحليلي هندسې بنسټيزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شكلونو او ددې په شننيزې يا تحليلي څرګندونويی د هندسي خويونو جوړښت بنايي.

۱۶ . ۱ كرښه

د هندسي ټاكندو ټوټو له لارې مختلف امكانات شته دی، چی يوه كرښه يواځنی كره تعين كړای شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د كرښبرابرونونو يا ـ مساواتو مختلفی بڼی شته دی. يوه كرښه د يوه ټكې او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاكل كيدې شي . (ټكی او د ټكی ميلان معلوم دی) .

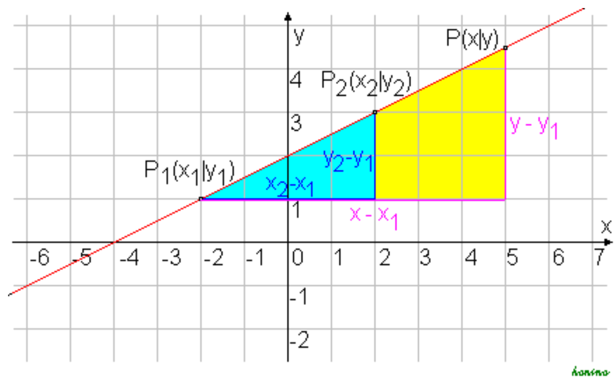
دلته دې(P1(x1 , y1دا ټكې وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګيدو كونج،وې، چی د كرښی لور ټاكي (خ ۱۶ . ۱) او(P(x,y په كرښه يو اووښتونی (واريابل) ټكی دی٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو د کرښې د ميلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته ښيره دې وکتل شي(لاندې ښيره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1);.....................(16,1)$$

پورته د کرښې ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: (y - b = m (x - 0 په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

يوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دوه ټکي دي(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (څیره ش ۱۶ . ۲   ) د جګیدونکی یا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

او

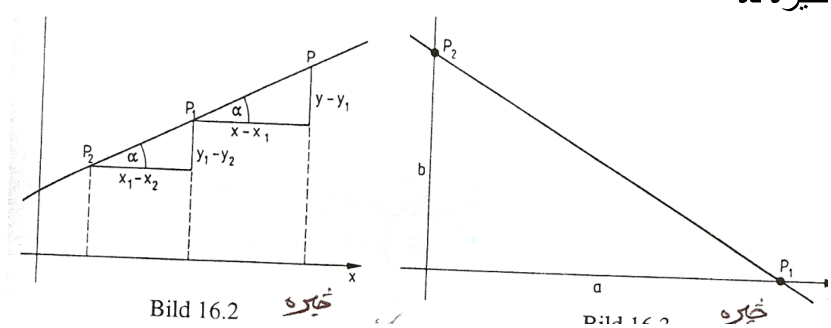
m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x \;\; - x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکیزبرابرون

څیره ده



که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردینات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردینات x1= 0, y2 = b|= 0 سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅي برابرون

 څلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاینیز دي.د مساوات عمومي فورم)یا ټولیزه بنه (داسی دئ:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (16 . 5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)
دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري یا په بر کی نیسي
$y = y0 \ (A = 0 \ ,B|=0)$
او($x=x0(A|=0,B=0$ چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بیلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون یا لاینیز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تیریږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30°$ یی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی لیکل کیږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم یي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بیلګه ۱۶ . ۲ :

د لاینیزبرابرون یا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2) او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(**اته** ناسم، په ځای یی شپږ دي)

بیلګه ۱۶ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او
جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت
په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه
p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ښیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

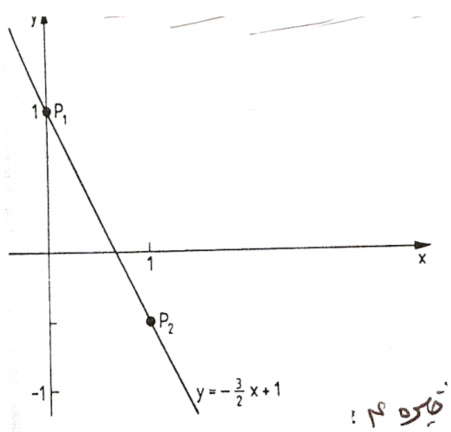
بیلګه ۱۶ . ۴ :

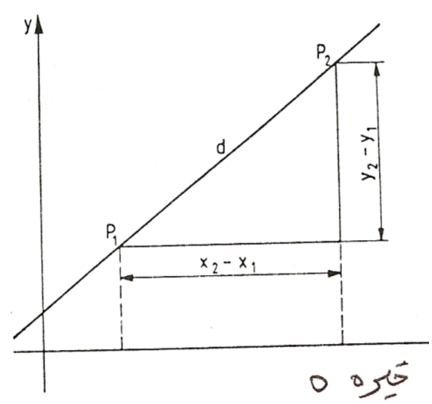
د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 ځخه دغوښیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي.
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (ښیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};\dots\dots\dots\dots(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ښیرې ۱۶ . ۴ او - ۵





بیلګه ۱۶ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درېکوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجتکي یی دادي(-A(3,1),B(1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کټمټی) چی (یو د بلی سره) غبرګي نه وي ټيك يو غوځټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی ، نو د دواړو کواوردیناتو برابرون باید پوره کړي . په دې حالت کي د غوځټکي کواوردیناتو، د دوه لاينيزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونې یا

ناپیژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه ترې لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابرونسیستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي يو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډيرې اوبیونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه یوه کرښه ښایي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي یوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بیلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کرښو
الف) g2: -2x+y = 1,
ب) g3: 3x -y=5, ,
پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3
سره څیړو
اوبیونه : د g1 برابرونونو څیره داسی بدلیږي : 3x-y=2
الف) د برابرونونو سیستم 3x-y=2، -2x+y=1
ټيك یوه اوبونه لري: x1=3 , y1=7
ددې څخه څرګندیږي چی ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوځټکی دی .
ب) د برابرونونو سیستم
3x - y = 2
3 x - y = 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی نه لري : برابرونونه یو بل ردوي یه نه زغمي . د g1 او g2 کرښې یو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سیستم 3x-y=2

-x+(1/3)y=-2/3

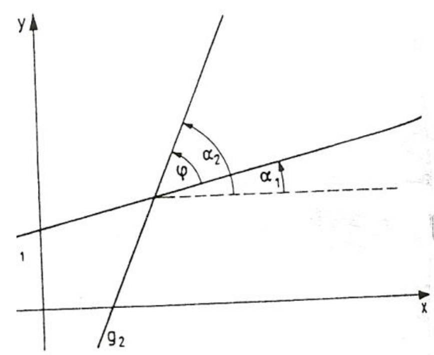
ناپای ډېر ې اوبیونې یا حلونه لري. برابرونونه یو بل سره برابر یا یو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي یو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ٠

که د دوه کرښو

g 1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو جګید کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت یا توپیر)جوړوو (خ ۱۶ . ۶)



څېره ۱۶ . ۶

د کرښې له برابرونونو پوهیږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زیاتون تیورم (بنستیزه جمله) (برخه ۶ . ۵) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

د کوم څخه چې د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 . m_2} ;........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دېر.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته خبرې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4}-1}{1+1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180-\phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښی یوبل سره غبرګی ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1+m_1.m_2} = 0$$

ګورو چی د 0 = m2 - m1 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښی یو په بل (نیغی) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m-m)/(1+m.m) = \infty$$

دا حالت د 0 = 1+m1.m2لپاره منځ ته راځي،

یعنی د m2= -1/m1 لپاره (m1|=0,m2|= 0)

په کرښه(y=y0 (m1=0 باندې کرښه(x=x0(m2=oe نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

m2 = m1 (16, 8)

د اورتوګونالیټی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

m2 = -1 / m1 (16 . 9)

بيلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چې له ټکي(P (2,-1 تيريږي، او له کرښی g1 : y = -2x +1 سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نيغه) ځغلي اوبيونه:
الف) د g2 کرښی ميلان (جګوالی m2 = m1 = -2)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : (y+1=-2(x-2 همداسی y = -2x +3
ب) د g2 کرښي ميلان ياجګيدنه ده m2=-1/m1=1/2 د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2

بيلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کيږي چې د(P1(1/3,-1/6 ټکی تيريږي او په کرښه چی له ټکو(P2(-1,1 او(P3(-2,-1 تيريږي، ولاړه وي.
ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تيريږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري (y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی ميلان يا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تيريدونکی کرښي برابرون د m_2 ميلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:
y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بيلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوځټکي S واټن له ټکي(P(6,13څومره دی او د کرښي برابرون څنګه دی چي د کواوردينات له سرچينی تيريږي او د S او P څخه تيريدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟
ځواب : د غوځټکي کواوردينات د لاندې برابرونونو سيستم څخه لاس ته راځي
2x-y=1
3x+2y=5
يعنی: xS=1 , yS=1
د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \sqrt{(1-6)+(1-13)^2} = 13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S او P تیریږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: (m = 12 / 5)

له S او P تکو تیریدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي میلان

m2 = -1/m = -5/12

د (P0 (0,0څخه تیریدونکی کرښه د m2 میلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیریږي او د x–محور سره کونج ∝ جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, = 30º, b) $P_1(-3,2)$ = 45º

c) $P_1(-1,-4)$, = 120º , d) $P_1(4,4)$, = 0º

e) $P_1(0,0)$, =150º , f) $P_1(1,-1)$, = 90º

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅي(لنډ : محورغوڅي) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره چې یو له بل یې لرې وټاکئ.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ – یو دریګوډی دا لاندې ګوډټکی لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګوډیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګوډي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برخټوټینه یا –فورم څنګه دی؟

a) 3x -5y +15 = 0 , b) 4x -3y -18 = 0

c) -4x +2y -10 = 0 , d) -3x -4y +15 = 0 ?

۶ – د کرښې $y = -(12 / 5)x +2$ پروتخای د کرښو

a) y+2,4x - 6 = 0 , b) 28x +10y = 0 , c) 8x + 5y =2,

d) 5y +12x -10 = 0 . e) y +(12/5)x = 3 , f) 6x +2,5y = 5

سره وڅیړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د لاندې کرښو د غوڅېدو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$, $3x - y = 5$,
b) $y = (1/2)x + 1$, $y = -2x + 6$,
c) $y - x = 7$, $y = 7$,
d) $x/3 - y/2 = 1$, $-x/2 + y/3 = 1$,
e) $6x - 2y + 10 = 0$, $y = 3x + 6$,
f) $y = 4x - 1$, $y = -3x + 5$!

۸ – کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوڅټکی $P(0,5)$ څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندې ګوټ سره د دریګوټي دننه کونجونه $A(-4,-1), B(2,-2), C(1,3)$ څومره لوی دی ؟ (پیلونه: دریکونجی وکاری) یا (دریګوټی)

۱۰ – د ولاړپریوتې کرښې یا زوړندې مساوات له ټکی $P(2,0)$ څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دی؟

۱۱ – د ولاړ کرښې مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي $P(-1,-2)$ څنګه د

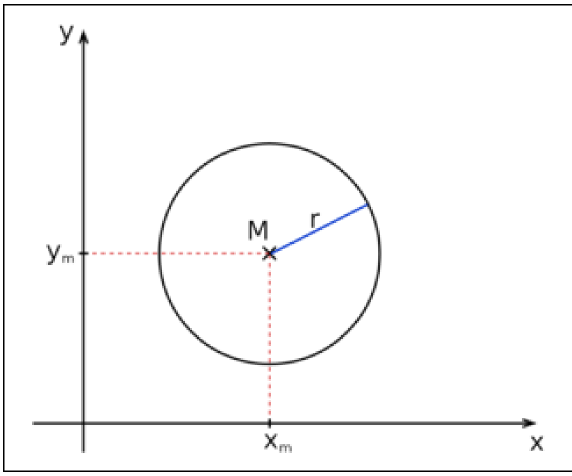
۱۲ – د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي $P(-1,-3)$ تیریږي، څنګه دي؟

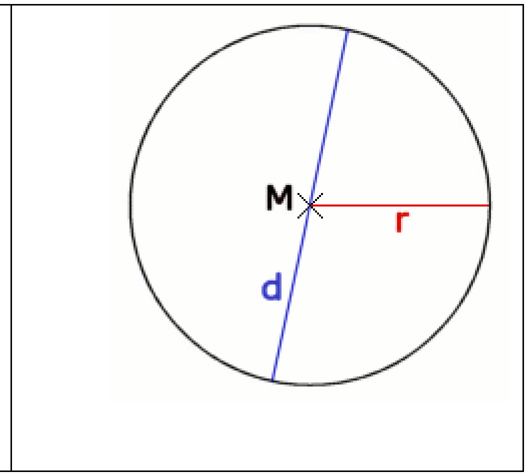
۱۶ . ۲ ګردی (دایره)

دایره(ګردی) د ټولو هغو ټکو ډیری(سټ) ده، چې د یوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانګه وایو او په rیی په نخښه کوو. فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې دایره (ګردی) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډیری(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \left\{ X \in E \mid |\overline{MX}| = r \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





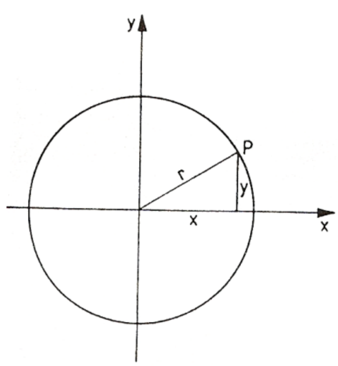


Bild 16.7 څېره

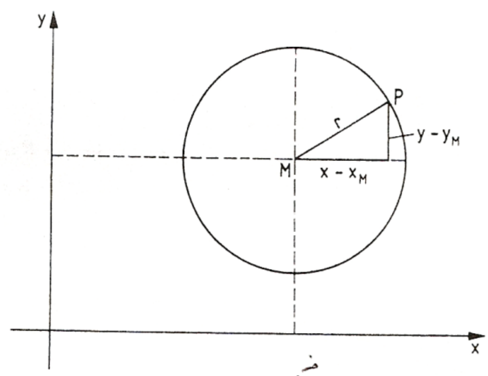


Bild 16.8 څېره

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې ګردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردی ټولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پيتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د يوې ګردی ځانګړي حالت او د کواورديناتسيستم سره، چې منځټکی يې د کواوردينات په سرچينه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

که د ګردی منځ ټکی د کواورديناتسيستم (څېره ۱۶ . ۷) په سرچينه پروت وي، نو د) پيوتاګوراس د جملې له مخی (د ګردي په خوښنه ټکي (P(x,y لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (16 . 10)$$

د ګردی منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردینات (xM,yM) ولري (ځیره ۱۶ . ۸) نو د ګردی د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \qquad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي ($M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرون په A|=0 فاکتور څلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغیر ومومي) ، پس پیژندل کیږي چی د ګردیبرابرون د څلوری یا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاینیز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی یوه غړي په ځیري سره یوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټولیز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \qquad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه ۰
که د ګردي برابرون په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه یی څرګنده کوو یا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د څلوری پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه ځیرې پورته وګوری

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردی برابرون دې په ټولیزه - یا عمومي توګه وي:

$$2x^2+2y^2 +4x-12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وویشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د څلوری پوره کونه یا مربع تکمیلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y +9 = 3+4+9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبینوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$
ګردۍ منځټکی($M(-2,3$ او وړانګه $r=4$ لري.

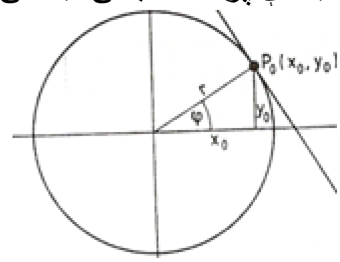
بیلګه ۱۶ . ۱۲ :
د ګردۍ برابرون ولیکی چی منځټکی یی($M(2;0$ وي او په کوم چی ټکی(
$P(6,4-3$ روت دی؟
اوبیونه : د($M(2,0$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دئ
$(x-2)^2 + y^2 = r^2$
د P ټکی د ګردئ برابرون پوره کوي $(6-2)^2 + (4 - 3)^2 = r^2$
له دې څخه د ګردئ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د
کردئ برابرون:
$(x-2)^2 + y^2 = 64$
ګردئ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي
۱ - کرښه ګردی غوځوي، نو له دې امله غوڅی ده(سیکانتې)
۲ – کرښه ګردئ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)
۳ - کرښه ټوله له ګردی دباندې پرته ده (له ګردئ تیریدونکی، لنډ : تیرېدونې)
د غوڅټکي(د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردئ اوکرښی برابرون پوره کړي
سرې د کرښي برابرون د ګردئ په برابرونونو کی بردي(y یا x پسی حل یا اوبئ
شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (څلوری برابرون) په x او y کی لاس ته
راوړي، کوم چی په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه
لري، یو رییل ډبل اوبی او یا هېڅ رییل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ،
۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بیلګه ۱۶ . ۱۳:
کوم پروت ځایونه ګردی k چی راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ اولاندې کرښی و یو
بل ته لري؟
$g1 : 2x+y=4 ,g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردئ برابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+4 -3)^2=5 <=> 5x-8x=0$
ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به $g1$ د ګردي غوڅوونی یا
(Sekant سکانت) وي.
که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 <=> x^2-8x+16=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېل اوبوني 4 = x1,2 = 4 , y1,2 سره g2 یو تانجنت دی.
که y=2x+6 : g3 د ګردۍ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 \Leftrightarrow 5x^2+x+8=0$
دا څلورۍ برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه g3 له ګردۍ k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.



په ګردي ($x^2+y^2 = r^2$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی($P_0(x_0,y_0)$ د مساوات $x_0^2+y_0^2 = r^2 > 0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دی

د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت

$$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0; ....(16,13)$$

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

$$y-y=-(x_0/y_0)(x-x_0) \Leftrightarrow xx_0+yy_0=x_0^2+y_0^2=r^2$$

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16 . 14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي

$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه($P_0(\pm r,0)$ او($P_0(0,\pm r)$ په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

(c) ketabton.com: The Digital Library

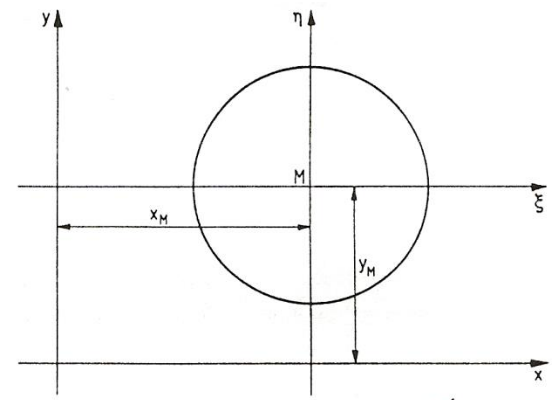


Bild 16.10

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته x0,y0 یا xM,yMاو x_0, y_0 یا x_M, y_M ګورو نو کټمټ دي

بیلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداکوو. دا باید دګردی برابرون پوره کړي . ټکی P1 باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) باید پوره کړي.
نو باور لري

$x_0^2+y_0^2 = 16$ او $-12x_0 + 4y_0 = 16$

که دا لاینیزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي یو څلوری برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبیونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پوري اړه لري

$y_{01}=4$, $y_{02}=-16/5$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو(P01(0,4 او(P02(-12/5,16/5- د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$0.x+4y=16 \Leftrightarrow y=4$

او

$(-12/5)x-(16/5)y=16 \Leftrightarrow y=(-3/4)x-5.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د گردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي (M(xM,yM) سره د η,ζ -کواوردینات سیستم کی ، چی سرچینه یي په M کی پرته ده)(؟ ځیره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري٠

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;....................................(16,15)$$

د η,ζ -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم یو غبرگ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتی دي ٠

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;..........................(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بیا دا د y,x -کواوردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي(کشوي یا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي(Po(x0,y0 کی د گردۍ تنجنت برابرو په گردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بیلگه ۱۶ . ۱۵:

په گردۍ چی برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43=0$ لري، دx - محور باندې، په ټکو

$$x_1=x_2=-5$$

سره تنجنت وکا ږو(کیږدو). برابرون یی څنگه دي؟

اوبیونه : د گردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدلیږي:

$$x^2+16x+64+y^2-4y+4=-43+64+4$$

$$(x+8)^2+(y-2)^2=25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M=-8,\ y_M=2,\ r=5$$

د گردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1=x_2=-5$$

د دواړو گردۍ ټکو په گردیبرابرون کی ځایوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې داسې لاس ته راغلي دy لپاره ځلوری‌برابرون یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو
مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6 , y2 = -2$
د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \iff 3x+4y=9$$

او

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \iff 3x-4y=-7$$

تمرینونه:

۱۳ – د لاندې مساواتو سره گردیمنځټکی او وړانگه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) $x^2+y^2 9y = 0$, d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$, f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ – د لاندې گردیو مساوات وڅیړی

الف) چې منځ ټکی $M(-2,-1)$ لري او له سرچینې تیریږي

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5, 5 -3)$, $P_3($ 5 ؛3,-1) یې د غاړو ټ

پ) چې وړانگه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11)$,$P_2(5,5)$ څخه تیریږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4 / 3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$
لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4 / 3)x +13$ لمسوي.

ث) چې د هغې منځټکی په کرښه $y = 3x -19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$
او همداسې له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ – کوم پروتخایونه گردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې
یو له بل سره لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $g: y = 2x + 1$,   b) $g: y = x$,   c) $g: y = x - 1$,
d) $g: y = 4$,   e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتخاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی
الف) په ټکي $P_0(5, y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،
ب) په ټکي $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟
۱۸ – د هغو ګرديو منحنيکي پيداکړی چې وړانګه يې $r = 5$ وي، کومی چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکی $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!
۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

فنکشنونه(بلواك يا تابع)

د فنکشن کليمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کليمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کليمه کله د يواځنی ځيرونی، چی په هندسه کی خورا ډيره کارول کيږي يا استعماليږي ، کله د بلواك او بيا زياته د فنکشن په نامه څموږ په دې کار کی بلل شوي چی موږ ورسره تراوسه د تابع د نامه لاندې هم بلد يو، څما په اند يا فکر که دا موږ ځيرونه وبولو، نو موخه ور يا هدفمند به مو نومولی وي او تابع خوبې له هغې بلواک دی. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپيوندونکی څموږ د ځيرلو متن جوړوی

پيژند ۱۵ . ۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې رییلی واریابلی (اووښتونې یا متحولې) Rرییل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن یا ځیرونه) د رییلو ګڼونو ډیری باندې ، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه یواځنی ځیرونه ده. D دپیژند ډیری نومیږي .

د ټولو ارزښتونو ډیری چې y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که د x د پیژندډیری یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .

د دي قانونمندی f له مخی هر $x \in M$ یواځنۍ یوه $y \in W$ باندې تنظیمیږي یا ځیره کیږي :

$y = f(x)$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي، له دې امله تابع، چې موږوایو، د ځیرونې هغه ځیره شوې خوا ده. (د فنکشن یا ځیرونې او تابع یا بلواک توپیر)

د فنکشن مختلف انځورډولونو په منځ کې سرې توپیروي. د دې کلیمه انځورونه کې له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیرید شوځو ، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی

په لاندې کې به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل یا ځیره کیدل..

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګڼ او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهنی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې ترل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته :
$y=|x|$ لپاره $x<0$ د
$y=x^2$ لپاره $x>0$ د
دلته $D=R,W = [0,oe)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي چې په داسې حالت کې له کيڼ و ښې لور ته يا ګډوډ لوستل کيږي يعنې داسې لولو:
x دy مطلقه ارزښت سره مساوي دئ ، که چيرې x له 0 کوچنی وي.

داسې ليکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چې له اشتباه سره به نه مخامخ کيږو) . تحليلي(شننيزه) انځورونه اکسپليځيت(واضح)روښانه و څرګند) explizit نوميږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بيلګو ۱۵ ، ۱ ۱و ۱۵ . ۲ چې په يوه د y په لور حلکيدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y = f(x)$
که چيرې داسې نه وي نو د تحليلي - يا شننيزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ايمپليځيت (ورسره ځای شوي يا وراسره تړلی implizit) بلل کيږي يا نوميږي . د بيلګی په توګه به $2y-x-1=0$,D=R,W=R فنکشن د بيلګي ۱۵ . ۱ يو ايمپليځيت انځورونه وی. ديوه فنکشن نه هره ايمپليځيت شنينيزه بڼه (ايمپليځيت تحليلي فورم) کيدی شي په اکسپليځيت شننيزه يا سپړنيزه بڼه (تحليلي فورم) واړول شي.
د بيلګی په توګه:
که $x + y + y^5 - 1 = 0$ وي، نو دا د y په لور اکسپليځيت حل کيدونکی نه دئ.
د يو فنکشن تحليلي يا شننيزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظيم د يوه مرستندوي اووښتونې يا واريابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربنوديږي. هر پارامتر (له يوه پارامتر ساحی څخه)
$x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$

په يو ارزښتجوړې x,y تنظيميږي.

بيلګه ۱۵ . ۱ ته: $x=2t$, $y=t+1$; $-oe< t <oe$ به يوه پارامتري انځورونه وی او $x = t$, $y = t/2 + 1$ به يوه بله پارامتري انځورونه وي.
زيات وخت فنکشنونه د جدول په څير ورکول کيږي

بيلګي ۱۵ . ۱ته:

X	-2	-1	0	1	2 ....
Y	2	0,5	1	1,5	2 .....

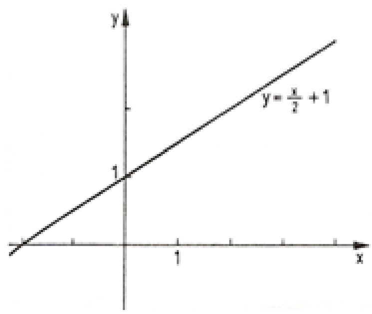
بيلګي ۱۵ ، ۲ ته:

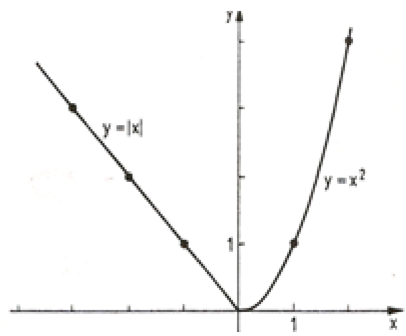
X....	-3	2	-1	0	1	2	3 ...

(c) ketabton.com: The Digital Library

Y....3   2   1   0   1   4   9 ...

د فنکشن گرافيکی انځورونه (د يوې ټوټې) په x,y- کواوردينات سيستم کی د يوې کرښې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی ځخه عبارت ده ، چی د واريابلو يا اووښتونوجوړې د x,y- هواره يا سطحه کی يواځني او بواځني ټکي باندې تنظيميږي . ځيره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بيلګي ۱۵ . ۲ته   بيلګي ۱۵ . ۱ته





۱۵ . ۲ د فنکشنونو- يا بلواکو خويونه

پيژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$

په ايترووال]a,b [کی هلته او هلته يا ټيك هلته مونوتون جګيدونکی (مونوتون لويدونکی) دی، چيرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو $x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:

$f(x1) \leq f(x2)$ $(f(x1)>f(x2))$

که د برابرونښه باور ونه لري نو له کره يا کلکی مونوتوني غږيږو.

وبيلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دی

و بيلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره

او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره

په اينتروال) [oe,0] کي مونوتون ټيټيدونکی يا -لويدونکی

او په   اينتروال [oe,0) کی مونوتون جګيدونکی دی

پيژند يا تعريف ۱۵ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په يوه اينتروال [a,a-] کی يو تعريف شوی فنکشن (y = f(x هلته او هلته جوړه (جفت) يا سيومتريك symetrisch,(ناجوړه (طاق) يا نا- يا انتيسيومتريك antisymetrisch بلل کيږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \qquad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو ځيري اکسيال يا محوري سيومتريك او y - محور ته ځغلي) دلته هم ځيره شته ، نو تل به همغه څه ليکم؟ ۱۵ . ۳) ، طاق فنکشنونه و سرچينی ته منځني يا مرکزي سيومتريك ځغلي) بيا هم ځيره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

بيلګه ۱۵ . ۴

فنکشن $y= x^3$,D= R

يو ناجوړه يا طاق فنکشن دی :

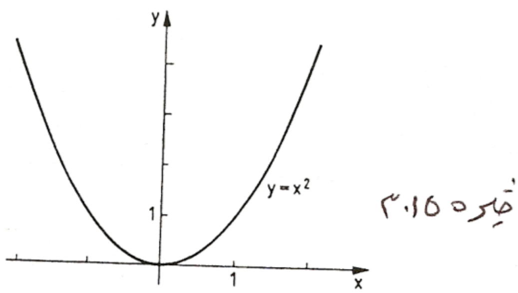
$$(-x^3) = -x^3$$

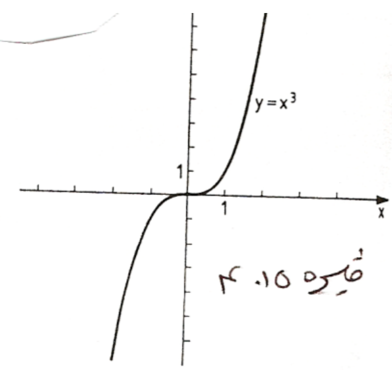
بيلګه ۱۵ . ۳ :

فنکشن $y=x^2$,D=R

يو جوړه يا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$





د بيلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه يا جفت او نه ناجوړه يا طاق دي

پيژند ۱۵ . ۴:

(y = f(x تيك هلته په D (پيژندډيری ده) بند يا رابند(محدود)بلل کيږي که يو k >0 داسی شته وي چي دا باور ولري:

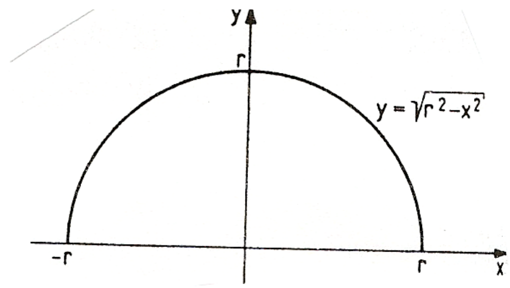
$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بيلګه ۱۵ . ۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r , r]$
رابند یا راګیر(محدود» زه به دا له دې وروسته
بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی څیره ده(

ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$



پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p)= f(x)$$

د دورانی یا تل راګځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي۰

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f (x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\ x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (څیره ۱۵ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:
$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 , \quad x2 = -2$
فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶)

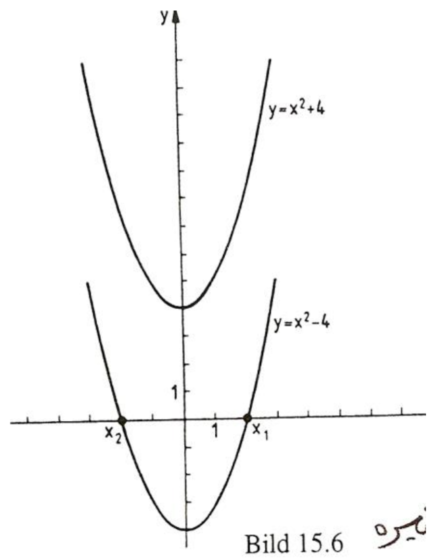


Bild 15.6 ځیره

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \quad , \quad y \in W \quad y = f(x),$
یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي
یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (= y
f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ښکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا
یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په ښت یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا
واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په ښت فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا
د فنکشن روڼنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځیره ده، چی x خپلواك
اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیژندونکی دي د y=f(x) په
ښت یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په ښت فنکشن سره کتمټ(- ورته) identic دی۰ د په ښت یا
برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرافيکی څيره $y = x$ په کرښه د $y = f(x)$ هندارونه) يعنی په هنداره کی څيرونه او لنډ يی: هندارونه) ده.

بيلګي ۱۵ ، ۱ ته :

د فنکشن $y = f(x)= x/2 +1$ چپه يا په څټ فنکشن داسی دی
$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$
سږی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(څيره. ۱۵ ۷ الف)
ږ

بيلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن
$y = x^2$, $x \in D$
څيرره ش ۱۵ . ۳) په څټکيدونکی دي يا په څټکيدونکی نه دی.
هر $y \in W$ =[0,oe] پوري دوه = [-oe,oe] $x \in D$ اړه لري، يعنی x=+yاو x=-y
مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګيدونکی دی (او په دې ډول يواځنی او يواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لويدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2, x\geq 0$
ته چپه- يا په څټ فنکشن $y=+ x$ دی، او $y = x^2 , x < 0$ ته چپه- يا په څټ فنکشن $y = - x$دی. (څيره ۱۵ . ۷ ب) .
په تولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګيدونکی) لويدونکی (وي ،نو په څټ فنکشن $y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګيدونکی (لويدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټيز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټيز فنکشنونه تعريفيږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ يا په توان فنکشنونه، ايکسپوننشل فنکشنونه او لوګاريتم فنکشنونه، تريګونومتري فنکشنونه او څيکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټيز فنکشنونه به د خپلوځانګړډوله خويونو له مخی وڅيړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځيری - يا تړلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنونه) وڅیړل شي. د فنکشنونو څیړل به د هغو ځانګړتیاوو یا کرکتریستیکي خویونو له مخې هلته هم دوام وموميږي، که د دیفرنشل شمیرنې کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N;\ a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نوميږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالایني فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کې پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لایني فنکشنونو څیره(ګراف) یوه کرښه ده چي په y = n کې د y - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m = \tan\alpha$

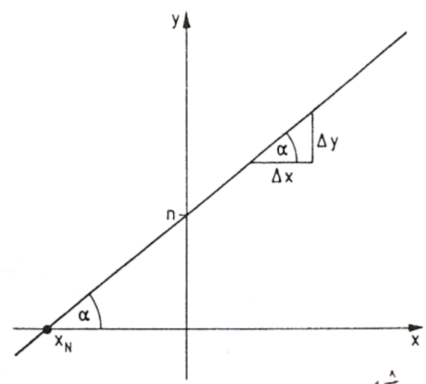


Bild 15.8

لري (څیره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که 0 =|m نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي (y = 0 لري: $x_N = -n/m$

که را په غاړه شي چې د یوې کرښې برابرون، چې له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي یو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرېټکی یا نوره ښه غوښتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱ . ۱۵) کې $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c , a \neq 0 \qquad (15 .3)$$

د مربع فنکشنونو څیره) ګراف (پارابول دی چې د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیځینت) ځله ونني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیړني لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0) \qquad (15 . 4)$

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(خ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q \ (a=1 , b=p , c=q) \qquad (15 . 5)$

او $x^2 + px$ ته د څلوری - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px\ (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \qquad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په q - p² /4 راکښل (رانښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چې په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:

$$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$$

بیلګه ۱۵ . ۷:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=x^2+6x+10,\ x_s=-6/2=-3, y_s=10-6^2/2=1$

(خ،۱۵ . ۹)

3. $y = ax^2$ ($|a|=0, b=0, c = 0$)

د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسيدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بيلګه ۱۵ . ۸:

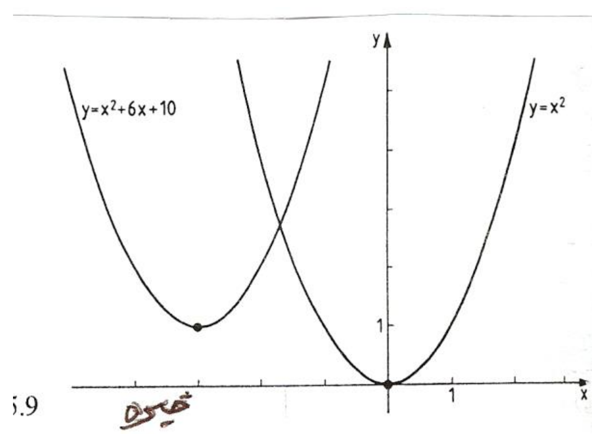
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(خ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردينات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی يی چی مخ ته تللي يو)

$$x_s = -b/2a;\ y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$$



بيلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,($a=-1/2$, $b=1$, $c=4$)

دککرۍ کواوردينات:

$$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1,\ y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$$

دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسيدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

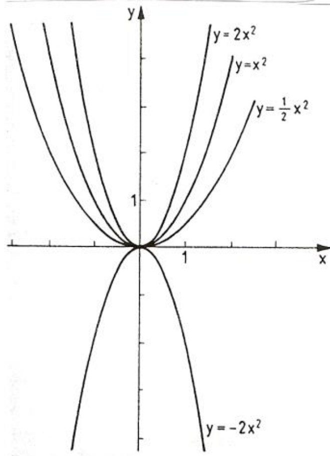


Bild 15.10

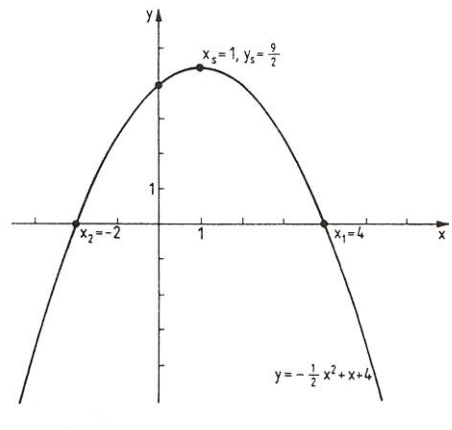


Bild 15.11

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (ځ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي٠

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته:
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي
چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري.

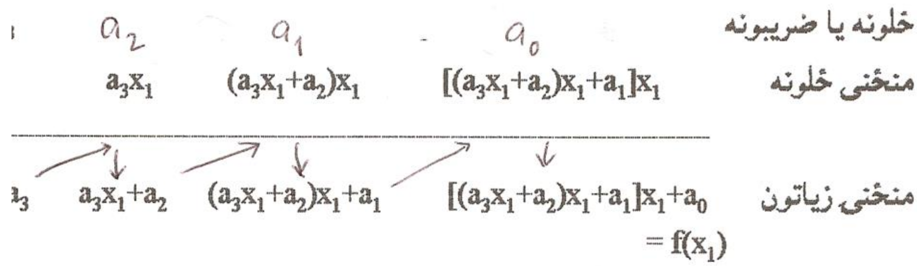
فنکشن $y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0 \quad x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پوري اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 له x1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یې له x1سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (څرګندوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library



ددې شیما پو هیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پو هیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.

اوبیونه) :

که چېرې ددریمی درجې ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چې د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګې ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5): (x-5) =x^2+3x+1$ له دې امله لرو:
$y = x^3-2x^2 -5 = (x^2 + 3x +1) (x-5)$
د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړی کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او $f (x1) = 0$ چې د $(x-x_1)$سره د ځلوني له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د ځلوری – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجې فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وينا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ريشنل ړرزرنړ
ړړطړتظداغظطافنکشنونولپاره لانديجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ريشنلفنکشن n صفرځايونه لري . کيدي شي دا ټول يو له بل توپير ولري او يادا صفرځايونه څوځله هم رامنځ ته شي، رييل او يا جوړه کونجوګيري کملکس کيدی شي.

که $x_1, x_2, ..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځايونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاينيز فاکتورونو د ځلونې په څير په لاندې ډول ليکل کيدی شي:

$$y = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)a_n$$

د هورنرشيما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونيول شي:
که په يوه n - م درجه پولينوم کی يو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوايفيځينت يا ځله ووني لپاره دې صفر وليکل شي.

بيلګه ۱۵ . ۱۱ :

5 - مه درجه ټول ريشنلفنکشن
$y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځايونه $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$ لري. نور صفرځايونه دې پيداکړی شي او فنکشن دې د لاينيزو فاکتورونو د ځلونې په څير وليکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې يو په بل پسی د پولينوم ويش يو پاتی 2 - مه درجه پولينوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
$x_1 = 2$		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
$x_2 = 2$		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
$x_3 = -2$		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم (2 $x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله

د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$

لپاره لاندې د حُل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i$

$)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول ليکل کيږي

$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$

ددې لپاره چی د دريمي او جګو درجو د ټول ريشنلفنکشنونو يوه ځيره يا تصوير ولرودی شو، نور کرکتريستيکی يا د خويونو ټکی يی د ديفرنځيالشميرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفيرنځيالشمير له مرستي کار واخلو ، کيدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وينا وي وکړی شو. موږ په ليديدونکی ډول د فنکشن د پولی کليمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټيك تعريف شي. دا د بيلګي په توګه دا مانا لري

چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره ($f(x$تل ارزښت g ته نزدې کيږي، که x د oe يانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی

xn -> oe

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي
او xn ->±oe دx ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
(کږه له oe - ښخه oeد په لور ځي) .
که n جوړه او a_nکمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کږه د oe - ښخه د oe - په لور ځي).

که n ناجوړه او a_n کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کږه له oe - ښخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_nکمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
کږه لهoe ښخه د oe - په لور ځي)

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$
$$n,m\in N_0; a_k,b_i\in R; Q_m\neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیږي، که n<m وي او نااصلي مات دی
که $n\geq m$ ، نااصل مات فنکشن کیدی شي چي د پولینوم ویش له لارې تجزیه
(توټه) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریښتونی ماتی برخی د زیاتون په څیر
ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن
باندې دماتباندې فنکشن ویش ښخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$ پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره يو صفرځاي لري، که $x = x0$ وي نو باور لري:
$P_n(x_0)=0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x=x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0)=0$ او $Q_m(x)=0$
د $x=x_P$ لپاره يو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P)\neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بيلګه ۱۵ . ۱۳ :
فنکشن $y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو توټي کولو وروسته په لاندې فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x=x_0=3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشونه د $x = x; L = -2$ لپاره صفر دي (تشځای)
د $x=x_{P1}=0$ او $x=x_{P2}=0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای (ټيك ناپای ځای بللکيږي) xpکی کره داسيمپتوتي کربنې $x = xP$ ته نزدې کيږي.د يوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن (n<m) د x په جګ پوتنځ يعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ويش څخه لاس ته راځی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ځیره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کيږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه تولریشنل برخه.
د نااصل مات فنکشن ځیره د ±oe <- x سره ، ځان خپل ټولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

الف: y = x /(x²+1) د x0 = 0 په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او دx -> ± oeلپاره دx- محور (y = 0) د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: y=(x²+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2) صفرځایونه(x²+2x-3 =0) په x1 =-3 او x1=1کی لري . تشځای نه لري او په x3 = -2 کی قطب لري دا په دې مانا چی x = -2اسیمپتوتی دی، او د x →±oe لپاره فنکشن y = x اسیمپتوتي کيږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

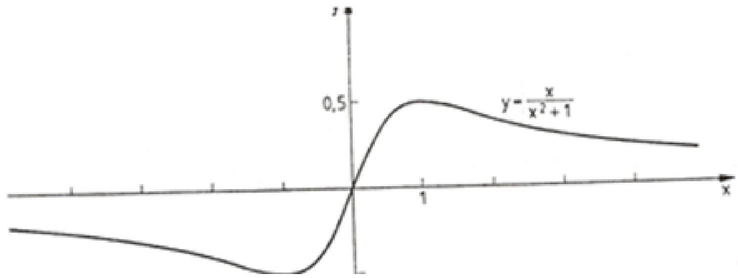
موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

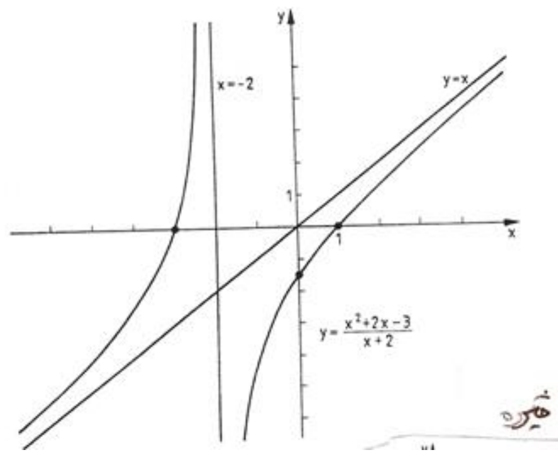
$$y=x^n; n\in Z\setminus\{0,1\}............................(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پيژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیاتیز یا مثبت تولګڼ n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه تولګڼ nلپاره تولریشنل فنکشن دی. د تولګڼ n لپاره تولی کرې د تعریف ډیری(- D = oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oeاو ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري.
(څیره ١٤ الف ١٥) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe
او(W = (-oe,oe دي او (-1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library





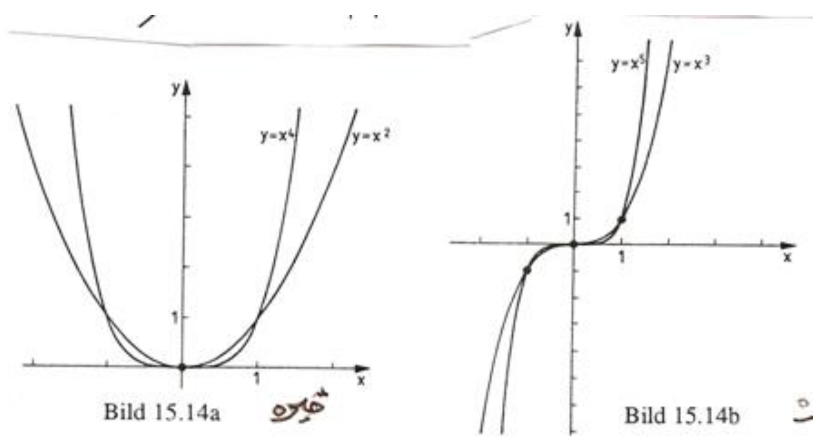


Bild 15.14a

Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په $x = 0$ کی د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپټوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز) nلپاره ټولی کرۍ د پیژند ډیري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$D = (-oe,oe)\setminus\{0\}$ د ارزښت ډیري $W = (0,oe)$ لري او ګډټکي $(1,1), (-1,1)$
؟؟؟ ځیره ش. ۱۵/۱۵الف) .
د ناجوړه ګڼون (کمیز n)لپاره $D = (-oe,oe)\setminus\{0\}$ او $W=(-oe,oe)$ او $(-1,-1)$ $(1,1)$
ګډ ټکی دی (ځیره »۱۵ . ۱۵ ب) .
دوه ځیرې دي

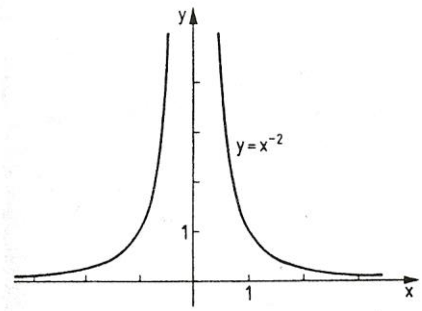


Bild 15.15a

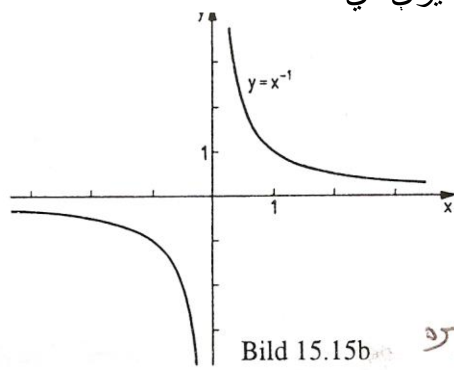


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي.(پرتله بيلګه(بيلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کينې وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- يا پر ښت فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ , n \in N\setminus\{1\}\ , D = [0,\infty), W = [0,\infty) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15,8_b)$$

او ريښه فنکشن نوميږي (پيژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کيدی شي و ريشنل ايکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ريشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ , a \in Q\ , x > 0 \qquad (15\ .\ 8c)$$

نو د ريښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په ځير وپوهيدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرښت بيرته پوتنځ فنکشن دی.
ټوليز پوتنځ فنکشن پيژند د رييل ايکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رييلګڼونو کليمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

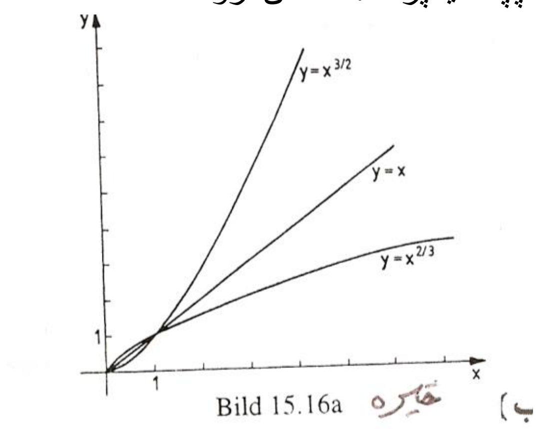
پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R \ , x > 0 \qquad (15.8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} \ , x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښت فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} \ , x \geq 0$



(خیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

خیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2 \ , x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کې مو وویل چې یواځې د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښت فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په پام کې وي.

د بیلګي په توګه فنکشن $y=x^3$ په ټول تعریفیدیري کې مونوتون پورته کیدونکی دی او له دې امله ټول په ښت کیدونکی وی، د $y = \sqrt[3]{x}$ فنکشن $y = x^3$ په پیژندیری ($D = [0,\infty]$ کې پر ښت فنکشن دی، په داسی حال کی، چې د $y= x^3$ پرښت فنکشن د $D= (-\infty,0]$ سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=a^x, a>0, a\neq 1$ ....(15,9)

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي.

(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پیژند ۴ . ۱ وکتل شي)

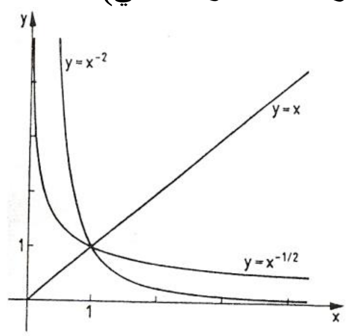


Bild 15.16b څېره

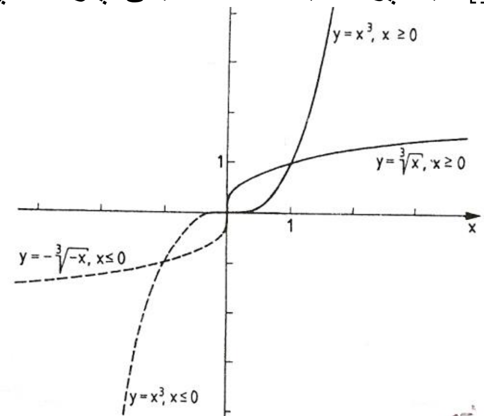
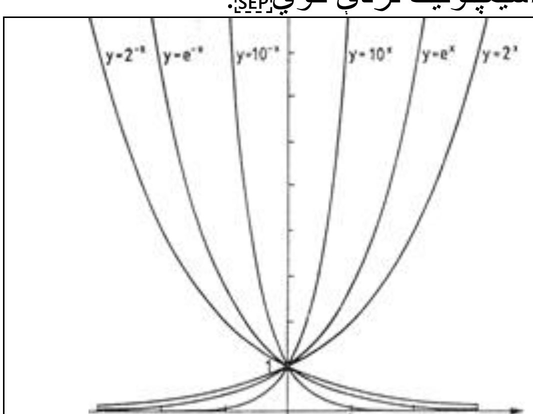


Bild 15.17 څېره

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژندډیری(D=(-oe,oe او ارزښتډیری(W=(o,oe لري. د $a^0=1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کرو ګډ ټکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹) په کلکه مونوتونجګیدونګی دی اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنزدې کیږي. د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نزدې کوي.



کسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګګی
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10
څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \,|= 1$ (15.10)

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژنددیری D = (0.oe) او د ارزښتدیری W=(-oe,oe) لري.

د $y = \log_a x$ کرې د ګرو $y=a^x$ هندارونه ده، په کرښه y=x ۰ تکی(1,0) د تولوکرو ګډ تکی دی (خیره شته دی)

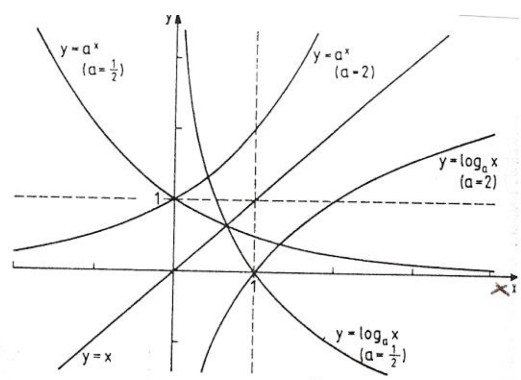


Bild 15.19 څېره

د a>1 لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود x->0 لپاره اسیومپتوتیك د کمیز - y محور ته نزدې کیږي. د 0<a<1 لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د x> 0 لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز - y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر یی یعنې $y = \log_a x$

د a= 2 او a=1/2 لپاره انځوریږي.

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10} x = \lg x$, $y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تريګونومتري فنکشنونو يا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کيږي يا راوړل کيږي.

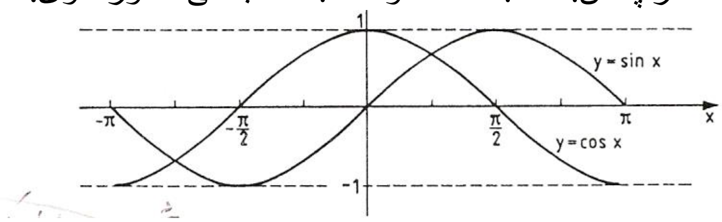
$$y=\sin x\ ;D=R,W=[1,1]\ldots\ldots(15,11_a)$$

$$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]\ldots\ldots(15,11_b)$$

$$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z\ldots(15,11_c)$$

$$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z\ldots\ldots(15,11_d)$$

د دې ګرټونګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تريګونومتريکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x يو جوړه فنکشن يا – بلواک دی.

تريګونومتريکي فنکشنونه پريوديکي فنکشنونه دي(مقايسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه y=sinx , y= cosx پريودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x\ ;\ \cos(x+2k\pi)=\cos x\ , k\in Z$$

لاندې فنکشنونه پريود π

(c) ketabton.com: The Digital Library

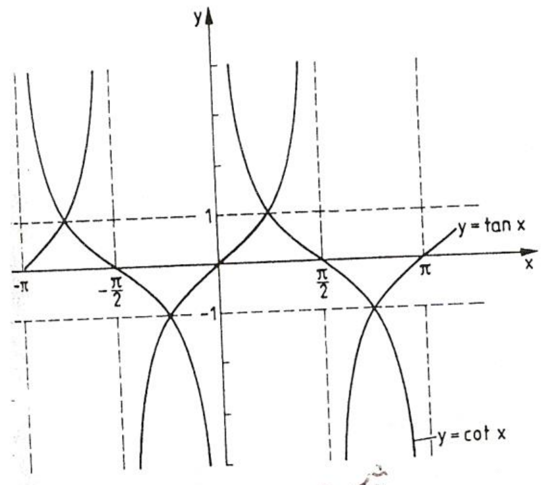


Bild 15.20b

لري $y=\tan x$, $y=\cot x$. دا په دې مانا چي

$$\tan(x + k\pi) = \tan x, \quad \cot(x + k\pi) = \cot x, \ k \in Z$$

د تریګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k \in Z$

د $y=\tan x$, $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in Z$ $y=\sin x$ لپاره او د $y = \cos$

x , $y = \cot x$ لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري

یعني $y = \tan x$ په $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in Z$ او $y = \cot x$ په $x_k = k\pi \ , k \in Z$ کی.

د تریګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

فنکشن $y = \sin x$ په ایتروال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دی او په

ایتروال $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $y = \sin x$ لپاره جګیدونکی یا پورته کیدونکی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی٠

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونکی دی

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښنه کیږي.فنکشن

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کیږي.

یادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پیژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی یا ځنځیري فنکشن دی. موږ ترڅیرني لاندې نیسو چي د سا ین فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واریابل t او زیاتوونکی د ساین فنکشن په خپلواك)Argoment(د کړښخیره باندې څه تاسیر اچوي.

۱ ـ د فاکتور a تاثیر په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول یا راکشول دی که (|a| > 1)او یا پرسول دي که

|a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a ـ ځله د فنکشن ارزښت

y = sin t دی، چیرته چی برسیره پردې د a < 0 لپاره په t ـ محور یوه

اینه ځیرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2)

په فنکشن کی a امپلیتودې Amplitude(جګوالی(نومیږي او د شوینګنګ Schwingung رپیدنی پراخوالی یا ښه : سور باندې تاثیر اچوي.

څیره شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

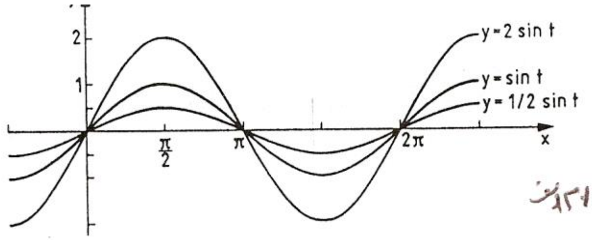


Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې یو وختني غزول که $|\omega|<1$ یا پرسول که $|\omega|>1$ وي تاثیر اچوي.چیرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسیره پردې یو په y- محور اینونه هم ده.

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ یوه فنکشن ارزښت، د $y = \sin t$ خپلواك ω-ځله ، یعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (ځیره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کیږي، دا په پریودې تاثیر اچوي
او $y = \omega t$ پریودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

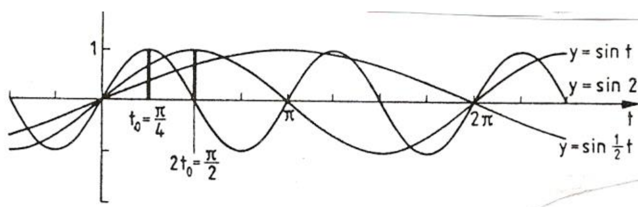


Bild 15.21b

۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور $\varphi>0$ او یا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چی د $y=\sin t$ لپاره۰

د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي ځخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(ځیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$

په فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a.\sin\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

کی φ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کږه $y = a.\sin\omega t$

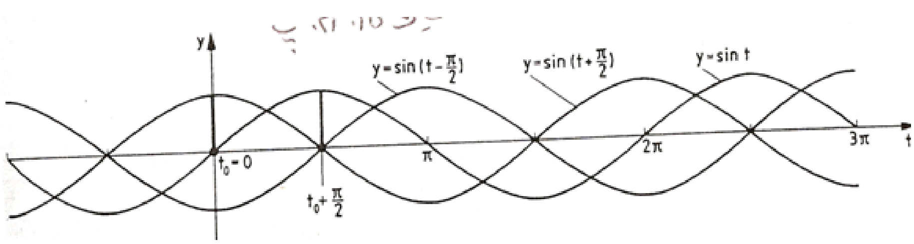
د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.

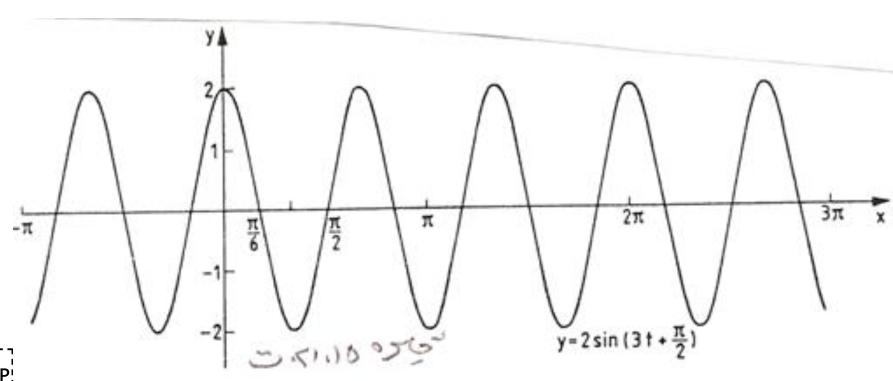
په شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارمونيفنکشن $y = 2.\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ انځوردی.

هغه امپلیتود $a = 2$ لري، پریودې یی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کي

د $\sin t$ و کیڼ لورته راکښل شوی دی.

ځیره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$





د تریګونومتري فنکشنونو(یوائخني) په معکوسوالي یا په ځنوالي کی مور په ځانګړو یو غږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند. ۱۵ ۰ ۱۴ : د لاندې فنکشنونو

$$1.\ y=\sin x,\quad D=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ W=[-1,1] \qquad (15.12a)$$

$$2.\ y=\cos x,\quad D=[0,\pi],\quad W=[-1,1] \qquad (15.12b)$$

$$3.\ y=\tan x,\quad D=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ W=\mathbf{R} \qquad (15.12c)$$

$$4.\ y=\cot x,\quad D=(0,\pi),\quad W=\mathbf{R} \qquad (15.12d)$$

پرځې یا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

$$1.\ y=\operatorname{Arc}\sin x,\quad D=[-1,1],\quad W=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad (15.13a)$$

$$2.\ y=\operatorname{Arc}\cos x,\quad D=[-1,1],\quad W=[0,\pi] \qquad (15.13b)$$

$$3.\ y=\operatorname{Arc}\tan x,\quad D=\mathbf{R},\quad W=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \qquad (15.13c)$$

$$4.\ y=\operatorname{Arc}\cot x,\quad D=\mathbf{R},\quad W=(0,\pi) \qquad (15.13d)$$

د تریګونومتري فنکشنونو برخې په مونوتوني ایترووالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

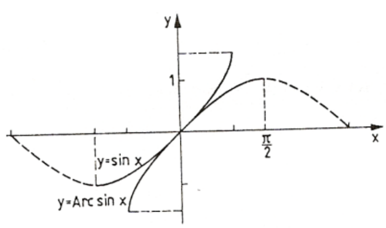


Bild 15.22

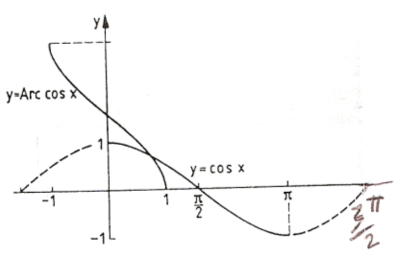


Bild 15.23

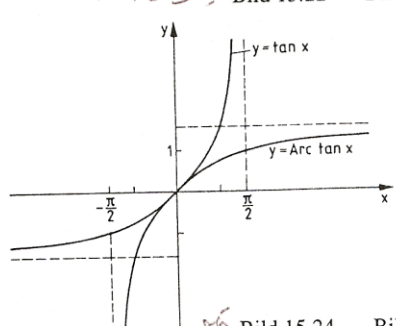


Bild 15.24

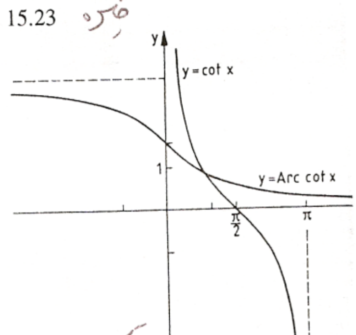


Bild 15.25

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ . ۴ ځنځيري (تړلي) فنکشنونه

پيژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$ لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتديري W سره ورکړ شوی او برسيره
پر دې د $z \in W$ لپاره یو فنکشن $y= f(z)$ ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x تړلی (ځنځيري) فنکشن بلل کيږي.

یادونه : یو تړلی فنکشن کيدی شي چې زیاتو ځنځيرونو سره هم رامنځ ته شي: د بيلګي
په توګه $z = f(x)$
د $x \in D, z \in W$ لپاره او $w=h(z)$ د $z \in W, w \in W^*$ لپاره
او $y=f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،
نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو تړلی فنکشن دی

بيلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي.

ب : په تړلي فنکشن $y = \sin x^2$ کې $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی. په تړلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کې $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی

پ : د

$$z = 2x + 4, \quad w = \sqrt{z}, \quad y = \cos w$$

سره تړلي فنکشن $y = \cos\sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په تړلي فنکشن $y=\mathrm{Arctan}\,1/(x-1)$ کی $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\mathrm{Arctan}\,w$ دباندنی فنکشن دی.

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځيري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شميرنی له » دننه « پيل کيږي.

بيلګي ۱۵ . ۱۶ ته:

ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$$z=x^2=0,5^2=0,25; y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942; y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1$; $w=1/z=1/1=1$

$y=\text{Arctan}w=\text{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشريح:

$y=f(x)$ تحليلي(ښنيزه) وينا بلل کيږي، که$f(x)$ له رييل ګڼونواو بستيزو فنکشنونوڅخه د زياتون، کمون،ځل، ويش، له لارو ترړلی يا ناترړلي(ځنځيري يا نا ځنځيري) جوړيږي

د بيلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندي فنکشن دې صفر نه وي د پوتنخ بنسټ او همداډول راديکاند منفی نه شي کيدلی، او يا بايد مثبت وي، چی د لوګاريتم نومروس بايد مثبت وي او$\text{Arc}\sin f(x)$
همداډول$\text{Arc}\cos f(x)$ ټيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پيژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفډيري پيداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D =(-oe , - 3]\cup[3 ,oe]$

ب) $y=\lg(x+2)+1/(3+2x-x^2)$ له لمړي زياتونی کی بايد Numerus > 0
نومروس وي دا په دې مانا چی : $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$ ،
پس$D1=(-2,oe)$
په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي ($\neq 0$) وي . د مات لاندې صفرځايونه
له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.
نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن تعریفېدیری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفېدیري وي یعنی د
D1 او D2
غوڅېدیری: $D=D_1 \cap D_2 = (2, \infty) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = \text{Arc}\sin((x-1)/5)$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفېدیري په پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$$-1 \le (x-1)/5 \le 1 \Leftrightarrow -5 \le x-1 \le 5 \Leftrightarrow -4 \le x \le 6 \Rightarrow D=[-4,6]$$

ت) $y = 1/\sqrt{(x^2-4)}$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$$x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2>4 \Leftrightarrow x>2 \text{ یا } x<-2$$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیځیت توابعو ایکسپلیځیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ – لاندې فنکشنونه په پارامترانځوروني ورکړ شوي

a) $x=2t$ $y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t}$ $y=2t+1$

c) $x=1/t$ $y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1$ $y=t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۳ – لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتونو اینتروالونه په تعریفېدیریو بیل (تجزیه) کړی، یا لوټه کړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړئ چې لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2/2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر خایونه پیدا کړئ

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په خټ فنکشونونه پیدا کړئ

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1, \infty)$, $W = [0, \infty)$, d) $y = x^3/2$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x - 1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x + 1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x - 3y - 7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پیدا شي، او صفرخایونه x_N و ګنئ!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 - 10x + 12$ f) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2/4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرخایونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ - د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګټل شي. فنکشنونه دګ د خلفورم باندګ انخور شي

a) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1 , x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; x_1 = 1/5 \quad x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x \quad ; x_1 = -2 \quad x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 \; 32x + 40 ; x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6 ; x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2$

۱۱ - مات ریشنل فنکشنونه ورکړ شي :

a) $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ b) $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

c) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$ d) $y = \dfrac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$

e) $y = \dfrac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$.

صفرځایونه دې وګټل شي، پول. تشځایونه او د 8 ± <- x لپاره ځان نیونه!

۱۲ - لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R , W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R , W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) $y = \ln(x-1)$, D =(1,œ), W = R

۱۳ - لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشنونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ - تړلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$y = f(w) \; , w = h(z) , z = g(x)$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = (e^{x+1})^2$ c) $y = \lg \sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan \sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan \sqrt{x} - 3$ i) $y = \text{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\text{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln \sin \frac{x}{3}$ l) $y = \sin \ln (x + \frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}$

p) $y = \text{Arc}\cot e^{2x+1}$.

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$$y = f(v),\ v = h(w),\ w = (g(z)),\ z = k(x)$$

بيل کړی(د تعریف- او ارزښتدېري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\text{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\text{Arc}\cot(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos \frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندې شننیزویا سپړنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدېري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3-x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2-9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2+x-6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \text{Arc}\cos(2x-4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريګوډيکچ يا تريګونومتري Trigonometrie

تعريفونه

د دريګوډيکچ يا تريګونومتري دنده ده چې په هواره يا په هوا کې دريګوډي کچ کړي ، د ځانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تريګونومتريبلواکو. برسيره پر دې د دې په مرسته پريوديکې يعنې په منظمه فاصله پرلپسې تکراريدونکې پيښې (موږ يې تل راګرځيدوني بللې شو) څيړل کيږي.

تريګونمتري تر هيپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پورې تعقيبيدی شي، وروسته له مصري پتوليموس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بيا له هندې او عربو شميرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پيل دا د کاروني يا عملي کيدو د ستونځو سره مخامخ وه. دريګوډيکچ خپل کارونه په استرنومي او فزيك، د ځمککچ يا اندازه کولو، د ځمك اندازونې، نقشو علم، او ابادۍ او نوتيك Nautik (د کيشتيو د لارو نقشه ويستلو پوهنه) کې مومي.

د تريګونومتري مانا يا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ريښتينوالی يا واقعيت کې نغښتی، چې د دې په مرسته د پايکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چې دا تړاو شميرپوهينيز مفهوم لري).

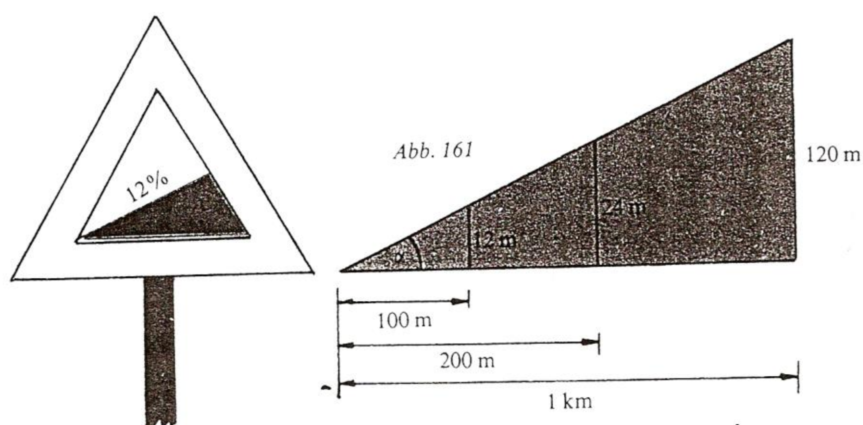
پيلبيلګه: د په مانايا مهم جګوالي يا لويدکرښو نخښه لوحی يا په بله عبارت د زوړي او پيچومی ليکتختی(دې ته دې پام وي چی ما دا کليمی هر چيرې د زوړي او پيچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چی په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟

پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

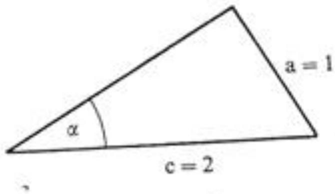


خیره ۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن لپاره ما بلواک لیکلی یعنې همغه د درې له تابع څخه مې را اخستي، چې نورو ژبو کې یې بلواک څیره ده، چې دې امله یې څیره نمونه سمه ده اوکارونه یې څیرونه ده.

ساینبلواک sinusfunktion :بلیکه:

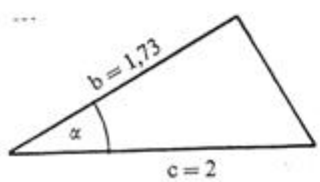


$\sin 30° = \frac{1}{2}$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

څیره ۱۹۶

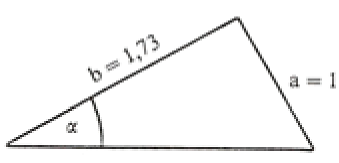
کوسایبلوك Cosinusfunktion :بیلګه:



$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

تنجنتبلواك Tangensfunktion :بیلګه:



$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

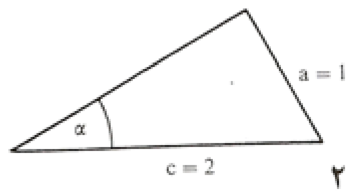
څیره ۱۹۸

$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

د کونجونو د پینونوموونې (دا ټول شته، خو بیاهم اړیین دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلګه:



$$\text{Cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزي}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

شېره ۲۰۱

$$\cos ec\alpha = \frac{2}{1} = 2$$

موږ به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

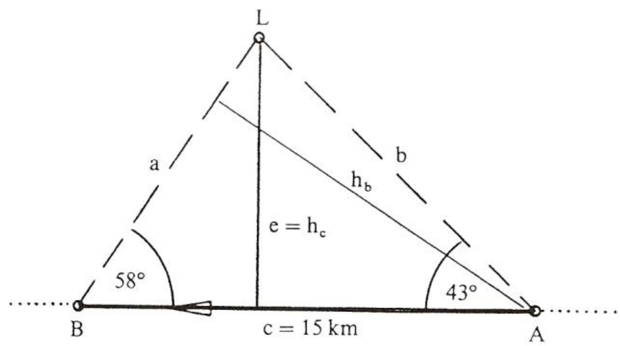
په ښونه دریګوډیو کې شمیرنه

سره له دې چې کونجبلواکي یواځې په ولاړکونجیز دریګوډي کې باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کې هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کې د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه
یوه کیښتی د رڼاډزکړي(کله چې کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چې له هغې داسی ډز کیږي چې له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چې څه پیښ شوي دي). دلته $\alpha = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکربښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کی کیښتنی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیښتنی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لري دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



شیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ km$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin\alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin\alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838\ \text{km}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421\ \text{km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کی مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کی د اړخونو ځاننیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننیونه یا تناسب دی.

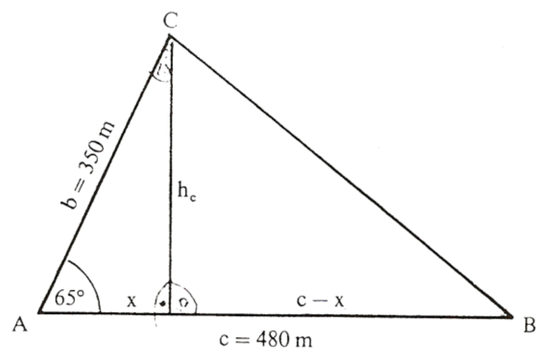
$\sin\alpha / \sin\beta = a / b$ $\sin\beta / \sin\gamma = b / c$

$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کي هم باورلري(تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلګه : په يوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350\ m$
او $c = 480\ m$ دي او يو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.
د B ځخه و C ته به د نبنلولو ستن يا تير څومره لوي وي ؟



څیره ۲۰۳

اوبی يا حل :
جګوالی يا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ويشي.
دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،
ځکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی . د پيتاګوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^{\ 2} + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (څیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos \gamma$$

په هر یوه دریګوټي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وايي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوټي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوټیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوټي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin \alpha$$

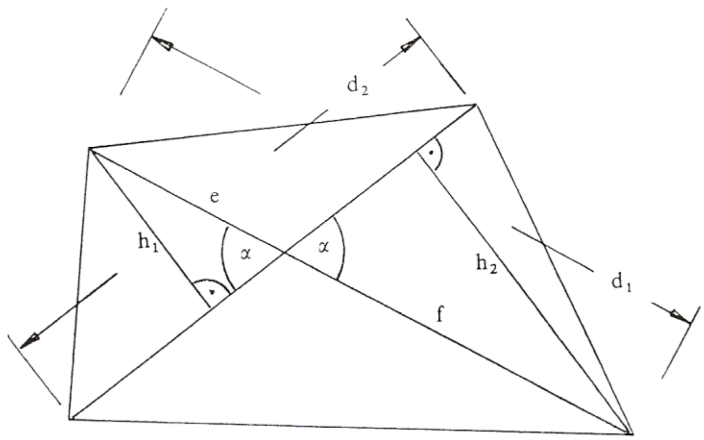
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي.

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2(e+f)\sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \sin\alpha$$



څیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو ترېګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وويل، چی کونجبلواك، نه يوائی د دننه لورته تيرو درېګوډيو لپاره ، بلكه د هغو كونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشريحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواكو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختيا څنګه تصور يا د خيالوړ كيدی شي ؟

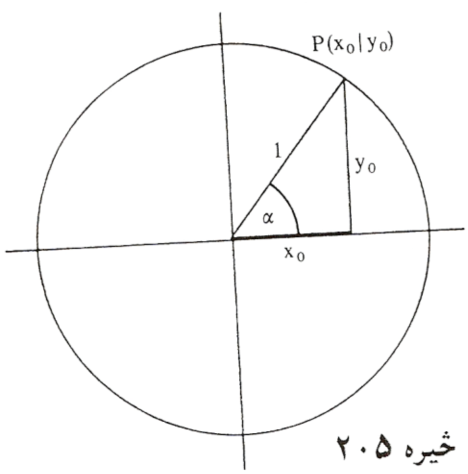
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردۍ ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردۍ ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردۍ منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردۍ ځنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ځنتر پروت دی، (ځیره ۲۰۴ |) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ځخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ځلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردۍ ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیوربدرځونو په ځیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مروند په ځیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



ځیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

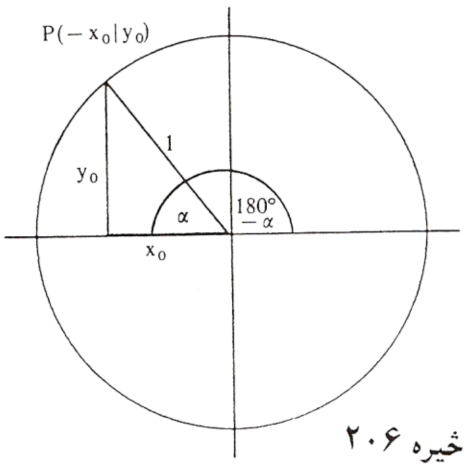
(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاهیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو کونج α جوړ کړي، یعني ځنتریکونج یی $180° - \alpha$ وي.
د « سیوروځیرو» ځخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښايي.



ځیره ۲۰۶

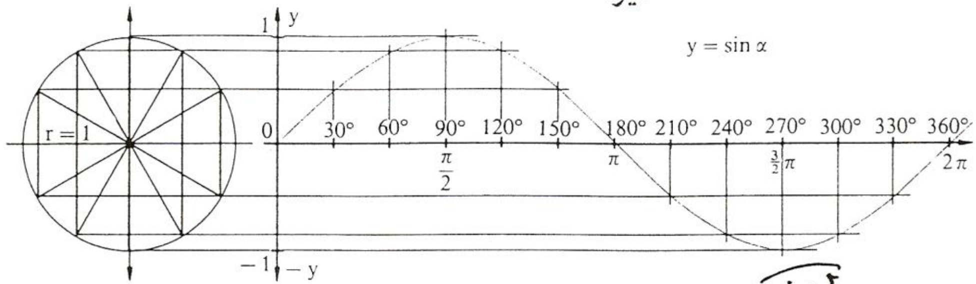
په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج α+360° لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د α+720 لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د α $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ |٥|) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

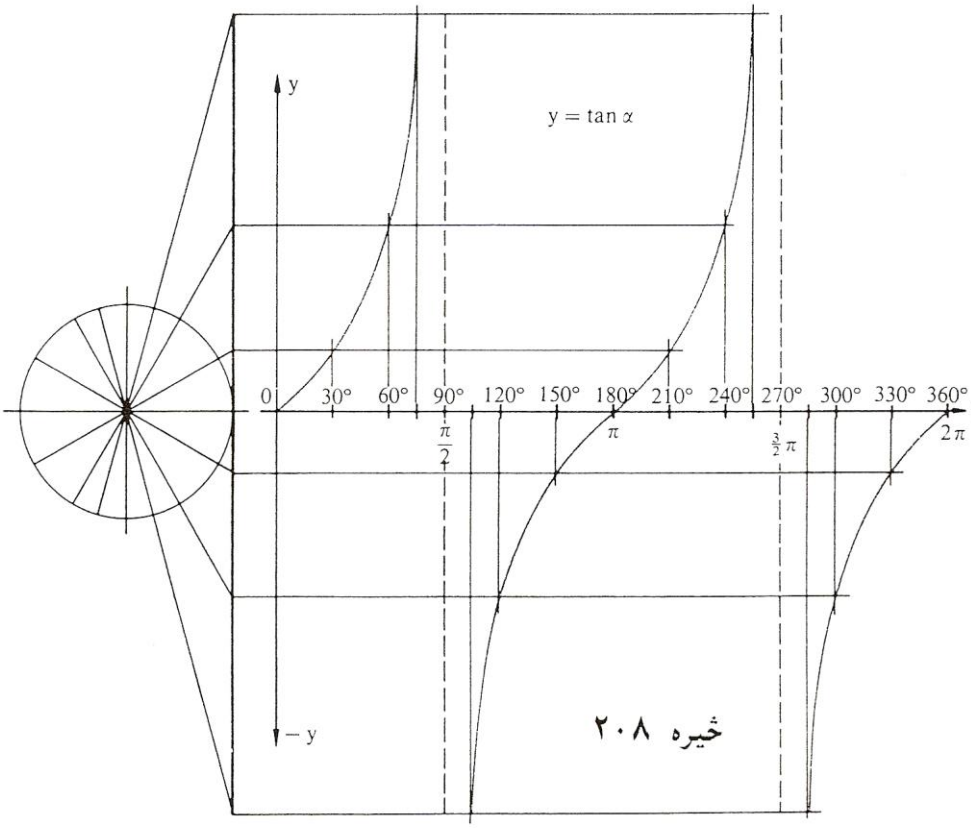
(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: y = sin x; x ∈ ℝ; y ∈ [−1; 1]

د ساین کږه

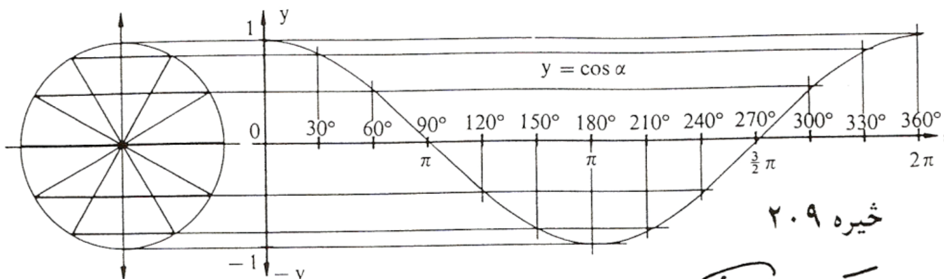


خیره ۲۰۸

Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library

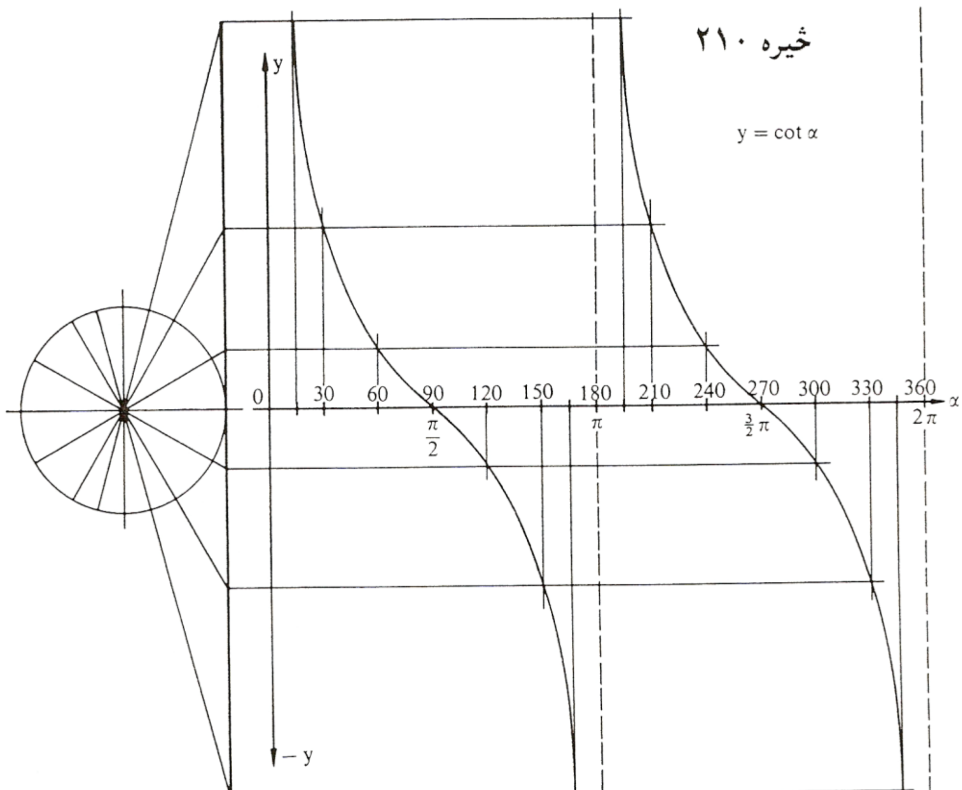


شیره ۲۰۹

Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

دکوساین کرو

شیره ۲۱۰



Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

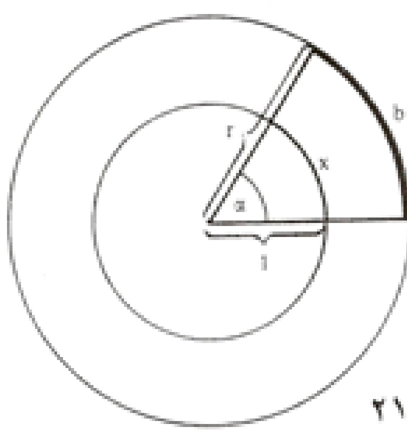
دکوتنجنت کرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره گردي ښايي. هغه، چي لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چی گردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دوارو کچیوونونو یا کچواحدونو کی گډ دي، چی په گښونو اندازه کیږي، بې له کچ یوون ارزښتډیری ریبلگښونه دي، په داسی حال کي چی وتل گښونه (= د تعریف ډیري گښونه) یو یوون یا واحد (درجه یا گون) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.

کونج لويي په واقعیت کی یوون «راد (rad) » لري، مگر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون نه مو نه راهڅوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریگونومتریکی بلواکو کی اېښودل کیږی (د بیلگې په توگه sin~)



ښیره ۲۱۱

ارگومنت (Argument تعریفډیری) بلل کیږي. په تعریفډیري کی کیدی شي چی نوې درجه ، زره درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چي په جیښمیري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دي(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو (ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چې هر کونج پورې یوه ګردبرخه یا ګردۍ لینده اړه لري، نو ټولې ګردۍ پورې ۳۶۰ درجې کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج ∝ پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چې په چاپېرۍ کې ځانله همداسې نیسي لکه په پیل کې ∝ و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $60° = \propto$ له ګردۍ د ۱۰ سانتیمتره وړانګې سره یوه په لاندې ډول ګردۍ لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردۍ چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج ∝ د ۵ سانتي متره وړانګې سره ګردیلینده

$b = 10\pi .60° : 360° = 5,236$ cm

غوڅوي. دا ګردۍ لاندې چاپیری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له ګردۍ د وړانګې $r = 1$ cm سره ددې په څټ یا برعکس کونج ګردیلینده

$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047$ cm

غوڅوي» د دې ګردې چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلګې څرګندیږي، چې لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردې د وړانګې ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردې د ګردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چې په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې خیره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ).\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\, 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه ریيلګڼونه پرېښوول شوي.

بیلګی :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175 \text{ (rad)} \qquad \alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي ، چي لکه په ورکړشوو کرښځانیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږی یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چی دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چی د کونجبلواك ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفیږي ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواك پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواك دی، دا په دې مانا ، چي د بلواك ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

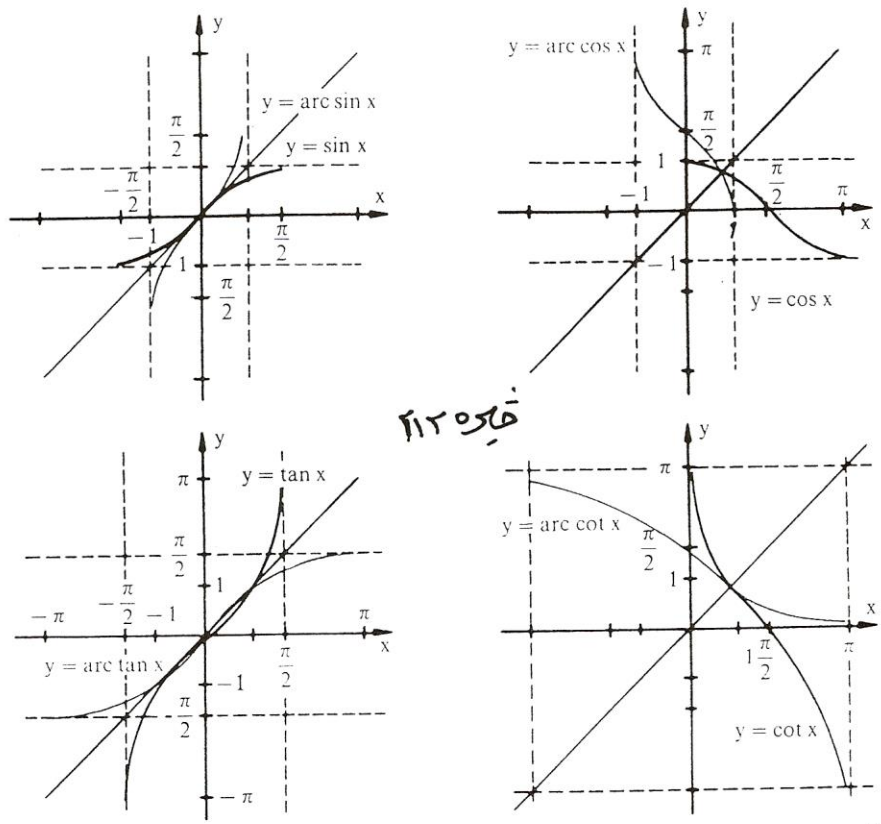
(c) ketabton.com: The Digital Library

مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکرارېږي. د دې لپاره چې په څټکیدنه ممکن شي، نو باید د خپل تعریف ډیری په یوه برخه ډیري رابند یا محدود شي.

تعریف : د یوه (رابند یا محدود) تریګونومتریکي بلواك په څټ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کیږي یا څیکلومتریکي بلواك (لاتین :ارکوس Arcus = Bogen = لینده)

دلته (arc sin(x لوستل کیږي »د x ارکوس ساین. د کونجبلواك تعریفډیری دلته اړونده ارکوسبلواك ارزښتډیری دی او په څټ ارګومنت یا تعریفډیری دلته تل یو ریبلګڼ دی.

Trigonometrische Funktion تریګونومتریکي بلواك	Arcusfunktion ارکوسبلواك
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\vert -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\vert -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \le y \le \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\vert -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\vert -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \mathrm{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$



څېره ۲۱۲

Beispiele: بېلګې:

1. arcsin (0,8) = 0,9273 (rad) = 53,13°
2. arccos (1) = 0 (rad) = 0°
3. arctan (−100) = −1,5608 (rad) = −89,43°
4. arccot (−70) = −0,0143 (rad) = −0,82°

۵ – دا چې كونجبلواك و اركوسبلاك يو د بل په څټ بلواك دي نو باور لري·

sin (arcsin (y)) = y; arcsin (sin (x)) = x
cos (arccos (y)) = y; arccos (cos (x)) = x
tan (arctan (y)) = y; arctan (tan (x)) = x
cot (arccot (y)) = y; arccot (cot (x)) = x

يعنې په لاندې توګه چې

sin (arcsin (0,4)) = sin (23,58°) = 0,4
arccos (cos (π/3)) = arccos (0,5) = 1,0472
tan (arctan (−40) = tan (−88,5679°) = −39,9999
arccot (cot (60°)) = arccot (0,5774) = 1,0472

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشميري کارونی یا استعمال لپاره

داچی پخوا معمول جدولونه د بلواك تعريفېدېري او ارزښتېدېري شميرلو لپاره له كاره غورځول شوي دی او دنده يی ايلكترونيكي ماشينونو نيولی ده، غواړو چي د جبشميري استعمال په هكله هم څه ووايو
كوركمپيوتر زيات وخت داسی فنكشنونه يا بلواكي لري يا وظيفی په كلك اختيار كی لري، چی د درجي اوړون په لينده كچ او په ځپ كوي، مګر شميردرځ په توګه بايد د شميرونكی په پروګرام كی ځای په ځاي شوی وي.
پوره اسانتياوې او زياته كارونه د جبشميرې په غاړه پرته ده، دلته دې توكمی د < .... > سره په نخښه شي:
په قاعده كی دريی بلواك وركړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > كوتنجنت بيا داسی شميرلكيدی شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توكمي سره سړی اركوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > اركوس ساين دی. په عمومی توګه كونج – بي پروا كه په لينده كچ او يا درجه كچ وركړ شوي وي – بايد د فنكشن له مخه وركړ.

بیلګي

١ لاندې جدول همغه د کارونی یا اتعمال لپاره د جبشمیري چمتووالی بنای :

Winkelmaß کونجیچ	TR-Modus په نخښونه	Beispiel بیلګه
Altgrad زړه درجه Neugrad نوې درجه Bogenmaß لینده‌کچ	DEG GRAD RAD	$\sin 45° = 0{,}7071$ $\sin 50^g = 0{,}7071$ $\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.

Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0,5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1{,}047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
$\sin 220^g$	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه – یا نوي درجي همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> ځخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د < DRG –> > سره سورت نیسي.
بیرته یا په ښټ سړی داسی راځي- لکه چی لرل مو- د <INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنې جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجې يې په ګراد دقيقې، ثانيي اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمۍ <DMS-Dd> سره صورت نيسي:

26.75° 30°15′	⟨inv⟩⟨DMS – Dd⟩ ⟨DMS – Dd⟩	26°45′ 30.25°

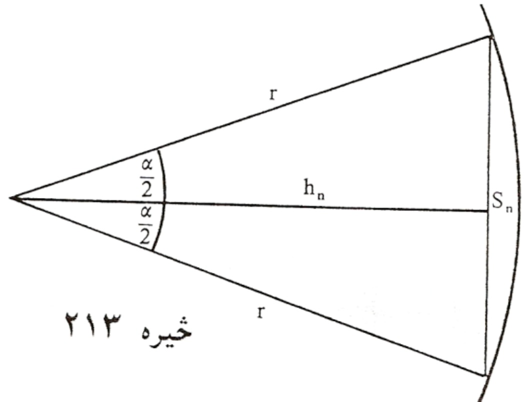
د " $30°\ 15''$ " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميرې د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چې داسې شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کې نه لرو ، خو په هر صورت يې ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پيلبيلګه: دلته دې S_n د يوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چې په يوه ګردۍ کې چې وړانګه يې $r = 5\ cm$ ده، راګير دی.

الف) وښايې چې

$$S_n = 2r\ .\ \sin\ (\ 180°\ :\ n\ )$$

ب) د يوه داسې n– ګوډي چاپيرې U_n وشميرې ، چې $n = 8;16;32;128$ وي، او په نزدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيرې د دې وړانګې r سره وښايی .



خيره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نزدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A وښایی .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د ځینتریکونج ∝ لپاره باور لري $\propto = 360° / n$. د جګی یا جګوالی h_c د کنبلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د ځنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r . \sin\frac{\propto}{2} = 2r . \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin\ (180°/n) = 10n.\sin\ (180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړیپرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

```
180° ⟨STO⟩ ⟨:⟩    8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩    8 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 30.614675
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩   16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   16 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.214452
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩   32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   32 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.365485
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩   64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   64 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.403312
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  128 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.412773
```

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 . S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r . \sin (180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره د نرۍ [illegible]

$360^\circ \langle STO \rangle \langle : \rangle\ 8 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle\ 8 \langle \cdot \rangle\ 12.5 \langle = \rangle\ 70.710678$

$\langle RCL \rangle \langle : \rangle\ 16 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle\ 16 \langle \cdot \rangle\ 12.5 \langle = \rangle\ 76.536686$

$\langle RCL \rangle \langle : \rangle\ 32 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle\ 32 \langle \cdot \rangle\ 12.5 \langle = \rangle\ 78.036129$

$\langle RCL \rangle \langle : \rangle\ 64 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle\ 64 \langle \cdot \rangle\ 12.5 \langle = \rangle\ 78.413712$

$\langle RCL \rangle \langle : \rangle\ 128 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle\ 128 \langle \cdot \rangle\ 12.5 \langle = \rangle\ 78.508279$

د یوه جشمیرې سره ، چې له یوې زخیرې زیاتی ولري ، لکه چې پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتي هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروګراموړ ماشین سره کیدي شي چې د دا ډول شمیرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو یا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تریګونومتریکي بلواکو خویونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چی یوه کونج بلواك تعریفېږی یا ∝ او یا x وي. ددې لپاره چی د یوه بلواك خوي باندې ټینګار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.
د لاندې خویونو لمړی ډله یوائې له تعریفمساوات (د مخه راغلی) او د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریگونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

gegeben (ورکړی) / gesucht (غوښتونې)	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	$\sin x$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
cos x	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
tan x	$\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
cot x	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

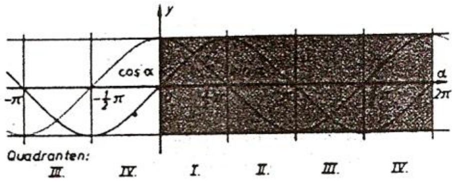
لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا ، چې د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکرارېږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجی) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجی (180°)) لري.

$$\left.\begin{array}{l}\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \\ \tan(x \pm k\pi) = \tan x\end{array}\right\} k \in N$$

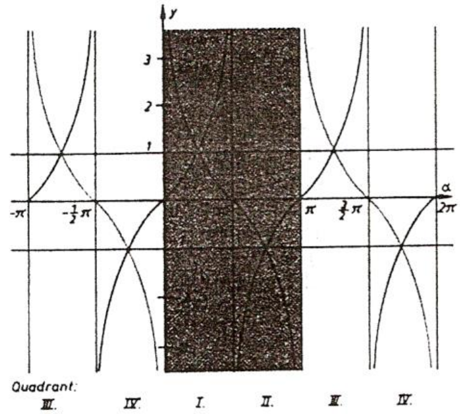
$$\left.\begin{array}{l}\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \\ \cot(x \pm k\pi) = \cot x\end{array}\right\} k \in N$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن په ډول د پاس راګرځېدنه



د تنجنت او کوتنجنت فنکشن په ډول ښکي :

$\sin 50°$	$= \sin(50° + 360°)$	$= \sin(50° - 720°)$	$= 0{,}76604$	
$\cos -30°$	$= \cos(-30° - 360°)$	$= \cos(-30° + 1080°)$	$= 0{,}86603$	
$\tan 2{,}5$	$= \tan(2{,}5 - \pi)$	$= \tan(2{,}5 + 5\pi)$	$= -0{,}74702$	
$\cot 10$	$= \cot(10 + \pi)$	$= \cot(10 - \pi)$	$= 1{,}54235$	
$\sin 35°$	$= \sin(180° - 35°)$	$= -\sin(180° + 35°)$	$= -\sin(360° - 35°)$	$= 0{,}573576$
$\cos 35°$	$= -\cos 145°$	$= -\cos 215°$	$= \cos 325°$	$= 0{,}81952$
$\tan 0{,}6109$	$= -\tan 2{,}5307$	$= \tan 3{,}7525$	$= -\tan 5{,}6723$	$= 0{,}700208$
$\cot 0{,}6109$	$= -\cot 2{,}5307$	$= \cot 3{,}7525$	$= -\cot 5{,}6723$	$= 1{,}428042$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو نو په دې برسیره په ټینګه روښانیږي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګی:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځی د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چی یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

د دغه جدول د هغه جدول په مانا دی او کیدای شي تیزي یا جوړوی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې جدول څخه کېدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

$\sin x = \cos(\ \ /2 - x) \qquad \cos x = \sin(\ \ /2 - x)$
$\tan x = \cot(\ \ /2 - x) \qquad \cot x = \tan(\ \ /2 - x)$

دا ګومان کېدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

$\sin\ \ = a / c$ او $\cos ß = a / c$

د $\ \ - 90° = ß$ له امله لاس ته راځي :

$\sin\ \ = \cos(90° - \ \ )$

په ورته توګه نور ي غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له څیرو څخه هم لاس ته راوړل کېدی شي، څکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د $x = \ \ /2$ کرښی ته یو بل سره محورسیومتري څغلي :

له څیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

$\cos(x) = \cos(-x)$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$\sin(x) = -\sin(-x),\ \ \tan(x) = -\tan(-x)\ ;\ \cot(x) = -\cot(-x)$

یادونه : په دې نلواکو کي کېدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0,86603$$
$$\cos 0,75 \quad = \cos(-0,75 \quad) = -0,70711$$
$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0,57735$$
$$\cot 1,3 \quad = -\cot(-1,3) = o,27762$$

د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لاینی نه دي(د فنکشنګراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعریفډیرې پورې ساده ډبل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$$\sin 30° = 0,5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زیاتولو د یوګونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلګی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x .\cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $cis(x- y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 - \cos x)}$

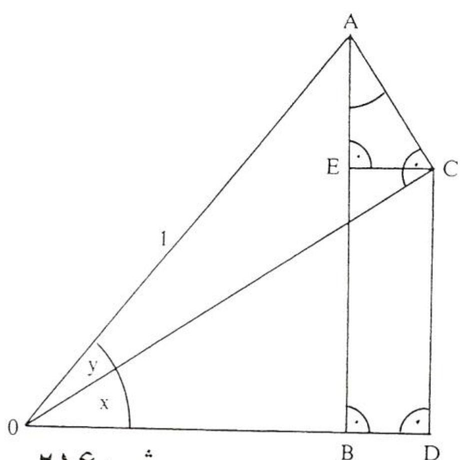
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



خیره ۲۱۶

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x + y); \quad |OB| = \cos(x + y)$

$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$

$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

پر سبره پر دې ډول :

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ځای په ځای کولو څخه ښوونه په لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1′. **2′.:**

3. **4.:** $x = y$. ځای په ځای کړه

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2};\ t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

پس لرو

$$\sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

همداراز

$$\sin y = \sin(z-t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ښوونه په ورته توګه څخه له ځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

د وروستنۍ نیوني له لارې ښوونه کړو

8.: $(*)\ \sin^2\frac{z}{2}$ durch $1 - \cos^2\frac{z}{2}$. په (*) کې و لیکه یا کېږده

9-10: د 11 پوښتنې له 1 او 2 او ښکېنت د تعریف څخه لاس ته راځي

بلواك يا فنکشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لکه چې په پيل کې مو وويل په طبيعت او تخنيك کي ډيرې پيښې شته دی چې تل بيرته راګرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديکي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه کوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ۱- او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلې لور داواقعي د کونج په واك کی نه دي بلکه د وخت په واك کي دي د يوې راګرځيدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولکيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې کارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه کی راڅول شويدي، ګراف يی ورزياتی ځيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د کوساين بلواك چي په $\pi/2$ سره راکښنل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستنې: له ښي لور څخه)

بيلګی	دکارونی ساحه	تاثير	بلواك
ځيره ۲۱۷	ټولی تلبيرته راګرځيدونی تعامولونه		$y = \sin(x)$
ځيره ۲۱۸	د دوه مساوی او بدل ښپيالونډ يو په بل بدلونی	د y-لور په نږدې راکښنه	$y = \sin(x) +d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځېره ۲۱۹	په بدل برېښنا جريان کې د برېښنا او ښيالونګ تغير ښودونکو ده	د فاز تغير يا ځای بدلون	$y = \sin(x+c)$
ځېره ۲۲۰	د يوه پندل خوځېدنه	د امپليتود د ځای بدلون فاکتور - 1 د 180° فاز ځای بدلون دی	$y = a \cdot \sin(x)$
د ځېره ۲۲۱	د يوه بنسټيزې ځړېدونکي څېړنه په يوه وخت داسې چې له ډېرې لړزې له لګېدو په دغه الوتې او ازادې	د دورې تغير يا بدلون $b>1$ سرعت $0<b<1$ په کرار کېدل $b<0$ په شا ګرځېدنه له محور دی	$y = \sin(bx)$
ځېره ۲۲۲	کمپلکس پېښو د جريان يا عمل	عمومي حالت	$y = a \cdot \sin(bx+c)+d$

تمرينونه

۱ – د لاندې ورکړې سره څېره بله کړی

$4°6' = 4{,}1°$; $10°, 5' = 10°30$

a) $6{,}75° =$ b = $120{,}48° =$ c) $-75{,}65° =$

d) $52°16' =$ e) $97°13' =$ f) $44°44'\,44'' =$

۲ – په درجه کچ ي وليکی

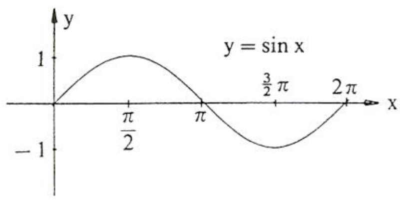
a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x\,(2/3)\pi$

d) $x = 4$ e) $x = -3$ f) $x = 4{,}7$

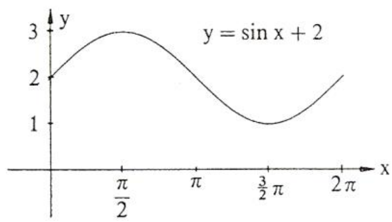
۳ – په لينده کچ يی وليکي

a) $15°$ b) $-60°$ c) $540°$ d) $20°15'$ e) $15{,}75°$

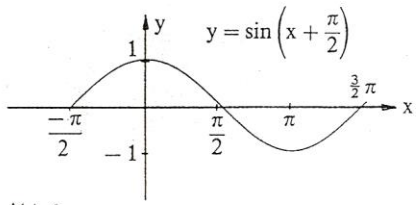
(c) ketabton.com: The Digital Library



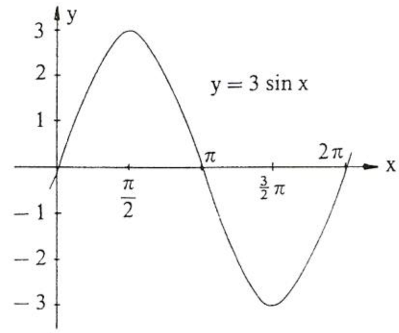
خیره ۲۱۷



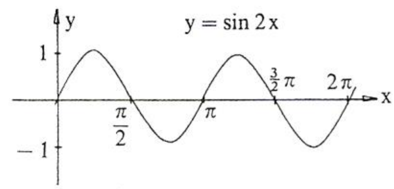
خیره ۲۱۸



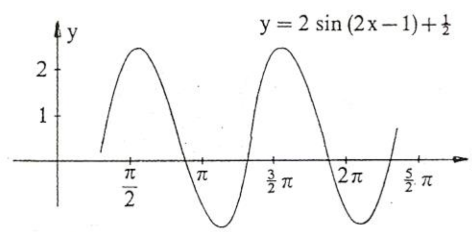
خیره ۲۱۹



خیره ۲۲۰



خیره ۲۲۱



خیره ۲۲۲

د دې بلواك ګراف د ساین کرېږ $y = \sin x$ څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کیدل

۲ – د نیمی راګرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه

۳ – په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په $1/2$ پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) sin20°   b) sin(-30°)   c) sin 172°   d) din1°4'

e) cos 35°   f) cos 380°   g) cos(-27°)   h) cos47,9°

i) tan 11°   k) tan (-15°)   l) tan 33,33°   m) tan 13°13'

n) cot 870°   o) cot (-11°)   p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8   s) cos α = 0,9   t) tan α = 2,5

u) cot α =-1   v) sin φ = 0,3   w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4   y) cot φ = 0,3   z) arcsin(x) = π /2

۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوړي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی توټې وشمیرئ

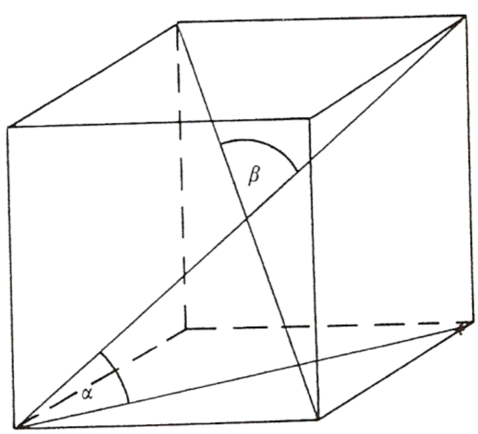
۶ – په مساوي پښیز دریګوړي کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی توټې وشمیري



شیره ۲۲۳

۷ – د یوه پڅکونجیز (α > 90°) دریګوړي لپاره ساین وشمیرئ

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز دریګوړي لپاره وشمیرئ (α > 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

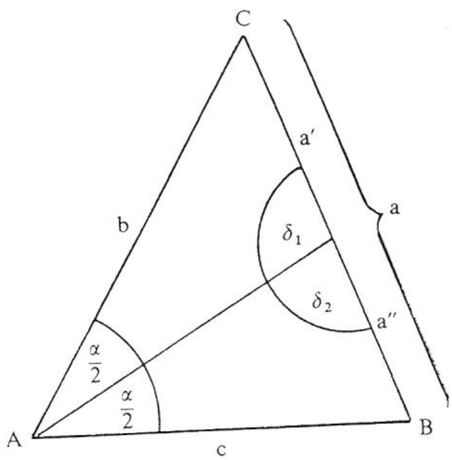
ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟
څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی

$r_1 = 5\ cm\ \ , r_2 = 4\ cm$

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8cm$ ورکړ شوی دی.
دد دواړو ګردیو د تماس
مماسونو غوڅکونجی وټاکی
او د کډي غوڅونی اوږدوالی .



څیره ۲۲۴

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی
ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه
په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د
ساین جملی په مرسته حل
(اوبی) کړی(څیره۲۲۴).

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،
چي ۵۰ ،۱ متره جګ دی،
یوه زینه ورجګه شي
میلانکونج ∽ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوڅي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا
کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟

پ) د یوه زوړندي پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره
لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴ – یو د اوبو بیلر (کتله = ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه دره پورته خیژول کیږي، چې میلانکونج $\alpha = 25°$ لري. د وزنزور په زوړندزور تختي سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور (د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دي ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن $1\ kg = 9{,}81N$).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چې هره یوه یې **۵۳** متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج $60°$ دی په ښنه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې **۵۳** متره جګي ونی سیوری **۵** ، ۱۲ متره اوږد دی. په څمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه **۵** متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی $\alpha = 18{,}5°$ او ښیښکی یی $\beta = 8°$ لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج **۴۷** متره جګ دی، او څوکه یی د ښنی ټکي څخه **۵۰ ،۴** متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی **۱۵۰** متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په څمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه **۵۰۰** متره واټن ولري؟

پ) د **۵**، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی **۱۶۰** متره وي؟

– که جګوالی یي **۱۳۷** متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي **۱۴۳** متره وي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

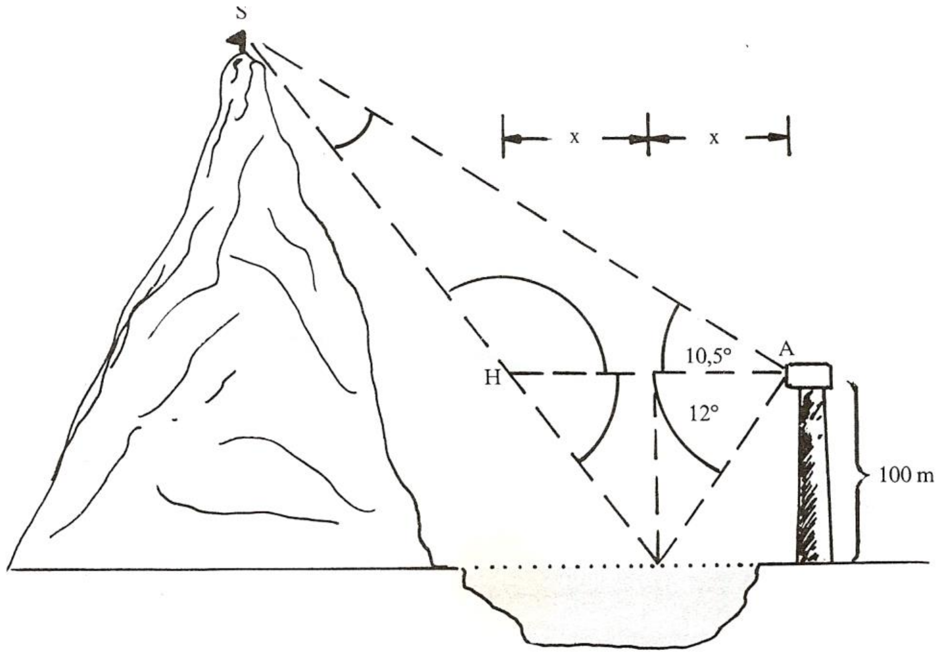
۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ
د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنګهوارې دریواړه دنننی کونجونه څومره لوي دي؟

۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنستهسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته
لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی
یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

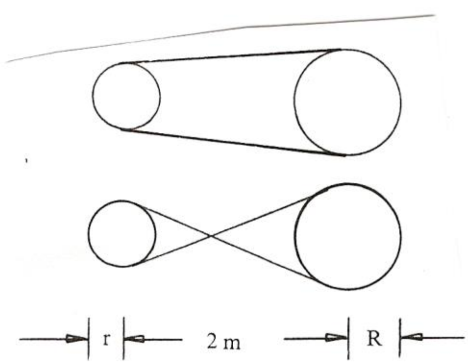
۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د
بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ
څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د
غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی
دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په
لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې
لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ
باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۲۵



شیره ۲۲۶

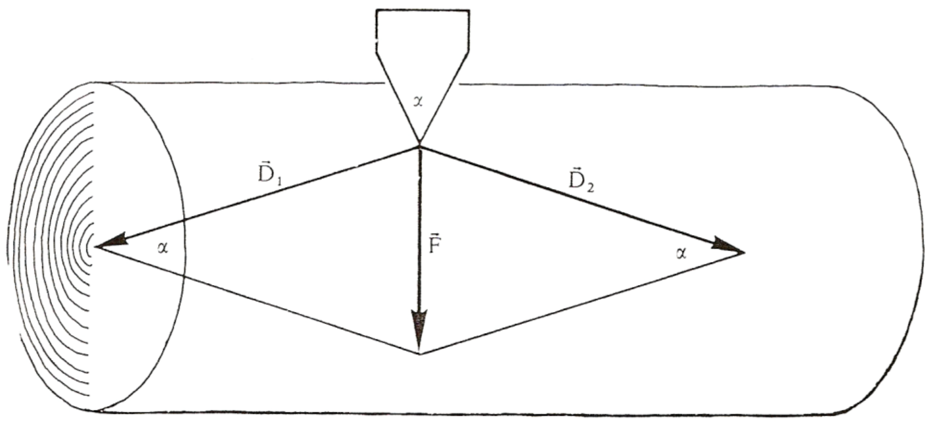
۲۳ - الف) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښولو چیترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري $r = 22$ cm , $R = 35$ cm , $|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړی به څومره اوږدې وي که د اتیران په ځیر له چیتروګانو یا تیکلیو د اکي ځیدلي وي ؟

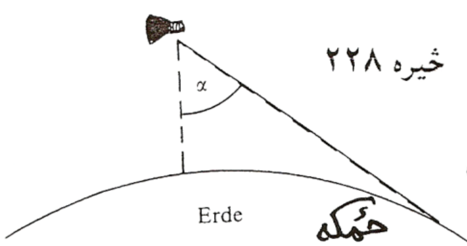
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۴ الف) د ونی په ستهه یو کایل)موږی) په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د ستهی درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|F|=|D|$ ؟



څیره ۲۲۷

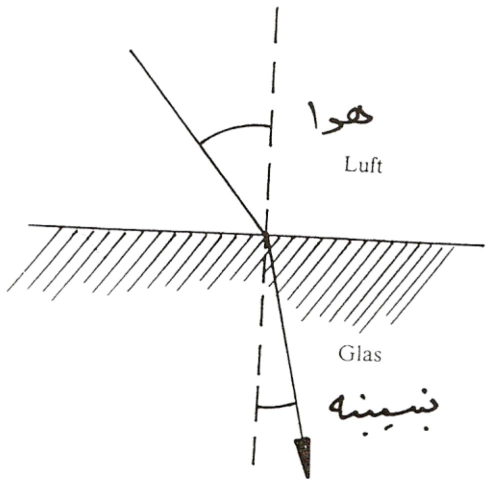


څیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه α کونج لاندې لیدل کیږي (څیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکی وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګادی د $v_{\alpha} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $= 115°$ کونج

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډي د اوسپنی
ټیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي.
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو
د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟

۲۷ – که د لمرووړانګه په دوه مختلفو
طبقو ولوېږي، نو خپلی لور ته تغیر
یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius
د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د
ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون
وايي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او
ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر
دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

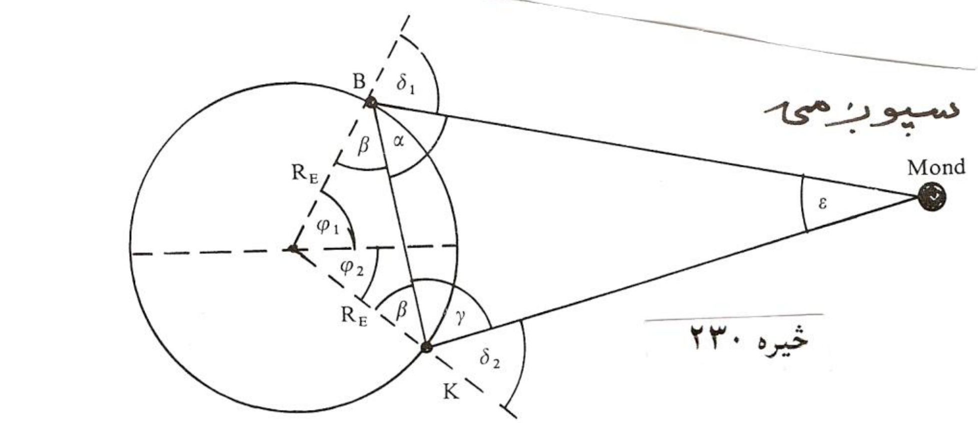
$$\sin \alpha \ / \ \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو (1,33) n = 1,5 دی. وښايي،
چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل
شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52, 52°$) او لکه د ښو هیلو
په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د
سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
. $\delta_2 = 55,72°$ او $\delta_1 = 32,08°$
وشمیری |KM| , ß , |BK| او له دې څخه d_{EM} .

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t
تړواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin(2\pi/T)) .t + k)$ له لارې
ورکړ شوي. دلته $(2\pi / T)\, t = x$ هغه کونج دی، کوم چي په T وخت
کی وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه ځرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته
کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګنډیرۍ پر بله ګنډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \qquad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي حَل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7, 4)$$

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کيدی شي په لاندې ډول وليکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4)   له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ايماجينار ګڼ يوون(واحد) تيوليز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ايماجيناريوون(واحد)$z = i$ يو ځانګړی ايماجينارګڼ $b=1$ دی

د تيوليزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

په لاندې ډول د څلوری پوره کولو يا مربع تکميلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

لاس ته راځی يالرو<=

$$x^2 + px + q = (x+ p/2)^2 = +(q-p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x+p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$\pm\sqrt{p^2/4 - q} = \quad {}_{1,2} \quad (x+p/2)$$

نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q},.....................(7,12)$$

د$p^2 = 4q$ لپاره رییل «دبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیونې یا حلونه منځ ته راوړي۰

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دی

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a,b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi \ , \ i^2 = -1; \ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیری په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi,...................................(7,14)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي۰ لنډ کنجوګيري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ...(5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اینښول شوی

ګډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سرې د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې:$i^2 = -1$

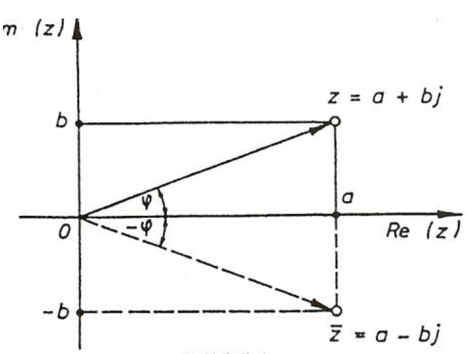


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته ځیره دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطځې ریيلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته ېپایماجینار برخه وایې لکه څنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوریږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۱۰۷ زیاتون او کمون:

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې ریيل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۱۰۷ ورکړ شي:

$$\begin{aligned}
& z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i \\
& \Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i \\
& \Rightarrow \\
& |z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13} \\
& -z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i
\end{aligned}$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعني د(z2-) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

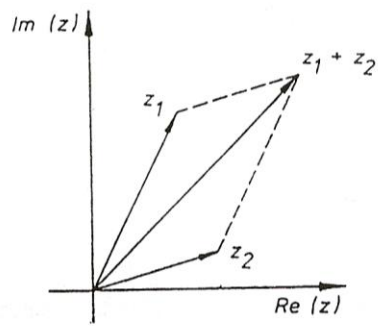


Bild 5.2

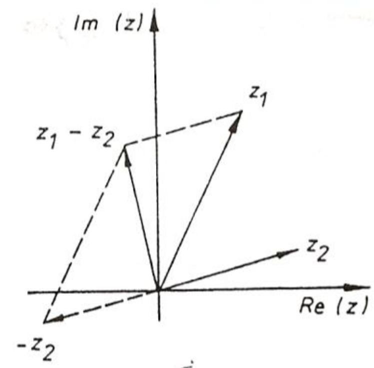
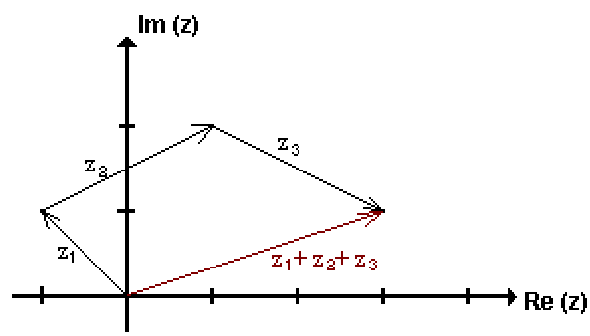
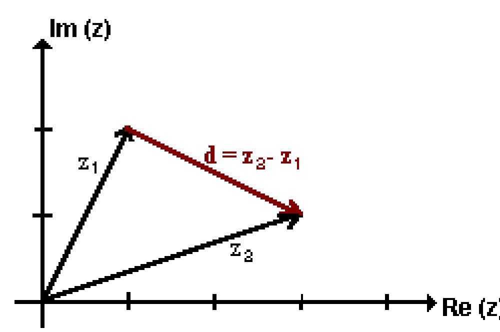


Bild 5.3

یا لاندې:



په پورته او لاندې ځېرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي۰



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي۰

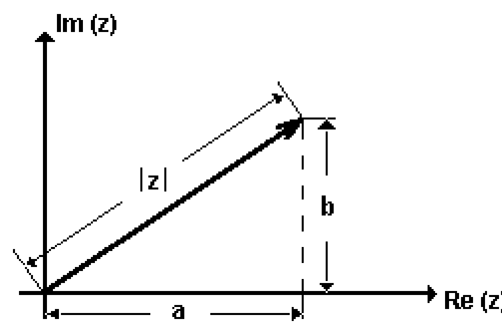
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي٠ مخامخ ځیره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي



$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

په درې ګوډي کې د اړخونو ځانتیونه یا تباسب له امله باور لري

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$$
$$\Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 +a_2 b_1)i \qquad (7,20)$$

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab + ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7,22)$$

۷ ۰ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1i):(a_2+b_2i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{\overline{z_2}}}{z_1\overline{\overline{z_2}}} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)} = \\ = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \\ = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوهمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د او $Z1$ لپاره له $Z2$ سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3} i)$ d) $z = -1 - i$

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفريق(زاتون او كمون)

۲ . ۱ – د شميرنې او كارنې يا رسم كونې له لارې پيدا كړئ

a)(1+2i)+(2+i)   b) (-2+i)+1-2i)

c) (1-2i)-(1-2i)   d) (-1-2i)+(2-i)

۲ . ۲ - د شميرنې او كارنې يا رسم كونې له لارې پيدا كړئ

a) (22 + 5i) + (2 + i)   b) (3 + 2i) - (5+2i)

c) (1+2i) - (1+2i)   d) i -(1-2i)

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې كې a,b,c,d,x,y حقيقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشميرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}\,.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشميرئ

a) $(x+y\,i)\,(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج يا ماتلاندې حقيقي ورګرځوئ (a ، b حقيقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63+16i}{4+3i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوي پوښتني

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکي x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

4.1. a) z_1+z_2 b) z_1-z_2 c) $z_1\cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1+z_2|$ b) $|z_1-z_2|$ c) $\bar{z}_1+\bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1-\bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1|\cdot|z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1\cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $x^2 + (1+i)x - 2(1-i) = 0$

b) $x^2 + (3-2i)x + 3(1-i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16x^2 + 8(i+1)x + 2(i + \frac{9}{2}) = 0$

همدا موضوع له بلکتاب څخه

7 . ايماجينار او کمپلکس ګنونه

Inhaltsverzeichnisخونديونه

- د رييلو ګنونو بنستونه او نيوني يا فرضيي
- ايماجيارګنونه

کمپلکسګنونه

- په ګنونهواره کي د کمپلکس ګنونو انځورونه
- د کمپلکس ګنونو سره شميرنه
- د کمپلکسګنونو زياتون ، کمون
- د کمپلکسګنونو ځل
- د کمپلکس ګنونو ويش
- د کمپلکس ګنونو تولګنيز په توان
- د بينوم درسي جمله
- د موفري فرمول 5.6 Die Moivreschen Formeln
- د کمپلکس ګنونو ريښه 5.7 Wurzeln aus komplexen Zahlen
- توان د مختلفو جګګنونو سره
- 5.8 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

د رييلګنونو بنستونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریيلګڼونو ډیری لکه د مخه مو ، چې ګوته ورته ونیوله د راشنل او ایراشنل ګڼونو له ډیریو جوړه ده (د ریيلګڼونو برخه دې وکتل شي).

ایماجینار ګڼونه Imaginäre Zahlen

د ریيل ګڼونو سیستم پوره نه دی، ګورو، چې د یوه ګڼ څلوری یامربع، چې د کمیز ګڼ سره برابره وي، ریيله اوبیونه یا حل نه لري لکه لاندې

$$x^2 = -1$$

داسې یو ریيل ګڼ نه شته، چې پورته پوره کړي

یوه فورمال اوبیونه یې په لاندې ډول ده

$$x = \pm\sqrt{-1}\ ,$$

چیرته ، چې $\sqrt{-1}$ ریيله اوبیونه نه ده.

دا څلوری یا مربع ریښه د i سره په نخښه کوو، چې له دې پرابلم څخه ووتی شو او څلوری یې په 1 - سره په نخښه کوو .

د دې i لپاره باور لري:

$$i^2 = -1$$

اوس کړی شو، چې ولیکو

$$x_{1,2} = \pm i\ .$$

که ګڼ i د ریيلګڼونو سره زیات ځل یا ضرب کړو، نو د ګڼونو یوه د نوو ګڼونو ډیری ترې لاس ته راځي، د بیلګي په توګه :

$$2i,\ 3i,\ -i,\ 1+i,\ 2+i,\ 1+2i,\ -23+78i,\ 0.45-0.93i$$

او داسې نور.

ټولیزه بڼه یې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$a + bi\,,$$

پورته ګڼ کمپلکس ګڼ دئ او a او b ریيلګڼونه٠ له دې سره هم لګۀ د نورو ګڼونو سره ساده شميرل کيږي، چيرته، چې د i^2 په ځای 1 - ليکلی شو يا په ځېټ: لاندې کې يې بيلګې ګورو

$$(1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i$$

په ټوليزه توګه:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)\cdot(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

له دې سره ويش هم کړی شو، خودا ، چې ستونځمن دئ وروسته يې راوړو.

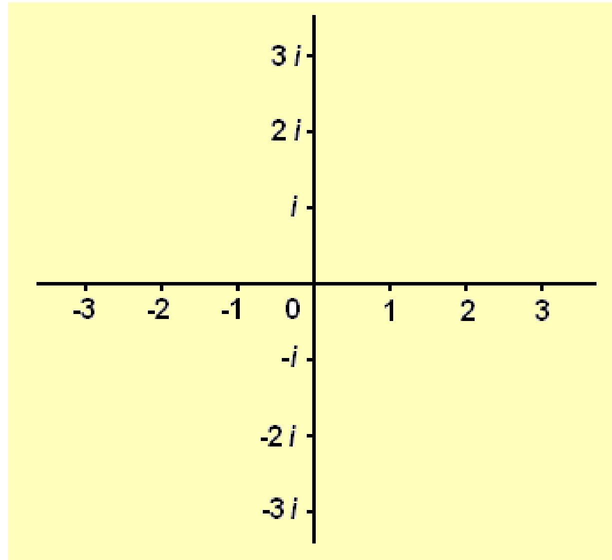
دا لاندې هم لرو

i.2i,i,0,-i,-2i,-3i٠٠٠3.....

دا ايماجينار ټولګڼونه بلل کيږ ي يا بولو ، چې دا هم صفرلري

موږ په لاندې کې د هوارې پروت محور لاندې د ريیلګڼونو محور پوهيږو او ولاړ محور يا څرخونی يې د ايماجينار ګڼونو محور دی، چې د دواړو زياتون کمپلکس ګڼونه دي يا د کمپلکس ګڼونو هواره انځوروي٠.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په لاندې کې يو کپلکس ګڼ په يوه رييل ګڼ يا پيداينتي ګڼ ويشل کيږي

$$mi : n = \frac{m}{n} i \ .$$

په پورته کې m او n رييلګڼونه دي او ايماجينار

$$x^2 = -a^2$$

په پورته کې a رييلګڼ دی، خو x غواړو لاس ته راوړو، لاس ته راوړنه يې يو ايماجينار ګڼ دی.

د دوه ايماجينار ګڼونو زياتون او کمون::

$$a\,i \pm b\,i = (a \pm b) \ i \ .$$

ځل او ويش يې

$$\frac{i}{i} = 1 \ .$$

د دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$pi \cdot qi = -pq$$

او

$$\frac{pi}{qi} = \frac{p}{q}\,,$$

چیرته چې p او q ریللګنونه دي.

لاس ته راوړنه : د دوه ایماجینار ګنونو ځل یا ضرب او ویش څخه رییلګڼ لاس ته راځي، چې په لاندې کې یې ګورو٠

$$i^2 = -1\,,\quad i^3 = i^2 \cdot i = -i\,,\quad i^4 = i^3 \cdot i = 1\,,\quad i^5 = i^4 \cdot i = i\,,\ldots$$

د تولګڼ n لپاره لرو:

$$i^{-n} \equiv \frac{1}{i^n}$$

لاس ته راوړنی بې

Error!

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i\,,\quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1\,,\quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i\,,\quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1\,,\ldots$$

د سره شمیرل ورسته کیدونکي دي.

Komplexe Zahlen کملکس ګنونه

ګډ یا مخطلت ځلوری - یا مربع برابرون شمیرو

$$x^2 - 4x + 13 = 0\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځلورۍ پوره کوونې یا تکمیلوني له لارې ، چې ورسره بلد یو ، اوبیونه یا حل پیداکوو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\,i\ .$$

د دې برابرن اوبیونه نه رییل ګڼ دی او نه ایماجینار ۰ دې ګڼ ته موږ کمپلکس ګڼ وایو **komplexe Zahlen**.

د کمپلکس ګڼونو او د دې سره سره شمیرنه ۰

موږ دا لاندې کمپلکس ګڼ لرو :

$$z = a + b\,i,$$

چیرته، چې a او b رییل ګڼونه دي

د کمپلکس ګڼونو په مرسته کړای شو، چې بې بندیزه ځلورۍ- یا مربع فرمولونه اوبې کړو

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

لاس ته راځي.

دلته چې څه راځي هغه ګران لوستنکی پخپله هم پیدا کولی شي، زه به وهڅیږم، چې دا پرابلمونه پورته کړم یا لرې کړم ،

د لاندې لپاره

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

یو یا دوه رییل اوبیونې لاس ته راځي۰

د

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره اوبيوني په لاندې ډول ليکل کيږي

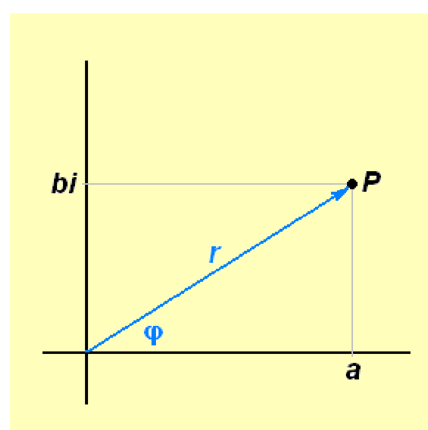
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\ .$$

اوبيوني کنجوګيري کمپلکس دې، دا په دې مانا، چې يو له بل د مختښې له مخه توپير کيږي٠

په ګڼونهواره يا ګنسطحه کې د کمپلکس ګڼونو انځورونه

د کمپلکس ګڼونو ګرافيکي انځوروني لپاره هواره ځان رامنځ ته کوي، چې د ريیل او ايماجينارګڼکرښو څخه غزيدلې ده٠

کمپلکس ګڼونه a + bi د ټاکني له مخې(په بدل وار يا همغه وخت) د يوه ټکي P ، چې کواورډينات يا پروت ولاړ محوورونه يې a او b ، چيرته، چې محور b ټکي bi په ايماجينار ګڼکرښې باندې په ګوته کوي، يا د» ښوونکرښې « OP سره انځور کيدی شي٠ دا د يوې اوږ دې r سره ښايو او د ريیلې محور سره کونج fi جوړوي٠ (دا همغه د ټکي P انځورول دي په پولار کواورډينات کې، r د کمپلکس ګڼ مطلق ارزښت دی، fi يې فاز بلل کيږي٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دواړو انځوربنې لپاره لاندې ترانفورمیشنبرابرون باور لري(له دې څخه نوج زده کوونکې تیریدلی شي، چې ترانسفورمیشن باندې نه پوهیږي)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}\,, \qquad a \neq 0$$

$$a = r\cos\varphi\,, \quad b = r\sin\varphi\,.$$

له $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ لاس ته راځي

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + k\cdot 2\pi, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{b}{a} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } k \text{ ganzzahlig ist.}$$

په پورته کې wobei د کوم سره یا چیرته چې په مانا دی او k ټولګې دی ۰

ارزښت

$$\varphi_0 = \arctan\frac{b}{a}$$

د في φ اصلي ارزښت بلل کیږي۰ له دې نور ارزښتونه د k او 2π له زیاتون څخه لاس ته راځي۰

د دې له مخې کیدئ شي، چې کمپلکس ګڼ په لاندې توګه ولیکل شي ۰

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\,.$$

" وروسته د اویلر فرمول "Eulerschen Formel په مرسته ترې لاس ته راځی

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

دریمه انځورونه یې لاندې ده:

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r\,e^{i\varphi}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کمپلکس ګڼ دا درې انځورونې په ترتیب داسې بلل کیږي اریتمیتیکي بڼه کونومتریکي (یا تریګنومتریکي بڼه) او اکسپوننشل بڼه.

دا چې د اویلر فرمول وروسته ښوول کیږي، اکسپوننشل بڼهٔ دې دلته راوړل شوې وي، خو د ښوونې لپاره دې ترې کار نه اخستل ک یږي.

Rechnen mit komplexen Zahlen

د کملپکس ګڼونو سره شمیرنه

دوه کملپکس ګڼونه دې ورکړ شوي وي

$$z_1 = a_1 + b_1 i\,, \quad z_2 = a_2 + b_2 i\,.$$

د کمپلکش ګڼونو زیاتون او کمون

په زیاتون او کمون کې د الجبر ي قوانینو له مخې i هم داسې په کار اچول کیږي لکه هره بله کومه د تورو لویه ، چې په کار اچول کیږي یا کارول کیږي

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\,i$$

د کملپکس ګڼونو « ښوونکرښه» (دا هغه کرښه ده، چهٔ د دواړو محورونو صفر ټکو څخه د هغه په هواره موخه ور ټکی په لور ګزیدلی وي، یانې د صفر ټکی څخه د هغه بل موخه ټکی په لور ، ځکه لوریزه ده)لکه وکتورونه سره زیاتیدلی او کمیدلی شي

Das Produkt komplexer Zahlen

د کمپلکس ګڼونو ځل

دی

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,i.$$

دا ځل تړلی پیژند وړ لیدونکي مانا نه لري(یانې سملاسي ترې څه نه شو پوهیدلی). که د دې په څټ » پولارکواودینات » وکارول شي، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_1a_2 - b_1b_2 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) = r_1r_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right) = r_1r_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right).$$

او له دې سره

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right].$$

نو دی

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{او} \quad \varphi\left(z_1z_2\right) = \varphi_1+\varphi_2.$$

د ځل – یا ضرب ارزښت د ارزښتونو ځل دی٠ د ځل یا ارګومنت یا فازې د ارګومنت یا فازې د زیاتون سره برابر دی٠

سملاسې پیژندل کیږي، چې دا د دوه فاکتورونو څخه زیاتو فاکتورو یا ځله وونو لپاره هم باور لري

$$|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n| = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n| \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n.$$

د کمپلکس کښونو ویش Division komplexer Zahlen

په ورته توګه پیدا کیږی، که z_2 د صفر سره برابر نه وي

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

که کیږدو $z_1 = 1$ او $z_2 = z$, نو لاس ته راځي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\left[\cos(0-\varphi) + i\sin(0-\varphi)\right] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په ځانګړي ډول د $z = i$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

Ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl

د کمپلکس ګڼونو توان (کپلکس ګڼ د یوه ناکمیز توان سره د رییل ګڼونو په څیر دی)

$$z^{-n} \equiv \frac{1}{z^n}.$$

د کمپلکس ګڼونو ځل دې وکتل شي

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

د همغه ځله وون یا ضریب z لپاره ترېلاس ته راځي

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

موږ لرو

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{p \cdot q}, \quad z_1^p \cdot z_2^p = (z_1 \cdot z_2)^p, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \frac{z_1^p}{z_2^p} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p.$$

Der binomische Lehrsatz

د بینوم درسي جمله

د بینوم جملي لپاره هم لرو

د نوکانو د چاون قانون او ځل قانونو د زیاتیز جګ ګڼ لپاره د بینوم جمله همغسي باور لري

$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \ldots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \ldots + \binom{n}{n} z_2^n.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځايه ښکته د ښوونځي زده کوونکو لپاره ستونځمن دی.

Die Moivreschen Formeln د موفری قانون

له برابرون څخه (پورته دې وکتلشي)

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right)$$

لاس ته راځي

$$|z| = 1 : \qquad (\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

له بلې خوا د زياتيز ټولګنيز جګګڼ يا اکسپوننت سره د بينوم جملې څخه لاس ته راځئ:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

$$-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi + \ldots + i^n\binom{n}{n}\sin^n\varphi.$$

که د برابرون دوا

ړه خواوې بربار کيښول شي او بيا په پام کې ونيول شي، چې رييل او ايماجينار برخه دواړه بايد برابر وينو د موفري برابرون ترې لاس ته راځي **Moivreschen Formeln**:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - + \ldots,$$

او

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - + \ldots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چيرته، چې ښی لور ترهغې پوره شي، تر څو چې ځله وونی يا ضريب صفر شي.

د کمپلکس ګڼونو ريښه Wurzeln aus komplexen Zahlen

د برابرون اوبيونه

$$x^n = z \qquad \text{n positiv ganzzahlig}$$

پورته کی n زياتيز ټولګڼ دی
د کمپلکس ګڼ z n -مه ريښه بلل کيږي :

$$x = \sqrt[n]{z}.$$

ږدو

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

او

$$x = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right),$$

د $z = x^n$ له امله لاس ته راځي

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi$$

او د دې پسي

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي

په ويشنه کې بايد په پام کې ونيول شي، چې ارګومنت يا پروتمحور φ پريودي يا تل بيرته راګرځيدونى دى د پريودې يا راګرځيدنى 2π سره ، نو

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

پسې د ψ لپاره تيک n مختلف ارزښتونه لاس ته راځي، ياني

$$\psi = \frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2 \cdot 2\pi}{n}, \ \ldots \ \frac{\varphi + (n-1) \cdot 2\pi}{n}.$$

د $n = k$ ځانلۀ د مخه ارزښتونه (له دويم پسې) تکراريږي، نو باور لري:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)$$

هر له دې ارزښتونو د کمپلکس ګڼ z د n-مې ريښه بلل کيږي

$$\sqrt[n]{z} \quad \text{oder} \quad z^{\frac{1}{n}}$$

دا ټول n ارزښتونه په ګڼهواره په يوې ګردى په O په يوه منظم n - ګوډي پرته ده , د څلورى ريښى لپاره له

$$i = i\sin\frac{\pi}{2}$$

لاندې ارزښتونه ترې لاس ته راځي

$$\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4},$$

او د څلورى ريښي لپاره له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-i = i \sin \frac{3\pi}{2}$$

پیداکیږي

$$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}.$$

که موږ ونیسو لکه د رییل ګڼونو لپاره

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

دې وي، چیرته چې n یو پیداینتج ګڼ او m یو په خوښه ټولګڼ دی، نو له دې سره د کمپلکس ګڼ سره جګګن یا کسپوننت وپیژندل شو یا تعریف شو۰ اوس نو اخرنی پل پاتې ، چې هغه د ایراشنلجګګڼ دی .

توان د په خوښه رییل جګګڼ سره

Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

اوس دې z له صفر مختلف په خوښه کمپلکس ګڼ وي .

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r\left[\cos\left(\varphi + k \cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\varphi + k \cdot 2\pi\right)\right],$$

چیرته چې

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

دی ، نو د z^ν (ν رییلreell) لاندې هر دالاندې کمپلکس ګڼ پوهیږو:

$$r^\nu\left[\cos\nu\left(\varphi + k \cdot 2\pi\right) + i\sin\nu\left(\varphi + k \cdot 2\pi\right)\right].$$

لاربشود : د داسې په ټولیز پیژند یا تعریف سره د کمپلکس ګڼونو توان لپاره د د توان شمیرنې بنسټیز قوانین باور لري ، یانې

$$z^\mu \cdot z^\nu = z^{\mu+\nu}, \quad z_1^\mu \cdot z_2^\mu = \left(z_1 \cdot z_2\right)^\mu, \quad \left(z^\mu\right)^\nu = z^{\mu\cdot\nu}$$

nicht mehrنور بس دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسځندنت برابرونونه یه ـ مساوات

دلته یواځي هغه ترانسځندنت مساوات څیړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي. دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په رینبه مساواتوکی، په خوبنه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بنه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتي اوبیوني یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون تولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په رینبه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رښیل اوبیوني پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 ....(13,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کيدی شي (۱۳ . ۱)

سيده د جبشميري له لارې پيداشي. په څټ يا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کيږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b ....(13.2)$$

د لوګاريتمي مساواتو يو ساده ډول يا شکل (تيپ) دا دی

$$\log_b x = c ....(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشميري سره شميرل کيدی شي.

بيلګه ۱۳ . ۱ : $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبيونه په لاندې تولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c...(13,5)$$

دلته (f(x يوه الجبري وبينه يا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبيونې د (۱۳ . ۵) اوبيونې هم دي

بيلګه ۱۳ . ۲ : لوګاريتميز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x^2+x+6=2^3=8$ (همداسی) ⇔ $x^2+x-2=0$

او لاندې اوبيونې لري

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}; x_1=-2; x_2=1$$

يو د (۱۳ . ۵) ډول (تيپ) برابرون هم مخ ته لرو، كه د هغه كينه لور (ارخ) ته يود لوگاريتم ريشنل لاينيز كمبينشن الجبري وبينه يا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوگاريتم قوانينو (۷. ۷) ، (۷. ۹)كاروني يا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}.................................(13,8)$$

بيلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه رينه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،

د کوم له ځلوری يا مربع كولو څخه $x(x-1)=81$ يعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515; x_2=-8,515$$

تيك دا $x1=9,515$ ييل برابرون پوره كوي

. د $x=x2<0$ لپاره log x او په همدې ډول (log(x-1 پيژند نه لري يا تعريف نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني که $1<(b+3)/b-2)$ وي.

د $b>2$ یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دې لرو $-2<3$ دا د ټولو b لپاره پوره دی

د. $b \leq 2$ لپاره د $b+3 \leq b-2$ څخه $b+3 < b-2$ $2 \leq 3$ لاس ته راځي

اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \leq 2$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وییني یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه ..$y1,y2$ په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳/۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i ; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \qquad (13 . 12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13 . 13)$$

ددې لپاره چې و ازمائیلی شو چې ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳/۹) کی کیښوول شي یا ځاي په ځای شي،

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستیټیوشن(بدلون) $y=\lg x$سره په څلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .

د $y1 = 2$ او $y2 = -1$ ځوابونو سره

.له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$x_1 = 10^2=100$ او $x_2 =10^{-1}= \dfrac{1}{10}$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$

د,$x>0$ مګر $(x \neq 1/10,\ x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندي $(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$,\quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$
$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0 ,\ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1=lox_1=5; y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5; x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پيل مساوات پوره کوي.
که په يوه برابرون کی لوګاريتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي،
نو کيدی شي د (١٣ . ٢) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بيلګه ١٣ . ٧ :

له $\log_2(x-1)+\log_4(x-1)-1=0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1)=\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1)+\frac{1}{2}\log_2(x-1)-1=0,\ \log_2(x-1)=\frac{2}{3},\ x-1=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4},$$

$$x=1+\sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پيل برابرون اوبی يا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4}+\log_4\sqrt[3]{4}-1=\frac{1}{3}\log_2 4+\frac{1}{3}\log_4 4-1=\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}-1=0.$$

١٣ . ٢ اکسپوننشل – يا په ځګګڼ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x=b; a>0, a\neq 1, b>0 \quad (13,14)$$

کيدی شي چی د لوګاريتم نيولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x=\log_a b=\lg_b/\lg_a=\ln b/\ln a \quad (13,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ)
برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0, \text{ bzw. } 6 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x, \text{ bzw. } \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وییني یا افادي(f (x اکسپوننتونه
یاجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0, a|=1, b>0 \qquad (13 . 16)$$

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b .... (13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د (۱۳ . ۱۶) ځوابونه هم دی.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې خلورى برابرون یا مربع مساوات ته بیایي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پیل برابرون اوبیونې یا
ځوابونه هم دي٠

بیلګه ۱۳ . ۱۰ : په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د
بل پوتنځ د بنسټ په څېر ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3\ ,\ x_2 = -4$$

بیلگه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$ کې کیدی شي چې ناپیژندونکې د اکسپوننت یا په جگ ځخه د دوه واره لوگاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \quad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 1.$$

بیلگه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ (۱۳ . ۱۶) مساوات دی، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې اصل

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوگاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;..................................(13,18)$$

ځخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وییله یا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x))})=0 ;..................................(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو $y_1, y_2, y_3;...............$ لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i ; i=1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 .... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلگه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$ سره په خلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}}-\sqrt{e^{x^2-1}-1}=\sqrt{2e^{x^2-1}-1}..........................(13,25)$$

کې داسې بدلوو:

$$y=e^{x^2-1}......................................(13,26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};..............................(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$
$$y_1=0; y_2=1$$

تیك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;..(13,28)$$

باید اوبی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پیلبرابرون پوره کوي.
برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټولهلړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln^2 x - \ln x + 1 = \log_2 8 = 3$$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا ځلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2 - y - 2 = 0$
لاس ته راځي،د ځوابونو
$$y1 = -1 , y2 = 2$$
سره او له دې بيا لاس ته راځي:
$$\ln x = -1 , \ln x = 2, x1 = e^{-1} = 1/e , x2 = e^2$$

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې اوژباړې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګريزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواريد ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي چاپ شوی

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي) چاپ شوی

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

رياضي برای صنف دوازده

.

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

	ماخان په اولني نوم ميرې شينواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي. د هسکې ميني د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پيل او د دويم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرېي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library