شمیرپوهنه (ریاضي)

ددولسم ټولګي لپاره

لیکونکی ډاکتر ماخان (میرې) شینواری

2016

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

پوله ارزښت ۱

د پوله ارزښت خويونه................. ۱۰

د کسري يا ماتو توبعو پوله............. ۱۶

د کلاسيک له لارې د کسري اعدادو ۲۱

د مثلثاتي توابعو پوله ۲۳

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت يا ليميټ ۲۹

تولیز خويونه: ۳۱

ناپرېکيدنه ۳۴

د متمادي يا................................. ۴۰

د لـــومړي څپـــرکي تولګه ۴۷

د څپرکي تمرينونه ۵۰

د تابع منځ ارزښت تغير ۵۷

کمښت ويش يا د تفاضل ويش...................... ۶۰

رابيليدنه يا مشتقشميرنه ۶۳

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع ۶۸

د تانجنت او عمود تعريفونه او خويونه ۷۳

د مشتق شميرني يا رابيليدني قوانين ۷۸

د د الجبري توابعو مشتق ۸۱

د زنځيري(مرکب) توابعو مشتق ۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو مشتق ۹۰

د مشتق استعمال په طبيعي علومو ۹۵

د جګو درجو مشتق ۹۹
د اکسپوننشل توابعو مشتق ۱۰۳

د لوګاریتم مشتق ۱۰۷

د ایمپلیڅیت Implicit تابعو مشتق ۱۱۷
د فصل ټولګه ۱۲۰

د ځېرکي تمرینونه ۱۲۲

درول قضیه ۱۲۸
همغږیزې توابع ۱۳۲

ځای اړونده افراطي ټکي ۱۳۷

وړنټکی ۱۴۳

د کږې یا منحني خبرې ۱۵۳

د ناټاکلو افدو پولې ۱۵۷
د ناټاکلو افدو پولې ۱۶۰
د تانجنت له پاره............ ۱۶۶

د سترو ګټو ۱۶۷
په تولید کې ۱۷۱

ټولګه ۱۷۳

زینټکی(د اس زین) ۱۷۶

د ځېرکي تمرینونه: ۱۷۷

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۱۸۷

انتیګرالشمیرنې ته پیل راوړنه ۱۹۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمیرنه ۲۰۰

بنستیز یا لومړنی تابع ۲۰۴

ناټاکلی انتیګرال ۲۱۰

د ټاکلی انتیګرال......... .... ۲۱۲

د ټاکلی انتیګرال څخه نا......... ۲۱۶

د انتیګرالونږا......... ۲۱۹

د لوګاریتمي......... .... ۲۲۲

د بدلون قانون ۲۲۴

ټوټه انتیګرالونه ۲۳۱

ناپای انتیګرال ۲۴۰

ټولګه ۲۴۴

د څېرکي تمرینونه ۲۴۷

د اینتیګرال شمیرنی استعمال ۲۵۳
د دوه کرښو څخه رابنده ۲۵۶

څرخېدونکي تنونه: ۲۶۴

ټولګه ۲۷۷

تمرینونه: ۲۷۹

د لیکونکي ژند ته کتنه
د نصاب د دولسم ټولګي ناسمونونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

ګرنو هیوادوالو!

ما په   کلونو کې د نصاب لهپاره دا د دولسم ټولګي د پښتو او دري کتابونه لیکلي وو، خو په هغه وخت کې دا کتابونه د پوهنې وزارت له خوا چاپ نه شو او په ډېره خواشینۍ سره باید ووایم، چې په ځای یې کتابونه چاپ کړل، خو ناسم، چې نه یې ژبه سمه وه او نه یې شمیرپوهنیزه خوندویونه.

دا زما له خوا لیکل شوي کتابونه د معیار (د نړۍ د معیار) سره سم لیکل شوي او د لته یې ګرانو زده کوونکو ته وړاندې کوم، هیله ده، چې ګټه به ترې واخلي.

د نصاب له پاره د چاپ شوي کتاب د بوې برخې ناسمون به د کتاب په اخر کې ځای په ځای کړم.

ما څو واره د افغانستان د پهنې وزارت څخه هیله کړې، چې اجازه راکړي، تول د ښوونځي کتابونه ، چې ما لیکلي، دوی ته وړاندې او د سرهسم ولیم، خو د کتابونو د ناسمون مسئولیت او یا هیڅ څوک د څه مسئولیت په غاړه نه لري.

زه دا ټول د ښوونځي کتابونه ګرانو لوستونکو ته وړاندې کوم، خو څنو کتابونو کې به داسې راغلي وي، چې زما د ناتوانۍ له امله به مې د یوه کتاب څنې برخې بل کتاب کې ځای په ځای کړې وي، چې له دې امله د ګرانو لوستونکو څخه هیله، چې د هر څه له مخه دې، د کتاب سریزه وګوري.

ما چې لیکنې جمهورریس او د پوهنې وزارت ته لیکلي، هم مل دي.

ګرانو هیوادوالو!

ماته به بخښنه کړۍ، زه له دې نور زیات زور نه لرم، چې ښه سریزه او نور اړین څه ولیکم. دا زما لیکنې نورې همداسې ومنۍ، چې څنګه درته وړاندې کیږي. په لیکنو کې به زما د لیکنیزو ناسمونو نور ناسمونونه نه وي. هیله ده، چې ګټه به ترې پورته کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . پوله ارزښت

۱ . لیمیت یا حـد(پوله ارزښت) "The Limit"

موږ لاندې د

اعدادو ترادف لرو:

$$(I)\quad \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n}$$

$$(II)\quad \frac{3}{2},\frac{4}{3},...,\frac{n+1}{n}$$

$$(III)\quad 2,4,6,...,2n$$

که n د ناپای په لور لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (I)د صفر په لور، (II) د یو په لور او (III) د ناپاي په لور ځي.

د Limit (لاتین) معنا پوله یا حد دی. په پخواني روم کې د یوه ښار د کلا نوم هم Limit وو، چې په ریاضیاتوکې ، د پولې مفهوم لري. د حد د کاروني مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوې تابع سلوک داسې وڅیړو لکه په افقي محور(دx محور یعنې"abscissa ") باندې، چې د تابع د x قیمتونه یوه حد(پولې) ته ورنږدې کېږي.

وبه ګورو، چې لیمیټ په ریاضیاتو کې د مشتق د پیژندلو لپاره کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیتونه:

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې د لیمیټ یا پولې له کلمې سره بلد یاست؟

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلګه راوړی شئ، چې یوه لیمیټ ته له دواړو لورو، یعنې له ښئ لورې څخه و کیڼې لورې ته او همداډول له کیڼې لورې څخه و ښئ لورې ته نږدې شئ؟

- ایا د حیرتان او ترمز ترمنځ پول د افغانستان او ازبکستان ترمنځ له دواړو لورو پوله یا حد دی، که څنګه؟

- ایا دا په ټاکلي ځاي کي پوله یاحد دی، که څنګه؟

د پورته فعالیتونو څخه دا لاندې د لاسه کوو:

پورته راوړل شوې د لیمیټ بیلګې په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو یا د ځنو عملي بیلګو لیمیټونه یا حدونه دي، چې موږ یې په ریاضیاتو کې هم په یوه ټاکلي ځای کې لیمیټ، پوله یا حد بولو.

موږ اوس لاندې بیلګه د پایلیزې روښانه ونې لپاره راوړو:

بیلګه ۱:

یوه د $f(x)=2x$ تابع او د P_0 یوټکی دې ورکړ شوی وي، چې د P_0 ټکی د وضعیه کمیاتو په سیستم کې $(3,6)$ وضعیه قیمتونه لري نو :

1- دتابع جدول وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

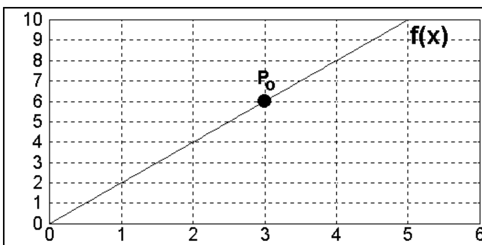
2- د تابع ګراف یا څېره انځور کړئ.

3- د$f(3)$ قیمت پیداکړئ او د$f(x)$ پرحرکت باندې بحث وکړئ که x و3 ته نږدې شي.

4- په شکل کې د $f(x)$ حد ته تلنه روښانه کړئ.

ښوونه:

1- د تابع جدول

	2- د تابع شکل 3 - موږ $f(3) = 6$ لرو او غواړو د درې قیمتونوڅخه چې له ښۍ او کیڼې لورې 3 ته ورنږدې کیږي، و ګورو، چې په دې درې ارزښتونو کې تابع چېرته ځي.

ولاړ جدول:

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې د f ارزښتونو سره له کیڼې لورې له پورته څخه وکښته لورې ته 6 ته نږدې کیږو او همداسې له ښۍ لورې له کښته څخه و پورته لورې ته هم6 ته نږدې کیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ پوله

-- ------------

پروت جدول روړو:

له ښۍ لورې څخه کیڼې لورې ته له کیڼې لورې څخه ښۍ لورې ته

$\longrightarrow$ 3 $\longleftarrow$

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6,002	6.02	6.04

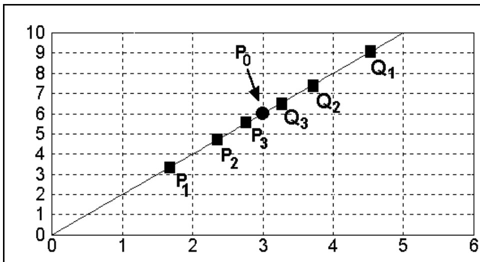
$\longrightarrow$ 6 $\longleftarrow$

په دړې پلونو يا قدمونوکي د f(3) قيمت دf(x) له قيمتونو سره پرتله کوو، کهx و3 ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که x و 3 ته ورنږدې شي، نو د f(x) ليميټ به په 6 برابر شي او داسې يې ليکو: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

او داسې يې لولو: د f(x) ليميټ يا پوله که x د درې په لور لاړ شي.

4- اوس ګراف په لاندې توګه رسموو او کيڼې لورې ته هدفمند ټکي - لکه په پورته جدول کې- په نخښه کوو.



د مخامخ شکل له مخې... $P_1, P_2, P_3,$ ټکي په پام کې نيسو، چې د P_0ټکي ته تل له کيڼې لورې نږدې کيږي.

او همداسې ... $Q_1, Q_2, Q_3,$ ټکي چې له ښۍ لورې P_0 ټکي ته نږدې کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتل کیږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و P_0 ټکي ته نږدې کیږي په همغه کچه د تابع قېمتونه و 6 ته نږدې کیږي (د $P_0(3,6)$ ټکي قېمت له امله).که په ګراف کېx د x=3 ځای ته نږدې شو، نو د تابع قېمت و 6 قېمت ته نږدې کیږي.

وایو: 6 د f(x) تابع لیمیټ دی، د $x \to 3$ (لوستل: x د3 (درې) په لوري ځي یا درې ته نږدې کیږي) لپاره.

د لیمیټ لپاره لیکښه په دې ډول تعریف شوې: $\lim_{x\to3} f(x) = 6$

د پورته فعالیتونو او بیلګو څخه دا تعریف لاس ته راوړو:

پیژند(تعریف): د f(x) تابع یو لیمیټ (حد)L لري، د x لپاره که x د یوه حقیقي عدد c په لورې تږلی لاړ شي او داسې یې لیکو: $\lim_{x\to c} f(x) = L$ لوستل: د f(x) لیمیټ برابر په L دی، د c <- x لپاره.

په ځنو توابعو کې لیمیټ، لکه چې ولیدل شو، په داسې سادګۍ لاس ته نه شو راوړي.

یوه بیلګه راوړو، چې دا لاندې پوښتنې په کې ځواب شوې وي:

- ایا یوه تابع په خپل ورکړ شوي ځای کې لیمیټ درلودی شي، چې هلته تعریف نه وي ؟

- اودا کار که کدونکی وي ، څنګه کیدی شي؟

بیلګه ۲ : تابع $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}; x \neq 1$ راکړ شوې.

د تابع جدول او ګراف وکاږئ.

x له ښی لوري څخه1ته نږدې کیږي x له کیڼې لوري 1 ته نږدې کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	0.98	0.99	0.999		1.001	1.01	1.02
f(x)	1.98	1.99	1.999		2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow 2 \longleftarrow$

د f(x) تابع حرکت تر بحث لاندې ونیسئ که x و 1 ته نږدې شي يعنې $x \to 1$. له دواړو يعنې له ګراف او جدول څخه دا پايله لرو، چې f(x) د حقيقي عدد 2 په لور هڅيږي، يعنې: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$	خبره کښل کيږي

له پورته شکل څرګنديږي: تابع په هغه ټکي کې چې ليميټ يې شميرل شوی، تعريف نه ده.

شميرنيزه ښوونه: که يوه تابع په صورت او مخرج کې داړونده قيمت لپاره صفر ولري او دا صفرځايونه له منځه تللی شي- لکه زموږ په بيلګه کې- نو د ليميټ يا بولې پيدا کولو لپاره داسې مخ ته ځو:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

او وايو چې دا ډول تابع په صفر ځای کې تشيا (خاليګاه) لري يعنې په دې ځای کې تعريف نه ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

د سرک ښی لورې ته دا مخامخ تخته لرو:

- وواييئ، چې دا تخته څه مفهوم لري؟

په همدې توګه د سرک په سر کيڼي لورې ته هم همداسې يوه تخته ځړول شوې. دا هم په همغه مفهوم.

دا پوښتنه مو دې لاندې روښانه وني ته لاښودوي:

بيلګه ۳: د $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ تابع راکړ شوې.

1- تابع وليکئ، بې له دې، چې د مطلقه قيمت نښه | | استعمال کړئ.

2- د تابع ګراف وکاږئ.

3- که x له ښی لورې 1 ته نږدې شي، نو د f(x) قيمت پيدا کړئ.

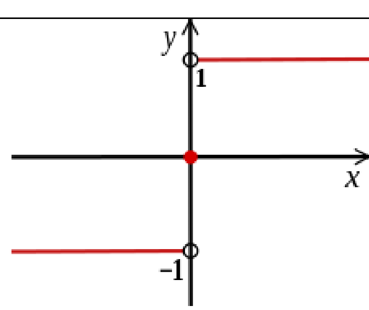
4- که x له کيڼې لورې1- ته نږدې شي، نو دf(x) قيمت پيدا کړئ.

5- وښاياست چې پورته تابع يعنې f(x) څو حدونه لري.

ښوونه: 1-تابع بې له سمبول ،، ،،| | په لاندې ډول ليکو

$$f(x) = \begin{cases} 1; x > 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$$

2-د تابع ګراف انځوروو: مخامخ



(c) ketabton.com: The Digital Library

3- که x له ښي لور 1ته نږدې شي، نود لرو:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -1$$

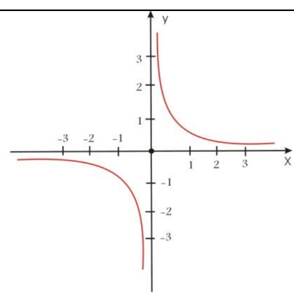
4- کهx له کيڼې لور 1- ته نزدې شي، نو دf(x) ليميټ دی: $\lim_{x \to -1} f(x) = -1$

5- ګورو چې که x دوه قيمتونو 1 او1- ته نږدې شي، نو f(x) دوه د ليميټ قيمتونه لري يعني$\lim_{x \to \pm 1} f(x) = \pm 1$ ، نو له دې امله f(x) ليميټ نه لري.

له پورته بيلګې پايله:

په پورته بيلګه کې د$x \to -1$ لپاره تابع ښی ليميټ لري او د $x \to 1$ لپاره کيڼ ليميټ لري.

د دې لپاره دې د ګراف پورته کښل شوی شکل هم وکتل شي.

بيلګه۴: $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع لرو، چې $x \neq 0$ دی د $f(x) = \frac{1}{x}$تابع په x=0 ځای کې ارزښت نه شي نيولی، يعني په x=0 کې تعريف نه لري. دا تابع په صفرځای کې قطب(Pol) لري. مخامخ شکل دې وکتل شي.	

يادونه: هغه تابع، چې مخرج يې صفر وي او صورت يې صفر نه وي، وايو چې تابع په دې د مخرج په صفرځای کی قطب Pol لري.

$x = 0$ته د نږدې کېدو لپاره ترادف $(x_n) = \frac{1}{n}$ ، ټاکو.

د اړوندې تابع د قيمتونوترادف $(x_n) = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = n$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د $n>0$ لپاره یو نامحدود صعودي(جګېدونکی) ترادف دی.
او د $n<0$ لپاره نزولي- یا متناقص(ټيټېدونکی) ترادف دی.
دا په دې معنا، چې د(f(x تابع په صفرځای کې ليميټ نه لري. دا هلته یو قطب لري.

د توابعو د ليميټ لپاره دا لاندې پایله لرو:
د $f(x), x\in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو کينې اړخيز ليميټ $a_l=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چېn غړي يې د x_0 کينې لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅيږي.

په ورته توګه ښی اړخيزه ليميټ: د $f(x), x\in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو ښی اړخيز ليميټ $a_r=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 ښي لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅيږي..

که تابع f(x) همغه ليميټ L ولري که x له ښی اويا کيڼي لورې و c ته نږدې شي، نو **ليميټ** شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې ليکو: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$

تمرينونه :

د دې لاندې هرې تابع (پيژند ورشو(د تعريف ناحيه) domain اوارزښت ورشو(د قېمتونو ناحيه)) range يا codomainپيدا کړئ. د توابعو ګراف وکاږئ او حدونه (پولې) يې پيداکړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -1}(x^2+x)\ ,\ 2)\ \lim_{x\to 4}(x^2+x)\ ,\ 3)\ \lim_{x\to 0}|x|\ ,\ 4)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{x}$$

$$5)\ \lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2}{x}}\ ,\quad 6)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\ ,\quad 7)\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^9-9}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ پیدا کړئ.

۱. ۲ د لیمیټونو یا پوله ارزښت خویونه:

" Properties of Limits "

پوهیږو: په ریاضیاتو کې ټول توابع چې لرو، د ساده توابعو ترکیب combination دی، لکه دتوابعو جمع، تفریق، ضرب، ویش (چې مخرج یې صفر نه وي) او زنځیرونه compositon . موږ دوه غوره او ساده توابع f(x) = c او g (x) = x لرو.که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, یا $L(x) = cx$, یا $m(x) = x.x= x^2$ او داسې نور.

وبه ګورو،چې دلته هم ټولې څلور عملیې همداسې اجراکیږي، لکه د اعدادو په ترادفونوکې.

فعالیت:

په دې برخه کې د په خوښه د ثابتو توابعواو کټمټ یا ایدنتیک توابعو Identity function لیمیټونه د جمعې، تفریق، ضرب او همداسې د ویش(چې مخرج یې صفر نه وي) له لارې وشمیرئ (وروسته به وګورو، چې دا د لیمیټ خویونو تر نامه څیړل کیږي).

- د په خوښه یوه پولینوم تابعو لیمیټ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $f(x) = x$ او $g(x) = x - 2$ توابعوڅخه کار واخلئ، چې درې نورې په خوښه توابع ترې لاس ته راوړئ. د دې توابعو لیمیټونه پیداکړئ. دا لیمیټونه جمع ، تفریق، ضرب او تقسیم(چې مخرج صفر نه وي) کړئ.

- که شوني شي، چې د یوې تابع لیمیټ د تابع له حل څخه لاس ته راوړلای شو، یعنې که د بیلګې په توګه ولرو: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} 3 = 3$ نودا تابع به څنګه لیکو؟

- ایا د پورته عملیې په څیر دا عملیه د هرې ثابتې او کټمټ تابع لپاره ریښتوني ده؟

مونږ له پورته څخه دا لاندې پایله لرو:

که $f(x) = x$ او $g(x) = 2$ ولرو، نو لرو: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$

2- که $h(x) = f(x) + g(x)$ وي، نو لرو: $h(x) = x + 2$

3- د h(x) ګراف وکاږئ.

4- د تابع لیمیټ د جدول له لارې

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

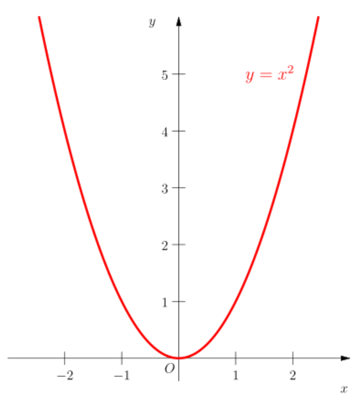
په یاد ولرئ: $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+2) = 3$ او $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) + \lim\limits_{x\to 1} g(x)$

له پورته څخه د لیمیټ لومړی خوي لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لیمیټ د جمعي خوې: د د وه یا ځو توابعو د جمعي لیمیټ د همغو اعدادو د لیمیټ د جمعي سره برابر دی: $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$

دویم: د لیمیټ د تفریق خوې: دا د پورته سره ورته حل لري. دا کار دې ګران زده کوونکي سرته ورسوي.

بیلګه ۱: که $g(x) = x^2$ او $f(x) = x$ وي، نو پیدا کړی: $f(x)\cdot f(x) = g(x)$ ب) د تابع شکل وکاږئ: پ) پیدا کړی: $\lim_{x\to 2} f(x)$ ت) پیدا کوی: $\lim_{x\to 2} g(x)$	

حل: الف) $f(x)\cdot f(x) = x\cdot x = x^2 = g(x)$

ب)

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

پ) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) له ګراف څخه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

له دې امله لرو: $\lim\limits_{x\to 2} x^2=\lim\limits_{x\to 2}(x\cdot x)=\lim\limits_{x\to 2} x\cdot\lim\limits_{x\to 2} x=2\cdot 2=4$

له پورته بیلګې څخه دا پایله لرو:

دریم: د لیمیټ د ضرب خوي:

د دوه یا ډیرو توابع د ضرب لیمیټ د هغو توابعو د لیمیټونو د ضرب سره برابر دی.

$$\lim_{x\to a} x^2=\lim_{x\to a}(x\cdot x)=\lim_{x\to a} x\cdot\lim_{x\to a} x=a\cdot a=a^2$$

بیلګه:

که $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ وي، دا لاندې لیمیټونه پیدا کړئ:

$a)\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to -1} g(x)$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to -1} g(x)$

$c)\ h(x)=g(x)\cdot f(x)$ $\qquad d)\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x)=-1$

پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$

حلa: $a)\ f(x)\cdot f(x)=x\cdot x=x^2=g(x)\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} x^2=1$

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b)\ \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} g(x) = -1\cdot 1 = -1 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to -1} x^2 = 1$$

$$c)\ h(x) = x^2\cdot x = x^3 \quad , \ d)\ \lim_{x\to -1} h(x) = \lim_{x\to -1} x^3 = -1$$

بیلګه:

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$ تابع لرو، $f(x)$ $\lim\limits_{x\to 3}$ پیدا کړئ.

حل: $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی.

که x و3 ته نږدې شي کیدای شي لیمیټ د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim\limits_{x\to 3}(2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{3^2 - 2\cdot 3 + 5}{2\cdot 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

له پورته بیلګې څخه لاندې لاس ته راځي:

څلورم: د لیمیټ د ویش خوي(مخرج د صفر سره برابر نه دی):

دیوې کسرې تابع لیمیټ(یعني یوه تابع، چې د دوه توابعو له وېش(مخرج له صفر سره برابر نه

دی) څخه لاس ته راغلې وي) د تابع د صورت لیمیټ او د مخرج لیمیټ (مخرج له صفر سره

نابرابر دی) د وېش سره برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د $g(x)=\sqrt{3-x}$ ګراف وکاږئ او پیدا کړئ.

$$a)\ \lim_{x\to 2} g(x)\quad ,\ b)\ \lim_{x\to -1} g(x)\ ,\ c)\ \lim_{x\to 3} g(x)$$

حل: په لاندې توګه مخ ته ځو:

الف)

$$\lim_{x\to 2} g(x)=1$$
$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)}=\sqrt{1}=1$$

ب) له ګراف څخه: $\lim_{x\to -1} g(x)=2$

یادونه: $\lim_{x\to -1}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)}=2\sqrt{4}$

$$c)\ \lim_{x\to 3^-} g(x)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)}=\sqrt{0}=0$$

(د $f(x)\geq 0$ لپاره او د ټولو x قیمتونولپاره، چې c ته نږدې کیږي).

له پورته څخه لاس ته راوړنه:

پنځم: د لیمیټ د جذر (ریښې)خوي: د یوې تابع چې د جذر (ریښې) لاندې وي لیمیټ برابر دی، که چیرې تابع او لیمیټ دواړه د جذر لاندې ونیول شي.

پوښتنه: که $\lim_{x\to -2} f(x)=3$ وي، نو $\lim_{x\to -2}(f(x))^n$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: د یوه پولینوم حد تیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوې تابع حد. د مخه مو وویل،چې یو پولینوم د ساده توابعو د مختلو نښلونو څخه لاس ته راځي.

تمرینونه.

که $\lim_{x\to4} h(x)=-2$, $\lim_{x\to4} g(x)=0$ او $\lim_{x\to4} f(x)=5$ وي، نو پیدا کړئ:

1) $\lim_{x\to4}(f+g)(x)$, 2) $\lim_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, 3) $\lim_{x\to4}(fg)(x)$

4) $\lim_{x\to4}(h(x))$, 5) $\lim_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, 6) $\lim_{x\to4}(2h-3g)(x)$

7) $\lim_{x\to4}(f\cdot h(x)$, 8) $\lim_{x\to4}\left(\frac{2h}{3f-g}\right)(x)$, 9) $\lim_{x\to4}(h(x)+f^2(x))$

10) $\lim_{x\to2}(6x^3-2x+5x-3)$, 11) $\lim_{x\to-2}\frac{3x-2}{x^2+1}$

د کسري - یا ماتو توابعو لیمیټ" Lmit of Rational functions

موږ د پولینومونو دا لاندې ویش لرو:

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0}{b_mx^m+b_{n-1}x^{m-1}+...+b_0};P_m\neq0$$

او د لیمیټ په هکله یې فکر کوو، چې د $b_0\neq0$ سره $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

موږ پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ لرو. ددې پولينوم ليميټ دx د مختلفو قېمتونو لپاره څنگه پيداکولای شو؟

- که $x\to 0$ د صفر په لورې لاړ شي يا صفر ته ورنږدې شي.

- که $x\to 1$ يوه ټاکلي عدد ته ور نږدې شي.

- که $x\to\infty$ د ناپای په لورې لاړ شي.

-که د دريمې درجې پولينوم $P(x)=5x^3+3x^2+3$ ولرو، نو ددې پولينوم ليميټ دځلورو په خوښه قيمتونو لپاره پيداکړئ.

پوهيږو، چې د پولينومي توابعو ليميټ د ورکړل شوو x قېمتونو لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر، چې د جمعي، تفريق،ضرب او وېش(چې مخرج صفر نه وي) په څېر ورکړل شوي دي، شمېرلای شو. غواړو د ناطقو توابعويا کسري توابعو ليميټ پيداکړو.

د ناطقو توابعو د ليميټونوشميرلو لپاره،که شته وي، له مختلفو لاروڅخه کار اخلو:

که ولرو: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$، نو د تابع خويونه د $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ لپاره ساده کوو او د پورته پولينوم وېش، چې کسري تابع ده، ليميټ شميرو.

فعاليت: که $\frac{x^2-4}{x+2}$ ولرود $x\neq -2$ سره.

- ددې تابع حد د$x->-2$ لپاره پيدا کړئ.

- ددې تابع حد د $x\to 1$ لپاره پيدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ددې تابع حد د $x \to -1$ لپاره پیدا کړئ
- د تابع پیژندورشو ولیکئ!
- دا تابع څنګه ساده کولی شئ، چې پوله یې د $x \to -2$ لپاره وشمیرلی شو؟

د پورته فعالیت په بنسټ کولای شو، چې دکسري توابعو حدونه د مختلفو اعدادو لپاره پیداکړو او همداسې یوه کسري تابع که شوني وي، هغه ځایونو ته ورنږدې هم پیدا کړو، په کومو کې چې تابع تعریف نه وي.

ددې موضوع د روښانولو لپاره د مختلفو کسري توابعو څو بیلګې راوړو:

بیلګه ۱:

پیداکړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x+2}$ که $x=1$ وي. دا تابع تعریف ده او لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

که $x=1$ ځای په ځای کړو(Substitue) نو لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

بیلګه ۲: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x+3}$

حل: دا چې تابع په $x=0$ کې تعریف ده، نو لرو: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x+3}=\dfrac{0-1}{0+3}=-\dfrac{1}{3}$

بیلګه ۳: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: دا چې تابع په $x=1$ کې تعريف ده، نو لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

که په يوه ځای يا عدد کې تابع تعريف نه لري، نو د مختلفو لارو يا متودونو څخه کار اخلو، چې ليمېټ يې پيداکړو، که شته وي.

بيلګه ۴: پيداکړئ: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل: دا چې $f(x)$ تابع په $x=2$ چې تعريف نه لري، نو حد د تابع د حل له لارې نه شي پيداکيدای. داکيدای شي داسې پيدا کړو، چې د تابع صورت په ضريبونو تجزيه کړو.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}$$

د تابع ليمېټ که x و 2 ته نږدې شي، دا مانا لري، چې $x\neq 2$ دی.

دا کسري تابع و $\lim_{x\to 2}(x-4)$ رالنډېږي او لاندې ليمېټ لري:

$$\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

بيلګه ۵: پيداکړئ: $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګورو، چې تابع په $x=16$ کې تعريف نه لري يعني بايد $x\neq 16$ وي.

په ياد ولرئ چې: $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ او $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ يو د بل مزدوج دي.

حل: د پورته تابع صورت او مخرج د $\sqrt{x}-4$ له مزدوج $\sqrt{x}+4$ سره ضرب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

بيلگه ۶: پيدا کړئ: $\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل: تابع په $x=3$ کې تعريف نه لري، نو مخرج او صورت د مخرج په مزدوج ضربوو اولرو:

$$\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$
$$=\lim_{x\to3}-1(\sqrt{x+1}+2)$$
$$=\lim_{x\to3}-(\sqrt{3+1}+2=-4$$

بيلگه ۷:

پيدا کړئ: $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل: تابع په $x=1$ کې تعريف نه لري، نو په لاندې توگه مخ ته ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10}{(2x-3)(x+1)}=\frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$=\frac{10}{-2}=-5$$

د کلاسیک لارې د کسري اعدادو لیمیټ:

اوس یوه بله تابع د څېړنې لاندې نیسو، چې $g(x)$ یې بولو: $g(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

دلته هم دا پوښتنه کوو، چې که $x=1$ ځای ته نږدې شي، نو د $g(x)$ تابع د تابع کوم قېمتونه غوره کوي:

مونږ بیا هغه ځای په پام کې نیسو، چې $x=1$ د مخ لورې(کیڼې لورې) ته خورا نږدې پروت وي او هغه ځای، چې د $x=1$ وروسته یا ښۍ لورې ته خورا نږدې پروت وي:

$$g(1-h)=\frac{(1-h)^2+(1-h)-2}{(1-h)-1}$$

$$=\frac{(1-2h+h)^2+(1-h)-2}{-h}=\frac{-3h+h^2}{-h}=3-h$$

$$g(1+h)=\frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{(1+h)-1}$$

$$=\frac{(1+2h+h)^2+(1+h)-2}{h}=\frac{-3h+h^2}{h}=3+h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دواړه لاس ته راوړنې یا پایلې اوس داسې تشریح کوو:

که h ناپای کوچنی وټاکو، یعنې هغه ځایونه راونیسو چې $x=1$ ځای ته ناپای نږدې پراته وي، نو د تابع ارزښتونه به هم و 3 ته ناپای نږدې پراته وي. عدد 3 د $x=1$ ځای لپاره د $g(x)$ تابع د حد قیمت دی. ددې لپاره لیکو: $\lim_{x\to 1} g(x)=3$

تمرینونه:

د لاندې معادلو حدونه پیدا کړئ، که شته وي.

1) $\lim_{x\to 2}(6x^3-2x^2+5x+3)$

2) $\lim_{x\to -1}(x^7+2x-5)$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-3)^2-9}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}$

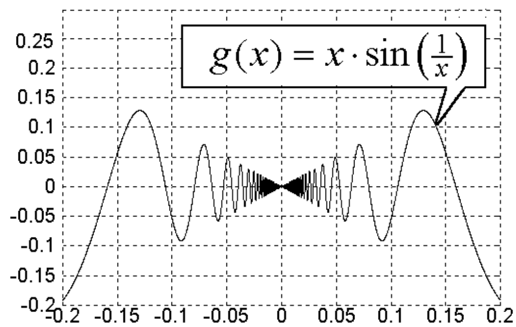
6) $\lim_{x\to 4}(\frac{1}{x}-\frac{1}{4})(\frac{1}{x-4})$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}$

8) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو حدونه Limit of trigometric function



فعاليت:

_ دساين پوله يعني $\lim_{x \to a} \sin x$ د x د مختلفوقيمتونولپاره پيدا کړئ،که $x \in [0; 2\pi]$ وي:

_ که $x \to 0$ وي. _ که $x \to 30$ وي. _ که $x \to 45$ وي._ که $x \to 60$ وي.

_ که $x \to 90$ وي.- که $x \to 135$ وي.- که $x \to 270$ وي._ که $x -> 2\pi$ وي.

- د پورته ورکړشوو قيمتونولپاره د کوساين $\cos x$ ليميټ پيدا کړئ.

قضيه: که x په راديان ورکړ شوی وي، نو $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ دی.

ښوونه: د x=0 لپاره تابع $\frac{\sin x}{x}$ تعريف نه لري او ناټاکلې بڼه $\frac{0}{0}$ لري.

موږ غواړو، د $x \to 0$ او $\frac{\sin x}{x}$ لپاره په لاندې ډول يو جدول وليکو(په پورته مساوات کې x په راديان اندازه کيږي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

x		$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
په درجه	په راديان		
10°	0.1745	0.1736	0.9948
5°	0.0873	0.0872	0.9988
3°	0.05235	0.05233	0.9996
1°	0.0174532	0.0174524	0.9995
30'	0.00872664	0.00872653	0.99999
6'	0.00174532	0.00174532	≈ 1
3'	0.00087266	0.00087266	≈ 1
1'	0.000291	0.000291	≈ 1
. . .	. . .	. . .	. . .

په پورته جدول کې گورو، چه د x لپاره $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ قيمت غوره کوي.

په شميرنيزه توگه د $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ښوونه په لاندې ډول مخ ته بيايو:

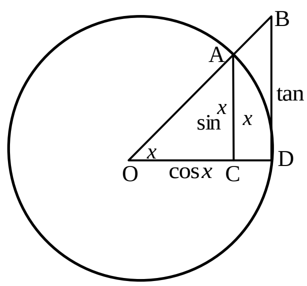
يوه دايره په پام کې نيسو چې د هغې مرکز (0) اوشعاع يې OD او 1 $\overline{OA}=\overline{OD}=1$ ده (لاندې شکل وگورئ). د A له ټکی څخه پر $\overline{OD}$ يو عمود رسمو، چې دا وړانگه په C ټکي کې غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د D په ټکي باندې پر دايرې يو مماس رسموو، دامماس له $\overline{OA}$ څخه غځيدلي کر ښه د B په ټکي کې غوڅوي.

اوس A د D سره تړو:

موږ لرو :



$$\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

$$\tan x = \frac{\overline{DB}}{\overline{OD}} = \overline{DB}$$

دا چې x په راديان اندازه کيږي، نو لرو: $\overset{\frown}{AD} = x$

له پورته شکل څخه لاندې نا مساوات لرو: $\overset{\Delta}{OBD} > \overset{\angle}{AOD} > \overset{\Delta}{AOC}$

همداسې لرو:

$$\frac{1}{2}\cos x.\sin x < \frac{1}{2}\overline{OD^2}.x < \frac{1}{2}\overline{OD}.\tan x$$

په پورته نامساواتو کې $\overline{OD} = 1$ ږدو او د نامساواتو ټولې خواوې په دوو کې ضربوو، نو لرو: $\cos x.\sin x < x < \tan x$

يا په همدې ډول ليکلای شو: $\cos x.\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$

که د پورته نامساواتو ټولې خواوې پر $\sin x$ وويشو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

یا:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x$$

دا چې د $x \to 0^+$ لپاره $\cos x \to 1$ دی، نو لرو:

$$\frac{1}{1} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$$

$$1 > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$$

ګورو چې په عین وخت کې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ له 1 لوی او هم له یو 1 کوچنی دی، نو له دې نامساواتو څخه دا لاندې مساوات لرو: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

پام: که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو، نو دا لاندې ترې لاس ته راځي:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته دوارو مساواتو څخه غوښتنه لاس ته راځي:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

بیلگه ۱: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x=\alpha$ اوکه $x\to 0$ وي، نو $\alpha\to 0$ او $\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ لرو.

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\Rightarrow 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2$$

بیلگه ۲:

وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y=5x$ وي او $x\to 0$، نو $y->0$ هم لرو:

$$\frac{\sin 5x}{5x}\quad\frac{5}{2}=\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)}\quad\frac{5}{2}=\frac{\sin 5x}{2x}$$

$$=\frac{5}{2}\frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}\frac{5}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}$$
$$=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}$$

تمرینونه: دا لاندې غوره قضیه وښایاست.

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ او لاندې اجرات وکړئ:

الف) تانجنت $\tan x$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو ولیکئ.

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو و لیکئ.

پ) دپورته قضیې لیمیټ پیدا کړئ.

ت) ایا قضیه رښتیا ده؟

لاندې لیمیټونه (حدونه)وشمېرئ.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}\ ,\ 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x},\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}\ ,$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}\ ,\ 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}\ ,\ 6)\ \lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}\ ,\ 8)\ \lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}+\sin^2 x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت یا لیمیټ

د $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x)\neq 0$ کسري توابعو لپاره مو لیمیټونه وشمیرل، چې x په خوښه وو.

اوس $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x)\neq 0$ لپاره لیمیټونه غواړو و شمیرو، که $x \to \pm\infty$ وي.

فعالیت:
زده کوونکي دې د هرې لاندې تابع د حد له شمېرلو د مخه، د توابعو ګرافونه انځور کړې او په ګرافونو کې دې یې دې ته پام وي،چې دا څنګه په تعریف شوې ورشوې کې ځغلي.

لومړی: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x-2}$ پیدا کړئ.

د 5 وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یعنې $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x-2}=\frac{5}{\pm\infty}=0^{\pm}$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

دویم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1}$ پیدا کړئ.

د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یانې $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1}=\frac{-3}{\pm\infty}=0^{\pm}$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کیږي.

دریم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}$ پیدا کړئ.

په مخرج کې یوازې x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کوني له لارې هر عدد مثبت

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیږي.که 5 په یوه ډېر لوی مثبت عدد وویشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، یعنې $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x^2-2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$

ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، یوازې له پورته لور ور نږدې کېدنې سره.

څلورم: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت کیږي.د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{x^2-2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^-$.

ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، یوازې له کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

د پرېښودنې- یا ترې صرفنظر کونې یا له ترې تیرېدنې اصول:

لومړی: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

په صورت کې د x جګعدد(توان؟)، په مخرج کې د x^2 توان په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي.
که 1 په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد وویشل شي، نو
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm$ ترې لاس ته راځي.

(ځیره G_f پروت ګاونډ(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنزدې کیږي.

دویم: غواړو د $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2}$ تابع حل پیدا کړو.

حل: په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیولو او له ټولو ثابتو تریږو(صرفنظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول حدونه $\pm\infty$ لاس ته راځي یعنې $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$.

شکل G_f مائله اسیمپټوت راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د 1 په اندازه ستره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$ پیدا کړئ.

په صورت او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تیریږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه $-\frac{2}{3}$راکوي

یعني $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

شکل G_f پرته اسیمپتوت راکوي، چې $y=-2/3$ ده.

څلورم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}$ پیداکړئ

په صورت کې له x^2 څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تیریږو. که -2 په $\pm\infty$ ووېشل شي، نو یو کوچنی مثبت یا منفي عدد یعنې $0^{\pm}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{\pm\infty}=0^{\pm}$ ترې لاس ته راځي.

شکل(ځیره) G_f یو پروت اسیمتوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته لور ورنږدې کیږي.

شمیرنیز حلونه(د شمیرنې له لارې حل):

اول: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ وشمیرئ.

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(لینده کیو یاقوسونو) راوستنې او بیا د x^2 سره لنډونې وروسته مخرج د 1 په لور ځي او صورت دصفر په لور، یعنې صورت ترمونه صفر ته نزدې کیږي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل G_f یوه مایله اسیومپتوت(مجانب) لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په 1 کوچنی ده.

دویم: وشمیرئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x یعنې x^4 له نوکانو یا لیندکیوبهر نیسو او بیا په ترتیب شمیرنیزه عملیه مخ ته بیایو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټولیز خویونه:

بیلگه۱: پیداکړئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

په پورته بیلگه کې داسې مخ ته تللي یو،چې په صورت کې له ټولو عددونو څخه تیرېږو، چې د خپلواکي متحولې توان له 1 کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولو هغو خپلواک متحولو تیرېږو، چې توان یې له 2 څخه کوچنی وي.. گورو، چې په صورت کې x له کوم ضریب سره پاتې کیږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناپای په لور ځي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

بیلگه ۲: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-2}$

په پورته بیلگه کې په صورت کې له 1 او مخرج کې له 2 څخه تېرېږو او بیا صورت او مخرج په x ویشو. لاس ته راوړنه یې د x په یوه ثابت عدد وېشل دي. چې د $x\to\infty$ سره تابع $0\pm$ ته ځي، یعنې: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-2}=0\pm$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳: پیدا کړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$

په صورت کې له 2 او مخرج کې له $2x$ څخه تیرېږو او د x^2 سره یې لنډوو او په دې ډول لاندې پایله لرو: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=-\frac{2}{3}$

تمرینونه:

د لاندې تمرینونو حدونه د پورته ورکړشوو مختلفو لارو له لارې وشمیرئ:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

متمادیت(ناپرېکیدنه)“Continuity”

د درس په دې برخه کې لولو ، چې یوه تابع په یوه ټکي یا یوه انټروال کې کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې ټوپ وهي، یا پرې کیږي او که یا په متمادي یعنې نه پرېکیدنې ډول د اینتروال په دننه کې ځغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ په دې موضوع د تابع متمادیت څېړو او متمادیت تعریفوو

فعالیت:

لاندې توابع لرو:

$$f(x)=x^2-1 \ , \ f(x)=\frac{1}{x} \ , \ f(x)=\frac{|x|}{x}$$

- د دې درې توابعو شکلونه وکاږئ.

- وګورئ، چې د توابعو ګرافونه څنګه ځغلي. په کومه تابع کې ګراف ترلی ځغلي او څرته ماتیږي، ټوپ وهي او ...

له پورته فعالیتونو څخه لاندې پایله لرو:

د توابعو متمادیت Continuous functions

په دې موضوع کې موږ د یوې تابع د متمادیت په هکله څېړنه کوو او د متمادیت پیژند(تعریف) ورکوو.

پیژند:

که b د f تابع تعریفورشو (- ساحه) کې یو حقیقي عدد وي. د f تابع په b متمادي بلل کیږي، که د ټکي (b.f(b)) نږدې د f ګراف داسې وکښلی شو، بې له دې چې د پنسل څوکه له کاغذ څخه پورته کړو.

له دې امله $f(x)=x^2-1$ تابع او $f(x)=\frac{1}{\text{x}}$ تابع د $x=b$ په ټکي کې متمادي ده.

$f(x)=\frac{|x|}{x}$ تابع په $x=0$ متمادي نه ده یانې ټوپ وهي کیږي.(څېره په ۵ –م مخ کې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع په $x = a$ کې غیر متمادي ده، که پرې شي(تشیا ولري)، توپ ووهي او یا ماته شي.

لرو: $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په $x = 0$ کې نشته یعني تابع د $x = 0$ په ټکي کې متمادي نه ده.

بیلګه ۱:

که $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; \quad x \ge 1 \\ 1-x & ; \quad x < 1 \end{cases}$ وي، نو:

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) پیدا کړئ $\lim_{x\to 3} f(x)$

پ) پیداکړئ: $\lim_{x\to 1} f(x)$

که تابع په $x = 3$ او $x = 1$ کې متمادي وي.

حل:

الف) ګراف دې د ګرانو لوستونک دنده وي.

ب)
$$\lim_{x\to 3} f(x) = (2x+1) = 7$$
$$f(3) = 7$$

پ)
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x+1) = 3$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x) = 0$$

د ب) او پ) له مخې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

له دې امله تابع په $x=3$ ناپرېکيدونې او $x=1$ کې پرېکيدونکې ده.

بيلګه ۲:

که $f(x)=\begin{cases}\frac{x3+x}{x} & ; x\neq 0\\ 3 & ; x=0\end{cases}$ **وي.**

الف) فنکشن رسم کړئ

ب) و خيرئ، چې تابع په $x=2$ او $x=0$ کې متمادي ده او که نه؟

حل: الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	3	2	5

ب) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3+x}{x} = \lim_{x\to 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f ليميټ شته او $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ دی، نو تابع متمادي دی که $x=2$ وي.

وي دې $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې معنا دا ده، چې $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ او په دې معنا دی، چې $f(0)=3$

دا دا معنا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

تابع په $x=0$ کې غيرمتمادي ده.

بيلگه۳: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}\ ,\ x\neq -3$ وي.

ايا $f(x)$ تابع په $x=-3$ کې متمادي ده؟

حل: تابع $f(-3)$ تعريف نه لري، نوله دې

امله تابع په $x=-3$ کې متمادي نه ده.

له دې بيلگې او د تيرو درسونو څخه لرو:

> تعريف (پيژند):
>
> که f يوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اينتروال کې چې $x=c$ لري تعريف وي،نو د f تابع په $x=c$ کې متمادي بلل کيږي، که دا لاندې شرايط پوره وي:
>
> 1- که $f(x)$ تعريف وي.
>
> 2- که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي).
>
> 3- که $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ رښتيا وي.
>
> که تابع د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په واز اينتروال (a,b) کې هم متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \quad x\le 1\\ 4+x & ; \quad x>1\end{cases}$ وي.

وګورئ، چې تابع چیرته متمادي او چیرته غیرمتمادي ده.

حل: په $x=1$ کې f تعریف لري

$$\begin{aligned}
&f\,(x)=3\\
&\lim_{x\to-1} f\,(x)=\lim_{x\to-1}(2x^{2}+1)=3\\
&\lim_{x\to-1} f\,(x)=\lim_{x\to-1}(4+x)=5\\
&\lim_{x\to-1} f\,(x)\neq\lim_{x\to-1} f\,(x)
\end{aligned}$$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې غیرمتمادي ده

بیلګه ۵:

که $f\,(x)=\begin{cases}2x^{2}+1 & ; \quad x<2\\ 3 & ; \quad x=2\\ x+3 & ; \quad x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متمادیت په $x=2$ کې وڅیرئ.

حل: تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف لري او لرو $f(2)=3$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to2^{+}} = \lim_{x\to2^{+}}(x+3)=5\\
&\lim_{x\to2^{+}} f(x)=\lim_{x\to2^{-}} f(x)\\
&\lim_{x\to2^{-}} f(x)=\lim_{x\to2^{-}}(x^{2}+1)=5 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to2} f(x)=5
\end{aligned}$$

دا چې $f(x)=3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x\to2} f(x)\neq f(2)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا دی، چې تابع په $x = 2$ کې غيرامتمادي ده.

بيلگه ۶:

که $f(x) = \begin{cases} 2\sin x & ; \quad x \le \frac{\pi}{2} \\ ax^2 + \pi^2 & ; \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ وي، نو:

a داسې پيدا کړئ، چې f په $x = \frac{\pi}{2}$ کې متمادي وي.

حل: $\lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} f(x) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \to \frac{\pi^+}{2}} f(x) = a\frac{\pi^4}{4} + \pi$

$f(x)$ متمادي ده، نو له دې ځخه لاس ته راځي:

$$a\frac{\pi^2}{4} + \pi^2 = 2$$

و

$$= \frac{a}{4}\pi^2 = 2 - \pi^2$$

$$a\pi^2 = 8 - 4\pi^2 \Rightarrow a = \frac{8}{\pi^2} - 4$$

تمرينونه:

1- يوه په خوښه تابع وليکئ او د تابع گراف وکاږئ او وگورئ، چې تابع چيرته تعريف ده او متماديت يې وښاياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې پوښتنو کې وښيری، چې تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي يا غيرمتمادي دي.

2) $f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 \;;\; x = 3$

3) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \;;\; x = -1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \;;\; x = -2$

5) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3^3)} \;;\; x = 3$

6) $f(x) = |x-3| \;;\; x = 3$

7) $g(x) = \dfrac{|x|}{x} \;;\; x = 0$

د متمادي يا ناپرېکيدونکو توابعو خويونه

دلته دا خويونه همغه د ليميټ خويونه دي.

فعاليت:

1- د f او g توابعو جمع پيداکړئ:

$(f+g)(x) = ...$

2- د f او g توابع په $x = 2$ کې متمادي دي، نو:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = ...\ \&\ \lim\limits_{x\to a} g(x) =$

3- د ليميټ قيمتونه استعمال کړئ:

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$

$= .... : ...$

$= .... : ... = (f+g)(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله $(f+g)$ په $x=a$ کې متمادي ده.

که f او g توابع په $x=c$ کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په $x=c$ کې متمادي ده.

1- د توابعو جمع $f+g$

2- د توابعو تفريق $f-g$

3- د توابعو ضرب $f \cdot g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}\ ;\ g \neq 0$

بيلگه۱:

که $f(x)=\sin x+1$ **او** $g(x)=x^2+3x-2$ **وي، نو:**

1- f او g په $x=1$ کې متمادي دي.

2- وښيئ، چې ايا

الف) $f(x)+g(x)=\sin x+x^2+3x-1$ او

ب) $(\sin x+1)(x^2+x^2+3x-1)$ په $x=1$ کې متمادي او که غيرمتمادي دي.

حل: $1)\ \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=\sin 1+1$

نو f په $x=1$ کې متمادي دی.

$$\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=2$$

نو g په $x=1$ کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- الف):

$$a)\ \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$
$$= f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کې متمادي ده.

ب) :

$$(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= (f \cdot g)(x)$$

نو د متمادي توابعو ضرب په $x = 1$ کې متمادي دی.

بیلگه ۲:

که $g(x) = 3x - 2$, $f(x) = x + 1$ وي، وښيئ، چې ايا $f(x) \cdot g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده.

حل:

له پورته ښخه لاس ته راځئ، چې $f(x) \cdot g(x)$ متمادي

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$$
$$\lim_{x \to 2} g(x) = 4 = g(2)$$

ده. $f(x) \cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$
$$= \lim_{x \to 2} f(x) \cdot \lim_{x \to 2} g(x) = f(2) \cdot g(2) = 3.4 = 12$$

دکينې لورې بند انتروال په [a,b] کې گراف متمادي تابع په گوته کوي يا ښايي، هلته چې $f(a) \neq f(b)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ گراف له $(b, f(b))$

ټکي ځخه نشي انځورېدلی تر څو افقي کرښه

$y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي.

له پورته څخه دا لاندې غوره جمله لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال [a,b] کې متمادي اوk د a اوb ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عددc د f(a) اوf(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی.

بیلگه ۳: که $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ x \in [1,2]$ وي، نو **وښایئ، چې یو** $c \in (1,2)$ **شته، داسې چې** $f(c) = 11$ **وي.**

حل: $f(x)$ یو پولینوم دی نو f په بند اینتروال [1,2] کې متمادي دی.

لاندې لرو:

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5 \quad ; \quad f(2) = 8 + 4(2) = 16$$
$$5 < 11 < 16 \quad , \quad f(1) \neq f(2)$$

له دې امله یو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی.

بیلگه ۴:

که $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & ; \ -1 \le x < 2 \\ |x-10| & ; \ 2 \le x \le 20 \end{cases}$ ي ، نو:

الف) وآزمایئ، چې تابع متمادي ده.

ب) وآزمایئ، چې یو $c \in (-1,20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2x + 4 = 8$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 10 - 2 = 8$$

له دې امله لرو:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 8$$
$$f(x) = 10 - 2 = 8$$

ګورو چې تابع په [-1, 20] کې متمادي ده.

$$b)\ f(-1)2x\ -1+4 = 2$$
$$f(20)|20-10| = 10 \ \Rightarrow\ f(-1) \neq f(20)$$

په دې اساس لرو: $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو: $c \in (-1, 20): f(c) = 6$

$$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2)$$
$$|x - 10| = 6$$
$$x - 10 = 6 \ \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$$
$$10 - x = 6 \ \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$$

$$= 6 \qquad |x-10| \Rightarrow$$

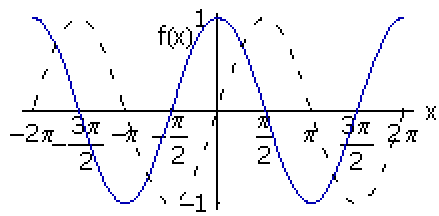
د c ارزښتونه 1, 4, 16 دي.

بیلګه ۵ :

که وي: $f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$ ، نو وښایئ چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

نشاد دهيد که $c\in\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ شته دی د کوم لپاره چې $f(c)=4$ او c پيدا کړی.

حل : تابع f د ساين تابع ددی ، نو له دې امله f متمادي دی. $f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$ $f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$ $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ مو، لرو : تابع fمتمادي دی او لرو: $1 < 4 < 5$	 ټکي ټکي د ساين ګراف دی. دا ګراف که په ۳ کې ضرب کړی او ۳ ورزيات کړي د بيلګې ګراف راکوي.

دا په دې معنا چې، که $c \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ موجود وي، د هغه لپاره $f(c) = 4$ صدق کوي.

که د دې لپاره c پيدا کړو ، نو په لاس راځي:

$$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$$

$$2\sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ c = \frac{\pi}{6}$$

له ګراف څخه واضح ايدل کيږي،، چې f په انتروا ل $[a,b]$ کې متمادي دی، $f(a)$ او $f(b)$ متضادې علامې لري، نو c د منځنی ارزښت قضيې په بنسټ د $f(a)$ او$f(b)$ په

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ کې و K=0 ته لږ تر لږه یو C د a او b په منځ کې داسې شتون لري، چې له هغې نتیجه f(c) = 0 لاس ته راځي.

دا په دې معنا، چې x=c د برابرون یا مساوات f(x) = 0 یو حل دی.

بیلگه۶ :

که $f(x) = x^3 + 5x - 23$ **وي، نو وښایئ،چې د f تابع د x -محور په اینتروال** (2.3) **کې غوڅوي.**

حل: f **پولینوم تابع ده ، نو f په اینتروال** [2,3] **کې متمادي دی.**

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$
$$f(3)3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

$f(2) \neq f(3)$ **او د متضادو مخنخښو(علامو) سره.**

له دې امله د $c \in (2,3)$ لپاره لرو چې $f(c) = 0$ دی.

لنډ: غیرمتمادي توابع هغه دي، چې په یو کوم ځاي کې تعریف نه وي

تمرینونه:

وښایئ چې تابع په ورکړ شوي ټکي کې متمادي ده.

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2 + 3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x} \quad ; \quad x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + 1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- تشريح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غيرمتمادي ده؟

5- که $x\in[2,3]$, $f(x)=\frac{18}{x}+2$ وي، و ښايئ چې $c\in(2,3)$ شته داسې چې $f(c)=10$ وي او c پيدا کړئ.

6- وښايئ چې د لاندې مساوات لپاره يوحل شته:

$$x^3-4x+1=0 \quad ; \quad x\in[1,2]$$

7- وي دې: $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$; $f(x)=\sin x+\cos x$ وښايئ، چې مساوات $\sin x+\cos x=0$ په اينتروال $(\frac{\pi}{2},\pi)$ کې يو حل لري.

8- وي دې:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & ; \quad -1\le x\le 3 \\ 13-2x & ; \quad 3<x\le 7 \end{cases}$$

الف) ايا f په $x=0$ کې يو متمادي تابع دی؟

ب) $c\in(-1,7)$ داسې پيدا کړئ، چې $f(c)=0$ وي.

د لـــومړي څپـــرکي تولګه " Chapter Summary "

پيژند:

د $f(x)$ تابع يو ليميټ L لري، که x ترلی يو حقيقي عدد c ته لاړ شي. په دې معنا چې $f(x)$ لپاره، چې ترلیLته ځي دا دی، چې x ترلی c ته لاړشي او داسې يې ليکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې یو کيڼ اړخيز لیمیټ $a_l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ لري،

که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 کيڼ لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅيږي.

په ورته توګه ښی اړخيزه لیمیټ:

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې یو ښی اړخيز لیمیټ $a_r = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ لري،

که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 ښي لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅيږي..

که تابع f(x) همغه لیمیټ L ولري که x له ښی اويا کيڼې لورې و c ته نږدې شي، نو لیمیټ شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې لیکو: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

د پولې یا حد خويونه(خواص) :

که f او g توابع وي، c;Lاو M حقيقي اعداد وي داسې چې $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ او $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$، نو دا په لاندې توګه لیکلی شو:

1) $\lim\limits_{x\to c}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim\limits_{x\to c}(f-g)(x) = \lim\limits_{x\to c}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim\limits_{x\to c}(f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \cdot M$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4)\ \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M};\ (M \neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(د $f(x) \geq 0$ او د x د ټولو قیمتونو لپاره، چې c ته ور نږدې کیږي.

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$

پیژند: f دې یوه تابع وي او د ټولو x لپاره په یوه واز انتروال کې چې $x = c$ وي ،تعریف وي، نو وایو: f په $x = c$ کې متمادي دی، د لاندې شرایطو سره:

1) $f(x)$ تعریف لري 2) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ شته دی

$$3)\ \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

که تابع د ټولو $x \in (a, b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) ې متمادي ده.

تعریف یا پیژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال $[a, b]$ ې متمادي ده، که تابع له ښئ لورې په $x = a$ کې متمادي وي او له کینې لورې په $x = b$ کې او د واز انتروال (a, b) په هر قیمت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه(خواص): که f او g په $x = c$ کې متمادي وي، نو دا لاندې هره یوه تابع په $x = c$ کې متمادي ده.

لومړی) د توابعو جمع یعني $f+g$ تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم) د توابع تفریق یعنې f-g تابع

دریم) د توابعو ضرب یعنی f.g

څلورم) د توابعو ویش یعني $g(x) \neq 0 \; ; \; \frac{f(x)}{g(x)}$

د منځني قیمت قضیه:

که تابع f په بند انتروال [a,b] کې متمادي وي او k د f(a) او f(b) ترمنځ یو عدد وي، نو لږ تر لږه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

د ښځرکي تمرینونه:

سم ځواب وټاکئ:

که $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ وي، نو $\lim_{x \to 2}(3x-20)(x+1)$ ی:

a) 5 b) -5 c) 4 d) 3

ب) پیدا کړئ $\lim_{x \to 1} \frac{x2+1}{x2+3x-2}$

a) 1 b) 2 c) 1 d) $\frac{1}{2}$

1- لیمیت پیداکړئ $\lim_{x \to 5} \frac{|x+5|}{x^2+3x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) 1 b) 5 c) -1 d) -5

-2 $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ دی.

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2

-3 $\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin x}{x}$ دی.

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-4 $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$ دی.

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-5 $\lim_{x \to 1.4} [2x + 0.3]$ دی.

a) 1 b) 3 c) 0 d) نشته

-6 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$ دی.

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-7 $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ دی.

a) $2 + \sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

(c) ketabton.com: The Digital Library

-8 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin}{1+\cos 2x}$ دی.

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

-9 لاندې توابع سره جمع کړئ.

$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$ & $\lim_{x \to 3}(x) = -2$

-10 که $f(x) = x^2 + 1$ وي، پیداکړئ:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

-11 تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - b & ; \quad x \le 3 \\ 10 - x & ; \quad x > 3 \end{cases}$ په $x = 3$ کې متمادي دی، b پیدا کړئ.

-12 وښایئ، چې تابع $f(x) = 3x^2 - x - 5$ په اینتروال $(1,2)$ کې حل لري.

۱۳ - د لاندې ۱ – ۹ توابعو لیمیتونه وشمېرئ.

1) $\lim_{x \to -1} (x^2 + x)$ 2) $\lim_{x \to 4} (x^2 + x)$ 3) $\lim_{x \to -2} 2x + 3$

4) $\lim_{x \to 0} |x|$ 5) $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x}$ 6) $\lim_{x \to 1} 7$

7) $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}}$ 8) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ 9) $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱٤-- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع گراف وکاږئ.

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ پيدا کړئ.

15: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعریف نه لري ، څه بلل کیږي

16 پيدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

17-- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$ وشمېرئ.

18--

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 \quad ; \quad x<2\\ 3 \quad ; \quad x=2\\ x+3 \quad ; \quad x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متماديت په $x=2$ کې وڅېړئ.

۱۹- یوه په خوښه تابع ولیکئ او د تابع گراف وکاږئ او وگورئ، چې تابع چېرته تعریف ده او متمادیت یې وښایاست.

۲۰ - په لاندې له ۲ – ۷ پوښتنو کې څېړو، چې ایا تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي یا غیرمتمادي دي.

2) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \;;\; x=3$

3) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \;;\; x=-1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \;;\; x=-2$

5) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3^3)} \;;\; x=3$

6) $f(x)=|x-3| \;;\; x=3$

7) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \;;\; x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱- تشريح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غيرمتمادي ده؟

۲۲- که $f(x)=\frac{18}{x}+2\ ,\ x\in[2,3]$ وي، و ښايئ چې $c\in(2,3)$ شته داسې چې $f(c)=10$ وي او c پيدا کړئ.

۲۳- وښايئ چې د لاندې مساوات لپاره يوحل شته:

$$x^3-4x+1=0 \quad ; \quad x\in[1,2]$$

۲٤- وي دي: $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$; $f(x)=\sin x+\cos x$ وښايئ، چې مساوات $\sin x+\cos x=0$ په اينتروال $(\frac{\pi}{2},\pi)$ کې يو حل لري.

۲۵ الف: وښيئ، چې ايا لاندې تابع د x_0 په ځاي کې مفمادي ده.

a) $f(x)=\begin{cases}-2x\\ \sqrt{x}\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}\sin x\\ e^x\end{cases}$	$x \le 0$ د $x_0=0$ لپاره $x > 0$ د $x_0=0$ لپاره $x \le 0$ د $x_0=0$ لپاره $x > 0$ د $x_0=0$ لپاره	b) $f(x)=\begin{cases}2\\ x^2+1\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}-x+1\\ \ln x\end{cases}$	$x \le 1$ د $x_0=1$ لپاره $x > 1$ د $x_0=1$ لپاره $x \le 1$ د $x_0=1$ لپاره $x > 1$ د $x_0=1$ لپاره

۲٦-- که $f(x)=2\sin x+3\ ;\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ وي، نو وښايئ چې $c\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ شته،

(c) ketabton.com: The Digital Library

---------------------- ---

د هغه لپاره چې ربښتیا وي $f(c) = 4$ او c پیداکړئ.

۲۷: لاندې لیمیټونه وشمېرئ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x} \qquad \lim_{x\to 0} \sin 5x \cot 3x$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1} \qquad \lim_{x\to \pi} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$$

$$\lim_{x\to 1} (\cos^2 x + \sin^2 x) \qquad \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - 2x}{x}$

20) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\tan 2x}{\sin^2 x}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x}\cos\dfrac{\pi x}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^3+2x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

25) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$

26) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x+\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}$

27) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x(x-\frac{\pi}{4})}$

28) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - x\cos 3x}{x}$

29) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\sin 3x - \sin 5x}$

30) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x|}{x}$

31) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\sin^2 x - 1}}{x}$

32) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x-\pi}$

33) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(3x-3)}{1-x^3}$

34) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+5x}{\sin 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه برخه: مشتق یا رابیلیدنه

په تیره برخه کې مو د پولې څیړنه وکړه. وبه ګورو، چې دا د پولې درس د مشتق یا رابیلیدنې لپاره اړیین دی.

د تابع منځ ارزښت تغیر Average rate of change

دلته دې د سالنګ یا ماهیپر د سرک خیره راشي.(دلته څېره راځي)

دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو، تر څیړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګنم، چې په دې هکله داسې مهم څه

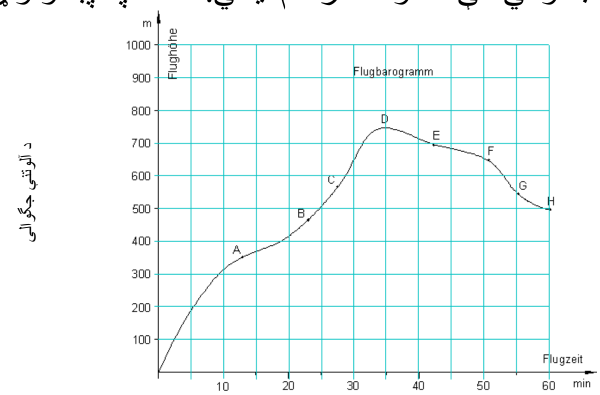
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه یادښت په څیر راوړم: که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغير منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږیږو ، نو موخه تري په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی، میل اویا تانجنت دی او دا دریواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې کمښتوپش یا د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

دې کلمو ته په انګرېزي کې **slop** وايي، چې زموږ ادبیتو د میل په نامه بلل کیږي.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګیدنه)

الوتکوکي د الوتني دلیک(الوتنلیک) الي (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.



Flight barogramm

په پورته ګراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونوجګوالی ښوول شوی.

فعالیتونه:

_ په پورته څیره کې د ګراف جګوالی د A په ټکي کې د B ټکې سره پرتله کړئ. په ورته توګه دګراف میل د E په ټکي کې د G ټکي سره پرتله کړئ.

_ روښانه کړئ، چې ولې په یوه ټکي کې باید له جګوالي، میل یا تانجنت څخه غږیږو؟

_ وهڅیرئ، چې په یوه ټکي کې د ګراف جګوالي لپاره یو متود تعریف کړئ او له انځور څخه د A او B په ټکو کې جګوالی وټاکئ.

_ ایا فکر کوئ، چې پهB ټکي کې نسبت وA ټکي ته جګوالی زیات دی؟

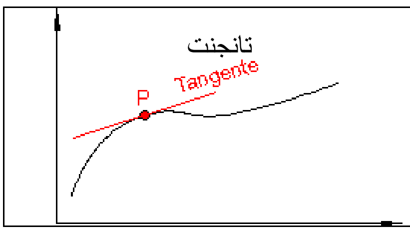
_ ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

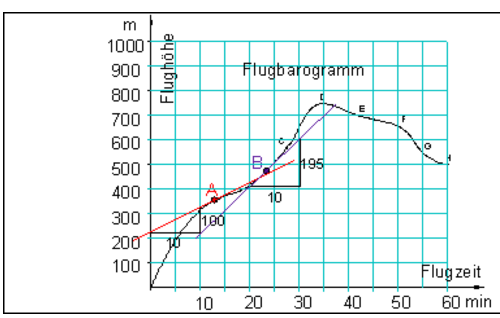
_ ايا د يوې کرښې جګوالی او په همدې ترتيب د يوې منحني هرچيرته توپير لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه:
ګورو، چې په يوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچيرته برابر نه دی، نو له دې امله بايد ټکی په ګوته کړو، چې هلته ميل څيرل کيږي.
په لاندې بيلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د يوې (سيده)کرښې ميل هرچيرته برابر دی، نو له دې امله دلته د يوې کرښې د ميل يا جګوالي څخه غږيږو.
بريښي چې لاندې پيژند يا تعريف عاقلانه دی.

(تعريف):
د يوې تابع ګراف ميل(جګوالی) د P په يوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د ميل د ګراف سره برابر دی.



ليدل کيږي چې دلته يو تانجنت د کرښې تعريف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپيريال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه ور نږدې کيږي.
ددې پيژند يا تعريف له مخې په يوه ټکي کې د يوه ګراف ميل د يوې کرښې ميل دی.
د ګراف د جګېدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر يوه کې يوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زياته نږدې کيږي.
د ميل يا جګېدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل يا ساده ډول شميرل کيدی شي:
A په ټکي کې جګيدنه:



$$\frac{100\,m}{10\text{ min}} = 10\,\frac{m}{\text{min}}$$

د B په ټکي کې جګيدنه:

$$\frac{195\,m}{10\text{ min}} = 15.5\,\frac{m}{\text{min}}$$

زموږ د بيلګې لپاره ميل يا جګيدنه په يوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي(سملاسي) ميل سرعت په معنا دی.

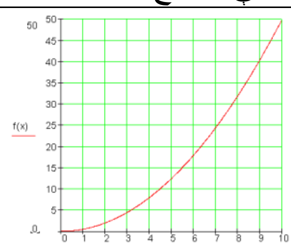
(c) ketabton.com: The Digital Library

د A په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $12.5\min$، د ميل ياجګيدنې چټکتيا (سرعت) نږدې $10\frac{m}{\min}$ ده.

د B په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $23.0\min$، د جګيدنې سرعت نږدې $19.5\frac{m}{\min}$ دی.

تانجنت تر اوسه فقط د ليدنې له مخې تعريف شوی، چې د لمسټکي چاپيريال ته خورا ډېر نږدې کيږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف ميل د A او B په ټکو کې هم يواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

په يوه ټکي کې د تابع دګراف ميل (جګيدنه):
معلومه ده، چې يو ريلګاډی د تمځای ځخه له خوزېدو(حرکت) وروسته خپله چټکتيا(سرعت) په کراره کراره زياتوي. وهلی لار(د تمځای ځخه لرېوالی) تل زياتيږي. د تمځای څخه لريوالی د چټکتيا يا سرعت په واک کې يا تابع دی.

عمل د لاندې تابعمساوات له لارې ليکلی شو.(مخامخ يا لاندې د تابع ګراف) دلته د x وخت د ثانيې او د s لار د متر لپاره ټاکلې او ليکو: $S = f(x) = 0.5x^2$	

فعاليت:
1- اوس دې منځنی تغير ارزښت Averagerat of change(منځنی ميل ارزښت) د 3– مې او 7–مې ثانيې ترمنځ وشمېرل شي.
2- ددې لپاره دې اړونده قاطع يا سيکانت انځور شي او د هغې جګوالی دې وشميرل شي.
3- اوس دې د تغير ارزښت(منځنی جګوالی) د 3–مې او 7–مې ثانيو ترمنځ وشميرل شي.
4- وښاياست، چې په دريمه ثانيه کې د ارزښت تغير يا جګوالی څومره دی؟

كمښت ويش يا د تفاضل ويش Difference quotient

د يوې کرښې ميل يا جګيدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکيدی شي.
کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

قاطع(غوڅی seconce):

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

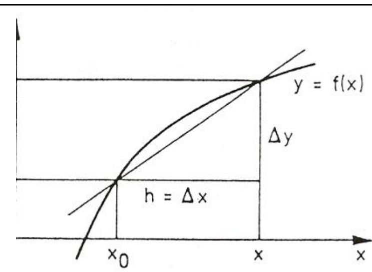
د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالی secant):

دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمیرل کیږي.

په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(تعریف): د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ خیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. د ا ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.

د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

د $y=f(x)=3x^2-5x+4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3(x+h)^2-5(x+h)+4-(3x^2-5x+4)}{h}$$
$$=\frac{3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4-3x^2+5x-4}{h}$$
$$=\frac{6xh+3h^2-5h}{h}$$
$$=6x+3h-5$$

تمرینونه:

1 - کمښتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

2- د $x = x_0$ په ځای کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^2\ ,\ x_0=2$ $b)\ f(x)=0.5x^2\ ,\ x_0=3$

د کمښتویش(د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترمنځ توپیر څه دی؟

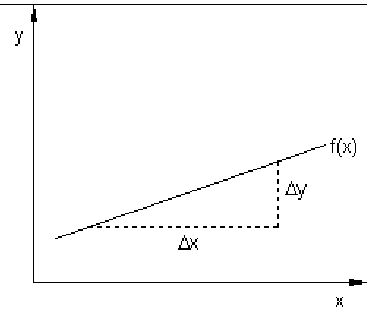
4 - د یوې تابع د سکانت(قاطع) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جګیدو لاندې څه پوهیږو؟ او د دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

رابیلیدنه یا مشتقشمیرنه **Diffrentialcaculation**

فعالیت:

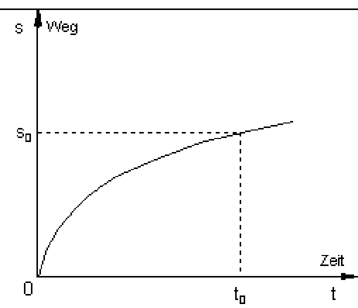
پام وکړئ، لکه په یوه ثابت میل $a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = constant$ کې، د بیلګې په توګه په خطي یا لاینیز تابع کې د $f(x) = a_1 x + a_0$ سره میل شته او که نه؟

_ پام وکړئ، چې دا میل به څه ځانګړي خویونه ولري؟ ایا جګیدنه به په هر ځای کې فرق ولري اوکه ثابت به وي؟	

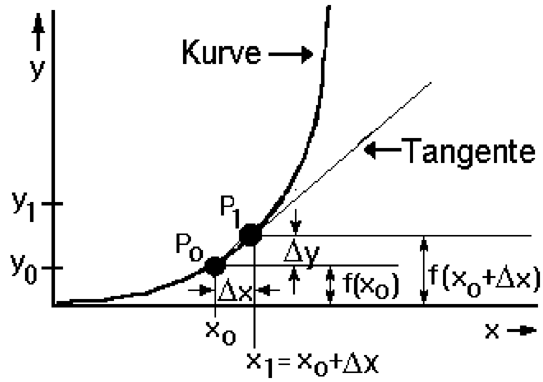
ایا په مختلفو وختونوکې اړین بولی، چې د تغیرحالت(د میل حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړئ؟

_ او یا له دې امله لحظوی چټکتیا(سرعت) $v(t_0)$ په لار- وخت- دیاګرام کې وڅیړئ؟

_ ایا د مشتق شمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي؟

په پام کې نیولې لحظه $t_0 \hat{=}$ دا تر دې وخت وهل شوې لار $s_0 \hat{=}$ یادونه: مخامخ Zeit د وخت ا و Weg د لار په معنا دي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

	مشتقشمیرنه = د یوې منحني میل یا جګیدنه (Differential caculation تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.

د تانجنت جګیدنه: د تانجنت جګیدنه د قاطع د جګیدني،، لیمت ،Limit,, یا حد دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

فعالیت:

1- له پورته څیرې او اړونده شننې څخه د مشتق لپاره څه فکر کوی؟

2- د derivative (مشتق) کلمې لاندې څه پوهیږو؟

او دا په ساده پښتو څه معنی ورکوي؟

3- له کمښت وېش(د تفاضلونو ویش) څخه ځنګه و مشتق ته راځو؟ په دې هکله د پورته څېړې څخه په ګټه اخسلوځپل نظر ووایاست.

4- له 2–م فعالیت څخه ووایاست، چې ولې دا شمېرنه رابیلېدنه یا مشتق بلل کیږي؟

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivative کلمه نوې ده، نو له دې امله دا ځو ټکي په پام کې نیسو: derivative د رابیلیدنې په معنا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو.

: که د تابع دا کمښتویش(د تفاضل وېش) $x -> x_0$ او(همداسې) $x -> 0 \Leftrightarrow$ او یا په (همدې ډول) $h -> 0 \Leftrightarrow$ لپاره یو حد ولري, نو د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت لري او ددې لپاره لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};...$$

دا لیمیټ داسې ښایو: $(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x)$

د x_0 ځای کې د $y = f(x)$ له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بیلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.
ددې کمښتوپش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0+\Delta x)^2 - 3(x_0+\Delta x)+2)-(x_0^2-3x_0+2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0 + \Delta x - 3$$

او د لیمیټ $\Delta x \to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

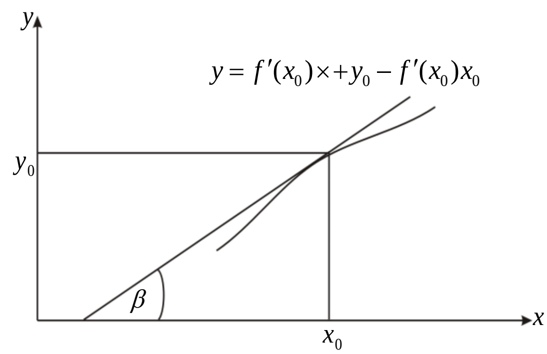
د دې لپاره دا لاندې تعریف(پیژند) ورکوو:

که یو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځای کې مشتق وړ وي، نو هغه لاندنی کرښه چې د (x_0, y_0) کې څخه تېریږي او میل یا جګوالی یې $f'(x) = \tan\beta$ دې او په لاندې ډول لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f^{'}(x)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0, y_0) په ټکي کي د ورکړ شوې منحني $y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله پورته کیڼ شکل)



موږ اوس د څو بنستیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیړنې لاندې نیسو.

بیلګه۱ :

د یوې ثابتې مشتق:

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت یې یوثابت دی.

ثابت $y=f(x)=c=Cons$ ، نو د هر x_0 ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$

$$\Rightarrow (\frac{dy}{dx})_{x=x_0}=f'(x_0)=0$$

بیلګه۲ :

یوه $f(x)=x$ خطي(کرښیزه) تابع لرو، د x_0 په ځای کي غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-+x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1=\underline{\underline{1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ :
د $y=f(x)=c.u(x)$ ډوله تابع مشتق د c = ثابتې سره.

د ثابتې قانون:
د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې $= c$) سره ضر ب شوی وي. یعنې له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو: $f'(x)=c.u'(x) \Rightarrow$

ثبوت:

$$\Rightarrow f(x_0)=c.u(x_0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0} c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$

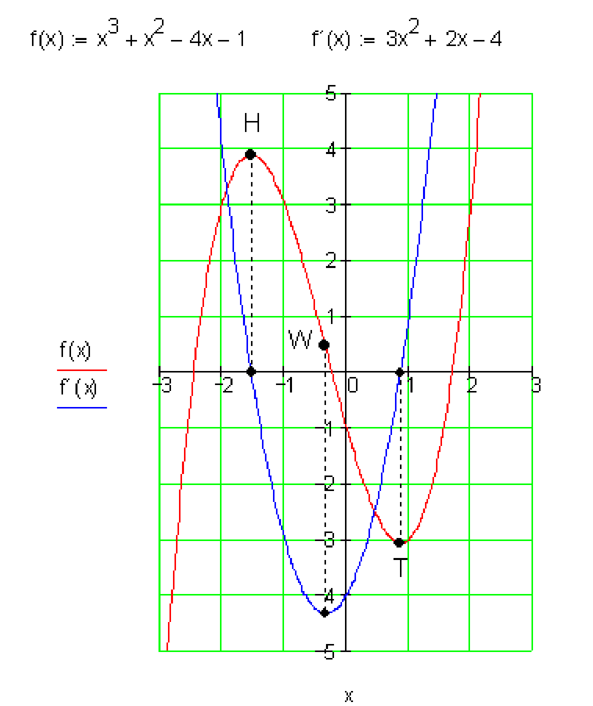
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$$

تمرینونه:

1- د تفاضل وېش او د مشتق لاندې څه پوهېږو؟
2- د دوی ترمنځ څه اړیکې (پرتې) دي؟
3- د قاطع (سکانت) او تانجنت جګېدنې لاندې څه پوهېږو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

	شکل کې سره منحني تابع، شنه کرښهمنحني د تابع مشتق او وبه گورو، چې له همدې امله د مشتق تابع هم ده.

فعالیت:

1- د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

2- د یوې تابع له مشتق نیونې وروسته دې مشتق ته څه وایو؟

3- که د تابع مشتق د مشتق تابع ونومو، روښانه کړئ، چې ولې تابع ده او ددې تابع درجه، د لومړۍ تابع سره پرتله کړئ.؟

• ایا له دې توپیر څخه د مشتق کلمه روښانه کولی شئ؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بیلګې څخه کار اخلو

بیلګه۱: تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي. غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = x_0 :$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

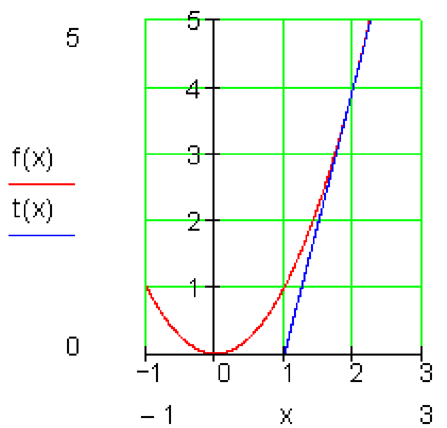
اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:

	کیدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 \mid y_0) = P_0(2 \mid 4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګیدنه لاس ته راوړو.

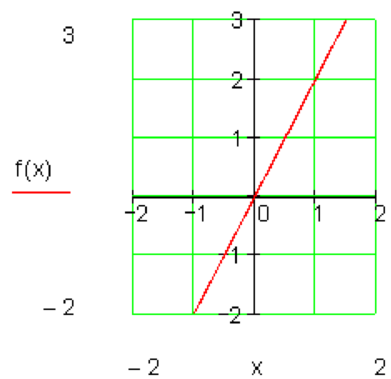
پورته بیلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4

ګراف یوه کرښه $f'(x) = 2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي



پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته هم یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي.
د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.

بیلګه ۲:
د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی وي.
فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0{}^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 3x_0^2$$

نو $f'(x_0) = 3x_0^2$ د $f(x) = x^3$ تابع مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $f'(x_0) = 3x_0^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۳: یوه د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ورکړشوې.
غوښتنې یا ثبوت:

الف: د تابع گراف په یاد راوړئ.

ب: په x_0 تکي کې د تابع مشتق پیداکړئ.

پ: په x_0 تکي کې د مشتق تابع هم پیدا کړئ.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)}-\frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$

د پورته اخري مساوات لیمیټ د $\Delta x\to 0$ لپاره نیسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

نو لرو: $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. دا د x_0 په ځای کې د f مشتق دی.

د مشتق تابع هم دی: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

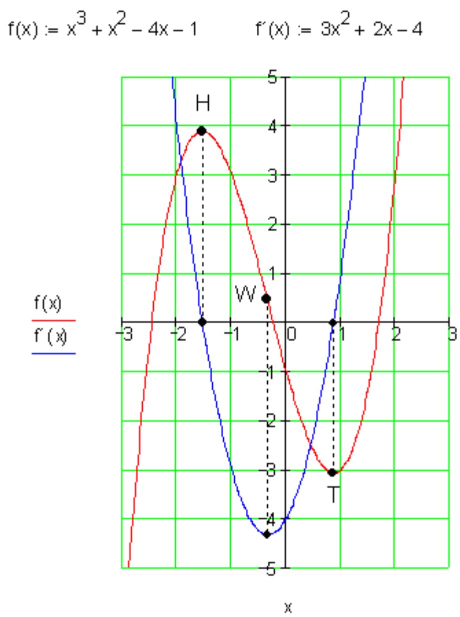
وضعیه کمیاتو سیستم کې تابع او د تابع مشتق:

تابع(سور): $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

د تابع مشتق(شین):

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د تابع مشتق هم تابع دع. موږ دا د مشتق یا د میل تابع بللې.



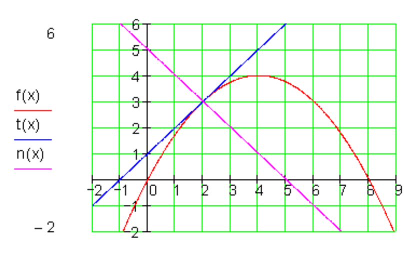
تمرینونه:

په لاندې مساواتو کې د f تابع مشتق او د مشتق تابع وښایئ

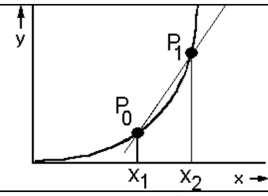
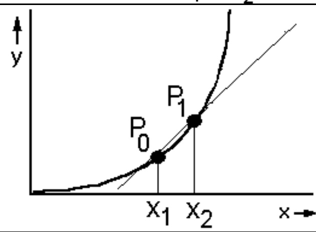
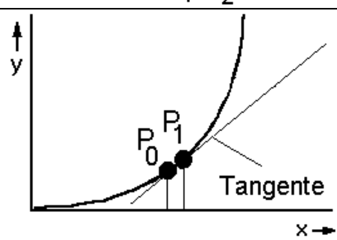
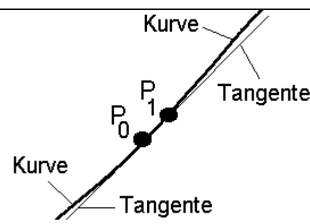
$a)\ f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$ $\qquad b)\ f(x) = x - \sqrt{x}$

$c)\ f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$ $\qquad d)\ f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$

د تانجنت او عمود تعریفونه او خویونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې یا مخاکخ څیره یو منحني او یوه قاطع(غوڅی) په ټکو P_0 او P_1 کې ښایي.	
اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1 په لور و خوځیږي. پام: ددې سره قاطع خپل میل تغیروي	
بالاخره غواړو، چې P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کیږي.	
که پوره وپیژندلی شو، چې د ټکو P_1 او P_0 په شاو خوا غزوو یا لویوو : که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کیږي، چې تانجنت په ټکي P_0 کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.	

د دې خویونو غوره غوره والی یا پایله:
ومو لیدل، چې د تانجنت میل په P_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني میل هم دی. له دې دا پایله لرو، چې که څوک غواړي د منحني میل په P_0 ټکي کې پیدا کړو، بسیا کوی، چې د تانجنت جګوالی یا میل په P_0 ټکي کې پیدا کړي.

فعالیتونه:
1- پورته شکلونه بیا سره پرتله کړئ. د میل په هکله یې فکر وکړئ، چې کوم میل زیات دی؟
2- تانجنت تعریف کړئ او په شکل کې یې وښایاست.
3- قاطع (سیکانت) تعریف کړئ او په څېره کې یې وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې د تانجنت او عمود عمومي فرمول راباسو:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$:

د $m_t = f'(x_0)$ سره لیکو: $t(x) = f'(x_0) \cdot x + b_t$ (1)

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال): د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$
$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(ځیره لاندې کښل شوې) کاږو:

نو لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \qquad ,P(2,f(2))$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ په ځای کې لرو:

$$t(x)=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow t(x)=1(x-2)+3=x-2+3=\underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \ , \quad P(2\,|\,f(2))$$

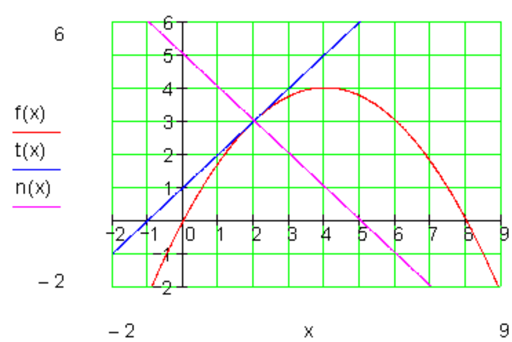
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x)=\frac{1}{f'(2)}(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{1}(x-2)+3=-x+2+3=\underline{\underline{-x+5}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او ولاړ یا عمود عمومي مساوات

بیلګه: تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ لرو.

د تانجنت میل:

د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0\,|\,f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

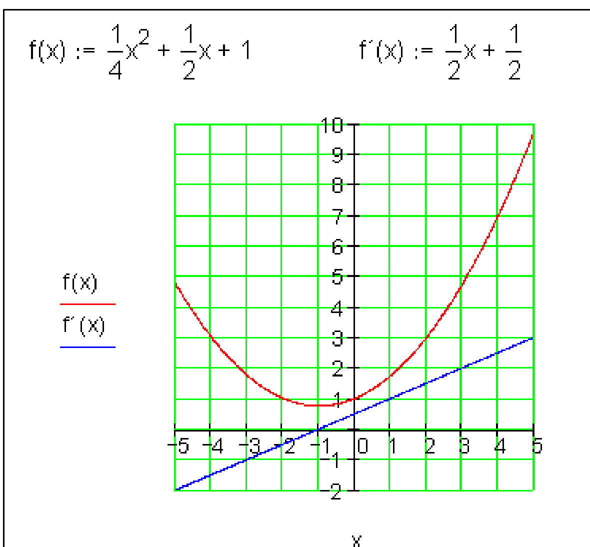
د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرټکی دی: $S(-1,\,0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی: دا دا معنی لري، چې په ککرټکي(د رآس ټکی) کې د $f'(x)$ میل صفر دی. تانجنت په S کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعني د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

$f(x)=2x^3+7x^2+x-7$ تابع لرو:

تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \ \Rightarrow\ f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2\,|\,f(2)) \ \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)\,f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,\,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري**.**

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګېدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

تمرینونه: د لاندې توابعو ګرافونه وکاږئ، د تانجنت او د عمود مساوات ولیکئ.

$$f(x)=x^3-6x^2+9x \qquad x_0=2$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{x}+3 \qquad x_0=1$$

$$f(x)=x^3-x^2-5x-2 \qquad x_0=-\frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق شمیرني قوانین

د مشتقشمیرنې شمیرقوانین، لک ځنګه په اعدادو، ترادفونو او حدونو(پوله ارزښتونو) کې اجرا کیږي،په همدې ډول مشتقشمېرنه کې هم دا قوانین باوري دي.

وبه ښایو، چې د جمعې، ضرب او ... مشتقونه د مشتقونو جمع، ضرب او ... ده. (په وېش کې باید مخرج صفر نه وي).

فعالیت:

که $f(x) = x^2 + x$ او $g(x) = x^3 + 2$ ولرو، $(f(x) + f(x))'$
د $(f(x) - g(x)), (f(x) \cdot g(x))'$ او $(\frac{f(x)}{g(x)})'$ د $g(x) \neq 0,$ د پیدا کولو په هکله فکر وکړئ.

قضیه (د جمعې قاعده):

که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې ځخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعې ځخه جوړ دی، یعنې:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0 + \Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0 + \Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \underline{\underline{u'(x_0) + v'(x_0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

که توابعو $f(x)=5x^2+3x\ ,\ u(x)=5x^2\ ,v(x)=3x$ ولرو شتق وشمرئ.

ښوونه:

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

فعالیت: که چیرې f_1، f_2، .....، f_n توابع او k_1، k_2، ....، k_n ثابت عددونه وي نو لرو(پې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده): که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x)'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي یعنې د دواړو لورو لیمیټ نیسو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه:

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون): f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).
لومړۍ لار یا طریقه یې په لاندې کې ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښایي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

بیلګه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4 \neq 0$ سره) مشتق غواړو پیدا کړو.

حل: که چیرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2 - 4$

وضع شي نو لرو: $g'(x) = 2x$

$h'(x) = 2x$

او د ویش قانون له مخې لرو:

$$f'(x) = \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-4) - x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$= \frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

پوښتنې:

که $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$ او $g(x) = 5x^3 - 3x + 4$ ولرو، نو :

- د توابعو د توابعو د جمعي مشتق، د ضرب مشتق د توابعو د ویش($f(x) \neq 0$) مشتق پیداکړئ، که شونې وي له مختلفو لارو.

د الجبري توابعو مشتق

الجبري او نورو توابعو پیژندونه(تعریفونه):

1- یو بنستیز تابع الجبري بلل کیږي، که د ترتیب قانون یې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي،په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمليی(جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي.

2- ناالجبري توابع ترانسځندنت بلل کيږي، لکه اکسپوننشل-ولوګاريمی- او د زاويو توابع.

3- يو الجبري تابع راشنل بللکيږ ي، که د ترتيب قانون يې د يو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای ډيرې راشنل د شمير عمليی ((جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي)) کارول شوي وي.

فعاليت:

په څېر د $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...a_1x+a_0$ يوه تابع د $f(x)$ _ که د $n\in N \quad \wedge \quad a_1\in R$؟ سره ليکل شوې وي، څه بلل کيږي؟

په د ويش v او u د دوه توابعو تابع f د $v(x)=3x+6$ او $u(x)x^2+4x+4$ _ لرو:

سره وليکئ $v(x)\neq 0$ د $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ څېر لکه

تابع مشتق ونيسئ. پسې د $v;u$ _ د تابع تعريف ساحه وښاياست او بيا د هرې يوې مشتقونو وېش په نښه کولو پسې د مشتقونو وېش(چې مخرج صفر نه وي)، د مشتق سره پرتله کړئ.

بيلګه:

د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع ورکړ شوې په x_0 کې د تابع مشتق پيدا کړئ او د مشتق تابع په ګوته کړئ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د تابع $f(x) = \sqrt{x}$ مشتق دی.

د تېرو درسونو پر بنسټ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $q \in Q$; $f(x) = x^q$ ډوله توابعو مشتق:

د شميرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f'(x) = 2 \cdot x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -1.x^{-2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x\frac{1}{2}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کیږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان قانون (بې له ښونې)
(پونتخ) قانون:
1- مختني اکسپوننت د متحولې x د مخ د فاکتور په څیر لیکل کیږي.

2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.

سره $q \in Q$ **د** $f(x) = x^q \Rightarrow f'(x) = q \cdot x^{q-1}$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\frac{1}{x^2}$ مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

بیلګه:

د $f(x)=3x^4$ تابع مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=3x^4 \qquad c=3 \qquad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$
$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=12x^3$$

بیلګه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ په ځای کې ونیسو:

$$f(x)=x^2+3$$
$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$$
$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$
$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=2u+\Delta x$$
$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=2u$$

بیلګه:

د تا بع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ مشتق د $x=2$ په ځای کې پیداکړئ.

ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{3(3+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}=-\frac{1}{(u+1)^2}$$

بیلګه:

(توان(Potence) مشتق، چی طبیعي جګ عدد یا اکسپوننت لري:

موږ د $1, 2, 3,...$, $y(f(x)=x^n$ تابع لرو او غواړو مشتق یې پیداکړو:

ښوونه: موږ په لاندې توګه مخ ته ځو.

د بینوم جملی په بنسټ په هر x_0 ځای کي دا لاندې باورلري.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{}$$

$$=\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+...+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left(x_0^n+nx_0^{n-2}h+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2+...+h^n-x_0^n\right)$$

$$=nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h+...+h^{n-1}$$

د $h\to 0$ لپاره تابع $y=x^n$ د x_0 په هرځای کي، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري:

$$(dy/dx)_{x=x_0}=f'(x)=nx^{n-1}$$

ددې پورته بیلګې بل ډول ښوونه دې د پوښتنې په څېر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه: _ که يو پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...a_1x+a_0$
د $a_1\in R \quad \wedge \quad n\in N$ سره ورکړ شوی وي، مشتق يې پيداکړئ.
- د توابع مشتق د توان قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5$ $\qquad b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\qquad d)\ f(x)=\frac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad h)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

د زنځيري(مرکب) توابعو مشتق

تابع کيدی شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع(ځنځيرونې قاعده)، پيژند ورشو (دتعريف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره ګډ توکي يا عناصر ولري.

ددې لپاره ليکو: $u\circ v(x)=u(v(x))$ ، که د f تابع د $y=f(x)=u(z)$ سره او $Z=v(x)$ وي.

فعاليت:
_ په زنځيري تابع کې د $f(g(x))$ پيژند ورشو او همداسې د تابع ورشو په هکله خپل نظر څرګند کړئ.
په ځاي کې څه دی او $x=3$ تابع ارزښت د $f(g(x))=(x^2+2x+1)^2$ _ وواياست، چې د د تابع ساحې کومې دي او په مشتق نيولو کې يې فکر وکړئ.
_ که يوه په خوښه زنځيري تابع ولرو، نو د تابع ورشو په ګوته کړئ او وهڅيږئ، چې مشتق يې پيدا کړئ.

اوس نو د $x=x_0$ ځای کې د $y=f(g(x))$ تړلي يا ځنځيري تابع مشتقوړوالی څيرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = f\left[g(x)\right]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(g) \quad . \quad g'(x)$$

دننني مشتق د باندنی مشتق(دادې ورپورته شي)
ددې لپاره نیسو چې:

1- د $g(x)$ دننني تابع د $x = x_0$ په ځای کې مشتقوړ ده. دانو بیا باید د x_0 په یوه معلوم تعریف شوي چاپیریال کی متمادي(نه پریکیدونکی) وي.

موږ لرو : $g(x+h) -> g(x_0)$ د $h -> 0$ لپاره.

همداسې $g(x_0+h) = g(x_0) + k$ داسې، چې $k -> 0$ د $h -> 0$ لپاره.

2- که د $y = f(z)$ دباندنی تابع په $z = z_0 g(x_0)$ کې د مشتق قابلیت ولري.

د $y = f(g(x))$ کمبنتویش کیدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه(فورم) یې هم بدله شي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}$$
$$= \frac{f(z_0+k) - f(z_0)}{k} . \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

که $h -> 0$ لاړه شي (همداسې $k -> 0$ خواته ځي) نو دا اړیکی مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} . \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} \quad ;........(*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} . \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چیرې د ځای په ځای(فیکس) ځای $x = x_0$ لپار بیرته x نیسو، نو کیدی شي چې (*) فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړشي او د $y = (z)$, $z = g(x)$ لپاره باور ولري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

په پام کې دې وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z=g(x)$ په ځای کې باید ترتیب(تنظیم) شي.

دا $(*)$ فرمول ځنځيري قاعده(لار،قانون) بلل کيږي او د پورته نيونو يا فرضيو سره باوري دی. دا په ساده ډول په ياد لرلی شو، ځکه چی ښۍ خوا د کيڼې خوا سره د فورمال dzزياتيدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

زنځيري يا مرکبه قاعده

لرو : $f(z)=f(g(x))$ ، نود $z=g(x)$ تابع په x او د $y=f(z)$ تابع په $z=g(x)$ کې د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ دی، نوترلی ورکړ شوی د $y=f(g(x))$ تابع هم په x کې د مشتق قابليت لري او دا باوري کيږي.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{\frac{df}{dg}}{\frac{dx}{dg}}==f\ '(g(x)).g\ '(x)$$

لنډ: $(fog)'(x)=f(g(x))'$

بېلګه:

د $f(x)=(x^2+2)^2$ مشتق ونيسئ.

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^2$$

بدلون tion: $z(x)=x^2+2 \quad f(z)=z^2 \Rightarrow f'(z)=2z \quad z'(x)=2x$

$$f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)=2z\cdot 2x=2\left(x^2+2\right)\cdot 2x=\underline{\underline{4x^3+8x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د $y = \sin x^2$ تابع یوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځیري تابع ده:

$$y = \sin z \quad , \quad z = x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d \sin x^2}{dx} = \frac{d \sin z}{dz} . \frac{dx^2}{dx} = \cos z . 2x = 2x . \cos x^2$$

بیلګه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2 \quad , z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچیرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچیرته باور لري:

$$\frac{d \sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} . \frac{d \sin x}{dx} = 2z . \cos x = 2 \sin x . \cos x = \sin 2x$$

بیلګه:

د $f(x) = (x^5 + 4)^8$ تابع مشتق وشمېرئ!

حل: هرکله چې $g(x) = x^8$ او $h(x) = x^5 + 4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = (g(h(x))' = g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x) = 8x^7$ $h'(x) = 5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x) = 8(h(x))^7 5x^4 = 40(x^5 + 4)^7 . x^4$$

تمرینونه:

۱ - $h(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 4x^2 + 1)^2}$

۲ - که چیرې $f(x) = (3 - 2x + x^2)^4$ وي، نو f' پیداکړئ.

د لاندې تابعو مشتقونه هم ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=(1-2x^3)^4$$:1

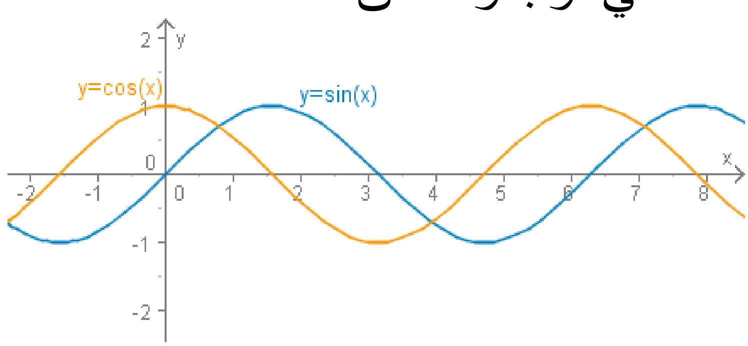
$$f(x)=(2x^2+1)^{-2}$$:2

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$$:3

$$h(z)=\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$:4

$$f(t)=\sqrt[3]{3t+1}$$:5

د مثلثاتي توابعو مشتق



$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; II$$

فعاليت:

د لاندې توابعو مشتقونه وشميرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad :a$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad :b$$

$$f\,'(x) = \frac{d\,\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad c$$

موږ په لاندې کې پورتني درې حالتونه ښايو او د نورو درې حالتونوښوونه ګرانو زده کوونکو ته پرېږدو.

قضيه:

د ساين تابع مشتق غواړو وښايوو چې $f\,'(x) = (\sin x)' = \cos x$ دی:

ددې قضيې د ښوولو لپاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y = f(x) = \sin x$ ساين تابع د هر x لپاره تعريف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$$

$$= \frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2} = \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} .$$

د ليميټ د برخې په پام کی لرلو سره لرو:

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x_0.$$

د ساين تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0} = f\,'(x_0) = \cos x_0 ,$$ (Xپه لينده کچ يا راديان)

قضيه:

همداسي ښوول کيږي چی کوساين تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = -\sin x_0,$ پهx لينده کچ يا راديان

ثبوت:

لرو: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x_0}{h}$

په پورته ننوتنه کې د دويم فرمول له مخې لرو:

$$= \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

د ليميټ او د ليميټ د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$= -\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2}) \ . \ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنده توګه ليکو:

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

قضيه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو وښايو چې د تانجنت تابع f(x) = tanx مشتقوړ ده او د مشتق تابع يې

$f\,'(x) = \dfrac{d\tan x}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$= \frac{\cos x\,\frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x\,\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos x.\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x \;, x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2}$$

فعاليت: ګرا زده کوونکي دې د $f(x) = x^2 \sin x$ تابع مشتق پيدا کړي.

يادونه: $g(x) = x^2$ او $h(x) = \sin x$ دې ځا په ځای کړي.

بيلګه:

غواړو د $y = \cos\dfrac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پيدا کړو.

حل:

ړدو : $f(x) = \cos x$ او $g(x) = \dfrac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندي توګه ليکلی شو:

$y = f(g(x))$. د زنځيري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x)) \cdot (\frac{\pi}{180} \cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x)) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin\frac{\pi x}{180}$$

د لاندې توتبعو مشتق پيدا کړئ

$\tan^4 x$	$:b$	$\cos^2 2x$	$:a$
$\sin(3x-1)$	$:d$	$\sec x \cdot \cot anx$	$:c$
$\sec(\sec(x))$	$:f$	$\sin^2 x - \cos x$	$:e$

حل a: د ځنځيري قاعدې په بنسټ او د توان يا طاقت يو فرمول په بنسټ لرو:

$$(\cos^2 2x)' = 2\cos(2x) \cdot \cos'(2x)$$
$$= 2\cos(2x)(-\sin(2x)).2$$
$$= -4\cos 2x \cdot \sin 2x$$

$:b$
$$(\tan^4 x)' = 4\tan^3 x \cdot (\tan x)'$$
$$= 4\tan^3 x \cdot \sec^2 x$$

$:c$
$$(\sec x.\cot x)' = (\sec x)'\cot x + (\cot x)'\sec x$$
$$= (\sec x.\tan x)\cot x + (-\csc^2 x)\sec x$$
$$= \sec x - \csc^2 x \cdot \sec x$$
$$= \sec x(1 - \csc^2 x)$$

$:d$
$$[\sin(3x-1)]' = \cos(3x-1).(3x-1)'$$
$$= \cos(3x-1) \cdot 3 = 3\cos(3x-1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[\sin^2 x - \cos x]' = (\sin^2 x)' - (\cos x)' \qquad :e$$
$$= 2\sin x(\sin x)' - (-\sin x)$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \sin x$$
$$= \sin x(2\cos x + 1)$$

بيلګې:

1- د f(x) = sinx تابع لومړي څلور مشتقونه دې پيدا شي.

---

f'(x) = cosx ; f''(x) = -sinx ; f'''(x) = -cosx ; $f^{(4)}(x)$ = -(-sinx) = sinx

2- د (x) = x.sinx تابع مشتق پيداکړئ.
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
f'(x) = 1.sinx+xcosx=sinx+ x.cosx

3- د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پيداکولو له پاره د ځنځير قونو ن څخه نار اخلو.

پړدو $z = \frac{1}{x^2}$ **او** **sinz = u(z) لا س ته راځي:** $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

تمرينونه:

-- د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x) = \sin 3x \qquad b)\ f(x)\sin x \cdot \cos x \qquad c)\ f(x) = \sin^2 x$

$d)\ f(x) = \tan x + 2\sin 2x \qquad e)\ f(x) = \sin x^2 \qquad f)\ f(x) = \sin\frac{x-1}{x+1}$

-- د $f(x) = \sin^n x (n \in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښاياست يا وټاکئ.

-- د تانجنت تابع لپاره د ساين او کوساين قانون په مرسته د مشتق قانون و ښاياست.

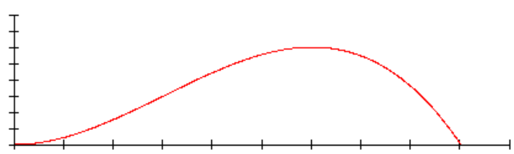
-- وښاياست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ هم باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیداکېږئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

--- ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقوړ دي.

د مشتق استعمال په پیداښتي یا طبیعي علومو کې

په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کیږي، چې د یوې متحولې(اووښتونې) x په واک کې وي. په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څېړو، چې د وخت په واک کې وي. لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کیږي)	

فعالیت:
ګران زده کوونکي دي د فزیک د درسونو له مخې د چټکتیا او بیړې تعریفونه ور کړې
او د لار، وخت، چټکتیا او بیړې فرمولونه دي ولیکي.

بیلګه:
د یوه په برابرډوله بیړه (تعجیل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنی
سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1,8\frac{m}{s^2}$ بیړې(تعجیل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې
ډول دی:

$$\boxed{s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t}$$

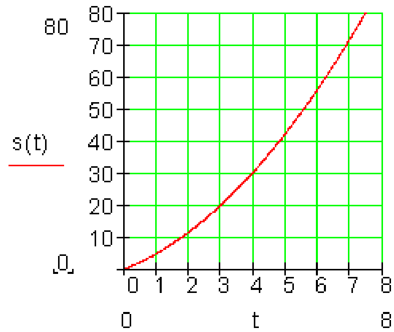
پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0,9t^2+4t$
(t په(ثانیه) s، s(t) په m (متر))
منځنی چټکتیا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول ده:

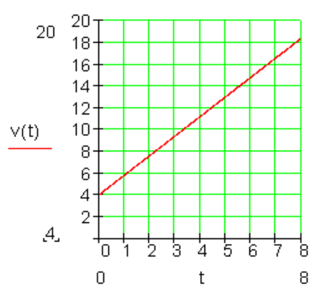
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

$$v = s'(t) = 1,8t + 4$$



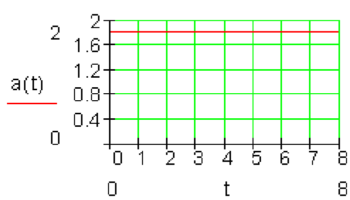
v-t - دیاګرام کې یوه کربنه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتيا په برابر ډول زياتيږي.

دا دلته ثابته چګېدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a = 1.8\frac{m}{s^2}$ بيړه(تعجيل) ده.



بيړې يا تعجيل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$



پام : د یوه برابرډوله په بيړه (تعجيلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$|\ s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t\ | \qquad v(t) = s'(t) = at + v_0 \qquad a(t) = v'(t) = a$$

د يوې چټکتيا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t) = s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t) = s'(t)$ هم ليکو.

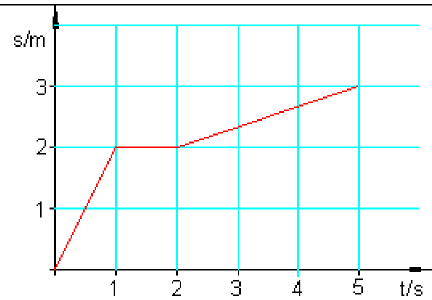
(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

1- د يوه خوزنده تن يا جسم د لار-وخت-دياګرام ورکړ شوی.

الف: دا خوزښت تشريح کړئ.

ب : دې پورې اړونده د چټکتيا – وخت – دیا ګرام وکاږئ.



2- يوه تيره د پيل چټکتيا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کيږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟کردي شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تيرې چټکتيا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د ميل جګوالوشميرئ

3- تابع د يوه خوزښت د لار-وخت-دياګرام ښايي.

الف)د ورځني ژوند څخه يوه بېلګه ورکړئ، د هغي لپاره چې دا تلنه ښايي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزيکي څه مفهوم لري؟

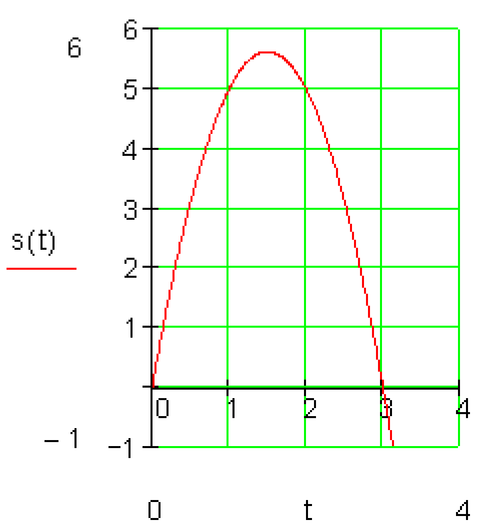
ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دياګرام په لاندې ډول دی.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 وټاکئ.

پ) د اړونده بيړې – وخت-دياګرم وکاږئ او دا تشريح کړئ.

يوه منفي چټکتيا (سرعت) څه معنا لري؟



4- يوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې $s(t) = 5 \cdot t^2$ لار وهي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په وختونو $t=1,2,3$ کې لحظوي چټکتيا(سرعت) وښايی.
حل: لحضوي جټکتيا د سملاسي تغيرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t=1: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x}=10+5\Delta x$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10+5\Delta x \to 10$

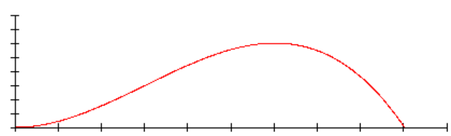
$$t=2: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x}=20+\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $20+5\Delta x \to 20$

$$t=3: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x}=30+5\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري $20+5\Delta x \to 30$

تمرين:
د $f(x)=-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2 \; ; \; x>0$
لاندې تابع ګراف او په ورنزدي توګه د فوټبال ميدان کې د توپ الوتني منحني ښايي، چې لاندې څېره لري.



لاندې پوښتني ځواب کړئ:
الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسيمال) جګوالی لري او د وهلتکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟
ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکي ته راځي؟
پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه 9 متره لرې او 2 متره جګ دی. ايا توپ له دې څخه جګ الوزي؟
ت : توپ د تور(ګول) لاين(د x محور) څخه په 2 متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاس ته راځي. د $f'(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه:

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x)=6x+2}}$$

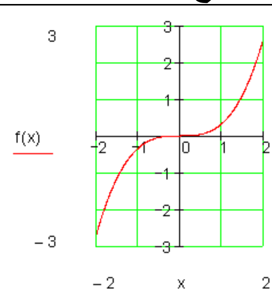
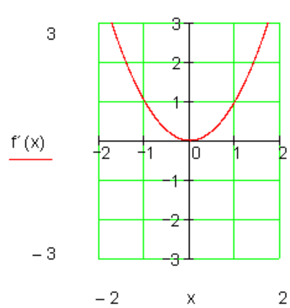
د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور.

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow f''(x)=6x+2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x)=6}}$$

د $f(x)\frac{x^3}{3}$ تابع دې 4 واره مشتق ونیول شي:

$$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{3}=x^2 \Rightarrow f''(x)=2x \Rightarrow f'''(x)=2 \Rightarrow f''''(x)=0$$

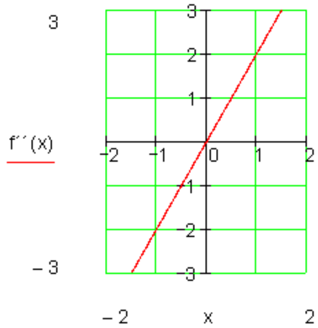
د تابع ګراف: د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

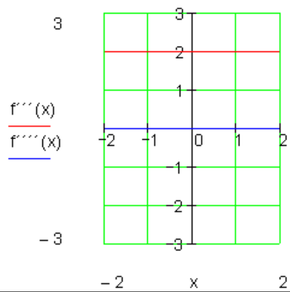
	$f(x)=\frac{x^3}{3}$
	$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$$

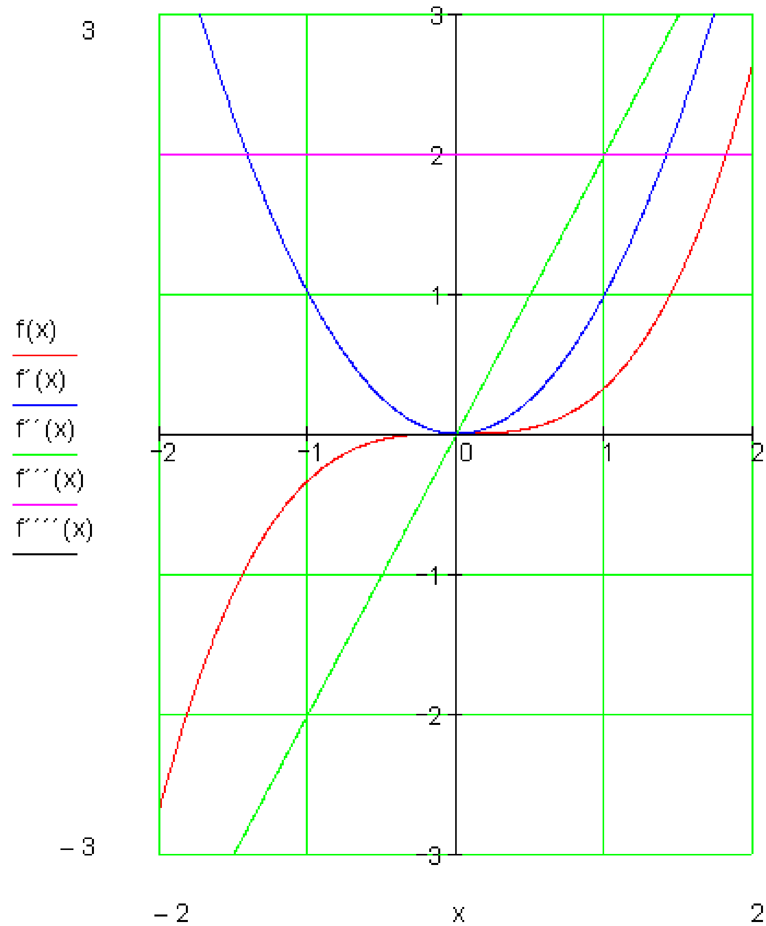
$$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$





پورته تولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګې:

اول: د تابع $f(x)=4x^3-2x^2+x-2$ مشت درپواره پیدا کړی

$$f(x)=4x^3-2x^2+x-2$$

$$f'(x)=12x^2-4x+1$$

$$f''(x)=24x-4$$

$$f'''(x)=24$$

۳-۱ د جګو درجو مشتق

دویم: د تابع $f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$ **مشتق درپواره پیدا کړی**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$$
$$f'(x)\frac{9}{4}x^2-24x+\frac{1}{4}$$
$$f''(x)=\frac{9}{2}x-24$$
$$f'''(x)=\frac{9}{2}$$

تولګه:

د $f(x)$ لومړی مشتق د $f(x)$ مشتق تابع $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ ده :

د $f(x)$ دویم مشتق د $f'(x)$ مشتق تابع $f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$ دریم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f'''(x)=\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: یو په خوښه کسرۍي تابع $f(x)$ په خوښه د مشتق قابلیت لري.

تمرینونه:

د لاندې توابعو دریواره مشتق ونیسئ.

1- $f(x)=3x+4$

2- $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$

3- $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$

4- $f(x)=(2x+1)^3$

5- $f(x)=x-x^4+3+x$

6- $f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$

7- $f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$

8- $f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکيوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

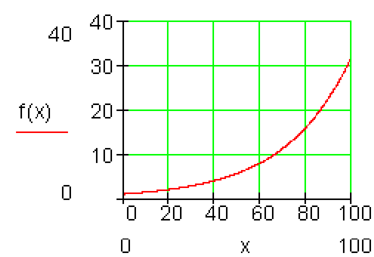
کولي باکتريا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټې ويش (حجره وېش) له لارې زياتيږي. و مساعدو شرايطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقيقو کې ځان تجزيه کوي. د غه عمليې لپاره يو ارزښت جدول :اړ، او گراف يې کاږو. دلته د x اووښتوني (متغيره) په دقيقو د وخت لپاره ده.

د y متغيره د باکتريا ګانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32

x = دقيقې

y = د باکتريا ګنون يا تعداد



فعاليت: د دې لپراه تابع وليکئ

قضيه : هر اکسپوننشل تابع د $y=b^x, (b>0)$ د ټولو ريلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'=b^x \ln b$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad , f(x)=b^x$$

حل:

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{b^x-b^{x_0}}{x-x_0}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{b^{x-x_0}-1}{x-x_0} \qquad , x-x_0=h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h-1=k \\ h=\log_b(1+k)\end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$
$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\log_b(1+k)}$$

د لوګاریتم قانون څخه لرو: $n\cdot\log x=\log x^n$ او لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$
$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b[\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}]}\quad ,\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$$

له پورته لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b e}\qquad ,\ \log_b e=\frac{1}{\ln b}$$
$$=b^{x_0}\cdot\ln b\ ;\quad x_0\in IR\ ;\ b\in IR^{>0}$$
$$\Rightarrow f':f'(x)=b^x\cdot\ln b\ ;\ D'(f)=IR\ ;b\in IR^{>0}$$
$$f'(x)=b^x\cdot\ln b$$

ضیه :

د $y=f(x)=e^x$ مشتق پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نیسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} . e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچنیکیدونکي Δx ارزښت لپاره څیړو $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Δx

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمېرنې په بنسټ دا دا معنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د x_0 په ځای x ځای په ځای کړو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f'(x) = e^x$ او $f(x) = e^x$

اکسپوننشل فنکشن $y = f(x) = e^x$ تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

یعنې د e^x تابع د مشتق څخه بېرته د e^x تابع لاس ته راځي.

بیلګه:

لرو : $f(x) = b^{3x^2} - 10;\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}; D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

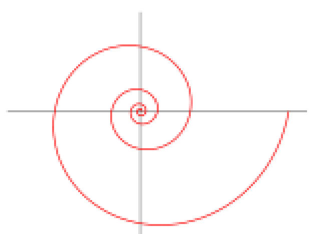
$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^{x}$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^{x}}$ $e)\ f(x)=x^{n}\cdot e^{e}$ $f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^{x}+1}$ $l)\ f(x)=\frac{e^{x}}{1-e^{x}}$ $m)\ f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

د لوګاریتم مشتق



فعالیت:
- لوګاریتم تعریف
- اکسپوننت یا توان تعریف کړئ.
- د لوګاریتم او توان ترمنځ اړیکي وښایاست.

قضیه :
د لوګاریتم تابع مشتق:

(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی

او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یواځې د$x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چی$x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\to e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$$

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$

$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

بیلگه:

د $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

موږ لیکلاي شو :

$$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$$

$$=\ln(x-2)-\ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y'=(\ln(x-2))'-(\ln(x+2))'$$

$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو: $f(x)=\log_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$
مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې
حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln2)$
اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:
$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln2)= 1/(16\cdot0.69)= \underline{0.09}$

تمرینونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ یا پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $\qquad b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $\qquad c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $\qquad e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $\qquad f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $\qquad h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

د یوې تابع مشتقوړوالی یا - قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري او همداسې په هرځاي کې متمادي نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.
تابع $f(x) = |x|$ په 0 ځای کې تعریف نه ده:
د ټولو $x>0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x-0}=1$

د ټولو $x<0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x)=-x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

دا چې کيڼ- او ښی اړخيز حد يو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

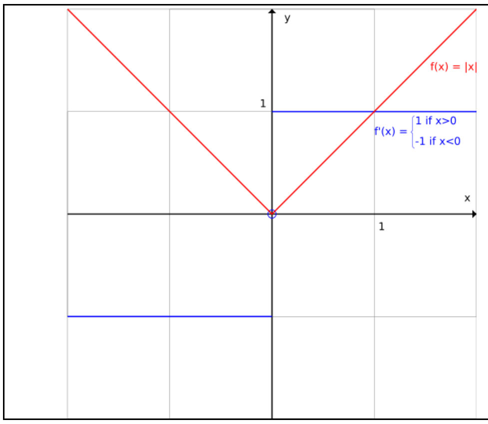
د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځايونو کې تر اوسه تل ورکړ شوی.

په صفر ځای کې سره له دې يو ښي اړخيز مستق ورکړ شوی، يعني لرو:

$$f'+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

او يو کيڼ اړخيز مشتق هم:

$$f'-(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$



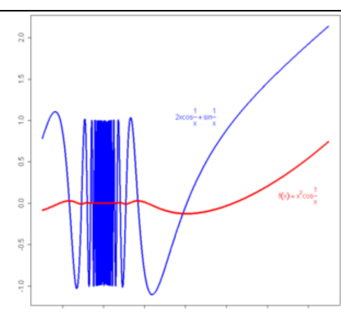
که پورته گراف ته وگورو، نو وبه پوهيږو، چې يوه مشتقوړ تابع بايد گوډه نه وي يا په کوم ځای کې ماته نه وي يا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.

د يوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلگه:

يو تابع متمادي مشتقوړ بلل کيږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که يوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، بايد نه دی چې مشتق دې يې هم متمادي وي.

د بېلگې په توگه:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$



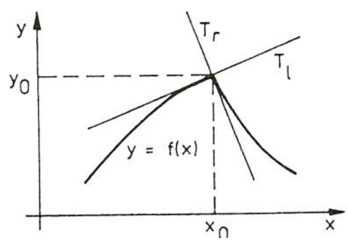
تابع په هر ټکي کې حتې د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

د لوگاريتم مشتق ۱۱۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

يي ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نيونويا فرضيو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې ليميټ (پولی) ته تګ ممکن وي يعني چيرته چې د تفاضل ويش يو ليميټ د $x\to 0$ لپاره ولري. [SEP][SEP]
که کومه منحني چيرته راماته وي (ځبره 4)، ګورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګيدل او هم د تفاضل ويش نه شته. پس د مشتق قابليت د متماديت په څير د يوې تابع ځانګړي خوي دی.

په پورته ځيره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی يواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته يو کينې تانجنت T_1 يا کينې جګوالی لري اوپه دې ډول کينې مشتق لري او په همدې ډول يو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دي ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.	

په يوه نامتمادي تابع کی د تانجنت يا مشتق پوښتنه بی معناده.
دا دلته انځور شوی پرابلم يا مسأله اوس د شميرنې د ټيك فرمول لاندې راوړو.
وليدل شو چې په يوه ځای x_0 کی چې تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نيسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا څرګنده ده چی هره متمادي تابع بايد ضرور مشتقوړنه وي. د بيلګي په توګه که تابع زاويه يا کونج ولري.
دې ته اړتيا ده چی وښايو، چی يواځي متمادي توابع د مشتق قابليت لري، دا بيا دا معنا لري چی هره تابع چې د مشتقوړ وي بايد لږ تر لګه متمادي وي او په دې ډول مشتق متماديت په بر کی لري يا خوندي لري، په دې معنا چی متماديت د مشتقوړوالی لپاره اړيين يا ضروري شرطونه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله:
که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.
ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یوائی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانی $f(x) - f(x_0) -> 0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.
دا د متمادیت پیژند دی.

دا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:
دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:
د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي څېرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف:
د $y = (x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \;\; ; \;\; a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه ۲ ، ۶:
د توان تابع $y = x^n$, $n = 1, 2, 3, ...$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y=\sin x$ او کوساین تابع $y=\cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

په یوه واز انتروال کی $y=f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y'=f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یي د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

تعریف (پیژند) ۲. ۴:

په یو د $x=x_0$ چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغې اشتقاق(رابیلیدنه) $y'=f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سړی د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y=f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f''(x_0)=\left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

یو په یوه واز اینتروال کې مشتق کېدونکې تابع $y=f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y'=f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.
ددې لپاره لیکل کیږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}$$

تمرین:

وښایئ چې ایا دا توابع $y=\cos x$; $y=x^n$; $y=c$ هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي؟

د معکوس تابع مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیتونه:

د یوې تابع معکوس تابع تعریف کړئ.

د $f(x) = \frac{x^2+5x}{x^3-8}$ تابع د تعریفساحه وښایاست.

د پورته تابع د مشتق مشتق وشمیرئ.

اوس دې معکوسه تابع تر څیړنې لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

۱۱۶ د لوګاریتم مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

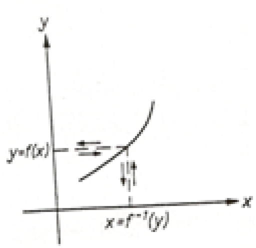
د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل ویش لاس ته راوړي چې د هغه سره د مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله ۲ . ۷: د معکوس تابع مشتق : که y = f(x) د x په یوه چاپیریال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او همغلته د f’(x) |= 0 سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د y = f(x) سره مشتقوړ دی او باوري $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

حل: کیدی چې د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له x ->0 او هم y->0 او معکوس څخه، د y = f(x+ x)-f(x) سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

	$f'(x)=\frac{dy}{dx}$ او $(f-1)'(y)=\frac{dx}{dy}$ سره. بالاخره لرو: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

تمرینونه: د $y=f(x)=x^n; n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}}; y\geq 0$ توګه یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

-- د $y=x^{\frac{m}{n}}, m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایمپلیځیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیځیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

د بیلګې په توګه $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیځیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت:

که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه:

یوه تابع په ایمپلیځیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړو $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \quad \vee \quad \frac{2x+y}{2y-x}$$

ایمپلیځیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیځیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیځیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیځیت ډول ورکړ شوې وي، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه :

د $f(x) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانينو نه شي نيول کيدی، ځکه چې په بنسټ او جګ االکسپوننت کې يې متحولې پرتې دي. د لوګاريتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کيدی شي:

$$\ln f(x) = x \ln x$$

اوس ايمپلځيت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته يې د x پسې مشتق نيسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځيرقانون له لارې صورت نيسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y} f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاريتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

تمرينونه:

- د r وړانګې سره د د ايرې مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ سره. دايمپليخيټ مشتق له لارې يې مشتق ونيسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- د $E: \; x^2 + 3y^2 = 7$ سره ورګړ شوې اليپسې مشتق دې ونيول شي.

د بنستيزو مشتقونو جدول

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	نيونه يا فرضيه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \; a \; reell$
7	a^x	$a^x \ln \; a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \; a \neq 1, \; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin \; x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزېې(تحليلي) ويينې يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کي ونيسي.

د فصل تولګه

کمبنتويش Differenzenquotient (د سيکانت جګيدنه) يا منځنی تغير ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی يا لحضوي تغير ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) mit\ c = constant$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$
$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

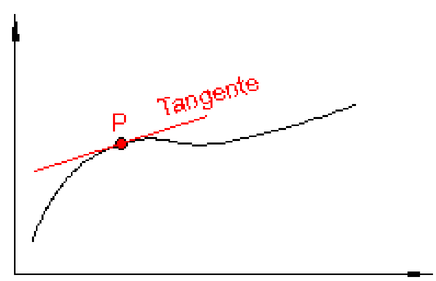
د وېش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$
$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \quad \cdot \quad z'(x)$$

(تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالى) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دى



Difference quotient د کمېنت وېش يا د تفاضل وېش

د يوې کربنې جګېدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکېدى شي:

کربنه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کربنې د جګېدنې فرمول په لاندې ډول دى:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ځېرکي تمرینونه:

(۱) کمښتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

(۲) د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جگوالی وټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2\ ,\ x_0 = 2$ $b)\ f(x) = 0.5x^2\ ,\ x_0 = 3$

(۳) د کمښتویش(د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترړنځ فوپیر څه دی؟

(٤) د یوه تابع د سکانت( ) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جگېدو لاندې څه پوهیږو؟ او دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

(٥) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پیداکړئ.

$a)\ f(x) = x^5$ $b)\ f(x) = x^6$

$c)\ f(x) = \frac{1}{x^2}$ $d)\ f(x) = \frac{1}{x^5}$

$e)\ f(x) = \sqrt{x}$ $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $h)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(٦) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پیداکړئ.

$a)\ f(x)=0.2x^5-3$ $\qquad b)\ f(x)2x^4+1$

$c)\ f(x)=\dfrac{4}{x^2}$ $\qquad d)\ f(x)=\dfrac{3}{x^3}+2$

$e)\ f(x)=6\sqrt{x}$ $\qquad f)\ f(x)\dfrac{8}{\sqrt{x}}-5$

(٧) د تابع د گراف په مرسته وښایئ، چې ټول g(x) + c ترمونه همغه مشتق لري.

یاودونه: پابت عدد که هرکوم ارزښت ونیسي.

(٨) وښایئ، چې د a.g(x) د مشتق سره د a ضریب (ځله وونی) ساتلی پاتې کیږي.

(٩) د f تابع مشتق د جمعي قانون سره وښایئ

$a)\ f(x)=4x^4-3x^3+x^2-x-1$ $\qquad b)\ f(x)=x-\sqrt{x}$

$c)\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{x^3}$ $\qquad d)\ f(x)=3x^2+0.4x-5$

(١٠)د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^3(x^2-2x+1)$ $\qquad b)\ f(x)=(2x^2+1)(x-1)$

$c)\ f(x)=(x^2-5)(2x^3+x^2+x)$ $\qquad d)\ f(x)=(4x^2-x+4)(3x+2)$

(١١) د f تابع مشتق د ویش قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{4-x^2}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{2x^2+x+3}{x+1}$

$c)\ f(x)=\dfrac{4-x-x^3}{2x^2+3}$ $\qquad d)\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$

(١٢) د ویش قانون له مخې په څټ ارزښت(پرعکس ارزښت) وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ الف) د لاندې تابع مشتق وشمېرئ.

$$f(x)=\frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{-g'(x)}{g(x)\cdot g(x)}$$

د $g(x)\neq 0$ سره

۱۳) د f تابع ارزښت د زنځير قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=(4x^4-x)^2$ $\quad b)\ f(x)=(3x^2+4x-5)^2$

$c)\ f(x)=(2x-7)^3$ $\quad d)\ f(x)=(5-3x^3)^4$

۱٤) د لاندې توابعو مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=\frac{1}{(2x^2+x)^3}$ $\quad b)\ f(x)=\frac{1}{(x-5)^4}$

$c)\ f(x)=(1+\sqrt{x})^2$ $\quad d)\ f(x)=\sqrt{1-x^3}$

۱٥) د لاندې توابعو درې واره مشتق ونيسئ.

$a)\ f(x)=x^3-2x^2+1$ $\quad b)\ f(x)2x^4+3x^3-x^2+x-5$

$c)\ f(x)\frac{3x-4}{x}$ $\quad d)\ f(x)=\frac{x^2-1}{2-x}$

۱٦) د يو n-م درجې تابع بايد څو واره مشتق ونيول شي چې يوه ثابته ترې لاس ته راشي.

۱۷) د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x)=\sin 3x$ $\quad b)\ f(x)\sin x\cdot\cos x$ $\quad c)\ f(x)=\sin^2 x$

$d)\ f(x)=\tan x+2\sin 2x$ $\quad e)\ f(x)=\sin x^2$ $\quad f)\ f(x)=\sin\frac{x-1}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۱۸) د $f(x)=\sin^n x(n\in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښایاست یا وټاکئ.

(۱۹) د تانجنت تابع لپاره د ساین او کوساین قانون په مرسته د مشتق قانون و ښایاست.

(۲۰) وښایاست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x)=1+\tan^2(x)$ هم باور لري.

(۲۱) د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

(۲۲) ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقوړ دي.

(۲۳) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $\quad b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $\quad c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^x$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^x}$ $\quad e)\ f(x)=x^n\cdot e^e$ $\quad f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $\quad h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $\quad i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^x+1}$ $\quad l)\ f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$ $\quad m)\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(۲٤)د $f(x) = (x^2+2)\cdot \lg x \quad (x>0).$ مشتق دې پیدا شي.

مشتق یې وټاکئ یا پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $\quad b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $\quad c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $\quad e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $\quad f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $\quad h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

(۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لویه تعریف ورشو(ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق یې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تعریف سټ(ډېرۍ) هغه ورشو(ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقوړ دي.

$a)\ f(x)=\sqrt{x+3}$ $\quad b)\ f(x)=\sqrt{(x-2)(x-4)}$

$c)\ f(x)=x\sqrt{x}$ $\quad d)\ f(x)=\sqrt{x^2+2}$

(۳٦) ولې باید د ټیک شمېرنې لپاره لوګاریتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه رېښنه توابعو ته ؟

(۳۷) ۹۰ ـمه پوښتنه د لوګاریتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

$a)\ f(x)=\ln(x^4-1)$ $\quad b)\ f(x)=\ln(2x+4)$

(۳۸) ـ د لاندې توابعو لومړی مشتق پیداکړئ.

$a)\ f(x)=\frac{2}{5}x^{10}-\frac{1}{5}x^5$ $\quad b)\ f(x)=3x^4-4x^3+11x^2-7x+8$

$c)\ f(x)=5x^8-3x^6+\frac{10}{x^3}-\frac{8}{x^7}$ $\quad d)\ f(x)(2x-5)(x^2+11x-3)$

$e)\ f(x)\cos x-2x\sin x$ $\quad f)\ f(x)=\sin^3 x$

$g)\ f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$ $\quad h)\ f(x)=(x^2-2x+2)\cdot e^x$

$i)\ f(x)=\frac{3e^x+1}{2e^x-1}$ $\quad j)\ f(x)=\frac{2e^x(x^2-3)}{x}$

$k)\ f(x)=\frac{1}{x^2}\ln x^2$ $\quad l)\ f(x)=\frac{x\cdot\ln x}{1-x}$

$m)\ f(x)=\frac{\sin x}{\ln x}$ $\quad n)\ f(x)=3x^2\cdot\lg x$

$o)\ f(x)=\ln(\sin)\ x$ $\quad p)\ f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$

$q)\ f(x)=\sqrt[n]{ax+b}$ $\quad r)\ f(x)=(x^2+3)e^{-2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۳۹) - لومړی مشتق وټاکئ

$a)\quad f(x)=\sin^{n}$ $\qquad b)\quad f(x)=(\ln x)^{n}$

$c)\quad f(x)=s+\frac{1}{x}$ $\qquad d)\quad f(x)=(1+\frac{1}{x})^{n}$

(٤٠)– د هرې تابع لومړي درې مشتقونه وټاکئ

$a)\quad f(x)=e^{x^{2}}$ $\qquad b)\quad f(x)=\sin x\cdot\cos x$

$c)\quad f(x)=x+\frac{1}{x}$ $\qquad d)\quad f(x)=x^{2}\cdot e^{x}$

(٤١)– په کوم تابع کې لومړی مشتق f د f سره برابر دی.

(٤٢)–

الف: د کو fتابع لپاره $f'(x)=2f(x)$ دی؟

ب: د کو fتابع لپاره $f'(x)=-f(x)$ دی؟

(٤٣)- د f(x)=sinx څوم مشتق د f سره سر خوري یا برابر دی؟

(٤٤)– د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

$a)\quad f(x)=e^{ax}$ $\qquad b)\quad f(x)=\ln(x+1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رول قضیه (Theorem of Rolle)

که د f یوه تابع په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي او k د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد c د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ شته، داسې چې $f(c)=k$ دی.

فعالیت:

_ که f تابع په یوه بند اینتروال $[1,3]$ کې ثابته وي، دا به د یوې تابع لپاره څه معنا ولري، چې تابع څنګه ځغلي. ایا دا تابع به جګ ټکي یا ټیټ ټکي ولري او که څنګه؟ دا روښانه کړئ او د انتروال په خوښه درې منځ ټکو کې ارزښتونه یو له بل سره پرتله کړئ.

_ وښایاست، چې د $f(x)=-x$ تابع په$[-1,1]$ انترول کې جګ او ټیټ ټکي چیرته لري او د یو او منفي یو تر منځ د درې x ارزښتونو لپاره په ګراف د f ارزښتونه وښایاست او وښایاست، چې یو له بل توپیر لري او که نه؟

_ د رسم له لارې وښایاست، چې x^2 کوم جګ یا ټیټ ټکی لري او که څنګه او که لري یې چیرته؟

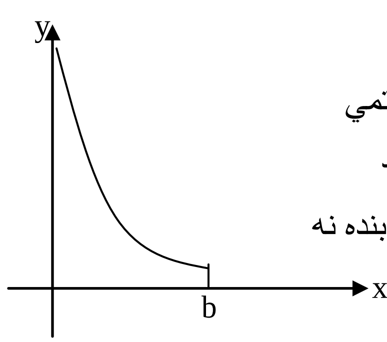
دوایرشتراس قضیه Theorem of Weierstrass

که د f یوه تابع په بند اینتراوال$[a,b]$ کې متمادي وي، نو f په دې‌اینتراوال کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.

کیدی شي چی یو همغږیز (monoton مونوتون یا جګټیټ) ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.

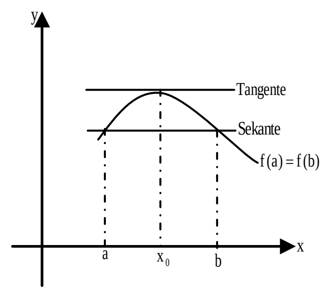
د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه حتمي دی. د بیلګې په توګه د $y=f(x)=\dfrac{1}{x}$ تابع په نیم بند اینتروال $(0,b]$ کې متمادي ده، مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې توګه خورا جګ ټکی نه لري



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ويش ترمنځ داسې نږدې اړيکي شتون لري، هغه چې د انالیوزې په منځ ارزښت قضيو کې تشريح کيږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخويونو څخه لومړی پسې تړلې لاندې د رول قضيه لاس ته راځي

د رول(Rolle) قضيه: يوه د f تابع دې په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز ایتروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.	

حل:

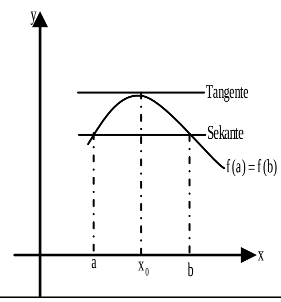
1. که f ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
2. که f ثابت نه وي، نو د وايرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع يوخورا لوي او يوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپير لري، ځکه چی f ثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د $f(a)=f(b)$ سره نامساوي دی . په دې اساس د اینتروال په دننه کی یو مونوتون (جګټيټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټيټ ارزښت) شتون د اړيين يا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرايطو لاندې يوې افقي قاطع ته يو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کیدی شي چی عمومي شي.
پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ايا يوې مايئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه ميل (جګوالي) سره جوړيدلی شي؟
ځواب يی لاندې قضيه راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق منځ ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اينتروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



حل: دا پرابلم په يوه مرستندوې تابع داسی تعريفيږي، چې د رول قضيه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامنځ ته کوو: $y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

د مرستندوې تابع په څير د مشتق تابع جوړيږي:

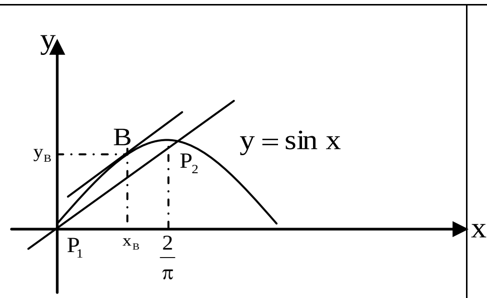
$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

نو باور لري: $h(a)=h(b)=0$ برسيره پر دې h په (a,b)کې د مشتق وړوالی لري او په $[a,b]$ کې متمادي دی. له دې سره د رول د قضيې وړاند نيونه(فرضيه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چې يو ځاي $x\in(a,b)$ شته دی د $h'(x)=0$ سره، چې له هغې لرو:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ \text{يعني}\ h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بيلګې نوره هم روښانه کيږي.

بيلګه:
د $f(x)=\sin x$ يوه تابع دې داسې ورکړشوي وي،چې په يوه ټکي $B(X_B,Y_B)$ کې تانجنت د منحني مماس وي، هغه چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ ټکو کی همغه ميل ياجګوالی لري لکه قاطع.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځواب: د قاطع (غوځي) میل یاجگوالی: $m=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\frac{\pi}{2}-0}=\dfrac{2}{\pi}$

د منحني میل د $B(x_B:y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B)=\cos x_B=\dfrac{2}{\pi}$

له دې ځخه لاس ته راځي: $x_B=\arccos\dfrac{2}{\pi}=0{,}88\iota$ او $f(x_B)=f(0{,}88)=0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88:0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y=\dfrac{2}{\pi}(x-0{,}88)+0{,}77$

د منځ قضی د عمومیت ځخه لاس ته راځي:

پراخه شوې د منځ ارزښت قضیه: که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند انټروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز انټروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چی لاس ته ترې راځي: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

حل: د $g'(x)\neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او $v=g(x)$ مساوات د x په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې: $x=g^{-1}(v)$

که د f په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u=f(x)=f(g^{-1}(v))=h(v)$$

د زنځیري قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

که په $u=h(x)$ تابع د $v_1=g(a)$ او $v_2=g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د $v_0\in(v_1;v_2)$ ځای په لاندې ډول موجود دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2-v_1}=h'(v_0)$$

له دې ځخه د $h(v)=f(x), v=g(x)$ او $x_0=g^{-1}(v_0)$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

تمرینونه:

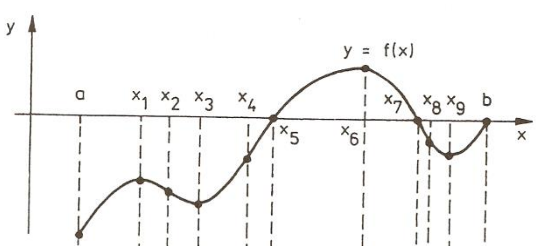
لاندې توابع دوه صفرځایونه لري. هغه بحراني ارزښتونه پیدا کړئ، چې د دواړو صفرځایونو تر منځ پراته وي.

$a)\ f(x)=x^4-5x^3+7x-5x+6$

$b)\ f(x)=x^4+x^3+2x^2+2x$

همغږیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغږیز، برابرډوله)

جګېدونکې(متزاید)، ټیټېدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکې توابع)



فعالیتونه

- په پورته ځېره کې ټول هغه ځایونه وښایاست، چې هلته تابع جګېږي.
- په پورته ځېره کې ټول ځایونه وښایاست، چې هلته تابع ټیټېږي.
- په پورته ځېره کې ټول هغه ځایونه په نخښه کړئ، چې هلته د تانجنت میل افقي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره د f یوه تابع په یوه اینټروال کې
$f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ وي، نوتابع په دې اینټروال کې مونوتون جګيدونکې
(- ټيټيدونکې) بلل کيږي،که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري،نو دا
$f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ کره یا په زغرده همغږیزجګيدونکې (همغږیز ټيټيدونکې) بلل کيږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي څخه په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

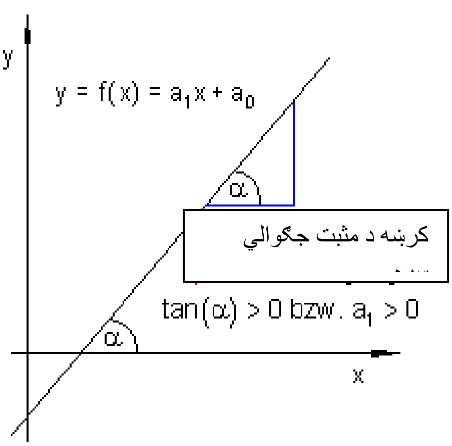
د f یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې همغږیزجګيدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \ \wedge \ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د f یو تابع ټیک هلته په D کې همغږیزټيټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

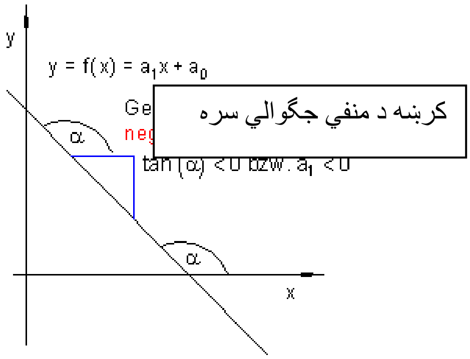
$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

یوغږیزوالی (یونواخت والی) Monotony جګټیټوالی، د جګټیټوالی جملې دا $f(x) = a_1 x + a_0$ کرښیز(خطي) تابع



خورا ساده تابع ده، چې انحنا نه لري. ددې لپاره مسئول یې ثابته جګېدنه یا ثابت میل ی، $a_1 = \tan(\alpha)$ چېرته چې α د کرښې او مثبت لوریز د $x-$محور ترمنځ زاویه(کونج) ده.
په مخامخ شکل کې: کرښه د مثبت میل سره
$a_1 > 0 \ \Leftrightarrow \ \tan\alpha > 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



داپورته داسې دی: $tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

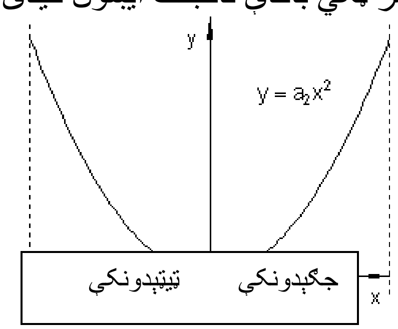
که $0 < \alpha < 90^\circ$ یا $0 < a_1 < \infty$ وي، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې($\Leftrightarrow$)، نو کرښه جګېږي. دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت هم جګېږي.

په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0(\Leftrightarrow)$

که $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$، نو کرښه ټیټېږي یا لوېږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت $f(x)$ کوچنی کېږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزې تابع (یا د جګ-ټیټېدونکې تابع) غږېږو او له یوه همغږیزجګیدونکې تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې مونوتون ټیټیدونکې تابع څخه، که $a_1 < 0$ وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کېږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي باندې تانجنت اینول کیدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په انتروال $|_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_R$ کې تابع $f(x)$ مونوتون ټیټېږي. او $f(x)$ په اینتروال $|_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_R$ کې مونوتون جګیږي.

لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګیدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعني جګیدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحنې له یوه ټکي څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جګیدنه $> 0 \rightarrow$ منحني مونوتون جګیږي. د تانجنت جګیدنه$< 0 \rightarrow$ منحني مونوتون ټیټیږي

د تانجنت جګیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

روښانه ده چې د $f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع ميل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضيه په لاندې ډول فرمولوو.

قضيه:

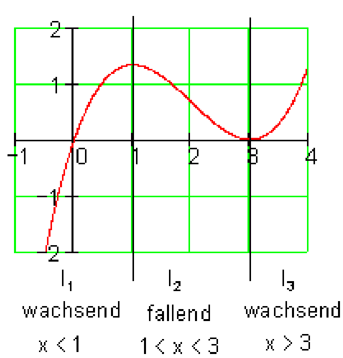
د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکې مشتقوړ وي.

1. که د $f(x)$ تابع په اينتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره
- که $f(x)$ په اينتروال کې همغږيزتيټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره.
- که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې همغږيز جګېدونکې ده.
- که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ايتروالIکې همغږيز تيټېدونکې ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې په کلکه همغږيزجګيدونکې ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اينتروال Iکې په کلکه مونوتون تيټېدونکې ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحه) ټاکنه

بيلګه: د تابع ګراف ځخه زيات وخت کيدی شي د مونوتوني ساحې لږ يا زيات تيک و لوستل شي.

$$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

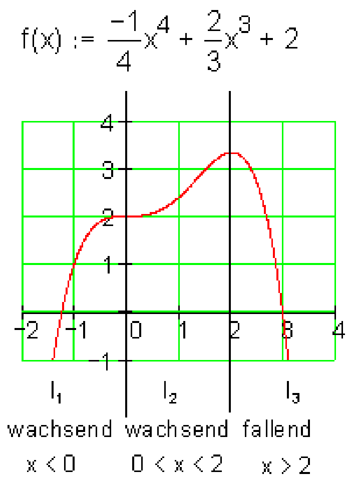


د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکې دی.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$ لپاره $f(x)$ يوغږيز تيټېدونکې ده.

د $r\, I_3 < x < \infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه يوغږز جګېدونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



له گراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کيږي.

د $I_1=\{-\infty<x<1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج گېدونکي ده.

د $I_2=\{1<x<3\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونجگېدونکي ده.

د $r\; I_3<x<\infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون ټيټېدونکي ده.

تمرينونه:

--- لاندې تام راشنل توابع په همغږيزوالي خويونو وڅيړئ.

$a)\ f(x)=x^3-6x^2+9x+3$

$b)\ f(x)=2x^3+9x^2-12x$

$c)\ f(x)=x^3-6x^2+1$

$d)\ f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2+2x+2$

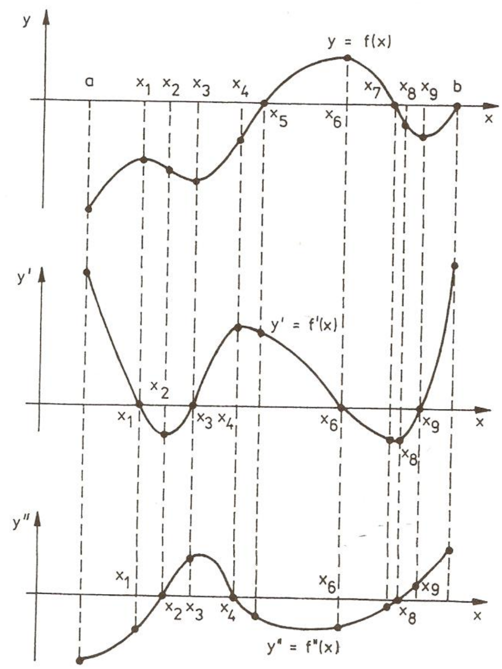
--- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\ f(x)=\frac{1}{ax+2}$

$b)\ f(x)=\frac{1}{ax^2+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای اړونده افراطي ټکي (local extrema)



یادونه: په لیکلو مې کله کله د افراطي لپاره بحراني لیکلي، پام دې ورته وي.

فعالیتونه:

د مختلفو توابعو ګرافونه او په هغې خبرې، چې چیرته افراطي ټکي پراته دي.

- په پورته څېره کې د تابع لپاره نسبي جګ ټکي اوخورا جګ ټکي و ښایاست.

- په پورته څېره کې نسبي ټیټ او خورا ټیټ ټکي وښایاست.

- په پورته څېره کې وښایاست، چې د نسبي جګو ټکو همداسې خورا جګو ټکو، نسبي ټیټو ټکو همداسې د خورا ټیټو ټکو دواړو لورو ته تابع څنګه ځغلي؟

- په پورته شکل کې هغو ټکو ته، چې بحراني ټکي دي ځیر شئ، چې تابع هلته څه خوي لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د تابع همدې ټکي کې وګورئ، چې لومړی مشتق یې کوم ارزښت لري؟

موږ ددې پورته فعالیتونوڅخه لاسته راوړو:

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

1. دا اړیکي یواځې د x_0 لپاره ارزښت لري چې د تعریف سټ په دننه کې پروت وي او هلته د $y=f(x)$ تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو لپاره چې هلته $f(x)$ تابع کم یا هیڅ مشتق وړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.
2. شرایط چې $f'(x)=0$ وي(مشتقوړ تابع) یواځې د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی(ضروري یا اړین شرایط).
3. شرایط $f'(x)=0$ او $f''(x)\neq 0$ د بحراني ټکي لپاره یواځې پوره کېدونکی دی او نه ضروري).

بیلګه:

د $f(x)=x^2+2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او مشتق له لارې وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د بيلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د $x = 0$ په ځاى کې خورا ټيټ ټکي(اصغري-) لري.

د ابحراني ټکي لپاره اړيين شرطونه:

1. د تابع لومړي مشتق دى: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 لپاره صفرځاى لري، يعني دلته يو بحراني ټکى پروت دى.
- د تابع دويم مشتق: $f''(x) = 2$ دا چې $f''(x) > 0$ دى، نو يو نسبي ټيټ ټکى مخ ته لرو.

بيلګه:

د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکي لري او باوري دي:

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(x) = 2x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنى او نه لوي دى.

د پورته شننې څخه لاندې پيژند ته راځو

تعرف يا پيژند: د $x = x_0$ په چاپيريال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع يونسبي جګ ټکى په همدې ډول نسبي ټيټ ټکى لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري: $f(x) \leq f(x_0)$ ($\Leftrightarrow$) په همدې ډول $f(x) > f(x_0)$
جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط): که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکى لري نو لرو: $f'(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همغږيزې توابع

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يوازې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چی د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله ۲ ۱۳ : (د يوه بافراطي ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):
که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو:
$f'(x)=0$, $f''(x) \neq 0$
نو تابع $y=f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.
خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$
خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

پوښتنې:

د لاندې توابعو انحرافي ټکي پيدا کړئ.

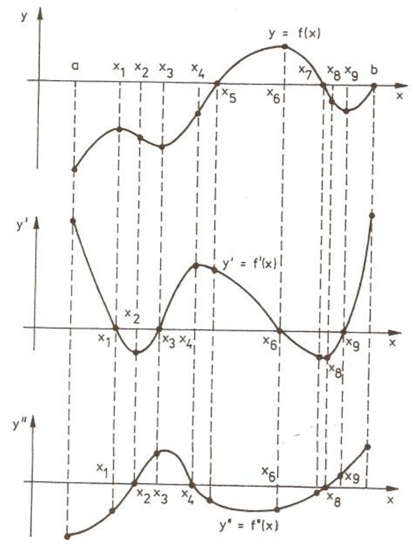
1) $f(x)=x^3-3x^2+1$

2) $f(x)=x^4-3x^3+x+1$

3) $f(x)=7x^7-6x^6 6+4x^4 x^3+2x+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له ښی لور انحنا اوله کیڼ لور انحنا(مقعر او محدب)



فعالیت:

- په پورته شکل کې مقعریت(ننوتوال) او محدبیت(وتنوالی) وښایاست.
- په پورته شکل کې د مشتقونو له مخې مقعریت او محدبیت په گوته کړی.

که په یوه اینتروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینتروال کې گراف کیڼ کوړ شوی یا کیڼه انحنا لري او که دویم مشتق $f''<0$ وي، نو د تابع گراف ښی کوړ یا ښی انحنا لري.

بیلگه:

ټول گونگ تابع(راشنل تابع) f د $f(x)=x^3-2x^2+4x-1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کیڼ کوږدی (کیڼه انحنا لري (ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی (ښی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (له لومړی مشتق څخه):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$
$$f''(x) = 6x - 4$$

د $x > \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 > 0$ لپاره کيڼ گوړوال(کينه انحنا (ننوتی يامقعر)

د $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 < 0$ لپاره ښی کوړوالی(ښی انحنا(وتلی يامحدب))

بيلگه:

د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ گراف يو های پارابول دی. د های پارابول کومه ځانگه کينه کږه ده يا کينه انحنا لري(مقعر)، او کومه يوه يې ښی کوړوالی - يا ښی انحنا لري(محدب)؟

دويم مشتق: $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$; $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های‌پارابول ځانگه ښی کوړوالی يا انحنا لري(وتلی يا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کينکوړ دی يا کينه انحنا لري(ننوتی يامقعر).

بيلگه: د دواړو توابعو $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{x^3}$ کوړوالی(انحنا) دې له دواړو لورو يو د بل سره پرتله شي. دواړه توابع د x>0 لپاره تعريف دي.

$$g'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$g'' = \frac{3}{4\sqrt{x}} \qquad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مشتقونه د $x \in R^+$ لپاره تعريف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی يا انحنا لري، دا يو ښي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $g''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف کيڼ کوږ دی يا کيڼه انحنا لري. اړونده ګراف يو کيڼ کوږوالی يا کيڼه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

تمرينونه:

۱ -- و ښاياست، چې د لاندې توابعو مقعريت او محدبيت کوم دي؟

$$a) \quad f(x) = x^3 + 4x^2 + x$$
$$b) \quad g(x) = 2x^3 + 3x - 2$$

۲ -- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع يو کيڼ کږوالی لري او په کوم کې ښی کږوالی لري.

$$a) \ f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2 \qquad b) \ -2x^3 + 3x^2 - x - 4$$

۳ -- د لاندې مات توابعو ګرافونه هايپاربول دي. د هاپارابول ځانګې کوم کږوالی لري؟

$$a) \ f(x) = \frac{1}{4x+1} \qquad b) \ f(x) = 3 - \frac{3}{x^2}$$

٤ -- په کومه ساحه کې لاندې ناراشنل توابع يو کيڼ او په کوم کې يو ښئ کږوالی لري؟

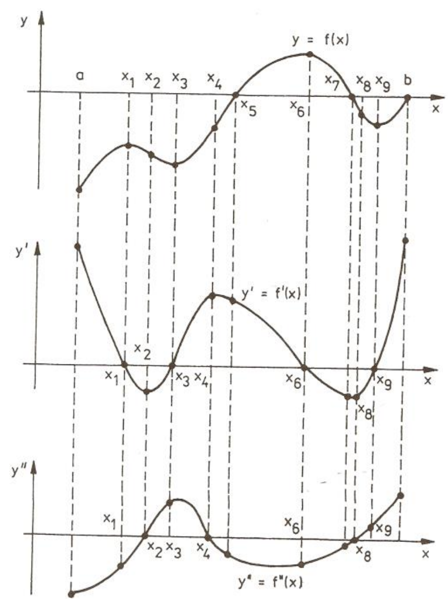
$$a) \ f(x) = x \cdot e^{2-x} \qquad b) \ f(x) = \ln x^2$$

٥ -- ولې د يوه دريمې درجې تام راشنل تابع ګراف په ټل تلنه کې يوه ښئ انخنا(کږوالی) نه لري.

٦-- ولې يو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره يو تلتلونی کينه انخنا(کږوالی) او ښئ انحنا لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکي(اوړونټکي) Inflection Points



فعالیتونه:

- پورته څیره په ځیر وګورئ او وښایاست، چې چیرته یا په کوم ټکي کې منحني(له کینې و ښي لور ته) خوزښت - یا خپله د حرکت لور بدلوي؟

- د انعطاف ټکو شاوخوا هم فکر وکړئ، چې کوم ټکي غوره ټکي دي او د هغو له خویونو هم د انعطاف ټکو خویونه وټاکئ.

- په شکل کې فکر وکړئ چې د انعطافټکي شاوخوا منحني څنګه ځغلي.

- د شکل په هکله په خپل فکر څه ووایئ او د خپل فکر په بنسټ خپل دلایل روښانه کړئ. موږ له پورته څیرې اټکل کولی شو چې: که د x_0 ځای کې ولرو: $f''(x)=0$ او $f'''(x)>0$ ، نو یو ښی-کینې- انعطاف ټکی (اوړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس(په ځټ): که وي: $f''(x)=0$ او $f'''(x)<0$ نو یو کیڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

دا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چې $f''(x)=0$ وي، دا چې دا ښی -کیڼ - او که کیڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f'''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

- شرایط $f''(x)=0$ د انعطاف ټکي لپاره یوائی اړیین یاضروري دي.

د $y=x^4$ لپاره $f''(0)=0$ دی، مگر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

- شرایط $f''(x_0)=0$ او $f'''(x_0)\neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

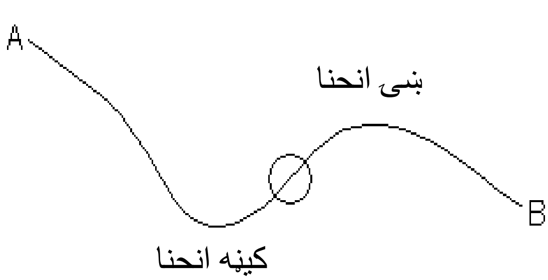
گورو چی $y=f(x)=x^5$ تابع د $x=x_0=0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x)=5x^4 \quad , \quad f'(0)=0$$
$$f''(x)=20x^3 \quad , \quad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=60x^2 \quad , \quad f'''(x)=0$$

گورو چې دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړنې او د کلمې روښانه ونې:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توگه مخ ته ځو:



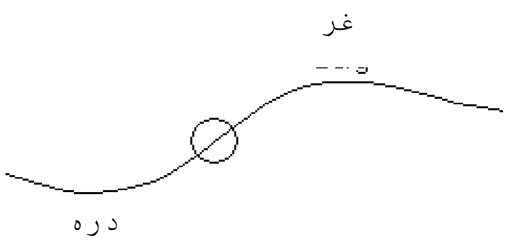
د بایسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسېږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د اندل حالت د ځغاستې په وخت کې په پام کې ولري. د کینې منحني(د کیڼ لورې د اندل حالت) څخه وروسته د ښی لورې منحني کې ځغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کینې- او ښی منحني(کږې) ترمنځ باید د باسکل انډل نېغ ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کینې لورې و ښی لورې ته. دا د کینې او ښی منحني ترمنځ اوړیدنه یاد انعطاف ټکی بلل کیږي.

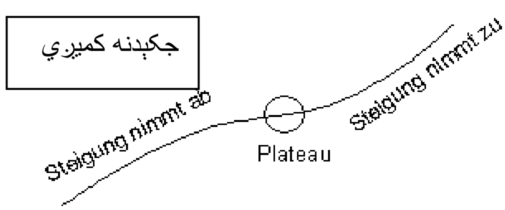
تاسو له بایسکل سره په یوه غونډۍ ځغلی.
وروسته له هغې، چې له تالې څخه تیږیږي، نو لار په جګېدو پیل کوي. په لومړي سر کې نرم او بیا په نیغه جګیږي، بیا په دې پسې جګوالی بېرته کمیږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسیږي. یو چېرته په لار جګېدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.

دا څېره بیا



د بایکل ځغلونکي بل حالت، چې له څنګ دیاګرام څخه یې رانیسو:
په غره د بایسکل ځغاستمیل یاجګېدنه لومړی کمیږي، چې له سره بېرته جګه شي.
ددې ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (یوه نسبتاًهواره). دې نسبتاً هوار ځای کې د ټوټه کرښې جګیدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.

دا څېره د ښېتو نومونو سره بیا کښل...



له کېن ښي لور ته ژباړه: جګیدنه کیږي، هواره، جګیدنه زیاتیږي

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پیدا کړو.
دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پیل تابع $f(x)$ لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع $f'(x)$ باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.
مخکی له دې چې یو لړ جملی د بحراني ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیړو، غواړو چې دا کلیمی تعریف کړو.

دواړه کلمې به د نسبې افراطي ټکې په بڼه کی سره را غونډې شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند:

په یوه چاپیریال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ یو کیڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کیڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي: چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یوائې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري(یادونه ۴ دې پ‌ءتله شي) : چیرته چی $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کیدی چي د انعطاف ټکي موجود وي. مګرچیرته چی $f''(x) = 0$ وي ، د انعطاف ټکی شته کیدلی شي، خو اړیین یا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

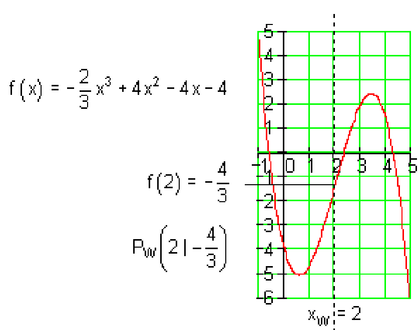
(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله: (د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)

که په $x = x_0$ کی د دریواره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) \neq 0$

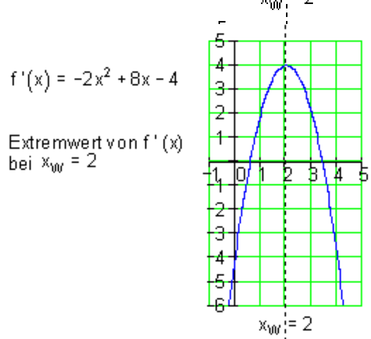
نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو یو کیڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو ښی-کیڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننیزه یا تحلیلي بیلګه:
یادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف ټکی په نښه کوو.



1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$



2- دویم مشتق صفر کړئ.

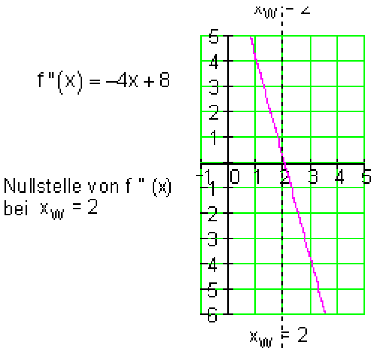
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0$$
$$\Rightarrow x_W = 2$$

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ایا د انعطاف ټکی شته دی؟

$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x_W) = f(2) = -\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow P_{W\left(2|-\frac{4}{3}\right)}$$

$$P_W(21-1.33)$$

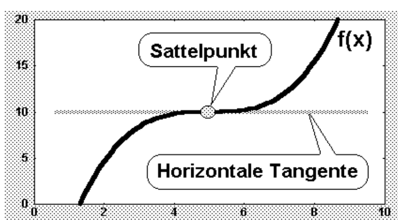
پام: په انعطاف ځای x_W کې د $f(x)$ ګراف کږيږي.

په يوه په خوښه ټکي x_0 کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:

$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کيڼ لور ته کږيږي(انحنا لري) دی.

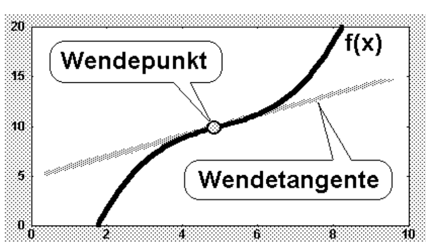
$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ ګراف ښی لور ته کږيږي(انحنا کوي)

يو زينټکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟



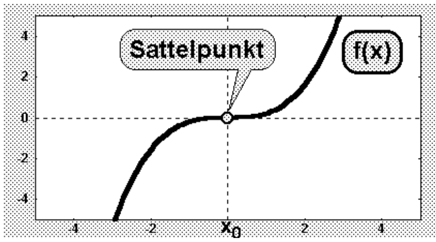
پيژند:

د زينټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهيږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت يې افقي (پروت) وي:



د پرتلې لپاره دې بيا يو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا يو مائل(نه افقي) تانجنت لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

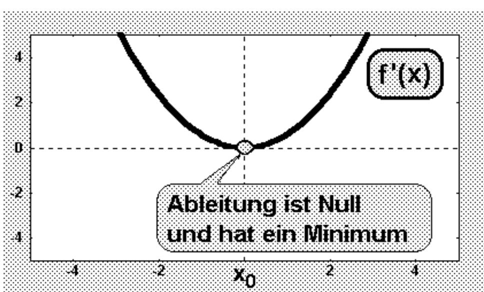


توضيح:

اوس فکر کوو، چې يو زينټکى ځنګه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدى شي. په دې برخه کې په ځانګړي توګه دا مخ ته لرو، چې يو زينټکى له بني – و کينه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالى په پام کې نيسو، يعنې لومړى مشتق: د زينټکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کميږي، په زينټکي کې صفر ارزښت لري، او له زينټکي څخه وروسته ېږته جګيږي.

يو زينټکى (د بني – کيڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کيږي، چې لومړى مشتق $f'(x)$ يې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته يو نسبي ټيټکى (مينيموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړى شرط دى، چې مشتق يعنې $f'(x)$ په زينټکي کې د صفر سره مساوي دى.

زينټکى(ښى-کيڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دى، چې مشتق $f'(x)$ هلته يو نسبي مينيموم لري.

دا په دې معنادى، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ بايد په صفر مساوي وي او مخښنه له منفي و مثبت ته بدليږي.
له دي سره سم د زينټکي لپاره پوره کېدونکي قضيه وميندل شوه:
د زينټکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کيڼ- انعطاف سره)

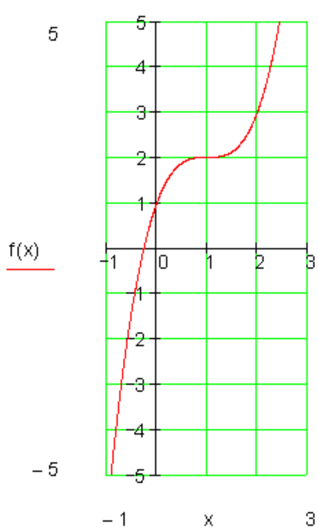
(c) ketabton.com: The Digital Library

الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$

ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ يو مينيموم لري، دا په دي معنا، چې دوم مشتق صفر دی، يعني $f''(x)=0$ دوم مشتق مختخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.

بل بديل(د ګرانو دوستانو وړانديز)

زينټکی**Der Sattelpunkt**



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينټکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګېدني سره.که د کيڼ لور ورتزدي شو فکر کېږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی

که څوک د ښي لور ور نزدي شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټټکی مخ ته لرو.

اوس دا حالت د رياضياتو له لوري څېړو:

مشتق:

$$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2-6x+3$$
$$f''(x)=6x-6$$
$$f'''(x)=6$$

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-6x+3=0 \ \Rightarrow \ x_{1/2}=1$$

$f''(1)=6\cdot1-6=0$ $f'''(1)=6$	1=> د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	1=> د $x=1$ سره زينټکی

د انعطاف ټکي لپاره شرايط پوره دي.

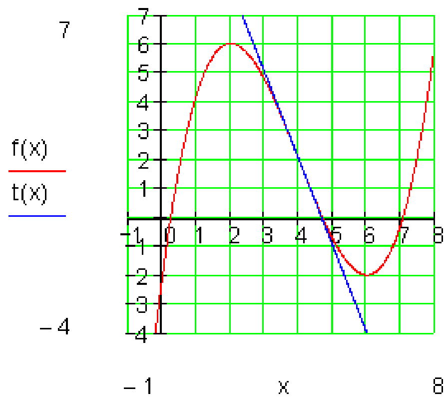
دا چې د $f''(1)=0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زينټکی دی.

د انعطاف ټکي پيداکونه:

د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي. د انعطاف تانجنت هم

همداسې پيدا کيږي لکه د تابع دګراف په يوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات تاکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2\Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

مساوات لپاره باور لري.

د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$ سره په لاندې ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$

د انعطاف تانجنت د $f(x)$ ګراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوځوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x)=-3x+14$$

د انعطاف ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دګراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې تاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د ګراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر څیړنې لاندې نه نیول کیږي.

پوښتنې

۱ -- د تابع f د $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي پیداکونه

۲ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2}$ $\qquad$ $b)\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$

$c)\ f(x)=\dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$ $\qquad$ $d)\ f(x)=\dfrac{x^3-8}{4x}$

۳ -- و ښايئ، چې د $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}e$ تابع د انعطاف ټکی زینټکی دئ.

۴ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اوړونټکي) پيداکړئ.

$a)\ f(x)-=x\cdot e^{-x^2}$ $\qquad$ $b)\ f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2+1}$

د منحني بحث (Kurven Diskusion) :

یوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بيا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چيرته له کينې لور و ښۍ لورې ته او له ښۍ لورې و کينې لورې ته ده.

فعاليت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جگ ټکي، ټيټ ټکي او د انعطاف ټکي يې پيدا اکړئ.
- x^3+x
- $3x^3+x+2$

ددې لپاره چې يوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پيژنو. مونږ دې بحث ته د منحني بحث وايو. مونږ په دا ډول خبرو اترو کې بايد سيستماتيک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه گټوره بلل شوې.

دتعريف ساحه: د تابع څيړنه يوائې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : بايد وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$
په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅېړل شي.
په ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)يې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

انحرافي ټکي **Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)
د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:
$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$

انعطافټکی Inflection Point :
د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:
$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$
زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوڅټکی):
د $x-$ محور سرهِ غوڅټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow (x) = 0$
د y محور سره غوڅټکی(صفرځای) ټاکي $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow f(0)$
دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کیږي.

د انحنا حالت او یوغړیزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)
یوغړیزوالی
1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جګیږي.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.

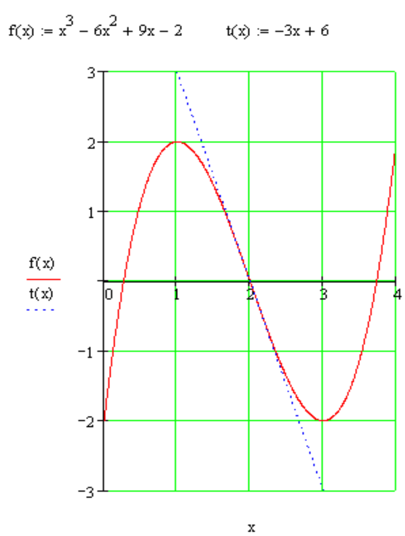
(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې کره غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.
د پېژند ورشو ژی ټکي:
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$



نسبي انحرافي ټکي

$P_{\min}(3|-2) \qquad P_{\max}(1|2)$

انعطاف ټکی او تانجنت

$P_W(2|0) \qquad y = f_t(x) = -3x + 6$

صفرځایونه:

$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$

د y– محور سره غوڅټکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغږیزوالی(مونوتوني یاجگ - ټیټوالی) د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سیومتري: نه لري

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

کې یوغږیز جگیږي.

په $I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

کې یوغږیز جگیږي.

د انحنا حالت:

ښی انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کینه انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

تمرینونه:

په لاندې توابعو بحث وکړئ او غوره نقطې یې پیدا کړئ:

اول) د شمېرنې له لارې وښایاست.

دویم) په شکل کې په نخښه کړئ.

$a)\quad 2x^3 + x^2 + 1$

$b)\quad x^3 + x^2 + 3x$

$c)\quad x^3 + 2x^2 + x + 3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناټاکلو افادو یا وييېنو=ګ\پولې

$$0.\infty \ , \ \frac{0}{0} \ , \ 0^{\infty} \ \ .\frac{\infty}{\infty}, ...$$

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو لیمیټ په پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وایې، ځکه چې مشتق یې نیول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش(د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کیدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود $x = 0$ لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وایو.

فعالیت:

- که تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x^2+x}$ ورکړشوې وي.

اول - د تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x^2+x}$ پوله یعني $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+x}$ د پولې له درسه ، چې په لومړۍ بره کې لوستل شوي، پیدا کړۍ.د.

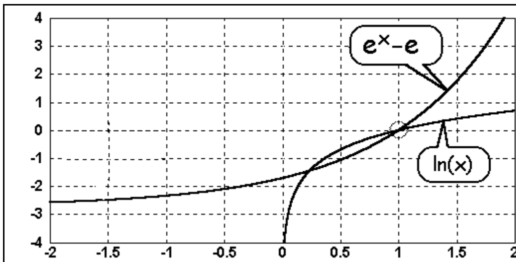
- پورته په ننوتنه کې و هڅېږۍ، چې د توابعو مشتقونه پیدا کړۍ.
- که ولرو $\frac{x^2-4x-5}{x-5}$ ، نو د تابع مشتق د چېرته نیول کیږي، که د x=5شونی وي، نو مشتق یې ونیسئ.

پیل څیرنه: د $\frac{0}{0}$ حالت که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او مخرج یې دواړه د صفر په لور لاړ شي یا صفر شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$



په ځېره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعني د صورت او همداسې د مخرج گرافونه.

گورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)

لیکندود(لیکنډول): د افادې

$$\frac{\text{Zähler} \to 0}{\text{Nenner} \to 0}$$

لپاره په حدشمېرنه کې لنډ لیکو: $\frac{0}{0}$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مگر په ټولېزه توگه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمېرل کېدی. دا کار د لوړې ریاضي سره دا شمېرنه شونی شوه(دبېلگې په توگه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسبه وڅېړل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمېرل ولې ناشوني دي.

مورږ بیا دا د تېر مخ بیلگه رانیسو:

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

1- که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د $x = 1$ په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده $0:0$ به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u = f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

2- ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمېرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمېرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارلی، لکه په پورته بیلگه کې.

3- د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د 1 په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نژدې برابر شي.دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.0000000010\ \ 0}{0.0000000010\ \ 0} = 100$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نژدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعنې (100) دی،

د برنولي او د دې لو، پيتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

$$\frac{\sin 2x}{5x} \quad \text{او} \quad \frac{x^2+3x-10}{x-5}$$

د برونولي او د دو لو پيتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کيږي، چې مخرج او صورت همغه صفرځاي x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ هدفمنده نه ده. کیدی شي چې د ويش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وڅېړل شي، په کومو کی چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بيلګې په توګه تابع $f:\quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$ صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2لري، سره له دې هم ليميټ شته دی.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شميرل کيدی شي، چی د صورت او مخرج توابعو له نتيجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضيي استعمال هم بلل کيږي.

د برنولي او د دو لو، پيتال قاعده:

Bernoulli and de l'Hospital

که توابع $u=f(x)$ او $v=g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپيريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g'(x)\neq 0$ سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 د f ا و g یوصفرځاي وي،

د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)},$

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضيي نيونې پوره کوي. د هر $x\in U(x_0)$ لپاره

یو x_m د $x_m\in(x_0,x)$ سره موجود دی، په داسې ډول چې لرو:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0\ \wedge\ g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچې د $x->x_0$ سره $xm->x_0$ هم هڅه کوي.

د $x->oe$ په حالت کې $x=1/z$ ځای په ځای کوو. د زنځيري قضيي په مرسته لاس ته راځي:

$$u=f(1/z)$$

د مشتق $du/dz=f(1/z)(-1-z^2)$ او مشتق $\dfrac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z})(\frac{-1}{z^2})$ سره، داسې چې لرو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کې $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سړي د $n-$ پلونو(قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چې $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع $n-$م مستق په معنی دی.

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلګه:
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلګه:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(جګعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^{α} د $x->oe$ لپاره په غښتلې توګه جګیږي، نسبت لوګاریتم تابع $1n$ ته $\alpha>0$ $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قعاعدې د دیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=...=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلې جګیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بنه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

له تیپ یا بڼي ∞-∞ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته ددې لپاره لاندې تابع بیلګه کیدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچی دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼي $0.(\pm\infty)$ څخه بڼي $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د0<-x لپاره ښایي. په کوم کی چي ضرب د ویش په څیر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندي لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0ته:

دلته د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x->0$ لپاره تر څیړنې لاندې نیول کیږي.

د بڼي بدلون یا فورم بدلون و بنسټ e ته د یوې انځورونی په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}x^x=\lim_{x\to +0}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to +0}e^{x\cdot\ln x}=e^0=1$$

له 1^∞ بڼي څخه و $e^{0.\infty}$ بڼي ته

د ښوونې، د بیلګې په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او $x\to\infty$ د $x\in R^+$ سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})}=e^{\lim_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}}=e^{\mu}$$

د $\mu=1$ لپاره لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

له بنې ∞^0 و بنې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته دا کارونه په یوې بیلګې روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=0$$

د $\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1$ سره

باید لاندې جدول کې پام وشي.

لاندې جدول د پورته ښوول شوو بڼویا ډولونو د بڼی بدلون تولیزه کتنه ممکنوي

تیپ(ډول)	$f(x)\to$	$g(x)\to$	بڼه بدلون یا لنډ: بدلون
$-\infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

∞	0		$f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\to\dfrac{0}{0}$ $\wedge(Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\to\dfrac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot \ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ د $f(x)>0$ سره.

تمرینونه:

پورته کې دېرې بیلگې حل شوې. له هغوباید څه تمریونونه راوړل شي.

۱) لاندي پوله ارزښتونه وشمیرئ.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right)$

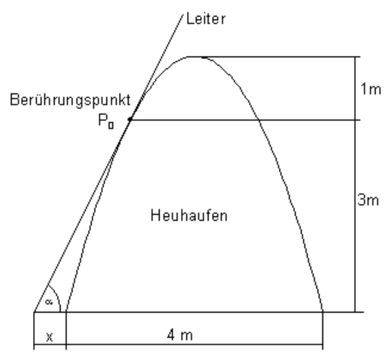
د $x\to\infty$ لپاره د لاندې راشنل توابعو لیمیتونه د دې لو پیتال قاعدې له مخې وشمېرئ.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-x+4}{3x^3+1}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$

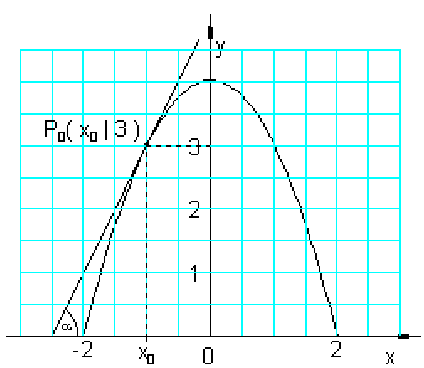
(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت لپاره د يوې تابع د استعمال بيلګې

له ځمکې څخه د وښو په ټوټې يوه زينه ايښول کيږي. دا زينه په درې متره جګوالي ټوټې لمسوي.



د وښو توپى دې د يوه کينکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ يې 4 متره سرور دى او 4 متره جګوالى لري. غواړو په دې يوه زينه کيږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاويه(کونج)بايد دا زينه کېښول شي؟
د وښو ټوپۍ له بيخ څخه دې په کوم لرېوالي په ځمکه دا زينه کېښول شي؟



موږ د y محور داسې کا ږو،چې د پارابول له ککرې(څوکې) څخه تېريږي.
پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمېرنه:
د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زينه ټوپۍ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow x_0 = -1;\ f(x) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f'(x)=-2x$ سره لاس ته راځي:

$$f'(x_0)=f'(-1)=-2\cdot(-1)=2$$

$$\Rightarrow t(x)=2[x-(-1)]+3=\underline{\underline{2x+5}}$$

جوړه زاويه: $\tan\alpha=2\Leftrightarrow\alpha\approx62.4^\circ$

د زينې او د وښو ټوپۍ تر منځ واټن د $f(x)$ د صفرځای او د تانجنت $t(x)$ د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځايونه:

لرو:

$$f(x)=-x^2+4=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=4 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=\pm2$$

$$t(x)=2x+5=0 \;\Leftrightarrow\; x=-2.5$$

د x ارزښتونو -2.5 او -2 ترمنځ واټن 0.5 دی.

زينه د وښو د ټوپۍ له پښو څخه بايد نيم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کيږي، چې يو ګراف په تعريف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې ګټې(غټو ګټو) مسئله يا قضيه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د يو څو بيلګو له لارې وڅيړل شي.

نږدې ټولو پروسو کی ، چې په عمل کی کارول کيږي يا صورت نيسي، له تاثيرونکو يا په همدې ډول د هغو ټاکلو لويو استعمال ته اړ دی، کومې چې موږ په ځانګړو يا مخصوصو پولو کی په اختيار کي لرودی شو.

موږ يوائې هغه پروسې تر څيړني لاندې نيسو چې د يوې واريابلی يا اووښتونې x په واك کی وي. دا د بل په واك کی د يوې تابع $y=f(x)\ ,x\in D$ له لارې څرګندولی شو.

که y ټول لګښتونه يا مصارف په کوته کړي، نو x بايد داسی وټاکل شي چې $f(x)$ مينيمال يا خورا کم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په ځنډ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسې لاس ته راوړل شي، چې $f(x)$ ماکسیمال یا خورا لوی شي. په قاعده کې اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك وار یا بل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیك پو هنې له امله، یواځې په ټاکلو پولو کې:

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلې، په دې پورې اړه لري، چې آیا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخې پرابلمونو سره خورا نزدی یا ټینګ تړلی دی. دلته زموږ علاقه په ځانګړې توګه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

1- د بلواکیزو $y = f(x)$ ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفې ورکولو سره سم(موډالیټي پرابلم).

2- د تخنیك پو هنې پولو په پام کې لرل $(*)$ دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

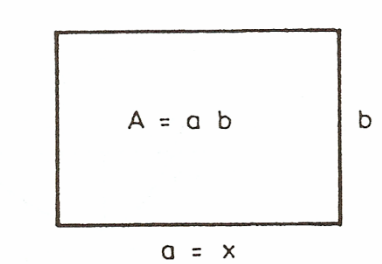
بیلګه: یو د منډو(پټې ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چې ټول اوږدوالی یې L دی. له دې سیم سره باید یوه مربع سطحه(څلورګوډیزه هواره)، چې د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د موډالیټيArt und Weise پرابلم: غوښتنه مو د یوې ځلور ضلعي(څلورګوډۍ) پیداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلورضلعي(څلور ګوډۍ) یو اړخ په a ښایو او بل اړخ یې په b ښایو، د څیرې 14.20 له مخې).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په سر کې دوه اغيزې لرونکي يا تاثير اچونکي لويېa او b دی.

د $L = 2a + 2b \ , \ b = (L/2) - a$

له امله يوائي يوې اغيزمنې(تاثيراچوونکي) لويي ته اړيو د بيلګي په توګه $a = x$، دا ګټه (ستحهA)داسي ده $A = ab = x((L/2) - x)$ دا روښانه ده چې صدق کوي $0 \le x \le L/2$ له دې امله د سترې ګټې پرابلم داسې دی.	

y = f(x) = x((L/2)-x)=Max!   (0 < x < L /2)

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله بايد ماکس د 0 او L /2 ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

y ' = f ' (x) = L/2 - 2x = 0

د ماکس لپاره يوائي x = L /4 په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره y "=f "(x) = -2< 0 دی.

په رېښتيا چې يو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنيکپوهنيزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بيلګه: يوه بډای چې په يوه ټاکلي وخت کی تولسټ (تولډيری) M توليد کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فيکس يا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کيدې شي چې سملاسی د دې توليد په تولسټ (تولډيری) M کې توليد کړي، په يوه زخيره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته يی سملاسي ورسوي. دلته

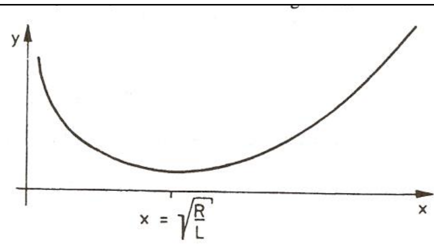
(c) ketabton.com: The Digital Library

د زېمتون(زخيره کوني) لګښتونه راپيد کيږي(ددې د زخيرې لپاره ځاي او هلته بيا اچول او وړل). يا هم کيدی شي چی توليد په لږه کچه يا اندازه توليد شي او سملاسی اخستونکو ته ورووړل شي. دلته نو د زخيره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر تل توليد په دې ډول توليد باندې دروړل، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه يی بولو.
کومه ډيری x (ازاده لويه) بايد توليد شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخيرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابيدو ارزښت د چمتووالي يا توليد ارزښت سره يعنی چې خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتيا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل بايد تغير وخوري يعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چيرته چی F ثابت(همغه) يا په کلکه ابينول شوي لګښتونه دي، Lد زخيرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لويه x د توليدديری M څخه نه شي ستريدلی ، لوئيدلی يا غتيدلی. له دې امله صدق کوي $0 \leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستريدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده :

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \; (0 \leq x \leq M)$$

لومړی $f(x)$ دوه واره ديفرنځيال کيږي يا يي دوه واره رابيليدنه نيول کيږي:

 	$f'(x) = L - R/x^2 \; , \; f''(x) = 2R / x^3$ د مينيوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$ پس لرو $x = R / L$ د $x \geq 0$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل يو نسبي مينيموم مخ ته لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرېږ(منحني) تګلار په شکل کې انځور شوې. څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مينيموم مو مخته پروت دی.که $x = R/L > M$ وي، نو يو منيموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R/L < M$ دا مانا لري $R/L < M^2$ په همدې ډول $R^2 < M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = R/L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره؛ نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخيرې لګښتونو L څخه زيات لوي شي، نو سملاسی دې تول توليد x = M صورت ونيس. که د ذخيرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کيدی شي کوچنی ازاد x توليد شي.

ټاکلی بيلګه: د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي،
$R = 1000 < M^2L = 108 \cdot 10 = 109$ ستر يا غټ ازاد لګښت دی
$x = R/L = 1000/10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 يوونه بايد ورزيات شي ، چې 10000 يوونه توليد کړي د $M = 10, R = 1000, L = 1$ لپاره صدق کوي
$R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لويه له دې امله $x = M = 10$ ده، يواځې يوه ازاده لويه دې تر توليد لاندې ونيوله شي.

په توليد کې د مشتق استعمال

فعاليت:
يوه فابريکه x توليد کوي. په دې توليد لګښت کيږي، چې دا د توليد په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وايو او په $K(x)$ سره يې ښايو.
څنګه کولی شو، چې د زيات توليد لپاره لګښت را ټيټ کړو؟
د لګښت تابع $K(x)$ د توليد سټ(ډېرى) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.
که توليد د Δx شاو خوا کې زيات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زياتيږي.
کمښتويش (تقسيم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځنې لګښت زياتوالی ښايي، د يوه Δx توليد تغير سره(منځنی تغير ارزښت)
د x_0 ځای کې لحضوي تغير ارزښت د مشتق لګښت بلل کيږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کيږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابع K مشتق.

(c) ketabton.com: The Digital Library

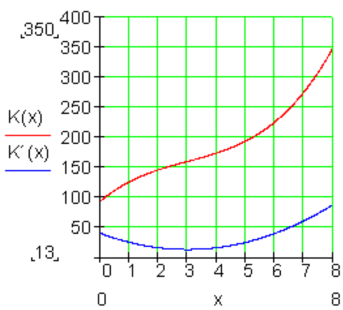
پېژند: د لګښت تابع $K(x)$ مشتق د مشتفارزښت $K(x)$ په نامه يادوو يا يې پوله لګښت $K'(x)$ هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$ دي ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکئ، يو ارزښت جدول د $K(x)$ او $K'(x)$ لپاره وکاږئ او په پروتولاړ سيستم يا کواوردیناتسیستم کې يې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د $[0\ ;\ 6]=1$ لپاره په1پل(قدو) پراخوالي سره.

ب: د ډېر کم لګښت زياتوالی و ټاکئ:



لاندې تابع

$$K(x)=x^3-9x^2+40x+94$$

لرو

مشتف ارزښت

$$K'(x)=3x^2-18x+40$$

ارزښت جدول

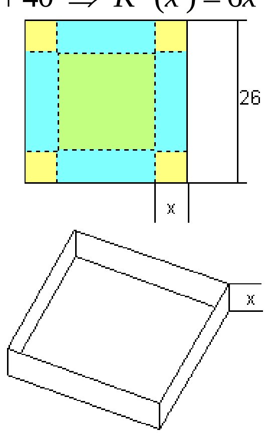
x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول $K'(x)$ په ککره(څوکه) کې پروت دی، يعنې هلته چې تانجنت $K'(x)$ پروت يا افقي دی

$$K'(x)=3x^2-18x+40 \Rightarrow K''(x)=6x-18$$

دد تانجنت د پروتوالي يا افقيت لپاره:

$$K''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-18=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$$



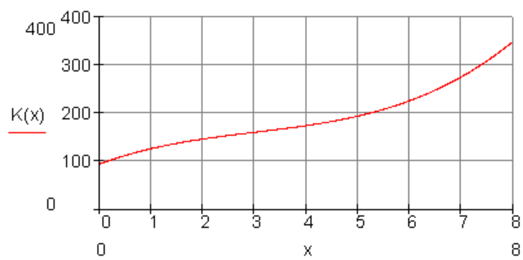
پوښتنې: دي، مربع کارتون(د کلک کاغذ ټخه جوړ)ټخه، چې 26 سانتيمتره د اړخ اوږدوالی لري يو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جګوالی لري.

الف: د يوه تابع ترم وټاکئ، چې د بګس حجم(ډکی) v د x په واکوالي يا تابعيت کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښايي.

ب: ګراف وکاږئ او په نردې توګه يې
ماګسيما(خورا جګ) حجم و ټاکئ.

د يوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع) $K(x)$ د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړيکې انځوروي، داسې چې $x=1$ د 100 ناروغانو معنی او $y=1$ دی معنی چې $1000 \in / \tan$ د روځې زر يورو($1000 \in / \tan$). $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$	

الف: د مصرف تابع په خپله کتابچه کې وليکئ.

ب: د لګښت تابع مشتق د مشتق لګښت (-مصرف) يا دحدمصرف په نامه ياديږي. تاسو د لګښت زياتېدنه د ناروغانو په واکوالي يا تابعيت کې تشريح کړئ.(د $K(x)$ جګېدونه).
$K'(x)$ وټاکئ او ګراف يې په وضعيه سيستم (پروت- ولاړ-سيستم) کې انځور کړئ)

پ: د ناروغانو د کوم تعداد سره د لګښت زياتوالی خورا کم دی؟ دا قېمتونه وشمېرئ.

تېولګه:

د رول(Rolle) قضيه:
يوه د f تابع دې په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په واز اينټروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې ثيره په نوټ کې ده،

لرو: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

پراخه شوې منځقضيه:

که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړ او $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه يوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضيه:

د $f(x)$ تابع دې په انټروال Iکې مشتقوړ وي.

2. که د $f(x)$ تابع په اينټروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره

- که $f(x)$ په اينټروال کې همغږيزټيټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.
- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروال I کې همغږيز جګېدونکې ده.
- که $f'(x)\leq 0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په انټروال Iکې همغږيز ټيټېدونکې ده.
- که $f'(x)>0$ وي ، د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروال I کې په کلکه همغږيزجګېدونکې ده.
- که $f'(x)<0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اينټروال Iکې په کلکه مونوتون ټيټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو يو نسبي ټيټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو يو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x=x_0$ په چاپیریال کې د $y=f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدی x لپاره باور ولري: $f(x)\le f(x_0)$ په همدې ډول $f(x)>f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط): که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وایي: چېرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x=x_0$ کې دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f'(x)=0$, $f''(x)\neq 0$
نو تابع $y=f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند: په یوه چاپېریال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ یو کېڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کېڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط): که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي: چېرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یوائې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال

پېزند: د زینټکي(کله کله برندې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

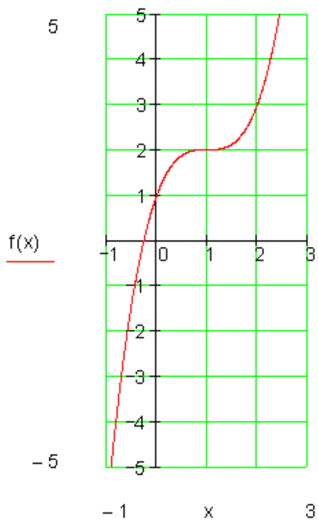
د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط): که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

زینټکی(د اس زین) **<u>Der Sattelpunkt</u>**

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينتکی دی. دا د انعطاف ټکی دئ د صفر جګېدني سره.که د کيڼ لور ورتزدې شو فکر کېږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نزدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لورې څېړو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 1$$

د برنولي او د دې لو، پيتال قاعده:
که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د يوه $U(x_0)$ چاپيريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x) \neq 0$ سره او د ټولو $x \in U(x)$ لپاره او x_0 د f ا و g يوصفرځاي وي،
د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,
ترڅو په ښي لور حد شته وي.
په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

د څېړکي تمرينونه:

١ -- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\;\; f(x) = \frac{1}{ax+2}$ $\qquad b)\;\; f(x) = \frac{1}{ax^2+1}$

٢ -- و څېړئ، چې ايا لاندې توابع په خپله پيژند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x}$ $b)\ f(x)=2x^5-7$

۳ -- لاندې ناراشنل توابع په یوغږېزوالي خويونو وڅېړئ.

$a)\ f(x)=e^{x^2}$ $b)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

٤ -- د لاندې توابعو ټول لوکال افراطي ټکي پيداکړئ.

$a)\ f(x)=e^{-4x^2}$ $b)\ f(x)=(x^2-3)\cdot e^x$

$c)\ f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $d)\ f(x)=\ln(x^2+1)$

٥ -- د تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$-2\pi \le 2\pi.$

$a)\ f(x)=\sin^2 x$ $b)\ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

٦ -- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $b)\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ f(x)=x-\sqrt{x}$ $d)\ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

٧ -- لومړی دمطلق ارزښت وشمېرئ او پسې ټول افراطي ارزښتونه وټاکئ.

$a)\ f(x)=|x|+x^2$ $b)\ f(x)=|x^2+2x-8|$

٨ -- د f تابع د $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي بيداکونه

٩ -- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جګېدنه د

$f(x)=x^4-2x^3-x+1.$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ -- په صفرځاي کې $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ تابع کومه جګېدنه لري.

۱۱ -- د $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$ ګراف په کومو ټکو کې جګېدنه لري.؟

۱۲---- د $x0=-1$ ځاي کې د $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}, \quad (x \neq 1)$ تابع ارزښت او د ګراف جګېدنه غواړو پیاکړو

۱۳ -- د لوپیتال قاعدې په مرسته د $x \to \infty$ لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$$a)\ \ f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1} \qquad b)\ \ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱٤ -- د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننیز بحث وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ \ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ \ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c)\ \ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ \ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

۱٥ -- د لاندې توابعو لپاره د پوره منحنیو مطالعه وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ \ f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2} \qquad b)\ \ f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

$$c)\ \ f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} \qquad d)\ \ f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$$

۱٦ -- د لاندې توابعو صفرځایونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3$ $b)\ f(x)=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

$c)\ f(x)=x^3-6x^2+8x$ $d)\ f(x)=x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}$

$e)\ f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$ $f)\ f(x)=x^4+6x^3-11x^2-60x+100$

۱۷ -- د دريمي درجې تام راشنل ګراف د x -محور د x1=-2 , x2 = 0 او x3=4 په ټکو کې غوڅوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دې ګراف د P(2,-8) ټکي څخه هم تېر شي؟

۱۸ -- د يوه څلورمې درجې تام راشنل تابع د x - محور د x1=0,5 او x2=3 په ټکو کې غوڅوي. د تابع برابرون څنګه دی، که پرسېره پردې ګراف د y - محور د P(0,9) په ټکي کې هم لمس کړي.

۱۹ -- د څلورمې درجې د يو تام راشنل تابع ګراف د وضعيه قيمت سيستم پيل او له $P(\frac{1}{2}/-\frac{15}{8})$ ټکي تېرېږي. د تابع مساوات څنګه دي، که ګراف د x– محور هم د x1=-1 سره لمس کړي او په x2 = 2 کې غوڅ کړي.

۲۰ -- د لاندې توابعو صفرځايوه پيدا کړئ.

$a)\ f(x)=\frac{x^2+2x-15}{x+4}$ $b)\ f(x)=\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x}$

$c)\ f(x)=\frac{x^3-x^2-5x-3}{x-0.5}$ $d)\ f(x)\frac{x^4-x^3+4x^2-4x}{x+5}$

۲۱ -- د يوه مات راشنل f تابع د $f(x)=\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x+d}$ سره ثابتې a,b,c او d پيداکړئ، که د x1=-2,x2=-(1:2) او سره صفرځايونه پراته وي او تابع په x=0 کې يو تشځای ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

٢٣ -- مات يا كسري راشنلf تابع په x1=1 کې د $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}, \quad (x \neq 0)$
سره درې ځله صفرځاي لري.

د يوې ساحې د ويش په مرسته وښيئ چې په همدې څلورمه(ربع) کې صفرځاي کې ځغلي او که صفرځاي څلورمه بدلوي.

٢٤ -- دا سې يو ترم وټاکئ، کوم چې د لاندې پريوديکي يا تل بېرته راګرځېدوني توابعو صفر ځايونه ورکوي.

د شمېرنې له لارې صفرځايونه ونوموئ، چې په انټروال $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ کې پراته وي.

$$a) \quad f(x) = \frac{1}{2}\sin 3x \qquad b) \quad f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$c) \quad f(x) = 1 - \sin^2 x \qquad d) \quad f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$$

٢٦ -- ولې لاندې توابع صفرځايونه نه لري؟

$$a) \quad f(x) = \ln(x^2 + 3) \qquad b) \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$c) \quad f(x) = \frac{e^x}{x+1} \qquad d) \quad f(x) = 1 + \sin^2 x$$

٢٧ -- ولې کېدی شي چې يو تابع ډېر صفرځايونه ولري، مګر د y - محور سره يواځې يو صفرځاي ولري؟

٢٨-- د صفرځايونو د تعداد په هکله څه ويلاي شئ، که د يو f تابع لپاره په تعريفسټ(- ډېرئ) کې يو f^{-1} معکوس تابع هم شته وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۹-- د y - محور سره د لاندې توابعو غوختېکې وشمېرئ.

$a)\ f(x)=x^3+2x-1$ $\qquad b)\ f(x)=(x+1)\cdot\ln(x+1)$

$c)\ f(x)=\dfrac{x^4-3x^2+x}{x+2}$ $\qquad d)\ f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+9}}$

$e)\ f(x)=(x-2)\cdot e^{x-1}$ $\qquad f)\ f(x)=e^{\frac{2}{1-x}}$

۳۰-- د یوه تام راشنل تابع $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ د $a_0\neq 0$ سره کېدی شي د y-محور غوختېکې د ساده لوستلو له لارې و ټاکل شي.

په دې هکله دلایل راوړئ.

۳۱-- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جگېدنه د $f(x)=x^4-2x^3-x+1.$ سره.

۳۲--په صفرځاي کې $f(x)=x^3-x^2-2x$ تابع کومه جگېدنه لري.

۳۹-- په کومو ځایونو کې لاندې توابع پروت تانجنت لري؟

$a)\ f(x)=x^2e^{-x}$ $\qquad b)\ f(x)=\ln(x^2+1)$

۴۰-- د a د کومو ارزښتونو لپاره د $f(x)=(x+a)\cdot e^x$ د گراف د $x_0=0$ په ځاي کې ۲ جگوالی لري؟

۴۱د لاندې توابعو ټول ځایزې(لوکال) خوراجگ ټکې وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ $\qquad b)\ f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$

$c)\ f(x)=4x^3-18x^2+15x+7$ $\qquad d)\ f(x)=x^4-4x^2+5$

$e)\ f(x)=x^5-5x^3-20x$ $\qquad f)\ f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{10}{3}x^3+6x^2-2$

٤٣-- د n-مې درجې يو تام راشنل تابع خورا زيات څومره لوکال (ځايز) افراطي ځايونه لرودی شي؟

٤٤-- ولې د جګتکي لپاره شرايط و $f''(x) < 0$ اړيين نه دي؟

٤٥-- د لاندې توابعو لوکال(ځايز) انحرافي(افراطي) ځايونه وټاکئ.

$a)\ f(x)=\frac{2}{3}x^3+4x^2+8x-1$ $\qquad b)\ f(x)=\frac{1}{3}x^4+1$

$c)\ f(x)=\frac{1}{3}x^4-2x^2+\frac{8}{3}x$ $\qquad d)\ f(x)=x^4-4$

٤٧-- د f تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انټروال کې ولټول شي.

$-2\pi \le 2\pi.$

$a)\ f(x)=\sin^2 x$ $\qquad b)\ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

٤٨-- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځايونه پيدا کړئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $\qquad b)\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ f(x)=x-\sqrt{x}$ $\qquad d)\ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

--- د fتابع د $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي بيداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵۳-- په انتروال $0 \le x \le 2\prod$ کې د انعطاف ځایونه پیداکړئ.

a) f(x) = x + sinx b) f(x) = 2(1-sin2x)

۵٤-- لاندې توابع په x_0 کې په مشتقوړتیا باندې وڅېړئ.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\cos x & x\le 0\\ x^2+1 & x>0\end{cases},\quad x_0=0 \qquad b)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ x^2 & x\ge 1\end{cases},\quad x_0=1$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ e^{x-1} & x\ge 1\end{cases},\quad x_0=1 \qquad d)\ f(x)=\begin{cases}\ln x & x\le 1\\ x-1 & x>1\end{cases},\quad x_0=1$$

۵۵-- ولې متمادیت د مشتقوړتیا لپاره اړین شرط، مگر مشتقوړوالی د متمادیت لپاره پوره کېدونکی شرط دی؟

۵٦-- په کوم دلیل تام راشنل توابع د $x \in R$ لپاره مشتقوړ دي؟

۵۹-- و څېړئ، چې ایا لاندې توابع په خپله پېژند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

$$a)\ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x} \qquad b)\ f(x)=2x^5-7$$

٦۱-- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کیڼ کږوالی لري او په کون کې ښی کږوالی لري.

$$a)\ f(x)=x^3-6x^2+5x+2 \qquad b)\ f(x)=-2x^3+3x^2-x-4$$

٦۲--د لاندې مات توابعو گرافونه هایپاربول دي. د هاپارابول څانگې کوم کږوالی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \ f(x)=\frac{1}{4x+1}$ $\qquad b)\ \ f(x)=3-\frac{3}{x^2}$

٦٤-- ولې د یوه دریمې درجې تام راشنل تابع ګراف په ټل تلنه کې یوه بښئ انحنا(کږوالی) نه لري.

٦٥ ولې یو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x)=ax^4+dx+e$ سره یو ټلتلونی کینه انحنا(کږوالی) او بښئ انحنا لري؟

۱۵۸(۱۰۳): څنګه کېدی شي، چې د یوې f تابع د ۱ . درجې مشتق څخه د د ګراف په انحنا قضاوت وکړو؟

۱٦۰(۱۰۵): د لاندې توابعو حالت وڅېړئ، که $|x|\to\infty$ په لور لاړ شي.

$a)\ \ f(x)=x^3-4x^2-4x-5$ $\qquad b)\ \ f(x)=-3x^4+x^3-2x^2+x$

$c)\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^5-x+6$ $\qquad d)\ \ f(x)=-\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$

$e)\ \ f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}$ $\qquad f)\ \ f(x)=-x^3-x^2-x-\frac{1}{3}$

۱٦۳(۱۰۸):ولې د $x\to+\infty$ لپاره په ساده ډول د پولې په هکله وړاند وینه نه شي کېداي:

$a)\ \ f(x)=x^3\cdot\frac{1}{\ln x}$ $\qquad b)\ \ f(x)=x\cdot e^{-x}$

۱٦۷(۱۱۲): د جوړه(جفت) جګعدد(اکسپوننت) سره تام رینتونی تابع کوم ډول سیومتري لري؟

۱٦۸(۱۱۳): د ناجوړه(طاق) جګعدد(اکسپوننت) سره یو تام رینتونی تابع ټیک هلته د سر چینې سره ټکی سیومتري دی، چې مطلق ارزښت صفر شي؟

۱۷۱(۱۱٦): لاندې توابع په بنسټ کې لوستل شوي سیومتري خویونه نه لري. وښایئ چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سره له دې هم سیومتریک دي.

$a)\ f(x) = (x+2)^2$ $\quad b)\ f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$c)\ f(x) = -(x+1)^2 + 3$ $\quad d)\ f(x) = 2 + \frac{1}{x-4}$

۱۷۲۱۷): لاندې تام ریښتوني اعداد په محدودیت وڅېړئ.

$a)\ f(x) = x^2 - 2x + 4$ $\quad b)\ f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x$

$c)\ f(x) = -(x+3)^2 + 1$ $\quad d)\ f(x) = x^3 - 2x + 1$

۱۷٦(۱۲۱): د لوپیتال قاعدې په مرسته د $x \to \infty$ لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$a)\ f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1}$ $\quad b)\ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$

۱۷۸(۱۲۳): د لاندې توابعو لپاره د x=x0 په ځاي کې د تانجنت مساوات وټاکئ

۱۷۹(۱۲٤): په کومو ټکو کې د لاندې مساواتو لپاره د تانجنت مساوات د ورکړ شوې کربښې سره غبرګ دي؟

۱۸۸(۱۳۳):د لاندې تام ریښتوني توابعو د انعطاف ټکي(اوړونټکي) او د نورمالي مساوات ولیکئ.

$a)\ f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}$ $\quad b)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 2x + 10$

۱۸۹(۱۳٤) د f_t تابع د انعطاف ټکي مساوات ولیکئ.

$$f_t(x) = \frac{4}{3}t^2x^3 + 3tx^2 + 3x \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹۲(۱۳۷): د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننیز بحث وکړئ او ګرافونه يې و کاږئ.

$a)\ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$

$c)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

په ټوټه ماتونو يا کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د یوه اصلي پولينوموېش $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښيزو(لايني) ضريبونو $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ ...\ (x - x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3}\ \ ...\ \ \frac{N}{x - x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کيږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت: په پورته ننوتنه کې و ښایاست، چې دا ټوټه کسرونه چېرته تعریف لري؟

-- د یوه په خوښه پولینوم کسر ټوټه ونه او د تعریف ساحې ورکړئ.

بېلګه: اصلي پولینوم کسر $\dfrac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې څېرو .

د پولینوم ویش(لنډ: پولینوموېش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بیایي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\dfrac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمیرنو قاعدې له مخې کیدی شي ورکړ شوی پولینوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه یې لاینیز (کرښیز-)ضریبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولینوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- -------

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضريبونو د پرتلي له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته بايد د مساوي توانونو ضريبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 بايد مساوي وي.

$$\begin{aligned} A+B+C &= 4 && \text{I} \\ A-3B-6C &= -1 && \text{II} \\ -2A-10B+5C &= 39 && \text{III} \end{aligned}$$

د فاکتور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر يوه جمع د III سره پورته درې مساوات سيستم و دوه مساواتسيستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$\begin{aligned} -8B &= -72 && \text{V} \\ -16B-7C &= -41 && \text{IV} \end{aligned}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B=-72 \Rightarrow B=3$

د $B=3$ په V کې اېښوونه: $-16.3-7C=-41 \Rightarrow C=-1$

د $B=3$ او $C=-1$ په I کې اېښوونه: $A+3-1=4 \Rightarrow A=2$

په ټوټه کوني فرمول کې اېښووني سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

ازمايښت:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)+3(x-5)(x+2)-1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)}=\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه:

د لاندې اصلي پولینومکسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کړئ.

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x+6}\ ,\ b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}\ ,\ c)\ \frac{4x+10+12}{x^2+6x+8}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاینیز(کرښیز) فاکتورونه لري.

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کرښیز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي، نو ددې کرښیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښیزو فاکتورونو ټوټه کسرونو په بلده بڼه ورکول کیږي.

بیلګه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښیزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لاربښودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډېبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-2A-3B+C=-6 \qquad \text{II}$$
$$A+2B-2C=2 \qquad \text{III}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-3A-4B=-10 \qquad \text{II}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دI ضرب له 4 سره او جمعه یې له IV سره : $A = 2$

د $A = 2$ ایښوونه په I کې: $2 + B = 3 \Rightarrow B = 1$

د $A = 2$ او $B = 1$ ایښونه په III کې: $2 + 2.2 - 2C = 2 \Rightarrow C = 1$

د ټوټه کوني فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$ $\quad b)\ \frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

$c)\ \frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$ $\quad d)\ -\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$

پ) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې پوره په کرښیزو فاکتورونو نه ټوټه کیږي.

بنسټ:

که د یوه اصلي پولینوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولینوم $P_n(x)$ نور په یوه حقیقی ضریب نه ټوټه کیدونکي ضریب ax^2+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کیدو کې دې د یو ټوټه کسر $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ په بڼه دې کینبول شي یا راوړل شئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

د پولینوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښیزو ضریبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پیدا کیږي.

بولینوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بیايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقیقي حل نه لري، نو د حقیقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولینوم کسر لاندې بڼه لري:

$$\frac{Ax}{x^2+2x+4}$$

د $\frac{c}{x+1}$ بڼې کسر سره یوځای مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بیایي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضریبونو A,B,C تاکنه د پرتله کولو له لارې:

$$A+C=5 \qquad I$$

$$A+B+2C=8 \qquad II$$

$$B+4C=9 \qquad III$$

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتوني یا متحولې لري:

$$A-2C=5 \qquad IV$$

$$A+C=5 \qquad I$$

مساوات III منفي مساوات II :

د C = 2 په I ائښوولو سره :

د C = 2 په III ایښوولو سره:

که دا د ټوټه کوني فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي کسري پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړی:

$$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$$

$$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x} \qquad d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج) نا اصلي پولينوم کسرونه:

که د یوه پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولينوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا د پولينومویش له لارې په ټولناطق کسر او یوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بیلګه:

کسري پولينوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولينومونو ټوټه کړئ .

د پولينوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولينومکسر مخ ته پروت دی.

پولينوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتې کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عملیه) مخ ته بیایو.مخرج په کرښیزو ضریبونو ټوټه کړی:

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ له پاره حل $x_1=-2$ او $x_2=4$ لرو.

نو $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

د ټوټه کسر ټوټه کوني لپاره ځای په ځاي کوو: $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$

د غزوني له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$
$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضريبونو د پرتله کووني په مرسته د A او B ټاكل:

$$A+B=4 \qquad \text{I}$$
$$2A-4B=4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا کول $6B=9 \Rightarrow B=\frac{3}{2}$

په II کې اينوول: $2A-4\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow A=\frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (بنتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندی بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

پوښتنې د لاندې پولينومکسرونو په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

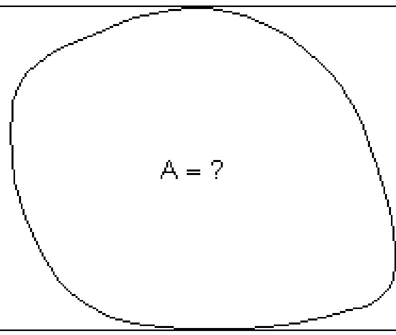
$a)\ \frac{3x^2+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $\qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $\qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنې لپاره پیل راوړنې

پخوانیو یونانیانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شمېرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شمیرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پیړۍپاي کې) د طبیعي علومو پوهانو د لایبنیڅ او نیوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.



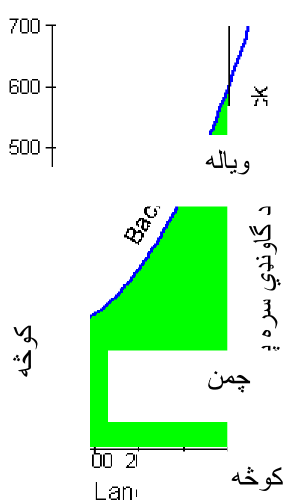
فعالیت:

- د پورته رابندې څېرې د سطحې د شمېرلو له پاره وړاندیزونه وکړی.
- ایا تاسو د داسې سطحې شمېرلو سره بلد یاست ؟
- ایا تاسو دې ته ورنږدې سطحې مساحت شمېرلی دی؟ او که هو نو هغه ولیکی.
- داپورته سطحه د وضعیه قیمت سیستم له لارې په څلورو نږدې برابرو برخو وویشئ او د انتیګرالونې په هکله یې فکر وکړئ.

بیلګه

دا څیره شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي څمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی.

ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي. د پلورونکی لپاره سطحه باید نږدې پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمیرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمپیل شو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره ټوټه(مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو.

$200\cdot 50=10000$

$206\cdot 50=10300$

$225\cdot 50=11250$

$256\cdot 50=12800$

$300\cdot 50=15000$

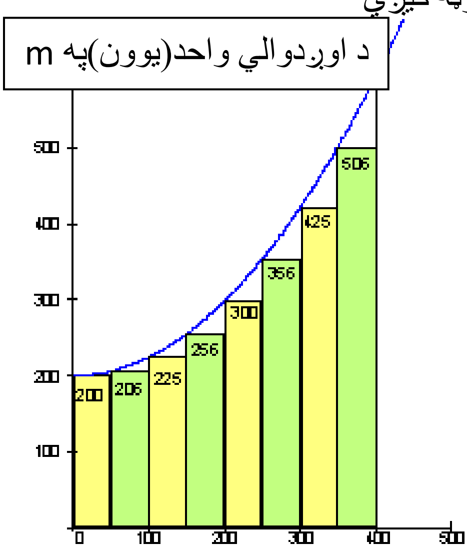
$256\cdot 50=12800$

$425\cdot 50=21250$

$506\cdot 50=25300$

$\underline{123700}$

ځمکه په لاندې ډول په اوږدو ټوټو(پټیو) ټوټه کیږي

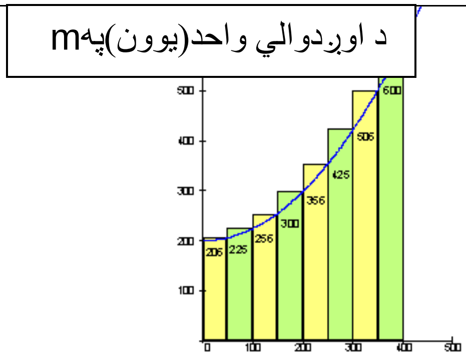


د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې ***123700 m²*** ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$206 \cdot 50 = 10300$

$225 \cdot 50 = 11250$

$256 \cdot 50 = 12800$

$300 \cdot 50 = 15000$

$356 \cdot 50 = 12800$

$425 \cdot 50 = 21250$

$506 \cdot 50 = 25300$

$600 \cdot 50 = 30000$

$\underline{143700}$

د د پلورونکي له پاره د تولې سطحې مساحت نژدې ***143700 m²*** دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعني د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700\ unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې رېښتوني ارزښت يې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بیلګه کې دا ډول شمېرنه **لاندنۍ** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمېرنه،، **پورتنۍ جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې رېښتوني ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې ربنتوني ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

پوښتنې

د $3x^2+1$ تابع ګراف وکاږئ.

د انټروال $[1,3]$ ترمنځ د تابع سطحه به نخښه کړئ.

د دې ورکړ شوې سطحې پورته جمعه جوړه کړئ

د دې ور کړ شوې سطحې کښته جمعه جوړه کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتيګرالشميرنه Integralcalculation

د سطحي تابع له پاره تر مخ راوړنه:
دا دانتيګرال هندسي مفهوم هم دئ.
په کارتيزي وضعيه قېمت سيستم کې د ګراف په سرچينه کې يوه کربښه رسموو.غواړو سطحه پيداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې پرته وي.

د ريمن (ټاکلی) انتلګرال

دلته دې يوه څېره راوړل (د يوه ډنډ او يا.....)

فعاليت:

- يوه په خوښه هندسي څيره وکاږئ، چې په ترتيب له درې، پنځو او اوو کربښو رابنده وي. د د ې څيرو سطحه په ورسره بلد ډول وشميرئ.
- په يوه د وضعيه قيمت سيستم کې يوه کږه(منحني) وکاږئ او وهڅيرئ، چې سطحه يې په ورنزدي ډول پيدا کړی چې د x محور او منحني ترمنځ پرته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: انتیګرال څه شی دی؟

آنتیګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو څوک یوې پردۍ ټولنې ته ورګډېږي یعنې ددې پردۍ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف:

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:

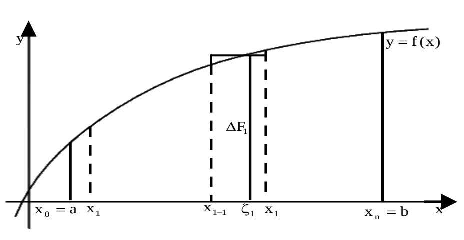
که یوه f تابع ولرو، نو دx مخور او تابع ترمنځ سطحې شمیرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو د aڅخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچوني یا اندازه کووني څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنیول د مشتق په څېر یا برعکس کارونه یا عملیه ده.

یو تابع y = f(x) لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو او ترمنځ هواره (سطحه) وشمیرو داسې چې f(x)>0) وي. (څیره ۱ . ۱)



(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اينټروال په n (نه اړينې) برابرو برخو انټروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} x_i < ... < x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اينټروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه $\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطيل سطحه (و لاړکونجيزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_l).\Delta x_i ;............................(4,1)$$

د ټولو پورته مستطيل ډوله کوچنيو سطحو د جمعې (زياتون) له لارې غوښتونکې، نږدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi) \Delta x_i ;..............................(4,2)$$

دا نزديوالی تر هغې ښه کيږي خومره چې د اينټروال [a , b] ويش نری شي يعني $\max \Delta x \to 0$، هرڅومره چې د زياتيدونکو شمير ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اينټروال [a , b]څنګه ويشل شوی او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اينټروال [a,b] کې اينتيګرالوړ دی. دا د بيلګې په توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی .

پيژند (تعريف ٤ . ١) : که ليميټ

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\max \Delta x \to 0),........(4,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کیدونکي لاندې(کښته)پوله او b د ایتیګرال کیدونکي پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرال کیدونکي اینتروال او f (x) (Integrand) (اینتیګرالیدونکی) او x د اینتیګرال کېدونکي متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

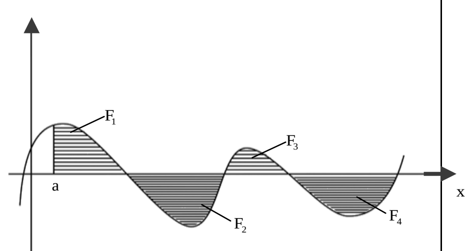
یادونه ۱ : د ایتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

موږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f(u)\,du$

یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) 0 <باوري نه وي . که 0 > f (x) وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري .

که د y = f (x) (کږه - لکه په)ش ٤ . ۲) کی - داینتیګرآلوني په اینتروال کی د x-محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري :

$F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$



د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ . ۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بایدc له اینتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، یعنې ټکي a,b او c په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چې تابع f (x) اینتیګرالوړ دی.

موږ دا لاندې تعریف(پیژند) لرو :

پیژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

د پیژند تعریف ٤ . ١ له مخی تل باور لري: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ګراف و کاږئ او د ګراف او x محور ترمنځ د سطحې مثبته او منفي لور په نخښه کړئ.

الف : $4x^3 + 5x^2 + x + 6$ ،

ب: $x^2-4x-+16$ ،

پ: $x^4 + 5x^2 - 2x - 7$

بنستیز- یا لومړنی تابع

$$F'(x) = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- په پورته مساوات کې به F (x) څنګه ولیکلای شو؟

- F (x) نسبت و f (x) ته څه بلل کیږي او په ځت، f (x) د F (x) څه بلل کئږي؟

په پورته دواړو پوښتنو کې فکر وکړي، چې پایلې یې دا لاندې دي:

ددې لپاره چې د مشتقنیولو او اینتیګرال نیولو ترمنځ اړیکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعریفوو:

پیژند (تعریف): تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چی F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x) بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

په ساده توګه لیدل کیږي چی د یوې f (x) تابع لپاره نه یوازې یو بنسټیز تابع F (x) موجود دی، د بیلګي په توګه $F_0(x)=x^2,\ F_1(x)=x^2+1,\ F_2(x)=x^2+2$ تابع، بلکي په عمومي ډول

F (x) = x² + C، چې دا ټول مساوي مشتقونه f (x) = 2x لري.

د پورته ښوونو پایله، چی څنګه سړی د یوه متمادي تابع f (x) لومړنیتابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اینتروال I کی متمادي تابع وي، نو د a ∈ I لپاره

$F_a(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ د f (x)، یوه لومړنیتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f (x) هره بله لومړنۍ(بنسټيزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x) = F_a(x) + C, \quad C \in R$$

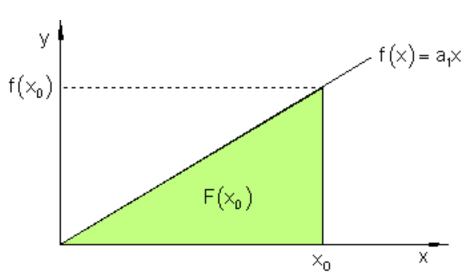
ځواب : ښايو چې Fa (x) دf (x) بنسټيز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښايو چې د Fa (x)لپاره د پورته پیژند شرایط باور لري. د Fa (x) مشتق د $x \in I$ او $x \neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

$$\begin{aligned} F_a'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t)dt \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi), \quad \xi \in [x, x+h] \end{aligned}$$

د ليميټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې يوه ξ شته دی)
(د متماديت له امله $(f(\xi) \to f(x))$ = f(x)

سطحه او لومړنی تابع:

سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:

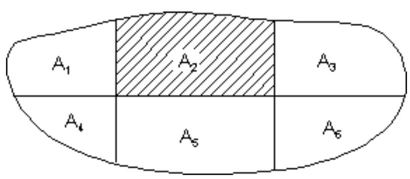
د تابع $f(x) = a_1 x$ ګراف په کارتيزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي. يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته	

(c) ketabton.com: The Digital Library

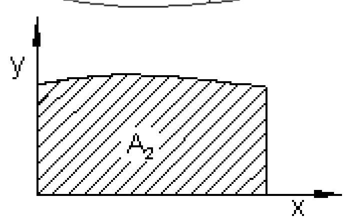
ساده پیدا کیږي: $A=\frac{g\cdot h}{2}$ زموږ د مسألي لپاره متحوله داسي تغیروو: $A\to F(x_0);\ g\to x_0;\ h\to f(x_0)=a_1x_0$	$F(x_0)=\frac{x_0\cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0)=a_1x_0$ سره په لاندي ډول دی: $F(x_0)=\frac{x_0\cdot a_1x_0}{2}=\frac{a_1}{2}x_0^2$

تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعیت) کي تشریح کوي یا ښايي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

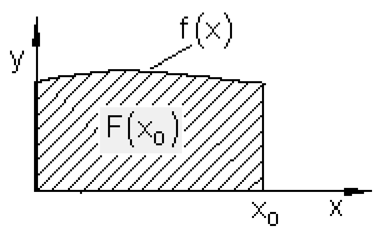
د سطحې پرابلم:



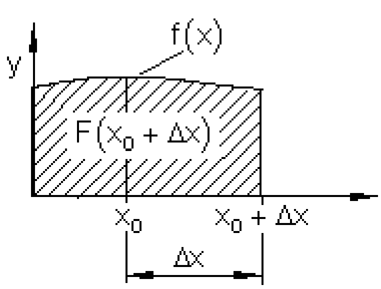
هره له کږوکرښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چي په هغې کي فقط یوه یوه کږه کرښه رامنځ ته کیږي.
نوري ټولي رابندوني سیده کرښیزي دي.
هره یوه د سطحې برخه(د بیلګې په توګه دلته $\mathbf{A_2}$) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کي د یوې سطحی په څېر انځور شي، چي د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.



که له کږوکرښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کیږي، چي ایا یو تابع شته چي د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظیم کړي، لکه په پیلبیلګه کې؟

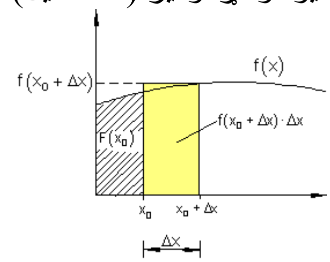


که داسي یو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چي د x_0 افقي محورارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$په سطحه باندې تنظیم کړای شي.

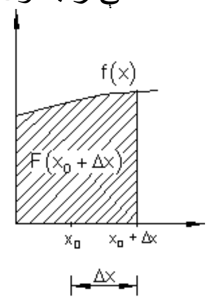


(c) ketabton.com: The Digital Library

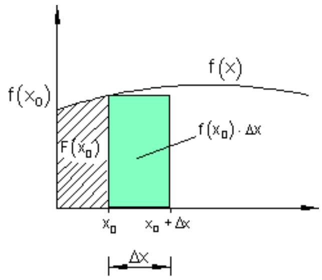
په یوه ولاړګوډیز (مستطیل) کې د سطحې رابندول:



د منحني لاندې په نخښنه شوې سطحه د ربښتوني سطحې څخه لویه ده



ریښتوني سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښنه شوې سطحه له ریښتوني سطحې څه کوچنۍ ده.

که د سطحې پټې (یا کوچني مستطیلونه)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه یې توپیر کمیږي.
دا اړودوالی د ریاضیاتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونویا نامساواتو ته راهځوي

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | F(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

لیمیټ یې نیسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$

$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$

$$f(x_0) = F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کړې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.

مونږ ليکو: $F'(x_0)=\dfrac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$ يا $\boxed{F'(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x)}$

که مونږ بريالي شو، داسې يو تابع F(x) پيداکړو چې مشتق يې د رابندې کړې تابع f(x) وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.

که مونږ يو تابع د لومړني تابع څخه رابيل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د يوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی. سړی کړی شي فورمال ووايي:

د يوې سطحې مساحت تابع، چې پيداکړو، دا معنا لري چې ورګډول يا انتېګرالول يې شمېرو.

د يوه ساده توان تابع په بېلګه د احساس له مخې يوه لار پيداکېدی شي، چې دا څنګه ايتېګرالوي.

توانتابع : $f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربيږي.

انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنځتابع په نوي اکسپوننت وېشل کيږي.

دا همدا اوس ازمايو:

توانتابع: $f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\dfrac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

تمرينونه:

– و ښايئ، چې د F او دG توابع د f تابع لومړنۍ تابع وې ده.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناټاکلی انتیګرال

$$\int f(x)\,dx$$

فعالیتونه:

-- په پورته ځیره کې $\int$ په څه مفهوم دی

-- په تیر ه برخه کې مو $F(x)$ د $f(x)$ څه بللی وو او اوس به $F(x)=\int f(x)\,dx$ د لومړنۍ تابع سره څه توپیر ولري؟

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې $f(x)$ تابع $F(x)$ لومړنی تابع، یعني $F(x)$ وپیژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د $f(x)$ د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دی).

موږ د $f(x)$ تابع د $F(x)$ لومړنی تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad\Leftrightarrow\quad dF(x)=f(x)dx \quad\Leftrightarrow\quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

موږ لومړنی توابع پلټو

بیلګه: لومړنی تابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې مشتق یې $f(x) = 2x$ دی. قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

موږ ازمایو: $F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه توابع په ثابت غړي کې يو له بل توپير لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله بايد دې خپلې لار ته تغير ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د لومړنيو توابعو سټ(ډېری): بېلګه ښايي، چې د تابع f(x) لپاره نه يواځې يو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې يواځې ثابت عدد کې يو له بل سره توپير لري، چې دا د f(x) د لومړنييو توابعو سټ بولو.

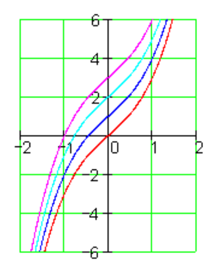
بېلګه: يو لومړنیتابع F(x) دې پيدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

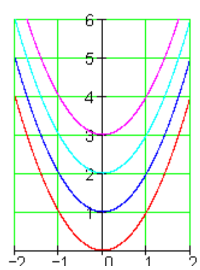
د ټولو لومړنيو توابعو ډېری دې د منحنيو ډلې په ځېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې يو له بل توپير لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$



$F(x) = x^2 + C$



تمرينونه:

د لاندې توابعو له پاره لومړني توابع پيدا کړئ او لاس ته راوړني يې د مشتق له لارې و ازمايئ.

$a)\ f(x) = x^2$ $b)\ f(x) = 2x^2$ $c)\ f(x) = x$

$d)\ f(x) = -2x$ $e)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $f)\ f(x) = -\frac{1}{4}x$

$g)\ f(x) = x^3$ $h)\ f(x) = 4x^3$ $i)\ f(x) = 2$

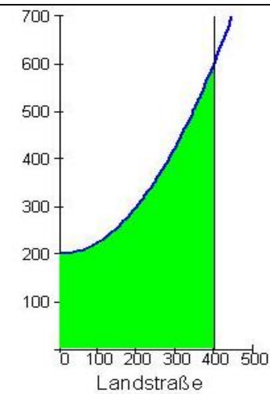
$j)\ f(x) = x + 1$ $k)\ f(x) = x^2 + x - 3$ $l)\ f(x) = x^n;\ n \in N$

$m)\ f(x) = x^2$ $n)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه

ټاکلی انتیګرال همغه د ریمن انتیګرال دی، چې یوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شمیري.



ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د پولي(حد) a تر پولي(حد) b پا د a او b حدونو ترمنځ یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

فعالیت:

اول: ووایئ چې په پورته انتیګرال کې $f(x)$ څه نومیږي؟

G دې په بند انتروال $a \le x \le b$ کې د $g(x)$ لومړنی انتیګرال وي، د $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ سره، نو

باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x)=\int_a^a f(t)dt = 0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف:

f په انتروال a ≤ x ≤ b کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b)-F(a).$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکي رامح ته کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2dx=\left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx=\int_2^4 x^{-2}dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4=\left[-\frac{1}{x}\right]_2^4=\frac{1}{4}$$

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx=\int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]=\frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3}-\sqrt{1^3}$$

$$=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)=2(\sqrt{3}-\frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b[f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx+$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالوني ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه :

د ټاکلي انتیګرال $\int_1^3 x^2dx$ ارزښت و ټاکی. د توان قانون له مخې لومړنی تابع

یعنې $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښايو:

$$\int_{1}^{3} x^2 dx = \left[\frac{x^2}{3}+C\right]_1^3 = F(3)-F(1) = \frac{3^3}{3}+C-\left(\frac{1^3}{3}+C\right) = \frac{27}{3}+C-\frac{1}{3}-C$$

$$\int_{1}^{3} x^2 dx = \frac{26}{3}$$

اساسات تکمیل کننده:

از د لیل F(b) – F(a) ثابت C انتگرال گرفتن از بین میرود. ازین بابت میتوانیم برای تعین ثابت انتیگرال بنویسیم C =0 .

مثال :

قیمت انتیگرال معین $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ را تعیین نمایید.

ثبوت: ما قرار زیل ثبوت میکنیم:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1-0 = 1$$

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

تمرینونه:

د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښتونه وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int_{0}^{3} 4dx$ $\quad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx$ $\quad c)\ \int_{1}^{e} \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_{1}^{e} (2+\frac{1}{x})dx$ $\quad e)\ \int_{-1}^{0} e^{x}dx$ $\quad f)\ \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx$

$i)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\quad j)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad k)\ \int_{-2}^{2} x^3dx$

$l)\ \int_{2}^{6} (1+x)dx$ $\quad m)\ \int_{1}^{2} (x^2-x^5)dx$ $\quad n)\ \int_{-2}^{0} \left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}\right)dx$

د ناټکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتي کي یو له بل توپیر لري.

فعالیت :

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ تر منځ توپیر باندې فکر وکړئ؟

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ پایله څه ده ؟

- دا توپیر یې د یوې بیلګې په بنسټ روښانه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

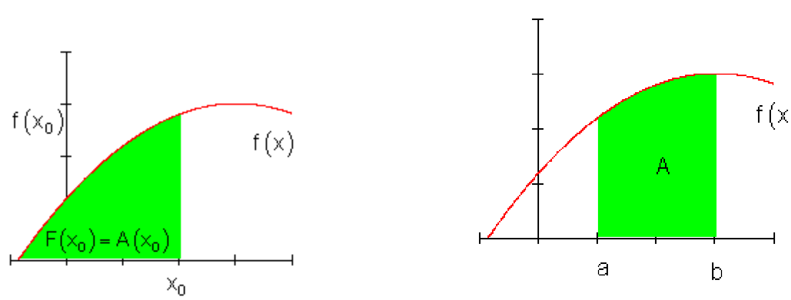
پیژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

د مشتق- او انتیګرالشمیرنې ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمیرنه د مشتقشمیرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

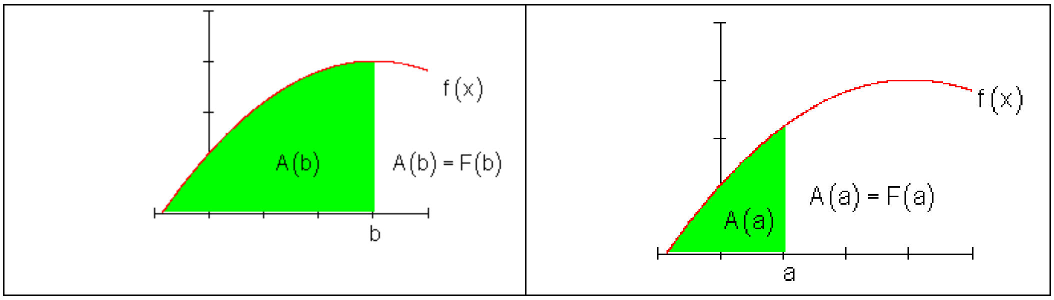
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.



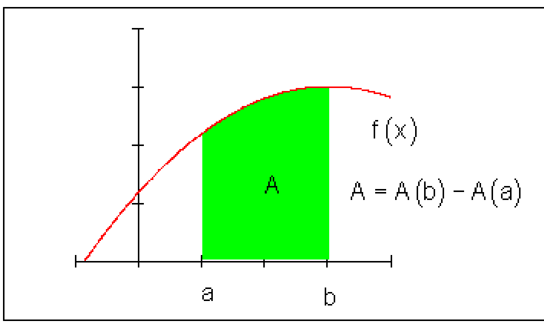
د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربښوده وي:
د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې f(x) تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

او يوې $F'(x)$ تابع، چې د$F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړيکې شته دی، يعني



د انتروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځاي (A(b)) b او سطحې په (A(a)) a ځاي کې .، يعني
په A= A(b) – A(a) همدې توګه
F= F(b) – F(a) لاس ته راځي.



په انتروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

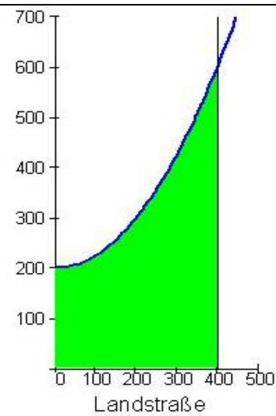
$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتيګرال ټاکلی انتيګرال هم بلل کيږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل بېلګه کې راوړی د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره بنوولې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A=\int_{0}^{400}\left(\frac{1}{400}x^{2}+200\right)dx=\frac{1}{1200}x^{3}+200\cdot x\Big|_{0}^{400}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^{3}+200\cdot 400\left[\frac{1}{1200}0^{3}+200\cdot 0\right]$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^{3}+200\cdot 400=133333.\bar{3}$$

تمرينونه: لاندې ټاکلي انتيګرالونه وشمېرى.

$$\int_{1}^{3}x\,dx\ ,\ \int_{1}^{3}(x^{2}-1)dx\ ,\ \int_{-2}^{2}4dx\ ,\ \int_{3}^{4}dx\ ,$$

$$\int_{0}^{4}(2x-5)dx\ ,\ \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}x^{2}-4\right)dx$$

د انتيګرالونې قاعدې

د ناټاکلي ايتيګرال انتيګرالونې قاعدې: په لاندې اينتيګريشن قاعدوکي د اينتيګريشن ثابته باندې صرف نظر کيږيدلته مساوات تر يوې ورجمع شوي ثابتې C پورې مساوات دى ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ يواځې يوه ثابته کيدى شي زياته يا کمه وي. دا قاعده کيدى شي چې په ټاکلې انتيګرال کې ښوولې جملې سره سم ټاکلي ايتيګرال ته نقل شي يعني په ټاکلي ايتيګرال استعمال شي . دا قاعدې کيدى شي چې د تيرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نيولو سره وښول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

د يوې ثابتي سره ضرب : که تابع (f (x په يوه اينتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a\cdot f\ (x)\,dx = a\int f\ (x)\,dx\ , \qquad a\in R$$

جمله: د جمعي (تفريق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په يوه ايتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بيلګې:

لاندې ايتيګرالونه کيدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعماليدو او ساده ځيره بدلون بيرته په بنستيزو اينتيګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int\frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$
$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int\frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int\frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int\frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

تمرينونه: د لاندې توابعو انتيګرال ونيسئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\quad \int \frac{2x^3-3x}{\sqrt{x}}dx \quad , \; b)\int_1^2 \frac{\sqrt{x}-1}{x}dx$$

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو:

د ټولیز اکسپوننشل تابع $\int e^x dx = e^x + C$ $(a\in IR^+, a\neq 1)$ لپاره لرو:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$$

بیلګه : دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3}dx$ غواړو پیداکړو

بڼه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+c = \frac{2^x}{8\cdot \ln 2}+c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2}+c$

تمرینونه:

لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int 3^{x+1}dx$ $b)\ \int 2^{-x}dx$ $c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int \frac{1}{a^x}dx$ $e)\ \int 2^x\cdot 3^x dx$ $f)\ \int \frac{2^x}{3^x}dx$

$i)\ \int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $j)\ \int \frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ $k)\ \int (1+2^x)dx$

د لوګاريتمي توابعو انتيګرالونه

بنسټ: د طبيعي لوګاريتم تابع $f(x)=\ln x(x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln xdx = x\cdot\ln x - x + c$ دی .

د ټوليز لوګاريتم تابع $f(x)=\log_a x\ ,a\in IR^+,a\neq 1)$

لپاره $\int \log_a xdx = \frac{x\cdot\ln x - x}{\ln a}+c$ دی.

بيلګه :

ناټاکلی انتيګرال $\int \ln 3xdx$ غواړو پيدا کړو:

بڼه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3xdx = \int(\ln 3+\ln x)dx = \int \ln 3xdx \div \int \ln xdx = x\cdot\ln 3 + x\cdot\ln x - x + c$$

$$\int \ln 3xdx = x\cdot(\ln 3+\ln x - 1)+c$$

تمرينونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لاندې ناټاكلي انتېګرالونه پيداكړئ

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $\qquad$ $b)\ \int \ln \sqrt{x} dx$

$c)\ \int \log \frac{x}{2} dx$ $\qquad$ $d)\ \int 3\log \frac{1}{x} dx$

بنسټیز اینتیګرالونه په یوه جدول کې

د اینتیګرالولو او مشتق نیول د اړیکو په بنسټ کیدی شي چې د بنسټیزو اینتیګرالونو یو جدول ترتیب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټیزو توابعوبرعکس څرګندیږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x)dx$	نیونه یا فرضیه
1	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	
6	$\sin x$	$-\cos x + C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$

بيلګې :

د جدول او تيرو جملو څخه په ګټه لاندې اينتيګرالونه په لاندې ساده ډول په بنسټيز توابعو بدليدلی شي .

a) $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C$,................................1,

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$, ...3,

c) $\int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}\, dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0)$, ...3,

d) $\int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} dx = \int \cos x \, dx = \sin x + C$, ...(4,21) 6,

e) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi)$, (4,11) 9,

f) $\int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi)$ (4,12) 8,

g) $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3} dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1,\ x \neq 0)$, $Nr.2$,

h) $\int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}$, ...5

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بدلون قانون Substitutionlaw

د ناټاکلې انتیګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

$$\int f(x)dx = \int (x^2+4x-5)^n dx$$

فعالیت:

- د $\int (x^2-x)dx$ انتیګرال ونیسی

- د $\int (x^2+5x)^3 dx$ انتیګرال نیولو کې فکر وکړئ او که وتونېدی انتیګرال یې ونیسی.

تراوسه پورې مو فقط انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه اینوول (لنډ: بدلون) د فرضیو لاندې چې u = g (x) متمادي او مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تیرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیګرالیدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور زنځیري تابع [f [g (x) وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سرې د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي یا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاي په ځاي کويک: $u = g(x)$ مشتق جوړوي په

همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

۲۲۶ د بدلون قانون

د بريالي انتيګراليدو وروسته بدلون بيرته راګرځول کيږي.

بيلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې اتنيګرال وشمپيرئ.

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بيلګه b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, مشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی ځنځيري تابع د لاينې دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لاينې تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تيرې جملی سره سم د اينتيګرال تر مخ (موخه کېن لور ده) ليکل کيږي.

بيلګه:

لرو $I = \sqrt{-3x+5}\;dx$

بدلون: $-3x+5=u$

(c) ketabton.com: The Digital Library

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b) \quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x-3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^{u} du = -\frac{1}{4} e^{u} + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$c) \quad I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندې بلګه:

بيلګه: عواړو د $f(x) = e^{x}$ مشتق بيدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پيدا کولي شو، يعنې لرو:

$$f(x) = e^{x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int e^{x} dx = e^{x} + C$$

ګورو، چې $F'(x) = e^{x} = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x) = e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

وي $F(x) = e^{2x} + C$ **دی، که** $F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتيګرال ونيسئ

۲۲۸ د بدلون قانون

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمايښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بېلګه :

وښايئ چې باور لري. $f(x)=(x+1)^{2} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (x+1)^{2}dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړئ

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^{2}\frac{du}{1}=\int u^{2}du=\frac{u^{3}}{3}+C$$

بيرته بدلون: $\frac{u^{3}}{3}+C=\frac{(x+1)^{3}}{3}+C$

نو: $\int(x)dx=\int(x+1)^{2}dx=\frac{(x+1)^{2}}{3}+C$

بېلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

و ښايي چې باور لري: $f(x)=(3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(3x+6)^3dx$
بدلون: $u(x)=3x+6=u$
جوړوو: $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=3 \quad \Rightarrow dx=\dfrac{du}{3}$
$\int f(x)dx=\int u^3\dfrac{du}{3}=\dfrac{1}{3}\int u^3du=\dfrac{u^4}{12}+C$
بېرته بدلون: $\dfrac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$
نو لرو: $\int(x)dx=\int(3x+6)^3dx=\dfrac{1}{12}(3x+6)^4+C$

تمرينونه: د $f(x)=x\cdot\ln(x^2)$ تابع انتيگرال وشميرئ.

د ټاکلو انتيگرالونو حل د بدلون له لارې

$$\int_3^8(x^2+4x-5)^n dx$$

فعاليت:

- د $\int_a^b(x^2-x)dx$ انتيگرال ونيسی
- د $\int_1^5(x^2+5x)^3dx$ انتيگرال نيولو کې فکر وکړئ او که وتوانېدی انتيگرال يې ونيسی.

ټاکلي انتيگرالونه هم د بدلون له لارې حل کيږي.

	بېلګه : **وښاياست:** $f(x)=e^{2x} \quad \Rightarrow F(x)=\int_{-1}^{1}e^{2x}dx$ د انتيگرال حل د بدلون له لارې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

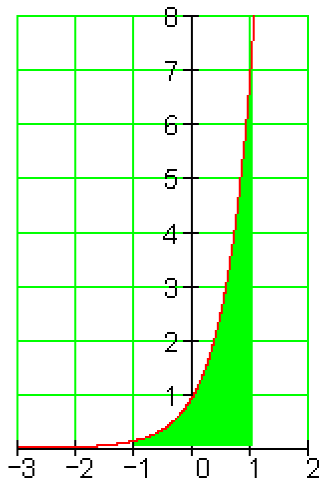
۳ – د پولو بدلون

- لاندې پوله $u(-1) = -2$
- پورته پوله

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$$

$f(x) := e^{2\cdot x}$



بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2)dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

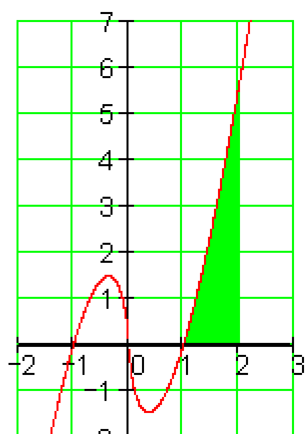
- لاندې پوله $u(1) = 1$
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتیګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}du = \int_1^4 \ln(u)du = \left[u \cdot \ln(u) - u\right]_1^4$$

$$= \left[4 \cdot \ln(4) - 4\right] - \left[1 \cdot \ln(1) - 1\right] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$



تمرین: لاندې انتیګرالونه وشمیرئ یا حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ - $\int \frac{3}{4x+1}\,dx$ ۲ - $\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx$

۳ - $\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx$ ۴ - $\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx$

۵ - $\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx$ ۶ - $\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx$

۷ - $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ ۸ – $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

۹ - $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ ۱۰ - $\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

ټوټه انتيګرالونه

$$f(x).g(x) = x.\ln(x^2)$$

ټوټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشميرنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميرلو لپاره امکان دی. دا کيدی شي د مشتقشميرنې د برعکسکونی په څير وګڼل شي.

فعاليت:

- څه بايد وشي، چې دا پورته په ننوتنه کې تابع انتيګرال نيونه شونې شي؟

___ ايا دا پورته ننوتنه کې راغلې بوښتنه دا تر اوسه ورسره بلدې لارې يعنې د (بنې) بدلون له لارې حل دی؟

د ټوټه انتيګرالونې له پاره لاندې قانون کاروي، چې د متمادي (نه پرېکيدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا قانون ټیک هلته ګټور دی، که د f مشتقکونی سره یو ساده تابع منح ته راځي.

پیل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنیونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیداکیږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیګرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلګه:

د بیلګې په توګه لاندی انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالبړ تابع $g'(x)$ او همداسی یو ساده مشتقوړ تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو او انتیګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x\cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بديل ليکبنه:
اوس دی u اوv په خوبنه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې u' او v' دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نيولو له پاره لومړيتوب لري، v تابع ده چې د انتيګرالونې له پاره لومړيتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b)\cdot V(b) - u(a)\cdot V(a) - \int_a^b u'(x)\cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= [u(x)\cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتيګرالونې لار(طريقه)
د ټوټه انتيګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معياري چلول شته.

بېلګه :
کله کله کېيدی شي ګټور وي، چی د مساوات ښۍ لور ته ټوټه انتيګرال د څو واره انتيګرالونې وروسته بيرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي يا پخواني کيڼ لور انتيګرال سره يوځای کولی شي.

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کيږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، **نو ترې لرو:**

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دواړو لورو ته وتون انتیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که دواړه لورې په 2 وویشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x).\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)+C$$

بیلګه ۲ :

د ځنو انتیګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) **له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیګرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بیلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کیدی شي دا بل ترم ،،له منځه یووړل شي،،.**

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کیږدو او د f(x) له پاره، **د انتیګرال لاندی ترم ، نو تری لاس ته راځي:**

$$\begin{aligned}\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x &= [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]\\ &= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]\\ &= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C\end{aligned}$$

بیلګه ۳ :

که تر انتیګرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسیږي(نه پایول کیږي)(نه ختمیږي) کېدی شي کله کله د ورزیاتونې له لارې(ناڅرګند شته) ضریب "1" ټوټه انتیګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کیږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

.

جمله :

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو:

$$\int x\cos(x)\,dx$$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv \\ &= uv - \int v\,du \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالوني د استعمال سره د انتیګرالونو لکه $\int x^3\sin(x)\,dx$

او $\int x^2 e^x\,dx$ کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x\cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بیلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$ نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x); du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x; dv = e^x\,dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه: دا لاندې انتیګرالونه وشمرئ.

اول: $I = \int x \cos x \, dx$ ، دویم: $I = \int x^2 \cdot e^x \, dx$

دریم: $I = \int \ln x \, dx$, څلورم $I = \int e^x \cdot \cos x \, dx$:

د ټوټه ـ ، پاراشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ تابع انتیګرال نیول

فعالیت:

-- د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول یعنې څه ؟

- د پورته تابع تعریف ورشو به نخښه کړئ.

د دې انتیګرال نیول تر واسه په ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}] dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرڅایونو 2- = x1 او 4- = x2 سره د کرښیزو توابعو په ضریبونو تجزیه کیږي:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)\,(x-4)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې توګه پیل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}] dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزیږي او لاس ته ترې راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{[(A+B)x\ -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}=\frac{[A(x-4)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]}=\frac{[Ax-4A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضريبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه يعنې کينې لور ته (A+B) افاده بايد پرته وي
او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځخه لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون يې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

ليکلی شو :

$$\int[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx=\int[\frac{-1}{(x-2)}]dx+\int[\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړني تابع جوړه کړئ: $f(x)=\frac{1}{x}\ \rightarrow\ F(x)=\ln x$. دا چې طبيعي لوګايتم فقط له مثبت اعدادو شميرل کيږي، نو يواځې ارزښتونه نيسو.

$$\int[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = -1\ln|x-2| +8\ln|x-4| +c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع بايد لومړی په تول راشنل تابع او اصلي مات راشنل تابع توټه شي. دا د توټه کسرونو توټه کووني له لارې کيږي يا صورت نيسي.

بيلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx$$

په مخرجکې مربع تابع په صفرځايونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کې په کښيزو فاکتورونو تحزيه کيږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بيا يې ضربوو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزيږي او بيا سره ضربيږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضريبونو پرتلې کوني له امله، چې د x ترمخه يعني کيڼ لور ته له (A+B) افادې څخه بايد اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او يا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګورئ) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسې يې حل کړئ:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

<u>B=-4.8</u>

<u>A= (-5+4.8)= -0.2</u>

نو ليکلی شو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \int [\frac{-0.2}{(x-2)}]dx + \int [\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړئ :

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$$

دا چې طبيعي لوګاريتم فقط د طبيعي اعدادو شميرل کيدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = -0.2\ln|x-2| - 4.8\ln|x+3| + C$$

تمرینونه :

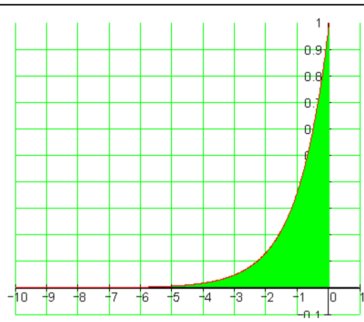
لاندې انتیګرالونه د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له طریقې وشمېرئ

$$a)\ \int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} \qquad b)\ \int \frac{x-2}{x^2-6x+13} \qquad c)\ \int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2}$$

ناپاي انتیګرال

تعریف : که په یوه ټاکلي انتیګرال کې لږ تر لږه یو حد د مثبت یا منفي ناپاي لور ته لاړشي یا د انتیګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتیګرال څخه غږیږو. په یوه مناسب ډول ناپای انتیګرال د عادي انتګیګرال د حد په څیر تعرفیږي. په دې توګه په زړه پورې پوهیدنې لاس ته راځي د بیلګې په توګه، چې څنګه د منفي توان د پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسیدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2 \text{ او } \int_1^{\infty} x^{-2}dx = 1$$

	**هم او د دې معکوس انتیګارلونه** $\int_1^{\infty} x^{-1}dx$ **او** $\int_0^1 x^{-1}dx$ **ناپاي ته ځي یا له ټولو حدونو اوړي یعنې د ناپای په لور ځي..**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = e^x$ ګراف او x-محور ترمنځ دې په انتروال $(-\infty ; 0]$ کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعنې

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\, dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسې کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتېګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:
لومړی د یوه پای انتروال $[a ; b]$ له پاره انتیګرال $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ شمېرو، بیا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسې $b \to -\infty$ یا $b \to \infty$ له پاره پولې جوړوو.
فورمال دا په لاندې ډول بریښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{x} f(x)\, dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)\, dx$$

زموږ د سطحې شمیرلو له پاره دا په لاندې ډول بریښي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بيلګه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\,u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^0 - e^{-b}\right]$$

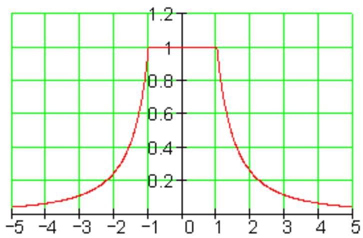
$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

بيلګه:

د يوه يوځاي ايښول شوې يا يو ځاي شوې تابع بيلګه لرو:

د $x<-1$ لپاراه د $-1\le x\ 1$ لپاره د $x>1$ لپاره	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انتیګرال په برخو وېشنه یا ټوټه کونه:
لاندې د انتیګرالونو تمعه دي و شمیرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

لومړنی اند یا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلایلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتیګرال باید فقط یوځل وشمیرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1] - [-1] = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{b} = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0 - (-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1 + 2 + 1 = \underline{\underline{4}}$$

تمرینونه:

۱ -- د $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ تابع انتیګرال وشمیرئ، که د ناپاي په لور لاړشي.

۲ – و خېرئ چې ایا لاندې ناتاکلي انتیګرالونه پوله ارزښت لري؟

a) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$

b) $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$

c) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+2)^3}\,dx$

۳ – د کومو توانونو p لپاره دا نا ټاکلی انتیګرال $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ پوله ارزښت لري.

٤ – لاندې انتیګرالونه د یوه انتیګرال پولې لپاره تعریف نه دي، و خېرئ، چې ایا دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی انتیگرال په دې انتروال کې پوله ارزښت لري.

a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$, $I = [0;1]$ b) $f(x) = \ln x$, $I = [0;1]$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, $I = [1;2]$ d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $I = [-1;1]$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-8}$, $I = [0;2]$ f) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^x}$, $I = [0;1]$

ټولګه

د انتيگرال هندسي تعريف

لوريزه سطحه-د انتيگرال تعريف:كه يوه f تابع ولرو، نو دx مخور او تابع ترمنځ سطحي شمېرل د انتيگرال له لارې كيږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحليلي تعريف:

تعريف: د f يوه تابع ورکړ شوي، چې په يوه انتروال [a,b] باندې تعريف دی، نو د aڅخه تر b پورې د تابع د انتيگرال څخه د x په محور د f د گراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ يوه يوه لوريزه سطحه پوهيږو.

پيژند (تعريف) ٤ . ١ : ليميټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\max\Delta x \to 0),\dots\dots\dots(4,3)$$

که په اينتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اينتيگرال بولو، يا F- Riemann (د ريمن سطحه). دلته a د اينتيگراله ونې لاندې(کښته)پوله او b د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایتیګرالوني پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرالوني اینټروال او(Integrand) (x) fاینتیګرالپدونکی) او xد اینتیګرالوني (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پیژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پیژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنستیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

تاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د تاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پو هیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

تعریف:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f په انټروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتې سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینټروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په یوه ایټروال کی نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینبوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضربونو انتيګرالونه
که د دوه توابعو د ضرب انتيګرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمیرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = ?$$

د ښېرکي تمرینونه:

۱ - لاندې نااصلي پولينومونه دې د يوه تول ګويا عدد پولينومونو او يوه اصلي پولينوم د جمعې په ښېر وليکل شي.

$a)\ \dfrac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5}$ $\quad b)\ \dfrac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$

$c)\ \dfrac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1}$ $\quad d)\ \dfrac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$

$e)\ \dfrac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2}$ $\quad f)\ \dfrac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$

۲ - لاندر پولينومونه دد جمعې په ځېر وليکئ

$a)\ \dfrac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6}$ $\quad b)\ \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$

$c)\ \dfrac{4x+10}{x^2+6x+8}$ $\quad d)\ \dfrac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$

$e)\ \dfrac{4x^2+6x-20}{x^3-4x}$ $\quad f)\ \dfrac{14}{x^2+20x+51}$

۳ – د لاندې اصلي پولينومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8} \qquad b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$$

$$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1} \qquad d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$$

٤ ـ د لاندې اصلي پولينومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$$a)\ \frac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$$

$$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x} \qquad d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

٥ ـ د لاندې پولينوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ړرکړئ.

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8} \qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$$

$$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1} \qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$$

٦ ــ و ښايئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$$a)\ f(x)=2x^2+4x-7 \quad , \quad f(x)=4x+4$$

$$b)\ F(x)=(x^2-x)^3 \quad , \quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$$

$$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$$

$$e)\ F(x)=\frac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\frac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ - وښایئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتیګرالونه پیداکړئ او تیکوالی یې و ازمایی.

$a)\ \int x^3dx \quad b)\ \int 7dx \quad c)\ \int xdx \quad d)\ \int (1-x^2)dx$

$e)\ \int (x+\frac{1}{x})dx \quad f)\ \int (e^x+\cos x)dx \quad g)\ \int \frac{1}{\sin^2 x}dx \quad h)\ \int \frac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx \quad k)\ \int (2+e^x)dx \quad l)\ \int (1+\ln x)dx \quad m)\ \int (\sqrt{x}+\sin)\,dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx \quad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \quad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx \quad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx \quad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx \quad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx \quad i)\ \int_{-2}^2 x^3dx$

$j)\ \int_2^6 (1+x)dx \quad k)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx \quad l)\ 0\int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3})dx$

۱٦ = د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمیرئ او ارزښتونه پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und -\int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \quad \wedge \quad -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0}\sin x dx \quad \wedge \quad -\int_{-\pi}^{0}\sin x dx$$

---

۱۷ – هر دوه انتیګرالونه د یوه انتیګرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi}\cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi}\cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3}3x^{2}dx + \int_{5}^{3}3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$$

- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2} e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8}\sqrt{1+x}\,dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5} 2^{4-x}dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi}\sin^{2} x dx$$

۱۹ – د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتیګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x} 5t^{4}dt \ , \quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x} e^{t}dt \ , \quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتیګراند توابع ته د انتیګرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2} \ , \ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x} \ , \ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2} x} \ , \ a=0 \qquad d)\ f(x)=2 \ , \ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتیګرال په استعمال سره لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx,\quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx,\quad f)\ \int(\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx,\quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx,\quad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx,\quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx,\quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\quad ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}},\quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt,\quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$

۲۲ - د بیرته په بنسټیز اینتیګرال بدلون وروسته یي اینتیګرال ونیسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx,\quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx,\quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx,\quad e)\ \int (-2-2\tan^2 x)dx,\quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx,\quad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx,\quad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi \sin x\ dx,\quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2},\quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\,dx,\quad h)\ \int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx,\quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du,\quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}dx,\quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې يي اینتیګرال وشميري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx,\quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\quad e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\quad f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int \frac{3xdx}{-x^2+1},\quad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

$$a)\ \int \frac{dx}{1+4x^2},\quad b)\ \int \frac{dx}{2+4x^2},\quad c)\ \int \frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\quad e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\quad f)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int \frac{dx}{x^2-10x+34},\quad h)\ \int \frac{dx}{3x^2-6x+30},\quad i)\ \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٥- د تر زيرنيوني فورمبدلون وروسته او په بنستيز اينتيګرال 10 او 11 د بدلون له لارې يي اينتيګرال وشيمرئ

۲٦- لاندې ټاکلی اينتيګرالونه وشميري:

$$a)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3},\quad b)\ \int_{-1}^{0} e^{3x}dx,\quad c)\ \int_{0}^{2} 2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\quad e)\ \int_{e}^{e^x} \frac{1}{x}\ln\times dx,\quad f)\ \int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\ dx,\quad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2},\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې ټوټه اينتيګرالونه اينتيګرال کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \int 0{,}2x\cdot\sin x\ dx,\qquad b)\ \int 4x^{3}\cdot\ln x\ dx,\qquad c)\ \int\cos^{2}x\ dx$$
$$d)\ \int\cos x\cdot\sin x\ dx\qquad e)\ \int x^{2}\cdot\sin x\ dx\qquad f)\ \int x\cdot(\cos x+1)\ dx$$
$$g)\ \int x^{3}\cdot e^{x}\ dx,\qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x\ dx,$$

د اینتیګرال شمیرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په ځلورم څپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د
سطحې مساحتA ښايي ، چې له منحني y=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي یو چې y=f(x) د اینتیګرال اینتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

فعالیت:
--د یوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.
- دا هم په پام کې د شمرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابه کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.
- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.
- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.
دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

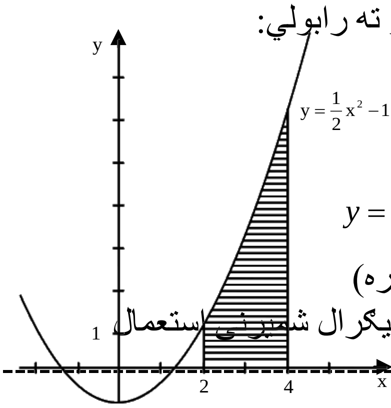


Bild 21,3

بېلګه ۵ . ۱ :
د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

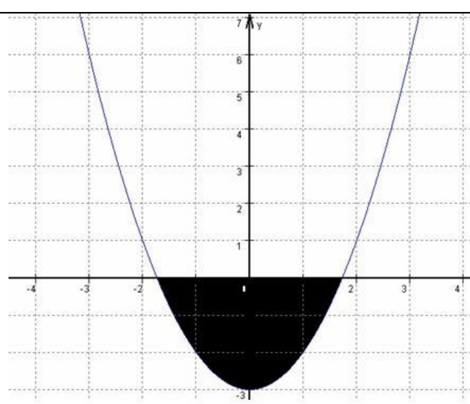
ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ ځېره)

$$A=\int_2^4(\frac{1}{2}x^2-1)dx=(\frac{1}{6}x^3-x)\Big|_2^4$$

$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

	بdلګه ۵ . ۲ : د f(x)=x²-3 ګراف د x محور سره یوه سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تګلار:	

۱ - د دي لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دي لپاره چې د انتيګرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

---

۳ – اوس د سطحي د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتيګرال ليکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پوري انتيګرال شمېرو او نتيجه يې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بیلګه ۵ ، ۲:

د سطحي مساحت د $x_2 = 2$, $x_1 = -1$, $y = 0$, $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ترمنځ دی: (لاندي ځېره)

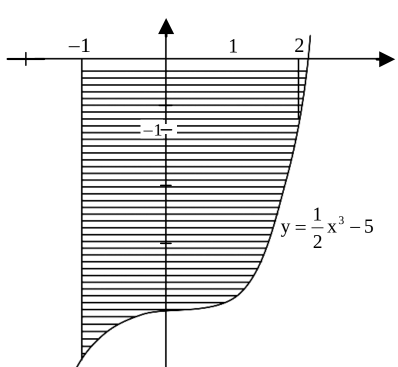
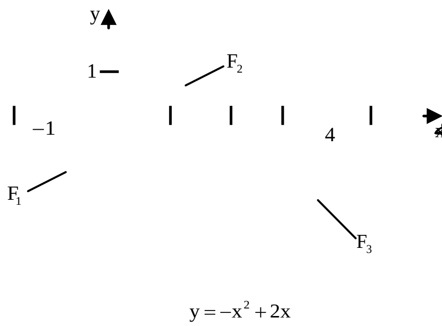


Bild 21,4

$$A = \left|\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx\right|$$
$$= -\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx$$
$$= (-\frac{1}{8}x^4 + 5x)\Big|_{-1}^{2}$$
$$= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8}$$

بیلګه ۵ . ۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندې پولو x_1=-1 تر $x_2=4$ اودمنحنيy=-x²+2xاوy=0 ترمنځدx- محور پورته او کښته پرته سطحه (په مخامخ څېره کې نښانه شوې ده) دې وشميرل شي

حل : د تابع y=-x²+2x, دx1=0 صفرځايونو x_1=0 او x_2=2 تر منځ پرته

غوښتونکي سطحه دx-محور پورته، نوره کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A = -F_1 + F_2 - F_3$$
$$= \int_{-1}^{0} (-x^2 + 2x)dx + \int_{0}^{2} (-x^2 + 2x)dx - \int_{2}^{4} (-x^2 + 2x)dx$$
$$= -\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{2}^{4} = \frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x = -1$ تر $x = 4$ او د کږې $y = -x^2 + 2x$

او $y = 0$ ترمنځ (د $x -$ محور پورته او کښته)

تمرينونه

: - په ورکړ شوي انتروال کې د گراف او x محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

$a)\ f(x) = x - 2 \quad , \quad x \in [-2;3]$

$b)\ f(x) = x^2 - x - x \quad , \quad x \in [1;5]$

$c)\ f(x) = x^2 - 8x + 12 \quad , \quad x \in [0;8]$

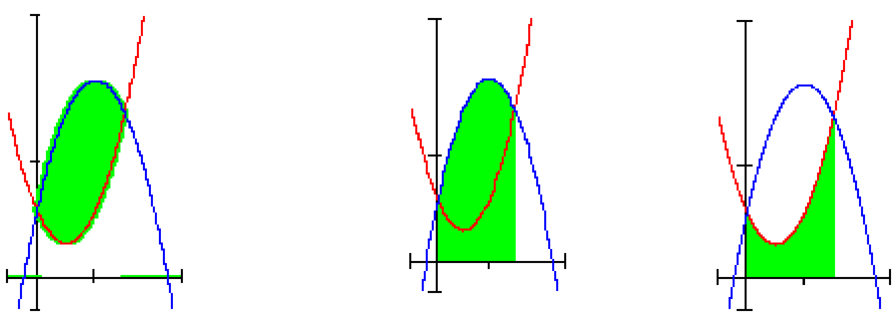
له دوه گرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شميرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمیرو؟

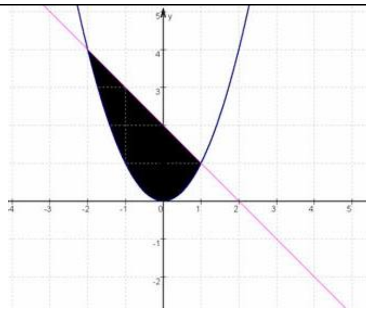
په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A $\qquad$ A_1 $\qquad$ A_2

$$A = A_1 - A_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۵ . ۵ : د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحي مساحت غواړو وشمېرو: د تګلارې لار: دلته هم یو شکل یا ګراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.	

---

۲ - د دې لپاره چې انتیګرال وشمېرو، د ګرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$$x^2 = -x+2$$

$$x^2+x-2= 0$$

P;q - فرمول

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توګه لیدل کیږي. $\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

پس باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2 dx =$$

$$-1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$

$$=-1,5-6++=-4.5$$

$$A=4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د $a<x<b$ سره $f(x)>g(x)$ وي، دا په دې معنا چې د f ګراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو ګرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره باورور لري.

$$A=\int_{a}^{b} (f(x)-g(x))\,dx$$

بېلګه ۵ . ٦ :

د توابعو $f(x) = x^2 -2x +2$ او $g(x) = -x^2+4x +2$ ګرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیداکړو.
د دواړو ګرافونو د x–ارزښتونو غوښتکي(د تقاطع ټکي) د اینتیګرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x =0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 =0$ او $x_2 =3$ د اینتېکرال لیمیټونه یا پولې دي.

د اینتګرال جوړونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2-2x+2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

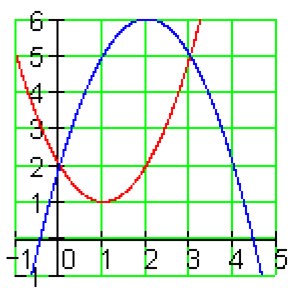
$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2+4x+2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$

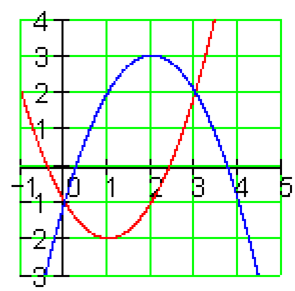
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنخښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** -محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ ځیږو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په درې واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمېرو.





که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتیګرال حدونه بې تغیره پاتیږي.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای په ځای کونه:

$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کيږي:

$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

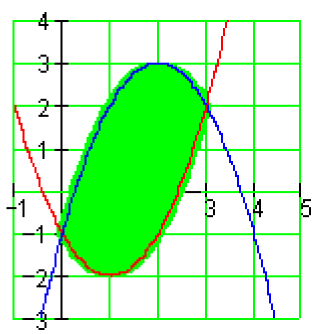
دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزيکي سطحه بنايي، بايد لاس ته راوړنه يو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=\left|18-27\right|=\left|-9\right|=\underline{\underline{9}}$$

د دې متود تولیزه ونه(عموميت) :

د دوه گرافونو ترمنځ سطحه:



که یوه سطحه د يوې پورته او يوې کښته منحني ښخه رابنده وي، چې تابع f(x) او تابع g(x) پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمېرل کيږي.

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

د انتيګرالوني حدونه a او b د x – محور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړو ګرافونو د وضعیه قیمتونو غوښتکي دي،

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له$x=a$ تر $x=b$ پورې‌او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

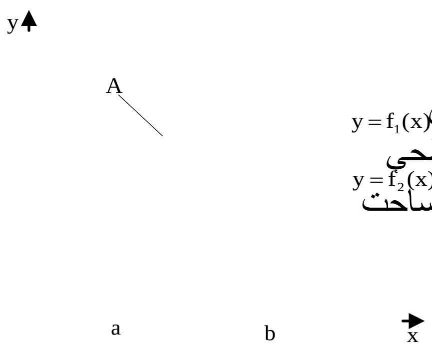


Bild 21,6

اینتیګرالوړاو $f_1(x)<f_2(x)$

په$[a,b]$ اینتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس

ته راوړل کیږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې

مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحت

کم کړئ.

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك چی $f_1(x)$او $f_2(x)$په اینتروال $[a,b]$ کومه یوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

-- ----

بیلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1)$

حل : د ایتیګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوښتکي(د تقاطع ټکي) دي

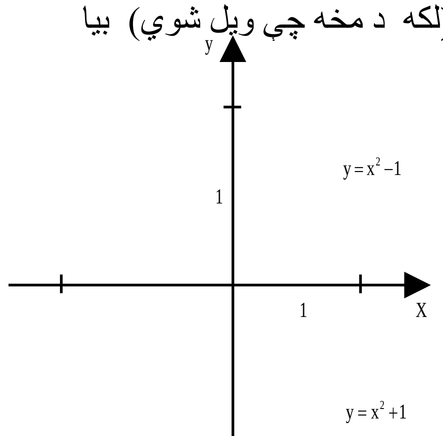
$x^2-1=-x^2+1$

$2x^2=2$

$x^2=1$ $x_1-a=1\,,\ x_2=b=-1$

د اینتیګرلولو په اینتروال $[1\ ,\ 1\ -]$ کی لرو$-x^2+1>x^2-1$

(که چیرې په اینتروال $[a,b]$ او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کې ونه نیول شي، نو د څرګند اینتیګرال به منفی شي او سړی(لکه د مخه چې ویل شوي) بیا داینتیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-1}^{1}\left[-x^{2}+1-(x^{2}-1)\right]dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-2x^{2}+2)\,dx$$
$$=(-\frac{2}{3}x^{3}+2x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

بیلګه ۵ . ۸ :
د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ
سطحه شمیرل کیږي.
y=(x-1)²,y=-4x+4,y=4

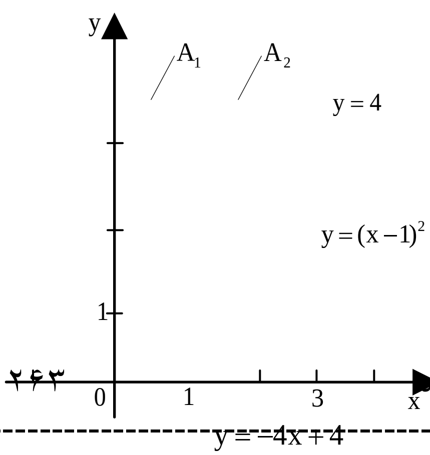


Bild 21.8

حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه
سطحوA1 او A2 له یوځاي کیدو څخه لاس
ته راځي.
A1د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ
پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي
د دوه کرښو څخه رابند

کواور ینات(x –محور) غوښتکی دی،
د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4=-4x+4,\ \ x_1=0$ په همدې ډول د

بني غوښتکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{2}+x-2}{x+1}=\frac{1^{2}+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{2,3} = -1 \pm 2,\ x_3 = 1.$$

ګورو چی$A2$د $y=-4$ او$y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)$x1=1$ او د لومړي
وضعیه قیمت د بني غوڅتکي د $y=4$ او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 [4-(-4x+4)]dx + \int_0^1 \left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 4x\,dx + \int_0^1 (-x^2+2x+3)\,dx = 2x^2\Big|_0^1 + (1/3x^3 + x + 3x)\Big|_4^3 = 7\frac{1}{3}$$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ترمنځ سطحې و شمېرئ

----

1) $f(x) = x^2 - x - 6$; $g(x) = 4x - 10$ 2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$; $g(x) = 3x$

3) $f(x) = 0.75(x^2 - 5x + 4)$; $g(x) = 0.75x + 3$, 4) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}$; $g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$

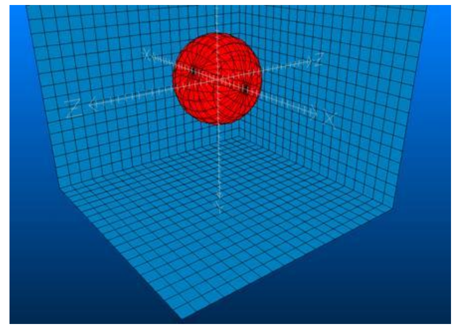
5) $f(x) = (x-2)^2 - 4$; $g(x) = x - 1$ 6) $f(x) = x^2 - 4x + 1$; $g(x) = -x^2 + 2x + 1$

7) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ 8) $f(x) = x^2 + 3x$; $g(x) = 0.5x^2$

9) $f(x)0.5x^2 - 2x - 1$; $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$ 10) $f(x) = -0.5x^2 + 2$; $g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخيدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعاليت:

- په ورسره بلده توګه د مستطيل حجم وليکئ.

- د کرې، استواني او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و ليکئ.

يادونه: دا دي تل په پام کې ونيول شي: که د انتيګرال شمېرني له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره ليکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخيدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په يوه څرخېدونکي محور باندې د يوې کرښې يا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه يا منحني په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اويا زيات له زياته يې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به يې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور څرخيدنه(څرخون)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د یوه څرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم(ډکی)

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انټروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انټروال دf تابع ګراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

څرخېدونکي تنونه: ۲۶۶

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \ dy$$

که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

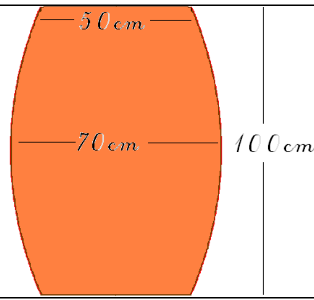
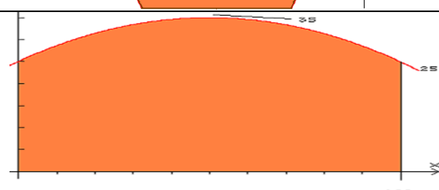
$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| \, dx$$

د 'f مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ(min/max) توابع یو مثبت انتیګرال تظمینوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2 \, dx$$

 	د یوه مرتبان حجم: د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جګوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.
 	که مرتبان په 90° درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژی تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.

حل: د پارابول د تابع لیکبنه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

خرخېدونکي تنونه:

تولیز باور لري:

$f(x) - a \cdot (x-5)^2 + 3.5$ (dm ارزښت په دیسیمتر)

په څرګند دول -5 د رآس راکښنه د +x په لور ورکوي او 3,5 د +y په لور. د غزوني ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې امله a دی: $\frac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کیږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال یا عمودې فورم بدلوو:
$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

نو دی $f(x)=0.0016x^2-0.032x^3-0.04x^2+2x+6.25$

لومړنی تابع $f(x)=\frac{0.0016x^2}{5}\cdot x^5-\frac{0.032x^3}{4}\cdot\frac{-0.04x^2}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x$

د حجم شمیرلو لپاره ټاکلی انتیګرال دی؛

$$\pi\cdot\int_0^{10}(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^{10}(-0.0016x^2-0.032x^3-2x+6.25)\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{0.0016}{5}\cdot10^5-\frac{0.032}{4}\cdot x^4-\frac{0.04}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x\right]_0^{10}$$
$$=\pi\left[32-80-13\frac{1}{3}+100+62.5\right]_0^{10}$$
$$=\pi\cdot101.167$$

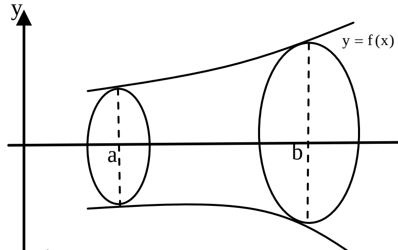
د حجم واحدونه (یوونونه یا یووالي)

دا چې موږ له پیله په دیڅیمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په لیتر شمېرل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$= 317.824\ liter$

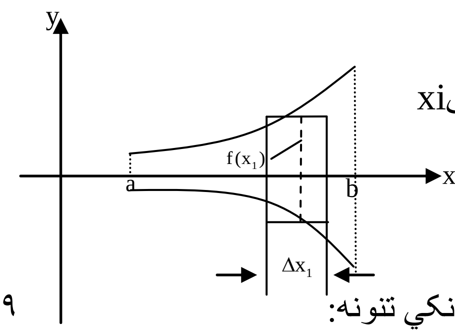
د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ
سطحه چې دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹).
دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې راغلي
دڅرخيدونکي بدن ډکی(حجم) دی.
لاندېجمله باوري ده



جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکی(حجم):
په اينتروال[a,b]کي دی y=f(x) متمادي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چې د سطحو y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپيداکيږي داسی دئ:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعې له
لارې چې وړانګه يې(f(xi، جګوالی يېxi
د i=1,2,3,...n لپاره لري.
(ش: 5. 10) دi-مې توټې
(سليندر ډکی(حجم) دی.



څرخېدونکي تنونه:

$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سليندرونو يا توتو زياتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اينتيګرال د تعريف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$ حجم (ډکی) راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

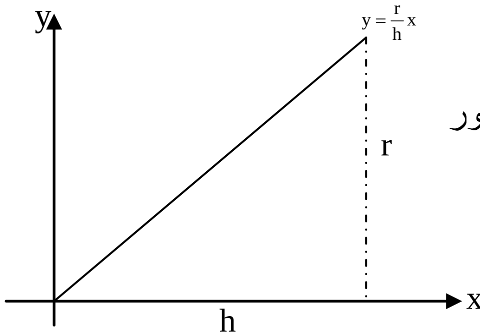
بيلګه ۵ . ۹ :) دمخروط يا کيګل ډکی

(حجم) د $y=\frac{r}{h}x$ کرښي (د سرچيني

تيره کرښه د $\frac{r}{h}$ جګوالي سره) او دx- محور

(y =0) د حدونو x=0 تر x=h

پورې(ش . ۱۱)



$$V=\pi\cdot\int_0^h\left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

دا له بنستيزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتيجه ده.

بيلګه ۵ . ۱۰:

د $y=\sqrt{2x},\ y=0,\ x=0,\ x=3$

ترمنځ د x-محور باندې ځرخېدلو جوړ(توليد) شوی جسم ځرخېدلی پارابولوييد دی (ځ ۵ ېز ۱۲)

$$V=\pi\cdot\int_0^3\left[\sqrt{2x}\right]^2 dx$$

$$=2\pi\cdot\int_0^3 x dx$$

$$=2\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^3=9\pi.$$

y

$y=\sqrt{2x}$

1

0 1 3 x

د ارښيمد س جمله Archimedischer Satz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوانه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

د 1886 زکې یوه درسي کتاب څخه

Figur 120.

Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: $\text{„} : \text{„} : \text{„} = 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

$\text{„} : \text{„} : \text{„} = 6 : 4 : 2$

$\text{„} : \text{„} : \text{„} = 3 : 2 : 1$

Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

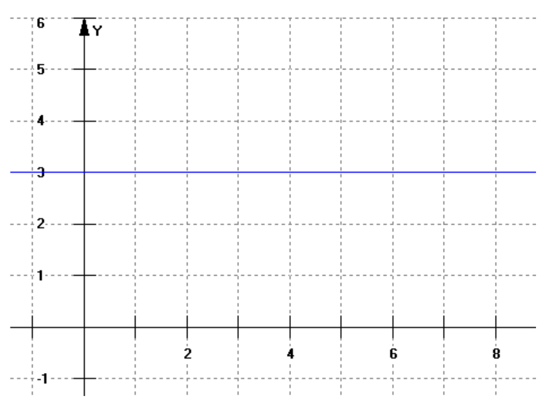
د پورته الماني پښتو:ارښیمېډس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب یې وموند، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښیمېډس جلې په نامه نومول شوې.

د ځرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بیلګه ٥ . ١١:

ځرخېدونکي تنونه: ۲۷۱

استوانه(توته):



(c) ketabton.com: The Digital Library

استوانه د x په محور د$f(x) = c$ یوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.

د یوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په $[0;5]$ انتروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو ، چې د هغې لارې د انتیګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو. د سطحې مساحت د لاندې انتیګرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\,dx$$

که د دې ناپاې ډېرو مستطیلونو(د f(x) د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغېلېدونکې پنډوالي dx سره) انتیګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx$$

 څرخېدونکي تنونه:

دا په دې معنا چې دا انتیګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx$$

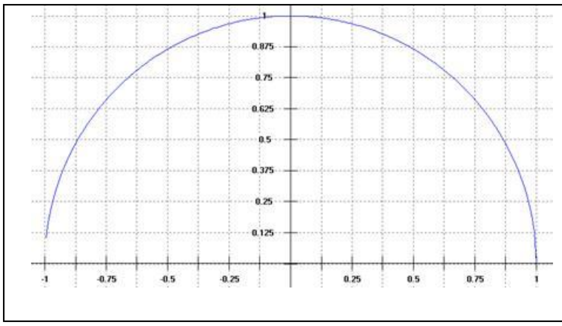
د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

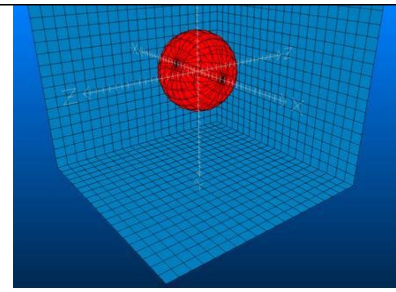
$$\pi \int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx = \pi \int_0^5 \left[9(x)\right]_0^5 = \pi \int_0^5 \left[45-0\right]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کره (غونډاری یا غونډوسکه):





فعالیت:

- د کري حجم بې له انتیګراله ولیکئ.

- د توتي حجم ولیکئ

- د مخروط حجم ولیکئ.

ځرخېدونکي تنونه: ٢٧٣

-دا درېواړه سره پرتله کړئ.

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع ځرخېدني ځخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتني شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوځوونکي تابع یې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي ځخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

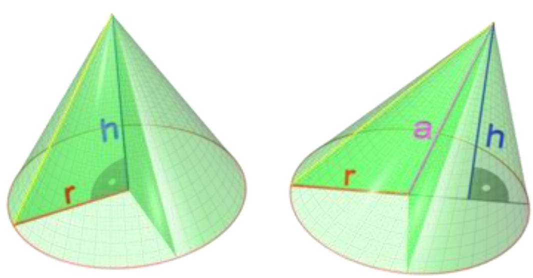
(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع ځرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، يعني په انټروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)

دا هم ممکن ده، چې يو مخروط د يوه منظمn زاويو (اړخيزې(کونجيز) څخه رابندې بنسټيزې سطحې(د n لپاره چې ناپايې ته ځي) اهرام ته ور نږدې کړو.



د مخروط حجم:

د انتيګرال په مرسته د يوه مستقيم مخروط د حجم د شمېرلو يوه بله

ځرخېدونکي تنونه: ----------------------------

مرستندويه لار. يو د کارتيزي وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په سرچينه (0|0) او منځ ټکی په ټکي $(h|0)$کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنيو توتو(استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونيسو، چې جګوالی(پنډوالی) يې dx دی. داچې د داسې يوې توتې يا استوانې ګردې ټوټې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعيه قېمت سيستم په x سره ور کړ شوی دی، د ورانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې باور لري.

د يوه ناپاې کوچنی توتې(استوانې) ورانګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r\, z\,(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د یوې ناپاي کوچنۍ توتې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\, dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنیو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره یې ټاکلی انتیګرال جوړوو، د انتیګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاي چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بیا یې انتیګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونیسئ.

$$\pi\int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دئ د یوه مخروط د حجم معیاري (ستاندارد) بنه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ۱۲:

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انتروال کې د وضعیه قیمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

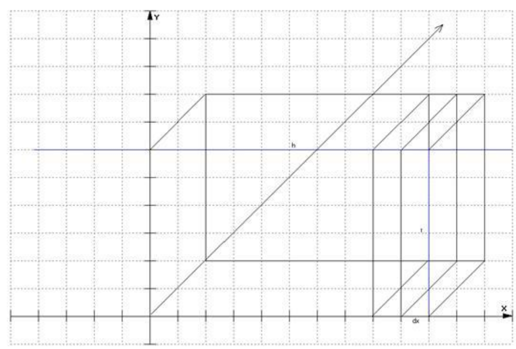
(c) ketabton.com: The Digital Library

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\,dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم ډکی یا حجم.

مستطیل یا بربع المکعب (شپږ اړخیز جسم) Quader



دا لید شکل د استواني څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکې dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅې (قاطع) سطحه وشمېرل څرخېدونکي تنونه:

شي، یعنې q(x) د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي. په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژۍ تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

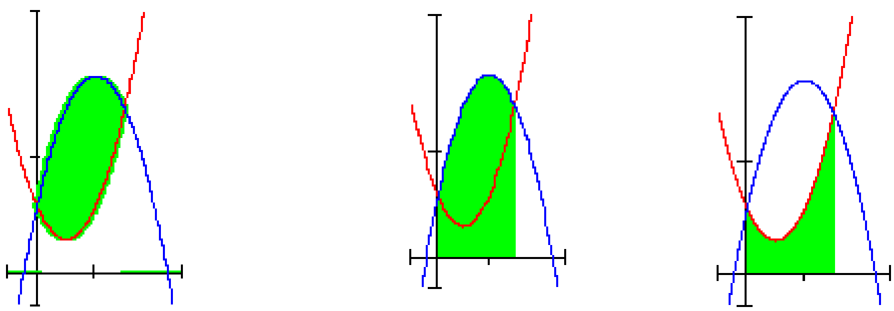
که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو، نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A　　　A_1　　　A_2

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتې سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه ځرخیدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په ځرخیدنه د x په محور په انتروال $[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حجم شمیرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf   تابع ګراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که   f متمادي او غښتلي یو غږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f   په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې   متمادي او غښتلی یو غږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \, dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال[a,b]کې دی y=f(x) متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{توته(استوتنه)} : V_{غونداری(کره)} : V_{مخروط} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بیلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخیدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخيدني څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کيدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بيا حجم وشميرل شي.

تمرينونه:

۱ - د $y = f(x) = x^2$ او د دې د معکوس تابع تر منځ سطحه وشميرئ.

۲ - د ګراف او X محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

$a)\ f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3$ $b)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ $d)\ f(x) = -x^2 + 6x - 5$

۳- د هغې سطحې مساحت وشميرئ، چې د وکړ شوو مساواتو منحنيو څخه را بنده شوي وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{0,5x}, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

b) $y = \frac{1}{2}x^3, \quad y = 0, \quad x - 2, \quad x = 2 :]$

c) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0 \quad x = 9, \quad x = -3, \quad x = 3:$

d) $y = \cos x, \quad y = 0$

e) $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{5\pi}{6}:$

f) $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4:$

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

h) $y = x^3 + 7, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2:$

i) $y = x^3 + 7, \quad y = x^3 - x^2 + 3x + 5:$

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4, \quad y = 3 - 4x:$

k) $y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10:$

l) $y = \cos x, \quad y = \sin x$

m) $y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8:$

n) $y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4+x^2}:$

o) $y = x^2, \quad x = y^2:$

p) $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3:$

٤-- - د ساین د منحني گراف او د کوساین د منحني گراف يو بل په انټروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوځوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوارو غوڅېدونکو تر منځ له دوارو منحنیو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۵- د اکسپوننشل منحني g د $y = e^x$ سره او په انتروال $[0,1]$ دp پارابول د $y = -x^2 - 1$ سره را بنده سطحه وشمېرئ.

۶ - د کربنې g د $y = 2x^2 + 1$ سره او په اینتروال $[0, 2\pi]$ د ساین منحني د y=sin x سره څخه رابنده سطحه وشمېرئ.

۷ - پارابول p_1 د $y = x^2 - 3$ سره او p_2 د $y = 2x^2 + 1$ سره د $[-1,2]$ په اینتروال یوه سطحه را بنده وي.

د ا بنده سحه و شمېرئ.

۸ – د پارابول P د $y = \sqrt{x}$ سره او کربنه g يې د y = -x-1 سره په اینتروال رابنده سطحه لرو. دا را بنده سطحه وشمېرئ.

۹ - په اینتروال $[-2,1]$ دg_1 کربنې د$y = x + 3$ سره او g_2 د 2x+1 سره څخه را بنده سطحه وشمېرئ.

۱۰ - – پارابول $y = x^2 - 6x + 5$ د p سره او کربنهg د y+-x+1 سره رابنده سطحه.

د دې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۱-- د g یوه کربنه یو پارابولpد $y = x^2 + 2$ سره په $x_1 = -1$ او $x_2 = 2$ کې غوڅوي.

د کربنې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ – د g یوه کرښه یو پارابول p د $y + 0,5x^2 + x + 4$ سره په د $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ ټکو کې غوځوي.

د دې کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۳ - د ساین د منحني ګراف او د کوساین د منحني ګراف یو بل په انتروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوځوي.

د دواړو غوځټکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د $y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

د دې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د y=a.(1-sin2x), (a>0) سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې یوونونه (واحدونه) دی.

۱۵- د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\quad f(x) = 2 + \sqrt{x}\,, \quad |= [0;4]$ $\qquad b)\quad f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1\,, \quad | [2;4]$

۱٦ - د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په مخور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره يي و ازمايئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \ f(x) = -x + 5, \quad |= [0;3]$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ , \quad | [1;5]$

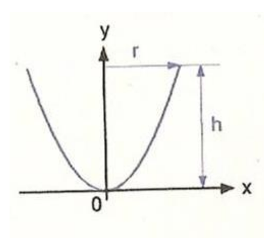
۱۷--د لاندې توابعو ګرافونه هر يو د y په مخور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\ \ f(x) = \sqrt{x}\ \ ,\ 1 = [0;4]$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ f(x) = (x-2)^2\ \ ,\ 1 = [1;3]$

۱۸- د لاندې توبعو ګرافونه هر يو دy په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره يې و ازمايی.

$a)\ \ f(x) = x + 1\ \ \ ,\ 1 = [1;4]$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ f(x) = -\frac{1}{2}x + 2\ \ ,\ 1 = [0;4]$

۱۹ د پارابول په سيومتري محور yد پارابول د څرخيدو سره يو لوښی منځ ته راځي. وښايئ، چې دا $v = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$ حجم لري.



$$v = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$$

۲۰ - د ساين د منحني ګراف او د کوساين د منحني ګراف يو بل په انتروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوڅوي.

د دواړو غوڅتکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۲۱ - د f تابع ګراف د $t\ \ y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مساحت وشمېرئ.

۲۲ - د f تابع گراف د y=a.(1-sin2x), (a>0) سره او د وضعيه قيمت په I (اوله) مربع کې (قيمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې يونونه (واحدونه) دی.

۲۳---- لاندې د څرخيدونکي بدنونو گراف په x محور څرخي. د داسې منځ ته راغلو څرخېدونو تتونو حجمونه(ډکي) وشمېرئ.

$a)\ f(x)=2+\sqrt{x} \quad , \quad I=[0;4] \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2 \quad , \quad I=[2;4]$

۲٤---د لاندې څرخېدونکو بدنونو گرافونه د x محور باندې څرخي داسې منځ ته راغلي حجمونه(ډکي) وشمېريئ او په ساده حساب سره يې وشمېرئ.

$a)\ f(x)=-x+5 \quad , \quad I=[0;3] \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \quad , \quad I=[1;5]$

۲۵--- د لاندې توابعو د څرخون له لارې منځ ته راغلو تتونو حجم وشمېرئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad |=[0;4] \qquad b)\ f(x)=(x-2)^2 \quad , \quad I\ |=[1;3]$

۲٦---- د لاندې توابعو گراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تتونه و شمېرئ او په ساده شمېرنه سره يې هم و شمېرئ.

$a)\ f(x)=x+1 \quad , \quad |=[1;4] \qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2 \quad , \quad |=[0;4]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۷--- د لاندې توابعو گراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تنونه و شمېرئ او د ساده شمېرنې سره يې هم و شمېرئ

$a)\ f(x)=\sqrt{x}\quad,\quad |=[0;4]$ $\qquad b)\ f(x)=(x-2)^2\quad,\quad |=[1;3]$

$a)\ f(x)=x+1\quad,\quad |=[1;4]$ $\qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2\quad,\quad |=[0;4]$

هغه ناټيکاوي، چې د نصاب په کتاب کې شته، داسې لړځه به يې زه دلته له تاسو سره شريک کړم

د ډاکتر ماخان (ميرزي) شينواري چاپ او ناچاپي ليکنې:

په ډېره مننه، چې زما کتابونه به ټول www.ketabto.com ته پورته شي.

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب   په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنشيال برابرون (دا کتاب په دې ښانګه کې يو پيل   دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – احصایه یا ستاتیستیک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتګارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

د ښوودځي کتابونه له ۷-م لګي څخه تر ۱۲-م ټولګي پورې.

۱ – د دولسم ټولګی شميرپ،هنه

زما ليکونه:

Dr. Makhan Shinwari	ډاکتر ماخان شينواری

Smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي حمهوريت جمهور ريس جلاتمآب

ډاکتر محمد اشرف غني ته په ډېر درنښت.

له هر څه د مخه دې بخښنه وي، چې ستاسو ډېر د ارزښت ډک وخت نيسم، خو دا راته ډېر اړيين بريښي او پرته له تاسو به يې څوک دومره جدي هم ونه نيسي.

پوهيږو، چې د پوهنې وزارت د ولس د پوهنې مغذ جوړوي، پوهه له همدې ځايه پيليږي، چې بنسټ يې بايد سم وي. همداسې نصاب د يوه هيواد د پوهنې مغذ دی، نو بايد همداسې ورته د هره اړخه په درنه سترګه او غور وکتل شي.

زه خبره را لنډوم او د افغانستان د نصاب ستونځو ته په لنډ ډول ګوته نيسم او په همدې ډول ستونځوبيو يا د ستونځو حل ته يې.

ما د ۱۲ –م ټولګي د پښتو او دري کتابونه وليکل او زه ترې المان ته لاړم، قرارداد پای ته ورسيد. زما د کتابونو په ځای نور کتابونه چاپ شول، چې ناسم وو. په دې هکله د پوهنې وزارت ته زما ليکنه مل ده. دا کتابونه ما بيا له سره ترتيب کړل(ليکنې مې يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

درلودلې) او چاپ ته مې چمتو کړل، خو دا مې باور نه کیده، چې دا به بیا بې زما له شتون چاپ شي.

ما د کتابونو د لیکلو لپاره پیسې اخستي او دا لیکنې هم دا دی لرم، چې چاپ ته چمتو دي

ما چې دا نور کتابونه وکتل، نو دا مې لازم وګڼله، چې دا کتابونه هم زه له سره ولیکم، مواد یې لرم، ځکه چې ما ډېر د شمیرپوهنې یا ریاضي کتابونه لیکلي او ژباړلي(نږدې تر ۴۰ کتابونو پورې). د کتابونو منځپانګه د ښوونځي کتابونو لپاره هم پوره ده، تخنیکي کارونه یې باید له یوه مسلکي کس سره سرته ورسول شي.

اوس مې یې په لیکلو او د ښوونځي لپاره په سمون پیل کړي دی.

زما لیکنې مسلکي ناسمون نه لري، معیاري او د وخت د غوښتنو سره سمې دي، چې دا زما د اخرنیو اوولس کالو د هڅو په اساس باوري ده.

زه څه کولی شم؟

دا چې په دې هکله بل کوم هیوادوال څه نه دي ویلي یا لیکلي، نو باور لرم، چې زه یوائنی کس یم چې دې ته مې فکر را اوښتی. زه دا څه چې لیکم دا په پوره مسئولیت لیکم.

ما چې دا څومره لیکنې کړي، دا زما د ارمان د پوره کولو لپاره دي او په دې هکله ځان د ولس پوروړی بولم.

که د دې کتابونو د لیکنې دنده راته وسپارل شوه، نو د کار میوه به مې وي او دا کار به په نړیوال معیار او ښه توګه سرته ورسوم.

دا اخر یونیم کال مې یوائې د ښوونځي له کتابونو سره سر خوږولی، چې د هر ځل لوستنې سره یې پوره زوریږم او د هر ځل لوستلو سره یې په ناسمون سر خوږوم.

زه هیله لرم، چې دا وخت راته راکړئ، چې د افغانستان ریاضی معیاري کولو کې مرسته وکړم او نه دا چې مرسته وکړم بلکه معیاري یې کړم. دا کار مې لکه د مخه مې چې ګوته ورته ونیوله هم کړی.

زه کړی شم، چې دا کار د المان څخه هم سرته ورسوم. که ماته دا وخت راکړ شو، نو زه به له حکومت څخه د معاش غوښتنه هم ونه کړم او دا کار زما له خوا ساده کیدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونځي د رياضي لپاره به يو بنسټ کېښوول شي، چې په هغې د راتلونکی وخت شمیرپوهنه يا رياضي ابادېدی شي. دا بنستيز مسلک به په نړيواله کچه سم شي.

زما مسئوليت مي په دې ليکنه سرته ورساوه.

له هر څه د مخه ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شينواری

د نصاب د کتابونو د ناسمون په څنو برخو د نموني لپاره لنډه څېړنه شوې، چې د دې ليک سره مل ده.

د پوهني محترم وزارت ته زما ليکنه هم مل ده.

ډاکتر ماخان شينواری د ۲۰۱۳ زک لومړی نیمايي

Dr. Makhan Shinwari

Lansbergerstr.3

5311- Bonn

Germany

smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهني محترم وزير صاحب ته په ډېر درنښت!

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېرو درنو!

غواړم دا لاندې دوه ټکي د تاسو محترم سره شريک کړم:

لومړی: ما له مارچ ۲۰۰۸ ز کال څخه تر دسمبر ۲۰۰۹ ز ک پورې د درسي کتابونو ليکنه کې ونډه لرله او د ۱۲ ــم ټولګي د شمير پوهنې يا رياضي کتابونه مې په پښتو او درې وليکل.

ما دا څه موده د مخه د پوهنې وزارت په ن ج پاڼه کې د ۱۲ ــم ټولګي د شميرپوهنې (رياضي)کتاب ولوسته، چې ګورم هلته په کې زما د نوم درک هم نه شته.

دويم : د کتاب خوندېوني يا متن ته چې ننوتم، ګورم، چې هغه څه چې ما ليکلي وو هغه يا نه شته او يا تخريب شوي دي.

ما په ډېر زور او د زړه خوراک سره د کتاب لومړۍ برخه يعنې د ،، پولې ارزښت،، يا ليميټ برخه وکتله، چې ګورم، نو دا مې ترې لاس ته راوړه، چې دا نه ريا ضي ده او نه پښتو او هغه چا چې دا ليکلې نه دا چې په رياضي نه پوهيږي په پښتو هم نه پوهيږي.

زما په ليکنو کې نوښت:

دا بايد په ګوته کړم، چې زما ليکنه په نړيوال معيار وه، چې منځپانګه يا متن يې طبعآ زه لرم.

لومړي: دا لومړي ځل دی، چې کتاب مې لومړی په پښتو او بيا په درې وليکه.

دويم: دا لومړۍ ليکنه وه، چې په ليکنه کې له ايراني کتابونو   ګټه نه وه اخستل شوې او ليکنه له الماني ادبياتو   او   داسې څه له انګريزي ادبياتو رانيول شوي وه.

دريم: زما کتاب معياري ليکل شوی وو او ترې ښه ليکنې يې شونتيا نه لرله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې توګه مې غوښتنه او هيله :

اول - زه بايد پوه شم چې ولې داسې شوي، چې زما نوم له کتاب څخه وتلي؟

که يواځې يوه ليکنه هم په کې زما پاتې وي، نو بايد زما نوم په کې وی. دا ماته له ما سره او زما د دوه کاله په دې لار کې د ستونځو ګاللو له امله او نه اخر زما د علمي کار سره هم تيری برېښي؟

تاسو پوهيږئ، چې د ۱۲ ــم ټولګي کتاب ليکلو لپاره ماډېرې پيسې اخستي او لپاره مې يې ښه کار کړی وو، چې لاس ته راوړنه يې بايد داسې نه وی.

دويم- د کتاب دا ليکلي لومړئ او هم داسې سرسري دويمه برخه، چې ما لوستلې، د ښوونځيو لپاره د زغم نه دي.

زما وړانديز: دا کتابونه بايد راټول شي او بيا وليکل شي، ځکه چې په دې خو ليکونکي نه پوهيږي ، نو له دې امله نه ښوونکي پرې پوهيدی شي او نه زده کوونکي او د پوهيدلو معقول څه هم نه لري. دې ته ګوته نيسم، چې په دې نورو کتابونوکې به هم ورته ستونځې وي، خو زما يې کتنه اوس د لاسه نه کيږي، ځکه چې .....

د داسې کتابونو ليکل او ښوونځيو ته وېشل د پوهنې وزارت لپاره توهين دی.

زه له دې امله د کوچنې اختر وروسته کابل ته درځم او هيله لرم، چې د هرچا لومړی له تاسو سره وګورم. زه به د اګست په ۱۷ يو ځل وزارت ته درشم.

يادونه: ما په دې اخرو څو ورځو کې د کتاب ډېر ځايونه داسې ځغلند وکتل، باور وکړئ، چې د هرې موضوع د لوستلو سره زوربډلی يم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه به په دې هکله – که لوي څښتن کول- له تاسو سره په کابل کې وغږېږم.

له هر څه د مخه له تاسو ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شینواری

يوه هيله

زه د افغانستان د ټولو ن ج ، نورو پاڼو او راديو تلويزيونو څخه هيله لرم، چې دا زما ليکنه ګرانو لوستونکو ته وړاندې او په نورو اړونده ليکنو هم همدا مرسته وکړي.

د رياضي کتابونو د چاپ مخه ونيول شي

ولې؟

په دې نږدې څو مياشتو کې د نصاب کتابونه بيا چاپ ته وړاندې کيږي او ګومان مې دی، چې داسې د معيار سره سم سمون به په کې نه وي راغلی، نو له دې امله يې د چاپ مخنيوی اړيين او په همدې ډول يې سمون هم اړين دی، چې په لاندې کې يې ستونځو او ستونځوبيو (د ستونځو حل) ته هم ګوته نيسم.

زه د شميرپوهنې ټول د نصاب پوهانو ته درناوی لرم او هيله ده، چې دا ليکنه شخصي وه نه نيسي.

-- ما له نږدې ۱۹۹۸ ز ک وروسته د شميرپوهنې په کتابونو پيل وکړ، چې تراوسه مې نږدې څه کم څلوېښت کتابونه ليکلي، چې له جملې يې له شلو ډېر چاپ او نور ناچاپ دي. د دې کتابونو ۱۴ غوره يې په www.kitabtoon.com (دې پاڼه کېاوس نه شته) کې خپاره شوي او همداسې له ما څخه شميرپوهنې ته ځانګړې شوې پاڼه کې تر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ کتابونو ن ج ته پورته شوي او دا نور به هم په خپل وار ن ج ته پورته شي. زما پاڼه smakhan.wordpress.com

دا زما ن ج پاڼه په نا ښکلي ډول يواځې زما د شميرپوهنې کتابونو ته ځانګړې شوې، چې زما زيات کتابونه په کې خپاره شوي او نور به هم په کې خواره شي. پاڼه ښکلې نه، خو خپله موخه پوره کولی شي او موږ ټولو سره مرسته کولی شي، چې شميرپوهنه په ګډه سمه او معياري کړو.

ګرانو هيوادوالو!

افغانستان دې اوږدې جګړې په هر اړخ کې بې سارې زيانمن کړی او همداسې په پوهنيز اړخ کې هم. د افغانستان نصاب هم له دې ناخوالو بې برخې نه دئ پاتې شوی.

لکه څنګه چې پوهنه د هيواد مغذ جوړوي، همداسې نصاب د پوهنې مغذ دئ، نو له دې امله زياته پامرنه هم غواړي.

ما په نصاب کې د دولسم ټولګي پښتو او درې کتابونه وليکل، د قرارداد وخت پوره شو، پيسې مې واخستلې او زه ترې لاړم، چې متآسفانه له ما ليکلي کتابونه چاپ نه شول – علت يې دا وو، چې ګران ليکونکي يا ليکونکي وښايي، چې دوي دا کار ښه کوي، نو ولې دا د هيواد دباندې افغانان دې دې کار ته راوبلل شي- او په ځای يې متآسفانه ناسم کتابونه چآپ شول. په دې هکله مې په ۲۰۱۲ ز ک کې پوهنې وزارت ته يو ليک هم ليږلی وو، چې

ما متآسفانه چې پوره ناوخته دا نور د ښوونځي چاپ کتابونه وکتل او دې نتيجې ته ورسيدم، چې د رياضي کتابونه بايد سم او معياري چاپ شي او نه دا ناسم بيا چاپ شي.

دا وړانديز ولې ما په نصاب کې نه دئ کړې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په خواشينۍ سره به ووايم، چې د کار په سر کې مسئولو چې په کار پوه نه وو، بل څوک هم کار ته نه پرېږدي او د چا خبره د چا غوږ ته هم نه رسيږي. ما په همغه وخت کې هم د ټولو ليکنو لپاره وړانديزونه لروده او هلته مې ورته چاپ او په ميز ايښودلي وو، خو چا نه غوښتل ګټه ترې واخلي او يا يې ترې د ګټې اخستلو توان نه لاره.

ما ته د هغو د ليکنې متود ښه ونه برېښيده، ځکه چې استادان د دارنګه ليکنو سره بلد نه دي، نو له دې امله د پوهنې متن سره له هغې څو واره زياتې څنګيزې ليکنې کوي، چې موخه ور نه دي.

ما چې پټيل، چې د کتابونو د چاپ مخه بايد ونيول شي، نو دې ته مې هم چمتووالی بايد ښوولی وي، چې د کتابونو معياري او سم ليکلو امکان هم بايد شته وي.

دا امکان شته. ما دا کار سرته رسولی، کتابونه مې ټول داسې خام پوره کړې، چې زياتو برخو ته يې ، څو واره وړانديزون هم شته.

که د کتابونو د چاپ کار بايد ډېر په بيړه وشي، نو دا کار هم کيدونکی دی، خو بايد څو تخنيکي کسان د مرستې لپاره چمتو وي.

د چاپ کتابونو په ناسمون مې ليکنه کړې، چې ګران لوستونکي يې په smakhan.wordpress.com کې لوستلی شي او که ن ج ته پورته نه شو، نو مينه وال او په دې هکله ليوال يې د برېښنا پټې له لارې لاس ته راوړی شي..

ما د هرکتاب څخه لږ ترلږه يوه برخه داسې د نمونې په څير څيړلې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د شمیرپوهنې مینه وال ګران لوستونکي په ستونځو وپوهیږي، نو اړیین بولم، چې د ښوونځي کتابونه هم وګوري او اړونده موضوعګانې زما د چاپ او ناچاپه لیکنو سره پرتله کړي(کتابونه په پورته ن ج کې شته دی، چې ځنې یې راکښته کیدی شي او هم یې هلته ګران لوستونکي لوستلی شي).

زه په دولت کې او له دولت دباندې د ټولو اغیزمنو هیوادوالو څخه هیله کوم، چې په دې لار کې له ما او له دې لارې زموږ د ځوان راتلونکي سره مرسته وکړي او د شمیرپوهنې معیاري کولواو سمون امکانات راته چمتو شي.

زما د کار دوه امکانات شته:
لمړی: دا کار زه کړی شم، چې له المان څخه هم سرته ورسوم او په ښه توګه، په دې حالت کې به زه د زحمت په مقابل کې له اجورې - د ځوانانو سره د مرستې له امله - تیر شم.

دویم: په افغانستان کې که دا کار سرته ورسیږي، دا به ګټور وي، ځکه چې په افغانستان کې به په ټولو خواوو کاروشي.

داخه وروستی خبرې ما هم رامخ ته کړې.

په لاندې کې زما لیکنې د افغانستان اسلامې جمهوریت جمهورر ریس جلالتمآب اشرف غنې او د پوهنې محترم وزارت ته لیک کې هم لوستلی شئ او هیله مې ده، چې ویې لولئ.

ستاسو له ګنو مشورو به ډېر مننوی یم.

زما د برېښنا لیک پته: smakhan1946@gmail.com

ستاسو ماخان

د نصاب د دولسم ټولګي کتاب ناسمونونو ته کتنه:

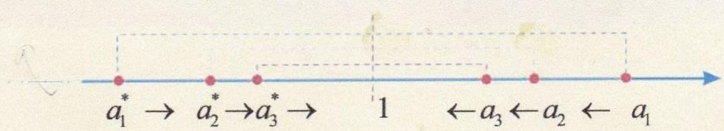
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي: په دولسم ټولګي کې پیل له ترادفونو شوی او په سر کې یې دوه ترادوفونه راوړي او دا یې بیا په یوه ګراف یا کرښه د ښي او کینې لورې یوې پولې ته څغلولي.

د کتاب ۳ ـــم مخ

پایله:لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لېمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

زه پوهیږم، چې دا کار دې درنو لیکوالانو ولې کړی؟

له همدې پیله روښانیږي، چې محترم لیکونکي د درس سره کومه بلدتیا نه لري.

په پورته کې دا دوه پرلپسې هیڅکله له) ۱ « سره نه برابریږي، لکه ښاغلی لیکوال چې لیکي.

پسې یې بیا د پرلپسې یا ردیفونو لپاره بیل بیل ګرافونه کښلي.

په پرلپسیو یا ردیفونوکې چې مونږ لیمټ راوړو، نو موخه ترې د پرلپسې کونورګنت او ډیورګنت دي. په پرلپسې کې اړین نه ده، چې د کونورګنت حالت کې دې پرلپسې له دواړو لورو پولې ته لاړ شي، خو داسې پرلپسې شته او هغه یو ترادف دی نه دوه.

دویم: دا لاندې څه چې راغلي، هم کوم درس پورې اړوندوالی نه لري، همداسې څه یې لیکلي. دی د ناسم د ترادف درس څخه سملاسي داسې یوې موضوع ته راغلی او بیا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي او کيڼ لوري ليميټ ته راځي او که وکتل شي، نو په ليکنو کې کوم توپير نه شته.
دلته د زده کړې څه نه ليدل کيږي او دا اخره کرښه يې داسې ده، چې په دې موضوع کې کومه پوهه هم نه لري.

که چيرې دا ټيک هم وي، نو ځای يې بې ځايه ځکه راوړي، چې د ښی او کيڼي لور ليمټونه، چې هلته هم ناسم دې، په اووم مخ کې څېړل(که چيرې څېرنه يې وبولو)

په لاندې کې ،، د متحول تقرب،، يعني څه؟ دا هيڅ مفهوم يا ترې پوهيدنه نه لري. که ... ترادف وي هم بايد د ترادف په ډول وليکل شي او که تابع وي هم بايد د تابع په ډول وليکل شي.

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نږدی کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی يا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x \to a} x = a \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چيرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدی شي.

$$x : a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چيرې د x د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدی شي.

$$x : a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\forall\delta>0:|x-a|<\delta$ يا $\lim_{x\to a} x=a$ يا $x\to a$ يا $|x-a|\to 0$

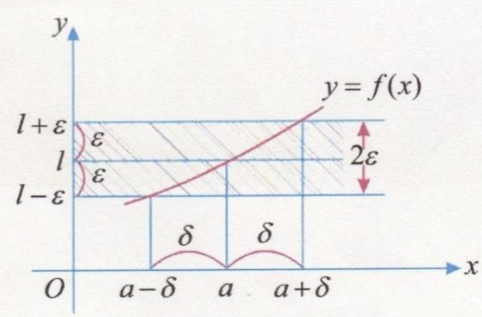
ډول ليکنو سره ګران ليکونکي بلدتيا نه لري او نه داسې څه د مخه راغلي، چې روښانه شوې وي

داسي ليکنې د ښوونځيو لپاره ستونځمنې دي. له دې امله ماهم په خپلو ليکنو کې نه وې راوړې. ګورو چې د کتاب ناسموونکي هم دا څه ناسم يا بې له تشريح کارولي.

په دې هکله زما ليکنه په لاندې کې شته.

دريم: په لاندې تعريف کې د پوهيدلو څه نه شته او په دې رياضيکي تعريف خو نه پوهيږي، ځکه چې په لاندې يې د پوښتنې د حل نتيجه راوستلي او دا بحث له دې سره په رښتيا کې هيڅ سر او کارنه لري.

تعريف: که چيرې د $f(x)$ تابع په يوه غير ترلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کيداى شي چې تابع په a کې نه وي تعريف شوى. که چيرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کيږي، نو ويل کيږي چې د $f(x)$ تابع ليميټ عبارت له l څخه دى، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې يې ليکو: $\lim_{x\to a} f(x)=l$ يا $\begin{matrix} x\to a \\ f(x)\to l \end{matrix}$



$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\ :|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \quad (|x-a|\to 0\Rightarrow\ |f(x)-l|\to 0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سومبولونه $\forall$ او $\exists$ نه دي ښوول شوي، چې څه شی دی او څه بلل کيږي.

ښاغلي ليکونکی په اووم مخ کې بيلګه راوړي او بيا دا ښايي، ښي او کيڼې لورې ليميټ يې شميري.

بايد د $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$، لپاره $x \neq 3$ وليکي،چې هلته فنکشن تعريف نه دی. دی بيا په ناسمه توګه په جدول کې ليکي. دا چې دا بايد څنګه وليکل شي، زماپه ليکنو کې شته.

دويمه بېلګه: و ښيئ چې $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کيڼې خوا لېميټونه تر څېړنې لاندې نيسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

ليدل کېږي چې د ښی خوا او کيڼې خوا لېميټونه سره مساوي دي، نو $\lim_{x\to 3}=\frac{x^2-9}{x-3}=6$ دي.

په پورته کې xد 3 قيمت نه شي اخستلی، هلته فنکشن تعريف نه دی، نو له دې امله په جدول کې، نه د ښیٔ لورې او نه د کيڼې لورې دا ارزښت 3 اخستلی شي، هلته 3 ته ور نږدې کيږي.

د بيلګې حل يې هم بيا سم نه دیٔ کړي، په هغه ورسره بلده لار.

دا هغه د کاغي او د زرکې خبره ده.........

دويمه طريقه: د لېميټ د تعريف په پام کې نيولو سره فرضوو چې د هر اختياري کوچني عدد ε لپاره يو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : \ |x-a|<\delta \ \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta \ \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې د حل نتیجه

$$\varepsilon = \delta$$

دا د دی بحث سره سر او کار نه لري یعنې دا مو موخه نه ده، نو باید ووایم، چې دروند لیکونکي د موضوع څخه بوي هم نه وړي.(بخښنه دې وي، که زما لیکنې داسې لږ توندې برېښي)

او بې ځایه مخ ته ځي، چې څه ترې پوهیدل کیږي هم نه.

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومیږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لیمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لیمیټ لري، یعنې: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

دې پورته ته په لنډه توګه زما نوره لیکنه او تیکاوی:

د کتاب په پیل کې راوړل شوې د ترادف یا پرلپسې موضوع باید د یوولسم ټولګي کتاب کې پوره څیړل شوې وی، مګر هلته یې یواځې دا نومونه راوړل شوي او نور لیکونکي – بې له دې، چې د موضوع اړیین څه راوړي - له موضوع څخه تیر شوی.

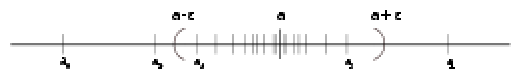
د دې موعوع څخه موخه د ترادف پولې ته تلنه یا کونورګنت او له پولې اووښتنه یا ناپای ته تلنه یا ډیورګنت او... دي، چې بې له دې په رښتیا کې د ترادف یا پرلپسې څیړنه کوم غوره والی یا اهمیت نه لري، یعنې خپله موخه له لاسه ورکوي. دا د یوولسم ټوګي د ترادف درس، نو په رښتیا کې خپل غوره والی او اړیینوالی له لاسه ورکوي. نور سموالي او ناسموالي ته یې ګوته نه نسم، همدا بسیا کوي، چې څه په کې نه دي ویل شوي یا لیکل شوي.

د ۱۲ ـــم ټولګي کتاب ته:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: دا چې ګومان کیږي د داسې لیکنو سره به بلدتیا لږ وي، نو تشریح به راڅخه لږ ډېره شي.

د ،، پوله ارزښت،، په څیره کې ښوونه



که $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د حقیقي اعدادو (ګڼونو) ترادف یا پرلپسي وي، نو عدد $a \in \mathbb{R}$ د دې ترادف یا پرلپسي پوله ارزښت بلل کیږي او پرلپسي a ته کونورګیر کیږي یا a ته هڅیږي یا نږدې کیږي، که د هر $\varepsilon > 0$ لپاره په انتروال $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ کې له یوه اندکس یا پیژند نخښې اخوا یا وروسته یا پسې د پرلپسي یا ترادف ټول غړي(دوي یې حدونه یا جملې بولي، نه پوهیږم ولې؟) د انتروال په دننه کې او فقط پای ډېر غړي له انتروال څخه دباندې پراته وي.

(دنورې اوږدې روښانه ونکي شننې څخه تیریږم)

لنډ پیژند یې:

عدد $a \in \mathbb{R}$ د ترادف $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ پوله بلل کیږي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو طبیعي یا پیداښتي عدد N شتون ولري، داسې چې $|a_n - a| < \varepsilon$ باور ولري، که $n \geq N.$ وي.

دا پیژند راکوي، چې: د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو ایندکس N شته، داسې چې له دې ایندکس یا پیژندنخښې وروسته د پرلپسې(ترادف) ټول غړې د ε څخه په کم واټن له a لرې پراته دي یعني له ε څخه چې a ته څومره نږدې دی دا نور هم a ته نږدې دي.

د $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د پولې ارزښت لیکلو لپاره خپل ځانله سومبول لرو: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

د دې لیکدود سره سم د یوې پرلپسې پوله ارزښت تعریف داسې رالنډولی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \iff \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ |a_n - a| < \varepsilon$$

د داسې لیکنو لپاره د ε (لوستل: اپیسیلون) توری ورځنی یا مروج شوی.

بیلګه:

په یوه بیلګه کې یې روښانه کوو:

د دې لپاره چې د $\frac{1}{n}$ پرلپسې یا ردیف و 0 ته کونورګنت وښایو، یو د مخه ورکړ شوي ε ته یوه په خوښه طبیعي عدد یا ګڼ N ټاکو، چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وی، نو د ټولو $n > N$ لپاره باور لري:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

موضوع اوږدولی نه شم، ځکه چې دا یو درس نه دی، دا فقط په موضوع داسې لږ رڼا اچونه ده.

د فنکشن پوله ارزښت:

یادونه: د دې ۱۲ – م ټولګي د درس دا هغه اصلي موضوع ده.

د فنکشن پوله ارزښت په لاندې توګه پیژنو یا تعریفوو:

پیژند: د فنکشن f پوله ارزښت، د x لپاره چې p ته نږدې کیږي، L دی او داسې یې لیکو: $\lim_{x\to p} f(x)=L$

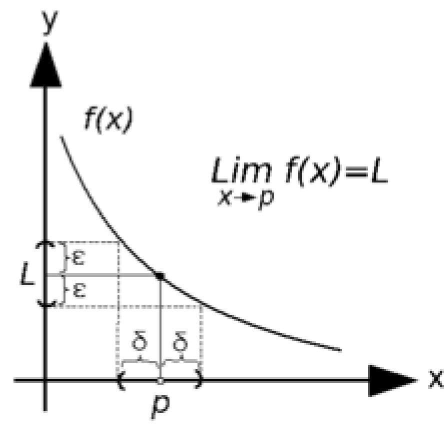
لوستل یې هم همداسې دي لکه پورته تعریف

داسې یې شمیرپوهنیز لیک دود باندې تعریفوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن f پوله ارزښت L لري، که د هر 0 < ε لپاره یو 0 < δ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د δ > |x-p|<0 سره ε > |f(x)-L| هم باور ولري.

د پورته شمیرپوهنیز یا ریاضیکي فنکشن پوله ارزښت لپاره لاندې څیره



پورته دوه تعریفونه برابر ارزښته دي یعني له یوه څخه بل لاس ته راځي او په ځټ یا برعکس یعني لیکو:

تعریف: د فنکشن f پوله ارزښت، چې x و p ته نږدې کیږي، L دی، ټیک هلته یا هلته او هلته یا هلته او په ځټ، یا له دې لاس ته راځي او په ځټ یا برعکس چې د هر ε < 0 لپاره یو 0 < δ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د δ > |x-p|<0 سره -|f(x) ε > |L هم باور ولري.

دلته هم په همدومره بسیا کوو، که څه هم روښانه کیدل نورې شننې ته هم اړتیا لري.

دې ته دلته په اخر کې بیا ګوته نیسم، چې دا شمیرپوهنیز یا ریاضیکې ډول لیکنې ستونځمنې دي او باید ترې تیر شو، د ترادفونو او فنکشنونو لپاره.

دا نور پاتې درس هم په همدې ترتیب ګران لیکونکي لیکلی چې زه نور پرې نه غږیږم.

دا بسیا کوي، چې کتاب د ښوونځیو څخه راټول شي او له سره ولیکل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ستاسو له سرې سينې څخه – که ومو لوسته- ډېره مننه.

ستاسو ډاکتر ماخان شينوارى.

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړى:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب   په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنشیال برابرون (دا کتاب په دې ښانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

:   *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

۱ -   شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه   د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ځخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ځخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۰ - د يو ځو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راځخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو ځخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ځخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي ځخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسيدل:

شميرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شميرپوهنه د اتم ټولګې له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

ریاضي برای صنف دوازده

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میړي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library