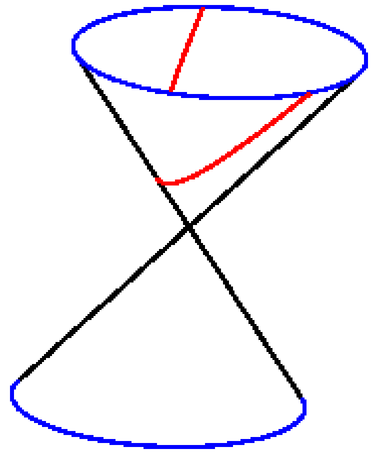
الجبر (كرنيز) لاينيز

Lineare Algebra

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library



ډاکتر ماخان(ميرزى) شينوارى

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاينيز(کرښيز) الجبر ۱

بنسټيزجوړښتونه / ګروپونه او تنونه ۱

ګروپ ۱

لاندې ګروپونه ۳

ګڼونډېرۍ يا د اعدادو سټ ۳

پرموتيشونونه ((د توکو يا اعدادو) ځای بدلون) ۴

د ځای بدلنون (پرموتيشن) څيوکليکي يا تل ۵

مودولوس ۸

لومړني تنونه يا پټي يا ورشو ۱۱

ګالويز– بدن ۱۳

په ګروبونو ياډلو کې تورنی ۱۴

وکتورفضا يا وکتوري فضا ۱۶

د n - ګوني وکتورفضا ۱۹

لاندې فضا يا برخه فضا ۲۰

ګرښيز کمبينيشن ۲۲

کرښيزه هيولې يا سپاين يا سمڅ ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتی – يا محدب کمبينيشن ۲۵

حقيقي- ياريښتونی سکالار ضرب ۲۶

سکالار ضرب ۲۷

مايل سيومتريک ۲۸

د کوشي-شوارڅ – نامساوات ۳۰

نورم ۳۱

هوموګينيوالی ۳۱

د سکالار ضرب نورم ۳۲

ماکسيموم – نورم ۳۳

د حقيقي- يا ريل وکتورونو سکالار ضرب ۳۴

د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب ۳۵

د دوه وکتورونو ترمنځ کونج ۳۶

د پيتاګوراس(فيثاغورث) جمله ۳۷

کرښيز نابلواکوالی يا ۳۹

بنسټ Basis ۴۲

بعد يا پراخيدونی Dimension ۴۴

اورتوګونال يا ولاړ بنسټ ۴۶

اورتوګونال پروجکشن ۴۹

د ګرام-شميت تګلار يا قانون ۵۱

کرښيزه ځيرونه (فنکشن يا تابع) ۵۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښيزو توابعو کمپوزيشن ۵۷
ماتريکس ۵۸
يو کرښيز فنکشن يا تابع ۶۱
يو کرښيز فنکشن يا تابع ۶۳
Bild او Kern معنا ځيره يا شکل او زړي ۶۵
معکوس يا په څټ تابع (ځيرونه يا فنکشن ۶۷
د ماتريکسونو وکتورفضا ۶۹
د ستراسن(وېينه: شتراس) الګوريتم ۷۱
کوموتاتور ۷۲
په څټ يا معکوس ماتريکسونه ۷۴
تراسپوني او ادجونګيري ماتريکسونه ۷۶
شپور Spur ۷۸
د يوه ماتريکس رانګ ۷۸
د يوه ماتريکس نورم ۸۰
هوموحنيتي: ۸۱
هوموحنيتي: ۸۳
د ماتريکس د ډکوني جوړښت ۸۴
اورتوګونال او يونيتار ماتريکسونه ۸۴
د هادامارد – ماتريکسونه ۸۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فورير (وينه: فوريې) ماتريکسونه ۸۶

نورم ريښتونې يا - وفاداره اورتوگونال ا و يونيتار ۸۷

ځيوکليکي (تلبيرته راگرځېدوني) ماتريکسونه ۸۹

ستوښاستيکي ماتريکسونه ۹۰

ديترمينانت د انتيسيومتري کرښيزفورم په حيث ۹۱

2 - ليکيزه ديترمينانت ۹۴

د ساروس شيما يا شکل ۹۵

لوريز حجمونه (ډکي) ۹۶

د ديترمينانتونو لپاره قاعدې ۹۸

د ځانگړو ماتريکسونو ديترمئناتونه ۱۰۱

د ديترمينانتو بڼه بدلون ۱۰۴

د ديترمينانتو وديزيينه ۱۰۵

د 3 ټکو له لارې د يوې سطحې ۱۰۸

د واندرموند – ديترمينانتونه ۱۱۱

کرښيز مساوات سيستم ۱۱۲

برېښنايي جرياندايره ۱۱۴

د يوه کرښيز مساوات سيستم حلوړوالی ۱۱۵

ديترمينانت او د يوه مساوات سيستم حلوړوالی ۱۱۸

د کرامر قاعده ۱۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په څښ لور ځای په ځای کول ۱۲۳

د ګاوس ترانفورمیشن ۱۲۵

د ګاوس د له منځه وړنه ۱۲۶

د ایښیلون بڼه ۱۲۹

د ایښلون- بڼه د یوه ل م س (کربنیز مساواتسستم)حل ۱۳۱

رانګ او د ک م س(کربنیز مساواتسیستم) حلوړوالی ۱۳۴

د انډول کربڼه(انډولکربڼه) ۱۳۵

د برابرونې حل یو بل سره یوغږیز........ ۱۳۷

الجبر - کربنیز مساوات سیستم-برابرونې پرابلم ۱۳۸

نورمالمساواتونه ۱۳۸

توموګرافي ۱۴۱

آیګن-ارزښت او آیګو-وکتور ۱۴۳

ورته والي – ترانفورمېشن ۱۴۵

کرکتریستکي پولینوم ۱۴۷

الجبری او هندسي ډېرځلوالی ۱۵۰

د آیګن –ارزښتونو جمعه او ضرب ۱۵۲

د ماتریکسونو ریښتونی توابع ۱۵۴

د آیګن – وکتورونو بنسټ ۱۵۵

د ځیوکلیکي ماتریکسونو دیاګونالونه ۱۵۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ماتریکسونو توان ۱۶۰

د فیبوناچي پرلپسې یا – ترادف ۱۶۲

نورمال ماتریکسونه ۱۶۴

نورمال ماتریکسونه... ۱۶۵

مثبت دیفینیت ماتریکسونه ۱۷۰

ریلا ي – ویش ۱۷۰

مثلث بڼه ۱۷۱

اصلي وکتورونه ۱۷۳

د اصلفضا ځیوکلیکي بنسټ ۱۷۵

د جوردان بڼه ۱۷۹

د (4x4) -ماتیکسونو جوردان-بڼې ۱۸۶

په زیګولار ارزښت ټوټه کونه ۱۸۹

فاسد معکوس ۱۹۱

د توپوګرافیکي کچونداتنونو ټیکاوی یا اصلاح ۱۹۶

د مور-پینروز-شرطونه ۱۹۷

اورتوګونال او ځانګړي اورتوګونال ګروپونه ۱۹۸

هندارونه ۱۹۹

ځرخون ۲۰۰

ځرخونمحور او ځرخونکونج ۲۰۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يو خرخون په ضربيپونو ټوټه کونه ۲۰۵

ځرخونماتريکس ۲۰۸

مربعيزه فورم(بڼه) ۲۱۰

کوادريکونه ۲۱۱

د کوادريکونو شډله ټوټه ونه ۲۱۲

اصلي- محور –ترانفورميشن ۲۱۴

مخروط غوڅی ۲۱۸

د دوه بعدې کوادريکونو د اوکليدي نورمال بڼه ۲۲۰

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې ۲۳۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

زه د سریزې په هکله ډېر څه نه لیکم، خو دې ته ګوته نیسم، چې ما د دې سرلیک لاندې دوه لیکنې کړي. دا مخ ته پرته د هغو لوستونکو لپاره ده، چې د شمیرپوهنې سره داسې لږڅه بلدتیا ولري، دا به ښه وي، خو اړینه هم نه ده.

دا لیکنه خورا مفصله ده نسبت هغې بلې ته

تر مخ راوړنه: فنکشن که په نورو ژبو کې وکورو، نو په پښتو ژباړه به یې ځیره کونه (لنډ : ځیره ونه) وي. په فنکشن کې یو څه په یو بل څه یا خپل ځان ځیره کیږي. چې لومړی یې ځیره کوونکی او دویم یې ځیره ده یعنې دوه مجهولې یا واریابلې دي، چې یوه په بله ځیره کیږي. لومړی خپلواک دئ او دویم یې د لومړي په واک کې دی، نو له دې امله م عربي تابع بللې، یعنې دا د فنکشن تابع ده، چې موږ به یې هم دا ناسم نوم وکاروو، چې ګران شمیرپوهان راته په قهر نه شي.

که زما په دې لیکنه کې ځیرونه راځي، نو هغه یې زموږ په ناسمه توګه همغه تابع ده. دا مو مو پوهیږم، چې له پامه نه لویږي.

ما په یو ځل ډېر ةتابونه وژباړل او ولیکل، چې لیکنیز تاتیکاوي به ولري. د هغې به راته بخښنه وکړئ. دا څه چې تاسو ته وړاندې کیږي، پوره :تور دي او دې ته دې ریاته پامرنه وشي.

دا زما ټولې لیکنې به تر یوې اندازې ستونځې ولري، خو باور وکړئ، چې غوټې پسې وهئ په لاس درځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مننه: د   ټولنې او په ځانګړي ډول د هغې د مشر ښاغلي ډاکټر يحى وردګ څخه زياته مننه، نه داچې زما کتابونه يې [اپ ته ورسول بلکه په دې کار کې يې بط سارې هڅې کړي او بې له شکه يې خپلو يوادوالو ته ستر خدمت کړي، کور دې ودان وي، لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي او د لا ډېرې برياوو په هيله دې زموږ دعا ورسره مل وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاينيز(کرښيز يا خطي) الجبر

بنسټيزجوړښتونه / ګروپونه او تنونه

Grups and fields

ګروپ

د يوه ګروپ $(G,\diamond)$ لاندې يوه ډېرى G پوهيږو، په هغې چې يو دوه ييزه کارونه يا عمليه $\diamond$ داسې پيژندل ولري يا تعريف شوي.

$$\diamond : G \times G \longmapsto G\,,$$

دا په دې مانا، چې هره جوړه (a,b) د $a,b \in G$ سره د $a \diamond b \in G$ يو توکی باندې تنظيم دی. برسيره پردې لاندې خويونه بايد باور ولري:

اسوښياتيو والی يا اسوښياتيو قانون Assoziativität:

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c) \qquad \forall a,b,c \in G$$

neutrale Element ناپيیلی توکی: يو يواځنی ټاکلی ناپيلی توکی $e \in G$ شته دا په دې مانا ، چې

$$e \diamond a = a \diamond e = a \qquad \forall a \in G$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Inverses Element مخامخ یا په ضد توکی یا برعکس توکی: هر توکي $a \in G$ ته یو یواځنی ټاکلی مخامخ یا یه څټ یا برعکس توکی $a^{-1} \in G$ شته د $a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$ سره

ګروپ کموتاتیو یا د ابل (ابل Abelد شمیرپوه نوم دی) ګروپ بلل کیږي، که کارونه $\diamond$ کموتاتیو وي:

$$a \diamond b = b \diamond a \qquad \forall a, b \in G\,.$$

له اړوندتوب څخه لیدل کیږي، چې کومه کارونه کارول کیږي، نو زیات وخت د $(G, \diamond)$ په ځای فقط G لیکل کیږي.

په باندي(بیجکتیو) رییل فنکشنونه یا توابع(بلواک) bijective real Functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ د $\circ$ یو په بل پسې کارونې له مخې یو ګروپ جوړوي.

ساده ازمایل کیدی شي، چې یو په بل پسې اینونه اسوشیاتیو ده :

$$((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) = (f \circ (g \circ h))(x)\,.$$

ناپیلی توکه په روښانه توګه لاندې فنکشن دی

$$e: \quad x \to x$$

بالاخره هر په باندي بلواک لپاره یو په څټ بلواک شته دی

$$f^{-1}: \quad f(x) \to x\,.$$

یو په بل پسې ترنه کموتاتیو نه ده : د بیلګې په توګه لاندې لرو :

$$f:\ x \to 2x\,, \quad g:\ x \to x+1$$

$$f \circ g \neq g \circ f\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(g(x)) = 2(x+1) \neq 2x+1 = g(f(x)) \,.$$

لاندې ګروپونه

د يوه ګروپ $(G,\diamond)$ لپاره $(U,\diamond)$ لاندې ګروپ بلل کيږي، که U د G برخه‌ېږی وي او $(U,\diamond)$ پخپله يو کروپ جوړ کړي

ددې لپاره ، چې و ازمايو ، چې ايا U و ترڼې $\diamond$ ته يو ګروپ جوړوي ، که نه، نو ازمايو ، چې U و نښلونې $\diamond$ ته او د په ځښ جوړښت ته بنده ده. ياني باور لري:

$$a, b \in U \;\Rightarrow\; a \diamond b \in U \quad \text{او} \quad a \in U \;\Rightarrow\; a^{-1} \in U$$

ګڼوندېږی يا د اعدادو سټ the set of numbers

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Z و جمعې(زياتون) ته يوکموتاتيو ګروپ دی، خوندي لرنې يا اينکلوزيون ته ټول ګڼونه و $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته يو لاندې ګروپ جوړوي او راشنل ګڼونه و $\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته او رييل ګڼونه وکمپلکس ګڼونو ته يو لاندې ګروپ جوړوي.

که چيرې صفر لرې شي، نو ضرب يا ځله ونه هم يو ګروپ جوړښت تعريفوي:

$$\mathbb{Q}\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\} \,.$$

تړاو جدول يا تړاوتخته

کارونه$\diamond$ په پاې ګروپ $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ باندې کيدی شي د تړاوماتريکس

$$A: \quad a_{i,j} = g_i \diamond g_j$$

له لارې روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ځیرونه (بې له پرموتېشن پا بدلون ځخه) آول تړاوجوړښتونه ښايي د یوه ګروپ لپاره د $n \le 4$ سره :

$n=2$

◇	e	a
e	e	a
a	a	e

$n=3$

◇	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$n=4$

◇	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$n=4$

◇	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

دا ګروپونه ټول ابل ګروپونه دي، لکه د ماتریکس A د سیومتري ($a_{i,j} = a_{j,i}$)چې لیدل کیږي.

لومړی ناابل ګروپ شپږ توکي لري او د $\{1,2,3\}$ توکو د پروتېشن له مخې پېژندل کېدی شي

Permutations پرموتیشونونه ((د توکو یا اعدادو) ځای بدلون)

د په خوښه ډېرۍ M لپاره د بیجکشن (په کې ځیرونه یا په کې فنکشن) لاندې له M په Mکې ، چې کمپوزیشن کارونه یا ځیرونه یی د کارونې په ځیر وي، یو ګروپ پوهیږوو داسې په نامه د M سیومتري ګروپ.

لنډ : د M په M کې ځیرونې ته پرموتېشن یا بدلون وایو.

که $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ وي، نو د سیومتري ګروپ S_n ځخه غږیږو، چې ګراد یا درجه یې n وي.

د S_n ډېرۍ د π توکي $n!$ پرموتیشن یا بدلون بلل کیږي او داسې یې لیکو

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرمېټيشنګروپ په ټوليزه توګه کموټاتيو نه دئ، لکه د لاندې بيلګې څخه ليدل کيږي

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

د ځای بدلنون (پرموتيشن) څيوکليکي يا تل بيرته راګرځيدونی ليکندود:

پرموتيشنونه داسې په نامه څيوکليکي ليکندود له لارې هم ورکول کيږي..يو څيکلوس يا تل بيرته راګرځيدنه د يوه توکي او د هغه له څېرو، چې ډيرځله د بدلون يا پرموتيشن له لارې منځ ته راځي، جوړه ده، تر څو چې بيرته هغه پيل توکي يا وتونتوکي ته ورسيږي. د هغو توکو څخه، چې په لومړي تلبېرته راګځيدني کې منځ ته نه راځي، نور څيوکلونه جوړيږي ، تر څو ټول توکي رامنځ ته شي. څيکلونه د توکو د ګڼون(تعداد) ټيټيدونکي يا لوېدونکي ډول تنظيم کيږي او په کړو نوکانوکې يو پر بل پسې ليکل کيږي. هغه څيوکلونه يا تلبيرته راګرځيدوني ، چې اوږدوالی يې ۱ وي نه ليکلکيږي.

د بيلګې په توګه دئ

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1\,4\,6)\ (2\,3)\ (5)$$

همداسې

$$\pi = (1\,4\,6)\ (2\,3)\ .$$

د پرموتيشن ترانسپوني کوونه يا په بل ډول ليکنه او سيګنوم

يو ترانسپوزيشن (ځای بدلون)

$$\tau = (j\ k)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د j او k بدلون دی. ددې ساده يا بنسټيز پرموتيشن ترڼې سره دا پرموتيشن π داسې انځورېدی شي:

$$\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m .$$

دلته برابرازښتوالی (جوړه يا ناجوړه m) يواځنی ټاکلی دی، او

$$\sigma(\pi) = (-1)^m$$

د پرموتيشن مخ نخښې يا د پرموتاشن زيګنوم π په څير π ټاکو يا تعريفوو.

د

$$\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m = \pi \in S_n$$

لپاره او د $k = \pi(n)$ سره دی

$$\tilde{\pi} = (k, n) \circ \pi \in S_{n-1} ,$$

څکه چې د ترانسپوزيشن کمپوزيشن سره n کره په ځای نيول کيږي يا ځای په ځای پاتيږي. اينډوکتيو Induktiv (د ځانګړي په توليز پايونه) کيدی شي و نيول شي يا فرض شي، چې برابرارزښتوالی يا پاريټي د $\tilde{\pi}$ په اينډوڅيري ټوټه ونه کې يواځنی ټاکلې ، پسې د $(-1)^m$ مخنخښه.

ددې لپاره، چې د پرموتيشن

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

سيګنوم و ټاکو، نو

$$(\pi(1), \ldots, \pi(6)) = (6, 5, 3, 1, 2, 4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترانسپوزیشن سوکځیسیو(sukzessiv) پل په پل یو بل پسې) د کانوني لړۍ پرلپسې په ځیر لیکنې ته بیایو:

$$(1\ 6) : \qquad (1\ 5\ 3\ 6\ 2\ 4)$$

$$(2\ 5) : \qquad (1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4)$$

$$(4\ 6) : \qquad (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)\,.$$

په دې پسې یا له دې امله

$$(4\ 6) \circ (2\ 5) \circ (1\ 6) \circ \pi$$

کټمټوالی یا ایدنټیک ده، همداسې

$$\pi = (1\ 6) \circ (2\ 5) \circ (4\ 6)$$

او

$$\sigma(\pi) = (-1)^3$$

الترناتیو یا بدیلي سرې کړی شي څویکلیکي لیکډوله وکارول شي:

$$\pi = (1\ 6\ 4)\ \ (2\ 5)\ \ (3)\ .$$

ځکه چې د k اوږدوالي یوه څیوکلوس τ لپاره $\sigma(\tau) = (-1)^{k-1}$, دی

$$\sigma(\pi) = (-1)^2 \cdot (-1)^1 \cdot (-1)^0 = -1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مودولوس Modulus

(که دوه ګڼونه ۱۳ او ۵ ولرو او ۱۳ په ۵ ووېشو، نو لاس ته ۲ راځي د ۳ پاتې سره. دا داسې لیکو:

13 : 5 = 2

پاتې 3

لیکلی شو 0 = 5 : (13-3) دا په دې مانا چې ګڼ ۵ ګڼ13-3 وېشي

پیژند (تاکونکی یا تعریف) که تولګنونهx او y او یو طبیعي عدد یا پیداېښتي ګڼ a ولرو ، نو وایو ،، x کونګروانځy مودولو a (mod a) ده،، په نخښه x≡ymod a ، که x≡ymoda نه وي، نو واي چې : x د y سره کونګروانځ مودولو a(moda) نه ده ،،یعني x≢ymod a

مودولوس Modulus

لرو a > 0 او $x \in \mathbb{R}$. د $x \bmod a$ (لوستل : x مودولو a)لاندې په a باندې د x وېشنې پاتې پوهيږو، دا په دې مانا، چې

$$x \bmod a = x - na \in [0, a)$$

د يوه تولګڼn لپاره . که باور ولري

$$x \bmod a = y \bmod a \, ,$$

نو x او y کونګروانځ مودولو a بلل کيږي.

پاتیتولګی(باقي-)(مودولو) modulo n

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېرۍ $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ د ابل ګروپ جوړوي د زياتون يا جمعې

او د $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} \bmod n$ سره په نخښه کيږي.

پام دې وي، چې ضرب modulo n په $\mathbb{Z}_n$ د ګروپ جوړښت نه تعريفوي، خکه چې 0 په څېر توکی نه لري.

د دې روښانه بيلګې $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ په بنسټ اسان ارماښت کيدی شي، چې زياتون يا جمعې، همداسې کمون يا تفرق د مودول – کارونې يا عمليې سره زغموړ دي.

د بيلګې په توګه دی

$$1 + 3 \bmod 4 = 0, \quad 0 - 2 \bmod 4 = 2$$

او داسې نور

سره له دې ځل مودولو ۴ (modulo 4) مو د ګروپ تيوري ته نه لارښودوي، خکه چې

$$1 \cdot 2 \bmod 4 = 3 \cdot 2 \bmod 4 = 2 .$$

دا د ناپيلي توکې د يوائيوالي سره په مخامخوالي يا تضادګې پروت دی

بدن(جسم يا تن يا پټی Field)

يوه ډېرئ (سټ) چې په هغه کې يوه جمعه ``+,, او يو ضرب ``· ,,تعريف وي، بدن يا پټی يا ورشو بلل کيږي، که لاندې خويونه په کې باور ولري:

اول – د ګروپ د جمعې يا زياتيز جوړښت: $(K, +)$ يو ابل ګروپ دی د توکی(سفرتوکي) سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې د ټولو $a, b \in K$ لپاره باور لري.

$a+b$	$=$	$b+a$
$(a+b)+c$	$=$	$a+(b+c)$
$a+0$	$=$	a
$a+(-a)$	$=$	$0\,,$

دویم – دلته $(-a)$ د a په څېر یا معکوس توکی دی.

دریم – د ضرب ګروپي جوړښت: $(K\backslash\{0\},\cdot)$ یو د ابل ګروپ دی د ناپیلي توکي 1 سره(یوي توکی یا که غواړئ واحد توکی) دا په دې معنا چې د ټولو $a, b, c \in K\backslash\{0\}$ لپاره باور لري:

چیرته چې $(-a)$ و a ته په څېر یا پرعکس توکی دی.

د ضرب ګروپي جزړښت : $(K\backslash\{0\},\cdot)$ یو ابلګروپ دی د ناپیلي توکي (یوي توکی)، دا په دې معنا چې د تولو $a, b, c \in K\backslash\{0\}$ لپاره صدق کوي

a.b=ba

(a,b).c=a.(b.c)

a.1=a

1= $a \cdot a^{-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې a^{-1} د a په څټ يا برعکس توکی دی.

ديستربيبوتيو قانون: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ د ټول $a,b,c\in K$ لپاره.

د ريښتونو اعدادو $\mathbb{Q}$ ډېرۍ، د حقيقي اعدادو $\mathbb{R}$ ډېرۍ او د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ ډېرۍ

د شميرنې قاعده يې سملاسي د اړونده تړنې له لارې لاس ته راځي. صفرتوکی يې 0 او يويتوکی يې 1.

همداسې يې د کمپلکس عدد $z=x+\mathrm{i}y\neq 0$ يوې توکی نسبت و ضرب ته $w=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}$, دی، ځکه چې لرو:

$$z\cdot w=(x+\mathrm{i}y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-\mathrm{i}^2y^2}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-xy+yx}{x^2+y^2}=1+\mathrm{i}0\,.$$

لومړني تنونه يا پټي يا ورشو

د هر لومړني عدد p لپاره $\mathbb{Z}_p=\{0,1,\ldots,p-1\}$ د ډېريو يو تن دی د د جمعې او ضرب موډولو p سره.

د په څټ – يا برعکس توکي شتون پورې ، نسبت و ضرب ته د تنونو لپاره همدا اوس په ټول اعدادو کې او د باقيتولګيو لپاره به ميراث پاتې شي.

د $a\in\{2,\ldots,p-1\}$ لپاره کيدی شي a^{-1} په لاندې توګه جوړ شي. لومړی سړی په پام کې نيسي چې، $a^i\neq 0 \bmod p\quad \forall i\in\mathbb{N}\,.$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $a^i = np$ وی، نو د لومړي تن تجزيې څخه به ولرو، چې په p ويشل کيږي، څه چې د $a < p$ له امله ناشونی دی. که اوس پرلپسې $a^i \bmod p, \quad i = 0, \ldots, p-1$ په پام کې ونيسو

، نو بايد کم له کمه يو پاتې دوه واره رامنځ ته شي، يعنې
$$a^{i_1} = a^{i_2} \bmod p\,, \quad i_1 < i_2$$
به ضدق وکړي. له دې سره به وي:
$$a^{i_2-i_1} = a^{i_2-i_1-1} a = 1 \bmod p\,,$$

له کوم سره به چې a ته په برعکس توکی پيدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې برعکس توکي دي

$3 \bmod 5$	$=$	2^{-1}
$2 \bmod 5$	$=$	3^{-1}
$4 \bmod 5\,.$	$=$	4^{-1}

که $a^i = np$ وی، نو د لومړني ضريب تجزيې څخه به مو لرودی، چې p وېشي، څه چې د $a < p$ له امله ناشوني دي. که اوس پرلپسي يا $a^i \bmod p, \quad i = 0, \ldots, p-1\,,$ په پام کې ونيسو، نو بايد کم له کمه يو باقي دوه واره رامنځ ته شي، پس $a^{i_2-i_1} = a^{i_2-i_1-1} a = 1 \bmod p\,,$ به صدق وکړي د کوم سره به چې د a برعکس توکی پيدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کي په څټ – يا برعکس توکي دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2^{-1} = 3 \bmod 5$$

$$3^{-1} = 2 \bmod 5$$

$$4^{-1} = 4 \bmod 5\,.$$

د دې سره د بيلګې په توګه $\frac{(2+4)}{3} \bmod 5 = \frac{1}{3} \bmod 5 = 2$ همغږيز دی له دې لاندې سره.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \bmod 5 = & \quad 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \bmod 5 \\ = & \quad 4 + 3 \bmod 5 \\ = & \quad 2\,. \end{aligned}$$

ګالويز – بدن Galois-Körper

تن$GF[2^2]$ د 4 توکو سره د جمعې او ضرب د ترڼو له لارې کيدی شی ورکړل شي:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b

(c) ketabton.com: The Digital Library

a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

دا مخ ته پروت جوړښت اصول داسې ساده نه دی، لکه په لومړنيو تنونو $\mathbb{Z}_p$ کې او د ګالويز له خوا پيدا شوي دي. دا په ترڅلېږه توګه کېدی شي د تنرنر ځخه د p^ℓ توکو سره $\ell \in \mathbb{N}$، د په خوښه p لپاره لومړنی عدد لپاره اجرا کړي يا سرته ورسوي، او کېدی شي و ښوول شي چې په دې توګه ټول تنونه لاس ته راوړي.

په ګروبونو کې تورنی (لکه د مسابقې لپاره جمتو کيدو ګروپ)

به کابل، غزني او ننګرهار کې په څلورو مهالوېش(وختونو) د نهو ډلو په منځ کې مسابقه بيل کيږي. د لته دي ،، هر يو د هر يو په مقابل کې،، لوبه وکړي. دا يه دې معنا چې په هر مهالوېش دې درې ګروپونه د هر درې ډلو څخه لوبه وکړي، چې په هرو دې درې ځايونو کې دې لوبه وشي. ستونځی په دې کې پرتې دي، چې يو بل بايد سره غوځ يا قطعه نه کړي، هره جوړه د $3 \cdot 4$ ګروپونو کې بايد يو ځل رامنځ ته شی

د شميرپوهنې له مخې دا مسأله په لاندې ډول فرمولولی شو: دا 3 توکيزې ډېرې

$$S_{0,k} \cup S_{1,k} \cup S_{2,k} = \{1, \ldots, 9\}, \quad k = 0, \ldots, 3$$

دې وټاکل شي، چې د دوه ډېريو غوڅې ماکسيمال يو توکی خوندي ولري.

د دې شرايطو سره د دې مخه نيول کيږي، چې د ګروپونو ډېری چې د لوبو ورځې يې مختلفې دي، ګډه د لوبدلو جوړه خوندي ولري..

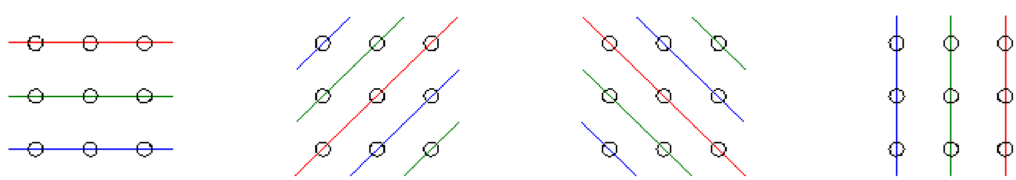
(c) ketabton.com: The Digital Library

د $S_{j,k}$ ډېرى د لومړنى تن $\mathbb{Z}_3$ په مرسته جوړ ېدلاى شى.. د لته د لوبډلې نمرې $(\alpha,\beta), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_3$ سره په 9 ,... ,1 د نهه توکیزه ،، پاى سطحي،، دټکو نخښنه کېدى شي او دا په نخښنه شوي ،، پاى سطحه،، ډېرى د دي سطحي د کربنوسره په نخښنه کېدى شي:

$$S_{j,k} = \{(\alpha, k\cdot\alpha + j \bmod 3):\ \alpha = 0,1,2\},$$ (کربنه د $k = 0,1,2)$ جګېدني سره)

$$S_{j,3} = \{(j,\alpha):\ \alpha = 0,1,2\}$$ (ولاړه یا عمود کربنه).

داګروپ وېشنه په لاندې شکل کي لیدوړ ده:



همدا مسأله د 16 تیمونو سره ده ، 4 ښارونو او پنځه مهالوېش سره په ورته ډول حل کېدى شي. سرى 4-توکیزه ګالویز تن $GF[2^2]$ او لاندې ګروپ وېش لاس ته راوړو:

	لوبځاى1	لوبځاى2	لوبځاى3	لوبځاى4
لومړى لوبورځ	1,2,3,4	5,6,7,8	9,10,11,12	13,14,15,16
2-مه لوبورځ	1,6,11,16	5,2,15,12	9,14,3,8	13,10,7,4
3 -مه لوبورځ	1,10,15,8	5,14,11,4	9,2,7,16	13,6,3,12
4 -مه لوبورځ	1,14,7,12	5,10,3,16	9,6,15,4	13,2,11,8

(c) ketabton.com: The Digital Library

5 -مه لوبورځ	1,5,9,13	2,6,10,14	3,7,11,15	4,8,12,16

په ټولیزه توګه د لیل د q^2 لوبډلو او q ښارونو لپاره دلیل شووني دی، هلته چې q د یوه لومړني عدد توان دی، ځکه چې د داسې یوه عدد q لپاره تن GF(q) شتون لري.

وکتورفضا یا وکتوري فضا

یو ابل ګروپ $(V,+)$ وکتورفضا په یوه تن K یا K -وکتورفضا بلل کیږي، که یو سکالار ضرب ``·,, تعریف وي، چې $(\lambda,v)\in K\times V$ په ضرب $\lambda\cdot v\in V$ تنظیم او لاندې خویونه ولري..

د ټولو سکالار $\lambda,\lambda_1,\lambda_2\in K$ او ټولو وکتورونو v، v_1، $v_2\in V$ لپاره صدق کوي:

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1+\lambda_2)\cdot v &= \lambda_1\cdot v+\lambda_2\cdot v\\
\lambda\cdot(v_1+v_2) &= \lambda\cdot v_1+\lambda\cdot v_2\\
(\lambda_1\cdot\lambda_2)\cdot v &= \lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot v)\\
1\cdot v &= v\,.
\end{aligned}
$$

که $K=\mathbb{R}$ یا $K=\mathbb{C}$ وی، نو سړی د یوه حقیقي همداسې کمپلکس وکتورفضا غږیږو او په ټولیزه توګه د سکالار ضرب لپاره ټکي ځخه تېرېږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي، چې د جمعي علامه د V په همداسې په K کې کارول کیږي. همداسې ضرب هم په K کې د ضرب لپاره کارول کیږي. پای

د تعریف سره سم په ځانګړي ډول په وکتورفضا کې د ګروپ اکسیومونه ضدق کوی:

اسوشیاتیو قانون:

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

ضفر توکی(صفروکتور) : تیک یو توکی $0 \in V$ د $v + 0 = v$ سره شتون لري ، د ټول $v \in V$ لپاره.

نسبت و جمعي ته په ځنډ – یا معکوس توکی: د ټولو $v \in V$ لپاره تیک یو $-v \in V$ شتون لري د لاندې سره:

$$v + (-v) = 0$$

د جمعي بدلون قانو:

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

غوښتونکی شرایط تنظیموي، چې جمعه، کمون یا تفریق او ضرب دا ورسره بلد شمیرقوانین پوره کوي.. سرې داسې کړی شي چې ضرب سر ته ورسوي:

$$\left(\sum_i \lambda_i\right) \cdot \left(\sum_j v_j\right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \cdot v_j \,.$$

سربیره پردې د مخ نخښي قانون صدق کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-(-v) = (-1)\cdot(-v) = v, \quad -\left(\sum_i v_i\right) = \sum_i -v_i\,.$$

د Gard ≤ n (درجې) پولینوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (a_i \in \mathbb{C}),$$

یو حقیقي (کمپلکس) وکتور فضا جوړوي،، د کوم سره چې جمعه او سکالار ضرب په ورته نږدې ډول تعریف دي:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\lambda p)(x) = \lambda p(x)\,.$$

د وکتورفضا خویونه ساده تصدیق کیدلی شي.

په پام کې لرو چې پولینوم د n درجې سره، دا په دې معنا چې د $a_n \neq 0$ سره وکتورفضا نه جوړوی. د جمعې جوړول کیدی شي د درجې کموالی ته لاربنود کړي. د بیلگې په توگه دی:

$$(2x - x^2) + (3 + x^2) = 3 + 2x\,.$$

پای

حقیقي پرلپسي (a_n) د $n \in \mathbb{N}$ سره یوه حقیقي وکتورفضا د عملیې سره جوړوي

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \quad \lambda(a_n) = (\lambda a_n)\,.$$

که سربیره پردې و غوښتل شي، چې ایا د وکتور سترکچر یا جوړښت خرابیدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بېلګې په توګه یوغږیزې پرلپسې وکتور فضا نه جوړوی. د مونوتون پرلپسیو جمعه اړیین نه ده یوغږیز وی، لکه دا لاندې بېلګه ښایې:

$$(4n) + (-n^2)$$

برعکس به بندوالی یا محدودیت یو منل شوی خوی وی..

پای

د n - ګوني وکتورفضا

د K تن لپاره n -ګوني یا n-وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in K$$

فضا دا K وکتورفضا K^n د کمپوننت ډوله تعریف شوي جمعي او سکالار ضرب سره، دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

او

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $a_i, b_i, \lambda \in K$ لپاره .

په زياتو حالاتو کې ساده دی چې nګونی يا nتوپل د ليکې وکتور په څېر

$$a = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{t}}$$

همداسې

$$a^{\mathrm{t}} = (a_1, \ldots, a_n)$$

وليکل شي. د ترانسپوزيشن سيومبول ``$\mathtt{t}$,, سره د ستاندارد قرارداد څخه د متو وکتور په حيث توپيرېږي.

پای

لاندې فضا يا برخه فضا sub space

د يوه K -وکتورفضا V پېرخه ډېری U، چې د په V کې تعريف شوې جمعې او سکالار ضرب سره پخپله وکتورفضا جوړوی، د V لاندې فضا يا برخه فضا بلل کيږي.

برخه فضا U زيات وخت د V توکو شرايطو سره تعريفيږی:

$$U = \{v \in V : A(v)\},$$

د کوم سره چېA يوه په نخښنه کوی، چې د ټولو $v \in V$ لپاره بايد پوره وی.

د دې لپاره چې و ازمايو چې ايا U د V لاندې فضا ده، کفايت کوي چې وښايو چې U نسبت د جمعې او سکالار ضرب سره تړلې ده:

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U\,.$$

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U\,.$$

لیکونکي اپپ، کیمرلې

برخفضاوې زیات وخت د ورزیاتو(برعلاوه؟) ځانګړ شوو خویونو له لارې منځ ته راځي. که د حقیقي توابعو $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$ وکتورفضا په پام کې ونیسو، نو د بېلګې په توګه جوړه توابع $f(x) = f(-x)$ د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره یوه برخفضا جوړوی.
نورې بیلګې همداسې معکوسې بېلګې په لاندې جدول کې ورکړې شوي دی.

لاندې فضا	خویونه
هو	ناجوړه
ja هو	بند یا مخدود
نه	یوغږیز
هو	نابرېکیدونکي
نه	مثبت
هو	ګربنیز

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه K -وکتورفضا د هر وکتور $d \neq 0$ لپاره د صفر څخه تیرېدونکي کرښه $v = \lambda d, \quad \lambda \in K$ یوه لاندې – یا برخفضا جوړوي.

په هر حالت یوه کرښه چې له صفر0 نه تیریږي، لاندې یا برخفضا نه ده. د بېلګې په توګه

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

په کرښه $(1,0)^t$

پرته ده، مګر $(2,0)^t$ نه.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

ګرښیز کمبینیشنLinearkombination

په یوه K - وکتورفضا V وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_m$ لپاره سړی

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

د سکالارو $\lambda_i \in K$ سره د وکتورونو v_i ګرښیز کمبینیشن بولي یا نوموي.

په ټولیزه توګه د $W \subset V$ لپاره د W څخه کرښیز کمبینېشن لاندې ، د W څخه د ناپای ډېرو وکتورونو یو کرښیز کمبینېشن پوهیږو.

لیکونکي: اېپ، کیمرلې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتور $v = (1,2,3)^t$ د وکتورونو $v_1 = (3,4,5)^t,\ v_2 = (1,1,1)^t,$ یو کرښیز کمبینېشن دی، ځکه چې $v = v_1 - 2v_2$.

د دې برعکس $v = (1,0)^t$ د وکتورونو $v_1 = (0,1)^t,\ v_2 = (0,2)^t,$ کرښیز کمبینېشن نه دی.،ځکه چې د v_1 او v_2 کرښیز پولینوم بڼه $(0,*)^t$ لری..

بالاخره کېدی شي $v = (0,0,0,0)^t$ په مختلفو ډولونو د وکتورونو

$$v_1 = (1,1,0,0)^t,\ v_2 = (0,2,2,0)^t,\ v_3 = (0,0,3,3)^t,\ v_4 = (4,0,0,4)^t$$

کرښیز کمبینیشن په څیر انځور شي:

$$v = \lambda(12v_1 - 6v_2 + 4v_3 - 3v_4)$$

د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

کرښیزه هیولې یا سپاین یا سمڅ Lineare Hülle(span)

یادونه: د په یوه فضا کې د خوندې شیانو او د باندې په منځ کې یو دیوال جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د K - وکتورفضا V د وکتورونو $v_1, \ldots, v_n$ ټولو ګرښيزو کمبينېشنونو ډېرۍ د وکتورونو v_i کرښيزه سپاين يا هيولې(يو څه يا کوټی يا ...و چې په فضا کې يو ځا رابندوي (ژباړی)) بلل کيږي او داسې يې په نخښه کوو:

$$\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n) = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot v_i : \lambda_i \in K\}.$$

په ورته توګه سړی د $\mathrm{span}(U)$ وکتورونو د يوې ډېرۍ U لپاره د U د ټولو کرښيزوکمبينېشنونو ډېرۍ تعريفوی..

$\mathrm{span}(U)$ د هرې برخډېرۍ $U \in V$ لپاره د V يو برخفضا ده.

ليکونکي: اپ، کيمرلې

که په $\mathbb{R}^3$ کې دوه مختلفې د سرچينې کرښې g_1 او g_2 په پام کې ونيسو، د بېلګې په توګه

$$g_1 : x = \lambda_1(1,0,0)^t,\ g_2 : x = \lambda_2(0,1,0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

دا هريو د لوريزو وکتورونو کرښيزه سپاين يا ګرښيزه هيولې دي، دلته

$$v_1 = (1,0,0)^t,\ v_2 = (0,1,0)^t\,.$$

نو د وکتورونو v_1 او v_2 کرښيزه هيولې يا سپاين $E = \mathrm{span}(v_1, v_2)$ يوه سطحه ده، چې کرښې g_1 او g_2 خوندي لري، پس دلته

$$E : x = \lambda_1(1,0,0)^t + \lambda_2(0,1,0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\ ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې

$$E = \{x : x_3 = 0\}$$

ليکونکي اپ، هيوليک

ننوتی – یا محدب کمبينيشن Konvexkombination

په يوه حقيقي وکتورفضا V کې يو کرښيز کمبينيشن

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

د $\lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$ سره د وکتورونو $v_i \in V$ کنوکسکمبينيشن بلل کيږي.

ليکونکي اپ، هيوليک

ننوتی يا محدبه هيبولې يا سپاين(المانی ويينه :شپاين)Konvexe Hülle

د يوه حقيقي وکتورفضا V د يوې برخڼېری M محدبه هيولې د ټولو محدب کمبېشنونو

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \qquad (\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1)$$

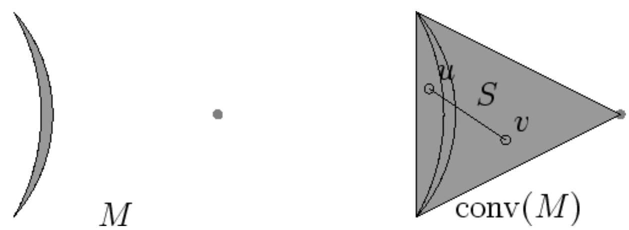
ډېری ده د $v_i \in M$ سره او د $\operatorname{conv}(M)$ سره ليکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمككچيز يا هندسي $\mathrm{conv}(M)$ خورا کوچنی ډېری ده، چې M خوندی لري، کومه چې د هرو دوه توکو u,v لپاره د هغو ترېنکربشه

$$S = \{\lambda u + (1-\lambda)v : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

هم خوندی لري



ليکونکي اپ، هيوليګ

حقيقي- ياريښتونی سکالار ضرب Reelles Skalarprodukt

په يوه حقيقي وکتور فضا V باندې يو سکالارضرب يو تابع

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

ده، دلاندې خويونو سره:

مثبتوالی :

$\langle v,v \rangle > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

سيومتري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$$

کرښيزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

دلته $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{R}$ په خوښه وکتورونه هرداسي سکالار.

د سيومتري په بنسټ يو حقيقي سکالار ضرب د دويم دليل په بنسټ هم کرښيز دی، يعنې په V يو بي کرښيزه Bilinearform بڼه.

ليکونکي اپ، هيوليک، کرايخ

سکالار ضرب Skalarprodukt

په يو کمپلکس وکتورفضا V يو سکالار ضرب يو فنکشن

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

دی، د لاندې خويونو سره:

مثبتوالی:

$\langle v, v\rangle > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

مائل سيومتري:

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

كرښيزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ همداسي $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وکتورونه همداسي سکالار دي.

مایل سیومتریکSchiefsymmetrie :

كرښيزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وكت.ورونه همداسۍ سکلار دي

د مائل سيومتري په اساس يو كمپلكس سكالارضرب نسبت و دويمي متحولې ته ګرښيز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\varrho}\langle u, w\rangle\,.$$

فقط د حقيقي سكالار لپاره كمپلكس كونجوګېشن بې مفهومه دی.

ليكونكي اپ، هيوليک، كرايخ

دا ترې لاس ته راغلي اسيومتري اړيين ده، چې د كمپلكس سكالارضرب مثبتوالی تضمينوي. د بېلګې په توګه دی:

$$\langle \mathrm{i}v, \mathrm{i}v\rangle \neq \mathrm{i}^2\langle v, v\rangle = -\langle v, v\rangle < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $v \neq 0$ لپاره.

له دی زيات صدق کوي:

$$\langle iv, iv \rangle = (i\bar{i})\langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle > 0.$$

مثبتوالی اړيين دو چې له $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ لارې ئو نورم تعريف کړاي شو.

ليکونکي هيوليګ، هيورنر

د وکتورونو $x, y \in \mathbb{R}^2$ لپاره يوه دحقيقي سکالار ضربونو د ممکنه تعريفونو لړی تر څېړني نيسو. په لاندې جدول ورکړ شوي، چې کوم خويونه پوره دي.

خويونه	سکالار ځل
ټول	$10x_1y_1 + x_2y_2$
کرښيزوالی	x_1y_2
مثبتوالی، سيومتري	$\lvert x_1y_1 \rvert + \lvert x_2y_2 \rvert$
سيومتري	$x_1x_2 + y_1y_2$

فقط لومړی تعريف ټول غوښتوني شرايط پوره کوي. په کملکس وکتورفضا $\mathbb{C}^2$ کې په هر ډول دا حالت نه دی، هم مثبتوالی او هم مائل سيومتري پوره نه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle (\mathrm{i},0),(\mathrm{i},0)\rangle = \qquad 10\mathrm{i}^2 = -10 < 0$$

$$\langle (\mathrm{i},0),(1,0)\rangle = 10\mathrm{i} \neq \overline{\langle (1,0),(\mathrm{i},0)\rangle} = -10\mathrm{i}$$

په داسي حالت کې چې د دويم Arguments اجزا وې يا کمپوننتونه کمپلمس کنجوګيرت کړي، پرابلک له منځه تلاي شي. تعريف

$$\langle x,y\rangle = 10x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

په کمپلکس حالت غزونه راکوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د کوشي-شوارځ – نامساوات(نابرابرون)

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

سکالار ضرب کېدی شي د اسوڅياتيو قانون له مخې تخمين شي:

$$|\langle u,v\rangle| \leq |u||v|, \quad |w| = \sqrt{\langle w,w\rangle}\,.$$

مساوات ټيک هلته صدق کوي، که صدق ولري $u \parallel v$.

که $v = \lambda u$ وي، لکه څنګه چې غوښتل کيږي مساوات صدق کوي.

د u همداسې د v ضرب د يوه سکالار سره نامساوات تغير نه خوري. کېدی شي ونيسو(فرض کړو) چې صدق کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|u|^2 = |v|^2 = 1\,.$$

که د سکالار ضرب سره (دلیل حقیقي حالت په بر کې نیسي) دي

$$\langle u, v\rangle = r\exp(\mathrm{i}\varphi)\,, \quad r > 0\,,$$

د $\lambda = \exp(\mathrm{i}\varphi)$ سره د ناغبرګو(ناموازي) وکتورونو لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} 0 &< \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle \\ &= 1 + \lambda\bar\lambda - \lambda\overline{r\exp(\mathrm{i}\varphi)} - \bar\lambda r\exp(\mathrm{i}\varphi) \\ &= 1 + 1 - r - r\,. \end{aligned}$$

له دې سرره $r = |\langle u, v\rangle| < 1$ باور لري، ده په دې معنا چې غوښتنه مو.

نورم Normر دولیزوال

په یوه حقیقي یا کمپلکس وکتورفضا V نورم یا تابع $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ ده

د لاندې خویونو سره:

مثبتوالی:

$\|v\| > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

هوموګینیوالی یا برابیردولیزوالی Homogenität :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

درېګودې (مثلث-) نامساوات:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

د لته u, v په خوښه وکتورونه دي او λ يو په خوښه سکالار.

دد نورم $d(u,v) = \|u-v\|$ په مرسته کېدی شي د دوه وکتورونو ترمنځ واټن تعريف شي.

د سکالار ضرب نورم Skalarprodukt - Norm

په يوه حقيقي يا کمپلکس وکتورفضا V د يوه سکالار ضرب سره ، نورم له

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in V$$

سره په يوه معنا دی.

مثبتوالی او هوموګينيټي (ورته والی) تړلې د سکالارضرب د ورته خويونو څخه لاس ته راځي. د مثلث مساوات له

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle + \underbrace{\langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle}}_{\in \mathbb{R}} + \langle v, v \rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\leq |u|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + |v|^2$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$$

$$= (|u| + |v|)^2$$

څخه د ريښې نيونې له لارې لاس ته راځي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ماکسيموم - نورم Maximum-Norm

د وکتورونو فضاو $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ لپاره

$$\|z\|_\infty = \max_i |z_i|$$

ماسکيموم – نورم په نخښنه کوي.

دريګوډي نامساوات پوره دي، ځکه چې د $z = x + y$ لپاره باور لري

$$\max_i |z_i| = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i \left(|x_i| + |y_i|\right) \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \,.$$

ماکسيموم-نورم کېدی شي د وزنونو $w_i \in \mathbb{R}_+$ د پيل کولو يا رامنځ ته کولو سره توليز شي:

$$\|z\|_{\infty,w} = \max_i (w_i |z_i|) \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حقيقي- يا ريل وكتورونو سكالار ضربSkalarprodukt reeller Vektoren

د وكتورونو $v = (v_1, \ldots, v_n)^t, w = (w_1, \ldots, w_n)^t \in \mathbb{R}^n$ لپاره كانونيكي ضرب د

$$v^t w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

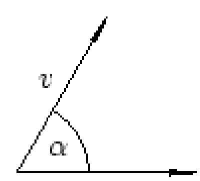
سره تعريف دی د وركډشوي assoziierten نورم

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}\,.$$

سره.

$$v^t w = |v||w| \cos \alpha$$

هندسي كېدی شي دا نورم د له لارې تعريف شي، د v او w ترمنځ كوچنی زاويه يا كونج α په نخښه كوي، چې د u او v څخه غزيدلې سطحې كې اندازه كيږي.



د سكالار ضرب خويونه ساده ازمايل كيږي.

د هدسي تعريف ورته والی د كوساين جلې سره تصديقيږي(لومړی د $n = 2$ لپاره).

دې پسې د $v = (v_1, v_2)^t$ او $w = (w_1, w_2)^t$ سره باور لري، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\alpha \ .$$

که ځاي په ځاي کړو، نو ترې لاس ته راځي

$$(v_1-w_1)^2 + (v_2-w_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2|v||w|\cos\alpha$$

او د بنه بدلو سره ښونه يا ثبوت.

د $n \geq 2$ لپاره v او w په $\mathbb{R}^n$ کې يوه سطحه اواره(هواروي) وي يا غزوي. ورته شمېرنه په دې سطحه کې ښايي، چې د په خوښه ډيمنزيونون (ابعادو يا پراخېدونو) $n \geq 2$ لپاره تيک دی.

د کمپلکس وکتورونو سکالار ضربSkalarprodukt komplexer Vektoren

د وکتورونو $x = (x_1,\dots,x_n)^t, y = (y_1,\dots,y_n)^t \in \mathbb{C}^n$ لپاره کانونيکي

$$y^*x = \sum_{j=1}^{n} x_j\bar{y}_j$$

سکالار ضرب د له خوا تعريف دی د شسوخيري نورمونو

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2} \, .$$

سره.

دا سوپرسکريپت له دې سره د يوه وکتور ترانسپوزيشن او کمپلکس کنجوګېشن په ګوته کوي.

دا تعريف حقيقي حالت خوندي لري، چې په هغو کې کمپلکس کنجوګيري حالت پوره وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

که له $\mathbb{C}^2$ څخه د وکتورونو
سکالارضرب جوړوو، نو لاس ته راځي:

$$\langle x, y\rangle = (1+2\mathrm{i})\cdot 2 + (-2-\mathrm{i})\cdot \overline{2\mathrm{i}} = 2+4\mathrm{i}+4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2 = 2+8\mathrm{i}-2 = 8\mathrm{i}\,.$$

پس د دوه کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب اړیین نه دی چې حقیقي وي.

د اسوڅییري نورم سره د دویم وکتور کنجوګیري کونه غوره رول لري. بې له کنجوګیري کونې څخه به په ضرب کې لومړي وکتور لاندې نورم لرودی

$$\sqrt{(1+2\mathrm{i})^2 + (-2-\mathrm{i})^2} = \sqrt{1+4\mathrm{i}-4+4+4\mathrm{i}-1} = \sqrt{8\mathrm{i}} \notin \mathbb{R}\,,$$

او د دویم وکتور لپاره به په همدې ډول نورم نامثبت وی:

$$\sqrt{2^2 + (2\mathrm{i})^2} = \sqrt{4-4} = 0 \not> 0\,.$$

د دوه وکتورونو ترمنځ کونج Winkel zwischen Vektoren

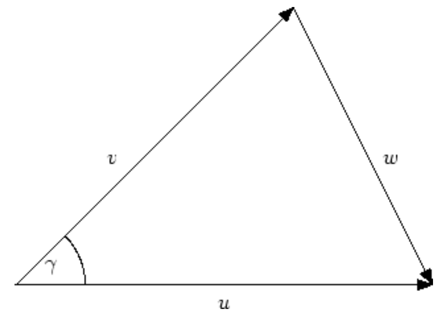
$$\cos\sphericalangle(u,v) = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}$$

د یوه حقیقي سکالار ضرب لپاره د لخوا

په $[0,\pi]$ کې د u او v ترمنځ یوکونج تعریفوي. په ځانګړې توګه u او v اورتوګونال، $u\perp v$ ، بولو که $\langle u, v\rangle = 0$ ولرو.

د کونج تعریف په $\mathbb{R}^2$ کې د وکتورونو لپاره د کوساین له مخې رابولي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



په يوه درېګوډي يا مثلث کې د اړخونو $|u|,|v|,|w|$ اوږدوالي لپاره اړيکې باور لري:

$$|w|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\sphericalangle(u,v)\ .$$

له بلې خوا د سکالار ضرب له تعريف څخه

$$|w|^2 = |v-u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2\langle u,v\rangle\ ,$$

د کونج تعريف د پرتلې له لارې لاس ته راځي.

د په خوښه حقيقي سکالارضرب لپاره د کوشي-شورڅ-مساوات په بنسټ لرو:

$$\frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|} \in [-1,1]\ .$$

وېش کېدی شي په $[0,\pi]$ کې د يوه کونج د کوساين سره برابر کيښوول شي يا ځاي په ځاي شي.

د پيتاګوراس(فيثاغورث) جمله Satz des Pythagoras

د يوه سکالارضرب-نورم د اورتوګونال يا عکود وکتورونو u او v لپاره

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2\ .$$

باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0,\ \text{da}\ u\perp v} + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=0,\ \text{da}\ v\perp u} + \langle v,v\rangle =$$

$$= |u|^2 + |v|^2 .$$

دا حمله د پيتاګوراس جملې تر نامه شهرت لري(569-475 v. Chr)، سره له دې چې دا له دې 1000 کاله د مخه بابليانو پېژندله.

امکان لري، چې پيتاګوراس به لومړنی وو، چې دا جمله يې ثبوت کړې.

د پيتاګوراس درېګونيPythagoräisches Tripel

د پيتاګوراس درېګونو سره درې طبيعي اعداد l, m, n بلل کيږي، د $l^2 + m^2 = n^2$, سره، د بېلګې په توګه $(3, 4, 5)$.

يو مثلث چې د اړخونو اوږدوالي نسبت يې د پيتاګوراس درېګونې پوره کوي، د پيتاګوراس جمله پوره کوي او له دې امله دا ولارګوډيز يا ولاړکونجيز او که غواړی قايم االزاويه دي.

مصريانو ممکن دا د ولاړګوډ د لاس ته راوړلو لپاره کارولی وي: دوي د يوې رسی يا پړي څخه کار رخسته، چې رابند او ۱۲ ګنډې د برابر يون (واحد)اوږدوالي سره درلودې. که دې رسی يو درېګوډی داسي جوړ شي، چې اخونه يې درې، څلور، پنځه يوونه يا واحده اوږده وي، نو د لنډو اړخونو ترمنځ پروت کوج ولاړ يا عمود دی.

هر ناجوړه يا طاق عدد $l \geq 3$ کېدی شي د عددونو $m = (l^2 - 1)/2$ او $n = (l^2 + 1)/2$ سره د يو پيتاګوراس درېګوني ته پوره يا مکمل شي، ځکه چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$l^2+\frac{l^4-2l^2+1}{4}=\frac{l^4+2l^2+1}{4}=\left(\frac{l^2+1}{2}\right)^2 .$$

د دې درېګوني له 2 سره ضرب له لارې يو درېګونی لاس ته راځي، د هر ټول عدد $l \geq 6$ لپاره.

دا ورکړ شوی جوړخت اصول د يوې طريقې ځانګړی حالت دی، کزمه چې د ؛بينوم د دريم فرمول خڅه لاس ته راحي، [که چې له

$$c^2-b^2=(c-b)(c+b)=a^2$$

لاس ته راځي، که a^2 په دوه مختلفو ضريبونو تجزيه کېدی شي، چې يو يې جوړه کمښت يا تفريق $(=2b)$ ولري. د ناجوړه يا طاق $a=l$ لپاره دا ټوټه کونه $a^2=a^2\cdot 1$ پوره ده. لاس ته راوړو:

$$b=\frac{a^2-1}{2}\ , \quad c=\frac{a^2+1}{2}$$

او له دې سره دا پورته ځانګړی حالت.

کرښيز نابلواکوالی يا خپلواکوالی يا نا تابعيت Lineare Unabhängigkeit

وکتورونه $v_1,\dots,v_m$ کرښيز بلواک بللکيږي، که سکالار $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ شتون ولري د $\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_m v_m=0$

او لږ تر لږه يوه $\alpha_i \neq 0$ سره. په بل حالت کې کرښيز خپلواک بلل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولېږه توګه د وکتورونو يوه ډېرۍ M کرښيز نا بلوک يا خپواکه بلل کيږي، که د M هره پاي برخډېرۍ د کرښيز نا بلوک يا خپلواکه وکتورونو څخه جوړه وي. په بل حالت کې M کرښيزه بلواکه پلل کيږي.

په پام کې دې وي، چې د کرښيز الجبر په موخه په حقيقت کې ناپاي ډېريو ته اجازه ورکړ شوې، مګر فقط ناپاي کرښيوډو کمپينيشنونو ته. د بېلګې په توګه د پرلپسيو وکتورفضا ډېريو کې

$$e=(1,1,\ldots)^{t},\ e_1=(1,0,0,\ldots)^{t},\ e_2=(0,1,0,\ldots)^{t},\ \ldots$$

کرښيز خپلواک دی، سره له دې چې

$$e=\sum_{n\in\mathbb{N}}e_n\,.$$

دي.

د ثابتو پرلپسيو يا ترادفونو د کانونيکي يوون- يا واحدوکتورونو سره پاي انځورونه نه شته.

په $\mathbb{R}^2$ کې دوه وکتورونه تيک هلته کرښيز خپلواک دي، که يو هم د بل ډېر واره نه وي،

د بيلګې په توګه ړکتورونه $(1,0)^{t}$ او $(1,1)^{t}$ کرښيز خپلواک دي، ځکه چې اينسوونه

$$\alpha(1,0)^{t}+\quad\beta(1,1)^{t}=(0,0)^{t}$$

راکوي

$$\beta=\qquad\qquad\alpha=0\,.$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس وکتورونه $(0,0)^t$ او $(2,3)^t$ کرښيز بلواک دي، که

$$0(2,3)^t = (0,0)^t$$

همداسي:

$$1(0,0)^t + 0(2,3)^t = (0,0)^t;$$

پس د صفر وکتور يو ،،نه ترېويال،، يا ساده انځورونه شتون لري.

په $\mathbb{R}^2$ کې د رې وکتورونه u, v, w تل کرښيزبلواک يا تابع دي، ځکه چې لاندې ځاي په ځاي کونه

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

کښته ټاکلي لاينيز هوموجين سيستم ته مو لاربنودوي

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0$$

$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0$$

د α, β, γ لپاره، چې تل يو ناساده حل لري

لکه په دوه بعدي همداسي په $\mathbb{R}^3$ کې دوه بعدي وکتورونه کرښيز بلواک دي، که دا غبرګ(موازي) وي، دا په دې معنا چې که يو وکتور د بل وکتور څو ځله وي.

درې وکتورونه کرښيز بلواک دي، که دوه وکتورونه غبرګ يا موازي وي يا که يو وکتور له دې نورو دوه وکتورونو غزېدلې سطحه کې پروت وي. د بېلګې په توګه د لاندې لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = (1,2,-3)^t,\ v = (4,-6,2)^t,\ w = (-9,3,6)^t$$

لپاره باور لري

$$6u + 3v + 2w = (0,0,0)^t$$

، پس وکتورونه کرښيز بلواک دي.

د تعريف سره سم د کرښيز بلواکوالي لپاره ازمايښت ورته دی يوه هوموجېن کرښيز مساواتسيستم سره

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالار λ_i لپاره. دا په ځانګړي توګه ښايي، چې څلور وکتورونه په $\mathbb{R}^3$ کې تل ګرښيز بلواک يا تابع دي.

بنسټ Basis

د يوه وکتور فضا V برخدېرۍ B د وکتور V يو بنسټ بلل کيږی، که B کرښيز خپلواکه وي او د V يو توليدېدونکی يا جړوېدوکی سيستم وي، دا په دې معناچې که هر وکتور $v \in V$ يو يوائځنی انځورونه د يوه پای کمبينېشن د $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$ سره $b_i \in B$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که B پای $(|B| = n)$ وي ، نو هر وکتور کېدی شي د يوه وضعيه قېمت له لارې سره نسبت و بنسټ ته وليکي:

$$v \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t .$$

د وضعيه قيمت انځورونې

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t ,$$

سره ، دا په نامه کانونيکي ايزومورفيزم، سرې کړی شي يو پای بعدي K -وکتورفضا V د n–ګونی وکتور فضا K^n سره په نخښه کړی شي يا وپېژندلی شي. په ځاګړې توګه کېدی شي چې د پای حقيقي او کمپلکس وکتوري فضا د د لوستلو سره په پروتو تيوپ $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ ځان محدود يا رابند کړي.

لکه د بېلګې په توګه د پولينومونو وکتور فضا يدلکيږي، اړيين نه ده چې وکتورفضا دې پای بنسټ ولري. مګر د د کرښيز الجبر په ساحه کې پای کرښيز کمپېشنونه تر څېړنې لاندې نيول کيږي. د دې لاس ته رځي، چې پرلپسي

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots)^t,\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots)^t,\ \ldots$$

د پرلپسيو د وکتورفضا لپاره بنسټ نه جوړوي. دا د ناپای کرښيز کمبينېشن مطالعه يا راوړنه ، لکه دا چې ځنګه په فوريي لړيو کې رامنځ ته کيږي، په لاس لرو، خو يوه کونورکنځ يا پولې ته يوه تګ کليمه غواړي، يعني د فقط وکتورفضاجوړښت څخه زيات.

بعد يا پراخيدونی Dimension

(c) ketabton.com: The Digital Library

که يو وکتورفضا V يو پاي بنسټ

$$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$$

ولری، نو د بنسټ وکتورونو ګڼون يا تعداد يواځنی ټاکلی او د V بعد ياپراخېدونی بلل کيږي:

$$n = \dim V \ .$$

د

$$V = \{0\}$$

لپاره ليکو $\dim V = 0$ او $\dim V = \infty$ د يو ناپای بنسټ وکتورفضا لپاره.

د ټوليز بنسټ جملې له مخې هر وکتورفضا يو بسټ لری.

د دې لپاره چې وښايو، چې بعدونه يا پراخيدوني يواځني ټاکلی دي، بسيا کوی، چې لاندې ويينه وښايو:

که يوه وکتورفضا n-توکيزه بنسټ

$$b_1, \ldots, b_n \ ,$$

ولري، نو $n+1$ وکتورونه

$$v_1, \ldots, v_{n+1}$$

(او له دې سره د $n+1$ څخه زيات وکتورونه هم) کرښيز بلواک دي.

که دوه بنسټونه د مختلفو ډېرو وکتورونو سره شته وي، نو د بنښټوکتورونه به کرښيز خپلواکوالی ته يو تضاد لاس ته راشي.

پورتنۍ غوښتنه يا ثبوت کيدی شي د n پسې د ايندکشن له لارې و ښوول شي.

د ايندکشن پل لپاره (اندکشن پيل $n = 1$ ساده دی) که د وکتورونو v_i بنسټ انځورونه راواخلو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} b_j, \quad i = 1, \ldots, n+1 \,.$$

.

باور لري:

$$\gamma_{i,1} = \cdots = \gamma_{i,n} = 0,$$
،

نو دی ، او کرښیزبلواکوالی همدا اوس و ښوول شو. نو کیدی شي د مناسب نمره کولو له لارې ونیسي، چې $\gamma_{n+1,n} \neq 0$. له پورته مساوات څخه په راوتنې یا پیل سړی اوس ومتورونه تعریفوي، کوم چې د $n-1$ وکتورونو $b_1, \ldots, b_{n-1}$ څخه د کرښیز کمبینیشن په څیر انځوریدلای شي:

$$v_i' = v_i - \frac{\gamma_{i,n}}{\gamma_{n+1,n}} v_{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n \,.$$

دا چې د b_n صریب یا ځلوونی ورکیږي، ساده کتل کیږي. دا چې

$$\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}, \;\; v_1', \ldots, v_n' \in V' =$$
Span

کیی شي سړی د ایندکشن نیونې(فرضیی) وکاروي او نه ساده کرښیز کمبینیشن لاس ته راوړي

$$\lambda_1 v_1' + \cdots + \lambda_n v_n' = 0 \,.$$

د بنه بدلون پسي د کرښیز کمبینیشن لاس ته راځي، نو له دې سره غوښتنونی بلواکوالی یا تابعیت.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اورتوګونال يا ولاړ بنسټ Orthogonale Basis

يو بنسټ $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ اورتوګونال بلل کيږي، که وي:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j \,.$$

که بنسټوکتورونه نورمي وي، دا په دې معنا چې $|u_i| = 1$ دي، نو د اورتوګونال سيستم يا اورتوګونال بنسټ څخه غږيږو.

يو وکتور v نسبت و يوه اورتوکونال بنسټ $u_1, \ldots, u_n$ ته انځورونه

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \,, \quad c_j = \frac{\langle v, u_j \rangle}{|u_j|^2} \,.$$

لري.

د ضريبونو c_j لپاره پاور لري

$$|c_1|^2 |u_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 |u_n|^2 = |v|^2 \,.$$

د يوه نورمي پنسټ لپاره ترمونه $|u_j|^2$ له منځه ځي. او له دې سره لاس ته راځي:

$$c_j = \langle v, u_j \rangle \,, \quad |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 = |v|^2 \,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک، کيمرلې

دا چې $u_1, \ldots, u_n$ يو بنسټ جوړوي، نو سکالا $c_1, \ldots, c_n$ د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \ .$$

سره شتون لري.

که د پورتني مساوات لپاره په خوښه سکالار ضرب د u_k سره جوړ کړو او د بنسټ دد اورتوګونالیټي څخه کار واخستل شي، نو لاس ته راځي

$$\langle v, u_k \rangle = c_k \langle u_k, u_k \rangle$$

همداسې

$$c_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \ .$$

د ضریبونو لپاره کټمټوالی د پیتاګوراس د جملې ($n = 2$) تولیزونه ده. دا ترلې د

$$|v|^2 = \langle c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n, c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \rangle \, ,$$

ضربولو څخه لاس ته راځي، که دې ته پام وشي، چې مخلوط ترمونه

$$\langle c_j u_j, c_k u_k \rangle, \quad j \neq k$$

د بنسټ وکتورونو د اورتوګونالیټي له امله ورکیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبت و اورتوګونال بنسټ

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ته $v = (8,4)^t$ دا لاندې انځورونه لري

$$v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = \frac{8+12}{1+9} u_1 + \frac{-48+8}{36+4} u_2 = 2u_1 - u_2 \; .$$

د ضریبونو لپاره باور لري:

$$|2|^2 \; \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2 + |-1|^2 \; \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right|^2 = 4 \cdot 10 + 1 \cdot 40 = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right|^2 .$$

نسپت و اورتوګونال پنسټ

$$u_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \; u_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \; u_3 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته $v = (-1,1,3)^t$ لاندې انځورونه لري:

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \langle v, u_1 \rangle u_1 = 3u_1 - u_2 - u_3 \; .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضريبونو لپاره باور لري

$$|3|^2+|-1|^2+|-1|^2=\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\right|^2.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

اورتوگونال پروجکشن يا - پرپوستون Orthogonale Projektion

په يوه برخفضا U اورتوگونال پرپوستون

$$v\mapsto P_U(v)\in U$$

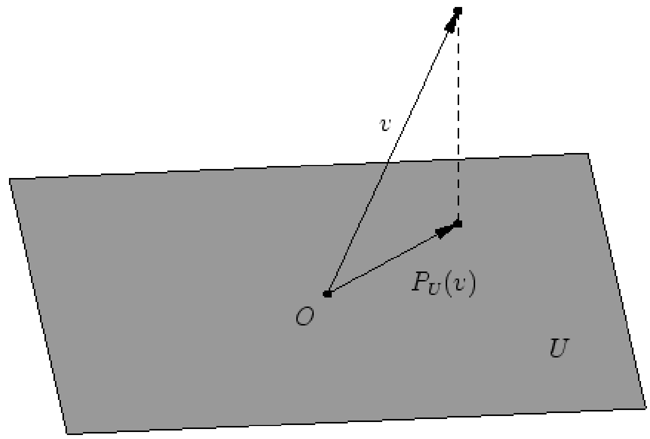
داورتوگوناليتي شرايط

$$\langle v-P_U(v),u\rangle=0,\quad \forall u\in U$$

سره پيژندل شوی دی.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که $u_1, \ldots, u_j$ د U یو اوتوګونال پنسټ وي، نو دی

$$P_U(v) = \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k \,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک

له $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ سره یوه هایپرسطحه $H \subset \mathbb{R}^4$ تعریف کیږي. د اوروتوګونال بنسټ لپاره کېدی شي لاندې وکتورونه وکارول شي:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د وکتور $x = (1, 2, 3, 4)^t$ د اورتوګونال پروجکشن لپارره لاندې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_H x = \frac{x^t u}{|u|^2} u + \frac{x^t v}{|v|^2} v + \frac{x^t w}{|w|^2} w = \frac{-4}{4} u + \frac{-2}{4} v + \frac{0}{4} w$$

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

د ګرام-شميت تکلار يا قانون Verfahren von Gram-Schmidt

د يوه بنسټ $b_1, \ldots, b_n$ څخه کېدی شي، لکه په لاندې توګه، يو اورتوګونال بسټ $u_1, \ldots, u_n$ جوړ شي. دا سړی د $j = 1, \ldots, n$ لپاره سوکڅيسيو تعريفوي:

$$u_j = b_j - \sum_{k<j} \frac{\langle b_j, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k,$$

د $j = 1, \ldots, n$ لپاره.

دا رکورزيو ساده کيږي، که بنسټوکتور له هر پل(قدم) ورسته نورمي شي:

$$u_j \leftarrow \frac{u_j}{|u_j|}.$$

په دې خالت دي: $\langle u_k, u_k \rangle = 1$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

سړی ايندوکتيو(له يوه څخه توليز ته) ښايي، چې $u_1, \ldots, u_l$ د $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_l)$ لپاره يو اورتوګونال بنسټ جوړزي.

د $l = 1$ لپاره دا روښانه دی: $u_1 = b_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایندکشن پل $(l \to l+1)$ لپاره په پام کې نیسو، جې د $j \le l$ لپاره لرو

$$\langle u_{l+1}, u_j \rangle = \langle b_{l+1}, u_j \rangle - \sum_{k \le l} \frac{\langle b_{l+1}, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{\delta_{k,j} |u_k|^2} = 0\,.$$

له دې امله $u_1, \ldots, u_{l+1}$ اورتوګونال دي. بالاخره

$$b_{l+1} - u_{l+1} \in \mathrm{span}(u_1, \ldots, u_l) = \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_l)\,,$$

دي، له کوم سره چې و ښوول شو، دواړه فضا همغه لاندې فضا غښوي یا خوروي.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د دې لپاره چې نسبت سکالار ضرب یا ځل

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$$

ته د پولینومونو $p_0, p_1, \ldots$ اورتوګونال پرلپسې(ترادف) جوړه کړو ,کیدی شنلار سرهي سړی د مونوم $q_j(x) = x^j$ څخه مخ ته لاړشي. د ګرامشمیت د تلنلار سره لاس ته راوړي.

$$p_0 = q_0$$

$$p_1 = q_1 - \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot 1\, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx} \cdot 1 = x - 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_2 = q_2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x\,dx}{\int_{-1}^{1} x \cdot x\,dx} \cdot x - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1\,dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,dx} \cdot 1 = x^2 - 0 \cdot x - \frac{1}{3}.$$

تولیزه بڼه

$$p_{n+1} = q_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle q_{n+1}, p_j}{p_j, p_j} \cdot p_j$$

کیدی شي کره نازکه یا نرمه شي، که سرې د $q_{n+1}(x) = x^{n+1}$ په ځای پولینوم $\tilde{q}_{n+1}(x) = x \cdot p_n(x)$ وکاروي. د

$$\operatorname{span}\{p_1, \ldots, p_n, q_{n+1}\} = \operatorname{span}\{p_1, \ldots, p_n, \tilde{q}_{n+1}\}$$

له امله دا قانوني دی. په دې حالت کې دې فقط زیاتوونی یا د جمعي غړی د $j = n - 1$ سره د صفر سره نا برابره وي.

د سیمټري په بنسټ د $\langle \tilde{q}_{n+1}, q_n \rangle = \int_{-1}^{1} x\, q_n(x)\, q_n(x)\, dx$ لپاره $j = n$ ورکیږي.د $j < n - 1$ لپاره $[x\, p_j(x)]$ د $p_k(x), k < n$ یوکرښیز کمبینیشن دی.

د $\langle p_n, p_n \rangle = 0$ له امله له دې سره

$$\langle \tilde{q}_{n+1}, p_j \rangle = \int_{-1}^{1} p_n(x)\, [x\, p_j(x)]\, dx$$

هم صفر دی.

په دې توګه لاس ته راوړل شوي پولینومونه د لجندر Legendre پولینومونه بلل کیږي. د یوه بل نومالي کوني سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_n(x) = \alpha_n x^n + \ldots$$

د لاندې بڼې د دوه ترمونو ريکورزيون لرئ

$$p_{n+1}(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}(x - \beta_n)p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x)$$

د $\beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\varrho_n}, \gamma_n = \frac{\alpha_{n+1}\alpha_{n-1}\varrho_n}{\alpha_n^2 \varrho_{n-1}}$ او $\varrho_n = \langle p_n, p_n \rangle$ سره

کرښيزه څيرونه (فنکشن يا تابع)Lineare Abbildung

د K–وکتور فضا V او W ترمنځ فنکشن $L : V \longmapsto W$ کرښيز بلل کيږی، که دا لاندې خوېونه ولري:

- مثبتوالی

$$L(u + v) = L(u) + L(v)$$

-هوموګيپينوالی:

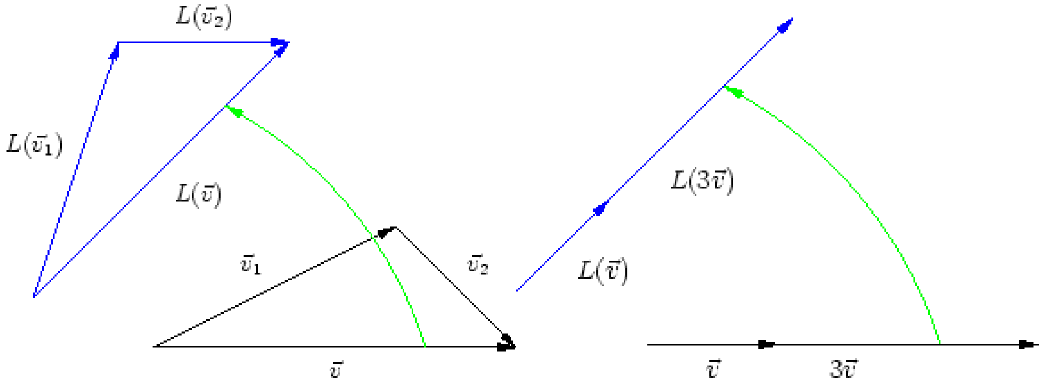
$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

له دې سره $u, v \in V$ او $\lambda \in K$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.

په ځانګړې توګه $L(0_V) = 0_W$ او $L(-v) = -L(v)$ باور لري.

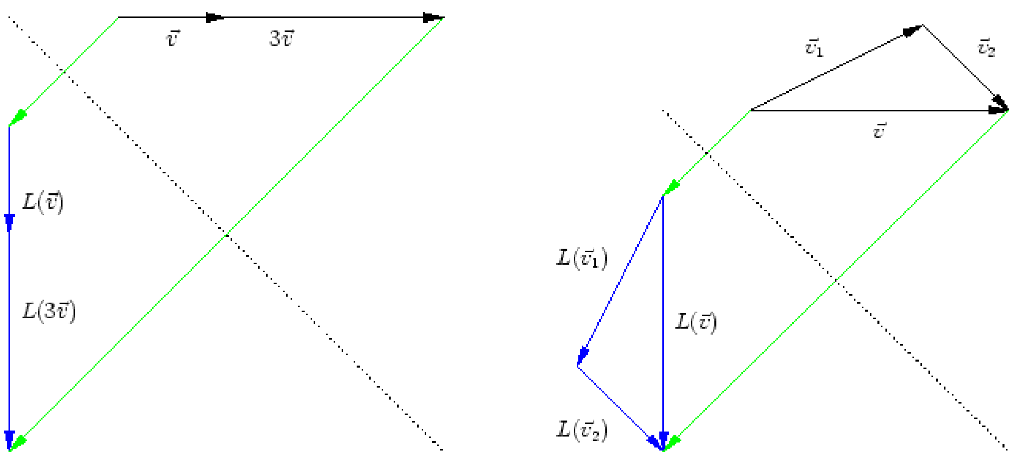
لکه په لاندې بيلګه کې به چې ښوول شي، يو څرخون کرښيز دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لکه جمعه یا زیاتون $v = v_1 + v_2$ د دواړو وکتورونو v_i سره یو مثلث یا درېګوډی جوړوي، چې د ده بڼه د څرخون سره بې تغیره باتیږي، دا په دې معنا چې جمعه د مخه یا د څرخون سره جوړه شي. دا چې د ضریب λ سره غزونه د څرخون سره بدلیږي، بسي تړلی لیدل کیږي.

په ورته توګه ښوول کیږي چې هندارونه هم کرښیزه ده.



په سطحه کې د ټکو یوه راکښنه کرښیزه نه ده.

نه زاتونوالی یا جمعه کیدنه او هم نه هوموجینیتي پوره دي. د

$$T: \ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1),\ \lambda = 2$$

لپاره د بیلګې به توګه باور لري

$$T(v_1 + v_2) = (2,1) \neq (3,1) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$T(\lambda v) = (3,0) \neq \qquad (4,0) = \lambda T(v)\ .$$

لیکونکي: هیورلیک، هیورنر

يو څو بیلګې لاندې د حقيقي توابعو یا فنکشنونو جدول ښايي. دلته هرچېرته ورکړ شوي، چې د کرښیزوالي لپاره کوم شرطونه پوره دي.

ځيرونه یا فنکشن mapping	جمعي Additive	هوموجين homogen
$f \mapsto f'$	X	X
$f \mapsto \|f\|$	-	-
$f \mapsto \int_0^1 f$	X	X
$f \mapsto \max f$	-	-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f \mapsto f(0)$	X	X
$f \mapsto (\max f + \min f)/2$	-	X

د يوه فنکشن لپاره يوه بيلګه، زياتيز (مثبت) مګر هوموجېن نه دی، دادی، چې يو فنکشن T ، چې يو کمپلکس ارزښتيزه تابع د هغې حقيقي برخه په ګوته کړي يا وښايي يا په هغې څېره شي. دلته باور لري: $T(\mathrm{i}f) \neq \mathrm{i}T(f)$

ليکونکي: هيورليګ، هيورنر

د کرښيزو توابعو کمپوزيشن Komposition linearer Abbildungen

د دوه کرښيزو توابعو

$$S : U \to V\,, \qquad T : V \to W\,.$$

لپاره سړی کمپوزيشن تعريفوي(چې يوبل پسې تړاو يا ځنزيرونه هم بلل کيږي)

$$T \circ S : \quad U \to W$$

دا د لاندې لاری

$$(T \circ S)(u) = T(S(u))\,,$$

دا په دې معنا چې په $u \in U$ باندې فنکشن S او په نتيجه باندې فنکشن T کارول کيږي، فنکشن T د فنکشن S پسې کارول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه کربنیزو فنکشنونو کمپوزیشن ببرته کربنیز دی.

ماتریکس Matrix

په یوه تن یا جسم باندې د یوه $(m \times n)$ -ماتریکس تر نامه لاندې ($m, n \in \mathbb{N}$) دا لاندې یوه ولاړکډیزه - یا قام الزاویه شکل پوهیږو:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

دلته دا د A وکتورونه $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ د i –مې لیکې – او $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^t$ د j –مې متې(ستن یا پرته لیکه یا درځ...) وکتورونه بلل کیږي. په ځانګړي توګه $(n \times 1)$ - ماتریکس یو د لیکې - او $(1 \times n)$ - ماتریکس یو د متې یا ستنې وکتور دي..

د ټولو $(n \times m)$ - ماتریکسونو ټولګه په $K^{n\times m}$ سره په نخښه کیږي، حقیقي (کمپلکس) ماتریکسونه د $\mathbb{R}^{n\times m}$ ($\mathbb{C}^{n\times m}$) سره په نخښه کیږي.

لاندې بیلګې د مختلف د ماتریکس بعدونه یا پراخېدونی ښایي.

$$\begin{pmatrix} 31 \\ 57 \\ 97 \end{pmatrix} , \quad (\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, -1, 3\mathrm{i}) , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \sqrt{3}+3\mathrm{i} & 7543 & 17 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي دوه ماتریکسونه د لیکو – همداسې د مټووکتورونه دي، دا په دې معنا چې د کومو څخه چې د یوې دیمنزیون 1 دی. بښي لور ته یو څلوریځ یا مربع ماتریکس او یو یو ولاړگوډیز- یا مستطیلي ماتریکس دی.

لیکونکي: هیورلیګ، هیورنر

د یوه کرښیز فنکشن ماتریکس Matrix einer linearen Abbildung

د دوه K - وکتوروفضاو ترمنځ د بنسټونو $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ او $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ سره یو کرښیز فنکشن $L : V \longmapsto W$ دبنسټوکتورونو د $L(e_j) = a_{1,j} f_1 + \cdots + a_{m,j} f_m$ عکسونو یا ارزښت قیمتونو سره یواځني ټاکلي دي. دا لاندې دماتریکس انځورونه لری:

$$w_F = A v_E \longleftrightarrow w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

د کومو سره چې v_j او w_i د v او $w = L(v)$ وضعییه قیمتونه (کواوردیناتونه) به نخښه کیږي نسبت و بنسټ E او F ته. د ماتریکس A په j-مه مټه کې د $L(e_j)$ کواوردیناتونه یا وضعیه قېمتونه نسبت د F بنسټ ته ځا په ځای دي.

دا چې L د یوه بنسټ د عکسونو یا ارزښتونو سره یواځنی ټاکلي، تړلي د کرښیزوالي لپاره شرایطو څخه ورکول کیږي:

$$w = L(v) = L\left(\sum_j v_j e_j\right) = \sum_j v_j L(e_j) = \sum_j \sum_i v_j a_{i,j} f_i \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکو

$$w = \sum_i w_i f_i$$

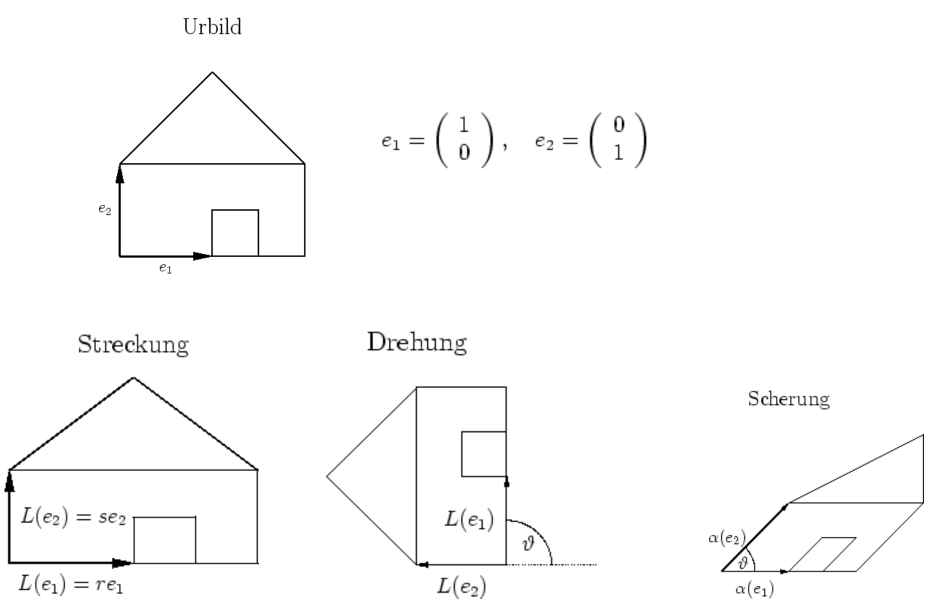
او د بنسټ وکتورونو w_i کواوردينات پرتله کيږي، داسې هم سړی غوښتل شوي د ماتريکسونو انځورونه لاس ته روړي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

په لاندې کې يو څو د سطحې کرښيزې تابع

$$L: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

انځور شوي دي، چې د يوون – يا واحد وکتورونو شکلونو يا بهتره ارزښتونو e_i (غوړ) له لارې کره شوي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \cot\vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سړی کړی شي چې د ماتريکس A انځورونه نسبت کانونيکي بنسټونو e_1, e_2 ته ټړلی معلوميږی يا لوستل کيږي. د ماتريکس متې هره يوه ځانله د وکتورونو $L(e_i)$ $i = 1, 2$، کواورديناتونه خوندی لري.

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

يو کرښيز فنکشن يا تابع

$$x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x$$

په ټکو $x = 0, 1$ باندې د هغو ارزښتونو سره ټاکلي. فنکشن

$$L : p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

کرښيز دی او کېدی شي نسبت د ضريب وکتورونو

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

له لارې تعريف شوي مونومبنسټ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ركربنيز الج

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

له لارې انځور شي

كه بنسټ

$$p_1(x) = 1 - x, p_2(x) = x$$

استعمال شي، نو ماتريكس

$$\begin{pmatrix} p_1(0) & p_2(1) \\ p_1(0) & p_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ترې لاس ته راځي.

ټوليز د $\leq n$ درجې په m تكيه ځايون $x = x_1, \ldots, x_m$ كې د يوه پولينوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ارزښتونه يا قيمت ټاكنه د واندرموند –ماتريكس Vandermonde-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 & x_m^1 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_m) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

سره تشريح شوې يا وركړل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کواوردیناتونو ترانسفورمیشن د بنسټ بدلون سره

Koordinatentransformation bei Basiswechsel

د يوه بنسټبدلون $E \to E'$ سره د يوه وکتور v کواوردیناتونه د

$$v_E = A v_{E'} \quad \Leftrightarrow \quad v_{E'} = A^{-1} v_E \,,$$

سره سم ترانسفورمي کوي، د کوم سره چې د مربع ماتریکس A متې د بنسټ وکتورونو e'_i ضريبونه نسبت و بنسټ ته خوندي لري:

$$e'_i = \sum_j a_{j,i} e_j \,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورن

وکتور v نسبت و بنسټ وکتور E او E' ته لاندې انځورونه لري:

$$\sum_k \lambda_k e_k = v = \sum_k \lambda'_k e'_k \,.$$

د e'_k د انځوروني په مرسته نسبت و بنسټ E ته لرو:

$$v = \sum_k \lambda'_k e'_k = \sum_k \lambda'_k \left(\sum_j a_{j,k} e_j \right)$$

$$= \sum_j \left(\sum_k a_{j,k} \lambda'_k \right) e_j = \sum_j \lambda_j e_j \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کواوردینات پرتلي سره لاس ته راځي: $v_E = A v_{E'}$

لیکونکی:ویپر

Bild او Kern معنا خیره یا شکل او زړي

د یوه کرښییز تابع $L: V \to W$ لپاره د

$$\ker L = \{v \in V : \; L(v) = 0\} \; \subseteq V$$

سره سړی کرن یا زړی په نخښه کوي او د

$$\text{Bild}\, L = \{w \in W : \; \exists v \in V$$

$$L(v) = w\} \; \subseteq W$$

د سره د L ارزښت یا شکل ښوول کیږي یا په نخښه کیږي.

دواړه ډېرى(ستونه) لاندي – یا برخه فضاوې دي.

لیکونکی: کیمرلې

ثبوتوو چې د K –وکتورفضا V همداسې W نسبت و کرښیزو عملیاتو ته تړلي یا رابند دي یعنی دا عملیات په کي بې بندیزه اجراکېدی شي.

اول - $\ker L$ د V لاندې فضا ده: د $u, v \in \ker(L), \; \lambda \in K$ لپاره، د کرښیزوالي په بنسټ باور لري:

$$L(\lambda\, u) = \lambda\, L(u) = \lambda\, 0 = 0$$

او

$$L(u+v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې په تعقیب λu او $u+v$ هم د $\ker(L)$ توکي دي.

دویم - $\operatorname{Bild} L$ د W لاندیفضا ده: د $u, v \in \operatorname{Bild} L$ لپاره د $u = L(x), v = L(y)$ او $\lambda \in K$ سره د L کربنیزوالي په بنسټ لاندې صدق کوي:

$$\lambda u = \lambda L(x) = L(\lambda x)$$

او

$$u + v = L(x) + L(y) = L(x+y)\ .$$

دا چې V یوه وکتورفضا ده، نو اړونده له مخ ښېروني یا عکسونه یا تابع وې هم شته او په تعقیب λu او $u+v$ هم د $\operatorname{Bild} L$ توکي دي.

لیکونکی: ویپر

د Bild او Kern ابعاد یا براخیدوني Dimension von Bild und Kern

د یوه کربنیز فنکشن $L : V \to W$ لپاره باور لري

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \operatorname{Bild}(L)\ ,$$

که وي: $\dim V < \infty$

د دې لپاره چې د بعد کتمتوالی وښایو، نو د $\ker L$ لپاره یو بنسټ $E' = \{e_1, \ldots, e_m\}$ ټاکو او دا د $\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ سره د V و بنسټ E ته پوره کوو. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i),$$

نو لرو:

$$\mathrm{Bild}\, L = \mathrm{span}\, F, \quad F = \{L(e_{m+1}), \ldots, L(e_n)\}.$$

دا چې پسې F كرښيز خپلواک دی، یعنې د $\mathrm{Bild}\, L$ بنسټ، نو له

$$\sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i) = 0$$

لاس ته راځي $\sum_{i=m+1}^{n} v_i e_i \in \ker L$ او له دې سره $v_i = 0$.

دا غوښتونی د بعدفرمول اوس د بنسټوكتورونو تعداد څخه لاس ته راحي.

ليكونكي: هيوليک، هيورن

د بعدفرمول د ښوونې لپاره د پولينومونو - چې له $\leq n$ درجه لري- په فضا باندې k-م مشتق څېړل كيږي.

لومړی دې $k = 1$ او $n = 2$ وي. د پولينومونو د فضا لپاره چې درجه يې ≤ 2 ده $\{1, x, x^2\}$ بنسټ جوړوي، دا فضا پس بعد 3 لري. د $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ لپاره

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x$ يو پولينوم دی چې درجه يې ≤ 1 ده. بيلدفضا نو بعد 2 لري.

د مشتقنيولو سره ثابته له منځه ځي يا وركيږي. دا يوه يو بعدې لاندې - برخفضا جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګرن يا زړی بعد 1 لري او له دې سره د $3 = 1 + 2$ سره د بعدفرمول پوره دی يا بنول شوی.

په توليزه توګه پولينوم لاندې فرمول لري:

$$p(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$$

او k -م مشتق

$$p^{(k)}(x) = \sum_{l=k}^{n} \frac{l!}{(l-k)!} a_l x^{l-k} .$$

بيلد يا ځيره يا ارزښت د $\leq n-k$ درجې پولينوم دی او پولينومونه چې $< k$ درجه لري له منځه وړل کيږي. پس د بعدفرمول لاندې بڼه لري:

$$n + 1 = \underbrace{((n-k)+1)}_{\dim \mathrm{Bild}} + \underbrace{k}_{\dim \ker} .$$

•

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

معکوس يا په ځټ تابع (ځيرونه يا فنکشن) Inverse Abbildung

يوه کرښيزه تابع $L : V \to W$ تيک هلته انجکتيو يا يه کې ده، که $\ker L = 0_V$ وي. په دې حالت کې د

$$w \mapsto v, \quad w = L(v) ,$$

له مخې يو معکوس تابع $L^{-1} : \mathrm{Bild}\, L \to V$ تعريف شوې، چې دا هم کرښيزه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځانګړي توګه باور لري

$$L^{-1} \circ L(v) = v\,, \quad L \circ L^{-1}(w) = w$$

د ټولو $v \in V$ او $w \in \text{Bild}\, L$ لپاره

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

د L د ګربنيزوالي په دليل صدق کوي

$$L(v_1) - L(v_2) = L(v_1) + L(-v_2) = L(v_1 - v_2)\,,$$

او له دې اړيکو لاس ته راځي:

$$L(v_1) = L(v_2) \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \ker L\,.$$

د يوه انجکتيو (په کې) کرښيزې تابع لپاره کېدی شي چې کرن يازړی فقط صفروکتور خوندي ولري.

دا معکوس تابع کرښيزه ده له لاندې لاس ته راځي

$$L^{-1}(L(v_1) + L(v_2)) = L^{-1}(L(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = L^{-1}(L(v_1)) + L^{-1}(L(v_2))\,,$$

$$L^{-1}(\lambda L(v_1)) = L^{-1}(L(\lambda v_1)) = \lambda v_1 = \lambda L^{-1}(L(v_1))\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

د ماتريکسونو وکتورفضا Vektorraum der Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $(m \times n)$ -ماتريکسونه يو وکتورفضا جوړوي، دا په دې معنا چې دا کېدی شي سره جمعه شي او د سکالار سره ضرب شي. دا کارونې يا عمليې په لاندې توګه کمپوننتېوله تعريف دي:

$$C = A + B \Leftrightarrow \qquad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

$$B = \lambda A \Leftrightarrow \qquad b_{i,j} = \lambda a_{i,j} \; .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

د ماتريکسونو ضرب Matrix-Multiplikation

د يوه $(n \times m)$ -ماتريکس A او يوه $(m \times s)$ -ماتريکس B ضرب لاندې د $(n \times s)$ –ماتريکس دی:

$$C = AB \; , \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \; ,$$

دا په دې معنا چې د c_{ij} دتعريف لپاره د A د i ليکې توکي او د B د j متې توکي سره جمعه کيږي:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي، چې له دې سره بايد د A د متو تعداد (ګڼون) د B د ليکو تعداد(ګڼون) سره برابر وي.

د ماتريکس ضرب همغه د کرښيزو توابعو کمپوزيشن دی

$$T : u \mapsto v = Bu, \quad S : v \mapsto w = Av\,,$$

دا په دې معنا چې C د $T \circ S$ ماتريکس انځورونه ده.

د کمپوزيشن لپاره د

$$w_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} v_k\,, \quad v_k = \sum_{j=1}^{s} b_{kj} u_j$$

له مخې تعريف شوي تابع په لاندې ډول لاس ته راوړي.

$$w_i = \sum_k \sum_j a_{ik} b_{kj} u_j = \sum_j \left[\sum_k a_{ik} b_{kj} \right] u_j\,.$$

په ګوډيزه يا کونجيزه نوکانو يا که غواړی قوسونو کې افاده د ماتريکسونو ضرب دی او کمپوزيشن توابعو د ماتريکس C سره سرخوري(يا باربر دی).

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

په لاندې يو څو معلوم د ماتريکسونو ضربونه ورکړشوي دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 100 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 321 & 213 & 132 \\ 123 & 312 & 231 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 26 \\ 21 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \end{pmatrix}$$

د ستراسن(ویینه: شتراس) الګوریتم Strassens Algorithmus

که په ورسره بلد ډول د دوه (2×2) -ماتریکسونو A او B ضرب $C = AB$ تر څیړنې لاندې ونیسو، نو سړی اته ضربونو ته اړتیا لري. په ډیر هکبکوالي(چې د څه انتظار نه کیږي او پیښ شي) شتراسن وښوول چې اوه ضربونه بسیا کوي

[V. Strassen: Gaussian elimination is not optimal, Numer. Math. 13 (1969). 357-361]. Man berechnet die Produkte

سړی ضربونې شمیري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} p_1 &= (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) \\ p_2 &= (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}) \\ p_3 &= (a_{1,1} - a_{2,1})(b_{1,1} + b_{1,2}) \\ p_4 &= (a_{1,1} + a_{1,2})b_{2,2} \\ p_5 &= a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2}) \\ p_6 &= a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}) \\ p_7 &= (a_{2,1} + a_{2,2})b_{1,1} \end{aligned}$$

او د C ضرب د زياتون يا جمعي جوړولو له لارې لاس ته راځي.

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} &= p_1 + p_2 - p_4 + p_6 \\ c_{1,2} &= a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} &= p_4 + p_5 \\ c_{2,1} &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} &= p_6 + p_7 \\ c_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} &= p_2 - p_3 + p_5 - p_7. \end{aligned}$$

كوموتاتور Kommutator

د دوه $(n \times n)$ - ماتريكسونو كموتاتور د $[A, B] = AB - BA$ په حيث تعريف شوی او په ټوليزه توګه ناصفر. د $[A, B] = 0$ په حالت كې ماتريكسونه A او B كموتي كيدونكی ماتريكسونه بلل كيږي.

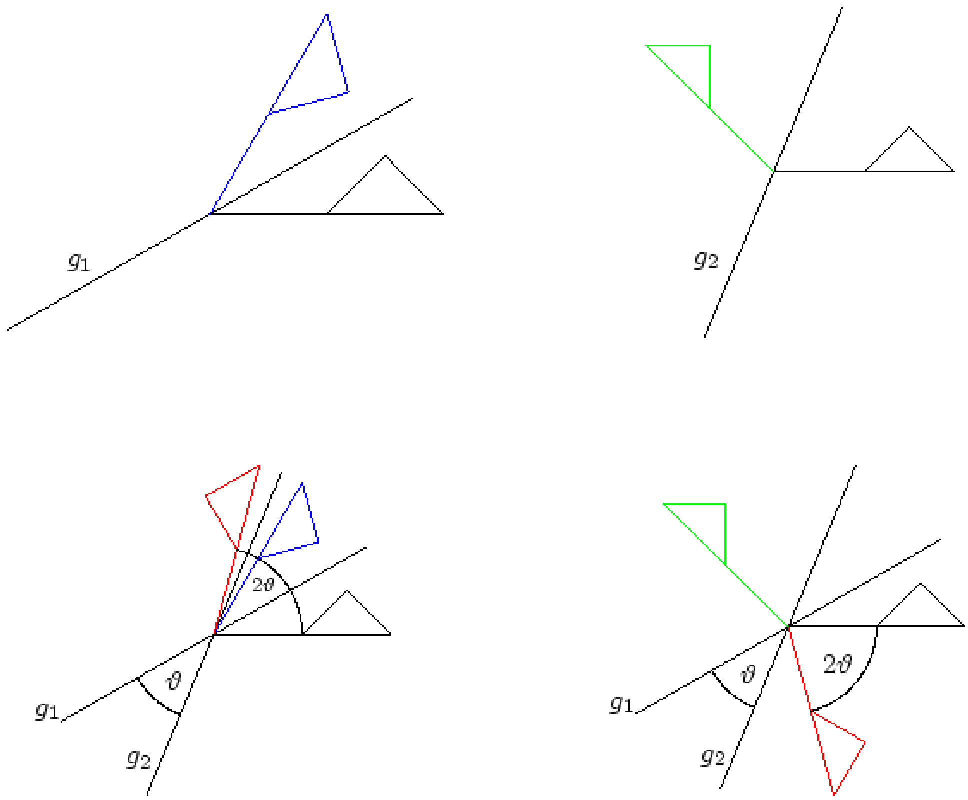
ليكونكي: هيوليګ، هيورن

په مختلفو محوورونو g_1 g_2 او د دوه وكتوررونو S_1 او S_2 دهنداروني (كه غواړی انغكاس) يو په بل پسې راوړنه كې د لړی پرلپسي رول نه لري.

دا پورته خيره يا عكس د يوګونو هنداروونو شكلونه ښايي. په لاندي لړی كې كيڼ ډبله هنداروونه $S_2 \circ S_1$ انځور ده اوښي لور ته ډبله يا دوه واره هنداروونه $S_1 \circ S_2$. د هر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځله نتيجې يې د کرښو ترمنځ په دوه برابره کونج څرخون دی، په هر حالت په مختلو لورو.



که g_1 د لومړی کونجنيمي په څېر ونيسو او د g_2 د y -محور نو توابع د ماتريکس انځورونه لري.

$$v = S_1 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u\,,$$

$$v = S_2 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډبل هندارونه يا ا نعکاسونه لاندې انځورونه لري

$$w = S_2 S_1 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u ,$$

$$w = S_1 S_2 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u .$$

په دې حالت کې کوموتاتور په لاندې ډول دی

$$[S_1, S_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

په څټ يا معکوس ماتريکسونه Inverse Matrix

د يوه معکوس کېدونکي کرښيز تابع $Av \mapsto v$ لپاره A^{-1} د A معکوس ماتريکس په نخښنه کوي، دا په دې معنا چې

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

یون – واحد ماتریکس سره؟

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

معکوس کېدونکي په همدې ډول رېګولار ماتریکسونه $A \in K^{n\times n}$ نسبت و ضرب ته یو ګروپ جوړوي، کرښیز ګروپ چې د $\mathrm{GL}(n, K)$ سره په نخښه کیږي.

باور لري

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

د $A, B \in \mathrm{GL}(n, K)$ لپاره .

باور لري

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E \ ,$$

او له دې سره $B^{-1}A^{-1}$ و AB ته معکوس دی

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دياګونال ماتريکس معکوس داسې لاس ته راځي، چې د دياګونال توکو معکوس يا په ښتې ارزښت جوړيږي،، د بېلګې په توګه:

$$A=\begin{pmatrix}3&0\\0&1/7\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&0\\0&7\end{pmatrix}.$$

د درېګودئ – يا مثلث متاريکس لپاره په معکوسوني کې د مثلث بڼه ساتلې پاتيي کيږي، د بېلګې په توګه:

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}.$$

په ټوليزه توګه د ماتريکس په ښتې يا معکوس پوره ځاي نيولی يا ډک دی، د بېلګې په توګه:

$$C=\begin{pmatrix}-1&2\\-1&1\end{pmatrix},\quad C^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\1&-1\end{pmatrix}.$$

ليکنې بايد د يوه کرښيز مساواتسيتم له لارې و ټاکمل شي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

تراسپوني او ادجونګيري ماتريکسونه

Transponierte und adjungierte Matrix

که د يوه ماتريکس A ليکي اوو متې سره بدلې شي، نو د ترانپوني ماتريکس $B=A^t$ ښخه غږيږو، دا په دې معنا چې

$$b_{i,j}=a_{j,i}\,.$$

که د يوه کمپلکس ماتريکس A سربېره پر دې ليکنې کنجوګير شي، نو اديونګيري ماتريکس ترې لاس ته راځي، دا په دې معنا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$c_{i,j} = \bar{a}_{j,i}\,.$

يو ماتريکس د $A = A^{\mathrm{t}}$ سره سيومتريک بلل کيږي، يوه ماتريکس د $A = A^*$ سره د پخپله اديونګيري په څېر ده يا هرميتيکي Hermitesch ده. د حقيقي ماتريکسونو لپاره کليمي سيومتريک او هرميتيکي همغه (يوه) معنا لري.

لاندي قانون باور لري:

- $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$ او $(AB)^* = B^*A^*$

- $(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}$ او $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

د يوې ليکنې لپاره په $C^{\mathrm{t}} = (AB)^{\mathrm{t}}$ کې باور لري

$$c^{\mathrm{t}}_{ji} = c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj} = \sum_k a^{\mathrm{t}}_{ki}b^{\mathrm{t}}_{jk} = \sum_k b^{\mathrm{t}}_{jk}a^{\mathrm{t}}_{ki}$$

او له دې سره $C^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$. دا چې $\overline{a+b} = \bar{a}+\bar{b}$ او $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ باور لري، نو دا د اديونګيري لپاره هم ټيک دی.

له

$$E = E^{\mathrm{t}} = \left(AA^{-1}\right)^{\mathrm{t}} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$$

لاس $\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{t}} = \left(A^{\mathrm{t}}\right)^{-1}$ ته راځي. په ورته توګه د ادجونګيري لپاره هم صدق کوي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپور Spur

(د ا لماني ژبې کلمه د شپور پښتو معنا: نخښه یا علامه)

شپور د یوه $n \times n$-ماتریکس A اصلي دوه کونټرې توکو(وتر) جمع د A شپور بلل کیږي،

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \, .$$

که A, B په خوښه $(n \times n)$ - ماتریکسونه وي، نو باور لري:

$$\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA).$$

له دې لاس ته راځي، د یوه رېګولار ماتریکس T او یوه په خوښه ماتریکس A لپاره صدق کوي:

$$\text{Spur}(T^{-1}AT) = \text{Spur}(A).$$

دا دا معنا لري، چې شپور یا سپور د کواوردینات ترانفورمیشن لاندېinvariant (نسبت یوې کچونې یا اندازه کونې ته بې تغیره پتتې کیدل) یا بې تغیره پاتیږي.

د یوه ماتریکس رانګ Rang einer Matrix

د یوه $(m \times n)$-ماتریکس لپاره د کربنیز خپلواکو متو ماکسیمال ګنون یاتعداد د ماکسیمالو ګرښیزو خپلواکو کیلو سره یو په بل پریوحي یا یو بل سره مساوي دي او د رانګ A په لکنیز ډول $\text{Rang}\, A$ بلل کیږي،

په ځانګړي ډول باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{Rang} A \leq \max\{m, n\}.$$

د ماکسيمال کرښيز خپلواکو متو $v_1, \ldots, v_n$ تعداد د وکتورفضا پعد به ګوته کوي

$$V = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\},$$ ،

ځکه چې سړی کړی شي د متو څخه بنسټ وټاکي. په ورته توګه وينا د ليکو $w_1, \ldots, w_m$ څخه غزيدلي وکتورفضا W لپاره هم صدق کوي.

غوښتنه $\dim V = \dim W$ د n پسي اندکشن له لارې وښوول شي.

ساده ښوول کيږي، چې $\dim V$ او $\dim W$ د لاندې عمليو يا کارونو سره بې تغيره پاتيږي:

- د متو يا ليکو بدلېدنه يا پرموتيشن

- د يوه سکالار جمعه ډېرځله يا د يوه ډېرځله سکالار سره د يوې متې (ليکې)حمعه د يوه بلې متې (ليکې) سره.

که $A \neq 0$ وي، سړی کړی شي دا عمليه په لاندې بڼهٔ

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

راوړي.

د پرموتيشن سره لومړی $b_{1,1} \neq 0$ لاس ته راځي او بيا د لومړی ليکې يا کيلې او متې پاتې توکي د مناسب جمعې له لارې له منځه وړي. په ټيک ډول لومړي د لومړی متې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-b_{1,j}/b_{1,1})$ -ځله و j -مې متې ($j = 2, \ldots, n$) ته جمعه کوي او په ورته توګه د لیکو وکتورونو سره هم دا عمل وخ ته بیولاي شو . که د V' او W' سره ْوښتونې وکتورفضاوې د $(m-1) \times (n-1)$ - ماتریکس A' لپاره ، نو لاس ته راځي

$$\dim V = \dim V' + 1, \quad \dim W = \dim W' + 1$$

او د ایندکشن له لارې غوښتنه.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

یو څو تیپیکي حالتونه د درې (3×2) -متریکسونو سره دلیدلو شوي یا ورکړې شوي دي

$$\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2, \quad \mathrm{Rang} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = 1\,.$$

د دریم ماتریکس لپاره صدق کوي $4S_1 = 3S_2$ د متو S_1 او S_2 لپاره او د لیکو $2Z_3 = 3Z_2 = 6Z_1$ Z_1, Z_2 او Z_3 لپاره. په دواړو حالتونو کې نو د غوښتوني وکتورفضا دیمنژن یا بعد برابر په 1 دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د یوه ماتریکس نورم Norm einer Matrix

د یوه وکتور نورم د ماتریکس نورم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

ته بنسټ ووي د نورم خويونو سربېره (مثپتوالی، هوموچی‌نيتي، مثلثنمساوات)

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,$$

باور لري، دا په دی کعنا چی د ورسره تنظيم شوی ماتريکس نورم سبضريبي submultiplikativ دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

په لاندې کې به يوګوني خويونه د ازماينې له لارې زښوول شي:

مثبتوالی: د وکتور فضا تعريف له لارې تظمين دی، چی $\|A\| \geq 0$ دی. که A صفرمآتريکس وي، نو فقط صفروکتور 0د څېرې په څېر مخ ته لرو. که له بلې خوا نورم صفر وي، نو فقط صفروکتور د څېرې په څېر رامنځ ته کيږي، او تابع يا فنکشن د صفرماتريکس سره تشريح کيږي.

Homogenitätهوموحنيتي:

$$\max_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1} |\lambda|\|Ax\| \;=\; \|\lambda A\|$$

$$|\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda|\|A\|. \;=$$

$$\|\lambda A\| = \quad \max_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1} |\lambda|\|Ax\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad |\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\| .$$

Dreiecksungleichungمثلثات برابرون :

$$\|A+B\| = \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax+Bx\|$$

$$\leq \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|)$$

$$\leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\| .$$

Submultiplikativitätسب ضريبوالی:

د $B = 0$ لپاره $AB = 0$ دي او له دې سره نامساوات پوره دی. د $B \neq 0$ لپاره دی:

$$\|AB\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x:Bx\neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\| .$$

د لومړي بڼې بدلون سره ، جې په حقيقت کی ډېری يا سټ په يوه سوپرېموم Supremumځېره کيږي محدوديږي، مګر فقط وکتورونه ترې لرې کيږي، چې صفروکتور دځېرې په ډول لري او له دې سره سوپرېموم نه اغيزمن کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: هيوليک ، کرايخ

د ليکو د جمعې نورم Zeilensummen-Norm

د وکتورونو لپاره ماکسيمومو نورم $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$ د ماتريکسونو لپاره د ليکوجمعې نورم

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

تنظيم دی.

ليکونکي: هيوليک ، کرايخ

د $\|x\|_\infty = \max_j |x_j| = 1$ لپاره

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \le \max_i \sum_j |a_{ij}| ,$$

دی

او سرى لاس ته راوړي

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty \le \max_i \sum_j |a_{ij}| .$$

که سړی ونيسي يا فرض کړي، چې ماکسيموم د $i = k$ لپاره فرض شوی يا نيول شوي، نو مساوات د

$$x_j = \operatorname{sign} a_{kj}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتخاب له لارې لاس ته راځي، ځکه چې دی:

$$\left|\sum_j a_{kj} x_j\right| = \sum_j \|a_{kj}| \ .$$

ليکونکي: هيوليک ، کرايخ

د ماتريکس د ډکوني جوړښت Belegungsstruktur von Matrizen

د صفر سره مختلف ماتريکس توکو $a_{i,j}$ د تنظيم سره سم د لاندې ترمنځ توپير کوي

اول – دياګونالماتريکس: $a_{i,j} = 0$ د $i \neq j$ لپاره،

باند ماتريکسونه Bandmatrizen: د لپاره د سره د صفر نه مختلفو ماتريکسونو د دياګونالو شمېر، چې د باند سور په څېر په نخښه کيږي يا نومول کيږي،

پورته (کښته) مثلث ماتريکسونه: $a_{i,j} = 0$ د $i < j$ ($i > j$) لپاره.

په توليزه توګه يو $(m \times n)$ - ماتريکس ضعيف ډکشوی، که فقط توکي $c \max(m,n)$ د صفي سره نامساوي وي، د يوې نه ډېرې لوی ثابتې c سره.

ليکونکي: ايپ، هيوليک

اورتوګونال او يونيتار ماتريکسونه Orthogonale und unitäre Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو کمپلکس $(n \times n)$ - ماتريکس A يونيتار بلل کيږي، که ولرو

$$A^{-1} = \overline{A}^t = A^* ,$$

دا په دې معنا چې که د A متې د $\mathbb{C}^n$ يو اورتوګونال بنسټ جوړ کړي.

د حقيقي ماتريکسونو لپاره (لکه په سکالار ضرب کې) کمپلکس کنجګيشن،

$$A^{-1} = A^t ,$$

او سرې د يوه اورتوګونال ماتريکس څخه غږيږي.

اورتوګونال (يونيتار) ماتريکسونه د($\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$) يو لاندې – برخګروپ جوړوي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هادامارد – ماتريکسونه Hadamard-Matrizen

د $n = 2^k$ لپاره تر سکالار کېدنوپورې اورتوګونال ماتريسکونه شتون لري د H_k د $n \times n$ بعد په $\{-1,1\}$ کې د ليکنو سره داسي په نامه هادامارد ماتريکسونه.

د هاداماد لومړی ماتيکسونه دي:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوليزه توګه ماتريسونه د ريکورزيون

$$H_{2k} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$$

سره جوړکړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د فورير (وينه: فوريې) ماتريکسونه Fourier-Matrizen

د توان جوړولو له لارې د يوون - يا واحد ريښې

$$w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$$

سړی داسې په نامه فوريې ماتري:س لاس ته راوړي

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}.$$

دا د نورمي کولو($W_n \to W_n/\sqrt{n}$) پسې يونيتار دي، دا په دې معنا چې $W_n^* W_n / n$ يوون – يا واحد ماتريکس دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متو اورتوګونالیټي ساده ازمايل کيږي. د $(j+1)$ ـمو او $(k+1)$ ـمو متو سکالار ضرب

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{\ell j} \overline{w_n^{\ell k}} = \sum_{\ell} w_n^{(j-k)\ell} = \frac{w_n^{(j-k)n} - 1}{w_n^{j-k} - 1} ,$$

دی، او داچې $w_n^n = 1$ دی، نو صورت يا ماتبانديږ صفر دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

د $n = 4$ لپاره $w_4 = \exp(2\pi i/4) = i$ دی، او سړی لاس ته راوړي

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} .$$

په 2 د وېشنې وروسته W_4 يونيتار دی، دا په دې معنا چې

$$\left(\frac{1}{2} W_4^*\right) \left(\frac{1}{2} W_4\right) = E .$$

له دې امله د فوريې ماتريکسونو د سيومترۍ والی له امله $W_4^* = \overline{W_4}^t = \overline{W_4}$ دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

نورم ريښتونې يا ـ وفاداره اورتوګونال ا و يونيتار ماتريکونه

Normtreue orthogonaler und unitärer Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو حقيقي (كمپلكس) ماتريكس A ټيک هلته اوتوګونال (يونيتار) دی، كه دا د هر وكتور اوكليد(اقليدسeuklidische) نورم انواريانت پريږدی:

$$|Av| = |v| \,.$$

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

بسيا كوي، چې كمپلكس حالت وڅيړو، چې حقيقي حالت په بر کې نيسي.

اول - A يونيتار ده، نو باور لري

$$(Ay)^*(Ax) = y^*A^*Ax = y^*x$$

پس په ټوليزه توګه د كمپلكس وكتورونو سكالار ضرب لاس ته راځي، چې د نورمريښتونوالی په بر کې لري.

دويم – د نورم ريښونوالي څخه لومړی لاس ته راځي، چې د A د متې وكتور v_j د يوون وكتورونو e_j د عكسونو نورم يوی خوندي لري. د دې لپاره چې وښايو چې مختلفې متې اوتوګونال دي،نو $\lambda = \exp(i\vartheta)$ ټاكو، داسې چې لرو:

$$(\lambda v_k)^* v_j \in \mathbb{R} \,.$$

پسې د نورريښتونوالی او اقليدس نورم تعريف په بنسټ لرو

$$2 = |e_j + \lambda e_k|^2 = |v_j + \lambda v_k|^2 = |v_j|^2 + |\lambda|^2 |v_k|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda v_k)^* v_j \, = 2 + 2\overline{\lambda} v_k^* v_j \,,$$

په تعقيب بايد په ښۍ لور سكالار ضرب ورک شي.

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيوکليکي (تلبيرته راګرځېدوني) ماتريکسونه Zyklische Matrizen

د ځيکليکي $(n \times n)$-ماتريکسونو متې د لومړی متې د ځيوکليکي راکښنې له لارې جوړيږي:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

د ماتريکسونو ضرب سره ځيوکليکي جوړښت ساتلی يا خوندي پاتي کيږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه ځيوکليکي ماتريکس-ضرب $C = AB$ توکی دي:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i-j \bmod n} b_{j-k \bmod n}.$$

د اچي

$$\{0, \ldots, n-1\} = k + \{0, \ldots, n-1\} \bmod n,$$

کېدی شي سرې په زياتوونو (د جمعي اجزاوو) د j په ځای $j+k$ ځای په ځای کړي، کوم چې ښايي، چې $c_{i,k}$ فقط د $i-k \bmod n$ په واک کې دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ځيوکليکي ماتريکسونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ضرب دا لاندې ځيوكليكي ماتريک دی:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 18 & 11 & -23 \\ -23 & 18 & 11 \\ 11 & -23 & 18 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ستوښاستيکي ماتريکسونه

يو $(n \times n)$-ماتريکس ستوښايتيکي بلل کيږي، که $p_{i,j} \geq 0$ وي او

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

ستوښاستيکي ماتريکس د احتمالوالو x_i تغير ښايي د لاندې له مخې:

$$x'_j = \sum_i x_i p_{i,j}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د P د ښويونو په بنسټ x' هم يو د احتمالوالي وکتور دی، دا په دې معنا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x'_j \geq 0, \quad \sum_j x'_j = 1\,.$$

دا نه کمښتوالی يا نه منفيوالی ښرګند دی او د جمعي انوارياانت له لاندې ښخه تعقيبيږي:

$$\sum_j \sum_i x_i p_{i,j} = \sum_i x_i \underbrace{\sum_j p_{i,j}}_{=1}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ديترمينانت د انتيسيومتري کربنيزفورم په حيث

Determinante als antisymmetrische Multilinearform

د يوه مربع ماتريکس A ديترمينانت

$$\det A = \det(a_1, \ldots, a_n)$$

د متې a_j سره کېدی شي د لاندې خويونو له لارې تعريف شي.

اول – ډېرکربنيزوالی

$$\det(\ldots, \alpha a_j + \beta b_j, \ldots) = \alpha \det(\ldots, a_j, \ldots) + \beta \det(\ldots, b_j, \ldots)\,.$$

دويم - انتيسيومتري:

$$\det(\ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots) = -\det(\ldots, a_k, \ldots, a_j, \ldots)\,.$$

دريم – نورمي کونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det(e_1, \ldots, e_n) = 1\,, (e_k)_\ell = \delta_{k\ell}\,.$$

د دې قانون سره دیترمینانت د n –ځله ضرب سره وده کولی شي:

$$\det A = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}\,,$$

د کوم سره چې د $(1, \ldots, n)$ په ټولو ځای بدلونو $(i_1, \ldots, i_n)$ سره جمعه کېږي او σ د ځاي بدلونون سره مخنخښه ښايو.

سړی دا لاندې لیکدود هم استعمالوي

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیونر

د زیاتیدونو (د جمعي اجزاوو) د تعداد د جګیدو له امله($n!$ ځای بدلونونه شتون لري) د دیترمینانت د عملي آنځورونو لپاره ښه مساعدنه دی. مګر دا تړلی د تعریف شوو خویونو تړلی (د عملیو له لارې) دا د ښووني او د نوروو خویونو د لاس ته راوړلو لپاره اړیین دي. له دې امله دا د ورته (برابر ازښته) تعریف لپاره ورکړشوی دی.

لومړ ی ښایو، چې غوښتل شوي خویونه مو اړیین د دیترمینانت ودیزوني ته بیایي، په اړیینه توګه د برموتیشن په مرستې .

د دې سره د A متي د یوون – یا واحد وکتورونو e_i د کربنیز کمبینیشنونو په حیث انځوروي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \,.$$

د ډيرکرښيزوالي په بنسټ باور لري:

$$\det A = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \underbrace{\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})}_{=:d_i} \,.$$

دا جمعه لکه چې لاس ته راځي کيدی شي ساده شي. که له دې دوه يوون - يا واحدوکتورونه برابر وي، نو د انتيسيومتري په بنسټ d_i صفر دی:

$$\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) = -\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) \,.$$

که ټول i_ν مختلف وي، دا په دې معنا چې $(i_1, \ldots, i_n)$ يو پرموتيشن دی د $(1, \ldots, n)$، نو صدق کوي

$$d_i = (-1)^{\tau(i)} \,,$$

د کوم سره چې $\tau(i)$ موډولو 2 د بدلونونو يواځنی ټاکلی تعداد(ګڼون) په نخښه کوي ، د کوم لپاره چې واحدوکتور په کانونيکي لړی پرلپسي راوړی شو. ځای بدلون د مخنخښې تعريف پسې دی:

$$\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = \sigma(i) \det(e_1, \ldots, e_n) = \sigma(i) \,,$$

دا په دې معنا چې سړی ورکړ شوې وديزينه لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس کېدی شي و ازمايو، چې وديزينه د غوښتوني قانون سره تړلي ده. ډېرکربنيز والی باور لري، ځکه چې په ضرب

$$a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}$$

کې د هرې متې تيک يو توکی منځ ته راځي. انتی سيومتری لاس ته راځي، ځکه چې د متو له پدلون دبدلولو تعداد کانونيکي لړی پرلپسي په يو تغير خوري، بالاخره په واحد ماتريکس کې جمعه په يوه زياتووني (د جمعې غړي) کمېږي

$$a_{1,1} \cdots a_{n,n} = 1 \cdots 1 = 1$$

.

ليکونکي: هيوليک، هيونر

2 - ليکيزه ديترمينانت 2-reihige Determinante

د يوه -ماتريکس ديترمينانت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

دی.

دا د برموتيشن وديزيني پسي په ساده ډول ليدل کيږي، ځکه چې 2 زياتيدونی شتون لري.

دبديل په توګه کېدی شي ديترميناتونه د تعريف شوو خويونو له مخې هم و شمېرل شي.

که متې د کانونيکي واحد وکتور(يوون-) e_k کربنيز کمبينيشن په څېر انځور شي، نو د مولتی (ډېر-)کربنيزوالي له امله لاس ته راځي

$$\det(ae_1 + ce_2, be_1 + de_2) = a\det(e_1, be_1 + de_2) + c\det(e_2, be_1 + de_2)$$

$$= ab\det(e_1, e_1) + ad\det(e_1, e_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

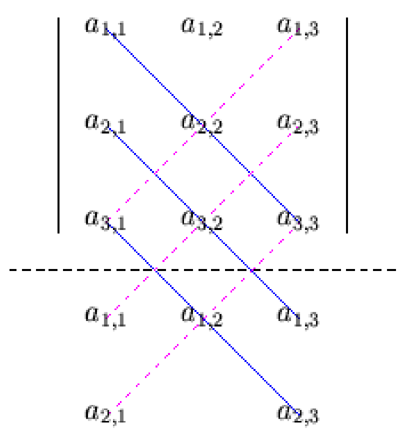
$$+\,cb\det(e_2,e_1)+cd\det(e_2,e_2)$$

$$=ab\cdot 0+ad\cdot 1+cb\cdot(-1)+cd\cdot 0=ad-bc\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیونر

د ساروس شیما یا شکل Sarrus-Schema

د یوه (3×3) - ماتریکس دیترمینانت لکه څنګه چې په تابع یا فنکشن کې ښوول شوي د ضربونو جمعه ده، چې مختلف دیاګونالونه (دوه کونجتړې) په ګوته کوي:



$$=\begin{array}{l} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ -a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} \end{array}$$

دې د ساروس په نامه یادې شوې شیما ته ورته د n جګ بعدي لپاره شتون نه لري.
سملاسي د $n=4$ دیترمینانت د 24 ضربونه یوه جمعه لري.

د ساروس –شېما په ساده توګه د ځاي بدلون وديزيېنه پسي په ساده توګه و ازمايي. لاندې جدول ټول زياتووني يا جمعی اجزاوې ښايي همداسې دا د ځايبدلون i سره اسوځييري بدلوني، له کومو چې دا مخنخښه σ لاس ته راځي.

i	بدلونونه	$\sigma(i)$	Summand

(c) ketabton.com: The Digital Library

	Vertauschungen		زياتيدونې يا د جمعې اجزا
$(1,2,3)$		$+$	$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$
$(2,3,1)$	$\rightarrow (3,2,1) \rightarrow (1,2,3)$	$+$	$+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$
$(3,1,2)$	$\rightarrow (2,1,3) \rightarrow (1,2,3)$	$+$	$+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$
$(3,2,1)$	$\rightarrow (1,2,3)$	$-$	$-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$
$(1,3,2)$	$\rightarrow (1,2,3)$	$-$	$-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$
$(2,1,3)$	$\rightarrow (1,2,3)$	$-$	$-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

لوريز حجمونه (ډکي) Orientiertes Volumen

د يوه حقيقي ماتريکس A ديترمينانت مطلق ارزښت د ـبعدي سره چې له متو څخه غزيدلی شپات(Spats) سره پراپر دی يا يو په بل پرېوځي:

$$|\det A| = \operatorname{vol}\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i : \ 0 \le \alpha_i \le 1\right\} = \operatorname{vol}\left(A[0,1]^n\right) \ .$$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساده ازمايل کيدی شي، چې لوريز حجمونه يا ډکي

$$\operatorname{vol}_* A := \operatorname{sign}(\det A) \operatorname{vol}(A[0,1]^n)$$

ټول درې د ديترميناتونو تعريف شوي خويونه (مولتی کرښيزوالی، انتي سيومتري، نورمي ونه) لري، له دې امله بايد باور ولري:

$$\operatorname{vol}_* A = \det A$$

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

په $\mathbb{R}^3$ کې د وکتورونو $u,\ v,\ w$ لپاره ديترمينانتونه د شپات ضرب سره سر خوري يا برابر دی:

$$\det(u,v,w) = [u,v,w]\,.$$

د بديل په قسم دا کېدی شي د ε -تنځور ε Tensors- سره افاده شي:

$$\det(u,v,w) = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j w_k\,.$$

که وکتورونه د بېلګې په توګه و ټاکل شي

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو شپاټ ضرب لاس ته راځي.

$$(2,1,1)\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)=(2,1,1)\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}=6-1-1=4\,.$$

د ε - تنځور سره لاندې انځورونه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\det(u,v,w) &= \varepsilon_{1,2,3}\cdot 2\cdot 2\cdot 2+\varepsilon_{1,3,2}\cdot 2\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{2,1,3}\cdot 1\cdot 1\cdot 2\\ &\quad+\varepsilon_{2,3,1}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,1,2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,2,1}\cdot 1\cdot 2\cdot 1\\ &= 8-2-2+1+1-2=4\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

د ديترمينانتونو لپاره قاعدې Regeln für Determinanten

د $(n\times n)$ - ماتريکسونو A او B لپاره صدق کوي:

- $$\det A=\det A^{t},\quad \det A^{*}=\overline{\det A}$$
- $$\det(AB)=(\det A)(\det B)$$.
- A تيک هلته انورتير وړ يا معکوسکېدونکي ده، که او $\det A\neq 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

لیکونکي: هیولیګ، هیونر

اول – د سیومتري خویونه د ځای بدلون پسې ودیزوني څخه لاس ته راځي:

$$\det A^{\mathrm{t}} = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n} .$$

که د جمعۍ اجزا سره اندکسونه یا پیژند نخښې $\{1, \ldots, n\}$ هر یو په لړۍ پرلپسې و i ته معکوس ځاي بدلون j سره و وځغلوو، نو د تابع یو تغیر شوی نظم لاس ته راوړو:

$$a_{j_1,i_{j_1}} \cdots a_{j_n,i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} .$$

داچې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو مساوي ودیزینه لاس ته راځي، لکه د $\det A$ لپاره.

د بیلګې په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

یو بل ته معکوس ځاي پلونونه دي په څیکلیکي لیکډول او

$$a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} = a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} = a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} = a_{j_1,1} a_{j_2,2} a_{j_3,3} .$$

که د زیاتیدونو یا د جمعي د اجزاو اینکسونو یا پیژندنخښو $\{1, \ldots, n\}$ کې وځغلي هر یو په لړۍ پرلپسي و i ته په څټ یا برعکس بدلونونه یا پرموتیشنونه j ته ، نو فنکشن یو تغیر شوي نظم راکوي.

$$a_{j_1,i_{j_1}} \cdots a_{j_n,i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو سرب مساوي یا باربه وده لاس ته راولي لکه $\det A$.

د بیلګې په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

یو بل ته په ځیکلیکي لکندود په ځت یا معکوس پرموتیشنونه یا ځای بدلیدنې دي، او

$$a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} = a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} = a_{j_1,1}a_{j_2,2}a_{j_3,3}\ .$$

مخنخښنه σ مثبت ده او هرځل ، ځکه چې

$$i = (1\ 3) \circ (1\ 2), \quad j = i^{-1} = (1\ 2) \circ (1\ 3)\ ,$$

دا په دې معنا چې د پدلونون شمیره (ګڼون) هر ځل 2 دی.

دویم – که معکوسوړ نه وي، نو ضرپوالی د دریم خوي ځخه لاس ته راځي.

د $\det A \neq 0$ لپاره ښوول کیږي، چې تابع

$$B \mapsto f(B) := \det(AB)/\det(A)$$

تو د دیترمینانت ک ټاکونکي خویونه لري، په تعقیب د $\det B$ سره باید برابر وي.
نورمي کونه $f(E_n) = 1$ ځرکنده ده. د ډېرکرښیزوالي او انتیسیومتري لپاره په پام کې نیسو، چې فنکشن(تابع) $B \mapsto AB$ کرښیزه ده د B په متو کې او دا چې د دوه متو بدلون د AB د اړونده متو بدلون په ګوته کوي.

دریم – یو مربع ماتریکس A تیک هلته نامعکوسوړ ده، که د یوه نه ساده وکتور x لپاره $Ax = 0$ وي، دا په دې معنا چې که د A د د متو یو نه ساده کرښیو کمپینیشن a_j شتون ولري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0\,.$$

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0\,.$$

په ورکړشوي حالتکې د متووکتور ځايپدلون څه کېدی شي $x_1 \neq 0$ ونيسو، دا په دې معنا چې

$$a_1 = y_2 a_2 + \cdots + y_n a_n\,, \quad y_j = -x_j / x_1\,.$$

د ضريپوالي څخه لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{j=2}^{n} y_j \det(a_j, a_2, \ldots, a_n) = 0\,,$$

ځکه چې ټولې په ښي لور ديترميناتونه دوه برابرې متې خوندي لري، بايد د انتی سيومتري له امله ورکې شي يا له منځه ولاړې شي.

دا چې د انورتير وړ invertierbaren (په ښتوړ) ماتريکس ديترمينانت د صفرسره برابر نه دی، د يوه له متو خواره شوي غبرګ اړخيز لوريز حجم په حيث ديترمينانت د هندسي تشريح څخه لاس ته راځي . بالاخره دا همداوس د $\det(A^{-1})\,.$ لپاره ښوول شوي ضربوالي څخه لاس ته راځي.

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د ځانګړو ماتريکسونو ديترمئناتونه

Determinanten spezieller Matrizen

د يوه $(n \times n)$ - ماتريکس A لپاره ديترمينانتونه ترلي ورکول کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مثلث ماتريکس: که $a_{i,j} = 0$ د $i < j$ لپاره يا $i > j$ لپاره وي، نو باور لري

$$\det A = a_{1,1} \cdots a_{n,n} .$$

- بلوک دياګونال ماتريکس: که ماتريکس B بلوک جوړښت د $A_{i,j} = 0$ $i \neq j$, سره ولري اومربع دياګونال بلوکونه $A_{i,i}$ ، نو باور لري

$$\det B = \prod_{i=1}^{k} \det A_{i,i} .$$

- اورتوګونا او يونيتار ماتريکسونه: د يوه يونيتارمياتريکس U لپاره باور لري

$$|\det U| = 1 .$$

د يوه اورتوګونال ماتريکس $(u_{i,j} \in \mathbb{R})$ لپاره ځانګړی دی

$$\det U \in \{-1, 1\} .$$

ليکونکي : هيوليک، هيوررنر

مثلثماتريکس : دا چې $\det A = \det A^{t}$ دی، بسيا کوي چې پورته مثلث ماتريکس وڅېړو. د $(1, \ldots, n)$ دځای بدلون i لپاره، کوم چې کتمتوال(ايدنتيتي) نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

، لاس ته ارځي، چې لږ تر لږه یو توکی i_k د $i_k > k$ سره باید ورکړ شوی وي، دا په دې معنا چې $a_{i_k,k} = 0$. داسې جمعه راکمیږي، د کتمتوالي ورکړه ، او دیترمینانت د دیاګونال توکو د ضرب څخه ورکول کیږي.

بلوکدیاګونال ماتریکسونه : لومړی فقط یو وېش په 2 دیاګونالبلوکونو راړو چې لویې n_1 او n_2 لري، نو دا بسیا کوي، چې په ځاي بدلون چې ور جمعه کړو یا ورېيات کړو، کوم چې لومړي توکي د خپل ځانونو ترمنځ او له دې سره هم اکر توکي د خپل ځانونو ترمنځ بدل کړي، څکه چې نور مو پاتېدونو یا د جمعې اجزاوو 0 ته بیایي. دا د جمعې پاتې اجزاوې د لومړیو n_1 توکو یوه ځایبدلون k او د اخرو n_2 توکو یو ځاي بدلون l د ضرب په څیر لیکل کیږي:

$$\det B = \sum_{i\in S_n} \sigma(i)\,(a_{i_1,1}\cdots a_{i_{n_1},n_1})\,(a_{i_{n_1+1},n_1+1}\cdots a_{i_n,n})$$

$$= \left(\sum_{k\in S_{n_1}} \sigma(k)\,(a_{k_1,1}\cdots a_{k_{n_1},n_1})\right)\left(\sum_{l\in S_{n_2}} \sigma(l)\,(a_{n_1+l_1,n_1+1}\cdots a_{n_1+l_{n_2},n})\right)$$

$$= \det A_{1,1} \det A_{2,2}\,.$$

ایندوکتیو له دې څخه یوه وینا لاس ته رووړل کیږي له دوه بلوکونو څخه په ډېرو یوې ویشنې لپاره.

اورتوګونال او یونیتار ماتریکسونه: دا چې کمپلکس کنجوګیشن په جمعې ضرب سره منخ ته کوي او $\det U = \det U^{\mathrm{t}}$ صدق کوي، نو د دیترمینانت د ضربوالي څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = \det E = \det(U^* U) = \det U^* \det U$$

$$= \overline{\det U^{t}} \det U = \overline{\det U} \det U = |\det U|.$$

په حقيقي حالت کې ديترمينانت حقيقي ده او له دې امله فقط 1 او -1 ممکن دي.

ليکونکي : هيوليک، هيوررنر

د ديترمينانتو بڼه بدلون Umformung von Determinanten

د يو ماتريکس ديترمينانتونه د د دوه برابرو متو او يا دوه برابرو ليکو سره صفر دي.له دې په ځانګړې توګه لاس ته راځيو چې ديترمينانتونه تغير نه خوري، که که سړی د يوې متې (ليکې) يوې بلې متې (ليکې) ته ورزيات کړي يا ورجمعه کړي ليکونکي : هيوليک، هيوررنر

دا چې د ترانپوني حالت کې د يوه ماتريکس متې په ليکې بدليږي او $\det A = \det A^{t}$ صدق کوي،دنو بسيا کوي، چد متو حالت وڅيرو.

د دوه متو د پدلولو سره بايد ديترمينانت د تعريف له مخې مخنخښه بدله کړي. که دواړه کتمتې متې يو د بل سره بدلې کړی شي ماتريکسونه ځان نه بدلوي او ديترمينانتونه بايد صفر وي.

که λ - ځله د متې a_j و متې $i \neq j$, a_i ته ور زياته يا جمعه شي، نو لاندې ماتريکس لاس ت ه راځي

$$A' = (a_1, \ldots, a_i + \lambda a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n).$$

د کربنيز کمبينيشن په بنسټ کېدی شي ديترمينانت و وېشل شي يا ټوټه شي په

$$\det A' = \det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) + \lambda \det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n).$$

دويم ماتريکس دوه کتمتي متې لري او له دې امله دا ديترمينانت صفر لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

د یوه ماتریکس د یوې لیکې ډیرواره د ماتریکس د بلې لیکې سره زیاتولو یا جمعه کولو له لارې کېدی شي ماتریکس په مثلث بڼه باندې واړول شي او دیترمینانت بیا د دیاګونال توکو د ضرب له لارې وګټل شي یا لاس ته راړل شي.

که د متو یا لیکو بدلون صورت ونیسي، مخنخښه تغیر خوري.

د بیلګې په توګه کېدی شي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

لکه چې تعقیبوي وشمېرل شي.

دریمه لیکه ترې کم یا منفی د لومړۍ لیکې درې ځله راکوي :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

د دویمې متې او څلورمې متې بدلون:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 3 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

دریمه لیکه ورزیات دویمه لیکه، څلورمه لیکه ترې کم دویمه لیکه راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (-2)) = 24\,.$$

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د ديترمينانتو وديزيينه Entwicklung von Determinanten

د يوه $(n \times n)$ - ماتريکس A ديترمينانت کېدی شي د يوې په خوښه متي يا ليکي پسي وديزيينه کړي.:

$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$	د ليکي k پسي وديزيينه
$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$	د درز يا متي l پسي وديزيينه

چيرته چي $\tilde{A}_{i,j}$ هغه ماتريکس په ګوته کوي، کومه چي د A د i -مي ليکي ، j - مي متي د کرښي کولو (په کرښه کولو له منځه وړني) له لارې منځ ته راځي.

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د $\det A = \det A^t$ له امله بسيا کوي، چي وديزيينه د يوې متي پسي تر څېړني لاندي ونيسو.

- مه متِه په متو

$$a_l = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l} e_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوټه کوو، د دیترمینانتونو د ډېرکربنیزوالي په اساس لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l} \det \underbrace{\left(a_1, \ldots, a_{l-1}, e_i, a_{l+1}, \ldots, a_n\right)}_{=B_i} .$$

یو ماتریکس B_i ترخېړني لاندې نیسو، نو کېدی شي د دې لپاره د $n-l$ مټه بدلونونو له لارې l –مه مټه اخر ته راوړل شي، بې له دې چې د نورو مټو لړېپرلپسي په خپلو منځونوکې تغير شي.

په ورته توګه کېدی شي i –مه لیکه د $n-l$ لیکه بدلونونو سره اخرې لیکې ته راوړل شي:

$$\det B_i = (-1)^{n-l}(-1)^{n-i} \det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots \; a_{i,n} & 1 \end{pmatrix}$$

د بشي اړخ دیترمینانت کې فقط د S_n ځاي بدلونونه ونډه اخلي، چې د n –مې لیکنې په خيث n لري. دا د S_{n-1} ځای بدلون ښايي او له دې سره دی

$$\det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots \; a_{i,n} & 1 \end{pmatrix} = \det \tilde{A}_{i,l} .$$

د زیاتونو د جمعي اجزاوو ضرب د $1 = (-1)^{2l+2i-2n}$ سره د ورکړ شوي وديزېيني فرمول ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لپاره دیترمینانت د لومړی لیکې پسې ودیزبینه شي، نو لاس ته ترې راځي

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2(4-1) - 1(2-1) + 1(1-2) = 6 - 1 - 1 = 4\,. \end{aligned}$$

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

د 3 ټکو له لارې د یوې سطحې ایمپلیڅیت(ساده) انځورونه

Implizite Darstellung einer Ebene durch 3 Punkte

په $\mathbb{R}^3$ کې یوه سطحه چې د درې ټکو

$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ او $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې ورکړ شوې وي، کېدی شي په ايمپليڅيت فرمول له

$$E:\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

له انځور شي. د لومړی ليکې پسې وديزيينې سره لاس ته راځي

$$E: ax+by+cz=d$$

د لاندې سره

$$a=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\ b=-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\ c=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},\ d=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليک، شترايت

بنسټ ازمايښت Basistest

وکتورونه $a_1,\dots,a_n\in K^n$ تيک هلته يو بنسټ جوړوي، که د ماتريکس $A=(a_1,\dots,a_n)$ ديترمينانتونه ورک نه شي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

که د A لومړۍ ليکه صفر وي، نو غوښتنه (ثبوت) روښانه ده.

په بل حالت کې کېدی شي د متې يوه ځاي بدلون پسې ونيسو يا فرض کړو، چې $a_{1,1}\neq 0$ اومتې a_j لکه ښنګه لرو بڼه بدل کړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_j \to a'_j = a_j - \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}}\, a_1, \quad j = 2, \ldots, n\,.$$

دا د متو عملیو کارولو له لارې کېدی شي د متو دیترمینانت او هم د بنسټ خویونه بې تغیره پاتې شي. دا ښه بدل شوی ماتریکس لاندې بڼه لري

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ c & & B & \end{pmatrix}.$$

د ودیزیښې جملې پسې لرو

$$\det A' = a_{1,1} \det B\,,$$

او دا چې $a_{1,1} \neq 0$ د A' متې تیک هلته یو د K^n بنسټ دي، که د B متې یوه د K^{n-1} بنسټ دي. دا غوښتنه کېدی شي اندوکتیو و ښوول شي.

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

د بیلګې په توګه له

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کېدی شي د بنسټ ازماېښت روښانه شي.

که د متو یا لیکو څخه یو یې فقط له صفر جوړ وي، نو د دیترمینانت لپاره 0 ترې لاس ته راځي. په دې حالت کې د ماتریکس رانګ ماکسیمال 1 دی او له دې امله متې بنسټ نه جوړوي.

په بل حالت کې له $ad = bc$ لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab-ba \\ ad-bc \end{pmatrix} = 0$$

او له دې سره متې کرښيز بلواک دي.

که د متې کرښيز بلواک وي، نو صدق کوي:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},$$

ديترمينانت شمېرل کي.ي و ته:

$$\det A = ad - bc = a\lambda c - \lambda ac = 0\,.$$

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د واندرموند – ديترمينانتونه Vandermonde-Determinante

په n ټکو x_i کي ارزښت شوي مونومونو $1, x, \dots x^{n-1}$ ديترمينانت دی

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)\,.$$

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د $n = 2$ لپاره د واندرمود – ماتريکس ديترمينانت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 .$$

د يوه ټوليز n لپاره د ټولو نورو ليكو څخه لومړۍ ليكه كميږي:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} .$$

د لومړۍ متې پسې وديزيېنې سره راكوي

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} ,$$

د كوم سره چې له k -مې ليكې څخه ضريب $x_k - x_1$ رادباندې كيدى شي:

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i}x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i}x_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 + x_nx_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i}x_1^i \end{vmatrix} .$$

كه د هرې متې څخه دا د مخه تېرې شوې متې دا x_1 – ځله كم كړو، نو بېرته پيل بڼې ديترمينانت لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k-x_1)\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2}\\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

، او فرمول د اندکشن له لارې ښوول کېدی شي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

کرښيز مساوات سيستم Lineares Gleichungssystem

په يوه تن يا جسم K کرښيز مساوات سيستم دا لاندې ښه لري

$$\begin{matrix} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad Ax=b$$

د يوه ضريبونو د ماتريکس $A=(a_{i,j})\in K^{m\times n}$ سره، د نامعلومو $x_j\in K$ او يو ښۍ اړخ $b\in K^m$ سره.

دا کرښيز مساوانسيستم هوموجېن بلل کيږي، که $b=0$ وي، پرته له دې ناهوموجېن inhomogen بلل کيږي.

د يوه حقيقي ($K=\mathbb{R}$) يا کمپلکس ($K=\mathbb{C}$) کرښيز سيستم لپاره K اکسپليڅيت explizit نه شي ورکول کېدی. دا چې کوم حالت مخ ته لرو د اړوندوالي له مخې ليدل کيږي يا روښانه دی.

که کرښيز مساوات سيستم کوم حل نه لري (په ټوليزه د $m>n$ لپاره)، نو دا باندې- تاکلی بلل کيږي. په دې حالت کې له اندولپرابلم څخه غږيږو. يو کرښيز مساوات سيستم د

(c) ketabton.com: The Digital Library

نا يواحني حل سره (په توليزه توګه د $m < n$ لپاره) کښته - – يا لاندې- تکلی بلل کيږي.

يوه تابع $f(x)$ کيدی شي له داتن

$$(x_i, f_i), \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

څخه د انترپوليشن له لارې په نږدې توګه بيا جوړه rekonstruiert شي. که يوه کرښيزه ځاي په ځاي کونه يا اينوونه

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j(x)$$

د مناسب بنستتوابعو p_j سره، نو د انترپوليشن شرايطو څخه

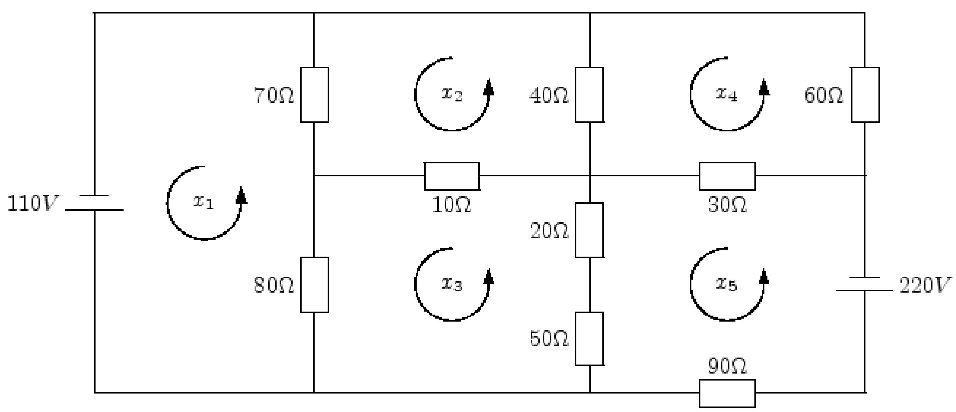
برېښنايي جريانداېره Elektrischer Schaltkreis

که په يوه برېناجريان دايره (ګردی)کي د x_i سره د دايرې برېښناجريان وښايو د جريانلور د ساعتنخښه ووني (عقربک) مخامخ يعني معکوس، د سره د i - مي او j – مي پټی ګسره دې يا مشترک مقاومت، د $R_{i,j}$ سره او د U_i سره اينوولی Spannungen ، نود اوم Ohm او کيرښهوف Kirchhoff قانون څخه دا کرښيز مساوات سيستم لرو

$$\sum_{i\sim 0} x_i R_{i,0} + \sum_{i\sim j} (x_i - x_j) R_{i,j} = U_i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $i \sim j$ معنا ورکوي، چې i -م او j —م د برېښناپټۍ يو ګډ مقاومت لري.
$x_i - x_j$ د دې مقاومت له لارې برېښناجريان دی. د $i \sim 0$, $R_{i,0}$ سره مقاومت شوول کيږي چې هغه فقط په i —مې پټۍ کې پروت دی.



د بېلګې په توګه د څېره شوې جريان دابرې(ګردی) لپاره کربنيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 150 & -70 & -80 & 0 & 0 \\ -70 & 120 & -10 & -40 & 0 \\ -80 & -10 & 160 & 0 & -70 \\ 0 & -40 & 0 & 130 & -30 \\ 0 & 0 & -70 & -30 & 190 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -220 \end{pmatrix}.$$

د ضريبونو ماتريکس په دياګونال کې د يوې پټۍ پورې اړونده مقاومت او ځاي يا (i,j) Position د i او j ګمېز يا منفي ګډ مقاومت . د دې راوړل شوې بېلګې حل دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \approx \begin{pmatrix} 1.0157 \\ 0.5641 \\ 0.0358 \\ -0.0940 \\ -1.1595 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د يوه کرښيز مساوات سيستم حلوړوالی

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

په يوه تن يا جسم K د يوه هموجين کرښيز مساوات سيستم حلډېرى

$$Ax = 0,$$

د يوه $m \times n$ ضريبونو ماتريکس A يوه د K^n لاندي – يا برخډېرى U ده.

که دا هموجين کرښيز سيستم

$$Ax = b$$

يو حل v ولري، نو د توليز حل لپاره باور لري

$$x \in v + U\,,$$

دا په دي معنا چي حللډېرى د K^n يو افين affin لاندي – يا برخډېرى ده. په ځانګړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه کېدی شي هوموجېن کرښيز مساوات سيستم هيڅ ، يو $U = \emptyset$ يا ناپای ډېر زيات حلونه ولري. $\dim U > 0$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ، کيمرلي

که x, y د هوموجېن کرښيز مساوت سيستم حلونه وي او $\lambda \in K$ ، نو لاس ته راوړو:

$$A(x+y) \;=\; Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

همداسي

$$A(\lambda x) \;=\; \lambda Ax = \lambda 0 = 0\,,$$

دا په دې معنا چې د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم د حلونو ډېرۍ يوه لاندې- يا برخفضا U جوړوي.

که v د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل وي او $u \in U$ ، نو $x = v + u$ د

$$Ax = A(v+u) = Av + Au = b + 0 = b$$

له امله هم د دې هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل دی.

برعکس د ناهوموجېن کرښيز مساوات سيستم د دوه حلونو v او w سره کمښت يا تفريق $v - w$ د

$$A(v-w) = Av - Aw = b - b = 0$$

له امله هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د یوه ناهوموجېن کرښیز مساوات سیستم ټول حلونه لاس ته راځي، داسې چې د ناهوموجېن کرښیز مساوات سیستم د خوښې حلونو لپاره د ټولو هوموجېن کرښیز مساوات سیستم حلونو جمعه جوړه کړو، یعې سره جمعه کړو.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دا لاندې ساده حالتونه د کرښیزو مساواتو مختلف ډولونه د لیدنې کوي:

لومړی – کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 60 \end{pmatrix}$$

یواځني حلونه لري: $x_1 = 8$, $x_2 = 1$.

دویم – کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

یواځنی حل نه لري. که $x_3 = t$ په خوښه وټاکو، نو $x_1 = 2$, $x_2 = 2t$ د حلونو په څېر لاس ته راځي.

دریم - کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوم حل نه لري. اخرنی لیکه $x_2 = 4$ راکوي، که دا په یوه لیکه کې کېښوول شي، د لومړی لیکې څخه $x_1 = 2$ لاس ته راځي، له دویمې څخه برعکس $x_1 = 1$.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دیترمینانت او د یوه مساوات سیستم حلوړوالی

Determinante und Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

یو کرښیز مساوات سیستم

$$Ax = b$$

د مربع ضریبونو ماتریکس A سره تیک هلته یو یواځنی حل لري، هر ښي لوریزې b سره، که همداسې دا هوموجېن سیستم $Ax = 0$ فقط یو ساده حل $x = 0$ ورلري.

که $\det A = 0$ وي، نو یو حل فقط د ښی لورې b لپاره شتون لري په هغه د A د متو څخه غزېدلي لاندې – یا برخفضا ده. په دې حالت کې حل یواځنی نه دی.

لیکونکي: کرایخ، هیولیګ

غوښتنه د دیترمینانت د خویونو څخه په لاس راځي.

و $\det A \neq 0$ ته ورته لرو، چې د A متې $a_1, \ldots, a_n$ کرښیز خپلواکې دي. د تعریف سره سم دا په دې معنا دی چې

$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$$

د دې لپاره چې د ناهوموجېن سيستم يوائځني حلوړوالي ته ورته لاس ته راوړای شو، له دې کار اخلو چې متې يو بنسټ جوړ کړي، دا په دې معنا چې هر ښی اړخ b د

$$x_1a_1 + \ldots + x_na_n = b \Leftrightarrow Ax = b$$

کرښيزکمبېنېشن په حيث

يوائځنی انځوروړ دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

دا کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

تيک هلته يو يوائځنی حل لري، که ديترمينانت $ad - bc \neq 0$ وي. په دې حالت کې حل په لاندې ډول دی

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc}\,, \qquad y = \frac{av - cu}{ad - bc}\,.$$

که ديترملنانت $ad - bc$ برابر 0 وي، په ټوپيزه توګه کرښيز مساوات سيستم حل نه لري. په دې حلات حلونه فقط هلته شتون لري، که

$$av \qquad = cu$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$bv \qquad = du$$

صدق ولري. که د بېلګې په توګه $a \neq 0$ وي، نو کېدی شي y په خوښه وټاکو او د x لپاره لاس ته راوړو

$$x = \frac{u - by}{a} \,.$$

ليکونکي: پپ، اهيوليک

د کرامر قاعده Cramersche Regel

د يوه مربع کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ لپاره

$$x_i \det A = \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n) \,,$$

دی، د کوم a_j سره چې د متوضريبونو ماتريکس A په نخښه کيږي.

په ځانګړې توګه کېدی شي د $\det A \neq 0$ لپاره په څټ يا معکوس $C = A^{-1}$ د

$$c_{i,j} = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det A}$$

له لارې ټاکل کېدی شي.

ليکونکي: هيوليک، شترايت

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ديترمينانت د ډېرکرښيزوالي او سيومتري له امله لاس ته راځي:

$$\det(a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_n) = \det(a_1,\ldots,a_{i-1},\sum_{j=1}^{n} a_i x_i, a_{i+1},\ldots,a_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(a_1,\ldots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

$$= x_i \det(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

په ځانګړي توکه د $b = e_j$ سره د معکوسي j ــمه مېه $x = (c_{i,j},\ldots,c_{n,j})^{\mathrm{t}}$ راکوي

ليکونکي: هيوليک، شترايت

ديوه (2×2) - ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

د معکوس C لپاره د کرام قاعدې سره لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{d}{\det A}, \qquad c_{1,2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-b}{\det A},$$

$$c_{2,1} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-c}{\det A}, \qquad c_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې د $\det A = ad - cb$ سره دا لاندې لرو

$$\det A = ad - cb$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د (3×3) - ماتريکس

$$(3 \times 3)$$

د معکوس G لپاره د کرامر د قانون له مخې لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{25}, \qquad c_{1,3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{25},$$

$$c_{3,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{25}, \qquad \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول داسې دي

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 12 & 1 & 8 \\ -14 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

په څټ لور ځای په ځای کول Rückwärts-Einsetzen

په يوه کربنيز مساوات سيستم کې د پورته مثلث -بڼې سره

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix}}_{R}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

د $\det R = r_{1,1}\cdots r_{n,n} \neq 0$ سره کېدی شو ناټاکلي $x_n, \ldots, x_1$ يو پر بل پسې وټاکو:

$$r_{n,n}x_n = b_n \rightarrow x_n = b_n / r_{n,n}$$

او د $\ell = n-1, \ldots 1$ لپاره ،

$$r_{\ell,\ell}x_\ell + \cdots + r_{\ell,n}x_n = b_\ell, \rightarrow x_\ell = \left(b_\ell - r_{\ell,\ell+1}x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n}x_n\right)/r_{\ell,\ell}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره به هر يو دا اوس معلوم شمېل شوي ارزښتونه $x_{\ell+1}, \ldots, x_n$ و کارول شي.

په يوه مساوات سيستم کې د يوه لاندې مثلث ماتريکس کې کېدی شي په ورته توګه يو په بل پسې $x_1, \ldots, x_n$ و ټاکل شي.

د کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 7x_3 & = & 7 \end{array}$$

لپاره په ملث بنې کې د په څټ ايښووني له لارې حلونه لاس ته اځي

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = (0-2)/2 = -1$$

$$x_1 = (6-3(-1)-1) = 2\,.$$

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د ګاوس ترانفورميشن Gauß-Transformationen

لاندې عمليې د کرښيز مساوات سيستم د حلونو ډېرۍ بې تغيره پرېږدي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د دوه مساوتو بدلونه
- یوه مساوات ضربونه د یوه ضریب $\neq 0$ سره.
- د یوه مساوات کمول له یوه بل مساوات څخه

د اخرو دوه عملیو د کمبینېشن له لارې د یوې لیکي ډېرواره زیاتول یا جمعه کول و بلې لیکې ته عملیې دي چې اجازه لري یا پرېښوول شوې عملیې دي.

د داسې په نامه ګاوس ترانسفورمېشن په مسته کزدی شي sukzessive یا یو په بل پسې ناټاکلي له منځه یووړل شي او یو کرښیز مساوات سیستم په مثلثفورم تراسفورمه کړو یا په بله بڼه واړوو او بیا یې په شټ اینسووني له لارې حل کړو.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

حل ځان ته تغیر نه ورکوي له

- د لومړي او دویم مساوات بدلونه

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

- د دویم مساوات ضربونه د 2 ضریب سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

- د دریم مساوات کمول یا تفریقول له دویم مساوات څخه

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ & & -3x_2 & + & 9x_3 & = & 30 \end{array}$$

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د ګاوس د له منځه وړنه Gauß-Elimination

د ګاوس – بڼه بدلون له لارې کېدی شي يو کرښيز مساوات سيستم د انعکاس وړ $(n \times n)$ -ضربیماتریکس به ماکسیمال $n-1$ پلونو (قدمونو) په پورته مثلثبڼه باندې واړول شي یا راوړو. د دې لپاره یو په بل پسې د دیاګونال لاندې کښته ضریبونه له منځه یوسو دا په دې معنا چې له $\ell - 1$ پلونو (قدمونو) وروسته دا ک م س (کرښيز مساوات سيستم) لاندې بڼه غوره کوي :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} a_{1,1} & x_1 & + & a_{1,2} & x_2 & + & \dots & + & a_{1,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{1,n} & x_n & = & b_1 \\ & & & a_{2,2} & x_2 & + & \dots & + & a_{2,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{2,n} & x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & a_{\ell,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell,n} & x_n & = & b_\ell \\ & & & & & & & & a_{\ell+1,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell+1,n} & x_n & = & b_{\ell+1} \\ & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & a_{n,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{n,n} & x_n & = & b_n \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوګوني ډول ℓ -م له منځه وړنې پل داسې ځغلي لکه لاندې .

- که دا -م دیاګونال توکی، داسې په نامه د پیوت-تونی Pivot-Element، صفر دی، نو ℓ -م به د یوه دې لاندې مساواتو سره بدل شي، داسې چې $a_{\ell,\ell} \neq 0$ به باور ولري...
- د $i > \ell$ لپاره به د i -م مساوات څخه د ℓ -م مساوات ډېر واره کم شي، داسې چې $a_{i,\ell}$ صفر شي:

$$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - q_i a_{\ell,j}, \quad b_i \leftarrow b_i - q_i b_\ell \quad (q_i = a_{i,\ell}/a_{\ell,\ell})$$

د ټولو $j \geq \ell$ لپاره..

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د کربنیز مساوات لپاره

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د ګاوس الګوریتم په لاندې تو؛ه ځغلي:

- د لومړی او دویمې لیکې پدلول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (3 لیکه) – (1 لیکه) او (4 لیکه) - (1 لیکه) $\cdot 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (.لیکه2) + (لیکه$\cdot 2$3):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (لیکه3)- (لیکه4)$\cdot 3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د ایښیلون بڼه Echelon-Form

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو كرښيز مساوات سيستم د يوه $(m \times n)$ - ضريب ماتريكس سره كېدی شي د ګاوس ــترانفورميشن سره د ايښپلون-فورم باندې يې بڼّ بدله يا واړول شي:

$$Ax = b \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0\ldots0 & p_1 & *\ldots* & & & & & \\ & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\ldots* & & & \\ & & & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\ldots* & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

له دې سره داسې په نامه پيووت

$$p_1 = a'_{1,j_1}, \ldots, p_k = a'_{k,j_k}, \quad k \leq m, \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n,$$

د صفر سره نابرابرې دي او k د A رانګ ی.

د k ـم ترانفورميشن پل په لاندې ډول ځغلي:

- يو له صفر مختلف متريكس توكی p_k د خورا كوچنی متې ايندكس(پيژندنخښې) سره او $\geq k$ ليكې اندكس(د ليكې پيژند نخښه) د پيووت توكی په حيث ټاكل كيږي او د ليكو بدلون له لارې پوزيشن (k, j_k) ته راوړل كيږي. كه پيووت توكی شتون نه لري، نو د ايښلون پڼه مو لاس ته راوړې ده.

- د k ليكې ډېرواره كمون يا تفريق له لارې د پيووت لاندې لور ته د ماتريكس توكی له منځه ځي.

ليكونكي: هيوليګ، شترايت

د ماتريكس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

لپاره ترنفورمیشن د ایښلون-فورم باندې په لاندې ډول ځغلي

1. د لومړۍ او دویمې لیکې پډلون:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2. (3.لیکهZeile) - $2\cdot$(1.لیکهZeile) und (4.لیکهZeile) او + (1.لیکهZeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

3. (3.Zeile) - (2.Zeile), (4.Zeile) - (2.Zeile)

او (5.Zeile) - (2.Zeile)

په پورته کې Zeile د لیکې یا میلې په معنا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.4 (4. Zeile) - $\frac{1}{2}\cdot$ (3.Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

د ايښلون – فورم لري نا ساده ليکي د پيووټ –توکو $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ او $p_3 = -10$ سره.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د ايښلون- بڼه د يوه ل م س (کرښيز مساواتسستم)حل

Lösung eines LGS in Echelon-Form

يو کرښيز مساوات سيستم $Dx = c$ د ايښلون په بڼه،

$$\begin{pmatrix} 0\ldots0 & p_1 & *\ldots* & & & & & \\ & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\ldots* & & & \\ & & & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\ldots* & \\ & & & & & & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پیووت $p_1, \dots, p_k$ سره تیک هلته حلوړ دی، که $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$ وي.

حل یوائځنی دی، که $k = n$ وي. د $k < n$ لپاره د هوموجین کرښیز مساوات سیستم ($c_i = 0$)تیک $n - k$ کرښیز خپلواک حلونه شته .

نا معلومې، چې بې له پیووت یې متې په ګوته کوي. کېدی شي ازادې یا په خوښه و ټاکل شي.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

په لاندې کې به زیات تیوپیکي حالتونه تر بحث لاندې راوړل شي.

- $k = n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د په ځښ اینسوونې له لارې ریکورزیو یوائځنی حل لاس ته راوړی شو.

$$x = (1, -1, -1, 1)^t.$$

- $3 = k < n = 5$ ، $c_4 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرنۍ لیکه کې $0 \cdot x = 1$ ترې لرو، له دې سره کرښيز مساوات سیستم کوم حل نه لري.

- $3 = k < n = 5$ ، $c_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

دا چې $c_{k+1} = 0$ ، نو کرښيز مساوات سیستم $Dx = c$ حلوړ دی

د $\operatorname{Rang} D = 3 = n - 2$ له امله حل x یواځنی نه دی. دلته د دوه

کرښيز خپلواک حلونه v_i شتون لري د هوموجېن سیستم او د ټولیز حل لاندې بڼه

$$x = x_s + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \,, \alpha_j \in \mathbb{R}$$

لري د هوموجین سیستم یو ځانګړی حل x_s سره.

وکتورونه v_i د پیووت پورې نه اړه لرونکو نامعلومو د کانونیکي (بڼه یز: کنوني) ټاکنې له لارې معلوموي یا ټاکي او پاتې ضریبونه په هوموجېن سیستم باندې:

$$r_{\ell,\ell} x_\ell + \cdots + r_{\ell,n} x_n = b_\ell, \rightarrow x_\ell = \left(b_\ell - r_{\ell,\ell+1} x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n} x_n\right) / r_{\ell,\ell} \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو ځانګړی حل

$$x_s = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د $x_3 = x_5 = 0$ اینوونې له لارې لاس ته راځي.

ليکونکي: هيوليک، شترايت

رانګ او د ک م س(کرښيز مساواتسيستم) حلوړوالی

Rang und Lösbarkeit von LGS

وي دې $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m.$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m.$

- کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ يو حل لري

$$\Longleftrightarrow \text{Rang}\, A = \text{Rang}(A, b).$$

- کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ يواځنی حلوړ دی

$$\Longleftrightarrow \text{Rang}\, A = \text{Rang}(A, b) = n.$$

- کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ ډېر حلونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Longleftrightarrow \text{Rang}\, A = \text{Rang}(A, b) = k < n.$$

دلته په پام کې ولرئ، چې د A رانګ او د غزېدلي ماتريکس $(A,$ اينواريانت دي د ساده بنې بدلون سره. له دې امله کېدی شي و نيول شی يا فرض شي کرښيز مساوات سيستم په ايښلون-بڼه دی. په دې بڼه کېدی شي نتيجې ترلې ولوستل شي.

د انډول کرښه(انډولکرښه) Ausgleichsgerade

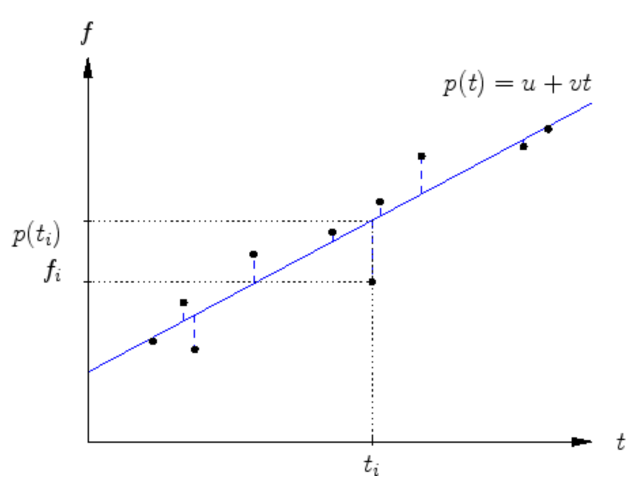
يوه کرښه

$$p(t) = u + vt\,,$$

، چې داتتونه $i = 1, \ldots, n$ ، په خورا ښه توګه approximiert کوي، کېدی شي د ناتيکاوي مربع جمعي کمښت

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i - p(t_i))^2$$

له لارې پيدا کړی شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د محوربرخې u او جګېدنې v لپاره لاندې فرمولونه راکوي

$$u = \frac{(\sum t_i^2)(\sum f_i) - (\sum t_i)(\sum t_i f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}$$

$$v = \frac{n(\sum t_i f_i) - (\sum t_i)(\sum f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2},$$

که لږ تر لږه دوه پراته ارزښتونه یا قیمتونه t_i ورک شي یعني صفر وي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د مینیموم سره بایدد غلطی مربع جمعي مشتق هم د u او v هم د پسې صفر وي:

$$0 = 2\sum_i (u + vt_i - f_i)$$

$$0 = 2\sum_i t_i(u + vt_i - f_i).$$

دواړه مساوات د ماتریکس په بڼه په لاندې ډول دي

$$\begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_i \\ \sum t_i f_i \end{pmatrix}.$$

که لږ ترلږه دوه t_i مختلفې وي، نو دیترمینانت ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underbrace{(1+\cdots+1)}_{n\,\mathrm{mal}}|(t_1,\ldots,t_n)^{t}|_2^2-\left(\sum_i 1\cdot t_i\right)^2>0\,,$$

او سړی د کرامر د قاعدې سره ورکړ شوی حل لاس ته راوړي

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

د برابروني حل يو بل سره يوغږيز کيدل يا يو په بل پريوتلو، کرښيزو مساوات سيستم

Ausgleichslösung überbestimmter, linearer Gleichungssysteme

که د يوه کرښيز مساوات سيستم $Ax=b$ ښی خوا b وي د $(m\times n)$ - اتريکس A متو کرښيزې هيولي ياسپاين کې خوندي نه وي (په تيپيکي دول د $m>n$ لپاره)، دا په دې معنا چې وي

$$\mathrm{Rang}\,A<\mathrm{Rang}\,(A,b)\,,$$

نو مساوات سيستم حل نه لري. سړی د يوه د پاسه تاکلي سيستم څخه خبرې کوي. په دې حالت کې کېدی شي يو اپروکسيميشن د برابروالي پرابلم

$$|Ax-b|\to\min$$

له لارې و ټاکل شي.

د برابروالي حل شمېرل د نورمالومساوات يا سينګولارارزښتتوته کوني په مرسته ممکن يا شوني دی

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر - کربنيز مساوات سيستم-برابروني پرابلم

Algebra - Lineare Gleichungssysteme – Ausgleichsprobleme

نورمالمساواتونه Normalengleichungen

د يوه په خوښه $m \times n$ – ماتريکس A لپاره هر د برابروني پرابلم

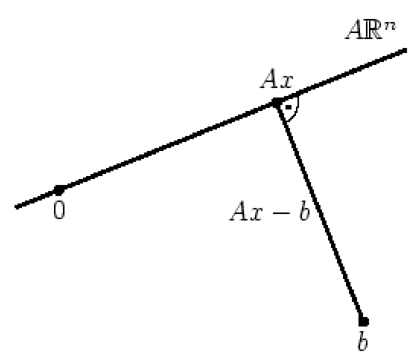
$$|Ax - b| \to \min$$

هر حل x نورماليز –مساواتونه

$$A^{\mathrm{t}} A x = A^{\mathrm{t}} b ,$$

پوره کوي، دا په دې معنا چې

ريزيدووم $r = Ax - b$ Residuum اورتوګونال دی د A د متو څخه غزېدلي لانديفضا $\operatorname{Bild} A$ سره



ځمککچيز يا هندسي مساوات معنا لري، چې ريزيدووم $r = Ax - b$ د ماتريکس A په متو نيغ ولاړ دی يعني عمود دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماتریکس $A^{t}A$ مربعیزه ده او پراخېدونی یا بعد n لري. دا ټیک هلته معکوسوړ ده کله چې $\operatorname{Rang} A = n$ وي، دا په دی معنا چې کله د A متې کرښیز خپلواکې وي.
نورمالیز-مساوات د سینګولار حالت کې هم حلوړ دی، خو حل یې یواځنی نه دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

له

$$|A(x+ty)-b|^2 \geq |Ax-b|^2$$

د

$$(Ax-b)^{t}y = y^{t}(Ax-b), \quad r = Ax-b$$

سره برابر ارزښته نامساوات

$$2ty^{t}A^{t}r + t^2y^{t}A^{t}Ay \geq 0$$

لاس ته راځي د ټولو $t \in \mathbb{R}$ او وکتورونو y لپاره. که د نابرابرون کیڼ اړخ په t کې د پارابول په څېر ونیول شي، نو نه منفیوال(نه کمیزوالي) د

$$y^{t}(A^{t}r) = 0\,.$$

سره به یوه معنا دي.

دا ټیک هلته د ټولو وکتورونو y لپاره صدق کوي، که په نوکانو کې افاده (ویینه) صفروکتور وي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لپاره نورمالمساوات لاس ته راځي

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته راځي

دا کربنيز مساوات سيستم ئواځني حل $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t$ لري.ريزيدووم $r = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t$ دي.

که A کربنيز بلواکې متېې ولري، لکه په بېلګه کې

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

نو نورمالو-مساوات سيستم سينګولار دي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

حل

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې يو اځني نه دي، مګر ريزيدووم

$$r = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & 0 \end{pmatrix}^t$$

.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

توموګرافيTomographie

لکه څنګه په فنکشن يا څيرونه (mappingتابع) کې ښوول شوي دي، په کمپيوتر-توموګرافي Computer-Tomographie کې د حجروغړو تينګوالي (غلظت)
$x(u,v)$
بيا جوړيږي ، په کومه کې چې د ګڼوالي يا تينګوالي بايليدنه(کمښت) Intensitätsverlust د رونتګن وړانګو د k کودې له ℓ غبرګو کرښو

$$\mathcal{R}_i:\ \ (u_i,v_i)+\mathbb{R}(\cos\vartheta_i,\sin\vartheta_i),\quad i=1,\ldots,m=k\ell\,,$$

کچ کيږي. سړي د تينګوالي وېش د يوه ټوټه ډوله ثابتې تابع approximiert کوي

سړی د تينګواليخورونه د يوه ټوټه ډوله يا ټوټه په ټوټه ثابتو له لارې اپروکسيمي کوي د مربعو Q_j په پاتې شونو او ګڼوالي کچه ونو د نږدې ونې له لارې کټلي کرښيز ا نتيګرال څخه.

$$b_i=\int_{\mathbb{R}} x(u_i+t\cos\vartheta_i,v_i+t\sin\vartheta_i)\,dt\approx\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\,,$$

چيرته چې x_j د $x(u,v)$ يو اپروکسيميشن دی په Q_j او

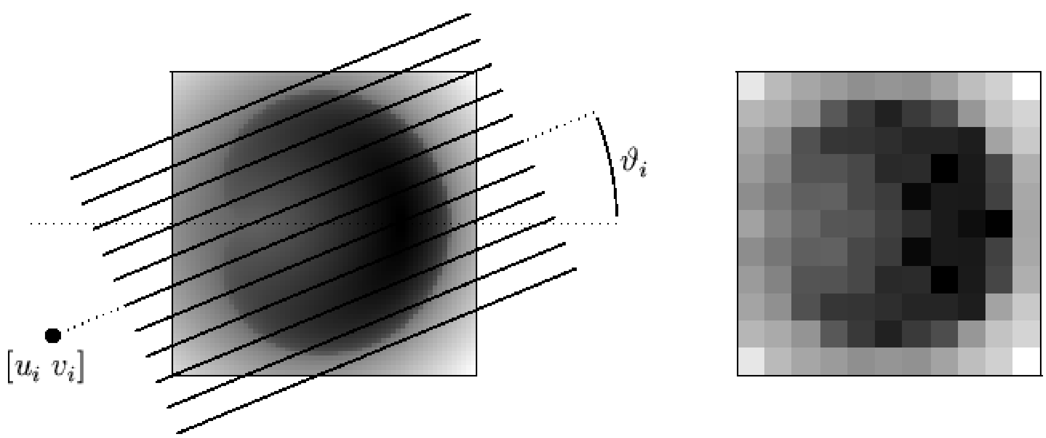
$$a_{i,j}=|\mathcal{R}_i\cap Q_j|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښو $\mathcal{R}_i$ د Q_j سره غوڅ ي يا تقاطع ا وړدوالی په ګوته کوي. دا چې د کچوونو تعداد يا ګڼون په ټوليزه توګه ډېر لوي دي نسبت د راستر (هغه تخته چې ځيره پرې کښل کيږي) ځلوريو او شنتيګرالونه چې ټيک نه شي شميرل کيدی، د داتا b ځخه د x ټاکلوته سړی يو برابروالېز يا د انډول پرابلم سره مخامخ کيږي.

دالاندې ژباړي دلته راکاپي کړي(دا لاندې دې همداسې په انګرېزي پاتې وي):

›› The word "raster" has its origins in the Latin *rastrum* (a rake), which is derived from *radere* (to scrape). It originally referred to the raster scan of cathode ray tube (CRT) video monitors, which paints the image line by line by magnetically steering a focused electron beam. By association, it came also to refer to a rectangular grid of pixels. See also rastrum, a device for drawing musical staff lines پای››



پورته ښي لور ته ځيره په يوه 11×11 راستر شميرلی نږديوالی ښايي کيڼ ځيره شوی ټينګوالي خورونه(غلظت-) ښايي. له دې سره د کونج

$$\vartheta = 0, \pi/16, \pi/8, \ldots$$

لپاره 11 غبرګ سکن-لورې د راستر مربع سور باندې کارول شوي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

آيګن-ارزښت او آيګو-وکتور Eigenwert und Eigenvektor

يو سکالار λ د يوه مرئع ماتريکس A آيګو-ارزښت بلل کيږي، که وي:

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

وکتورونه $v \neq 0$ د $Av = \lambda v$ سره و آيګن-ارزښته λ ته آيګن-وکتورونه بلل کيږي.
آيګن-وکتورونه و آيګن-ارزښت ته د صفر وکتور سره يوځاي يوه کرښيزه فضا جوړوي،
داسې په نامه د λ آيګن-فضا

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda E)$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر، کيمرلي

ماتريکسونه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

آيګن-ارزښتونه $\lambda_1 = 0$ او $\lambda_2 = 2$ لري، ځکه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

لاندې بېلګې د (2×2) ـماتريکسونو لپاره ممکنه حالتونه ښايي

- دوه حقيقي آيګن-ارزښتونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_1 = -1 , v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_2 = 3 , v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- يو حقيقي آيګن- ارزښت، دوه کرښيز خپلواک آيګن-زکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad \lambda = 2 , v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- يو حقيقي آيګن-ارزښت، يو آيګن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda = 1 , v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- دوه کنجوګيري کمپلکس آيګن-ارزښتونه او آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_{1,2} = 1 \mp \mathrm{i} , v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې بېلګې د کمپلکس (2×2) – متريکسونو لپاره ممکنه حالتونه څېړي.

- دوه آيګن-ارزښتونه اودوه آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2 + i,\, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -2 + i,\, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، دوه کرښيز خپلواک آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2i,\, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، يو آيګن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda = i,\, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليک،هيوررنر

ورته والي - ترانفورميشن Ähnlichkeitstransformation

د يوه مربعيز ماتريکس A په ورته والي تراسفورميشن

$$A \to B = Q^{-1} A Q,$$

کې آيګن-ارزښتونه ساتلي پاتيږي. آيګن-وکتورونه د اينورتيروړ ماتريکس Q له لارې
تشريح شوې بنسټ بدلون سره سم ترانسفورمي کيږي، دا په دې معنا، چې د A آيګن-

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتور v و آيګن- ارزښت λ ته و همهغسي د B آيګن-وکتور $w = Q^{-1}v$ په ګوته کوي و همغه بنسټ ته.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

که v د A يو آيګن-وکتور وي و آيګن-ارزښت λ ته، يعنې $Av = \lambda v$، نو د $w = Q^{-1}v$ لپاره لاس ته

$$Bw = Q^{-1}AQw = Q^{-1}AQQ^{-1}v = Q^{-1}Av = Q^{-1}\lambda v = \lambda Q^{-1}v = \lambda w\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

لاندې مربع ماتريکس دې ورکړ شوی وي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

د آيکن-ارزښت $\lambda_1 = 2$ او $\lambda_2 = 3$ او د لاندې اړونده آيګن-وکتور سره:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

يو ورته والي ترانسفورميشن د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

سره راکوي.

د B آيګن-وکتورونه w_1 او w_2 د

$$w_1 = Q^{-1}v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

سره، همداسې

$$w_2 = Q^{-1}v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

سره شميرل کيږي.

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

کرکتريستکي پولينوم Charakteristisches Polynom

د $(n \times n)$ – ماتريکس A آيګن-ارزښتونه د کرکتريستيکي پولينوم صفرونه دي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

په ځانګړې توګه د ماتريکس آيګن – ارزښونه د ترانسبوزيشن سره اينواريانت پاتې کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: هيوليک، هيورنر، کيمرلې

يو سکالار λ تيک هلته د $(n \times n)$-ماتريکس A آيګن-ارزښت دی، که ولرو

$$Av = \lambda v\,, \quad v \neq 0,$$

دا په د ې معنا چې که دا هوموجېن کرښيز مساوات سيستم $(A - \lambda E)v = 0$ يو له صفر مختلف حل ولري. دا حالت تيک هلته لرو، که $(A - \lambda E)$ زينګولار وي يعنې که وي:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د آيګن – ارزښتونو او - - وکتوونوشميرنه

د دې لپاره چې د مربع ماتريکس A لپاره د آيګن-ارزښت پرابلم حل کړو، لومړی د کرکتريستيکي پولينومونو آيګن-ارزښتونه λ د صفرځايونو په حيث ټاکي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)\,.$$

د هر آيګن – ارزښت λ لپاره له دې سره اړوند آيګن – وکتور v لاس ته راوړو د هوموجېن ګرښيز مساوات سيستم د يوه ناتريويال په څېر

$$(A - \lambda E)v = 0\,.$$

د دې لپاره چې د آيګن-فضا V_λ لپاره يو بنسټ لاس ته راوړو، سړی کړی شي دا سيستم په اپسيلون-فرمول ترنسفورمی کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\dim V_\lambda = 1$
په ټولیزه توګه دی. دا تر یوه سکالار ضیب یواځنی ټاکلی آیګن-وکتور
v کېدی شي هلته وټاکل شي ، په کوم کې چې د وکتورونو v مناسب کمپوننتونه له مخه
ورکړي

لیکونکي: هیولیګ، کرایخ

د ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

د آیګن –ارزښت د ټالکو لپاره کرکتیستیکی پولینوم جوړوو

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 - 4 + 8 - 2\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4\,.$$

او د ده صفرځایونه ټاکي. د ګومان له مخې (د مطلق ارزښت غړي پروېشونی یا مقسوم
علیه) د لومړي صفرځای په څېر $\lambda_1 = 2$ لاس ته راځي. د دې صفرځای وېشنه

$$(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4)/(\lambda - 2) = -\lambda^2 + 2\lambda - 2,$$

او په لانې فرمول (دنیمې شپې فرمول په نامه بلل شوی) کې یې ځای په ځای کوو ترې
لرو

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{-2} = 1 \pm \mathrm{i}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو آيګن – وکتور و آيګن – ارزښت 2 ته کيدی شي د هوموجين مساوات سيستم

$$(A-2E)v=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

حلونو له لارې وټاکل شی. حل $v=(1,0,-2)^t$ ساده ليدل کيږي

يوه آيګن-ارزښته $1+\mathrm{i}$ ته يو آيګن – وکتور w_1 له دې لاندې لاس ته راوړو:

$$(A-(1+\mathrm{i})E)w_1=\begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -2 & -1 \\ 2 & 1-\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 2 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} w_1 = 0\,.$$

او داسې د پزلګز به تګه $w_1=(-1-\mathrm{i},-1+\mathrm{i},2)^t$. دا A چې حقيقي ده، کېدی شي و $\lambda=1-\mathrm{i}$ ته آيګن-وکتور د کمبلکس کنجوګيشن له لارې جوړ شي:

$$w_2=\overline{w_1}=(-1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i},2)^t$$
.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

الجبری او هندسي ډېرځلوالی

Algebraische und geometrische Vielfachheit

(c) ketabton.com: The Digital Library

که λ د $(n\times n)$ – ماتريکس A آيګن –ارزښت وي، نو دکرکتريستيکي پولينوم $p_A(\lambda)=\det(A-\lambda E_n)$ د صفرځای په حيث د λ ډېرځلوالی د آيګن-ارزښت λ

الجبري m_λ ډېرځلوالی بللګيږي

د يوه آيګن – ارزښت λ د آيګن-فضا V_λ بعد يا پراخپدونی d_λ د λ هندسي ډېرځلوالی بلل کيږي. . ابور لري

$$d_\lambda \le m_\lambda\,, \qquad \sum_\lambda m_\lambda = n\,,$$

همداسي

$$d_\lambda = n - \mathrm{Rang}(A-\lambda E)\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، کيمرلي

ماتريکسونه

$$A_1=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&5&1\\0&-1&3\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}4&4&0\\3&4&6\\0&-2&4\end{pmatrix}$$

ټول لاندې کرکتريستيکي پولينوم لري:

$$(4-\lambda)^3=(4-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda)+4-\lambda=(4-\lambda)^3+12(4-\lambda)-12(4-\lambda)$$

او له دې سره هوار $m_4=3$ دی. د ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A_1 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_2 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(A_3 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

د رانګ په لرودو سره $d_4 = 3$ د A_1 لپاره، $d_4 = 2$ د A_2 لپاره او $d_4 = 1$ د A_3 لپاره پيژني

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د آيګن –ارزښتونو جمعه او ضرب

Summe und Produkt von Eigenwerten

د يوه $(n \times n)$-ماتريکس A د آيګن – ارزښت λ_i لپاره صدق کوي

Für die Eigenwerte λ_i einer $(n \times n)$-Matrix A gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{Spur} A, \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A,$$

د کوم سره چې ډېرځله آيګن – ارزښتونه د الجبري ډېرځلوالی سره سم شمېرل کيږي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ديترمينانت د مولتی کربنيزوالی په اساس د کرکتريستيکي پولينوم لپاره لاس ته راځي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + \operatorname{Spur} A(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det A\,.$$

بلې لور ته پولينوم په لاندې بڼه

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$$

انځوريدلای شي. د دويم فرمول په ضربونه او د ضريبونو پرتله کونه دا ورکړې شوی کېمتوالی يا ايدنتيتي راکوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کرکتريتيکي بولينوم

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

لي د لاندې صفرځايونو سره:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}\,.$$

که د آيګن – ارزښتونو جمعه تشکيل شي، دا ريښې افاده له ةنځه ځي، او لاس ته راځي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(a+d) + (a+d)}{2} = a + d = \operatorname{Spur} A\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که آيګن – ارزښتونه سره ضرب شي، نو د دريم بېنوم فرمول سره لرو:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{(a+d)^2 - (a+d)^2 + 4(ad-bc)}{4} = ad - bc = \det A\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

د ماتريکسونو ريښتونی فنکشنونه يا توابع

Rationale Funktionen von Matrizen

که د يوه ماتريکس A يو آيګن-ارزښت λ د ريښتوني فنکشن

$$r(t) = \frac{p(t)}{q(t)} = \frac{a_0 + a_1 t + \cdots}{b_0 + b_1 t + \cdots}\,,$$

قطبځای نه وي ، نو $r(\lambda)$ د

$$r(A) = q(A)^{-1}p(A) = p(A)q(A)^{-1}\,.$$

آيګن – ارزښت دی.

په ځانګړي توګه λ^k د توان-ماتريکس A^k آيګن – ارزښت دی او $1/\lambda$ د معکوس کېدونکي ماتريکس A^{-1} يو آيګن-ارزښت دی.

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $Av = \lambda v$ د $k \geq 0$ لپاره لاس ته راځي چې $A^k v = \lambda^k v$ او په ټوليزه توګه

$$\left(\sum_k c_k A^k\right) v = \left(\sum_k c_k \lambda^k\right) v \, .$$

پسې صدق کوي

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda A^{-1} v \, ,$$

كه A معكوسوړ وي

كه λ د صورت پولينوم q صفرځای نه وي. نو صدق کوي

$$q(A)v = q(\lambda)v, \quad q(A)^{-1}v = q(\lambda)^{-1}v \, ,$$

پس

$$q(A)^{-1}p(A)v = q(\lambda)^{-1}p(\lambda)v = p(A)q(A)^{-1}v$$

لكه څه مو چې غوښتل .

ليكونكي: هيوليګ، هيورنر

د آيګن – وكتورونو بنسټ Basis aus Eigenvektoren

كه يوه ماتريكس A ته د آيګن – وكتورونو v_j څخه يو بنسټ شتون ولري د آيګن – ارزښت λ_j سره ، نو دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad V = (v_1, \ldots, v_n)\,,$$

دا په دې معنا چې A نسبت و بنسټ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ته دیاګونال بڼه لري.

لیکونکي: هیولی، اپپ

د ښوولو دی، چې

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

باور لری، د لاندې سره ورته (برابر ارزښته)دی

$$AV = V\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n)\,.$$

دا چې v_j د V مټه و λ_j ته د آیګن-وکتورونه دي، دا سملاسي لیدل کیږي

لیکونکي: هیولی، اپپ

ماتریکسونه

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

آیګن- ارزښتونه -2, -2 او 3 لري. اړونده آئګن-وکتورونه دپی‌لګی به توګه دئ:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $V = (v_1, v_2, v_3)$ سره لاس ته راځئ

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيولی، اپپ

د ځيوکليکي ماتريکسونو دياګونالونه

Diagonalisierung zyklischer Matrizen

يو ځيوکليکي $(n \times n)$ – ماتريکس A کېدی شي د پورير-ماتريکس

$$W = (w^{jk})_{j,k=0,\ldots,n-1}, \quad w = \exp(2\pi \mathrm{i}/n) ,$$

په مرسته دياګونالي شي.

$$\frac{1}{n}\overline{W} \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} ,$$

د

$$\lambda_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-k\ell}, \quad \ell = 0, \ldots, n-1 ,$$

سره د A آيګن – ارزښت دی.

ليکونکي: هيولی، اپپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی ساده بسي شمېرلی شي، چې د W ℓ -مه متِه د A يو آيګن – وکتور دی. د Aw_ℓ د j ــم کمپوننت لپاره سړی لاس ته راوړي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k \bmod n} w^{(k-j)\ell} w^{j\ell} = w^{j\ell} \sum_{k'=j-n+1}^{j} a_{k' \bmod n} w^{-k'\ell}.$$

دا اندکس يا پيژند نخښه مودولو سره ښوول کيږي، کېدی شي د جمعي کېدنې ورشو د $k' = 0, \ldots, n-1$ سره ځاي په ځاي شي يا بدله شي. په تعقيب سره يې زياتون يا جمعه برابر په λ_ℓ ده ،لکه چې غوښتل مو. له دې مو و ښوول چې لرو:

$$AW = W \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

دا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W$ يوتيتار دی،دا په دې معنا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W^* = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} W\right)^{-1}$ ، سړی غوښتونکی ترانسفورمېشن په دياګونال بڼه لاس ته راوړي

ليکونکي: هيولی، اپپ

د عمومي تيوري سره سم کيدی شي څيوکليکي ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

د فورير- ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

سره په دياګونال بڼه واړول شي(ترانسفورمي شي)

$$\frac{1}{4}\overline{W}AW = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

د 2 ,2 ,0 او 4 سره د A آيګن – ارزښت. دا چي A حقيقي دی بايد کمپلکس آيګن-وکتورونه

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

(د W دويمه او څلورمه متڼه) يو کډ آيګن-ارزښت ولري. داسې کېدی شي د کرښيز کمبينېشن له لارې د آيګن-وکتورونو لپاره يو حقيقي بنسټ تشکيل شي:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي : اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ماتريکسونو توان Potenzen von Matrizen

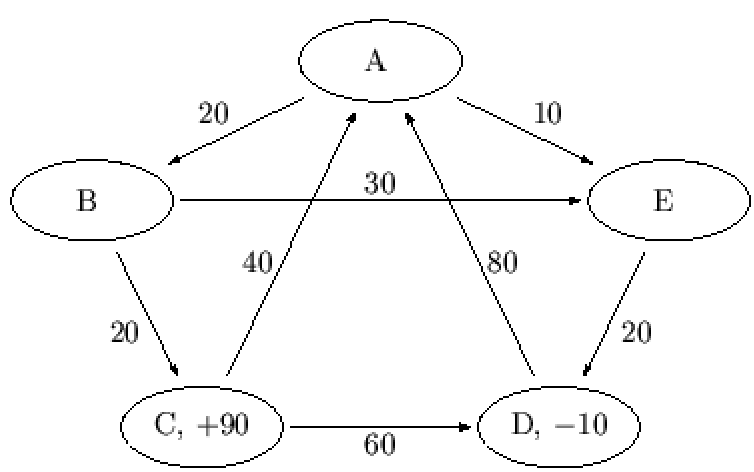
که A د مطلق ارزښت سره سم يا - - ډوله خورا لوي آيګن- ارزښت λ د آيګن – وکتور v سره ولري،نو صدق کوي:

$$A^n x = \lambda^n (cv + o(1)), \quad n \to \infty ,$$

که x يو ناترويوال کمپوننت د λ په آيګن-فضا کې ولري، دا په دې معنا چې $x = cv + w$ د $c \neq 0$ او $v \nparallel w$ سره.

ليکونکي : اېپ، هيوليک

دا تابع د مارکيټپرخي x_i د رقابت د فيرما ګانو کلنی تغير ښايي.په دې ترتيب فيرماA د 80% بېلګې په توګه د فيرما D د مارکيټ برخه ګټي او د فيرما C خپله د مرکيټ برخه د 90% په شاوخوا کې لويه وي د نوي خرڅلاو امکانات پيداکولو سره ، په همدې وخت کې د مارکيټ برخې A او D ته له لاسه ورکوي.



د ليدڅيرې څخه د مارکيټ نوې برخې(ونډه) رانيسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

A_{neu} نوي $= 0.7A + 0.4C + 0.8D$

B_{neu} نوي $= 0.5B + 0.2A$

C_{neu} نوي $= 0.9C + 0.2B$

D_{neu} نوي $= 0.1D + 0.6C + 0.2E$

E_{neu} نوي $= 0.8E + 0.3B + 0.1A\,.$

له $x = (A, B, C, D, E)^t$ سره لاس ته راځي:

x_{neu} نوی

$$= \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} x\,.$$

د ایتراشن ماتریکس د n–توان سره ضربولو د nکلونو وروسته د مرکت ونډه راکوي.

نورميري شوي وکتورونه x^0 د یوه آيګن- وکتور v_{max} (ماکس) پولې ته ځي(کونورګیریګي) د ماتر یکس د ارزښت له مخې لوی ا يګن ارزښتλ_{max} ته. سړی لاس ته راوړي $\lambda_{max} = 1.1$ او دې ته اړوند ایګنوکتور

$$v_{max} = (0.75, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5)^t\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اوږده وخت لپاره بازار يا مارکيټ د A ه خوا ټاکل کيږي يا تعينيږي. په سلو کې برخې د $\max v$ د نورمي کولو له لارې لاس ته راځي يعني , $\max v/\|v\|_1$ په دې توګه

$$A: \ 37.5\%, \ \ B, C, D: \ 12.5\%, \ \ E: \ 25\% \,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د فيبوناچي پرلپسې يا - ترادف Fibonacci-Folge

د فيبوناچي پرلپسي يا ترادفونه داسې پيژند لري يا تعريف دي:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\,, \quad \text{د } n \ge 1\,, \text{ لپاره}$$

دا په دې معنا چې هره فيبوناچي پرلپسې د دواړو ترمخ غړو زياتونن يا جمعه ده.

د فيبوناچي لومړي عددونه دي:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots \,.$$

سرې د پيل ارزښت $a_1 = 1$ او $a_2 = 3$ ټاکي نو داسې په نامه لوکاس - $a_2 = 3$ Lucas-عدد:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots \,.$$

که دوه يو په بل پسې د فيبوناچي عددونه يوه وکتور

$$x_n = (a_n, a_{n-1})^t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته سره یوځاي شي، نو ریکورزیون د

$$x_{n+1} = Ax_n$$

په څیر د لاندې سره ولیکو:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

د ماتریکسلیکنې په مرسته کېدی شي د فیبوناچي عدد دا اسیمپتوتیکي حالت وټاکل شي. د دې لپاره سړی د A آیګن-ارزښتونه او آیګن-وکتورونه شمېري:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad v_\pm = \begin{pmatrix} \lambda_\pm \\ 1 \end{pmatrix}.$$

که سړی د ریکورزیون وکتورونه د v_+ کرښیز کمبینېشن په حیث انځور کړي،

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}v_+ - \frac{1}{\sqrt{5}}v_-,$$

، نو لاس ته راځي:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_+\lambda_+^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_-\lambda_-^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + o(\lambda_-^n).$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورمال ماتريکسونه Normale Matrizen

يو کمپلکس ماتريکس A نورمال بلل کيږي، که

$$AA^* = A^*A\,,$$

وي، د $A^* = \bar{A}^t$ سره. په ځانګړې توګه يونيتار او هرمييتيکي ماتريکسونه نورمال دي.

د حقيقي نورمال ماتريکسونو لپاره دی:

$$AA^t = A^tA\,,$$

کوم چې په ځانګړې توګه د اورتوګونال او سيومتري ماتريکسونو لپاره پوره دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،کيمرلي

د يونيتارو او هرميتيکي ماتريکسونو نورمالوالی ترلی له تعريف څخه لاس ته راځي.

د ئوه يونيتار ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA^{-1} = E = A^{-1}A = A^*A\,.$$

د يوه هرمېتيکي ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA = A^*A\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمالو ماتريکسونو يونيتار دياګونالي – يا دوه کونجتړي کول

Unitäre Diagonalisierung normaler Matrizen

يو ماتريکس A تيک هلته نورمال دی، که A يونيتار دياګوناوړ وي، دا په دې معنا چې ، که وي:

$$U^{-1}AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,,$$

د کوم سره چې د U متې يو اورتونورمال بنسټ و آيګن – ارزښت λ_j ته له آيګن- وکتورونو تشکيل کړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک، کيمرلې

که

$$A = UDU^*, \quad U^* = U^{-1}\,,$$

وي، نو نورمال دی، ځکه چې لرو:

$$\begin{aligned} AA^* = &\quad (UDU^*)(UDU^*)^* = UD(U^*U)D^*U^* \\ = &\quad U(D^*D)U^* = (UD^*U^*)(UDU^*) \\ = &\quad A^*A\,. \end{aligned}$$

د دې معکوس کېدی شي د يوه اورتوکونال بنسټ شتون نسبت بعد ته د ايندکشن له لارې وښايي. د ايندکشن پل لپاره يو يونيتار ماتريکس V جوړوو د لاندې سره:

$$V^*AV = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اینکشن نیونې یا فرضیې له مخې کېدی شي B د یونتارماتریکس W له لارې په دیاګونال بڼه ترنسفورمي شي، داسې چې سړی ځاي په ځاي کولی شي:

$$U = V \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & W \end{array} \right)$$
.

د V دجوړښت یا کنسترکشن ته د یوه نورمي آیګن – وکتور v څخه و آیګن-ارزښت λ ته ځي او ړدي

$$V = (v|\tilde{V}),$$

د کوم سره چې د $\tilde{V}$ متې وکتور v و اورتوګونال بنسټ ته پوره کوي. لاس ته راځي:

$$V^*AV = \left(\frac{v^*}{\tilde{V}^*} \right) \left(\lambda v \mid A\tilde{V} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & c^* \\ \hline 0 & B \end{array} \right) .$$

ښوولو تهدومره پاتیږي، چې B نورمال او $c = 0$ دی. دواړه د A د نوپمالیټي څخه لاس ته راځي. دا د ورته والي ترنسفورمیشن سره ساتلي پاتې کیږیو ، پس د پورته مساوات د ښي اړخ $\tilde{D}$ لپاره هم صدق کوي.

که

$$\tilde{D}\tilde{D}^* = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 + |c|^2 & c^*B^* \\ \hline Bc & BB^* \end{array} \right)$$

$$\tilde{D}^*\tilde{D} = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 & \overline{\lambda}c^* \\ \hline \lambda c & B^*B \end{array} \right) ,$$

تشکیل کړو، نو غوښتونی خویونه د پورته ماتریکسونو د دیاګونال بلوکونو د پرتلې له لارې لاس ته راځي. لیکونکي: اپپ،هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماتريکسونه

$$A=\begin{pmatrix}3+2i & 3-2i\\ 3-2i & 3+2i\end{pmatrix}$$

نورمال دي، چې د سيده شمېرنې له لارې تصديق کېدی شي.

$$AA^*=\begin{pmatrix}26 & 10\\ 10 & 26\end{pmatrix}=A^*A$$

د دې په تعقيب بايد A يونيتار دياګونالوړ وي. سرې آيګن – ارزښتونه6 او $4i$ لاس ته راوړي او اړونده نورمي آيګن-وکتورونه د بېلګې په توګه دي:

$$v_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

د انتظار سره سم $v_1 \perp v_2$ دی، او د يونيتار ماتريکس $U=(v_1,v_2)$ سره دياګونال ماتريکس لاس ته راځي:

$$\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 4i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3+2i & 3-2i\\ 3-2i & 3+2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ،هيوليک

د هرميتيکي ماتريکسونو دياګونال بڼه Diagonalform hermitescher Matrizen

ديوه هوموجېن ماتريکس $A\ (A=A^*)$ آيګن-ارزښتونه λ_i حقيقي دي او د آيګن-وکتورونو v_i څخه يو اورتوګونال بنسټ شتون لري. په تعقيب

(c) ketabton.com: The Digital Library

ده د یونیتارماتریکس سره

$$U^*AU = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,,$$

ده د یونیتارماتریکس $U = (v_1, \dots, v_n)$ سره.

په ځنګړې حالت کې حقیقي سیومتریکي ماتریکسونو $(A = A^t)$ آيګن-وکتورونه هم حقیقي دي.

لیکونکي: هیولیګ، ربل

یونیتار دیاګوناوړوالی په نورمالو ماتریکسونو د اړونده ټولیزې نتیجې څخه لاس ته راځي، هغه چې هرمیتیکي حالت خوندي لري. د ښولو دا پاتې دی چې آيګن – ارزښت λ حقیقي دی. که په ورته توګه v آيګن- وکتور وي، نو دا له لاندې لاس ته راځي:

$$\lambda v^* v = \quad v^*(\lambda v) = v^*(Av) = (A^* v)^* v$$

$$= \quad (Av)^* v = (\lambda v)^* v = \overline{\lambda} v^* v\,,$$

ځکه چې $\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ لرو.

لیکونکي: هیولیګ، ربل

هرمیتیکي ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

دیترمینانت 0 لري. پسې $\lambda = 0$ یو آيګن – ارزښت دی او سړی ترلی ګوري، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

یو اړونده آيګن-وکتور دی. له $\mathrm{Spur}\, A = 3 = \lambda + \varrho$ څخه د ويم آيګن – ارزښت په حيث $\varrho = 3$ لاسته راځي. يو اړونده آيګن-وکتور نسبت و کمپلکس سکالار ضرب ته هغه و v ته لاندې اورتوګونال وکتور دی:

$$w = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

د نورمي کولو له لارې يونيتار ماتريکس لاس ته راځي

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 + \mathrm{i} \\ 1 - \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

په تعقيب باور لري:

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^*,$$

د

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

سره، هغه و U ته معکوس.

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت ديفينيت ماتريکسونه Positiv definite Matrizen

يو مربع ماتريکس A مثبت ديفينيت بلل کيږي، که وي:

$$v^* A v > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

که $v^* A v$ يواځې نامنفي وي، نو A مثبت سيمي (نيم – يا برخه-) ديفينيت بولو.

يو مثبت ديفينيت ماتريکس A فقط مثبت دياګونالتوکي لري او آيګن-ارزښتونه. په ځنګړي توګه A معکوسوړ ده او معکوس يي هم مثبت ديفينيتدی.

ليکونکي: هيوليک، ربل

ريلا ي – ويش (هعني هغه د وېش تيجه) Rayleigh-Quotient

د يوه هرميتيکی مثبت ديفينيت ماتريکس S لپاره د داسې په نامه ريلای-وېش اکسترم – ارزښتونه

$$r_S(x) = \frac{x^* S x}{x^* x}, \quad x \neq 0,$$

خورا کوچنی او خورا لوي د S آيګن – اررښت دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

ماتريکس S کېدی شي ا يونيتار ماتريکس U له لارې دياګونال فروم ته واړول شي:

$$U^* S U = D, \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

د کوم سره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Sv_i = \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_i = \frac{v_i^* S v_i}{v_i^* v_i} > 0$$

او $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ نيول يا فرض کېدی شي.

که سړی $S = UDU^*$ او $x = Uy$ بدل کړي، نو دی

.

$$r_S(y) = \frac{y^* D y}{y^*(U^* U) y} = \frac{\sum_i \lambda_i |y_i|^2}{\sum_i |y_i|^2} .$$

دا بنايي چې

$$\lambda_{\min} \leq r_S(y) \leq \lambda_{\max} ,$$

چېرته چې د مطلوب آيګن-وکتورونو لپاره $y = e_n$ او $y = e_1$ لپاره صدق کوي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

مثلث بڼه Dreiecksform

يو کمپلګس مربع ماتريکس A کيدی شي د يوه ورته ترانسفورميشن له لارې په پورته مثلث بڼه

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانفورمي شي، چېرته چې دیاګونالي د A آيګن-ارزښتونه λ_i خوندي لري.

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

ښوونه د ماترریکس په بعد n باندې د ایندکشن له لارې کیدی شي صورت ونیسي، د یوه (1×1)-ماتریکس د تریویال حالت څخه په پیل.

یو $(n \times n)$-ماتریکس A تر څیړنې لاندې نیسو، نو دا لږترلږه یو ایګنوکتور v لري.

دا د نورمي کیدلو وروسته یوه اورتوګونال بنسټ $\{v, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ ته ورپوره کیدی شي. په دې بنسټ کې څیرونه(فنکشن-که غواړی تابع) لاندې بڼه لري:

$$\tilde{A} = T^*AT = \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

د $((n-1) \times (n-1))$-ماتریکس لپاره د ایندکشن نیونې یا فرضیې له مخې یو یونیتار ترانفورمیشن $\tilde{Q}$ شتون لری د $\tilde{Q}^*B\tilde{Q} = R_{n-1}$ سره. له دې امله د

$$Q = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

سره لاس ته راځي، چې

$$Q^*AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} T^*AT \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & B\tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & \tilde{Q}^* B \tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & R_{n-1} \end{pmatrix} = R\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

اصلي وکتورونه Hauptvektoren

که λ د کمپلکس $(n \times n)$ - ماتريکس A يو آيګن-ارزښت وي، د الجبرى ډېرځلوالى m سره، نو يو وکتور v د

$$(A - \lambda E)^m v = 0\,, \quad v \neq 0$$

سره اصلى وکتور بلل کيږي و آيګن-ارزښت λ ته.

ټول اصلي وکتورونه و آئګن – ارزښت ته د صفر وکتور سره يوځاي د بعد m يو لاندې-يا برخوکتور جوړوي، دا اصليفضا H_λ و آيګن – ارزښت λ ته. دا کرښيزې څېروني يا فنکشن A ته انواريانت دى.

ټوله فضا د اصلي فضاو سيده جمعه يا زيتون دى:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda H_\lambda$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه یې له ډېرو برخپلونو یا-قدمونو رایوځای کیږي.

اول - داچې یوونماتریکس یا واحد ماتریکس د هر ماتریکس سره بدلېدونکی دی یوه وکتور $v \in H_\lambda$ د څېرې(عکس ؟؟) Av لپاره صدق کوي:

$$(A-\lambda E)^m Av = \left(A^{m+1} + \cdots + \lambda^m E^m A\right) v = A\left(A^m + \cdots + \lambda^m E^m\right) v$$

$$= \qquad A(A-\lambda E)^m v = A \cdot 0 = 0 .$$

په تعقیب $Av \in H_\lambda$ دی.

دویم- د دې لپاره چې بعد وټاکو، ماتریکس A په پورتني مثلثبنه ترانفورمي کوو:

$$A \to B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & & * & * & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & * & & * \\ & & & & & \\ & 0 & & & R & \\ & & & & & \end{pmatrix} .$$

دا چې د $v \in H_\lambda$ لپاره

$$0 = Q^{-1}(A-\lambda E)^m Q(Q^{-1}v) = (B-\lambda E)^m (Q^{-1}v) ,$$

دی، اصلي وکتورونه د $v \to w = Q^{-1}v$ سره سم اصلي وکتور ته ترانفورمي کیږي.

مکر د B له بنې روښانه دی، چې یوون – یا واحدوکتورونه د e_i $i \leq m$ لپاره د B

په اصلیفضا $Q^{-1}H_\lambda$ کې پراته دي. پسې یو وکتور v د $v_i \neq 0$ سره د یوه $i > m$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د $(B-\lambda E)^m$ له لارې په 0 نه خېره کيږي يا فنکشن 0نه دی. په تعقيب $\dim H_\lambda = m$ لرو.

دريم – دا چې $\sum_\lambda \dim H_\lambda$ د الجبري د ډېرواره جمعې سره برابر دی، يعني برابر په n دی، بسيا کوي، چې د بنسټ خويونو لپاره د اصلي فضا کربنيز خپلواکوالی وښودل شي يا وښايو. دې ته استعماليږي، چې د $\varrho \neq \lambda$ لپاره لرو:

$$(A-\varrho E)v = 0 \wedge v \in H_\lambda \Rightarrow v = 0.$$

که د مختلو اصلي فضاو څخه يوه د وکتورونو جمعه ورکه شي،

$$v_\lambda + v_\varrho + v_\sigma + \ldots = 0,$$

، نو لاس ته راځي:

$$\left((A-\varrho E)^{m_\varrho}(A-\sigma E)^{m_\sigma}\ldots\right)v_\lambda = 0.$$

دا چې يوګونی ضريبونه H_λ انواريانت دي، په پورته يادونه استعمالوږ دی، او لاس ته ترې $v_\lambda = 0$ راځي. په ورته توګه $v_\varrho = v_\sigma = \ldots = 0$ ترې لاس ته راځي او له دې سره صفروکتور فقط په ساده ډول انځورور دی.

ليکونکي: هيليک، هيورنر

د اصلفضا څيوکليکي بنسټ Zyklische Basen von Haupträumen

د يوه کمپلکس مربع ماتريکس A يو اصلفضا (اصلي فضا) کېدی شي د څيکليکي برخفضاو په يوه سيده جمعې تجزيه شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$H_\lambda = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell \,,$$

دا په دې معنا چې هر برخفضا V_i د لاندې بنې یو بنسټ لري

$$B^{k_i} v_i, \ldots, Bv_i, v_i, \quad B = A - \lambda E,$$

د $w_i = B^{k_i} v_i$ سره یوه آیګن-وکتور و آیګن-ارزښت λ ته.

ماتریکس A برخفضا V_i اینواریانت پرېږدیاو هلته لاندې ماتریکس-انځورونه لري:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} .$$

لیکونکي:هیولیک،هیورنر

د تعریف سره سم H_λ له وکتورونو v څخه د $B^{k+1} v = 0$ سره جوړه ده، د کوم سره چې k کوچنۍ ده د λ د الجبري ډېرځلوالي m څخه. د بنسټ تاکلې بڼه له دې امله نږدېوالی لري. د دې لپاره چې وکتورونه

$$w_i \in \ker B \,,$$

چې بنسټ کره کوي ، وټاکو ، نو د ایګنوکتورونو $\ker B$ و λ ته برخفضاوې

$$U_j = \ker B \,\cap\, \text{Bild } B^j$$

تر ځیرنې لاندې نیسو. په روښانه نوګه دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\emptyset = U_m \subset U_{m-1} \subset \cdots \subset U_0 = \ker B\,.$$

وکتورونه w_i به اوس ، له تشدېرۍ سره په پیل، اینډوکټي، جوړیږي. که $w_1, \ldots, w_{i-1}$ همدا اوس کره شوي وي ، نو سړی لویوالی دا لوي k_i داسې، د هغه لپاره داسې چې U_{k_i} کې نه وی پروت، دا په دې w_j د دغه W_{i-1} په کرښیزه هیولې

$$B^{k_i} v_i = w_i \notin W_{i-1}, \quad B w_i = 0\,.$$

معنا چې $v_i \neq 0$ باور لرې د سره .

په دې ډول بالاخره د ټول آیګن-فضا $\ker B$ لپاره یو بنسټ $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ جوړیږي او اړونده ځیوکلیکي بنسټونه د V_i لپاره.

د فضاو V_i د B سره (همداسې A) د ضرب له لارې روښانه دی. د غوښتل شوې ماتریکس انځورنه له اندې څخه لاس ته ارځي

$$A(B^j v_i) = (\lambda E + B) B^j v_i = \lambda B^j v_i + B^{j+1} v_i\,,$$

، که د بنسټ وکتورونه ، لکه څنګه چې ورکړ شوي دي، د کښته کېدونکي توان سره تنظیم کړي.

د جوړښت د ټیکوالي لپاره باید برسېره پر دې د وکتورنو $B^j v_i$ بنسټ خویونه هم وښوول شي. دا د دوه پلونو (قدمونو) سره صورت نیسي.

اول - لومړی کرښي. خپلواکوالی ښوول کیږي. دا تخنیکي دلایل کزدی شي د دوه ځیکلیکي ځنځیرونو د بېلګې

$$B^2 v_1,\, B v_1,\, v_1, \quad B v_2,\, v_2\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې لیدوړ شي. نیسو چې

$$\alpha_{2,1}B^2v_1+\alpha_{1,1}Bv_1+\alpha_{0,1}v_1+\alpha_{1,2}Bv_2+\alpha_{0,2}v_2=0,$$

دی، نو د B^2 سره د ضرب له لارې لرو

$$\alpha_{0,1}w_1=0 \implies \alpha_{0,1}=0\,,$$

د $B^3v_1=Bw_1=0$ او $B^2v_2=Bw_2=0$ له امله . د B سره د ضرب له لارې اوس لرو

$$\alpha_{1,1}w_1+\alpha_{0,2}w_2=0 \implies \alpha_{1,1}=\alpha_{0,2}=0$$

د جوړښت سره سم د آیګن-وکتورونو w_i کرښیز خپلواکوالی له امله. بالاخره لرو

$$\alpha_{2,1}=\alpha_{1,2}=0$$

بیا هم د آیګن-وکتور w_i د کرښیز خپلواکوالی له امله.

په ټولیز حالت په ورته توګه مخ ته ځو. د یوه کرښیز کمبینیشن د تحلیل په هکله بسټوکتور د B د مناسب توان سره ضربوي، تر څو د آیګن-وکتورونو ټول ترمونه له منځه ولاړ شي.

دویم - همدومره ښنایو، چې هر وکتور $u\in H_\lambda$ د بنسټوکتورونو سره انځوروړ دی.

پس وي دې $B^ku=0\,,$ ، د $k\le m$ سره. د $k=1$ لپاره یې نه ښایو، ځکه چې وکتورونه w_i د جوړښت له امله د آیګن – فضا $\ker B$ لپاره یو بنسټ جوړوي.

اندوکتیو سړی نیوی شي یا فرض کولی شي، چې په کې وکتورونه انځوروړ دي.

همداسې آیګن-وکتور $B^{k-1}u$ انځوروړ دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B^{k-1}u = \sum_i \alpha_i w_i .$$

له دې لاس ته راځی، چې

$$B^{k-1}\underbrace{(u - \sum_i \alpha_i B^{k_i-k+1} v_i)}_{u'} = 0 \,.$$

د دې په تعقيب u' انځورونږ دی او له دې سره u هم .

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

د جوردان بڼه Jordan-Form

يو کمپلکس مربعماتريکس کېدی شي د يوه ورته والي ترانفورمېشن له لارې د بلوک دياګونال بڼه باندې تراسفورم شي

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ$$

باندې تراسفورم شي. له دې سره د جوردانبلکونه دا لاندې بڼه لري

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix} ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A يوه آيګن – ارزښت λ_i سره

تر ځای بدلون پورې د جوردان بنه يواځنۍ ده.

ليکونکي:هيوليګ،هيورنر

دا چې اصلي فضاوې H_λ د فنکشن A لاندې انواريانت دي، کيدی شي د اصلي وکتورونو بلوکبڼې پورې يوه بنسټ په نسبت لاس ته راوړل شي. د ځانګړو ځيوکليکي بسټونو

$$B^{k_i} v_i, \ldots, B v_i, v_i, \quad B = A - \lambda_i E,$$

استعمال له لارې بلوکونه غوښتونې بڼه غوره کوي

ليکونکي: خيوليګ، هيورنر

ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

کرکټريستيکي بولينوم

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)^3 + 4(4 - 3(-1-\lambda)) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27$$

لري د دبل صفرځايونو $\lambda = -3$ او ساده صفځايونو $\varrho = 3$ سره.

دا چې د ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

رانګ 2 دی، و ته فقط یو آیګن-وکتور شتون لري. د دې په تعقیب A د جوردان بڼه لري.

$$Q^{-1}AQ=J=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, Q=(w,v,\tilde{w}).$$

د کرښیز و مساواتشیستمونو د حل له لارې

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سړی لاندې آیګن-وکتورونه لاس ته راوړي:

$$w=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

اصلي ډیاګونال پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

دا په دې معنا چې د ښېلکې $v = (-3, 4, 1)^t$ په توګه . له دې سره دی

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

څه چې د ازمايښت له لارې $A = QJQ^{-1}$ تصديق کيږي.

ليکونکي: خيوليګ، هيورنر

د يوه کمپلکس (2×2)-ماتريکس A لپاره 3 څرنګواليز (د کواليټي له مخې) مختلف جوردان-نورمالبڼې شتون لري:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, (\lambda \neq \varrho).$$

په لومړي حالت کې λ يو ډبل آيګن – ارزښت دی د فقط يوه (تر سکالار ضرب پورې) آيګن-وکتور w سره، دا په ی معا چې

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda E) = 1.$$

يو په دې پورې اړونده اصلي وکتور v او له دې سره دې سره ترانسفورميشن ماتريکس د $Q = (w, v)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w = (A - \lambda E)v$$

د حل له لارې لاس ته رواړي ، همداسې د $\ker(A - \lambda E)^2$ ټاکلو له لارې.

د دې لپاره يو ځرګنده بېلګه

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

کرکتريستيکی پولينوم

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

دی، د دبل صفرځای $2 = \lambda$ سره. د

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حل له راې سړی $w = (2,3)^t$ لاس ته راوړي او له دې سره

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

يو اړونده اصلي وکتور $v = (1,2)^t$. دا د ازمايښت سره تصديق کيږي:

$$A = QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

سره تصديق کيږي.   ليکونکي: خيوليګ، کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه کملکس (3×3) - ماتريکس A لپاره لاندې کولتاتيو مختلف جوردان –نورمالبڼې $J = Q^{-1}AQ$ شتون لری:

اول – جوړه دوله مختلف آيګن-ارزښتونه λ, ϱ, σ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

دويم – يو ډبل آيګن – ازښت λ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}.$$

په دويم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

او $Q = (w, v, \tilde{w})$ دي له آيګن وکتورونو w او $\tilde{w}$ يوه اصلي وکتور v سره، هغه چې د مساوات سيستم د حل له لارې

$$(A - \lambda E)w = 0, \quad w = (A - \lambda E)v, \quad (A - \varrho E)\tilde{w} = 0$$

د حل له لارې تاکل کېدی شي.

دريم – يو دريواره آيګن –ارزښت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

په دويم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 1$$

دی او سړی یو اصلي وکتور v د

$$(A - \lambda E)^2 v = 0\,, \quad (A - \lambda E)v \neq 0.$$

حل له لارې لاس ته راوړي.

اړونده آيګن – وکتور $w = (A - \lambda E)v$ دی، او یو غزېدلی کرښیز خپلواک آيګن – وکتور $\tilde{w}$ دا لاندې پوره کوي:

$$(A - \lambda E)\tilde{w} = 0, \quad w \perp \tilde{w}\,.$$

بالاخره $Q = (w, v, \tilde{w})$ دی.

په دريم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

دی او $Q = (w, v, u)$ دی له

$$(A - \lambda E)w = 0\,, \quad w = (A - \lambda E)v\,, \quad v = (A - \lambda E)u\,.$$

سره. لیکونکی: ویپر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (4x4) -ماتيکسونو جوردان-بنې

Jordan-Formen von (4x4)-Matrizen

لاندې توابع ټول 14 ممکن (4×4) - ماتريکسونو د جوردان – بنې ځای نيونې جوړښتونه ښايي .

- ځلور مختلف آيګن – ارزښتونه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

- يو دوه ځله آيګن – ازښت λ_1 او دوه دوه ځله آيګن -ارزښتونه λ_2, λ_3

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- يو درې واره آيګن – ارزښت λ_1 او يو يوواره آيګن – ارزښت λ_2 .

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دوه دوه واره آيگن – ارزښت λ_1, λ_2

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- يو څلورواره آيگن – ارزښت λ_1.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: خيوليک، هيورنر

د ماتريکسونو توانونه Potenzen vonMatrixen

د يو کمپلکس ماتريکس توانونه A^n، $n = 0, 1, \ldots$ تيک هلته صفر ماتريکس پولي ته تلونکي دي، که د ټولوآيگن-ارزښتونو λ مطلق ارزښت له 1 کوچنی دی.

پرلپسي (A^n) محدوده پاتې کيږي، که $|\lambda| \leq 1$ او د آيگن – ارزښت لپاره د ارزښت 1 سره

ليکونکي: خيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A د جوردان – بڼې $J = Q^{-1}AQ$ سره کېدی شي د ماتریکس – توانونه په لاندې بڼه و لیکل شي:

$$A^n = (QJQ^{-1})(QJQ^{-1})\cdots(QJQ^{-1}) = QJ^nQ^{-1}$$

دلته یواځې دې ته اړتیا ده چې د J پولې ته تلنه(لیمیټ) تر څېړنې لاندې و نیل شي. د J د بلوکفورم (- بڼې) کېدی شي هر بلوک J_i ځانله تر څېړنې ونیل شي. د دې لپاره لیکو

$$J_i = (\lambda_i E) + D\,,$$

، د کوم سره چې D ګاوندی دیاګونال د یو سره خوندي لري. لکه چې په ساده توګه ښوول کیږي، د بعد m د یوه بلوک لپاره $D^m = 0$ دی. پسې صدق کوي

$$(J_i)^n = \lambda_i^n E + \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1}D + \cdots + \binom{n}{m-1}\lambda_i^{n-m+1}D^{m-1}\,.$$

له دې کتمېوالي څخه کېدی شي د پرلبسپپولې ته تلنه(لیمیټ کونورګنت) و لوستل شي.

د $|\lambda_i| < 1$ لپاره دی

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{j}\lambda_i^{n-j} = 0\,,$$

دی، ځکه چې $\binom{n}{j}$ فقط پولینومیال یعنې پولینومي لوییږي، د دې معکوس λ_i^{n-j} اکپوننشک ټیټیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $|\lambda_i| = 1$ وي پرلپسي محدوده يا راپنده پاتيږي، که $m = 1$ وي، دا په دې معنا، چې ګاوندی دیاګونال د يوه سره شتون نه لري.

ليکونکي: خيوليک، هيورنر

په زيګولار ارزښت توټه کونه Singulärwert-Zerlegung

هر يوه کمپلکس $(m \times n)$ ـماتريکس A ته يونيتار ماتريکسونه U او V شتون لري د

$$U^*AV = S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

سره.

زينګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k > s_{k+1} = \cdots = 0$$

د A^*A د آئګن – ارزښتونو ريښې دي او k د A رانګ دی.

د U متې u_j او د V متې v_j د AA^* همداسې A^*A د آيګن-وکتورونو اورتوګونال بنسټونه جوړوي او لاندې صدق کوي:

$$Av_j = s_j u_j,$$

د $1 \leq j \leq k$ لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سينګولارارزښت تونه کوني له لارې کېدی شي کربنيزه څېرونه يا فنکشن

$$x \mapsto y = Ax$$

په لاندې بڼه انځور شي:

$$y = \sum_{i=1}^{k} s_i (v_i^* x) u_i$$

له دې لاس ته راځي ، چې

$$\operatorname{Kern} A = \operatorname{span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}, \quad \operatorname{Bild} A = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\}.$$

ذاالاخره $\|A\|_2 = s_1$ او $\|A\|_F^2 = \sum_{j,k} |a_{j,k}|^2 = s_1^2 + \cdots + s_k^2$ دي.

ليکونکي: اېپ.هيوليک

د هرمېتيکي ماتريکس A^*A د دياګونالي کوني له لارې لاس ته

$$V^*A^*AV = \operatorname{diag}(s_1^2, \dots, s_k^2, 0, \dots, 0) = S^t S,$$

راځي، له هغې سره چې سرې نيولی شي، چې آيګن – ارزښتونه د خپلې لويې پسې منظم دي. دا چې A^*A مثبت ديفينيت دي، کېدی شي چې فقط نامنفي آيګن-ارزښتونه د مربع په څېر وليکي او په دې توګه د $m \times n$ دياګونالماتريکس S تعريف کړي.

د پورته مساوات څخه لرو ، چې د AV متې اورتوګونال دي او نورم s_i لري:

$$AV = \begin{pmatrix} s_1 u_1 & \cdots & s_k u_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = US$$

د يوه يونيتارماتريکس U سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وروسته له دې چې غوښتونې انځورونه

$$A = USV^*$$

منځ ته ارغله، کېدی شئ پسې راتلونکي وینا ساده پسې وازمائل شي.

دا چې یونیتار ترانسفورمیشن د یوه ماتریکس رانګ نه تغیروي، صدق کوي

$$\text{Rang } A = \text{Rang } S = k\,.$$

پسې لرو

$$AA^* u_j = U(SS^{t})U^* u_j = u_j (s_j)^2$$

او

$$A^* A v_j = V(S^{t}S)V^* v_j = v_j (s_j)^2\,.$$

باالاخره Av_j د US د j ــمې متې سره برابر دی، یعنې د $u_j s_j$ سره برابر.

لیکونکي: اپپ.هیولیک

فاسد معکوس Pseudo-Inverse

یو کمپلکس $(m \times n)$ -ماتریکس A د سینګولار-ارزښت-توټه کونې USV^* سره کیدی شي د اندولونې پرابلم(مسئله $|Ax - b| \rightarrow \min$ د مینیمال نورم سره په بنه

$$x = A^+ b, \quad A^+ = VS^+U^*,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وليکل شي، د کوم سره چې A^+ د A فاسد-معکوس بلل کيږي، او

$$S^+ = \operatorname{diag}(1/s_1, \ldots, 1/s_k, 0, \ldots, 0), \quad k = \operatorname{Rang} A\,,$$

د $(n \times m)$ - دیاګونال ماتریکس د مثبت سینګولار ارزښت دی

د په څټ ارزښتونو سره.

که $\{u_1, \ldots, u_m\}$ او $\{v_1, \ldots, v_n\}$ د U همداسې V ، د مټو اورتوګونال بنستونه وي، نو کېدی شي کرښيز فنکشن $b \mapsto x = A^+b$ په ضريبونو بڼه

$$x = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{s_\ell}\,(u_\ell^* b) v_\ell$$

انځور شي. له دې څخه په ځانګړي ډول لاس ته راځي، چې

$$\operatorname{Kern} A^+ = \operatorname{span}\{u_{k+1}, \ldots, u_m\}, \quad \operatorname{Bild} A^+ = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$$

او $\|A^+\|_2 = 1/s_k$.

ليکونکي: اېپ.هيوليګ

د د $2-$ نورم انواريانت له امله د يونيتار ترانفورميشن له لارې کېدی شي $Ax - b$ له کيڼ د U^* سره ضرب کړي. د

$$c = U^* b, \quad y = V^* x$$

سره ترې ورته د مينيمال کولو پرابلم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|Sy - c| = \left| \begin{pmatrix} s_1 y_1 - c_1 \\ \vdots \\ s_k y_k - c_k \\ -c_{k+1} \\ \vdots \\ -c_m \end{pmatrix} \right| \to \min .$$

مينيموم سړی د لومړيو k مساواواتو د حل له لارې لاس ته راوړي:

$$y_i = c_i / s_i, \; i = 1 : k .$$

د يونيتار مياتريکس V $(|x| = |y|)$ نورم ته ريښتينوالي له امله د مينيمال نورم د حل لپاره دی:

$$y_{k+1} = \cdots = y_n = 0 .$$

په ټوليزه توګه ترې لاس ته راځي

$$y = S^+ c, \quad s_{i,j}^+ = \begin{cases} 1/s_i & \text{für } i = j \leq k \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

د

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره دې د انډولوالي پرابلم حل شي

د زيګولار- ارزښت ټوټه کونې (تجزيه کونې) شمېرنې لپاره لومړی د

$$A^t A = \begin{pmatrix} 80 & -16 & 56 \\ -16 & 32 & -40 \\ 56 & -40 & 68 \end{pmatrix}$$

آيګن-ارزښتونه او آيګن-وکتورونه ټاکل کيږي او ترې لاس ته راځي

$$s_1^2 = 144,\ s_2^2 = 36,\ s_3^2 = 0, \quad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

له دې لرو

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AV = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = US.$$

د U دوه لومړنی متې د AV د اړنده متو سره د ويش له لارې لاس ته راځي او د سيګولار ارزښتونو (له دې شره بايد ئوون- يا واحد وکتورونه منح ته شي) له لارې، پاتي متې (نه يواځنی ټاکلې) و اورتونورمال بنسټ ته د پوره کونې له لارې لاس ته راځي:

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره فاسد- معکوسيت

$$A^{+}=V\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}U^{t}=\frac{1}{72}\begin{pmatrix}-2 & 6 & -2 & 6\\ -5 & 3 & -5 & 3\\ 4 & 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

دی او

$$x=A^{+}b=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

د مينيمال نورم حل.

ليکونکي: اپپ.هيوليک

د توپوګرافيکي کچونداتنونو تيکاوی يا اصلاح

Korrektur topografischer Meßdaten

د توپګرافي جګوال h_i داتنونه يا اعداد چې کچونې له لارې لاس ته راړنې ته د جګوالو کمبنتونه $d_{i,j}$ کچ کيږي. د کچونې ناتيکاوي په بنسټ د قانون له مخې صدق کوي $d_{i,j} \neq h_i - h_j$

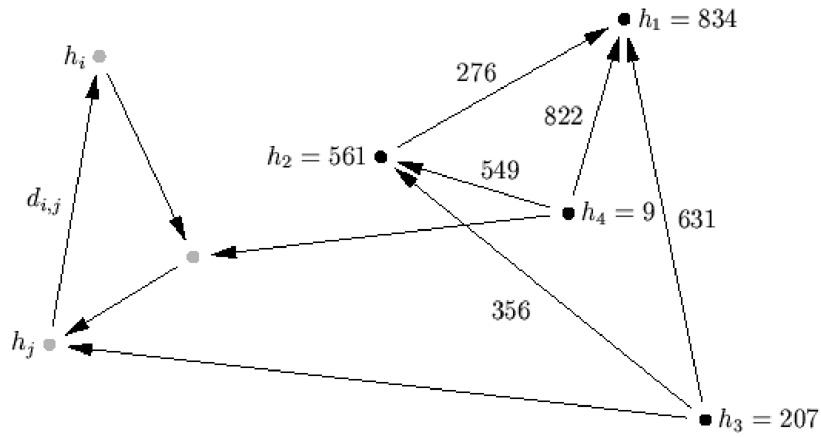
مناسب د جګوالي تيکاوي x_i کېدی شي د اندولونې پرابلم

$$\sum_{(i,j)}\Big(d_{i,j}-\big((h_i+x_i)-(h_j+x_j)\big)\Big)^2 \longrightarrow \min\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې حل شي.

د تلنلارې د ښوولو لپاره د کمو داتن سره يو مودل-پرابلم حل کيږي.



د جګوالي او کمښت ارزښتونو

$$h = (834, 561, 207, 9)^{t}, \quad d = (276, 631, 822, 356, 549)^{t}$$

لپاره، د $d = (d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}, d_{2,3}, d_{2,4})^{t}$ سره ، دا لاندې له ټاکلو اخوا (پورته، زيات) سيستم لاس ته راځي

F

$$A(h+x) = d, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

د مينيمال نورم غ،ښتونى حل دى:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = A^+(d - Ah) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د مینیمال – نورم – حل د څېړل شوي استعمال لپاره مخه ور دی، څکه چې باید د ډېر امکان سره کوچنی تیکاوی وټاکل شي.

لیکونکی : ویپږ

د مور-پینروز-شرطونه Moore-Penrose-Bedingungen

فاسد-معکوس به د لاندې کټمټوالي له لارې یواځنی کرکتریستیک شي:

- $AA^+A = A$
- $A^+AA^+ = A^+$
- $(AA^+)^* = AA^+$
- $(A^+A)^* = A^+A$
- لیکونکي: اپپ.هیولیک

ساده بنوول کیدی شي، چې د

$$A^+ = VS^+U^*, \quad A = USV^*$$

له لارې تعریف شوی فاسد-معکوس ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

د بیلګې په توګه لومړی کټمټوالی د لاندې څخه لاس ته ارځي

$$(USV^*)(VS^+U^*)(USV^*) = U[SS^+S]V^*,$$

څکه چې په کونجیزو نوکانو یا قوسونو کي د تولیز شوو دیاګونال ماتریکسونو (دوه کونجتړو – یا قطبي ماتریکسونو) ضرب به د دیاګونال توکو د ضربوني له لارې جوړېږ شي او لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s^+_{i,i} = 1/s_{i,i}, \quad i \le \mathrm{Rang}\, A\,.$$

نور ټول کټمټوالي هم دسبډه پسي- شمېرني له لارې لاس ته راځي.

د دې ښوونه چې وښايو A^+ يواځنۍ کرکتريستيک شوی دی د ورکړ شوو شرايطو له لارې، نور هم خوراستونځمن دی، له دې امله يې دلته له څېړنې تېرېږو.

ليکونکې: اېپ.هيوليک

اورتوګونال او ځانګړي اورتوګونال ګروپونه

Orthogonale und spezielle orthogonale Gruppe

د ټولو اورتوګونالو $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېری(سټ) د اورتوګونال ګروپ $O(n)$ سره ښايو يا په نخښنه کوو يا بول.

د $Q \in O(n)$ لپاره صدق کوي

$$Q^{-1} = Q^{\mathrm{t}}\,, \quad |\det Q| = 1$$

او د يوه کواوردينات ترانسفورميشن

$$x \to x' = Qx$$

سره اوږدوالی اوسکلار ضرب ساتلی پاتې کيږي.

د ټول اورتوګونال $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېری د $\det Q = 1$ سره د
څرخونګروپ يا ځانګړی اورتوګونال ګروپ

$$SO(n) \subset O(n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلل کيږي.

هنداروْنه Spiegelung

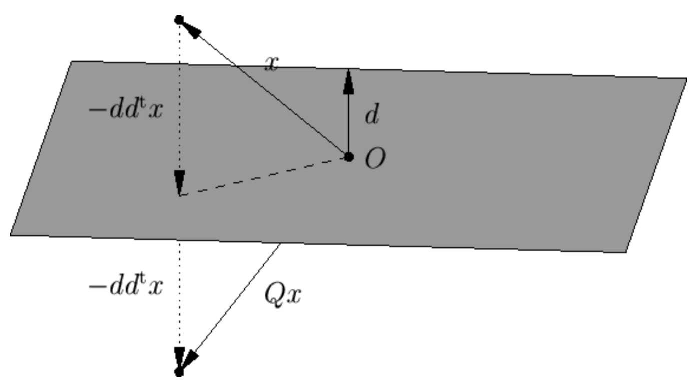
په $\mathbb{R}^n$ کې هنداروْنه (په هنداره انعکاسونه) و يوه يوونوکتور(واحد-) $d \neq 0$ ته اورتوګونال هايپرسطحه(Hyperebene)

$$H: \ d^t x = 0$$

باندې هنداروْنه د سيوم تري اورتوګونال ماتريکس

$$Q = E - 2dd^t$$

له لارې د يوونماتريکس (واحد-) E سره په نښه کيږي



پکي يا ميلي په معنا ده

د Q سيومتري روښانه ده. له دې سره لرو :

$$QQ^t = Q^2 = (E - 2dd^t)^2 = E^2 - 4dd^t + 4dd^t dd^t = E\,,$$

دا په دې معنا چې Q اورتوګونال ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندارونې خویونو ښوولز لپاره لومړی په پامکې نیسو، چې وکتور

$$x - Qx = x - x + 2dd^t x = 2(d^t x)d$$

و d ته غبرګ دی، او منځټکی د x او Qx ترمنځ په هایپرهواره کې پروت دی:

$$d^t(x + Qx) = d^t x + d^t x - 2d^t dd^t x = 0\,.$$

له دې سره Qx په هایپرهواره د x هندارونه ده په سرچینه کې، هغه چې د d سره اورتوګونا ده.

لیکونکي: اپپ.هیولیګ

ځرخون Drehung

آورتوګونال $(n \times n)$ - مآتریکس

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Zeile } i \;\; \longrightarrow \\ \\ \text{Zeile } j \;\; \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & c & & -s & \\ & & & \ddots & & \\ & & s & & c & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

په پورته کې Zeile د لیکي یا کیلې په معنا ده

د $c = \cos\varphi$ او $s = \sin\varphi$ سره یوه ځرخون په φ په $\mathbb{R}^n$ کې پرته د $x_i x_j$ - سطحه کې په ګوته کوي(تحلیلوي).   لیکونکي: اپپ.هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساده شميرنه او د

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

په پام کې نيولو سره تصديقيږي، چې ځرخونماتريکس R اورتوګونال دی:

$$RR^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & c^2+s^2 & & -sc+sc & \\ & & & \ddots & & \\ & & -sc+sc & & c^2+s^2 & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} = E\,.$$

- ليکونکي: اپپ.هيوليک

ځرخونمحور او ځرخونکونج Drehachse und Drehwinkel

هر په $\mathbb{R}^3$ کې ځرخون Q يو ځرخون محور لري، دا پهدې معنا چې يو يوونوکتور u اينواريانت پريږدي،او په يوه کونج φ يو ځرخون بنايي په هغه هواره کې چې u ته(باندې) اورتوګونال ده.

نسبت و يوه اورتوګونال ولاړسيستم u, v, w ته Q لاندې د ماتريکس آنځورونه لري:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

او د ځرخونکونج لپاره په ځانګړې توګه صدق کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Spur}\, Q - 1\right) .$$

- لیکونکي: هیولیګ، ربل

د یوه څرخونماتریکس Q لپاره لرو:

$$Q^{-1} = Q^{t}, \quad |\det Q| = 1 .$$

دا چې د یوه اورتوګونالماتریکس آیګن –ارزښت λ_i مطلق ارزښت 1 لري او $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det Q = 1$ دی، لرو، چې لږ تر لږه یو آیګن – ارزښت 1 دی. د مناسب په ګڼه کزلز یا نمرهکولو سره یا

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \quad \lambda_1\lambda_2 = 1$$

دی او یا

$$\lambda_i \in \{-1, 1\} .$$

دا نورمي شوی ایګن- وکتور u د آیګن – ارزښت 1 څرخونمحور ټټکي.

د یوه اورتوګونالولاړسیستم u, v, w لپاره باور لري:

$$\begin{aligned} Qu &= u \\ Qv &= \alpha v + \beta w \\ Qw &= \gamma v + \delta w . \end{aligned}$$

دا چې Qv, Qw کوم د u - کومپوننت نه لري، له لاندې له کونجساتونکو اورتوګونال مارتیکسونو څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \perp u \Rightarrow Qx \perp Qu = u\,.$$

که پورته مساوات د ماتريکس بنه باندې

$$Q(\underbrace{u,v,w}_{P}) = (u,v,w)\underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{array}\right)}_{\tilde{Q}},$$

باندې وليکل شي، له $\tilde{Q} = P^{-1}QP$ لاس ته ارځي، چې

$$\left(\begin{array}{cc} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{array}\right)$$

يو څرخون ماتريکس دی. په همدې ډول د شپور د انواريانت له امله لاس ته راځي:

$$\mathrm{Spur}\, Q = \mathrm{Spur}\, \tilde{Q} = 1 + 2\cos\varphi$$

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

ماتريکس

$$Q = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{array}\right)$$

يو دياګونال ماتريکس دی، ځکه چې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q^{t}Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = E \Rightarrow Q^{t} = Q^{*}$$

او

$$\det Q = \det \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = +1\,.$$

ځرخونمحور د آئګن- وکتور u په حيث ټاکل کيږي و آيګن – ارزښت $\lambda = 1$ ته:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}_{Q-E}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

ځرخونکونج φ له

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{Spur} Q - 1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

څخه لاس ته ارځي، د $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ په حيث .

د φ مخنخښه د ځرخونلور u د لوريزوالي په واک کې ده او کېدی شي د يوه ولاړسيستم(کواوردينات سيستم) $\{u, v, w\}$ وټاکپ شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w^{t}Qv = w^{t}(\cos\varphi v + \sin\varphi w) = \sin\varphi\,.$$

د

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

سره د راوړل شوي بېلګې لپاره لرو:

$$\sin\varphi = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$$

نو لرو: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ليکونی: ويپر

د يو خرخون په ضريپونو ټوټه کونه Faktorisierung einer Drehung

يو خرخون Q په $\mathbb{R}^3$ کې په کواورد يناتمخور د د کواوردخرخونونو د ضرب په څېر کېدی انځور شي:

$$Q = D_z D_y D_x\,.$$

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

خرخون D کېدی شي و ټاکل شي، دا سي چي يو په بل پسي sukzessive د Q توکي q_{21}, q_{31}, q_{32} له منځه يووړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_x^{-1}D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} = R\,.$$

له دې سره داسې کار اخستل شوی یا مخ ته تللي يو، چې يو په خوښه آيګن-وکتور $(v_1, v_2)^t$

په $(1,0)^t$ باندې د يوې سطحې د څرخون D له لارې ځان ځېره کړی شي (يعني د تابع په ځېر وليکل شي). دا چې $\det R = 1$ دی $r_{33} = 1$ لرو او د متو د نورمي کولو له امله بايد R يوونماتريکس (واحدماتريمس) وي. له دې سره غوښتونې انځورونه لاس ته راځي.

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

د دې لپاره چې د ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{4}}{8} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}$$

په ضريبونو ټوټه کول لاس ته راوړو، نو لومړی توکی $q_{2,1}$ له منځه وړو د $\frac{\pi}{2}$ په کچه څرخون د z – محور باندې:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}.$$

داسې پای کوو چې د y -محور باندې د $\frac{\pi}{4}$ په کچه څرخوو:

:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} D_z^* Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

لاس ته راغلی ماتريکس يوو څرخون D_x دی د x -محور باندې. په ټوليزه توګه لاندې په ضريبونو ټوټه کونه لاس ته راوړو:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

D_x D_y D_z

- ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

ځرخونماتريکس Drehmatrix

په $\mathbb{R}^3$ کې يو ځرخون د نورمي شوي ځرخون محورلور u او ځرخونکونج φ سره ، داسې لوريزه لکه ښى پيچي ميخ ، د يو وکتور x فنکشن جوړوي

$$Qx = \cos\varphi\, x + (1-\cos\varphi)\, uu^{t}x + \sin\varphi\, u \times x$$

، چيرته چې $v \times x$ د u او x صليب ضرب(وکتوري ضرب، چې x سره په نخښه کيږي) په نخښه کوي. اړونده ځرخونماتريکس دى:

$$Q:\quad q_{ik} = \cos\varphi\;\delta_{ik} + (1-\cos\varphi)\; u_i u_k + \sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j\,.$$

د کرونيکرسومبول δ_{ik} او ε ـتنزور ε_{ijk} سره.

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

دا بسيا کوي پسي وښايو، چې $Qu = u$ او يو و u ته اورتوګونال وکتور v په يوه کونج φ د u په محور باندې وځرخي. لومړى غوښتنه ترلږ کتل کيږي. د v ځيرې يا تابع ارزښت په ځير لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Qv = \cos\varphi\, v + \sin\varphi\, u \times v\,,$$

څه چې په φ د څرخون سره د v او $u \times v$ څخه غزېدلي سطحه په ګوته کوي.

- لیکونکي: هیولیک، ربل

د ټولیز فرمول سره سم د $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^t$ په محرړر په $\varphi = \frac{\pi}{3}$ یو د څرخون ماتریکس Q له 3ترمونو څخه په لاندې ډول یوځاي کیږي:

په ټولیزه توګه لاس ته راوړ

$$\cos\varphi\ \delta_{ik}\ : \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(1-\cos\varphi)u_i u_k\ : \quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- لیکونکي: هیولیک، کرایڅ

$$\sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j\ : \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

مربعیزه فورم(څلوری یې بنه)

Quadratische Form

د یوه حقیقي سیموتریک ماتریکس A لپاره دا لاندې

$$\alpha(x) = x^t A x$$

مربعیزه فورم نوموو.

د A د آیګن – ارزښت د مخنخښي بدلون له مخې لاندې درې تیوپه(ډولونه) توپیروو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- الیپتیکي (بیضوي ډوله) بڼه: ټول آیګن – ارزښتونه همغه مخنخښه لري.
- پارابولیک : لږ تر لږه یو آیګن – ارزښت صفر دی او نور آیګن ارزښتونه همه یابرابرې وخنخښې لري.
- های پارابولیکي : د مختلفو مخنخښو سره آیګن – ارزښتونه شتون لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د A سیومتري اړیین نه ده چې مخ له مخه ونیول شي(فرض شي)، د ټولیز ماتریکس لپاره کېدی شي مربع بڼه په لاندې ډول ولیکل شي:

$$x^{\mathsf{t}}Ax=\sum_{j,k}x_j a_{j,k}x_k=\sum_j a_{j,j}x_j^2+\sum_{j<k}(a_{j,k}+a_{k,j})x_j x_k$$

پس کېدی شي هر ځل دوه ترمونه سره یوځای کړو او مربع بڼه سیومتري کړو یا په سیمتري واړوو:

$$x^{\mathsf{t}}Ax=\frac{1}{2}x^{\mathsf{t}}(A+A^{\mathsf{t}})x\,.$$

مربع بڼې د بېلګې په توګه د یوه سکالارتابع f د تیلور- ودې د لومړي ترم په څېر رامنځ ته کیږي:

$$f(x)=f(0)+\operatorname{grad}f(0)^{\mathsf{t}}\,x+\frac{1}{2}x^{\mathsf{t}}(\mathrm{H}\,f(0))\,x\,.$$

په دې حالت کې $\mathrm{H}\,f$ د دویم ټوټه (partiellen -) مشتق د هسې-ماتریکس دی، د بدلونوالي په بنسټ سیومتري دی. لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیومتریک ماتریکس

$$A=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1+\lambda\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

آيګن – ارزښتونه 2 او 2λ لري.

مربعي بڼه

$$\alpha(x) = x^t A x$$

د $\lambda > 0$ لپاره بيضوي(هګۍ ډوله) ده، د $\lambda = 0$ لپاره پارابوليک او د $\lambda < 0$ لپاره هايپارابوليک دی.

- ليکونکي: اپپ، هيوليک

کوادريک Quadrik

تکي

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) + 2\beta(x) + \gamma = 0\}$$

کوادريک بلل کيږي، چېرته چې α يو مربعيزه بڼه، β يوه کرښوزه بڼه او γ يوه ثابته ده.

Q د ماتريکس ليکدود په ډول ليکل په لاندې ډول ليکل کيږي

$$Q : \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د $\alpha(x) = x^t A x$ او $\beta(x) = b^t x$ سره.

د Q انځورونه يواځنی نه ده. د بېلګې په توګه کېدی شي د تعريف مساوات د يوه په خوښه ثابتې سره ضرب شي.

- ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوادريکونو شډله تړنه ونه Grobeinteilung der Quadriken

د يوه کوادريک د مساوات څخه په پيل

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

ليکو

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array} \right) .$$

د $\tilde{x}^t = (1, x_1, \ldots, x_n)$ سره کېدی شي Q هم په لاندې هوموجين بڼه وليکل شي:

$$Q: \quad \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0$$

لاندې ډولونه يا تيوپونه توپيروو:

- مخروطي کوادريک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A$
- منځتکي کوادريک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 1$
- پارابوليکي کوادريک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 2$
- ليکونکي: اېپ، هيوليګ

کوادريک

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا دونه(ژباړی): په سطحه کې یوه کره(کرښه)، په دري بعدیزه (دریپراخیدونې) فضا کې یوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو یا متحولو له لارې تشریح یا ښوول کیدی شي.پای

$$Q: \quad x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2x_2 + \lambda = 0$$

دې د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره ورکړ شوي وي، همداسې د ماتریکس لکیندود

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \lambda, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

،

سره ورکړ شوي وي.

د $\lambda = 0$ لپاره $\operatorname{Rang} A = 1$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang} A = 2$ دی. د $\lambda = \pm 1$ لپاره $\operatorname{Rang} \tilde{A} = 2$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang} \tilde{A} = 3$ دی. له دی سره Q د $\lambda = 0$ لپاره یو پارابول ، د $\lambda = \pm 1$ لپاره مخروطي دوله کوادریک او د نورو ټول ارزښتونو لپاره یو منځټکي کوادریک دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

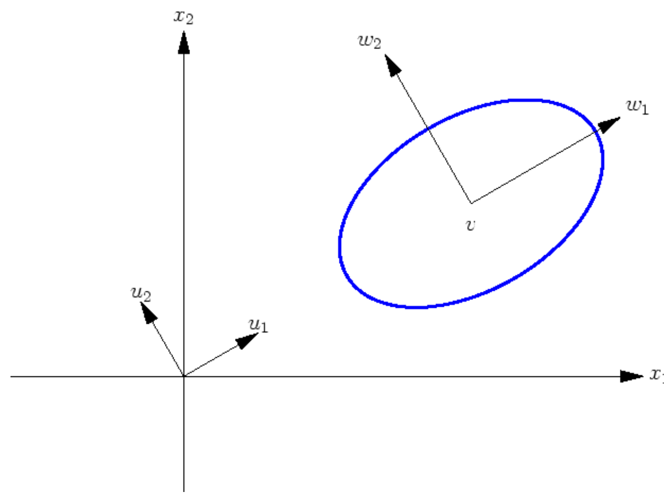
اصلي- محور –ترانفورمیشن Hauptachsentransformation

د څرخون او راکښنی له لارې په $\mathbb{R}^n$ کې کېدی شي یو کوادریک په نورمال بڼه ترانسفورمي شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^{t}Ax+2b^{t}x+c=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i w_i^2+2\beta w_{m+1}+\gamma\,,\quad x=Uw+v\,,$$

چیرته چې $m=\text{Rang}\,A$ او $\beta\gamma=0$ صدق کوي.



له دې سره د ځرخون ماتریکس U متې د A آیګن –ارزښتونو λ_i ته آیګن-وکتورونه u_i خوندي لري، چې د هغې لور اصلي محور بلل کیږي. د راکښني وکتور (راکښونوکتور) v د کوادریک منځټکی دی. لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیومتري مارتیکس A ته له آیګن –وکتورونو u_i څخه د $\det(u_1,\ldots,u_n)=1$ سره یو اروتوګونال بنسټ شتون لري، د کومو سره چې لومړی و آیګن – ارزښتونو $\lambda_i\neq 0$ ته آیګن – وکتورونه نئول کیږي. د لومړي ځای بدلون $x=Uy=(u_1,\ldots,u_n)y$ پسې له دې سره لاندې دیاګونال بڼه لاس ته راځي

$$y^{t}\,\text{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m,0,\ldots,0)y+2(\underbrace{U^{t}b}_{\tilde b})^{t}y+c\,.$$

له صفر څخه مختلف آیګن-ارزښتونو $\lambda_i\neq 0$ لپاره د نورو وریپسې ځای بدلون له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_i = z_i - \tilde{b}_i/\lambda_i$$

كيدی شيکربنيز ترمونه له ځايه يوړل شي (مربعي پوره کونه). ثابتې د

$$c \to \gamma = c - \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_i^2/\lambda_i \,.$$

سره سم تغير خوري،نو اوس له دې سره اوس دا بنه لرو

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=m+1}^{n} 2\tilde{b}_i z_i + \gamma \,.$$

که اوس يو $\tilde{b}_i \neq 0$ د $i \geq m+1$ سره شتون ولري، نو د يو ه بل څرخون پسي د

$$z'_i \qquad = z_i \,, \quad i \leq m$$

$$z'_{m+1} \quad = (1/\beta) \sum_{m+1}^{n} \tilde{b}_i z_i \,, \quad \beta = \pm|\tilde{b}|$$

او په اړونده اورتوګونال د $z'_{m+2}, \ldots, z'_n$ سره تکمي شوی

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (z'_i)^2 + 2\beta z'_{m+1} + \gamma \,.$$

لاس ته راځي.

له دې سره د β سره مخ نخبنه ډاسې ټاکل کيږي، چې د β سره ويش وروسته لړ تر لمه دومره مثبت لکه منفي ترمونه λ_i/β رامنځ ته شي.

اخرنی راکبنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w_{m+1} = z'_{m+1} + \gamma/(2\beta)$$

$$w_i = z'_i\,, \quad i \neq m+1$$

ثابته له منځه وړي او باالاخرخ راکوي:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

کوادريکونه

يا دونه(ژباړى): په سطحه کې يوه کره(کرښه)، په درې بعديزه (درېپراخيدونې) فضا کې يوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو يا متحولو له لارې تشريح يا ښوول کيدى شي.پاى

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

دې په نورمال فورم يا – پنې ترانسفورمي شي.

د ماتريکس لکندود سره لاس ته راځي

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ 10 & 17 & 14 \\ 4 & 14 & 20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -24 \\ -57 \\ -39 \end{pmatrix}, \quad c = 207\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره.

ماتريكس A آيګن – ارزښتونه 36 ، 9 او 0 لري، په دې اړونده نورمي شوي آيګن- وکتورونه u_i د $\det(u_1,u_2,u_3)=1$ سره د بېلګې په توګه دي:

$$u_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^t\,,\quad u_2=\frac{1}{3}(2,1,-2)^t\,,\quad u_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^t\,.$$

د ترانسفورميشن $x=Uy$ پسې د $U=(u_1,u_2,u_3)$ سره لاس ته راځي

$$Q:\quad 36y_1^2+9y_2^2-144y_1-18y_2+18y_3+207=0\,.$$

د مربعيزې تکميلوني له لارې

$$z_1=y_1-2\,,\quad z_2=y_2-1\,,\quad z_3=y_3$$

لاس ته راحي

$$Q:\quad 36z_1^2+9z_2^2+18z_3+54=0\,.$$

راکښنه

$$w_1=z_1\,,\quad w_2=z_2\,,\quad w_3=z_3+3$$

باالاحره نورمالفورم (- بڼه) راکوي

$$Q:\quad 36w_1^2+9w_2^2+18w_3=0\,.$$

په ټوليزه توګه ترانسفورميشن لاندې فورم يابنه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = Uy = Uz + U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Uw + U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

پس راکښنه ده

$$v = U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

او د د کوادریک منځ ټکی په ګوته کوي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

مخروط غوڅی Kegelschnitt

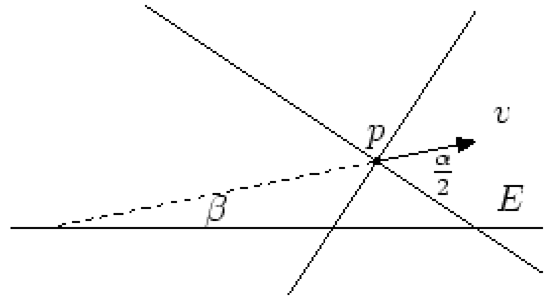
د یوه دېلمخروط غوڅی

$$K:\ (x-p)^{\mathrm{t}}v = \pm\cos\frac{\alpha}{2}\,|x-p||v|$$

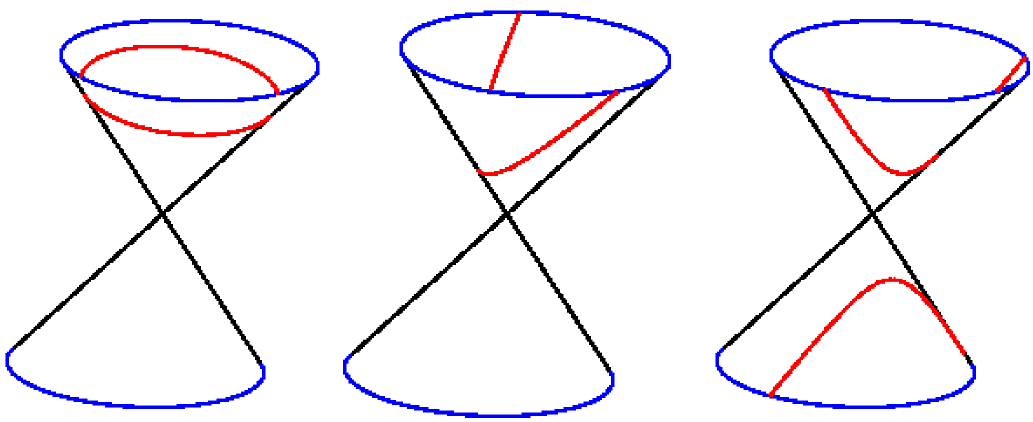
د ځوکي p ($p_3 \neq 0$) ، لور v سره او وازولو کونج α د سطحې $E:\ x_3 = 0$ سره یوه مربعیزه کره ده

$$K \cap E:\ a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مخروط غوڅي تيوپ يا ډول د E او کرښي $t \in \mathbb{R}$, $p + tv$, ترمنځ کونج β د لويوالي په واک کې دی



Ellipse: بيضوي يا هګښ
$\beta > \alpha/2$

Parabel: پارابول
$\beta = \alpha/2$

Hyperbel: های پارابول
$\beta < \alpha/2$

ليکونکي: ايپ، هيوليک

د دوه بعدي کوادريکونو د اوکليدي نورمال بڼه

Euklidische Normalform der zweidimensionalen Quadriken

د سطحيزو کوادريکونو مختلف ډولونه شتون لري، د لاندې نورمال فورمونو سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مخروطي كوادريكونه

Normalform نورمال بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Punktټکی
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidendes Geradenpaar د غوڅوونكو كرښو جوړه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelgerade دبلې كرښې

- منځټكي كوادريكونه

Normalform نورما بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	تش ډېرى)leere Menge)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	های پارابولHyperbel

(c) ketabton.com: The Digital Library

Ellipseبيضوي(هګی)	$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$
leere Menge)تش ډېری(	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$
paralleles Geradenpaar د کرښو غبرګه جوړه	$-\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$

- پارابوليکي کوادريکونه

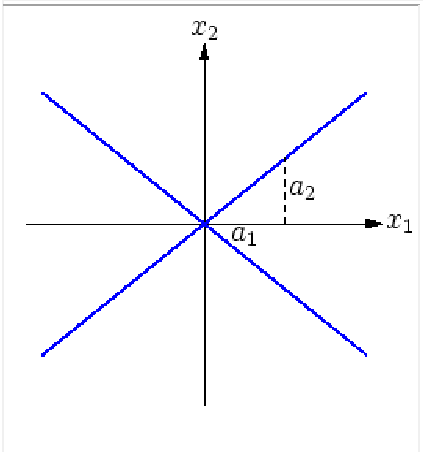
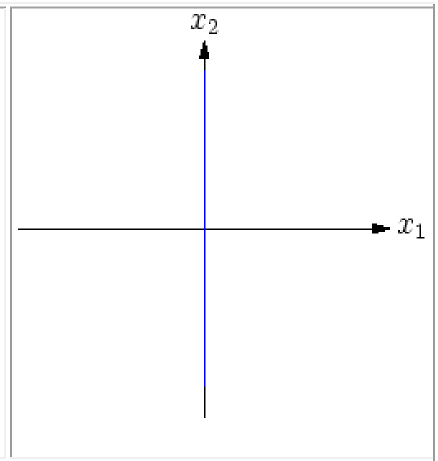
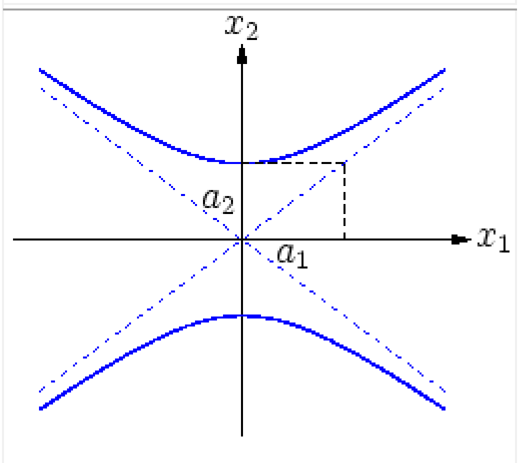
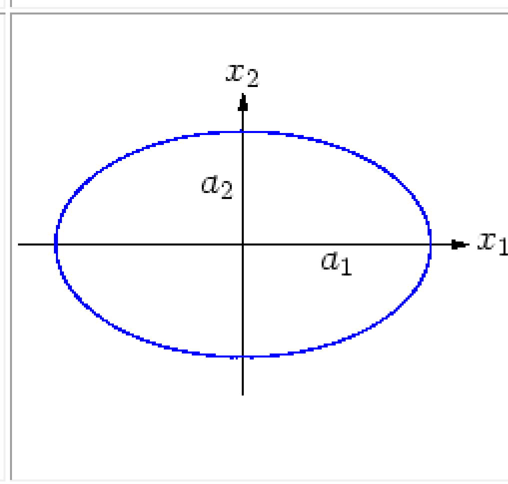
Bezeichnung نومونه	Normalform نورمال بڼه
Parabel پارابول	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+2x_2=0$

نورمالفورمونه يواځني دي، د ايندکسونو يا پيژند نخښنو تر ځای بدلون پورې او د مخروطي کوادريکونو د يوې ثابتې $c\neq 0$ سره د ضرب پورې.

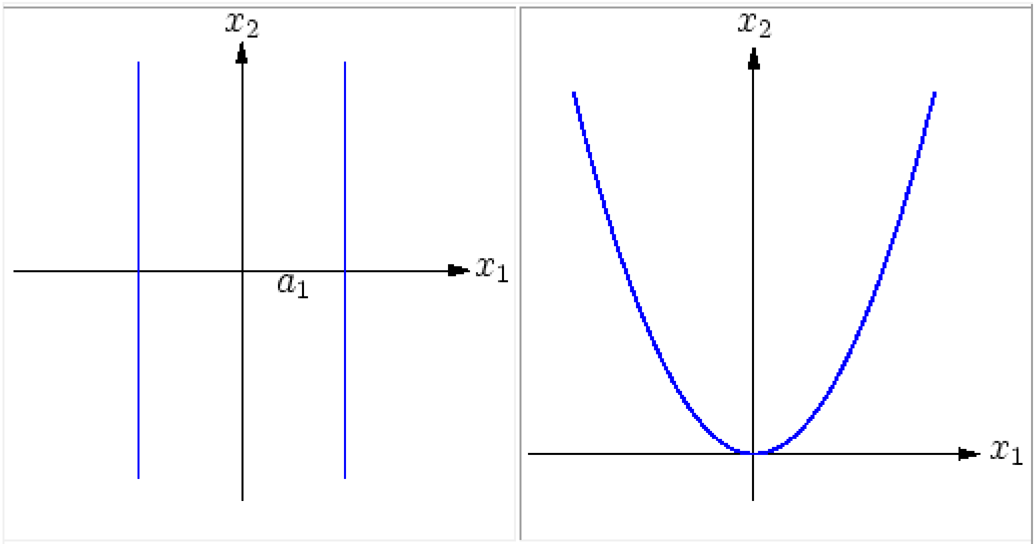
لويې a_i مثبت اينسول کيږي او د کوادريکونو داصلي محور اوږدوالی بلل کيږي

Doppelgerade دبل کرښې	schneidendes Geradenpaar د غوڅيدونکو کرښو جوړه

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Hyperbel های پارابول</td><td>Ellipse بیضوي یا هګی</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>paralleles Geradenpaar
غبرګه(موازي) کرښجوړه</td><td>Parabel پارابول</td></tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: اپپ، هيوليګ

اوس دې د لاندې کوادريکونو نورمالفورم(- بڼه) او تيوپ وټاکل شي

$$Q: \quad 3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 - 12\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{2}x_2 - 8 = 0$$ د

ماتريکسفورم د مربعيز فورم ځخه په پيل،

$$x^t A x + 2b^t x + c = x^t \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x + 2\sqrt{2}\,(-6, -2)\, x - 8$$

لومړی سرې د ماتريکس A آيګن – ارزښتونه او آيګن – وکتورونه ټاکي.

کرکتريتيکي پولينوم دی:

$$(3-\lambda)^2 - 25 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 25 = \lambda^2 - 6\lambda - 16$$

او لاندې صفرځايونه لري

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = 3 \pm 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

و $\lambda_1 = -2$ ته یو نورمي شوی آیګن-وکتور د لاندې کربنیز مساوات د حل څخه لاس ته راوړل کیږي

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} v_1 = 0$$

نو $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^t$ دی. دا چې دویم آیګن-وکتور په په لومړي باید عمود (ولاړ) وي، نو لاس ته راځي $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$ ، د کوم سره چې مخنخښه داسې باید ټاکل شوي وي، چې د لاندې ورکړ شوې ترانفورمیشن ماتریکس دیترمینانت مثبت وي:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

د $x = Uy$ سره تراسفورمي شوي مساوات لاندې بڼه لري:

$$\begin{aligned} 0 &= y^t \tilde{A} y + 2\tilde{b}^t y + c \\ &= y^t U^t A U y + 2\left(b^t U\right) y + c \\ &= -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8\,. \end{aligned}$$

د مربعیزې پوره ونه یا تکمیلونه راکوي

$$0 = -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad -2(y_1-2)^2+8(y_2-1)^2-8$$

$$= \quad -2z_1^2+8z_2^2-8$$

په همدې ډول

$$\frac{z_1^2}{2^2}-\frac{z_2^2}{1^2}+1=0\,.$$

نو مساوات يو هاى پارابول انځوروي.

(Autoren: Höllig/Hörner)

د درې بعدي كوادريكونو د اقليدس (اويكليد) نورمالفورم

Euklidische Normalform der dreidimensionalen Quadriken

د فضايي كوادريكونو 17 مختلف ډولونه شتون لري د لاندې نورمالفورمونو سره:

- مخروطي كوادريكونه

Normalform نورمال بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=0$	Punktتکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

(Doppel-)Kegel(دبل)مخروط	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$
Geradeکرښه	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$
Schneidende Ebenenغوڅونکي سطحې	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$
Doppelebeneدبل سطحې	$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$

- منځټکي کوادريکونه

په نخښه ونه Bezeichnung	نورمال بڼه Normalform
(leere Menge) (تشډېرۍ)	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$
دوه پوښيز های پرابولوئيد zweischaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$
يوپوښيز های پرابولوئيد einschaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0$	Ellipsoid ايليپسوپيد
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	(leere Menge) تشډېرى
$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	hyperbolischer Zylinder هايپربوليكي توته
$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	elliptischer Zylinder ايليپتيكي توته
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$	(leere Menge) تشډېرى
$-\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$	parallele Ebenen غبرګې سطحې يا ٠ هوارئ

- پارابوليكي كوادريكونه

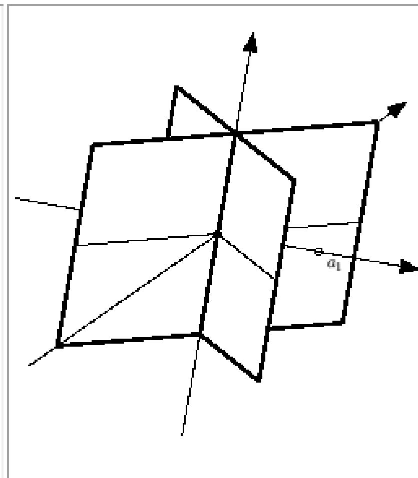
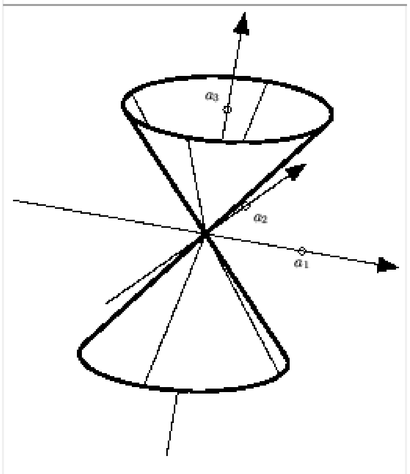
نورمال بڼه	نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+2x_3=0$	هګى ډوله ايليپميكي پارابولوئيد
$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+2x_3=0$	هاي پارابوليكي پارابولوئيد

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارابولیکي توته	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$

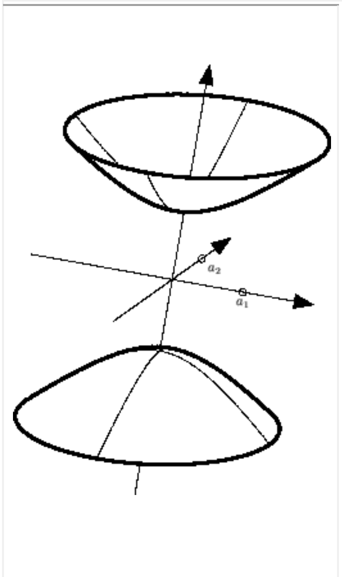
نورمال بڼې د ایندکسونو یا پیژند نخښو پورې یوائنې تاکلي او مخروطئ کوادریکونه د ثابتې $c \neq 0$ سره د ضرب پورې یوائنې تاکلي.

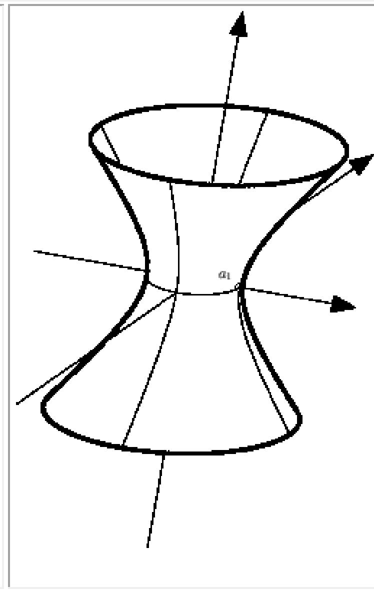
لویې a_i مثبت اینول کیږي او د کوادریکونو د اصلي محور اوږدوالی بلل کیږي.

غوڅوونکي سطحې	(ډبل) مخروط
	

یو پوښیز های پارابول	دوه پوښیز های پارابول

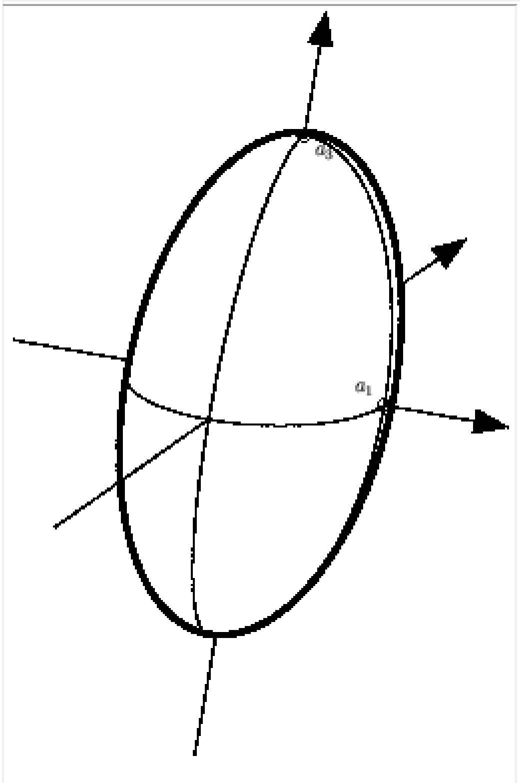
(c) ketabton.com: The Digital Library

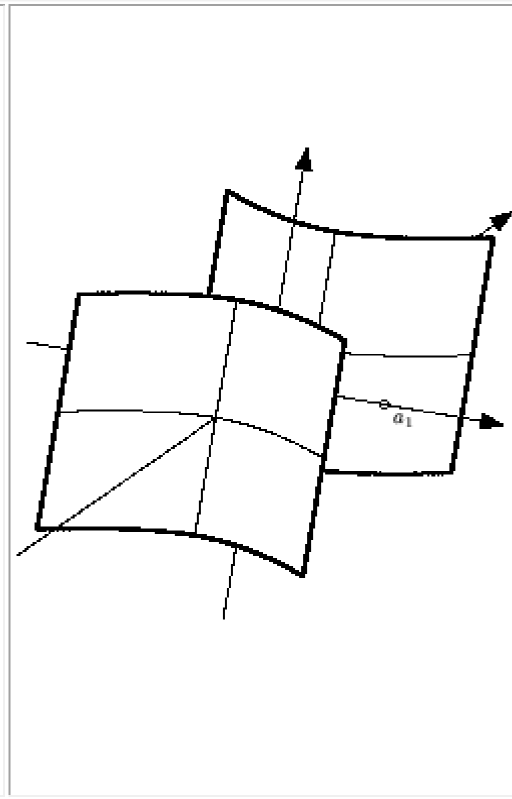




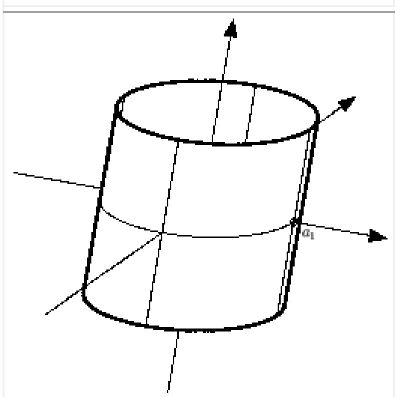
های پارابوليکي توته hyperbolischer Zylinder	Ellipsoidهکی دوله يا بيضوي دوله

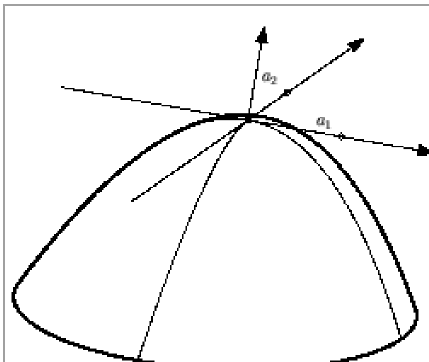
(c) ketabton.com: The Digital Library



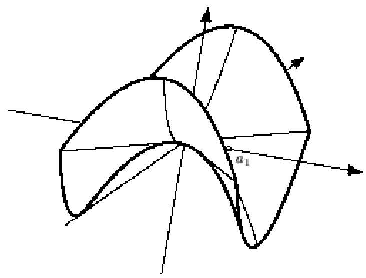
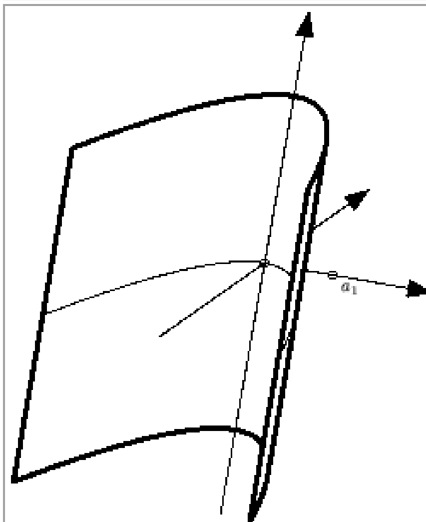


elliptischer Zylinder بيضوي توته	elliptisches Paraboloid بيضوي پارابولوئيد





(c) ketabton.com: The Digital Library

hyperbolisches Paraboloid های پارابولیکي پارابولوئید	parabolischer Zylinder پارابولیکي توته یا - استوانه
	

لیکونکي: هیولیګ، هیرنر

اوس دې د لاندې کوادریکونو نورمال بڼه او تیوپ (ډول) و ټاکل شي:

$$Q: \quad x^t \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + 2\,(-2,1,2)\,x + 2 = 0$$

د ماتریکس کرکتریستیکي یا ټاټونکی پولینوم

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې صفرځاي لري:

$$\lambda_1 = 9\,, \quad \lambda_2 = 3\,, \quad \lambda_3 = -3\,.$$

و آيګن – ارزښتونو λ_i ته اړونده نورمي آيګن-وکتورونه دي:

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\,,$$

جېرته چې مخنخښه داسې ټاکل کيږي، چې و لاړسيستم منځ ته راځي.

د اورتوګونال ترانسفورميشن ماتريکس په حېث منځ ته راځي:

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

دا د $x = Uy$ سره ترانسفورمي مساوات لاندې بڼه لري:

$$y^t \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y + 2\,(0,3,0)\,y + 2 = 0\,.$$

مربعيزه پوره کونه راکوي

$$\begin{aligned} 0 &= 9y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \\ &= 9y_1^2 + 3(y_2+1)^2 - 6y_2 - 3 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad 9z_1^2 + 3z_2^2 - 3z_3^2 - 1$$

په همدې توګه

$$\frac{z_3^2}{\frac{1}{3}} - \frac{z_1^2}{\frac{1}{9}} - \frac{z_2^2}{\frac{1}{3}} + 1 = 0\,.$$

نور مساوات یوپوښیز های پارابول انځوروي

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

چې غوتې پسې وهې په لاس به درشي

چا وې دا چې په دریاب کې ګور نه شته

برى د خداى (ج) سره دى.

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

(c) ketabton.com: The Digital Library

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library