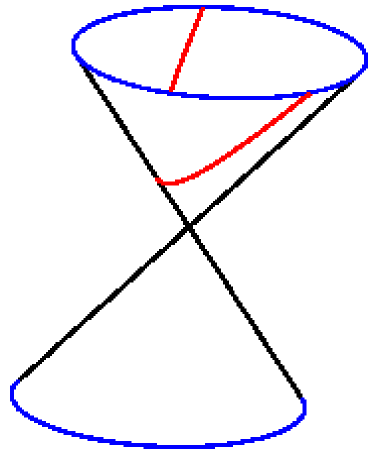
الجبر (كرشنيز) لاينيز

Lineare Algebra

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library



ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاينيز(کرښيز) الجبر ۱
بنسټيزجوړښتونه / ګروپونه او تنونه ۱
ګروپ ۱
لاندې ګروپونه ۳
ګڼونډېرۍ يا د اعدادو سټ ۳
پرموتيشونونه ((د توکو يا اعدادو) ځای بدلون) ۴
د ځای بدلنون (پرموتيشن) څيوکليکي يا تل ۵
مودولوس ۸

لومړني تنونه يا پټي يا ورشو ۱۱
ګالويز– بدن ۱۳
په ګروبونو ياډلو کې تورنی ۱۴
وکتورفضا يا وکتوري فضا ۱۶
د n - ګوني وکتورفضا ۱۹
لاندې فضا يا برخه فضا ۲۰
کرښيز کمبينيشن ۲۲
کرښيزه هيولې يا سپاين يا سمڅ ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتی – یا محدب کمبینیشن ۲۵
حقيقي- یارینتونی سکالار ضرب ۲۶
سکالار ضرب ۲۷
مايل سيومتريک ۲۸
د کوشي-شوارخ – نامساوات ۳۰
نورم ۳۱
هوموګینیوالی ۳۱
د سکالار ضرب نورم ۳۲
ماکسيموم – نورم ۳۳
د حقيقي- یا ریل وکتورونو سکالار ضرب ۳۴
د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب ۳۵
د دوه وکتورونو ترمنځ کونج ۳۶
د پيتاګوراس(فيثاغورث) جمله ۳۷
کرښيز نابلواکوالی یا ۳۹
بنسټ Basis ۴۲
بعد یا پراخیدونی Dimension ۴۴
اورتوګونال یا ولاړ بنسټ ۴۶
اورتوګونال پروجکشن ۴۹
د ګرام-شميت تګلار یا قانون ۵۱
کرښيزه ځیرونه (فنکشن یا تابع) ۵۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

د كربنيزو توابعو كمپوزيشن ۵۷
ماتريكس ۵۸
يو كربنيز فنكشن يا تابع ۶۱
يو كربنيز فنكشن يا تابع ۶۳
Bild او Kern معنا ځيره يا شكل او زړي ۶۵
معكوس يا په څټ تابع (ځيرونه يا فنكشن ۶۷
د ماتريكسونو وكتورفضا ۶۹
د ستراسن(وييڼه: شتراس) الګوريتم ۷۱
كوموتاتور ۷۲
په څټ يا معكوس ماتريكسونه ۷۴
تراسپوني او ادجونګيري ماتريكسونه ۷۶
شپور Spur ۷۸
د يوه ماتريكس رانګ ۷۸
د يوه ماتريكس نورم ۸۰
هوموحنيتي: ۸۱
هوموحنيتي: ۸۳
د ماتريكس د ډكوني جوړښت ۸۴
اورتوګونال او يونيتار ماتريكسونه ۸۴
د هادامارد – ماتريكسونه ۸۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فوریر (وبینه: فوریې) ماتریکسونه ۸۶

نورم ریښتونې یا - وفاداره اورتوګونال ا و یونیتار ۸۷

څیوکلیکي (تلبیرته راګرځېدوني) ماتریکسونه ۸۹

ستوښاستیکي ماتریکسونه ۹۰

دیترمینانت د انتیسیومتري کرښیزفورم په حیث ۹۱

2 - لیکیزه دیترمینانت ۹۴

د ساروس شیما یا شکل ۹۵

لوریز حجمونه (ډکي) ۹۶

د دیترمینانتونو لپاره قاعدې ۹۸

د ځانګړو ماتریکسونو دیترمئناتونه ۱۰۱

د دیترمینانتو بڼه بدلون ۱۰۴

د دیترمینانتو ودیزیینه ۱۰۵

د 3 ټکو له لارې د یوې سطحې ۱۰۸

د واندرموند – دیترمینانتونه ۱۱۱

کرښیز مساوات سیستم ۱۱۲

برېښنایي جریاندایره ۱۱۴

د یوه کرښیز مساوات سیستم حلوړوالی ۱۱۵

دیترمینانت او د یوه مساوات سیستم حلوړوالی ۱۱۸

د کرامر قاعده ۱۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښځ لور ځای په ځای کول ۱۲۳

د ګاوس ترانفورميشن ۱۲۵

د ګاوس د له منځه وړنه ۱۲۶

د ايښيلون بڼه ۱۲۹

د ايښلون- بڼه د يوه ل م س (کرښيز مساواتسستم)حل ۱۳۱

رانګ او د ک م س(کرښيز مساواتسيستم) حلوړوالی ۱۳۴

د انډول کرښه(انډولکرښه) ۱۳۵

د برابرونې حل يو بل سره يوغږيز........ ۱۳۷

الجبر - کرښيز مساوات سيستم-برابرونې پرابلم ۱۳۸

نورمالمساواتونه ۱۳۸

توموګرافي ۱۴۱

آيګن-ارزښت او آيګو-وکتور ۱۴۳

ورته والي – ترانفورمېشن ۱۴۵

کرکتريستکي پولينوم ۱۴۷

الجبری او هندسي ډېرځلوالی ۱۵۰

د آيګن –ارزښتونو جمعه او ضرب ۱۵۲

د ماتريکسونو ريښتونی توابع ۱۵۴

د آيګن – وکتورونو بنسټ ۱۵۵

د ځيوکليکي ماتريکسونو دياګونالونه ۱۵۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ماتریکسونو توان ۱۶۰

د فیبوناچي پرلپسې یا – ترادف ۱۶۲

نورمال ماتریکسونه ۱۶۴

نورمال ماتریکسونه... ۱۶۵

مثبت دیفینیت ماتریکسونه ۱۷۰

ریلا ي – ویش ۱۷۰

مثلث بڼه ۱۷۱

اصلي وکتورونه ۱۷۳

د اصلفضا ځیوکلیکي بنسټ ۱۷۵

د جوردان بڼه ۱۷۹

د (4x4) -ماتیکسونو جوردان-بڼې ۱۸۶

په زیګولار ارزښت توټه کونه ۱۸۹

فاسد معکوس ۱۹۱

د توپوګرافیکي کچونداتنونو ټیکاوی یا اصلاح ۱۹۶

د مور-پینروز-شرطونه ۱۹۷

اورتوګونال او ځانګړي اورتوګونال ګروپونه ۱۹۸

هندارونه ۱۹۹

څرخون ۲۰۰

څرخونمحور او څرخونکونج ۲۰۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يو خرخون په ضربيپونو ټوټه کونه ۲۰۵

ځرخونماتريکس ۲۰۸

مربعيزه فورم(بڼه) ۲۱۰

کوادريکونه ۲۱۱

د کوادريکونو شډله ټوټه ونه ۲۱۲

اصلي- محور –ترانفورميشن ۲۱۴

مخروط غوڅی ۲۱۸

د دوه بعدي کوادريکونو د اوکليدي نورمال بڼه ۲۲۰

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې ۲۳۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

سريزه

زه د سريزې په هکله ډېر څه نه ليکم، خو دې ته ګوته نيسم، چې ما د دې سرليک لاندې دوه ليکنې کړي. دا مخ ته پرته د هغو لوستونکو لپاره ده، چې د شميرپوهنې سره داسې لږڅه بلدتيا ولري، دا به ښه وي، خو اړينه هم نه ده.

دا ليکنه خورا مفصله ده نسبت هغې بلې ته

تر مخ راوړنه: فنکشن که په نورو ژبو کې وکورو، نو په پښتو ژباړه به يې څيره کونه (لنډ : څيره ونه) وي. په فنکشن کې يو څه په يو بل څه يا خپل ځان څيره کيږي. چې لومړی يې څيره کوونکی او دويم يې څيره ده يعنې دوه مجهولې يا واريابلې دي، چې يوه په بله څيره کيږي. لومړی خپلواک دئ او دويم يې د لومړي په واک کې دی، نو له دې امله م عربي تابع بللې، يعنې دا د فنکشن تابع ده، چې موږ به يې هم دا ناسم نوم وکاروو، چې ګران شميرپوهان راته په قهر نه شي.

که زما په دې ليکنه کې څيرونه راځي، نو هغه يې زموږ په ناسمه توګه همغه تابع ده. دا مو مو پوهيږم، چې له پامه نه لويږي.

ما په يو ځل ډېر ةتابونه وژباړل او وليکل، چې ليکنيز تاتيکاوي به ولري. د هغې به راته بخښنه وکړی. دا څه چې تاسو ته وړاندې کيږي، پوره :تور دي او دې ته دې رياته پامرنه وشي.

دا زما ټولې ليکنې به تر يوې اندازې ستونځې ولري، خو باور وکړی، چې غوټې پسې وهئ په لاس درځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مننه: د   ټولنې او په ځانکړي ډول د هغې د مشر ښاغلي ډاکتر يحى وردګ څخه زياته مننه، نه داچې زما کتابونه يې [اپ ته ورسول بلکه په دې کار کې يې بط سارې هڅې کړي او بې له شکه يې خپلو يوادوالو ته ستر خدمت کړي، کور دې ودان وي، لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي او د لا ډېرې برياوو په هيله دې زموږ دعا ورسره مل وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاینیز(کربنیز یا خطي) الجبر

بنسټیزجوړښتونه / ګروپونه او تنونه

Grups and fields

ګروپ

د یوه ګروپ $(G,\diamond)$ لاندې یوه ډېری G پوهیږو، په هغې چې یو دوه بیزه کارونه یا عملیه $\diamond$ داسې پیژندل ولري یا تعریف شوې.

$$\diamond : G \times G \longmapsto G\,,$$

دا په دې مانا، چې هره جوړه (a,b) د $a,b \in G$ سره د $a \diamond b \in G$ یو توکی باندې تنظیم دی. برسیره پردې لاندې خویونه باید باور ولري:

Assoziativität: اسوښیاتیو والی یا اسوښیاتیو قانون

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c) \qquad \forall a,b,c \in G$$

neutrale Element ناپیلی توکی: یو یواځنی ټاکلی ناپیلی توکی $e \in G$ شته دا په دې مانا ، چې

$$e \diamond a = a \diamond e = a \qquad \forall a \in G$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Inverses Element مخامخ يا په ضد توکی يا برعکس توکی: هر توکي $a \in G$ ته يو يواځنی ټاکلی مخامخ يا يه څټ يا برعکس توکی $a^{-1} \in G$ شته د سره $a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$

ګروپ کموتاتيو يا د ابل (ابل Abelد شميرپوه نوم دی) ګروپ بلل کيږي، که کارونه $\diamond$ کموتاتيو وي:

$$a \diamond b = b \diamond a \qquad \forall a, b \in G\,.$$

له اړوندتوب څخه ليدل کيږي، چې کومه کارونه کارول کيږي، نو زيات وخت د $(G, \diamond)$ په ځای فقط G ليکل کيږي.

په باندي(بيجکتيو) رييل فنکشنونه يا توابع(بلواک) bijective real Functions

د $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ د $\circ$ يو په بل پسې کاروني له مخې يو ګروپ جوړوي.

ساده ازمايل کيدی شي، چې يو په بل پسې ايښونه اسوشياتيو ده :

$$((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) = (f \circ (g \circ h))(x)\,.$$

ناپيلی توکه په روښانه توګه لاندې فنکشن دی

$$e: \quad x \to x$$

بالاخره هر په باندي بلواک لپاره يو په څټ بلواک شته دی

$$f^{-1}: \quad f(x) \to x\,.$$

يو په بل پسې ترنه کموتاتيو نه ده : د بيلګې په توګه لاندې لرو :

$$f: \ x \to 2x\,, \quad g: \ x \to x+1$$

$$f \circ g \neq g \circ f\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(g(x)) = 2(x+1) \neq 2x+1 = g(f(x))\,.$$

لاندې ګروپونه

د يوه ګروپ $(G,\diamond)$ لپاره $(U,\diamond)$ لاندې ګروپ بلل کيږي، که U د G برخډېرۍ وي او $(U,\diamond)$ پخپله يو کروپ جوړ کړي

ددې لپاره ، چې و ازمايو ، چې ايا U و ترړنې $\diamond$ ته يو ګروپ جوړوي ، که نه، نو ازمايو ، چې U و نښلونې $\diamond$ ته او د په ځتې جوړښت ته بنده ده. ياني باور لري:

$$a, b \in U \;\Rightarrow\; a \diamond b \in U \text{ او } a \in U \;\Rightarrow\; a^{-1} \in U$$

ګڼونډېرۍ يا د اعدادو سټ the set of numbers

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathbb{Z}$ و جمعې(زياتون) ته يوکموتاتيو ګروپ دی، خوندي لرنې يا اينکلوزيون ته ټول ګڼونه و $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته يو لاندې ګروپ جوړوي او راشنل ګڼونه و $\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته او رييل ګڼونه وکمپلکس ګڼونو ته يو لاندې ګروپ جوړوي.

که چيرې صفر لرې شي، نو ضرب يا ځله ونه هم يو ګروپ جوړښت تعريفوي:

$$\mathbb{Q}\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}\,.$$

تړاو جدول يا تړاوتخته

کارونه$\diamond$ په پاې ګروپ $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ باندې کيدی شي د تړاوماتريکس

$$A: \quad a_{i,j} = g_i \diamond g_j$$

له لارې روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې څيرونه (بې له پرموتېشن يا بدلون څخه) آول تړاوجوړښتونه ښايي د يوه ګروپ لپاره د $n \le 4$ سره :

$n=2$

◇	e	a
e	e	a
a	a	e

$n=3$

◇	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$n=4$

◇	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$n=4$

◇	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

دا ګروپونه ټول ابل ګروپونه دي، لکه د ماتريکس A د سيومتري ($a_{i,j} = a_{j,i}$)چې ليدل کيږي.

لومړی نااېل ګروپ شپږ توکي لري او د $\{1,2,3\}$ توکو د پروتېشن له مخې پېژندل کېدی شي

Permutations پرموتيشونونه ((د توکو يا اعدادو) ځای بدلون)

د په خوښه ډېری M لپاره د بيجکشن (په کې څيرونه يا په کې فنکشن) لاندې له M په Mکې ، چې کمپوزيشن کارونه يا څيرونه يی د کاروني په څير وي، يو ګروپ پوهيږوو داسې په نامه د M سيومتري ګروپ.

لنډ : د M په M کې څيروني ته پرموتېشن يا بدلون وايو.

که $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ وي، نو د سيومتري ګروپ S_n څخه غږيږو، چې ګراد يا درجه يې n وي.

د S_n ډېری د π توکي $n!$ پرموتيشن يا بدلون بلل کيږي او داسې يې ليکو

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرمېوتیشنګروپ په ټولیزه توګه کموتاتیو نه دی، لکه د لاندې بیلګې څخه لیدل کیږي

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

د ځای بدلنون (پرموتیشن) څیوکلیکي یا تل بیرته راګرځیدونی لیکندود:

پرموتیشنونه داسې په نامه څیوکلیکي لیکندود له لارې هم ورکول کیږي..یو څیکلوس یا تل بیرته راګرځیدنه د یوه توکي او د هغه له څېرو، چې ډیرځله د بدلون یا پرموتیشن له لارې منځ ته راځي، جوړه ده، تر څو چې بیرته هغه پیل توکي یا وتونتوکي ته ورسیږي. د هغو توکو څخه، چې په لومړي تلبېرته راګځیدنې کې منځ ته نه راځي، نور څیوکلونه جوړیږي ، تر څو ټول توکي رامنځ ته شي. څیکلونه د توکو د ګڼون(تعداد) ټیټیدونکي یا لوېدونکي ډول تنظیم کیږي او په کرږو نوکانوکې یو پر بل پسې لیکل کیږي. هغه څیوکلونه یا تلبیرته راګرځیدوني ، چې اوږدوالی یې ۱ وي نه لیکلکیږي.

د بیلګې په توګه دی

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1\,4\,6)\ (2\,3)\ (5)$$

همداسې

$$\pi = (1\,4\,6)\ (2\,3)\ .$$

د پرموتیشن ترانسپوني کوونه یا په بل ډول لیکنه او سیګنوم

یو ترانسپوزیشن (ځای بدلون)

$$\tau = (j\ k)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د j او k بدلون دی. ددې ساده یا بنسټیز پرموتیشن ترڼې سره دا پرموتیشن π داسې انځورېدی شي:

$$\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m \,.$$

دلته برابرازښتوالی (جوړه یا ناجوړه m) یواځنی ټاکلی دی، او

$$\sigma(\pi) = (-1)^m$$

د پرموتیشن مخ نخښې یا د پرموتاشن زیګنوم π په څیر π ټاکو یا تعریفوو.

د

$$\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m = \pi \in S_n$$

لپاره او د $k = \pi(n)$ سره دی

$$\tilde{\pi} = (k, n) \circ \pi \in S_{n-1} \,,$$

ځکه چې د ترانسپوزیشن کمپوزیشن سره n کره په ځای نیول کیږي یا ځای په ځای پاتیږي. اینډوکتیوInduktiv (د ځانګړي په تولیز پایونه) کیدی شي و نیول شي یا فرض شي، چې برابرارزښتوالی یا پاریټي د$\tilde{\pi}$ په اینډوڅیري توټه ونه کې یواځنی ټاکلې ، پسې د$(-1)^m$ مخنخښه.

ددې لپاره، چې د پرموتیشن

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

سیګنوم و ټاکو، نو

$$(\pi(1), \ldots, \; \pi(6)) = (6, \; 5, \; 3, \; 1, \; 2, \; 4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترانسپوزيشن سوکڅيسيو(sukzessiv) پل په پل يو بل پسې) د کانوني لړۍ پرلپسې په ځير ليکنې ته بيايو:

$$(1\ 6):\qquad (1\ 5\ 3\ 6\ 2\ 4)$$

$$(2\ 5):\qquad (1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4)$$

$$(4\ 6):\qquad (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)\,.$$

په دې پسې يا له دې امله

$$(4\ 6)\circ(2\ 5)\circ(1\ 6)\circ\pi$$

کټمټوالی يا ايدنټيک ده، همداسې

$$\pi=(1\ 6)\circ(2\ 5)\circ(4\ 6)$$

او

$$\sigma(\pi)=(-1)^3$$

الترناتيو يا بديلي سرى کړى شي ځويکليکي ليکډوله وکارول شي:

$$\pi=(1\ 6\ 4)\ \ (2\ 5)\ \ (3)\ .$$

ځکه چې د k اوږدوالي يوه ځيوکلوس τ لپاره $\sigma(\tau)=(-1)^{k-1},$ دی

$$\sigma(\pi)=(-1)^2\cdot(-1)^1\cdot(-1)^0=-1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مودولوس Modulus

(که دوه ګڼونه ۱۳ او ۵ ولرو او ۱۳ په ۵ وویشو، نو لاس ته ۲ راځي د ۳ پاتې سره. دا داسې ليکو:

13 : 5 = 2

پاتې 3

ليکلی شو 0 = 5 : (13-3) دا په دې مانا چې ګڼ ۵ ګڼ13-3 وېشي

پيژند (تاکونکی يا تعريف) که تولګڼونهx او y او يو طبيعي عدد يا پيداښتي ګڼ a ولرو ، نو وايو ،، x کونګروانيځ yمودولو a (mod a) ده،، په نخښه x≡ymod a ، که x≡ymoda . نه وي، نو واي چې : x د y سره کونګروانيځ مودولو a(moda) نه ده ،،يعني x≢ymod a

مودولوس Modulus

لرو a > 0 او $x \in \mathbb{R}$. د $x \bmod a$ (لوستل : x مودولو a)لاندې په a باندې د x وېشنې پاتې پوهيږو، دا په دې مانا، چې

$$x \bmod a = x - na \in [0, a)$$

د يوه تولګڼn لپاره . که باور ولري

$$x \bmod a = y \bmod a\,,$$

نو x او y کونګروانيځ مودولو a بلل کيږي.

پاتيتولګی(باقي-)(مودولو) modulo n

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېرئ $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ د ابل ګروپ جوړوي د زياتون يا جمعې

او د $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} \bmod n$ سره په نخښنه کيږي.

پام دې وي، چې ضرب modulo n په $\mathbb{Z}_n$ د ګروپ جوړښت نه تعريفوي، خکه چې 0 په څټ توکی نه لري.

د دې روښانه بيلګې $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ په بنسټ اسان ارماښنت کيدی شي، چې زياتون يا جمعې، همداسې کمون يا تفرق د مودول – کاروني يا عمليې سره زغموږ دي.

د بيلګې په توګه دی

$$1 + 3 \bmod 4 = 0, \quad 0 - 2 \bmod 4 = 2$$

او داسې نور

سره له دې ځل مودولو ۴ (modulo 4) مو د ګروپ تيوري ته نه لاربنودوي، خکه چې

$$1 \cdot 2 \bmod 4 = 3 \cdot 2 \bmod 4 = 2 .$$

دا د ناپيلي توکې د يوائيوالي سره په مخامخوالي يا تضادګې پروت دی

بدن(جسم يا تن يا پټی Field)

يوه ډېرئ (سټ) چې په هغه کې يوه جمعه ``+,, او يو ضرب ``·,, تعريف وي، بدن يا پټی يا ورشو بلل کيږي، که لاندې خويونه په کې باور ولري:

اول – د ګروپ د جمعې يا زياتيز جوړښت: $(K, +)$ يو ابل ګروپ دی د توکی(سفرتوکي) سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې د ټولو $a, b \in K$ لپاره باور لري.

$b + a$	$=$	$a + b$
$a + (b + c)$	$=$	$(a + b) + c$
a	$=$	$a + 0$
$0\,,$	$=$	$a + (-a)$

دويم – دلته $(-a)$ د a په څېر يا معکوس توکی دی.

دريم – د ضرب ګروپي جوړښت: $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ يو د ابل ګروپ دی د ناپيلي توکي 1 سره(يوي توکی يا که غواړئ واحد توکی) دا په دې معنا چې د ټولو $a, b, c \in K \backslash \{0\}$ لپاره باور لري:

چيرته چې $(-a)$ و a ته په څېر يا پرعکس توګی دی.

د ضرب ګروپي جزړښت : $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ يو ابلګروپ دی د ناپيلي توکي (يوي توکی)، دا په دې معنا چې د تولو $a, b, c \in K \backslash \{0\}$ لپاره صدق کوي

a.b=ba

(a,b).c=a.(b.c)

a.1=a

1=$a \cdot a^{-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې a^{-1} د a په څټ يا برعکس توکی دی.

ديستريبيوتيو قانون: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ د ټول $a,b,c\in K$ لپاره.

د ريښنتونو اعدادو $\mathbb{Q}$ ډېرۍ، د حقيقي اعدادو $\mathbb{R}$ ډېرۍ او د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ ډېرۍ

د شميرني قاعده يې سملاسي د اړونده تړني له لارې لاس ته راځي. صفرتوکی يې 0 او يويتوکی يې 1.

همداسې يې د کمپلکس عدد $z=x+\mathrm{i}y\neq 0$ يوي توکی نسبت و ضرب ته $w=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}\,,$ دی، ځکه چې لرو:

$$z\cdot w=(x+\mathrm{i}y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-\mathrm{i}^2y^2}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-xy+yx}{x^2+y^2}=1+\mathrm{i}0\,.$$

لومړني تنونه يا پټي يا ورشو

د هر لومړني عدد p لپاره $\mathbb{Z}_p=\{0,1,\dots,p-1\}$ د ډېريو يو تن دی د د جمعې او ضرب مودولو p سره.

د په څټ – يا برعکس توکي شتون پورې ، نسبت و ضرب ته د تنونو لپاره همدا اوس په ټول اعدادو کې او د باقيتولګيو لپاره به ميراث پاتي شي.

د $a\in\{2,\dots,p-1\}$ لپاره کيدی شي a^{-1} په لاندې توګه جوړ شي. لومړی سړی په پام کې نيسي چې، $a^i\neq 0 \bmod p \quad \forall i\in\mathbb{N}\,.$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $a^i = np$ وی، نو د لومړي تن تجزيې څخه به ولرو، چې په p ويشل کيږي، څه چې د $a < p$ له امله ناشونی دی. که اوس

پرلپسې $a^i \bmod p, \quad i = 0, \ldots, p-1$ په پام کې ونيسو

، نو بايد کم له کمه يو پاتې دوه واره رامنځ ته شي، يعني

$$a^{i_1} = a^{i_2} \bmod p\,, \quad i_1 < i_2$$

به ضدق وکړي. له دې سره به وي:

$$a^{i_2-i_1} = a^{i_2-i_1-1}a = 1 \bmod p\,,$$

له کوم سره به چې a ته په برعکس توکی پيدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې برعکس توکي دي

2^{-1}	$=$	$3 \bmod 5$
3^{-1}	$=$	$2 \bmod 5$
4^{-1}	$=$	$4 \bmod 5\,.$

که $a^i = np$ وی، نو د لومړني ضريب تجزيې څخه به مو لرودی، چې p وېشي، څه چې د $a < p$ له امله ناشوني دي. که اوس پرلپسي يا

$a^i \bmod p, \quad i = 0, \ldots, p-1\,,$ په پام کې ونيسو، نو بايد کم له کمه يو باقي دوه واره رامنځ ته شي، پس $a^{i_2-i_1} = a^{i_2-i_1-1}a = 1 \bmod p\,,$ به صدق وکړي د کوم سره به چې د a برعکس توکی پيدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې په ځټ – يا برعکس توکي دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2^{-1} = 3 \bmod 5$$

$$3^{-1} = 2 \bmod 5$$

$$4^{-1} = 4 \bmod 5\,.$$

د دې سره د بېلګې په توګه $\frac{(2+4)}{3} \bmod 5 = \frac{1}{3} \bmod 5 = 2$ همغږيز دی له دې لاندې سره.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \bmod 5 &= 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \bmod 5 \\ &= 4 + 3 \bmod 5 \\ &= 2\,. \end{aligned}$$

ګالويز – بدن Galois-Körper

تن$GF[2^2]$ د 4 توکو سره د جمعي او ضرب د ترنو له لارې کیدی شی ورکړل شي:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b

(c) ketabton.com: The Digital Library

a	a	b	0	1	a	0	a	b	1
b	b	a	1	0	b	0	b	1	a

دا مخ ته پروت جوړښت اصول داسې ساده نه دی، لکه په لومړنیو تتونو $\mathbb{Z}_p$ کې او د گالویز له خوا پیدا شوي دي. دا په تړلیږه توگه کېدی شي د تنړنړ ځخه د p^ℓ توکو سره $\ell \in \mathbb{N}$، د په خوښه p لپاره لومړنی عدد لپاره اجرا کړي یا سرته ورسوي، او کېدی شي و ښوول شي چې په دې توگه ټول تتونه لاس ته راوړي.

په گروبونو کې تورنی (لکه د مسابقې لپاره جمتو کیدو گروپ)

په کابل، غزني او ننگرهار کې په څلورو مهالوېش(وختونو) د نهو ډلو په منځ کې مسابقه بيل کيږي. د لته دې ،، هر یو د هر یو په مقابل کې،، لوبه وکړي. دا یه دې معنا چې په هر مهالوېش دې درې گروپونه د هر درې ډلو ځخه لوبه وکړي، چې په هرو دې درې ځایونو کې دې لوبه وشي. ستونځی په دې کې پرتې دي، چې یو بل باید سره غوځ یا قطعه نه کړي، هره جوړه د $3 \cdot 4$ گروپونو کې باید یو ځل رامنځ ته شی

د شمیرپوهنې له مخې دا مسأله په لاندې ډول فرمولولی شو: دا 3 توکیزې ډېری

$$S_{0,k} \cup S_{1,k} \cup S_{2,k} = \{1, \ldots, 9\}, \quad k = 0, \ldots, 3$$

دې وټاکل شي، چې د دوه ډېریو غوڅی ماکسیمال یو توکی خوندي ولري.

د دې شرایطو سره د دې مخه نیول کیږي، چې د گروپونو ډېری چې د لوبو ورځې یې مختلفې دي، گډه د لوبدلو جوړه خوندي ولري..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $S_{j,k}$ ډېرى د لومړنى تن $\mathbb{Z}_3$ په مرسته جوړ پدلاى شى.. د لته د لوبډلي نمرې $(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$ سره په 9,...,1 د نهه توکيزه ،، پاى سطحي،، دټکو نخښنه کېدی شي او دا په نخښنه شوي ،، پاى سطحه،، ډېرى د دې سطحي د کرښوسره په نخښنه کېدی شي:

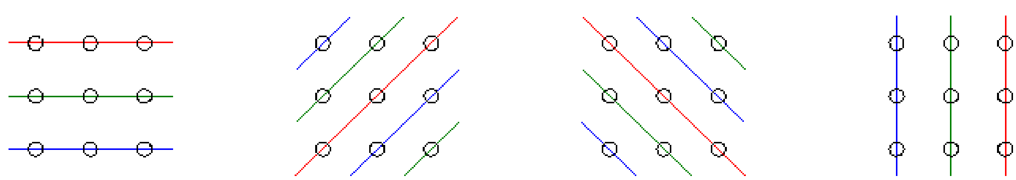
$$S_{j,k} = \{(\alpha, k \cdot \alpha + j \bmod 3) : \alpha = 0,1,2\}, \quad ($$

کرښه د $k = 0,1,2)$ جګېدني(سره

$$S_{j,3} = \{(j, \alpha) : \alpha = 0,1,2\} \quad ($$

ولاړه يا عمود کرښه) .

داګروپ وېشنه په لاندې شکل کې ليدوړ ده:



همدا مسأله د 16 تيمونو سره ده ، 4 ښارونو او پنځه مهالوېش سره په ورته ډول حل کېدی شي. سرى 4-توکيزه ګالويز تن $GF[2^2]$ او لاندې ګروپ وېش لاس ته راوړو:

	لوبځاى1	لوبځاى2	لوبځاى3	لوبځاى4
لومړى لوبورځ	1,2,3,4	5,6,7,8	9,10,11,12	13,14,15,16
2-مه لوبورځ	1,6,11,16	5,2,15,12	9,14,3,8	13,10,7,4
3 -مه لوبورځ	1,10,15,8	5,14,11,4	9,2,7,16	13,6,3,12
4 -مه لوبورځ	1,14,7,12	5,10,3,16	9,6,15,4	13,2,11,8

(c) ketabton.com: The Digital Library

4,8,12,16	3,7,11,15	2,6,10,14	1,5,9,13	5 -مه لوبورځ

په ټولیزه توګه د لیل د q^2 لوبډلو او q ښارونو لپاره دلیل شوونی دی، هلته چېq د یوه لومړني عدد توان دی، ځکه چې د داسې یوه عدq لپاره تن GF(q) شتون لری.

وکتورفضا یا وکتوري فضا

یو ابل ګروپ $(V,+)$ وکتورفضا په یوه تن K یا K -وکتورفضا بلل کیږی، که یو سکالار ضرب ``·,, تعریف وي، چې $(\lambda,v)\in K\times V$ په ضرب $\lambda\cdot v\in V$ تنظیم او لاندې خویونه ولری..

د ټولو سکالار $\lambda,\lambda_1,\lambda_2\in K$ او ټولو وکتورونو v، $v_2\in V$، v_1 لپاره صدق کوی:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\cdot v = \lambda_1\cdot v+\lambda_2\cdot v$$

$$\lambda\cdot(v_1+v_2) = \lambda\cdot v_1+\lambda\cdot v_2$$

$$(\lambda_1\cdot\lambda_2)\cdot v = \lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot v)$$

$$1\cdot v = v\,.$$

که $K=\mathbb{R}$ یا $K=\mathbb{C}$ وی، نو سړی د یوه حقیقي همداسې کمپلکس وکتورفضا غږیږو او په ټولیزه توګه د سکالار ضرب لپاره ټکي ځخه تېرېږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي، چې د جمعي علامه د V په همداسې په K کې کارول کيږي. همداسې ضرب هم په K کې د ضرب لپاره کارول کيږي. پای

د تعريف سره سم په ځانګړي ډول په وکتورفضا کې د ګروپ اکسيومونه ضدق کوی:

اسوشياتيو قانون:

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

ضفر توکی(صفروکتور) : تيک يو توکی $0 \in V$ د $v + 0 = v$ سره شتون لري ، د ټول $v \in V$ لپاره.

نسبت و جمعي ته په ښت – يا معکوس توکی: د ټولو $v \in V$ لپاره تيک يو $-v \in V$ شتون لري د لاندې سره:

$$v + (-v) = 0$$

د جمعي بدلون قانو:

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

غوښتونکی شرايط تنظيموي، چې جمعه، کمون يا تفريق او ضرب دا ورسره بلد شميرقوانين پوره کوي.. سړی داسې کړی شي چې ضرب سر ته ورسوي:

$$\left(\sum_i \lambda_i\right) \cdot \left(\sum_j v_j\right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \cdot v_j .$$

سربيره پردې د مخ نخښې قانون صدق کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-(-v) = (-1)\cdot(-v) = v, \quad -\left(\sum_i v_i\right) = \sum_i -v_i\,.$$

د Gard ≤ n (درجې) پولينوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (a_i \in \mathbb{C}),$$

يو حقيقي (کمپلکس) وکتور فضا جوړوي،، د کوم سره چې جمعه او سکالار ضرب په ورته نړدې ډول تعريف دي:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\lambda p)(x) = \lambda p(x)\,.$$

د وکتورفضا خويونه ساده تصديق کيدلی شي.

په پام کې لرو چې پولينوم د n درجې سره، دا په دې معنا چې د $a_n \neq 0$ سره وکتورفضا نه جوړوی. د جمعې جوړول کيدی شي د درجې کموالی ته لاربنود کړي. د بيلګې په توګه دی:

$$(2x - x^2) + (3 + x^2) = 3 + 2x\,.$$

پای

حقيقي پرلپسي (a_n) د $n \in \mathbb{N}$ سره يوه حقيقي وکتورفضا د عمليې سره جوړوي

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \quad \lambda(a_n) = (\lambda a_n)\,.$$

که سربيره پردې و غوښتل شي، چې ايا د وکتور سترکچر يا جوړښت خرابيدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بېلګې په توګه يوغبرېزې پرلپسې وکتور فضا نه جوړوی. د مونوتون پرلپسيو جمعه اړيين نه ده يوغبرېز وی، لکه دا لاندې بېلګه ښايي:

$$(4n) + (-n^2)$$

برعکس به بندوالی یا محدوديت يو منل شوی خوی وی..

پای

د n - ګوني وکتورفضا

د K تن لپاره n -ګوني یا n-وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in K$$

فضا دا K وکتورفضا K^n د کمپوننت ډوله تعریف شوي جمعي او سکالار ضرب سره، دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

او

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $a_i, b_i, \lambda \in K$ لپاره .

په زياتو حالاتو کې ساده دی چې nګونی يا nتوپل د ليکې وکتور په څېر

$$a = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{t}}$$

همداسې

$$a^{\mathrm{t}} = (a_1, \ldots, a_n)$$

وليکل شي. د ترانسپوزيشن سيومبول ``t ,, سره د ستاندارد قرارداد څخه د متو وکتور په حيث توپيرېږي.

پای

لاندې فضا يا برخه فضا sub space

د يوه K -وکتورفضا V پيرخه ډېرى U، چې د په V کې تعريف شوې جمعې او سکالار ضرب سره پخپله وکتورفضا جوړوی، د V لاندې فضا يا برخه فضا بلل کيږي.

برخه فضا U زيات وخت د V توکو شرايطو سره تعريفيږی:

$$U = \{v \in V : A(v)\},$$

د کوم سره چېA يوه په نخښنه کوی، چې د ټولو $v \in V$ لپاره بايد پوره وی.

د دې لپاره چې و ازمايو چې ايا U د V لاندې فضا ده، کفايت کوي چې وښايو چې U نسبت د جمعې او سکالار ضرب سره تړلې ده:

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U .$$

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U .$$

لیکونکي اپپ، کیمرلې

برخفضاوې زیات وخت د ورزیاتو(برعلاوه؟) ځانګړ شوو خویونو له لارې منځ ته راځي. که د حقیقي توابعو $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ,$ وکتورفضا په پام کې ونیسو، نو د بېلګې په توګه جوړه توابع $f(x) = f(-x)$ د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره یوه برخفضا جوړوی.
نورې بیلګې همداسې معکوسې بېلګې په لاندې جدول کې ورکړې شوي دی.

لاندې فضا	خویونه
هو	ناجوړه
ja هو	بند یا مخدود
نه	یوغږیز
هو	نابرېکیدونکي
نه	مثبت
هو	ګربنیز

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه K -وکتورفضا د هر وکتور $d \neq 0$ لپاره د صفر څخه تیرېدونکي کرښه $v = \lambda d, \quad \lambda \in K$ یوه لاندې – یا برخفضا جوړوي.

په هر حالت یوه کرښه چې له صفر 0 نه تیریږي، لاندې یا برخفضا نه ده. د بېلګې په توګه

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

$(1,0)^t$ په کرښه

پرته ده، مګر $(2,0)^t$ نه.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

ګرښیز کمبینیشن Linearkombination

په یوه K - وکتورفضا V وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_m$ لپاره سرې

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

د سکالارو $\lambda_i \in K$ سره د وکتورونو v_i ګرښیز کمبینیشن بولي یا نوموي.

په تولیزه توګه د $W \subset V$ لپاره د W څخه کرښیز کمبینېشن لاندې ، د W څخه د ناپای ډېرو وکتورونو یو کرښیز کمبینېشن پوهیږو.

لیکونکي: اېپ، کیمرلې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتور $v = (1,2,3)^t$ د وکتورونو $v_1 = (3,4,5)^t,\ v_2 = (1,1,1)^t,$ یو کرښیز کمبینېشن دی، ځکه چې $v = v_1 - 2v_2$.

د دې برعکس $v = (1,0)^t$ د وکتورونو $v_1 = (0,1)^t,\ v_2 = (0,2)^t,$ کرښیز کمبینېشن نه دی.،ځکه چې د v_1 او v_2 کرښیز پولینوم بڼه $(0,*)^t$ لری..

بالاخره کېدی شي $v = (0,0,0,0)^t$ په مختلفو ډولونو د وکتورونو

$$v_1 = (1,1,0,0)^t,\ v_2 = (0,2,2,0)^t,\ v_3 = (0,0,3,3)^t,\ v_4 = (4,0,0,4)^t$$

کرښیز کمبینیشن په څیر انځور شي:

$$v = \lambda(12v_1 - 6v_2 + 4v_3 - 3v_4)$$

د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

کرښیزه هیولې یا سپاین یا سمڅ Lineare Hülle(span)

یادونه: د په یوه فضا کې د خوندې شیالنو او د باندې په منځ کې یو دیوال جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د K - وکتورفضا V د وکتورونو $v_1, \ldots, v_n$ ټولو ګرښيزو کمبينېشنونو ډېرۍ د وکتورونو v_i کرښيزه سپاين يا هيولې(يو څه يا کوتی يا ...و چې په فضا کې يو ځا رابندوي (ژباړی)) بلل کيږي او داسې يې په نخښه کوو:

$$\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n) = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot v_i : \lambda_i \in K\}.$$

په ورته توګه سړی د $\mathrm{span}(U)$ وکتورونو د يوې ډېرۍ U لپاره د U د ټولو کرښيزوکمبينېشنونو ډېرۍ تعريفوی..

د هرې برخډېرۍ $U \in V$ لپاره د V يو برخفضا ده. $\mathrm{span}(U)$

ليکونکي: اپ، کيمرلې

که په $\mathbb{R}^3$ کې دوه مختلفې د سرچينې کرښې g_1 او g_2 په پام کې ونيسو، د بېلګې په توګه

$$g_1 : x = \lambda_1(1,0,0)^t,\ g_2 : x = \lambda_2(0,1,0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

دا هريو د لوريزو وکتورونو کرښيزه سپاين يا ګرښيزه هيولې دي، دلته

$$v_1 = (1,0,0)^t,\ v_2 = (0,1,0)^t\,.$$

نو د وکتورونو v_1 او v_2 کرښيزه هيولې يا سپاين يوه سطحه $E = \mathrm{span}(v_1, v_2)$ ده، چې کرښې g_1 او g_2 خوندي لري، پس دلته

$$E : x = \lambda_1(1,0,0)^t + \lambda_2(0,1,0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\ ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې

$$E = \{x : x_3 = 0\}$$

ليکونکي اپ، هيوليک

ننوتی – يا محدب کمبينيشن Konvexkombination

په يوه حقيقي وکتورفضا V کې يو کرښيز کمبينيشن

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

د $\lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$ سره د وکتورونو $v_i \in V$ کنوکسکمبينيشن بلل کيږي.

ليکونکي اپ، هيوليک

ننوتی يا محدبه هيبولې يا سپاين(المانی ويينه :شپاين)Konvexe Hülle

د يوه حقيقي وکتورفضا V د يوې برخدېری M محدبه هيولې د ټولو محدب کمبېشنونو

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \qquad (\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1)$$

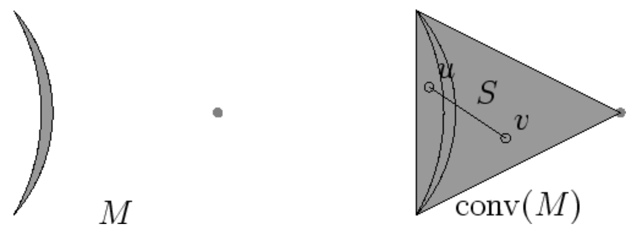
دېری ده د $v_i \in M$ سره او د $\operatorname{conv}(M)$ سره ليکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچيز یا هندسي $\operatorname{conv}(M)$ خورا کوچنۍ ډېرۍ ده، چې M خوندی لري، کومه چې د هرو دوه توکو u,v لپاره د هغو تړنکرښه

$$S = \{\lambda u + (1-\lambda)v : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

هم خوندی لري



لیکونکي اپ، هیولیک

حقیقي- یاریښتونی سکالار ضرب Reelles Skalarprodukt

په یوه حقیقي وکتور فضا V باندې یو سکالارضرب یو تابع

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

ده، دلاندې خویونو سره:

مثبتوالی :

د $v \neq 0$ لپاره. $\langle v, v \rangle > 0$

سیومتري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

کرښيزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

دلته $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{R}$ په خوښه وکتورونه هرداسي سکالار.

د سيومتري په بنسټ يو حقيقي سکالار ضرب د دويم دليل په بنسټ هم کرښيز دی، يعنې په V يو بي کرښيزه Bilinearform بڼه.

ليکونکي اپ، هيوليک، کرايخ

سکالار ضرب Skalarprodukt

په يو کمپلکس وکتورفضا V يو سکالار ضرب يو فنکشن

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

دی، د لاندې خويونو سره:

مثبتوالی:

$\langle v, v \rangle > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

مائل سيومتري:

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کربنيزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ همداسې $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوبنه وکتورونه همداسې سکالار دي.

مايل سيومتريکSchiefsymmetrie :

کربنيزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوبنه وکت.ورونه همداسې سکلار دي

د مائل سيومتري په اساس يو کمپلکس سکالارضرپ نسبت و دويمي متحولې ته کربنيز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle + \overline{\varrho} \langle u, w \rangle .$$

فقط د حقيقي سکالار لپاره کمپلکس کونجوګېشن بې مفهومه دی.

ليکونکي اپ، هيوليک، کرايخ

دا ترې لاس ته راغلې اسيومتري اړيين ده، چې د کمپلکس سکالارضرب مثبتوالی تضمينوي. د بېلګې په توګه دی:

$$\langle \mathrm{i}v, \mathrm{i}v \rangle \neq \mathrm{i}^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $v \neq 0$ لپاره.

له دی زيات صدق کوي:

$$\langle iv, iv \rangle = (i\bar{i})\langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle > 0.$$

مثبتوالی اړيين دو چی له $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ لارې ئو نورم تعريف کړاي شو.

ليکونکي هيوليګ، هيورنر

د وکتورونو $x, y \in \mathbb{R}^2$ لپاره يوه دحقيقي سکالار ضربونو د ممکنه تعريفونو لړی تر څېړنې نيسو. په لاندې جدول ورکړ شوي، چې کوم خويونه پوره دي.

خويونه	سکالار ځل
ټول	$10x_1y_1 + x_2y_2$
کرښيزوالی	x_1y_2
مثبتوالی، سيومتري	$\lvert x_1y_1\rvert + \lvert x_2y_2\rvert$
سيومتري	$x_1x_2 + y_1y_2$

فقط لومړی تعريف ټول غوښتوني شرايط پوره کوي. په کملکس وکتورفضا $\mathbb{C}^2$ کې په هر ډول دا حالت نه دی، هم مثبتوالی او هم مائل سيومتري پوره نه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle(\mathrm{i},0),(\mathrm{i},0)\rangle = \qquad 10\mathrm{i}^2 = -10 < 0$$

$$\langle(\mathrm{i},0),(1,0)\rangle = 10\mathrm{i} \neq \overline{\langle(1,0),(\mathrm{i},0)\rangle} = -10\mathrm{i}$$

په داسې حالت کې چې د دويم Arguments اجزا وې يا کمپوننتونه کمپلمس کنجوګيرت کړي، پرابلک له منځه تلاي شي. تعريف

$$\langle x, y\rangle = 10x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

په کمپلکس حالت غزونه راکوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د کوشي-شوارخ – نامساوات(نابرابرون)

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

سکالار ضرب کېدی شي د اسوڅياتيو قانون له مخې تخمين شي:

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u||v|, \quad |w| = \sqrt{\langle w, w\rangle}\,.$$

مساوات تيک هلته صدق کوي، که صدق ولري $u \parallel v$.

که $v = \lambda u$ وي، لکه څنګه چې غوښتل کيږي مساوات صدق کوي.

د u همداسې د v ضرب د يوه سکالار سره نامساوات تغير نه خوري. کېدی شي ونيسو(فرض کړو) چې صدق کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|u|^2 = |v|^2 = 1\,.$$

که د سکالار ضرب سره (دليل حقيقي حالت په بر کې نيسي) دي

$$\langle u, v\rangle = r\exp(\mathrm{i}\varphi)\,,\quad r > 0\,,$$

د $\lambda = \exp(\mathrm{i}\varphi)$ سره د ناغبرګو(ناموازي) وکتورونو لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} 0 &< \langle u-\lambda v, u-\lambda v\rangle \\ &= 1+\lambda\bar{\lambda}-\lambda\overline{r\exp(\mathrm{i}\varphi)}-\bar{\lambda}r\exp(\mathrm{i}\varphi) \\ &= 1+1-r-r\,. \end{aligned}$$

له دې سرره $r = |\langle u, v\rangle| < 1$ باور لري، ده په دې معنا چې غوښتنه مو.

نورم Normر ډوليزوال

په يوه حقيقي يا کمپلکس وکتورفضا V نورم يا تابع $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ ده

د لاندې خويونو سره:

مثبتوالی:

$\|v\| > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

هوموګينيوالی يا برابيرډوليزوالی Homogenität :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

درېګوډې (مثلث-) نامساوات:

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$$

د لته u, v په خوښه وکتورونه دي او λ یو په خوښه سکالار.

دد نورم $d(u,v) = \|u-v\|$ په مرسته کېدی شي د دوه وکتورونو ترمنځ واټن تعریف شي.

د سکالار ضرب نورم Skalarprodukt - Norm

په یوه حقیقي یا کمپلکس وکتورفضا V د یوه سکالار ضرب سره ، نورم له

$$|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}, \quad v \in V$$

سره په یوه معنا دی.

مثبتوالی او هوموګینیټي (ورته والی) تړلې د سکالارضرب د ورته خویونو څخه لاس ته راځي. د مثلث مساوات له

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}}_{\in\mathbb{R}} + \langle v,v\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\leq |u|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + |v|^2$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$$

$$= (|u| + |v|)^2$$

څخه د ريښې نيونې له لارې لاس ته راځي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

ماکسيموم - نورمMaximum-Norm

د وکتورونو فضاو $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ لپاره

$$\|z\|_\infty = \max_i |z_i|$$

ماسکيموم – نورم په نخښنه کوي.

دريګوډي نامساوات پوره دي، ځکه چې د $z = x + y$ لپاره باور لري

$$\max_i |z_i| = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i \left(|x_i| + |y_i|\right) \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \,.$$

ماکسيموم-نورم کېدی شي د وزنونو $w_i \in \mathbb{R}_+$ د پيل کولو يا رامنځ ته کولو سره تولېز شي:

$$\|z\|_{\infty,w} = \max_i (w_i |z_i|) \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حقيقي- يا ريل وكتورونو سكالار ضربSkalarprodukt reeller Vektoren

د وكتورونو $v = (v_1, \ldots, v_n)^t, w = (w_1, \ldots, w_n)^t \in \mathbb{R}^n$ لپاره كانونيكي
ضرب د

$$v^t w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

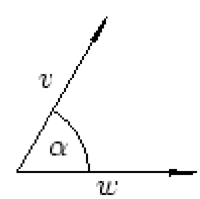
سره تعريف دی د ورکړشوي assoziierten نورم

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}\,.$$

سره.

$$v^t w = |v||w| \cos \alpha$$

هندسي كېدی شي دا نورم د له لارې تعريف شي، د v او w
ترمنځ كوچنی زاويه يا كونج α په نخښه كوي، چې د u او v څخه غزيدلې سطحې کې
اندازه كيږي.



د سكالار ضرب خويونه ساده ازمايل كيږي.

د هدسي تعريف ورته والی د كوساين جلې سره تصديقيږي(لومړی د $n = 2$ لپاره).

دې پسې د $v = (v_1, v_2)^t$ او $w = (w_1, w_2)^t$ سره باور لري، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\alpha\ .$$

که ځاي په ځاي کړو، نو ترې لاس ته راځي

$$(v_1-w_1)^2 + (v_2-w_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2|v||w|\cos\alpha$$

او د بنه بدلو سره ښونه يا ثبوت.

د $n \geq 2$ لپاره v او w په $\mathbb{R}^n$ کې يوه سطحه اواره(هواروي) وي يا غزوي. ورته شمېرنه په دې سطحه کې ښايي، چې د په خوښه ديمنزيونون (ابعادو يا پراخېدونو) $n \geq 2$ لپاره ټيک دی.

د کمپلکس وکتورونو سکالار ضربSkalarprodukt komplexer Vektoren

د وکتورونو $x=(x_1,\ldots,x_n)^t, y=(y_1,\ldots,y_n)^t \in \mathbb{C}^n$ لپاره کانونيکي

$$y^*x = \sum_{j=1}^{n} x_j\bar{y}_j$$

سکالار ضرب د له خوا تعريف دی د شسوخيري نورمونو

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}\,.$$

سره.

دا سوپرسکرييټ له دې سره د يوه وکتور ترانسپوزيشن او کمپلکس کنجوکېشن په ګوته کوي.

دا تعريف حقيقي حالت خوندي لري، چې په هغو کې کمپلکس کنجوګيري حالت پوره وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

که له $\mathbb{C}^2$ څخه د وکتورونو
سکالارضرب جوړوو، نو لاس ته راځي:

$$\langle x, y\rangle = (1+2\mathrm{i})\cdot 2 + (-2-\mathrm{i})\cdot \overline{2\mathrm{i}} = 2+4\mathrm{i}+4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2 = 2+8\mathrm{i}-2 = 8\mathrm{i}\,.$$

پس د دوه کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب اړيين نه دی چې حقيقي وي.

د اسوڅييري نورم سره د دويم وکتور کنجوګيري کونه غوره رول لري. بې له کنجوګيري کونې څخه به په ضرب کې لومړي وکتور لاندې نورم لرودی

$$\sqrt{(1+2\mathrm{i})^2 + (-2-\mathrm{i})^2} = \sqrt{1+4\mathrm{i}-4+4+4\mathrm{i}-1} = \sqrt{8\mathrm{i}} \notin \mathbb{R}\,,$$

او د دويم وکتور لپاره به په همدې ډول نورم نامثبت وی:

$$\sqrt{2^2 + (2\mathrm{i})^2} = \sqrt{4-4} = 0 \not> 0\,.$$

د دوه وکتورونو ترمنځ کونج Winkel zwischen Vektoren

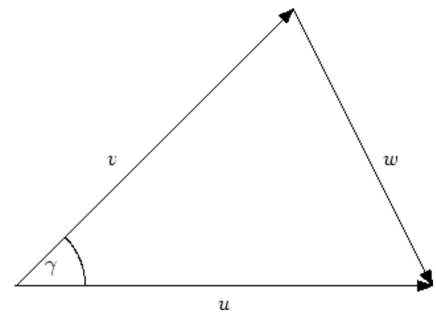
$$\cos\sphericalangle(u,v) = \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}$$

د يوه حقيقي سکالار ضرب لپاره د لخوا

په $[0,\pi]$ کې د u او v ترمنځ يوکونج تعريفوي. په ځانګړې توګه u او v اورتوګونال، $u \perp v$ ، بولو که $\langle u,v\rangle = 0$ ولرو.

د کونج تعريف په $\mathbb{R}^2$ کې د وکتورونو لپاره د کوساين له مخې رابولي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



په يوه درېګوډي يا مثلث کې د اړخونو $|u|, |v|, |w|$ اوږدوالي لپاره اړيکې باور لري:

$$|w|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \sphericalangle(u, v) .$$

له بلې خوا د سکالار ضرب له تعريف څخه

$$|w|^2 = |v - u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2\langle u, v\rangle ,$$

د کونج تعريف د پرتلې له لارې لاس ته راځي.

د په خوښه حقيقي سکالارضرب لپاره د کوشي-شورڅ-مساوات په بنسټ لرو:

$$\frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|} \in [-1, 1] .$$

وېش کېدی شي په $[0, \pi]$ کې د يوه کونج د کوساين سره برابر کېښوول شي يا ځاي په ځاي شي.

د پيتاګوراس(فيثاغورث) جمله Satz des Pythagoras

د يوه سکالارضرب-نورم د اورتوګونال يا عکود وکتورونو u او v لپاره

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 .$$

باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0,\ \text{da}\ u\perp v} + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=0,\ \text{da}\ v\perp u} + \langle v,v\rangle =$$

$$= |u|^2 + |v|^2 .$$

دا حمله د پيتاګوراس جملې تر نامه شهرت لري(569-475 v. Chr)، سره له دې چې دا له دې 1000 کاله د مخه بابليانو پېژندله.

امکان لري، چې پيتاګوراس به لومړنی وو، چې دا جمله يې ثبوت کړې.

د پيتاګوراس درېګونيPythagoräisches Tripel

د پيتاګوراس درېګونو سره درې طبيعي اعداد l, m, n بلل کيږي، د $l^2 + m^2 = n^2$, سره، د بېلګې په توګه $(3,4,5)$.

يو مثلث چې د اړخونو اوږدوالي نسبت يې د پيتاګوراس درېګونې پوره کوي، د پيتاګوراس جمله پوره کوي او له دې امله دا ولارګوډيز يا ولاړکونجيز او که غواړی قايم االزاويه دي.

مصريانو ممکن دا د ولاړګوډ د لاس ته راوړلو لپاره کارولی وي: دوي د يوې رسی يا پړي څخه کار رخسته، چې رابند او ١٢ ګنډې د برابر يون (واحد)اوږدوالي سره درلودې. که دې رسی يو درېګوډی داسې جوړ شي، چې اخونه يې درې، څلور، پنځه يوونه يا واحده اوږده وي، نو د لنډو اړخونو ترمنځ پروت کوج ولاړ يا عمود دی.

هر ناجوړه يا طاق عدد $l \geq 3$ کېدی شي د عددونو $m = (l^2-1)/2$ او $n = (l^2+1)/2$ سره د يو پيتاګوراس درېګوني ته پوره يا مکمل شي، څکه چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$l^2 + \frac{l^4 - 2l^2 + 1}{4} = \frac{l^4 + 2l^2 + 1}{4} = \left(\frac{l^2+1}{2}\right)^2 .$$

د دې درېګوني له 2 سره ضرب له لارې یو درېګونی لاس ته راځي، د هر تول عدد $l \geq 6$ لپاره.

دا ورکړ شوی جوړخت اصول د یوې طریقې ځانګړی حالت دی، کزمه چې د ؛بینوم د دریم فرمول خڅه لاس ته راحي، [که چې له

$$c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) = a^2$$

لاس ته راځي، که a^2 په دوه مختلفو ضریبونو تجزیه کېدی شي، چې یو یې جوړه $(=2b)$ کمښت یا تفریق ولري. د ناجوړه یا طاق $a = l$ لپاره دا ټوټه کونه $a^2 = a^2 \cdot 1$ پوره ده. لاس ته راوړو:

$$b = \frac{a^2-1}{2} , \quad c = \frac{a^2+1}{2}$$

او له دې سره دا پورته ځانګړی حالت.

کرښیز نابلواکوالی یا خپلواکوالی یا نا تابعیت Lineare Unabhängigkeit

وکتورونه $v_1, \ldots, v_m$ کرښیز بلواک بللکیږي، که سکالار $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ شتون ولري د $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$

او لږ تر لږه یوه $\alpha_i \neq 0$ سره. په بل حالت کې کرښیز خپلواک بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولېزه توګه د وکتورونو يوه ډېرۍ M کرښيز نا بلوک يا خپواکه بلل کيږي، که د M هره پاي برخډېرۍ د کرښيز نا بلوک يا خپلواکه وکتورونو څخه جوړه وي. په بل حالت کې M کرښيزه بلواکه پلل کيږي.

په پام کې دې وي، چې د کرښيز الجبر په موخه په حقيقت کې ناپاي ډېريو ته اجازه ورکړ شوې، مګر فقط ناپاي کرښيوېو کمپينيشنونو ته. د بېلګې په توګه د پرلپسيو وکتورفضا ډېريو کې

$$e = (1,1,\ldots)^t,\ e_1 = (1,0,0,\ldots)^t,\ e_2 = (0,1,0,\ldots)^t,\ \ldots$$

کرښيز خپلواک دی، سره له دې چې

$$e = \sum_{n\in\mathbb{N}} e_n\,.$$

دي.

د ثابتو پرلپسيو يا ترادفونو د کانونيکي يوون- يا واحدوکتورونو سره پاي انځورونه نه شته.

په $\mathbb{R}^2$ کې دوه وکتورونه تيک هلته کرښيز خپلواک دي، که يو هم د بل ډېر واره نه وي، د بيلګې په توګه ړکتورونه $(1,1)^t$ او $(1,0)^t$ کرښيز خپلواک دي، ځکه چې ايښوونه

$$\alpha(1,0)^t + \quad \beta(1,1)^t = (0,0)^t$$

راکوي

$$\beta = \qquad\qquad \alpha = 0\,.$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس وکتورونه $(0,0)^t$ او $(2,3)^t$ کرښيز بلواک دي، که

$$0(2,3)^t = (0,0)^t$$

همداسي:

$$1(0,0)^t + 0(2,3)^t = (0,0)^t;$$

پس د صفر وکتور يو ،،نه تريويال،، يا ساده انځورونه شتون لري.

په $\mathbb{R}^2$ کې د رې وکتورونه u, v, w تل کرښيزبلواک يا تابع دي، ځکه چې لاندې ځاي په ځاي کونه

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

کښته ټاکلي لاينيز هوموجين سيستم ته مو لاربنودوي

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0$$

$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0$$

د α, β, γ لپاره، چې تل يو ناساده حل لري

لکه په دوه بعدي همداسي په $\mathbb{R}^3$ کې دوه بعدي وکتورونه کرښيز بلواک دي، که دا غبرګ(موازي) وي، دا په دې معنا چې که يو وکتور د بل وکتور څو ځله وي.

درې وکتورونه کرښيز بلواک دي، که دوه وکتورونه غبرګ يا موازي وي يا که يو وکتور له دې نورو دوه وکتورونو غزېدلي سطحه کې پروت وي. د بېلګې په توګه د لاندې لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = (1, 2, -3)^t,\ v = (4, -6, 2)^t,\ w = (-9, 3, 6)^t$$

لپاره باور لري

$$6u + 3v + 2w = (0, 0, 0)^t$$

، پس وکتورونه کرښيز بلواک دي.

د تعريف سره سم د کرښيز بلواکوالي لپاره ازماينښت ورته دئ يوه هوموجېن کرښيز مساواتسيستم سره

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالار λ_i لپاره. دا په ځانګړي توګه ښايي، چې څلور وکتورونه په $\mathbb{R}^3$ کې تل کرښيز بلواک يا تابع دي.

بنسټ Basis

د يوه وکتور فضا V برخدېرئ B د وکتور V يو بنسټ بلل کيږئ، که B کرښيز خپلواکه وي او د V يو توليدېدونکی يا جړوېدوکی سيستم وي، دا په دې معناچې که هر وکتور $v \in V$ يو يوائځنئ انځورونه د يوه پای کمبينېشن د $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$ $b_i \in B$ سره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که B پای $(|B| = n)$ وي ، نو هر وکتور کېدی شي د يوه وضعيه قېمت له لارې سره نسبت و بنستې ته وليکي:

$$v \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t .$$

د وضعيه قيمت انځوروني

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t ,$$

سره ، دا په نامه کانونيکي ايزومورفيزم، سرې کړی شي يو پای بعدي K -وکتورفضا V د n–ګونی وکتور فضا K^n سره په نخښه کړی شي يا وپېژندلی شي. په ځاګړې توګه کېدی شي چې د پای حقيقي او کمپلکس وکتوري فضا د د لوستلو سره په پروتو تيوپ $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ ځان محدود يا رابند کړي.

لکه د بېلګې په توګه د پولينومونو وکتور فضا يدلکيږي، اړيين نه ده چې وکتورفضا دې پای بنستې ولري. مګر د د کرښيز الجب په ساحه کې پای کرښيز کمپيشنونه تر څېړنې لاندې نيول کيږي. د دې لاس ته رځي، چې پرلپسي

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots)^t,\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots)^t, \ldots$$

د پرلپسيو د وکتورفضا لپاره بنستې نه جوړوي. دا د ناپای کرښيز کمبينېشن مطالعه يا راوړنه ، لکه دا چې ځنګه په فوريي لړيو کې رامنځ ته کيږي، په لاس لرو، خو يوه کونورکنځ يا پولې ته يوه تګ کليمه غواړي، يعني د فقط وکتورفضاجوړښت څخه زيات.

بعد يا پراخيدونی Dimension

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$$

که یو وکتورفضا V یو پاي بنسټ ولری، نو د بنسټ وکتورونو ګڼون یا تعداد یواځنی ټاکلی او د V بعد یاپراخېدونی بلل کیږي:

$$n = \dim V \ .$$

$$V = \{0\}$$

د لپاره لیکو $\dim V = 0$ او $\dim V = \infty$ د یو ناپای بنسټ وکتورفضا لپاره.

د ټولیز بنسټ جملې له مخې هر وکتورفضا یو بسټ لری.

د دې لپاره چې وښایو، چې بعدونه یا پراخیدوني یواځني ټاکلی دي، بسیا کوی، چې لاندې وبینه وښایو:

که یوه وکتورفضا n-توکیزه بنسټ

$$b_1, \ldots, b_n \ ,$$

ولري، نو $n+1$ وکتورونه

$$v_1, \ldots, v_{n+1}$$

(او له دې سره د $n+1$ څخه زیات وکتورونه هم) کرښیز بلواک دي.

که دوه بنسټونه د مختلفو ډېرو وکتورونو سره شته وي، نو د بنشټوکتورونه به کرښیز خپلواکوالی ته یو تضاد لاس ته راشي.

پورتنی غوښتنه یا ثبوت کیدی شي د n پسې د ایندکشن له لارې و ښوول شي.

د ایندکشن پل لپاره (اندکشن پیل $n = 1$ ساده دی) که د وکتورونو v_i بنسټ انځورونه راواخلو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} b_j, \quad i = 1, \ldots, n+1 .$$

.

باور لري:

$$\gamma_{i,1} = \cdots = \gamma_{i,n} = 0,$$

،

نو دی ، او کرښیزبلواکوالی همدا اوس و ښوول شو. نو کیدی شي د مناسب نمره کولو له لارې ونیسي، چې $\gamma_{n+1,n} \neq 0$. له پورته مساوات څخه په راوتنې یا پیل سرې اوس ومتورونه تعریفوي، کوم چې د $n-1$ وکتورونو $b_1, \ldots, b_{n-1}$ څخه د کرښیز کمبینیشن په څیر انځوریدلای شي:

$$v_i' = v_i - \frac{\gamma_{i,n}}{\gamma_{n+1,n}} v_{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n .$$

دا چې د b_n صریب یا ځلونی ورکیږي، ساده کتل کیږي. دا چې

$$\text{Span}\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}, \; v_1', \ldots, v_n' \in V' =$$

کیی شي سرې د اېندکشن نیونې(فرضیی) وکاروي او نه ساده کرښیز کمبینیشن لاس ته راوړي

$$\lambda_1 v_1' + \cdots + \lambda_n v_n' = 0 .$$

د بنه بدلون پسي د کرښیز کمبینیشن لاس ته راځي، نو له دې سره غوښتنونی بلواکوالی یا تابعیت.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اورتوګونال يا ولاړ بنسټ Orthogonale Basis

يو بنسټ $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ اورتوګونال بلل کيږي، که وي:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j \,.$$

که بنسټوکتورونه نورمي وي، دا په دې معنا چې $|u_i| = 1$ دي، نو د اورتوګونال سيستم يا اورتوګونال بنسټ څخه غږيږو.

يو وکتور v نسبت و يوه اورتوکونال بنسټ $u_1, \ldots, u_n$ ته انځورونه

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \,, \quad c_j = \frac{\langle v, u_j \rangle}{|u_j|^2} \,.$$

لري.

د ضريبونو c_j لپاره پاور لري

$$|c_1|^2 |u_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 |u_n|^2 = |v|^2 \,.$$

د يوه نورمي پنسټ لپاره ترمونه $|u_j|^2$ له منځه ځي. او له دې سره لاس ته راځي:

$$c_j = \langle v, u_j \rangle \,, \quad |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 = |v|^2 \,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ، کيمرلې

دا چې $u_1, \ldots, u_n$ يو بنسټ جوړوي، نو سکالا $c_1, \ldots, c_n$ د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \ .$$

سره شتون لري.

که د پورتني مساوات لپاره په خوښه سکالار ضرب د u_k سره جوړ کړو او د بنسټ دد اورتوګوناليټي څخه کار واخستل شي، نو لاس ته راځي

$$\langle v, u_k \rangle = c_k \langle u_k, u_k \rangle$$

همداسې

$$c_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \ .$$

د ضريبونو لپاره کټمټوالی د پيتاګوراس د جملې ($n = 2$) ټوليزونه ده. دا تړلې د

$$|v|^2 = \langle c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n, c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \rangle \,,$$

ضربولو څخه لاس ته راځي، که دې ته پام وشي، چې مخلوط ترمونه

$$\langle c_j u_j, c_k u_k \rangle, \quad j \neq k$$

د بنسټ وکتورونو د اورتوګوناليټي له امله ورکيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبت و اورتوګونال بنسټ

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ته $v = (8,4)^t$ دا لاندې انځورونه لري

$$v = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}u_2 = \frac{8+12}{1+9}u_1 + \frac{-48+8}{36+4}u_2 = 2u_1 - u_2\ .$$

د ضريبونو لپاره باور لري:

$$|2|^2\ \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|^2 + |-1|^2\ \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right|^2 = 4\cdot 10 + 1\cdot 40 = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}\right|^2\ .$$

نسپت و اورتوګونال پنسټ

$$u_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix},\ u_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix},\ u_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته $v = (-1,1,3)^t$ لاندې انځورونه لري:

$$v = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 + \langle v, u_1\rangle u_1 = 3u_1 - u_2 - u_3\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضريبونو لپاره باور لري

$$|3|^2+|-1|^2+|-1|^2=\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\right|^2.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

اورتوګونال پروجکشن يا - پرپوستون Orthogonale Projektion

په يوه برخفضا U اورتوګونال پرپوستون

$$v\mapsto P_U(v)\in U$$

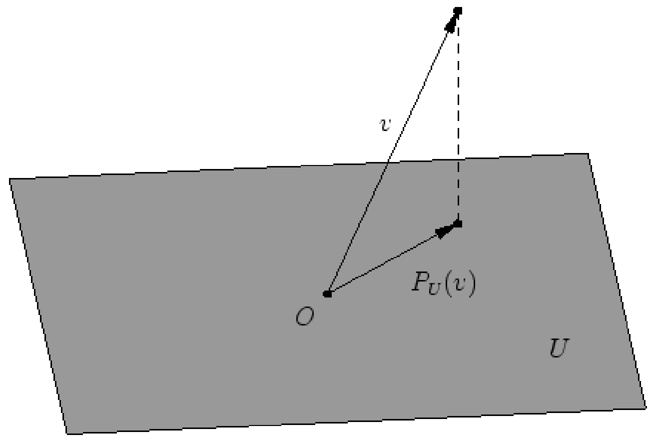
داورتوګوناليتي شرايط

$$\langle v-P_U(v),u\rangle=0,\quad \forall u\in U$$

سره پيژندل شوی دی.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که $u_1, \dots, u_j$ د U یو اوتوګونال پنسټ وي، نو دی

$$P_U(v) = \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k \,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

له $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ سره یوه هایپرسطحه $H \subset \mathbb{R}^4$ تعریف کیږي. د اوروتوګونال بنسټ لپاره کېدی شي لاندې وکتورونه وکارول شي:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د وکتور $x = (1, 2, 3, 4)^t$ د اورتوګونال پروجکشن لپارره لاندې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_H x = \frac{x^t u}{|u|^2} u + \frac{x^t v}{|v|^2} v + \frac{x^t w}{|w|^2} w = \frac{-4}{4} u + \frac{-2}{4} v + \frac{0}{4} w$$

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

د ګرام-شميت تکلار يا قانون Verfahren von Gram-Schmidt

د يوه بنسټ $b_1, \ldots, b_n$ څخه کېدی شي، لکه په لاندې توګه، يو اورتوګونال بسټ $u_1, \ldots, u_n$ جوړ شي. دا سړی د $j = 1, \ldots, n$ لپاره سوکځيسيو تعريفوي:

$$u_j = b_j - \sum_{k<j} \frac{\langle b_j, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k,$$

د $j = 1, \ldots, n$ لپاره.

دا رکورزيو ساده کيږي، که بنسټوکتور له هر پل(قدم) ورسته نورمي شي:

$$u_j \leftarrow \frac{u_j}{|u_j|}.$$

په دې خالت دي: $\langle u_k, u_k \rangle = 1$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

سړی ايندوکتيو(له يوه څخه توليز ته) ښايي، چې $u_1, \ldots, u_l$ د $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_l)$ لپاره يو اورتوکونال بنسټ جوړ‌زي.

د $l = 1$ لپاره دا روښانه دی: $u_1 = b_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ايندکشن پل $(l \to l+1)$ لپاره په پام کې نيسو، چې د $j \leq l$ لپاره لرو

$$\langle u_{l+1}, u_j \rangle = \langle b_{l+1}, u_j \rangle - \sum_{k \leq l} \frac{\langle b_{l+1}, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{\delta_{k,j}|u_k|^2} = 0\,.$$

له دې امله $u_1, \ldots, u_{l+1}$ اورتوګونال دي. بالاخره

$$b_{l+1} - u_{l+1} \in \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_l) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_l)\,,$$

دي، له کوم سره چې و ښوول شو، دواړه فضا همغه لاندې فضا غبوي يا خوروي.

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

د دې لپاره چې نسبت سکالار ضرب يا څل

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$$

ته د پولينومونو $p_0, p_1, \ldots$ اورتوګونال پرلپسې(ترادف) جوړه کړو ,کيدی شنلار سرهي سرې د مونوم $q_j(x) = x^j$ څخه مخ ته لاړشي. د ګرامشميت د تلنلار سره لاس ته راوړي.

$$p_0 = q_0$$

$$p_1 = q_1 - \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot 1\, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx} \cdot 1 = x - 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_2 = q_2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x\,dx}{\int_{-1}^{1} x \cdot x\,dx} \cdot x - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1\,dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,dx} \cdot 1 = x^2 - 0 \cdot x - \frac{1}{3}.$$

تولیزه بڼه

$$p_{n+1} = q_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle q_{n+1}, p_j}{p_j, p_j} \cdot p_j$$

کیدی شي کره نازکه یا نرمه شي، که سرۍ د $q_{n+1}(x) = x^{n+1}$ په ځای پولینوم $\tilde{q}_{n+1}(x) = x \cdot p_n(x)$ وکاروي. د

$$\text{span}\{p_1, \ldots, p_n, q_{n+1}\} = \text{span}\{p_1, \ldots, p_n, \tilde{q}_{n+1}\}$$

له امله دا قانوني دی. په دې حالت کې دې فقط زیاتوونی یا د جمعي غړی د $j = n - 1$ سره د صفر سره نا برابره وي.

د سیمتري په بنسټ د $j = n$ لپاره $\langle \tilde{q}_{n+1}, q_n \rangle = \int_{-1}^{1} x\, q_n(x)\, q_n(x)\, dx$ ورکیږي.د $j < n - 1$ لپاره $[x\, p_j(x)]$ د $p_k(x), k < n$ یوکرښيز کمبینیشن دی.

د $\langle p_n, p_n \rangle = 0$ له امله له دې سره

$$\langle \tilde{q}_{n+1}, p_j \rangle = \int_{-1}^{1} p_n(x)\, [x\, p_j(x)]\, dx$$

هم صفر دی.

په دې توګه لاس ته راوړل شوي پولینومونه د لجندر Legendre پولینومونه بلل کیږي. د یوه بل نومالي کوني سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_n(x) = \alpha_n x^n + \dots$$

د لاندې بڼې د دوه ترمونو ريكورزيون لرئ

$$p_{n+1}(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}(x - \beta_n)p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x)$$

د $\beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\varrho_n}, \gamma_n = \frac{\alpha_{n+1}\alpha_{n-1}\varrho_n}{\alpha_n^2 \varrho_{n-1}}$ او $\varrho_n = \langle p_n, p_n \rangle$ سره

كرښيزه څيرونه (فنكشن يا تابع)Lineare Abbildung

د K–وكتور فضا V او W ترمنځ فنكشن $L : V \longmapsto W$ ګرښيز بلل كيږي، كه دا لاندې خوېونه ولري:

- مثبتوالی

$$L(u + v) = L(u) + L(v)$$

-هوموګېپېنوالی:

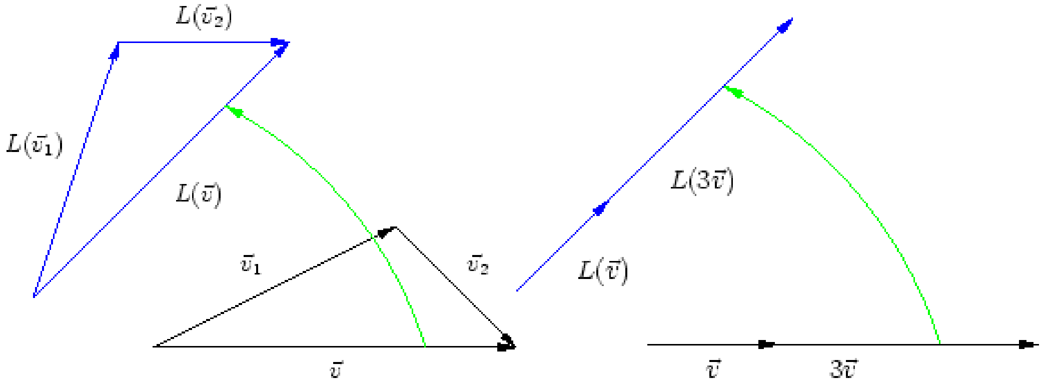
$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

له دې سره $u, v \in V$ او $\lambda \in K$ په خوښه وكتورونه همداسې سكالار دي.

په ځانګړې توګه $L(0_V) = 0_W$ او $L(-v) = -L(v)$ باور لري.

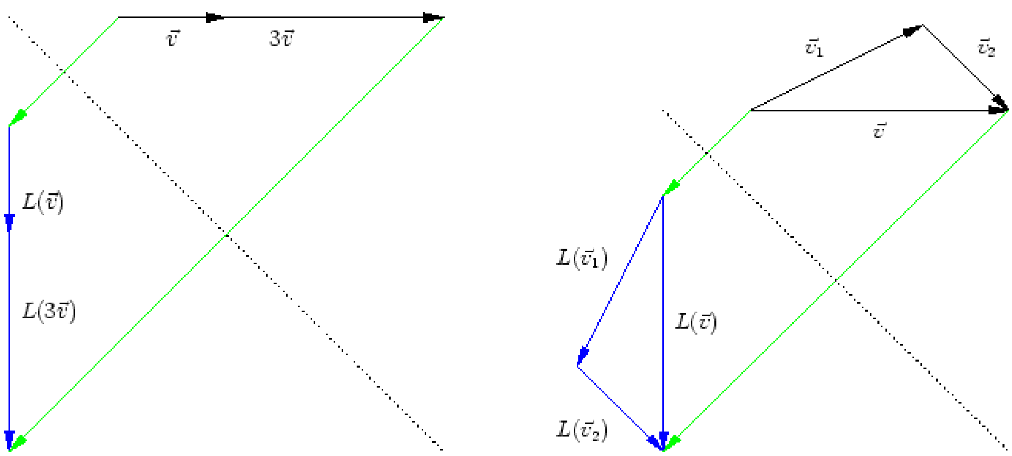
لكه په لاندې بيلګه كې به چې ښوول شي، يو څرخون كرښيز دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لکه جمعه یا زیاتون $v = v_1 + v_2$ د دواړو وکتورونو v_i سره یو مثلث یا درېګوډی جوړوي، چې د ده بنه د څرخون سره بې تغیره باتیرېږي، دا په دې معنا چې جمعه د مخه یا د ځرخون سره جوړه شي. دا چې د ضریب λ سره غزونه د ځرخون سره بدلیږي، بسې ترلی لیدل کیږي.

په ورته توګه ښوول کیږي چې هنداروله هم کرښیزه ده.



په سطحه کې د ټکو یوه راکښنه کرښیزه نه ده.

نه زاتونوالی یا جمعه کیدنه او هم نه هوموجینیتي پوره دي. د

$$T: \ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1),\ \lambda = 2$$

لپاره د بيلګي به توګه باور لري

$$T(v_1 + v_2) = (2,1) \neq (3,1) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$T(\lambda v) = (3,0) \neq \qquad (4,0) = \lambda T(v)\ .$$

ليکونکي: هيورليک، هيورنر

يو څو بيلګې لاندي د حقيقي توابعو يا فنکشنونو جدول ښايي. دلته هرچيرته ورکړ شوي، چې د کرښيزوالي لپاره کوم شرطونه پوره دي.

ځيرونه يا فنکشن mapping	جمعي Additive	هوموجين homogen
$f \mapsto f'$	X	X
$f \mapsto \|f\|$	-	-
$f \mapsto \int_0^1 f$	X	X
$f \mapsto \max f$	-	-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f \mapsto f(0)$	X	X
$f \mapsto (\max f + \min f)/2$	-	X

د یوه فنکشن لپاره یوه بیلګه، زیاتیز (مثبت) مګر هوموجېن نه دی، دادی، چې یو فنکشن T، چې یو کمپلکس ارزښتیزه تابع د هغې حقیقي برخه په ګوته کړي یا وښایی یا په هغې څېره شي. دلته باور لري: $T(\mathrm{i}f) \neq \mathrm{i}T(f)$

لیکونکي: هیورلیګ، هیورنر

د کرښيزو توابعو کمپوزيشن Komposition linearer Abbildungen

د دوه کرښيزو توابعو

$$S : U \to V\,, \qquad T : V \to W\,.$$

لپاره سړی کمپوزیشن تعریفوي(چې یوبل پسې تړاو یا ځنځیرونه هم بلل کیږي)

$$T \circ S : \quad U \to W$$

دا د لاندې لاري

$$(T \circ S)(u) = T(S(u))\,,$$

دا په دې معنا چې په $u \in U$ باندې فنکشن S او په نتيجه باندې فنکشن T کارول کيږي، فنکشن T د فنکشن S پسې کارول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه کربنیزو فنکشنونو کمپوزیشن بېرته کربنیز دی.

ماتريکس Matrix

په يوه تن يا جسم باندې د يوه $(m \times n)$ -ماتريکس تر نامه لاندې ($m, n \in \mathbb{N}$)
دا لاندې يوه ولاړکډېزه - يا قام الزاويه شکل پوهيږو:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

دلته دا د A وکتورونه $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ د i –مې ليکې – او
$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^{t}$ د j –مې متې(ستن يا پرته ليکه يا درځ...) وکتورونه بلل
کيږي. په ځانګړي توګه $(n \times 1)$ - ماتريکس يو د ليکې - او $(1 \times n)$ - ماتريکس يو
د متې يا ستنې وکتور دي..

د ټولو $(n \times m)$ - ماتريکسونو ټولګه په $K^{n \times m}$ سره په نخښه کيږي، حقيقي (
کمپلکس) ماتريکسونه د $\mathbb{R}^{n \times m}$ ($\mathbb{C}^{n \times m}$) سره په نخښه کيږي.

لاندې بيلګې د مختلف د ماتريکس بعدونه يا پراخېدونی ښايي.

$$\begin{pmatrix} 31 \\ 57 \\ 97 \end{pmatrix} , \quad (\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, -1, 3\mathrm{i}) , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \sqrt{3}+3\mathrm{i} & 7543 & 17 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي دوه ماتریکسونه د لیکو – همداسي د مټووکتورونه دي، دا په دې معنا چې د کومو څخه چې د یوې دیمنزیون 1 دی. بنې لور ته یو څلوریځ یا مربع ماتریکس او یو یو ولاړګوډیز- یا مستطیلي ماتریکس دی.

لیکونکي: هیورلیګ، هیورنر

د یوه کرښیز فنکشن ماتریکس Matrix einer linearen Abbildung

د دوه K - وکتوروفضاو ترمنځ د بنسټونو $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ او $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ سره یو کرښیز فنکشن $L : V \longmapsto W$ دبنسټوکتورونو د $L(e_j) = a_{1,j}f_1 + \cdots + a_{m,j}f_m$ عکسونو یا ارزښت قیمتونو سره یواځني ټاکلي دي. دا لاندې دماتریکس انځورونه لری:

$$w_F = Av_E \longleftrightarrow w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}v_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

د کومو سره چې v_j او w_i د v او $w = L(v)$ وضعییه قیمتونه (کواوردیناتونه) په نخښه کیږي نسبت و بنسټ E او F ته. د ماتریکس A په j-مه متَه کې د $L(e_j)$ کواوردیناتونه یا وضعیه قیمتونه نسبت د F بنسټ ته ځا په ځای دي.

دا چې L د یوه بنسټ د عکسونو یا ارزښتونو سره یواځنی ټاکلي، تړلي د کرښیزوالي لپاره شرایطو څخه ورکول کیږي:

$$w = L(v) = L\left(\sum_j v_je_j\right) = \sum_j v_jL(e_j) = \sum_j \sum_i v_ja_{i,j}f_i\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکو

$$w = \sum_i w_i f_i$$

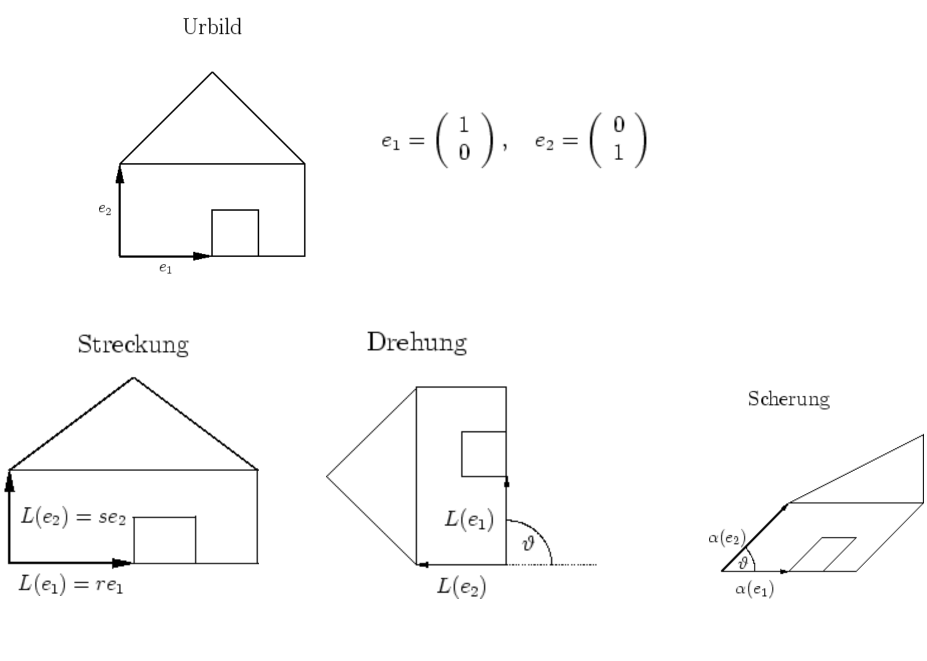
او د بنسټ وکتورونو w_i کواوردینات پرتله کیږي، داسي هم سړی غوښتل شوي د ماتریکسونو انځورونه لاس ته روړي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

په لاندې کې یو څو د سطحې کرښیزې تابع

$$L:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

انځور شوي دي، چې د یوون – یا واحد وکتورونو شکلونو یا بهتره ارزښتونو e_i (غوړ) له لارې کره شوي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & \cot\vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سړی کړی شي چې د ماتریکس A انځورونه نسبت کانونیکي بنسټونو e_1, e_2 ته تړلی معلومیږی یا لوستل کیږي. د ماتریکس متې هره یوه ځانله د وکتورونو $L(e_i)$ $i=1,2$ ، کواوردیناتونه خوندی لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

یو کرښیز فنکشن یا تابع

$$x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x$$

په ټکو $x=0,1$ باندې د هغو ارزښتونو سره ټاکلي. فنکشن

$$L : p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

کرښیز دی او کېدی شي نسبت د ضریب وکتورونو

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

له لارې تعریف شوي مونومبنسټ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ركربنيز الج

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

له لارې انځور شي

كه بنسټ

$$p_1(x) = 1 - x, p_2(x) = x$$

استعمال شي، نو ماتريكس

$$\begin{pmatrix} p_1(0) & p_2(1) \\ p_1(0) & p_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ترې لاس ته راځي.

ټوليز د $\leq n$ درجې په m تكيه ځايون $x = x_1, \ldots, x_m$ كې د يوه پولينوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ارزښتونه يا قيمت ټاكنه د واندرموند –ماتريكس Vandermonde-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 & x_m^1 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_m) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

سره تشريح شوې يا وركړل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

كواوردیناتونو ترانسفورمیشن د بنسټ بدلون سره

Koordinatentransformation bei Basiswechsel

د یوه بنسټبدلون $E \to E'$ سره د یوه وکتور v کواوردیناتونه د

$$v_E = Av_{E'} \quad \Leftrightarrow \quad v_{E'} = A^{-1}v_E\,,$$

سره سم ترانسفورمي کوي، د کوم سره چې د مربع ماتریکس A متې د بنسټ وکتورونو e_i' ضریبونه نسبت و بنسټ ته خوندي لري:

$$e_i' = \sum_j a_{j,i}e_j\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

وکتور v نسبت و بنسټ وکتور E او E' ته لاندې انځورونه لري:

$$\sum_k \lambda_k e_k = v = \sum_k \lambda_k' e_k'\,.$$

د e_k' د انځوروني په مرسته نسبت و بنسټ E ته لرو:

$$v = \sum_k \lambda_k' e_k' = \sum_k \lambda_k' \left(\sum_j a_{j,k}e_j\right)$$

$$= \sum_j \left(\sum_k a_{j,k}\lambda_k'\right) e_j = \sum_j \lambda_j e_j\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کواوردينات پرتلې سره لاس ته راځي: $v_E = Av_{E'}$

ليکونکی:ويپر

Bild او Kern معنا ځيره يا شکل او زړي

د يوه کربنيز تابع $L : V \to W$ لپاره د

$$\ker L = \{v \in V : \ L(v) = 0\} \ \subseteq V$$

سره سړی کرن يا زړی په نخښه کوي او د

$$\text{Bild}\, L = \{w \in W : \ \exists v \in V$$

$$L(v) = w\} \ \subseteq W$$

د سره د L ارزښت يا شکل ښوول کيږي يا په نخښه کيږي.
دواړه ډېری(ستونه) لاندي – يا برخه فضاوې دي.

ليکونکی: کيمرلې

ثبوتوو چې د K –وکتورفضا V همداسې W نسبت و کربنيزو عملياتو ته تړلي يا رابند دي يعنی دا عمليات په کې بې بنديزه اجراکېدی شي.

اول - $\ker L$ د V لاندې فضا ده: د $u, v \in \ker(L), \ \lambda \in K$ لپاره، د کربنيزوالي په بنسټ باور لري:

$$L(\lambda\, u) = \lambda\, L(u) = \lambda\, 0 = 0$$

او

$$L(u + v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې په تعقيب λu او $u+v$ هم د $\ker(L)$ توکي دي.

دويم - $\operatorname{Bild} L$ د W لاندېفضا ده: د $u, v \in \operatorname{Bild} L$ لپاره د $u = L(x), v = L(y)$ او $\lambda \in K$ سره د L کرښيزوالي په بنسټ لاندې صدق کوي:

$$\lambda u = \lambda L(x) = L(\lambda x)$$

او

$$u + v = L(x) + L(y) = L(x+y) \ .$$

دا چې V يوه وکتورفضا ده، نو اړونده له مخ ښېروني يا عکسونه يا تابع وې هم شته او په تعقيب λu او $u+v$ هم د $\operatorname{Bild} L$ توکي دي.

ليکونکی: ويپر

د Bild او Kern ابعاد يا براخيدوني Dimension von Bild und Kern

د يوه کرښيز فنکشن $L : V \to W$ لپاره باور لري

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \operatorname{Bild}(L) \ ,$$

که وي: $\dim V < \infty$

د دې لپاره چې د بعد کټمتوالی وښايو، نو د $\ker L$ لپاره يو بنسټ $E' = \{e_1, \ldots, e_m\}$ ټاکو او دا د $\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ سره د V و بنسټ E ته پوره کوو. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i),$$

نو لرو:

$$\text{Bild}\, L = \text{span}\, F, \quad F = \{L(e_{m+1}), \ldots, L(e_n)\}.$$

دا چې پسې F كرښيز خپلواک دی، یعني د $\text{Bild}\, L$ بنسټ، نو له

$$\sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i) = 0$$

لاس ته راځي $\sum_{i=m+1}^{n} v_i e_i \in \ker L$ او له دې سره $v_i = 0$.

دا غوښتونی د بعدفرمول اوس د بنسټوکتورونو تعداد څخه لاس ته راحي.

لیکونکي: هیولیک، هیورن

د بعدفرمول د ښوونې لپاره د پولینومونو - چې له $\leq n$ درجه لري- په فضا باندې k-م مشتق څېړل کیږي.

لومړی دې $k = 1$ او $n = 2$ وي. د پولینومونو د فضا لپاره چې درجه یې ≤ 2 ده $\{1, x, x^2\}$ بنسټ جوړوي، دا فضا پس بعد 3 لري. د $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ لپاره

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x$ یو پولینوم دی چې درجه یې ≤ 1 ده. بیلدفضا نو بعد 2 لري.

د مشتقنیولو سره ثابته له منځه ځي یا ورکیږي. دا یوه یو بعدې لاندې - برخفضا جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګرن يا زړى بعد 1 لري او له دې سره د $3 = 1 + 2$ سره د بعدفرمول پوره دى يا بنول شوى.

په توليزه توګه پولينوم لاندې فرمول لري:

$$p(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$$

او k -م مشتق

$$p^{(k)}(x) = \sum_{l=k}^{n} \frac{l!}{(l-k)!} a_l x^{l-k} .$$

بيلد يا څېره يا ارزښت د $\leq n - k$ درجې پولينوم دى او پولينومونه چې $< k$ درجه لري له منځه وړل کيږي. پس د بعدفرمول لاندې بڼه لري:

$$n + 1 = \underbrace{((n-k)+1)}_{\dim \mathrm{Bild}} + \underbrace{k}_{\dim \ker} .$$

•

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

معکوس يا په څټ تابع (څېرونه يا فنکشن)Inverse Abbildung

يوه کربنيزه تابع $L : V \to W$ تيک هلته انجکتيو يا په کې ده، که $\ker L = 0_V$ وي. په دې حالت کې د

$$w \mapsto v, \quad w = L(v) ,$$

له مخې يو معکوس تابع $L^{-1} : \mathrm{Bild}\, L \to V$ تعريف شوې، چې دا هم کربنيزه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځانګړي توګه باور لري

$$L^{-1} \circ L(v) = v\,, \quad L \circ L^{-1}(w) = w$$

د ټولو $v \in V$ او $w \in \text{Bild}\, L$ لپاره

ليکونکي: هيوليک، هيورن

د L د ګرښيزوالي په دليل صدق کوي

$$L(v_1) - L(v_2) = L(v_1) + L(-v_2) = L(v_1 - v_2)\,,$$

او له دې اړيکو لاس ته راځي:

$$L(v_1) = L(v_2) \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \ker L\,.$$

د يوه انجکتيو (په کې) کرښيزې تابع لپاره کېدی شي چې کرن يازړی فقط صفروکتور خوندي ولري.

دا معکوس تابع کرښيزه ده له لاندې لاس ته راځي

$$L^{-1}(L(v_1) + L(v_2)) = L^{-1}(L(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = L^{-1}(L(v_1)) + L^{-1}(L(v_2))\,,$$

$$L^{-1}(\lambda L(v_1)) = L^{-1}(L(\lambda v_1)) = \lambda v_1 = \lambda L^{-1}(L(v_1))\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورن

د ماتريکسونو وکتورفضا Vektorraum der Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $(m \times n)$-ماتریکسونه یو وکتورفضا جوړوي، دا په دې معنا چې دا کېدی شي سره جمعه شي او د سکالار سره ضرب شي. دا کارونې یا عملیې په لاندې توګه کمپوننتډوله تعریف دي:

$$C = A + B \Leftrightarrow \qquad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

$$B = \lambda A \Leftrightarrow \qquad b_{i,j} = \lambda a_{i,j}\ .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

د ماتریکسونو ضرب Matrix-Multiplikation

د یوه $(n \times m)$-ماتریکس A او یوه $(m \times s)$-ماتریکس B ضرب لاندې د $(n \times s)$-ماتریکس دی:

$$C = AB\ , \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\ ,$$

دا په دې معنا چې د c_{ij} دتعریف لپاره د A د i لیکې توکي او د B د j متې توکي سره جمعه کیږي:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{im} \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & \vdots & \\ & b_{kj} & \\ & \vdots & \\ & b_{mj} & \end{pmatrix}\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي، چې له دې سره بايد د A د متو تعداد (ګڼون) د B د ليکو تعداد(ګڼون) سره برابر وي.

د ماتريکس ضرب همغه د کرښيزو توابعو کمپوزيشن دی

$$T : u \mapsto v = Bu, \quad S : v \mapsto w = Av\ ,$$

دا په دې معنا چې C د $T \circ S$ ماتريکس انځورونه ده.

د کمپوزيشن لپاره د

$$w_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} v_k\,, \quad v_k = \sum_{j=1}^{s} b_{kj} u_j$$

له مخې تعريف شوي تابع په لاندې ډول لاس ته راوړي.

$$w_i = \sum_k \sum_j a_{ik} b_{kj} u_j = \sum_j \left[\sum_k a_{ik} b_{kj} \right] u_j\ .$$

په ګوډيزه يا کونجيزه نوکانو يا که غواړی قوسونو کې افاده د ماتريکسونو ضرب دی او کمپوزيشن توابعو د ماتريکس C سره سرخوري(يا باربر دی).

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

په لاندې يو څو معلوم د ماتريکسونو ضربونه ورکړشوي دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 100 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 321 & 213 & 132 \\ 123 & 312 & 231 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 26 \\ 21 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \end{pmatrix}$$

د ستراسن(وییه: شتراس) الګوریتم Strassens Algorithmus

که په ورسره بلد ډول د دوه (2×2) -ماتریکسونو A او B ضرب $C = AB$ تر څیړنې لاندې ونیسو، نو سړی اته ضربونو ته اړتیا لري. په ډېر هکبکوالي(چې د څه انتظار نه کیږي او پیښ شي) شتراسن وښوول چې اوه ضربونه بسیا کوي

[V. Strassen: Gaussian elimination is not optimal, Numer. Math. 13 (1969). 357-361]. Man berechnet die Produkte

سړی ضربونې شمیري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) \\
p_2 &= (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}) \\
p_3 &= (a_{1,1} - a_{2,1})(b_{1,1} + b_{1,2}) \\
p_4 &= (a_{1,1} + a_{1,2})b_{2,2} \\
p_5 &= a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2}) \\
p_6 &= a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}) \\
p_7 &= (a_{2,1} + a_{2,2})b_{1,1}
\end{aligned}
$$

او د C ضرب د زياتون يا جمعي جوړولو له لارې لاس ته راځي.

$$
\begin{aligned}
c_{1,1} &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} &= p_1 + p_2 - p_4 + p_6 \\
c_{1,2} &= a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} &= p_4 + p_5 \\
c_{2,1} &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} &= p_6 + p_7 \\
c_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} &= p_2 - p_3 + p_5 - p_7.
\end{aligned}
$$

کوموتاتور Kommutator

د دوه $(n \times n)$ - ماتريکسونو کموتاتور د $[A, B] = AB - BA$ په حيث تعريف شوی او په ټوليزه توګه ناصفر. د $[A, B] = 0$ په حالت کې ماتريکسونه A او B کموتي کيدونکی ماتريکسونه بلل کيږي.

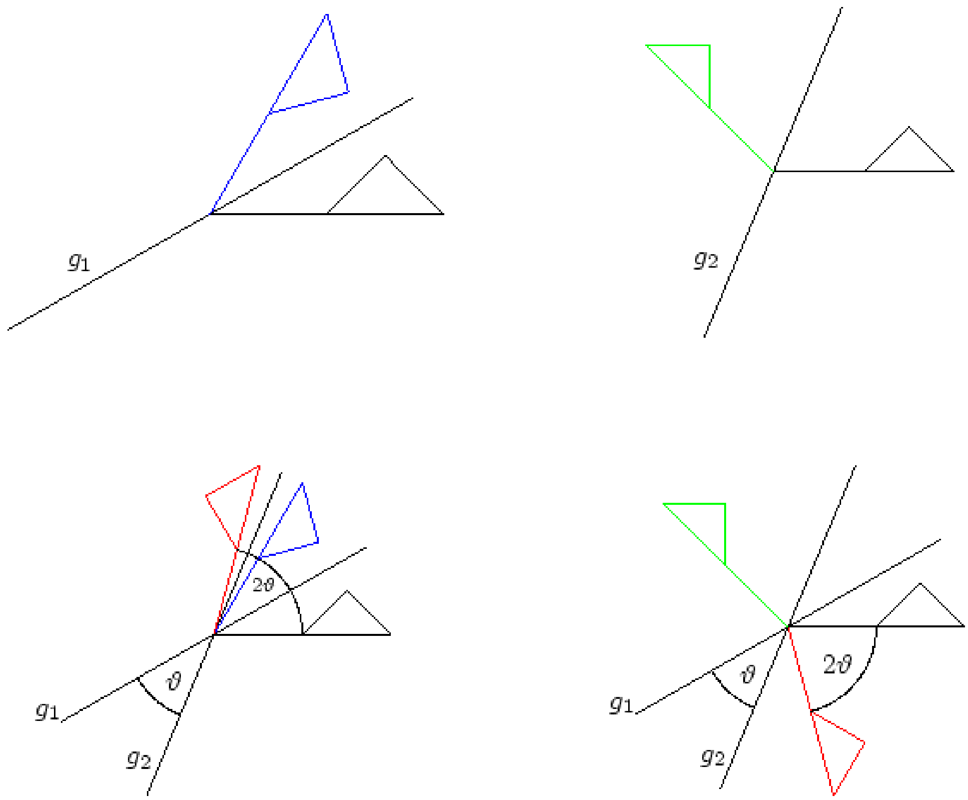
ليکونکي: هيوليک، هيورن

په مختلفو محوورونو g_1 g_2 او د دوه وکتوررونو S_1 او S_2 دهنداروني (که غواړی انغکاس) يو په بل پسي راوړنه کې د لړی پرلپسي رول نه لري.

دا پورته ځيره يا عکس د يوګونو هنداررونو شکلونه ښايی. په لاندې لړی کې کيڼ ډبله هنداررونه $S_2 \circ S_1$ انځور ده اوښي لور ته ډبله يا دوه واره هندارونه $S_1 \circ S_2$. د هر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځله نتيجې يې د کرښو ترمنځ په دوه برابره کونج څرخون دی، په هر حالت په مختلو لورو.



که g_1 د لومړی کونجنيمي په ښېر ونيسو او د g_2 د y -محور نو توابع د ماتريکس انځورونه لري.

$$v = S_1 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u\,,$$

$$v = S_2 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېل هندارونه يا ا نعکاسونه لاندې انځورونه لري

$$w = S_2 S_1 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \,,$$

$$w = S_1 S_2 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u \,.$$

په دې حالت کې کوموتاتور په لاندې ډول دی

$$[S_1, S_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

په څټ يا معکوس ماتريکسونه Inverse Matrix

د يوه معکوس کېدونکي کرښيز تابع $Av \mapsto v$ لپاره A^{-1} د A معکوس ماتريکس په نخښنه کوي، دا په دې معنا چې

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

يون – واحد ماتريکس سره؟

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

معکوس کېدونکي په همدې ډول رېګولار ماتريکسونه $A \in K^{n\times n}$ نسبت و ضرب ته يو ګروپ جوړوي، کرښيز ګروپ چې د $\mathrm{GL}(n,K)$ سره په نخښه کيږي.

باور لري

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

د $A, B \in \mathrm{GL}(n,K)$ لپاره .

باور لري

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E\ ,$$

او له دې سره $B^{-1}A^{-1}$ و AB ته معکوس دی

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دياګونال ماتريکس معکوس داسې لاس ته راځي، چې د دياګونال توکو معکوس يا په خټې ارزښت جوړيږي،، د بېلګې په توګه:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

د درېګودئ – يا مثلث متاريکس لپاره په معکوسوني کې د مثلث بڼه ساتلې پاتيي کيږي، د بېلګې په توګه:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

په ټوليزه توګه د ماتريکس په خټې يا معکوس پوره ځاي نيولی يا ډک دی، د بېلګې په توګه:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکنې بايد د يوه کربنيز مساواتسيتم له لارې و ټاکمل شي.

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

تراسپوني او ادجونګيري ماتريکسونه

Transponierte und adjungierte Matrix

که د يوه ماتريکس A ليکې اوو متې سره بدلې شي، نو د ترانپوني ماتريکس $B = A^t$ څخه غږيږو، دا په دې معنا چې

$$b_{i,j} = a_{j,i}.$$

که د يوه کمپلکس ماتريکس A سرببره پر دې ليکنې کنجوګير شي، نو اديونګيري ماتريکس ترې لاس ته راځي، دا په دې معنا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$c_{i,j} = \bar{a}_{j,i}\,.$

يو ماتريکس د $A = A^{t}$ سره سيومتريک بلل کيږي، يوه ماتريکس د $A = A^{*}$ سره د پخپله اديونګيري په څېر ده يا هرميتيکي Hermitesch ده. د حقيقي ماتريکسونو لپاره کليمي سيومتريک او هرميتيکي همغه (يوه) معنا لري.

لاندي قانون باور لري:

- $(AB)^{t} = B^{t}A^{t}$ او $(AB)^{*} = B^{*}A^{*}$

- $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$ او $(A^{*})^{-1} = (A^{-1})^{*}$

د يوې ليکنې لپاره په $C^{t} = (AB)^{t}$ کې باور لري

$$c_{ji}^{t} = c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj} = \sum_k a_{ki}^{t}b_{jk}^{t} = \sum_k b_{jk}^{t}a_{ki}^{t}$$

او له دې سره $C^{t} = B^{t}A^{t}$. دا چې $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ او $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ باور لري، نو دا د اديونګيري لپاره هم ټيک دی.

له

$$E = E^{t} = \left(AA^{-1}\right)^{t} = \left(A^{-1}\right)^{t} A^{t}$$

لاس $\left(A^{-1}\right)^{t} = \left(A^{t}\right)^{-1}$ ته راځي. په ورته توګه د ادجونګيري لپاره هم صدق کوي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپور Spur

(د ا لماني ژبې ځخه د شپور پښتو معنا: نخښه يا علامه)

شپور د يوه $n \times n$ -ماتريکس A اصلي دوه کونټړي توکو(وتر) جمع د A شپور بلل کيږي،

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

که A, B په خوښه $(n \times n)$ - ماتريکسونه وي، نو باور لري:

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA).$$

له دې لاس ته راځي، د يوه رېګولار ماتريکس T او يوه په خوښه ماتريکس A لپاره صدق کوي:

$$\mathrm{Spur}(T^{-1}AT) = \mathrm{Spur}(A).$$

دا دا معنا لري، چې شپور يا سپور د کواورديناټ ترانفورميشن لانديinvariant (نسبت يوې کچونې يا اندازه کونې ته بې تغيره پتې کيدل) يا بې تغيره پاتيږي.

د يوه ماتريکس رانګ Rang einer Matrix

د يوه $(m \times n)$ -ماتريکس لپاره د کرښيز خپلواکو متو ماکسيمال ګڼون ياتعداد د ماکسيمالو ګرښيزو خپلواکو کيلو سره يو په بل پريوحي يا يو بل سره مساوي دي او د رانګ A په لکنيز ډول $\mathrm{Rang}\,A$ بلل کيږي،

په ځانګړي ډول باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{Rang} A \leq \max\{m, n\}.$$

د ماکسیمال کرښیز خپلواکو متو $v_1, \ldots, v_n$ تعداد د وکتورفضا پعد به ګوته کوي

$$V = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\},$$
،

ځکه چې سړی کړی شي د متو څخه بنسټ وټاکي. په ورته توګه وینا د لیکو $w_1, \ldots, w_m$ څخه غزیدلي وکتورفضا W لپاره هم صدق کوي.

غوښتنه $\dim V = \dim W$ د n پسي اندکشن له لارې وښوول شي.

ساده ښوول کیږي، چې $\dim V$ او $\dim W$ د لاندې عملیو یا کارونو سره بې تغیره پاتیږي:

- د متو یا لیکو بدلېدنه یا پرموتیشن

- د یوه سکالار جمعه ډېرځله یا د یوه ډېرځله سکالار سره د یوې متې (لیکې)حمعه د یوه بلې متې (لیکې) سره.

که $A \neq 0$ وي، سړی کړی شي دا عملیه په لاندې بڼهٔ

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

راوړي.

د پرموتیشن سره لومړی $b_{1,1} \neq 0$ لاس ته راځي او بیا د لومړی لیکې یا کیلې او متې پاتې توکي د مناسب جمعې له لارې له منځه وړي. په ټیک ډول لومړي د لومړی متې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-b_{1,j}/b_{1,1})$ -ځله و j -مې متې ($j=2,\ldots,n$) ته جمعه کوي او په ورته توګه د ليکو وکتورونو سره هم دا عمل وخ ته بيولاي شو . که د V' او W' سره ْوښتوني وکتورفضاوې د $(m-1)\times(n-1)$ - ماتريکس A' لپاره ، نو لاس ته راځي

$$\dim V = \dim V' + 1, \quad \dim W = \dim W' + 1$$

او د ايندکشن له لارې غوښتنه.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

يو څو تيپيکي حالتونه د درې (3×2) -متريکسونو سره دليدلو شوي يا ورکړ شوي دي

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}=0 \quad \operatorname{Rang}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}=2, \quad \operatorname{Rang}=\begin{pmatrix}3&4\\6&8\\9&12\end{pmatrix}=1\,.$$

د دريم ماتريکس لپاره صدق کوي $4S_1=3S_2$ د متو S_1 او S_2 لپاره او د ليکو $2Z_3=3Z_2=6Z_1$ او Z_1,Z_2 او Z_3 لپاره. په دواړو حالتونو کې نو د غوښتوني وکتورفضا ديمنژن يا بعد برابر په 1 دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوه ماتريکس نورم Norm einer Matrix

د يوه وکتور نورم د ماتريکس نورم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|$$

ته بنسټ ووي د نورم خويونو سربېره (مثپتوالی، هوموچی‌نيتي، مثلثنمساوات)

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,$$

باور لري، دا په دی کعنا چی د ورسره تنظيم شوی ماتريکس نورم سبضريبي submultiplikativ دی.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

په لاندې کې به يوګوني خويونه د ازماينې له لارې زښوول شي:

مثبتوالی: د وکتور فضا تعريف له لارې تظمين دی، چي $\|A\| \geq 0$ دی. که A صفرمآتريکس وي، نو فقط صفروکتور 0د ځېرې په ځېر مخ ته لرو. که له بلې خوا نورم صفر وي، نو فقط صفروکتور د ځېرې په ځېر رامنځ ته کيږي، او تابع يا فنکشن د صفرماتريکس سره تشريح کيږي.

Homogenitätهوموحنيتي:

$$\max_{\|x\|=1}\|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1}|\lambda|\|Ax\| = \|\lambda A\|$$

$$|\lambda|\max_{\|x\|=1}\|Ax\| = |\lambda|\|A\|. =$$

$$\|\lambda A\| = \max_{\|x\|=1}\|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1}|\lambda|\|Ax\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad |\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\| .$$

Dreiecksungleichungمثلثات برابرون :

$$\begin{aligned} \|A+B\| &= \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax+Bx\| \\ &\leq \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \\ &\leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\| . \end{aligned}$$

Submultiplikativitätسب ضريبوالی:

د $B = 0$ لپاره $AB = 0$ دي او له دې سره نامساوات پوره دی. د $B \neq 0$ لپاره دی:

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x:Bx \neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\| . \end{aligned}$$

د لومړي بڼې بدلون سره ، چې په حقيقت کی ډېری يا سټ په يوه سوپرېموم Supremumځېره کيږي محدوديږي، مګر فقط وکتورونه ترې لرې کيږي، چې صفروکتور دځېرې په ډول لري او له دې سره سوپرېموم نه اغيزمن کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: هيوليګ ، کرايخ

د ليکو د جمعې نورم Zeilensummen-Norm

د وکتورونو لپاره ماکسيمومو نورم $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$ د ماتريکسونو لپاره د ليکوجمعي نورم

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

تنظيم دی.

ليکونکي: هيوليګ ، کرايخ

د $\|x\|_\infty = \max_j |x_j| = 1$ لپاره

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left|\sum_j a_{ij}x_j\right| \le \max_i \sum_j |a_{ij}| ,$$

دی

او سړی لاس ته راوړي

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty \le \max_i \sum_j |a_{ij}| .$$

که سړی ونيسي يا فرض کړي، چې ماکسيموم د $i = k$ لپاره فرض شوی يا نيول شوي، نو مساوات د

$$x_j = \operatorname{sign} a_{kj}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتخاب له لارې لاس ته راځي، ځکه چې دی:

$$\left|\sum_j a_{kj} x_j\right| = \sum_j \| a_{kj} | \; .$$

ليکونکي: هيوليک ، کرايځ

د ماتريکس د ډکونې جوړښت Belegungsstruktur von Matrizen

د صفر سره مختلف ماتريکس توکو $a_{i,j}$ د تنظيم سره سم د لاندې ترمنځ توپير کوي

اول – دياګونالماتريکس: $a_{i,j} = 0$ د $i \neq j$ لپاره،

باند ماتريکسونه Bandmatrizen: د لپاره د سره د صفر نه مختلفو ماتريکسونو د دياګونالو شمېر، چې د باند سور په څېر په نخښه کيږي يا نومول کيږي،

پورته (کښته) مثلث ماتريکسونه: $a_{i,j} = 0$ د $i < j$ ($i > j$) لپاره.

په توليزه توګه يو $(m \times n)$ - ماتريکس ضعيف ډکشوی، که فقط توکي $c \max(m, n)$ د صفي سره نامساوي وي، د يوې نه ډېرې لوې ثابتې c سره.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

اورتوګونال او يونيتار ماتريکسونه Orthogonale und unitäre Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو کمپلکس $(n \times n)$ - ماتريکس A يونيتار بلل کيږي، که ولرو

$$A^{-1} = \overline{A}^t = A^*,$$

دا په دې معنا چې که د A متې د $\mathbb{C}^n$ يو اورتوګونال بنسټ جوړ کړي.

د حقيقي ماتريکسونو لپاره (لکه په سکالار ضرب کې) کمپلکس کنجګيشن،

$$A^{-1} = A^t,$$

او سرې د يوه اورتوګونال ماتريکس څخه غږيږي.

اورتوګونال (يونيتار) ماتريکسونه د($\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$) يو لاندې – برخګروپ جوړوي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هادامارد – ماتريکسونه Hadamard-Matrizen

د $n = 2^k$ لپاره تر سکالار کېدنوپورې اورتوګونال ماتريسکونه شتون لري د H_k د $n \times n$ بعد په $\{-1, 1\}$ کې د ليکنو سره داسې په نامه هادامارد ماتريکسونه.

د هاداماد لومړی ماتيکسونه دي:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوليزه توګه ماتريسونه د ريکورزيون

$$H_{2k} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$$

سره جوړکړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د فورير (وينه: فوريې) ماتريکسونه Fourier-Matrizen

د توان جوړولو له لارې د يوون - يا واحد ريښې

$$w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$$

سړی داسې په نامه فوريې ماترې:س لاس ته راوړي

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}.$$

دا د نورمي کولو($W_n \to W_n/\sqrt{n}$) پسې يونيتار دي، دا په دې معنا چې $W_n^* W_n/n$ يوون – يا واحد ماتريکس دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متو اورتوګوناليتي ساده ازمايل کيږي. د $(j+1)$ ـمو او $(k+1)$ ـمو متو سکالار ضرب

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{\ell j}\overline{w_n^{\ell k}} = \sum_{\ell} w_n^{(j-k)\ell} = \frac{w_n^{(j-k)n}-1}{w_n^{j-k}-1}\,,$$

دی، او داچې $w_n^n = 1$ دی، نو صورت يا ماتباندې صفر دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

د $n=4$ لپاره $w_4 = \exp(2\pi\mathrm{i}/4) = \mathrm{i}$ دی، او سرى لاس ته راوړي

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

په 2 د وېشنې وروسته W_4 يونيتار دی، دا په دې معنا چې

$$\left(\frac{1}{2}W_4^*\right)\left(\frac{1}{2}W_4\right) = E\,.$$

له دې امله د فوريې ماتريکسونو د سيومترى والى له امله $W_4^* = \overline{W_4}^{t} = \overline{W_4}$ دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

نورم ريښتونې يا - وفاداره اورتوګونال ا و يونيتار ماتريکونه

Normtreue orthogonaler und unitärer Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو حقيقي (كمپلكس) ماتريكس A ټيک هلته اوتوګونال (يونيتار) دی، که دا د هر وکتور اوکليد(اقليدسeuklidische) نورم انواريانت پريږدی:

$$|Av| = |v| .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

بسيا کوي، چې کمپلکس حالت وڅيړو، چې حقيقي حالت په بر کې نيسي.

اول - A يونيتار ده، نو باور لري

$$(Ay)^*(Ax) = y^*A^*Ax = y^*x$$

پس په ټوليزه توګه د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب لاس ته راځي، چې د نورمريښتونوالی په بر کې لري.

دويم – د نورم ريښونوالي څخه لومړی لاس ته راځي، چې د A د متې وکتور v_j د يوون وکتورونو e_j د عکسونو نورم يوی خوندي لري. د دې لپاره چې وښايو چې مختلفې متې اوتوګونال دي،نو $\lambda = \exp(i\vartheta)$ ټاکو، داسې چې لرو:

$$(\lambda v_k)^* v_j \in \mathbb{R} .$$

پسې د نورريښتونوالی او اقليدس نورم تعريف په بنسټ لرو

$$2 = |e_j + \lambda e_k|^2 = |v_j + \lambda v_k|^2 = |v_j|^2 + |\lambda|^2 |v_k|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda v_k)^* v_j = 2 + 2\overline{\lambda} v_k^* v_j ,$$

په تعقيب بايد په ښی لور سکالار ضرب ورک شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيوکليکي (تلبيرته راګرځېدوني) ماتريکسونه Zyklische Matrizen

د ځيکليکي $(n \times n)$-ماتريکسونو متې د لومړی متې د ځيوکليکي راکښنې له لارې جوړيږي:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

د ماتريکسونو ضرب سره ځيوکليکي جوړښت ساتلی يا خوندي پاتي کيږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه ځيوکليکي ماتريکس-ضرب $C = AB$ توکی دي:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i-j \bmod n} b_{j-k \bmod n}.$$

د اچې

$$\{0, \dots, n-1\} = k + \{0, \dots, n-1\} \bmod n,$$

کېدی شي سری په زياتوونو (د جمعي اجزاوو) د j په ځای $j+k$ ځای په ځای کړي، کوم چې ښايي، چې $c_{i,k}$ فقط د $i - k \bmod n$ په واک کې دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ځيوکليکي ماتريکسونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ضرب دا لاندې څیوکلیکي ماتریک دی:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 18 & 11 & -23 \\ -23 & 18 & 11 \\ 11 & -23 & 18 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ستوښاستیکي ماتریکسونه

یو $(n \times n)$-ماتریکس ستوښایتیکي بلل کیږي، که $p_{i,j} \geq 0$ وي او

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

ستوښاستیکي ماتریکس د احتمالوالو x_i تغیر ښايي د لاندې له مخې:

$$x'_j = \sum_i x_i p_{i,j}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د P د ښویونو په بنسټ x' هم یو د احتمالوالي وکتور دی، دا په دې معنا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x'_j \geq 0, \quad \sum_j x'_j = 1 \,.$$

دا نه کمښتوالی یا نه منفیوالی ځرګند دی او د جمعي انواریانت له لاندې څخه تعقیبیږي:

$$\sum_j \sum_i x_i p_{i,j} = \sum_i x_i \underbrace{\sum_j p_{i,j}}_{=1} \,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ديترمينانت د انتيسيومتري کرښيزفورم په حيث

Determinante als antisymmetrische Multilinearform

د یوه مربع ماتریکس A دیترمینانت

$$\det A = \det(a_1, \ldots, a_n)$$

د متي a_j سره کېدی شي د لاندې خویونو له لارې تعریف شي.

اول – ډېرکرښیزوالی

$$\det(\ldots, \alpha a_j + \beta b_j, \ldots) = \alpha \det(\ldots, a_j, \ldots) + \beta \det(\ldots, b_j, \ldots) \,.$$

دويم - انتیسیومتري:

$$\det(\ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots) = -\det(\ldots, a_k, \ldots, a_j, \ldots) \,.$$

دريم – نورمي کونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det(e_1, \ldots, e_n) = 1\,, (e_k)_\ell = \delta_{k\ell}\,.$$

د دې قانون سره ديترمينانت د n–ځله ضرب سره وده کولی شي:

$$\det A = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}\,,$$

د کوم سره چې د $(1, \ldots, n)$ په ټولو ځای بدلونو $(i_1, \ldots, i_n)$ سره جمعه کړي او σ د ځاي بدلونون سره مخنخښه ښايو.

سړی دا لاندې ليکدود هم استعمالوي

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

د زياتيدونو (د جمعې اجزاوو) د تعداد د جګيدو له امله($n!$ ځای بدلونونه شتون لري) د ديترمينانت د عملي آنځورونو لپاره ښه مساعدنه دی. مګر دا تړلی د تعريف شوو خويونو تړلی (د عمليو له لارې) دا د ښوونې او د نوروو خويونو د لاس ته راوړلو لپاره اړيين دي. له دې امله دا د ورته (برابر ازښته) تعريف لپاره ورکړشوی دی.

لومړ ی ښايو، چې غوښتل شوي خويونه مو اړيين د ديترمينانت وديزونې ته بيايې، په اړيينه توګه د برموتيشن په مرستې .

د دې سره د A متي د يوون – يا واحد وکتورونو e_i د کرښيز کمبينيشنونو په حيث انځوروي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \,.$$

د ډېرکرښيزوالي په بنسټ باور لري:

$$\det A = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \underbrace{\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})}_{=: d_i} \,.$$

دا جمعه لکه چې لاس ته راځي کيدی شي ساده شي. که له دې دوه يوون - يا واحدوکتورونه برابر وي، نو د انتيسيومتري په بنسټ d_i صفر دی:

$$\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) = -\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) \,.$$

که ټول i_ν مختلف وي، دا په دې معنا چې $(i_1, \ldots, i_n)$ يو پرموتيشن دی د $(1, \ldots, n)$ ، نو صدق کوي

$$d_i = (-1)^{\tau(i)} \,,$$

د کوم سره چې $\tau(i)$ مودولو 2 د بدلونونو يواځنی ټاکلی تعداد(ګڼون) په نخښه کوي ، د کوم لپاره چې واحدوکتور په کانونيکي لړی پرلپسې راوړی شو. ځای بدلون د مخنخښې تعريف پسې دی:

$$\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = \sigma(i) \det(e_1, \ldots, e_n) = \sigma(i) \,,$$

دا په دې معنا چې سړی ورکړ شوې ودېزينه لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس کېدی شي و ازمایو، چې وديزينه د غوښتوني قانون سره تړلې ده. ډېرکرښيز والی باور لري، خکه چې په ضرب

$$a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}$$

کې د هرې متې تيک يو توکی منځ ته راځي. انتی سیومتری لاس ته راځي، ځکه چې د متو له پدلون دبدلولو تعداد کانونیکي لړی پرلپسي په يو تغير خوري، بالاخره په واحد ماتريکس کې جمعه په يوه زياتووني (د جمعې غړي) کمیږي

$$a_{1,1}\cdots a_{n,n}=1\cdots 1=1$$

.

ليکونکي: هيوليک، هيونر

2 - ليکيزه ديترمينانت 2-reihige Determinante

د يوه -ماتريکس ديترمينانت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

دی.

دا د برموتيشن وديزيني پسي په ساده ډول ليدل کيږي، ځکه چې 2 زياتيدونی شتون لري.

دبدیل په توګه کېدی شي ديترميناتونه د تعريف شوو خويونو له مخې هم و شمېرل شي.

که متي د کانونيکي واحد وکتور(يوون-) e_k کرښيز کمبينيشن په څېر انځور شي، نو د مولتی (ډېر-)کرښيزوالي له امله لاس ته راځي

$$\det(ae_1+ce_2,be_1+de_2) = a\det(e_1,be_1+de_2)+c\det(e_2,be_1+de_2)$$

$$= ab\det(e_1,e_1)+ad\det(e_1,e_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

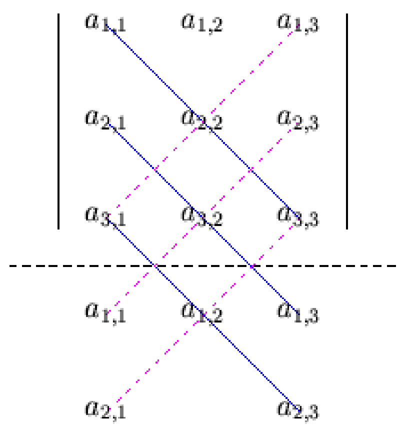
$$+\,cb\det(e_2,e_1)+cd\det(e_2,e_2)$$

$$=ab\cdot 0+ad\cdot 1+cb\cdot(-1)+cd\cdot 0=ad-bc\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیونر

د ساروس شیما یا شکل Sarrus-Schema

د یوه (3×3) - ماتریکس دیترمینانت لکه څنګه چې په تابع یا فنکشن کې ښوول شوې د ضربونو جمعه ده، چې مختلف دیاګونالونه (دوه کونجترې) په ګوته کوي:



$$=\begin{array}{l} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ -a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}\end{array}$$

دې د ساروس په نامه یادې شوې شیما ته ورته د n جګ بعدي لپاره شتون نه لري. سملاسي د $n=4$ دیترمینانت د 24 ضربونه یوه جمعه لري.

د ساروس –شیما په ساده توګه د ځاي بدلون ودیزیښه پسي په ساده توګه و ازمایي. لاندې جدول تول زیاتووني یا جمعی اجزاوې ښایي همداسې دا د ځايبدلون i سره اسوځییري بدلوني، له کومو چې دا مخنخښه σ لاس ته راځي.

i	بدلونونه	$\sigma(i)$	Summand

(c) ketabton.com: The Digital Library

	Vertauschungen		زياتيدونې يا د جمعې اجزا
$(1,2,3)$		$+$	$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$
$(2,3,1)$	$\rightarrow (3,2,1) \rightarrow (1,2,3)$	$+$	$+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$
$(3,1,2)$	$\rightarrow (2,1,3) \rightarrow (1,2,3)$	$+$	$+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$
$(3,2,1)$	$\rightarrow (1,2,3)$	$-$	$-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$
$(1,3,2)$	$\rightarrow (1,2,3)$	$-$	$-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$
$(2,1,3)$	$\rightarrow (1,2,3)$	$-$	$-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

لوريز حجمونه (ډکي) Orientiertes Volumen

د يوه حقيقي ماتريکس A ديترمينانت مطلق ارزښت د ـبعدي سره چې له متو څخه غزيدلی شپات(Spats) سره پراپر دی یا یو په بل پربوځي:

$$|\det A| = \mathrm{vol}\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i :\ \ 0 \leq \alpha_i \leq 1\right\} = \mathrm{vol}\left(A[0,1]^n\right)\ .$$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساده ازمايل کيدی شي، چې لوريز حجمونه يا ډکي

$$\operatorname{vol}_* A := \operatorname{sign}(\det A)\operatorname{vol}(A[0,1]^n)$$

ټول درې د ديترميناتونو تعريف شوي خويونه (مولتی کرښيزوالی، انتي سيومتري، نورمي ونه) لري، له دې امله بايد باور ولري:

$$\operatorname{vol}_* A = \det A$$

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

په $\mathbb{R}^3$ کې د وکتورونو $u,\ v,\ w$ لپاره ديترمينانتونه د شپات ضرب سره سر خوري يا برابر دی:

$$\det(u, v, w) = [u, v, w]\,.$$

د بديل په قسم دا کېدی شي د ε -تنځور ε Tensors- سره افاده شي:

$$\det(u, v, w) = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j w_k\,.$$

که وکتورونه د بېلګې په توګه و ټاکل شي

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو شپاټ ضرب لاس ته راځي.

$$(2,1,1)\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)=(2,1,1)\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}=6-1-1=4\,.$$

د ε - تنځور سره لاندې انځورونه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\det(u,v,w) &= \varepsilon_{1,2,3}\cdot 2\cdot 2\cdot 2+\varepsilon_{1,3,2}\cdot 2\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{2,1,3}\cdot 1\cdot 1\cdot 2\\ &\quad +\varepsilon_{2,3,1}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,1,2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,2,1}\cdot 1\cdot 2\cdot 1\\ &= 8-2-2+1+1-2=4\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

د ديترمينانتونو لپاره قاعدې Regeln für Determinanten

د $(n\times n)$ - ماتريکسونو A او B لپاره صدق کوي:

- $$\det A=\det A^{t},\quad \det A^{*}=\overline{\det A}$$
- $$\det(AB)=(\det A)(\det B)$$.
- A تيک هلته انورتير وړ يا معکوسکېدونکي ده، که او $\det A\neq 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

اول – د سيومتري خويونه د ځای بدلون پسې وديزوني څخه لاس ته راځي:

$$\det A^{t} = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n} \, .$$

که د جمعې اجزا سره اندکسونه يا پيژند نخښې $\{1, \ldots, n\}$ هر يو په لړی پرلپسې و i ته معکوس ځاي بدلون j سره و وځغلوو، نو د تابع يو تغير شوی نظم لاس ته راوړو:

$$a_{j_1, i_{j_1}} \cdots a_{j_n, i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} \, .$$

داچې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو مساوي وديزينه لاس ته راځي، لکه د $\det A$ لپاره.

د بيلګې په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

يو بل ته معکوس ځاي پلونونه دي په څيکليکي ليکدول او

$$a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} = a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} = a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} = a_{j_1,1} a_{j_2,2} a_{j_3,3} \, .$$

که د زياتيدونو يا د جمعي د اجزاو ا ينکسونو يا پيژندنخښو $\{1, \ldots, n\}$ کې وځغلي هر يو په لړی پرلپسي و i ته په څټ يا برعکس بدلونونه يا پرموتيشنونه j ته ، نو فنکشن يو تغير شوي نظم راکوي.

$$a_{j_1, i_{j_1}} \cdots a_{j_n, i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو سرېب مساوي يا باربه وده لاس ته راولي لکه $\det A$.

د بيلګې په توګه

$$i = (1\;2\;3) \leftrightarrow j = (1\;3\;2)$$

يو بل ته په ځيکليکي لکندود په ځټ يا معکوس پرموتيشنونه يا ځای بدليدنې دي، او

$$a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} = a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} = a_{j_1,1}a_{j_2,2}a_{j_3,3}\,.$$

مخنخښنهσ مثبت ده او هرځل ، ځکه چې

$$i = (1\;3) \circ (1\;2), \quad j = i^{-1} = (1\;2) \circ (1\;3)\,,$$

دا په دې معنا چې د پدلونون شميره (ګڼون) هر ځل 2 دی.

دويم – که معکوسوړ نه وي، نو ضرپوالی د دريم خوي څخه لاس ته راځي.

د $\det A \neq 0$ لپاره ښوول کيږي، چې تابع

$$B \mapsto f(B) := \det(AB)/\det(A)$$

تو د ديترمينانت ک ټاکونکي خويونه لري، په تعقيب د $\det B$ سره بايد برابر وي.
نورمي کونه $f(E_n) = 1$ ځرکنده ده. د ډېرکرښيزوالي او انتيسيومتري لپاره په پام کې نيسو، چې فنکشن(تابع) $B \mapsto AB$ کرښيزه ده د B په متو کې او دا چې د دوه متو بدلون د AB د اړونده متو بدلون په ګوته کوي.

دريم – يو مربع ماتريکسA ټيک هلته نامعکوسوړ ده، که د يوه نه ساده وکتور x لپاره $Ax = 0$ وي، دا په دې معنا چې که د A د د متو يو نه ساده کرښيو کمپينيشن a_j شتون ولري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1a_1 + \cdots + x_na_n = 0\,.$$

$$x_1a_1 + \cdots + x_na_n = 0\,.$$

په ورکړشوي حالتکې د متووکتور ځایپدلون څه کېدی شي $x_1 \neq 0$ ونیسو، دا په دې معنا چې

$$a_1 = y_2a_2 + \cdots + y_na_n, \quad y_j = -x_j/x_1\,.$$

د ضرییوالي څخه لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{j=2}^{n} y_j \det(a_j, a_2, \ldots, a_n) = 0\,,$$

ځکه چې ټولې په ښي لور ډیترمیناتونه دوه برابرې متې خوندي لري، باید د انتی سیومتري له امله ورکې شي یا له منځه ولاړې شي.

دا چې د انورتیر وړinvertierbaren (په ښتوړ) ماتریکس دیترمینانت د صفرسره برابر نه دی، د یوه له متو خواره شوي غبرګ اړخیز لوریز حجم په حیث دیترمینانت د هندسي تشریح څخه لاس ته راځي. بالاخره دا همدااوس د $\det(A^{-1})\,.$ لپاره ښوول شوي ضربوالي څخه لاس ته راځي.

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

د ځانګړو ماتریکسونو دیترمئناتونه

Determinanten spezieller Matrizen

د یوه $(n \times n)$ - ماتریکس A لپاره دیترمینانتونه ترلي ورکول کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مثلث ماتريکس: که $a_{i,j} = 0$ د $i < j$ لپاره يا $i > j$ لپاره وي، نو باور لري

$$\det A = a_{1,1} \cdots a_{n,n} .$$

- بلوک دياگونال ماتريکس: که ماتريکس B بلوک جوړښت د $A_{i,j} = 0$, $i \neq j$ سره ولري اومربع دياگونال بلوکونه $A_{i,i}$ ، نو باور لري

$$\det B = \prod_{i=1}^{k} \det A_{i,i} .$$

- اورتوگونا او يونيتار ماتريکسونه: د يوه يونيتارمياتريکس U لپاره باور لري

$$|\det U| = 1 .$$

د يوه اورتوگونال ماتريکس $(u_{i,j} \in \mathbb{R})$ لپاره ځانگړی دی

$$\det U \in \{-1, 1\} .$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

مثلثماتريکس : دا چې $\det A = \det A^{t}$ دی، بسيا کوي چې پورته مثلث ماتريکس وڅېړو. د $(1, \ldots, n)$ دځای بدلون i لپاره، کوم چې کتمتوال(ايدنتيتي) نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

، لاس ته ارځي، چې لږ تر لږه یو توکی i_k د $i_k > k$ سره باید ورکړ شوی وي، دا په دې معنا چې $a_{i_k,k} = 0$. داسې جمعه راکمیږي، د کټمتوالي ورکړه ، او دیترمینانت د دیاګونال توکو د ضرب څخه ورکول کیږي.

بلوکدیاګونال ماتریکسونه : لومړی فقط یو وېش په 2 دیاګونالبلوکونو راړړو چې لویې n_1 او n_2 لري، نو دا بسیا کوي، چې په ځاي بدلون چې ور جمعه کړو یا ورېیات کړو، کوم چې لومړي توکي د خپل ځانونو ترمنځ او له دې سره هم اکر توکي د خپل ځانونو ترمنځ بدل کړي، څکه چې نور مو پاتېدونو یا د جمعې اجزاوو 0 ته بیایي. دا د جمعې پاتې اجزاوې د لومړیو n_1 توکو یوه ځایبدلون k او د اخرو n_2 توکو یو ځاي بدلون l د ضرب په څیر لیکل کیږي:

$$
\begin{aligned}
\det B &= \sum_{i \in S_n} \sigma(i) \left(a_{i_1,1} \cdots a_{i_{n_1},n_1}\right) \left(a_{i_{n_1+1},n_1+1} \cdots a_{i_n,n}\right) \\
&= \left(\sum_{k \in S_{n_1}} \sigma(k) \left(a_{k_1,1} \cdots a_{k_{n_1},n_1}\right) \right) \left(\sum_{l \in S_{n_2}} \sigma(l) \left(a_{n_1+l_1,n_1+1} \cdots a_{n_1+l_{n_2},n}\right) \right) \\
&= \det A_{1,1} \det A_{2,2} \, .
\end{aligned}
$$

ایندوکتیو له دې څخه یوه وینا لاس ته روړل کیږي له دوه بلوکونو څخه په ډېرو یوې ویشنې لپاره.

اورتوګونال او یونیتار ماتریکسونه: دا چې کمپلکس کنجوګیشن په جمعې ضرب سره منځ ته کوي او $\det U = \det U^t$ صدق کوي، نو د دیترمینانت د ضربوالي څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = \det E = \det\left(U^*U\right) = \det U^* \det U$$

$$= \overline{\det U^t} \det U = \overline{\det U} \det U = \left|\det U\right| .$$

په حقيقي حالت کې ديترمينانت حقيقي ده او له دې امله فقط 1 او -1 ممکن دي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د ديترمينانتو بڼه بدلون Umformung von Determinanten

د يو ماتريکس ديترمينانتونه د د دوه برابرو متو او يا دوه برابرو ليکو سره صفر دي.له دې په ځانګړې توګه لاس ته راځيو چې ديترمينانتونه تغير نه خوري، که که سړی د يوې متې (ليکې) يوې بلې متې (ليکې) ته ورزيات کړي يا ورجمعه کړي ليکونکي : هيوليک، هيورنر

دا چې د ترانپوني حالت کې د يوه ماتريکس متَه په ليکې بدليږي او $\det A = \det A^t$ صدق کوي،دنو بسيا کوي، چد متو حالت وڅيرو.

د دوه متو د پدلولو سره بايد ديترمينانت د تعريف له مخې مخنخښه بدله کړي. که دواړه کتمتې متې يو د بل سره بدلې کړی شي ماتريکسونه ځان نه بدلوي او ديترمينانتونه بايد صفر وي.

که λ - ځله د متې a_j و متې $i \neq j$, a_i ته ور زياته يا جمعه شي، نو لاندې ماتريکس لاس ت ه راځي

$$A' = \left(a_1, \ldots, a_i + \lambda a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n\right) .$$

د کرښيز کمبينيشن په بنسټ کېدی شي ديترمينانت و وېشل شي يا ټوټه شي په

$$\det A' = \det\left(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n\right) + \lambda \det\left(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n\right) .$$

دويم ماتريکس دوه کتمتې متې لري او له دې امله دا ديترمينانت صفر لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

د یوه ماتریکس د یوې لیکې ډیرواره د ماتریکس د بلې لیکې سره زیاتولو یا جمعه کولو له لارې کېدی شي ماتریکس په مثلث بڼه باندې واړول شي او دیترمینانت بیا د دیاګونال توکو د ضرب له لارې وګټل شي یا لاس ته راړل شي.

که د متو یا لیکو بدلون صورت ونیسي، مخنخښه تغیر خوري.

د بیلګې په توګه کېدی شي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

لکه چې تعقیبوي وشمېرل شي.

دریمه لیکه ترې کم یا منفی د لومړۍ لیکې درې ځله راکوي :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

د دویمې متې او څلورمې متې بدلون:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 3 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

دریمه لیکه ورزیات دویمه لیکه، څلورمه لیکه ترې کم دویمه لیکه راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (-2)) = 24\,.$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د ديترمينانتو وديزيينه Entwicklung von Determinanten

د يوه $(n \times n)$ - ماتريکس A ديترمينانت کېدی شي د يوې په خوښه متي يا ليکي پسي وديزيينه کړي.:

$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$	د ليکي k پسي وديزيينه
$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$	د درز يا متي l پسي وديزيينه

چيرته چي $\tilde{A}_{i,j}$ هغه ماتريکس په ګوته کوي، کومه چي د A د i -مي ليکي ، j - مي متي د کربني کولو (په کربنه کولو له منځه وړني) له لارې منځ ته راځي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د $\det A = \det A^t$ له امله بسيا کوي، چي وديزيينه د يوې متې پسې تر څېړني لاندې ونيسو.

- مه متِه په متو

$$a_l = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l} e_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوټه کوو، د ديترمينانتونو د ډېرکرښيزوالي په اساس لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l} \det \underbrace{(a_1, \ldots, a_{l-1}, e_i, a_{l+1}, \ldots, a_n)}_{=B_i} .$$

يو ماتريکس B_i ترخپېرني لاندې نيسو، نو کېدی شي د دې لپاره د $n-l$ متېه بدلونونو له لارې l ــمه متېه اخر ته راوړل شي، بې له دې چې د نورو متېو لړېپرلپسې په خپلو منځونوکې تغير شي.

په ورته توګه کېدی شي i ــمه ليکه د $n-l$ ليکه بدلونونو سره اخرې ليکې ته راوړل شي:

$$\det B_i = (-1)^{n-l}(-1)^{n-i} \det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots \; a_{i,n} & 1 \end{pmatrix}$$

د ښي اړخ ديترمينانت کې فقط د S_n ځاي بدلونونه ونډه اخلي، چې د n ــمې ليکنې په خيث n لري. دا د S_{n-1} ځای بدلون ښايي او له دې سره دی

$$\det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots \; a_{i,n} & 1 \end{pmatrix} = \det \tilde{A}_{i,l} .$$

د زياتونو د جمعي اجزاوو ضرب د $1 = (-1)^{2l+2i-2n}$ سره د ورکړ شوي وديزېيني فرمول ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لپاره ديترمينانت د لومړی ليکي پسي وديزبينه شي، نو لاس ته ترې راځي

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2(4-1) - 1(2-1) + 1(1-2) = 6 - 1 - 1 = 4\,. \end{aligned}$$

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د 3 ټکو له لارې د يوې سطحې ايمپليڅيت(ساده) انځورونه

Implizite Darstellung einer Ebene durch 3 Punkte

په $\mathbb{R}^3$ کې يوه سطحه چې د درې ټکو

$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ او $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې ورکړ شوې وي، کېدی شي په ايمپليځيت فرمول له

$$E: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

له انځور شي. د لومړی ليکې پسې وديزيينې سره لاس ته راځي

$$E: ax + by + cz = d$$

د لاندې سره

$$a = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad b = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليک، شترايت

بنسټ ازماينت Basistest

وکتورونه $a_1, \ldots, a_n \in K^n$ ټيک هلته يو بنسټ جوړوي، که د ماتريکس $A = (a_1, \ldots, a_n)$ ديترمينانتونه ورک نه شي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

که د A لومړۍ ليکه صفر وي، نو غوښتنه (ثبوت) روښانه ده.

په بل حالت کې کېدی شي د متې يوه ځاي بدلون پسې ونيسو يا فرض کړو، چې $a_{1,1} \neq 0$ اومتې a_j لکه ښنګه لرو بڼه بدل کړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_j \to a_j' = a_j - \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}}\, a_1, \quad j = 2, \ldots, n\,.$$

دا د متو عمليو کارولو له لارې کېدی شي د متو ديترمينانت او هم د بنسټ خويونه بې تغيره پاتې شي. دا بڼه بدل شوی ماتريکس لاندې بڼه لري

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ c & & B & \end{pmatrix}.$$

د وديزيېني جملې پسې لرو

$$\det A' = a_{1,1} \det B\,,$$

او دا چې $a_{1,1} \neq 0$ د A' متې تيک هلته يو د K^n بنسټ دي، که د B متې يوه د K^{n-1} بنسټ دي. دا غوښتنه کېدی شي اندوکتيو و ښوول شي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د بيلګې په توګه له

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کېدی شي د بنسټ ازماېښت روښانه شي.

که د متو يا ليکو څخه يو يې فقط له صفر جوړ وي، نو د ديترمينانت لپاره 0 ترې لاس ته راځي. په دې حالت کې د ماتريکس رانګ ماکسيمال 1 دی او له دې امله متې بنسټ نه جوړوي.

په بل حالت کې له $ad = bc$ لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab-ba \\ ad-bc \end{pmatrix} = 0$$

او له دې سره متې کرښيز بلواک دي.

که د متې کرښيز بلواک وي، نو صدق کوي:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},$$

ديترمينانت شمېرل کي.ي و ته:

$$\det A = ad - bc = a\lambda c - \lambda ac = 0\,.$$

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د واندرموند – ديترمينانتونه Vandermonde-Determinante

په n ټکو x_i کي ارزښت شوي مونومونو $1, x, \ldots x^{n-1}$ ديترمينانت دی

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)\,.$$

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د $n = 2$ لپاره د واندرمود – ماتريکس ديترمينانت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 .$$

د يوه ټوليز n لپاره د ټولو نورو ليکو څخه لومړۍ ليکه کميږي:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} .$$

د لومړۍ متې پسې وديزيېنې سره راکوي

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} ,$$

د کوم سره چې له k -مې ليکې څخه ضريب $x_k - x_1$ رادباندې کيدی شي:

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i}x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i}x_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 + x_nx_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i}x_1^i \end{vmatrix} .$$

که د هرې متې څخه دا د مخه تېرې شوې متې دا x_1 – ځله کم کړو، نو بېرته پيل بڼې ديترمينانت لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

، او فرمول د اندکشن له لارې ښوول کېدی شي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

کرښيز مساوات سيستم Lineares Gleichungssystem

په يوه تن يا جسم K کرښيز مساوات سيستم دا لاندې بڼه لري

$$\begin{matrix} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

د يوه ضريبونو د ماتريکس $A = (a_{i,j}) \in K^{m\times n}$ سره، د نامعلومو $x_j \in K$ او يو ښی اړخ $b \in K^m$ سره.

دا کرښيز مساوانسيستم هوموجېن بلل کيږي، که $b = 0$ وي، پرته له دې ناهوموجېن inhomogen بلل کيږي.

د يوه حقيقي ($K = \mathbb{R}$) يا کمپلکس ($K = \mathbb{C}$) کرښيز سيستم لپاره K اکسپليڅيټ explizit نه شي ورکول کېدی. دا چې کوم حالت مخ ته لرو د اړوندوالي له مخې ليدل کيږي يا روښانه دی.

که کرښيز مساوات سيستم کوم حل نه لري (په ټوليزه د $m > n$ لپاره)، نو دا باندې-ټاکلی بلل کيږي. په دې حالت کې له اندولپرابلم څخه غږيږو. يو کرښيز مساوات سيستم د

(c) ketabton.com: The Digital Library

نا يواحني حل سره (په توليزه توګه د $m < n$ لپاره) کښته - – يا لاندې- تکلی بلل کيږي.

يوه تابع $f(x)$ کيدی شي له داتن

$$(x_i, f_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

څخه د انټرپوليشن له لارې په نږدې توګه بيا جوړه rekonstruiert شي. که يوه کرښيزه ځاي په ځاي کونه يا اينوونه

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j(x)$$

د مناسب بنسټتوابعو p_j سره، نو د انټرپوليشن شرايطو څخه

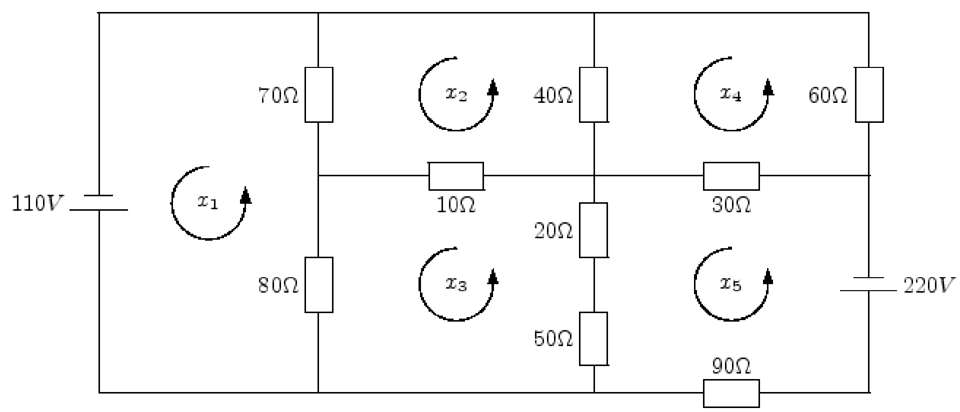
برېښنايي جريانداېره Elektrischer Schaltkreis

که په يوه برېناجريان دايره (ګردی)کې د x_i سره د دايرې برېښناجريان وښايو د جريانلور د ساعتنخښه وونې (عقربک) مخامخ يعنې معکوس، د سره د i - مې او j – مې پټی ګسره دډ يا مشترک مقاومت، د $R_{i,j}$ سره او د U_i سره اينوولی Spannungen ، نود اوم‌Ohm او کيرښهوف Kirchhoff قانون څخه دا کرښيز مساوات سيستم لرو

$$\sum_{i \sim 0} x_i R_{i,0} + \sum_{i \sim j} (x_i - x_j) R_{i,j} = U_i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $i \sim j$ معنا ورکوي، چې i -م او j –م د برېښناپټۍ يو ګډ مقاومت لري.
$x_i - x_j$ د دې مقاومت له لارې برېښناجريان دی. د $i \sim 0$, $R_{i,0}$ سره مقاومت
ښوول کېږي چې هغه فقط په i –مې پټۍ کې پروت دی.



د بېلګې په توګه د څېره شوې جريان دابرې(ګردی) لپاره کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 150 & -70 & -80 & 0 & 0 \\ -70 & 120 & -10 & -40 & 0 \\ -80 & -10 & 160 & 0 & -70 \\ 0 & -40 & 0 & 130 & -30 \\ 0 & 0 & -70 & -30 & 190 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -220 \end{pmatrix}.$$

د ضريبونو ماتريکس په دياګونال کې د يوې پټۍ پورې اړونده مقاومت او ځاي يا
(i, j) Position د i او j ګمېز يا منفي ګډ مقاومت . د دې راوړل شوې بېلګې حل
دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \approx \begin{pmatrix} 1.0157 \\ 0.5641 \\ 0.0358 \\ -0.0940 \\ -1.1595 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د يوه کرښيز مساوات سيستم حلوړوالی

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

په يوه تن يا جسم K د يوه هموجېن کرښيز مساوات سيستم حلډېرى

$$Ax = 0,$$

د يوه $m \times n$ ضريبونو ماتريکس A يوه د K^n لاندې – يا برخډېرى U ده.

که دا هموجېن کرښيز سيستم

$$Ax = b$$

يو حل v ولري، نو د توليز حل لپاره باور لري

$$x \in v + U\,,$$

دا په دې معنا چې حللډېرى د K^n يو افين affin لاندې – يا برخډېرۍ ده. په ځانګړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه کېدی شي هوموجېن کرښيز مساوات سيستم هيڅ ، يو $U = \emptyset$ يا ناپای ډېر زيات $\dim U > 0$ حلونه ولي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ، کيمرلي

که x, y د هوموجېن کرښيز مساوت سيستم حلونه وي او $\lambda \in K$ ، نو لاس ته راوړو:

$$A(x+y) \ = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

همداسي

$$A(\lambda x) \ = \lambda Ax = \lambda 0 = 0\,,$$

دا په دې معنا چې د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم د حلونو ډېرې يوه لاندې- يا برخفضا U جوړوي.

که v د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل وي او $u \in U$ ، نو $x = v + u$ د

$$Ax = A(v+u) = Av + Au = b + 0 = b$$

له امله هم د دې هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل دی.

برعکس د ناهوموجېن کرښيز مساوات سيستم د دوه حلونو v او w سره کمښت يا تفريق $v - w$ د

$$A(v-w) = Av - Aw = b - b = 0$$

له امله هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د يوه ناهوموجېن کرښيز مساوات سيستم ټول حلونه لاس ته راځي، داسې چې د ناهوموجېن کرښيز مساوات سيستم د خوښې حلونو لپاره د ټولو هوموجېن کرښيز مساوات سيستم حلونو جمعه جوړه کړو، يعې سره جمعه کړو.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

دا لاندې ساده حالتونه د کرښيزو مساواتو مختلف ډولونه د ليدنې کوي:

لومړی – کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 60 \end{pmatrix}$$

يواځني حلونه لري: $x_1 = 8$, $x_2 = 1$.

دويم – کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

يواځنی حل نه لري. که $x_3 = t$ په خوښه وټاکو، نو $x_2 = 2t$, $x_1 = 2$ د حلونو په څېر لاس ته راځي.

دريم - کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوم حل نه لري. اخرنی ليکه $x_2 = 4$ راکوي، که دا په يوه ليکه کې کېښوول شي، د لومړۍ ليکې څخه $x_1 = 2$ لاس ته راځي، له دويمې څخه برعکس $x_1 = 1$.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ديترمينانت او د يوه مساوات سيستم حلوړوالی

Determinante und Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

يو کرښيز مساوات سيستم

$$Ax = b$$

د مربع ضريبونو ماتريکس A سره تيک هلته يو يواځنی حل لري، هر ښي لوريزې b سره، که همداسې دا هوموجېن سيستم $Ax = 0$ فقط يو ساده حل $x = 0$ ورلري.

که $\det A = 0$ وي، نو يو حل فقط د ښی لورې b لپاره شتون لري په هغه د A د متو څخه غزېدلې لاندې – يا برخفضا ده. په دې حالت کې حل يواځنی نه دی.

ليکونکي: کرايخ، هيوليګ

غوښتنه د ديترمينانت د خويونو څخه په لاس راځي.

و $\det A \neq 0$ ته ورته لرو، چې د A متې $a_1, \ldots, a_n$ کرښيز خپلواکې دي. د تعريف سره سم دا په دې معنا دی چې

$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$$

د دې لپاره چې د ناهوموجېن سیستم يواځنی حلوړوالي ته ورته لاس ته راوړای شو، له دې كار اخلو چې متې يو بنسټ جوړ كړي، دا په دې معنا چې هر ښی اړخ b د

$$x_1a_1 + \ldots + x_na_n = b \Leftrightarrow Ax = b$$

كرښيزكمبېنېشن په حيث

يواځنی انځوروړ دی.

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

دا كرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

تيک هلته يو يواځنی حل لري، كه ديترمينانت $ad - bc \neq 0$ وي. په دې حالت كې حل په لاندې ډول دی

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc}\,, \qquad y = \frac{av - cu}{ad - bc}\,.$$

كه ديترملنانت $ad - bc$ برابر 0 وي، په ټوپيزه توګه كرښيز مساوات سيستم حل نه لري. په دې حلات حلونه فقط هلته شتون لري، كه

$$av \qquad = cu$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$bv \qquad = du$$

صدق ولري. که د بېلګې په توګه $a \neq 0$ وي، نو کېدی شي y په خوښه وټاکو او د x لپاره لاس ته راوړو

$$x = \frac{u - by}{a} .$$

ليکونکي: پپ، اهيوليک

د کرامر قاعده Cramersche Regel

د يوه مربع کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ لپاره

$$x_i \det A = \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n) ,$$

دی، د کوم a_j سره چې د متوضريبونو ماتريکس A په نخښه کيږي.

په ځانګړې توګه کېدی شي د $\det A \neq 0$ لپاره په څټ يا معکوس $C = A^{-1}$ د

$$c_{i,j} = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det A}$$

له لارې ټاکل کېدی شي.

ليکونکي: هيوليک، شترايت

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ديترمينانت د ډېركربنيزوالي او سيومتري له امله لاس ته راځي:

$$\det(a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_n) = \det(a_1,\ldots,a_{i-1},\sum_{j=1}^{n} a_i x_i, a_{i+1},\ldots,a_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(a_1,\ldots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

$$= x_i \det(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

په ځانګړي توکه د $b = e_j$ سره د معکوسي j ـمه مټه $x = (c_{i,j},\ldots,c_{n,j})^{\mathrm{t}}$ راکوي

ليکونکي: هيوليک، شترايت

ديوه (2×2) - ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

د معکوس C لپاره د کرام قاعدې سره لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{d}{\det A}, \qquad c_{1,2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-b}{\det A},$$

$$c_{2,1} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-c}{\det A}, \qquad c_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې د $\det A = ad - cb$ سره دا لاندې لرو

$$\det A = ad - cb$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د (3×3) - ماتریکس

$$(3 \times 3)$$

د معکوس G لپاره د کرامر د قانون له مخې لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{25}, \qquad c_{1,3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{25},$$

$$c_{3,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{25}, \qquad \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول داسې دي

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 12 & 1 & 8 \\ -14 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

په شټ لور ځای په ځای کول Rückwärts-Einsetzen

په يوه کرښيز مساوات سيستم کې د پورته مثلث -بڼې سره

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix}}_{R}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

د $\det R = r_{1,1}\cdots r_{n,n} \neq 0$ سره کېږی شو ناټاکلې $x_n, \ldots, x_1$ يو پر بل پسې وټاکو:

$$r_{n,n}x_n = b_n \rightarrow x_n = b_n/r_{n,n}$$

او د $\ell = n-1, \ldots 1$ لپاره ،

$$r_{\ell,\ell}x_\ell + \cdots + r_{\ell,n}x_n = b_\ell, \rightarrow x_\ell = \left(b_\ell - r_{\ell,\ell+1}x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n}x_n\right)/r_{\ell,\ell}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره به هر يو دا اوس معلوم شمېل شوي ارزښتونه $x_{\ell+1}, \ldots, x_n$ و کارول شي.

په يوه مساوات سيستم کې د يوه لاندې مثلث ماتريکس کې کېدی شي په ورته توګه يو په بل پسې $x_1, \ldots, x_n$ و ټاکل شي.

د کربنيز مساوات سيستم

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 7x_3 & = & 7 \end{array}$$

لپاره په ملث بنې کې د په ځت ايښووني له لارې حلونه لاس ته اځي

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = (0-2)/2 = -1$$

$$x_1 = (6-3(-1)-1) = 2\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د ګاوس ترانفورميشنGauß-Transformationen

لاندې عمليې د کربنيز مساوات سيستم د حلونو ډېرۍ بې تغيره پرېږدي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د دوه مساوتو بدلونه
- یوه مساوات ضربونه د یوه ضریب $\neq 0$ سره.
- د یوه مساوات کمول له یوه بل مساوات څخه

د اخرو دوه عملیو د کمبینېشن له لارې د یوې لیکې ډېرواره زیاتول یا جمعه کول و بلې لیکې ته عملیې دي چې اجازه لري یا پریښوول شوې عملیې دي.

د داسي په نامه ګاوس ترانسفورمېشن په مسته کزدی شي sukzessive یا یو په بل پسي ناټاکلي له منځه یووړل شي او یو کربنیز مساوات سیستم په مثلثفورم تراسفورمه کړو یا په بله بڼه واړوو او بیا یې په څټ ایښووني له لارې حل کړو.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د کربنیز مساوات سیستم

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

حل ځان ته تغیر نه ورکوي له

- د لومړي او دویم مساوات بدلونه

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

- د دویم مساوات ضربونه د 2 ضریب سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

- د دریم مساوات کمول یا تفریقول له دویم مساوات څخه

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ & & -3x_2 & + & 9x_3 & = & 30 \end{array}$$

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د ګاوس د له منځه وړنه Gauß-Elimination

د ګاوس – بنه بدلون له لارې کېدی شي یو کربنیز مساوات سیستم د انعکاس وړ $(n \times n)$ -ضریبماتریکس به ماکسیمال $n-1$ پلونو (قدمونو) په پورته مثلثبنه باندې واړول شي یا راوړو. د دې لپاره یو په بل پسې د دیاګونال لاندې کښته ضریبونه له منځه یوسو دا په دې معنا چې له $\ell-1$ پلونو (قدمونو) وروسته دا ک م س (کربنیز مساوات سیستم) لاندې بڼه غوره کوي :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} a_{1,1} & x_1 & + & a_{1,2} & x_2 & + & \dots & + & a_{1,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{1,n} & x_n & = & b_1 \\ & & & a_{2,2} & x_2 & + & \dots & + & a_{2,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{2,n} & x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{\ell,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell,n} & x_n & = & b_\ell \\ & & & & & & & & a_{\ell+1,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell+1,n} & x_n & = & b_{\ell+1} \\ & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{n,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{n,n} & x_n & = & b_n \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوګوني ډول ℓ -م له منځه وړنې پل داسې ځغلي لکه لاندې .

- که دا –م دیاګونال توکی، داسې په نامه د پیوټ-تونی -Pivot Element، صفر دی، نو ℓ -م به د یوه دې لاندې مساواتو سره بدل شي، داسې چې $a_{\ell,\ell} \neq 0$ به باور ولري...
- د $i > \ell$ لپاره به د i –م مساوات څخه د ℓ –م مساوات ډېر واره کم شي، داسې چې $a_{i,\ell}$ صفر شي:

$$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - q_i a_{\ell,j}, \quad b_i \leftarrow b_i - q_i b_\ell \quad (q_i = a_{i,\ell}/a_{\ell,\ell})$$

د ټولو $j \geq \ell$ لپاره..

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د کربنیز مساوات لپاره

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د ګاوس الګوریتم په لاندې تو؛ه ځغلي:

- د لومړی او دویمې لیکې پدلول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (3 لیکه) – (1 لیکه) او (4 لیکه) - (1 لیکه) $\cdot 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (.لیکه2) + (لیکه $\cdot 2$ 3):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (لیکه3)- (لیکه4) $\cdot 3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د ایښیلون بڼه Echelon-Form

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو كربنيز مساوات سيستم د يوه $(m \times n)$ - ضريب ماتريكس سره کېدی شي د ګاوس ـترانفورميشن سره د ايښېلون-فورم باندې يې بڼ بدله يا واړول شي:

$$Ax = b \to \underbrace{\begin{pmatrix} 0\dots0 & p_1 & *\dots* & & & & & \\ & & 0 & 0\dots0 & p_2 & *\dots* & & \\ & & & & 0 & 0\dots0 & p_3 & *\dots* \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} .$$

له دې سره داسې په نامه پيووت

$$p_1 = a'_{1,j_1}, \dots, p_k = a'_{k,j_k}, \quad k \le m, \quad 1 \le j_1 < \dots < j_k \le n,$$

د صفر سره نابرابرې دي او k د A رانګ ی.

د k ـم ترانفورميشن پل په لاندې ډول ځغلي:

- يو له صفر مختلف متريکس توکی p_k د خورا کوچنی متې اينډکس(پيژندنخښې) سره او $\geq k$ ليکې اندکس(د ليکې پيژند نخښه) د پيووت توکی په حيث ټاکل کيږي او د ليکو بدلون له لارې پوزيشن (k, j_k) ته راوړل کيږي. که پيووت توکی شتون نه لري، نو د ايښلون پڼه مو لاس ته راوړې ده.

- د k ليکې دېرواره کمون يا تفريق له لارې د پيووت لاندې لور ته د ماتريکس توکی له منځه ځي.

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

لپاره ترنفورمیشن د ایښلون-فورم باندې په لاندې ډول ځغلي

1. د لومړی او دویمې لیکې پډلون:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2. (3.لیکه Zeile) - 2·(1.لیکه Zeile) und او (4.لیکه Zeile) + (1.لیکه Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

3. (3.Zeile) - (2.Zeile), (4.Zeile) - (2.Zeile)

او (5.Zeile) - (2.Zeile)

په پورته کې Zeile د لیکې یا میلې په معنا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.4 (4. Zeile) - $\frac{1}{2}\cdot$ (3.Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

د ايښلون – فورم لري نا ساده ليکي د پيووټ –توکو $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ او $p_3 = -10$ سره.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د ايښلون- بڼه د يوه ل م س (کربنيز مساواتسستم)حل

Lösung eines LGS in Echelon-Form

يو کربنيز مساوات سيستم $Dx = c$ د ايښلون په بڼه،

$$\begin{pmatrix} 0\ldots 0 & p_1 & *\ldots * & & & & & \\ & & 0 & 0\ldots 0 & p_2 & *\ldots * & & \\ & & & & 0 & 0\ldots 0 & p_3 & *\ldots * \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پيووټ $p_1, \dots, p_k$ سره تيک هلته حلوړ دی، که $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$ وي.

حل يواځنی دی، که $k = n$ وي. د $k < n$ لپاره د هوموجين کرښيز مساوات سيستم ($c_i = 0$)تيک $n - k$ کرښيز خپلواک حلونه شته .

نا معلومې، چې بې له پيووټ يې متې په ګوته کوي. کېدی شي ازادې يا په خوښه و ټاکل شي.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

په لاندې کې به زيات تيوپيکي حالتونه تر بحث لاندې راوړل شي.

- $k = n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د په ځنډ اينسووني له لارې ريکورزيو يواځنی حل لاس ته راوړی شو.

$$x = (1, -1, -1, 1)^t.$$

- $3 = k < n = 5$، $c_4 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرنۍ لیکه کې $0 \cdot x = 1$ ترې لرو، له دې سره کرښیز مساوات سیستم کوم حل نه لري.

- $3 = k < n = 5$، $c_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

دا چې $c_{k+1} = 0$ ، نو کرښیز مساوات سیستم $Dx = c$ حلوړ دی

د $\operatorname{Rang} D = 3 = n - 2$ له امله حل x یواځنی نه دی. دلته د دوه کرښیز خپلواک حلونه v_i شتون لري د هوموجېن سیستم او د ټولیز حل لاندې بڼه

$$x = x_s + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \,, \alpha_j \in \mathbb{R}$$

لري د هوموجین سیستم یو ځانګړی حل x_s سره.

وکتورونه v_i د پیووت پورې نه اړه لرونکو نامعلومو د کانونیکي (بڼه یز: کنوني) ټاکنې له لارې معلوموي یا ټاکي او پاتې ضریبونه په هوموجېن سیستم باندې:

$$r_{\ell,\ell}x_\ell + \cdots + r_{\ell,n}x_n = b_\ell, \to x_\ell = \left(b_\ell - r_{\ell,\ell+1}x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n}x_n\right)/r_{\ell,\ell}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو ځانګړی حل

$$x_s = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د $x_3 = x_5 = 0$ اينووني له لارې لاس ته راځي.

ليکونکي: هيوليک، شترايت

رانګ او د ک م س(کرښيز مساواتسيستم) حلوړوالی

Rang und Lösbarkeit von LGS

وي دې $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m.$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m.$

- کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ يو حل لري

$$\Longleftrightarrow \text{Rang}\, A = \text{Rang}(A, b).$$

- کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ يواځنی حلوړ دی

$$\Longleftrightarrow \text{Rang}\, A = \text{Rang}(A, b) = n.$$

- کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ ډېر حلونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Longleftrightarrow \text{Rang}\, A = \text{Rang}(A,b) = k < n.$$

دلته په پام کې ولری، چې د A رانګ او د غزېدلي ماتريکس $(A,$ اينواريانت دي د ساده بنې بدلون سره. له دې امله کېدی شي و نيول شی يا فرض شي کرښيز مساوات سيستم به ايښلون-بنه دی. به دې بنه کېدی شي نتيجې ترلې ولوستل شي.

د انډول کرښه(انډولکرښه) Ausgleichsgerade

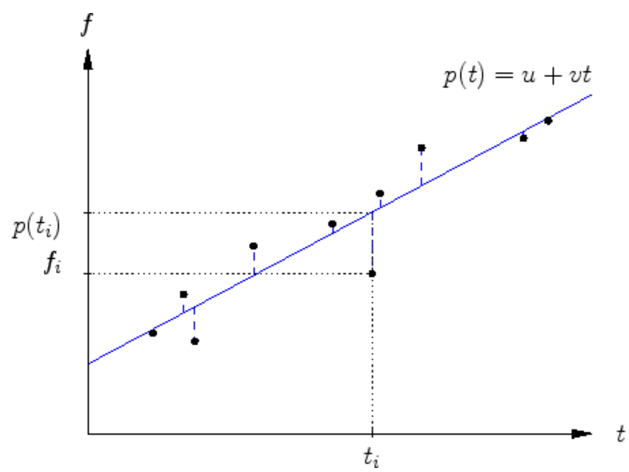
يوه کرښه

$$p(t) = u + vt\,,$$

، چې داتونه $i = 1, \dots, n$ ، به خورا ښه توګه approximiert کوي، کېدی شي د ناتيکاوي مربع جمعي کمښت

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i - p(t_i))^2$$

له لارې پيدا کړی شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د محوربرخې u او جګېدنې v لپاره لاندې فرمولونه راکوي

$$u = \frac{(\sum t_i^2)(\sum f_i) - (\sum t_i)(\sum t_i f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}$$

$$v = \frac{n(\sum t_i f_i) - (\sum t_i)(\sum f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2},$$

که لږ تر لږه دوه پراته ارزښتونه يا قيمتونه t_i ورک شي يعنې صفر وي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د مينيموم سره بايدد غلطی مربع جمعي مشتق هم د u او v هم د پسي صفر وي:

$$0 = 2\sum_i (u + vt_i - f_i)$$

$$0 = 2\sum_i t_i(u + vt_i - f_i).$$

دواړه مساوات د ماتريکس په بڼه په لاندې ډول دي

$$\begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_i \\ \sum t_i f_i \end{pmatrix}.$$

که لږ ترلږه دوه t_i مختلفي وي، نو ديترمينانت ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underbrace{(1+\cdots+1)}_{n\,\mathrm{mal}}|(t_1,\ldots,t_n)^{\mathrm{t}}|_2^2-\left(\sum_i 1\cdot t_i\right)^2>0\,,$$

او سړی د کرامر د قاعدې سره ورکړ شوی حل لاس ته راوړي

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د برابروني حل يو بل سره يوغريز کيدل يا يو په بل پريوتلو، کرښيزو مساوات سيستم

Ausgleichslösung überbestimmter, linearer Gleichungssysteme

که د يوه کرښيز مساوات سيستم $Ax=b$ ښی خوا b وي د $(m\times n)$ - اتريکس A متو کرښيزې هيولي ياسپاين کې خوندي نه وي (په تيپيکي دول د $m>n$ لپاره)، دا په دې معنا چې وي

$$\mathrm{Rang}\, A<\mathrm{Rang}\,(A,b)\,,$$

نو مساوات سيستم حل نه لري. سړی د يوه د پاسه ټاکلي سيستم څخه خبرې کوي. په دې حالت کې کيدی شي يو اپروکسيميشن د برابروالي پرابلم

$$|Ax-b|\to\min$$

له لارې و ټاکل شي.

د برابروالي حل شمېرل د نورمالومساوات يا سينګولارارزښتتوته کوني په مرسته ممکن يا شونی دی

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر - کربنيز مساوات سيستم-برابروني پرابلم

Algebra - Lineare Gleichungssysteme – Ausgleichsprobleme

نورمالمساواتونه Normalengleichungen

د يوه په خوښه $m \times n$ – ماتريکس A لپاره هر د برابروني پرابلم

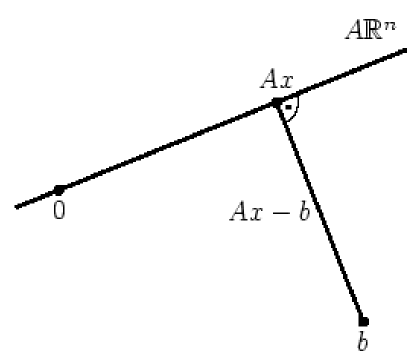
$$|Ax - b| \rightarrow \min$$

هر حل x نورماليز –مساواتونه

$$A^{\mathrm{t}}Ax = A^{\mathrm{t}}b\,,$$

پوره کوي، دا په دې معنا چې

ريزيدووم $r = Ax - b$ Residuum اورتوګونال دی د A د متو څخه غزېدلي لانديفضا $\operatorname{Bild} A$ سره



ځمککچيز يا هندسي مساوات معنا لري، چې ريزيدووم $r = Ax - b$ د ماتريکس A په متو نيغ ولاړ دی يعني عمود دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماتريکس $A^t A$ مربعيزه ده او پراخېدونی يا بعد n لري. دا ټيک هلته معکوسوړ ده کله چې $\mathrm{Rang}\, A = n$ وي، دا په دی معنا چې کله د A متې کرښيز خپلواکې وي.
نورماليز-مساوات د سينګولار حالت کې هم حلوړ دی، خو حل يې يواځنی نه دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

له

$$|A(x+ty)-b|^2 \geq |Ax-b|^2$$

د

$$(Ax-b)^t y = y^t (Ax-b), \quad r = Ax-b$$

سره برابر ارزښته نامساوات

$$2ty^t A^t r + t^2 y^t A^t A y \geq 0$$

لاس ته راځي د ټولو $t \in \mathbb{R}$ او وکتورونو y لپاره. که د نابرابرون کين اړخ په t کې د پارابول په څېر ونيول شي، نو نه منفيوال(نه کميزوالي) د

$$y^t (A^t r) = 0 .$$

سره به يوه معنا دي.

دا ټيک هلته د ټولو وکتورونو y لپاره صدق کوي، که په نوکانو کې افاده (وبينه) صفروکتور وي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لپاره نورمالمساوات لاس ته راځي

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته راځي

دا کرښيز مساوات سيستم ئواځني حل $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t$ لري.ريزيدووم $r = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t$ دي.

که A کرښيز بلواکي متې ولري، لکه په بېلګه کې

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

نو نورمالو-مساوات سيستم سينګولار دي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

حل

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې يواځني نه دي، مګر ريزيدووم

$$r = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & 0 \end{pmatrix}^t$$

.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

توموګرافيTomographie

لکه څنګه په فنکشن يا څيرونه (mappingتابع) کې ښوول شوي دي، په کمپيوټر-توموګرافي Computer-Tomographie کې د حجروغړو ټينګوالي (غلظت) $x(u,v)$ بيا جوړيږي ، په کومه کې چې د ګڼوالي يا ټينګوالي بايليدنه(کمښت) Intensitätsverlust د رونتګن وړانګو د k کودې له ℓ غبرګو کرښو

$$\mathcal{R}_i: \quad (u_i, v_i) + \mathbb{R}(\cos\vartheta_i, \sin\vartheta_i), \quad i = 1, \ldots, m = k\ell,$$

کچ کيږي. سړي د ټينګوالي وېش د يوه ټوټه ډوله ثابتې تابع approximiert کوي

سړی د ټينګواليخورونه د يوه ټوټه ډوله يا ټوټه په ټوټه ثابتو له لارې اپروکسيمي کوي د مربعو Q_j په پاتې شونو او ګڼوالي کچه ونو د نږدې وني له لارې کټلي کرښيز ا نتيګرال څخه.

$$b_i = \int_{\mathbb{R}} x(u_i + t\cos\vartheta_i, v_i + t\sin\vartheta_i)\, dt \approx \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\,,$$

چيرته چې x_j د $x(u,v)$ يو اپروکسيميشن دی په Q_j او

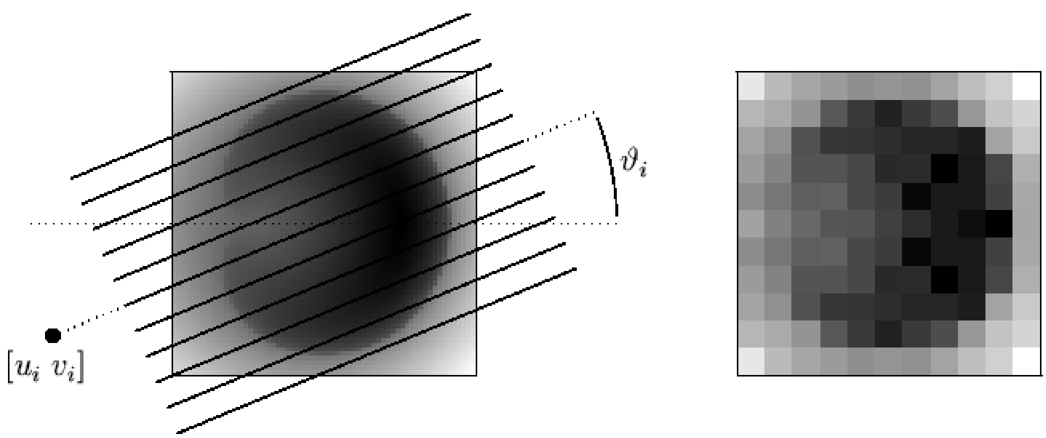
$$a_{i,j} = |\mathcal{R}_i \cap Q_j|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښو $\mathcal{R}_i$ د Q_j سره غوڅ ي یا تقاطع ا وږدوالی په ګوته کوي. دا چې د کچوونو تعداد یا ګڼون په ټولیزه توګه ډېر لوي دي نسبت د راستر (هغه تخته چې ځیره پرې کښل کیږي) څلوریو او شنتیګرالونه چې ټیک نه شي شمیرل کیدی، د داتا b څخه د x ټاکلوته سړی یو برابروالیز یا د انډول پرابلم سره مخامخ کیږي.

دالاندې ژباړي دلته راکاپي کړي(دا لاندې دې همداسې په انګرېزي پاتې وي):

›› The word "raster" has its origins in the Latin *rastrum* (a rake), which is derived from *radere* (to scrape). It originally referred to the raster scan of cathode ray tube (CRT) video monitors, which paints the image line by line by magnetically steering a focused electron beam. By association, it came also to refer to a rectangular grid of pixels. See also rastrum, a device for drawing musical staff lines پای››



پورته ښي لور ته ځیره په یوه 11×11 راستر شمیرلی نږدیوالی ښايي کیڼ ځیره شوی ټینګوالي خورونه(غلظت-) ښايي. له دې سره د کونج

$$\vartheta = 0, \pi/16, \pi/8, \ldots$$

لپاره 11 غبرګ سکن-لورې د راستر مربع سور باندې کارول شوي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

آيګن-ارزښت او آيګو-وکتور Eigenwert und Eigenvektor

يو سکالار λ د يوه مرئع ماتريکس A آيګو-ارزښت بلل کيږي، که وي:

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

وکتورونه $v \neq 0$ د $Av = \lambda v$ سره و آيګن-ارزښته λ ته آيګن-وکتورونه بلل کيږي.
آيګن-وکتورونه و آيګن-ارزښت ته د صفر وکتور سره يوځاي يوه کرښيزه فضا جوړوي، داسې په نامه د λ آيګن-فضا

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda E)$$

ليکونکي: هيوليک،هيورنر، کيمرلي

ماتريکسونه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

آيګن-ارزښتونه $\lambda_1 = 0$ او $\lambda_2 = 2$ لري، ځکه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

لاندې بېلګې د (2×2) ـماتريکسونو لپاره ممکنه حالتونه ښايي

- دوه حقيقي آيګن-ارزښتونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -1 \, , \, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 3 \, , \, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- يو حقيقي آيګن- ارزښت، دوه کرښيز خپلواک آيګن-زکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2 \, , \, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- يو حقيقي آيګن-ارزښت، يو آيګن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1 \, , \, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- دوه کنجوګيري کمپلکس آيګن-ارزښتونه او آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = 1 \mp \mathrm{i} \, , \, v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې بېلګې د کمپلکس (2×2) – متريکسونو لپاره ممکنه حالتونه څېړي.

- دوه آيګن-ارزښتونه اودوه آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2 + i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -2 + i, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، دوه کرښيز خپلواک آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، يو آيګن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda = i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليک،هيوررنر

ورته والي - ترانفورميشنÄhnlichkeitstransformation

د يوه مربعيز ماتريکس A په ورته والي تراسفورميشن

$$A \rightarrow B = Q^{-1} A Q,$$

کې آيګن-ارزښتونه ساتلي پاتيږي. آيګن-وکتورونه د اينورتيروړ ماتريکس Q له لارې تشريح شوې بنسټ بدلون سره سم ترانسفورمي کيږي، دا په دې معنا، چې د A آيګن-

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتور v و آيګن- ارزښت λ ته و همهغسې د B آيګن-وکتور $w = Q^{-1}v$ په ګوته کوي و همغه بنسټ ته.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

که v د A يو آيګن-وکتور وي و آيګن-ارزښت λ ته، يعنې $Av = \lambda v$، نو د $w = Q^{-1}v$ لپاره لاس ته

$$Bw = Q^{-1}AQw = Q^{-1}AQQ^{-1}v = Q^{-1}Av = Q^{-1}\lambda v = \lambda Q^{-1}v = \lambda w\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

لاندې مربع ماتريکس دې ورکړ شوی وي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

د آيکن-ارزښت $\lambda_1 = 2$ او $\lambda_2 = 3$ او د لاندې اړونده آيګن-وکتور سره:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

يو ورته والي ترانسفورميشن د $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

سره راکوي.

د B آيګن-وکتورونه w_1 او w_2 د

$$w_1 = Q^{-1}v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

سره، همداسې

$$w_2 = Q^{-1}v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

سره شمیرل کیږي.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

کرکتریستکي پولینوم Charakteristisches Polynom

د $(n \times n)$ – ماتریکس A آيګن-ارزښتونه د کرکتريستيکي پولينوم صفرونه دي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

په ځانګړې توګه د ماتبريکس آيګن – ارزښونه د ترانسبوزيشن سره اينواريانت پاتې کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: هيوليک، هيورنر، کيمرلې

يو سکالار λ تيک هلته د $(n \times n)$-ماتريکس A آيګن-ارزښت دی، که ولرو

$$Av = \lambda v\,, \quad v \neq 0,$$

دا په د ې معنا چې که دا هوموجېن کرښيز مساوات سيستم $(A - \lambda E)v = 0$ يو له صفر مختلف حل ولري. دا حالت تيک هلته لرو، که $(A - \lambda E)$ زينګولار وي يعنې که وي:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د آيګن – ارزښتونو او - - وکتوونوشميرنه

د دې لپاره چې د مربع ماتريکس A لپاره د آيګن-ارزښت پرابلم حل کړو، لومړی د کرکتريستيکي پولينومونو آيګن-ارزښتونه λ د صفرځايونو په حيث ټاکي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)\,.$$

د هر آيګن – ارزښت λ لپاره له دې سره اړوند آيګن – وکتور v لاس ته راوړو د هوموجېن ګرښيز مساوات سيستم د يوه ناتريويال په څېر

$$(A - \lambda E)v = 0\,.$$

د دې لپاره چې د آيګن-فضا V_λ لپاره يو بنسټ لاس ته راوړو، سړی کړی شي دا سيستم په اپښيلون-فرمول ترنسفورمی کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه $\dim V_\lambda = 1$ دی. دا تر یوه سکالار ضیب یواځنی ټاکلی آیګن-وکتور v کېدی شي هلته وټاکل شي ، په کوم کې چې د وکتورونو v مناسب کمپوننتونه له مخه ورکړي

لیکونکي: هیولیګ، کرایخ

د ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

د آیګن –ارزښت د ټالکو لپاره کرکتیستیکی پولینوم جوړوو

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 - 4 + 8 - 2\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4 \,.$$

او د ده صفرځایونه ټاکي. د ګومان له مخې (د مطلق ارزښت غړي پروېشونی یا مقسوم علیه) د لومړي صفرځای په څېر $\lambda_1 = 2$ لاس ته راځي. د دې صفرځای وېشنه

$$(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4)/(\lambda - 2) = -\lambda^2 + 2\lambda - 2,$$

او په لانې فرمول (دنیمې شپې فرمول په نامه بلل شوی) کې یې ځای په ځای کوو ترې لرو

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{-2} = 1 \pm \mathrm{i} \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو آيګن – وکتور و آيګن – ارزښت 2 ته کيدی شي د هوموجين مساوات سيستم

$$(A-2E)v=\begin{pmatrix}-2&-2&-1\\2&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}v=0$$

حلونو له لارې وټاکل شی. حل $v=(1,0,-2)^t$ ساده ليدل کيږي

يوه آيګن-ارزښته $1+\mathrm{i}$ ته يو آيګن – وکتور w_1 له دې لاندې لاس ته راوړو:

$$(A-(1+\mathrm{i})E)w_1=\begin{pmatrix}-1-\mathrm{i}&-2&-1\\2&1-\mathrm{i}&1\\0&2&1-\mathrm{i}\end{pmatrix}w_1=0\,.$$

او داسې د پزلګز به تګه $w_1=(-1-\mathrm{i},-1+\mathrm{i},2)^t$. دا A چې حقيقي ده، کېدی شي و $\lambda=1-\mathrm{i}$ ته آيګن-وکتور د کمبلکس کنجوګيشن له لارې جوړ شي:

$$w_2=\overline{w_1}=(-1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i},2)^t$$

.

ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

الجبری او هندسي ډېرځلوالی

Algebraische und geometrische Vielfachheit

(c) ketabton.com: The Digital Library

که λ د $(n \times n)$ – ماتریکس A آیګن –ارزښت وي، نو دکرکتریستیکي پولینوم $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$ د صفرځای په حیث د λ ډېرځلوالی د آیګن-ارزښت λ

الجبري m_λ ډېرځلوالی بللګیږي

د یوه آیګن – ارزښت λ د آیګن-فضا V_λ بعد یا پراخپدونی d_λ د λ هندسي ډېرځلوالی بلل کیږي. . ابور لري

$$d_\lambda \leq m_\lambda\,, \qquad \sum_\lambda m_\lambda = n\,,$$

همداسي

$$d_\lambda = n - \mathrm{Rang}(A - \lambda E)\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر، کیمرلي

ماتریکسونه

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ټول لاندې کرکتریستیکي پولینوم لري:

$$(4-\lambda)^3 = (4-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 4 - \lambda = (4-\lambda)^3 + 12(4-\lambda) - 12(4-\lambda)$$

او له دې سره هوار $m_4 = 3$ دی. د ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A_1-4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_2-4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(A_3-4E) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

د رانګ په لرودو سره $d_4=3$ د A_1 لپاره، $d_4=2$ د A_2 لپاره او $d_4=1$ د A_3 لپاره پېژني

لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

د آيګن –ارزښتونو جمعه او ضرب

Summe und Produkt von Eigenwerten

د یوه $(n\times n)$-ماتریکس A د آيګن – ارزښت λ_i لپاره صدق کوي

Für die Eigenwerte λ_i einer $(n\times n)$-Matrix A gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{Spur} A, \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A,$$

د کوم سره چې ډېرځله آيګن – ارزښتونه د الجبري ډېرځلوالی سره سم شمېرل کیږي.

لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ديترمينانت د مولتی کرښيزوالی په اساس د کرکتريستيکي پولينوم لپاره لاس ته راځي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + \operatorname{Spur} A(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det A\,.$$

بلې لور ته پولينوم په لاندې بڼه

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$$

انځوريدلای شي. د دويم فرمول په ضربونه او د ضريبونو پرتله کونه دا ورکړ شوی کټمټوالی يا ايدنتيتي راکوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کرکتريتيکي بولينوم

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

لي د لاندې صفرځايونو سره:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}\,.$$

که د آيګن – ارزښتونو جمعه تشکيل شي، دا ريښې افاده له ةنځه ځي، او لاس ته راځي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(a+d) + (a+d)}{2} = a + d = \operatorname{Spur} A\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که آيگن – ارزښتونه سره ضرب شي، نو د دريم بېنوم فرمول سره لرو:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{(a+d)^2-(a+d)^2+4(ad-bc)}{4} = ad-bc = \det A\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

د ماتريکسونو رينتونى فنکشنونه يا توابع

Rationale Funktionen von Matrizen

که د يوه ماتريکس A يو آيگن-ارزښت λ د رينتونې فنکشن

$$r(t) = \frac{p(t)}{q(t)} = \frac{a_0+a_1t+\cdots}{b_0+b_1t+\cdots}\,,$$

قطبځاى نه وي ، نو $r(\lambda)$ د

$$r(A) = q(A)^{-1}p(A) = p(A)q(A)^{-1}\,.$$

آيگن – ارزښت دى.

په ځانګړي توګه λ^k د توان-ماتريکس A^k آيګن – ارزښت دى او $1/\lambda$ د معکوس کېدونکي ماتريکس A^{-1} يو آيګن-ارزښت دى.

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $Av = \lambda v$ د $k \geq 0$ لپاره لاس ته راځي چې $A^k v = \lambda^k v$ او په ټوليزه توګه

$$\left(\sum_k c_k A^k\right) v = \left(\sum_k c_k \lambda^k\right) v \, .$$

پسې صدق کوي

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda A^{-1} v \, ,$$

که A معکوسوړ وي

که λ د صورت پولينوم q صفرځای نه وي. نو صدق کوي

$$q(A)v = q(\lambda)v, \quad q(A)^{-1}v = q(\lambda)^{-1}v \, ,$$

پس

$$q(A)^{-1}p(A)v = q(\lambda)^{-1}p(\lambda)v = p(A)q(A)^{-1}v$$

لکه څه مو چې غوښتل .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د آيګن – وکتورونو بنسټ Basis aus Eigenvektoren

که يوه ماتريکس A ته د آيګن – وکتورونو v_j څخه يو بنسټ شتون ولري د آيګن – ارزښت λ_j سره ، نو دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad V = (v_1, \ldots, v_n)\,,$$

دا په دې معنا چې A نسبت و بنسټ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ته دياګونال بڼه لري.

ليکونکي: هيولی، اپپ

د ښوولو دی، چې

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

باور لری، د لاندې سره ورته (برابر ارزښته)دی

$$AV = V\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n)\,.$$

دا چې v_j د V مټه و λ_j ته د آيګن-وکتورونه دي، دا سملاسي ليدل کيږي

ليکونکي: هيولی، اپپ

ماتريکسونه

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

آيګن- ارزښتونه -2 , -2 او 3 لري. اړونده آئګن-وکتورونه دپی‌لګی به توګه دئ:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $V = (v_1, v_2, v_3)$ سره لاس ته راځئ

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيولی، اپپ

د ځيوکليکي ماتريکسونو دياګونالونه

Diagonalisierung zyklischer Matrizen

يو ځيوکليکي $(n \times n)$ – ماتريکس A کېدی شي د پورير-ماتريکس

$$W = (w^{jk})_{j,k=0,\ldots,n-1}, \quad w = \exp(2\pi \mathrm{i}/n),$$

په مرسته دياګونالي شي.

$$\frac{1}{n}\overline{W}\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

د

$$\lambda_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-k\ell}, \quad \ell = 0, \ldots, n-1,$$

سره د A آيګن – ارزښت دی.

ليکونکي: هيولی، اپپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی ساده بسي شمېرلی شي، چې د W ℓ -مه متِه د A يو آيګن – وکتور دی. د Aw_ℓ د j —م کمپوننت لپاره سړی لاس ته راوړي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k \bmod n} w^{(k-j)\ell} w^{j\ell} = w^{j\ell} \sum_{k'=j-n+1}^{j} a_{k' \bmod n} w^{-k'\ell} .$$

دا اندکس يا پيژند نخښه مودولو سره ښوول کيږي، کېدی شي د جمعي کېدني ورشو د $k' = 0, \ldots, n-1$ سره ځاي په ځاي شي يا بدله شي. په تعقيب سره يې زياتون يا جمعه برابر په λ_ℓ ده ،لکه جې غوښتل مو. له دې مو و ښوول چې لرو:

$$AW = W \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

دا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W$ يوتيتار دی،دا په دې معنا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W^* = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} W\right)^{-1}$ ، سړی غوښتونکی ترانسفورمېشن په دياګونال بڼه لاس ته راوړي

ليکونکي: هيولی، اپپ

د عمومي تيوري سره سم کيدی شي څيوکليکي ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

د فورير- ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$W=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{pmatrix}$$

سره په دياګونال بڼه واړول شي(ترانسفورمي شي)

$$\frac{1}{4}\overline{W}AW=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

د 2 ,2 ,0 او 4 سره د A آيګن – ارزښت. دا چي A حقيقي دی بايد کمپلکس آيګن-وکتورونه

$$\begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\-i\\-1\\i\end{pmatrix}$$

(د W دويمه او څلورمه متړه) يو کډ آيګن-ارزښت ولري. داسې کېدی شي د کرښيز کمبينېشن له لارې د آيګن-وکتورونو لپاره يو حقيقي بنسټ تشکيل شي:

$$\begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-i\\-1\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\0\end{pmatrix},\quad i\begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix}-i\begin{pmatrix}1\\-i\\-1\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix}.$$

ليکونکي : اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ماتریکسونو توان Potenzen von Matrizen

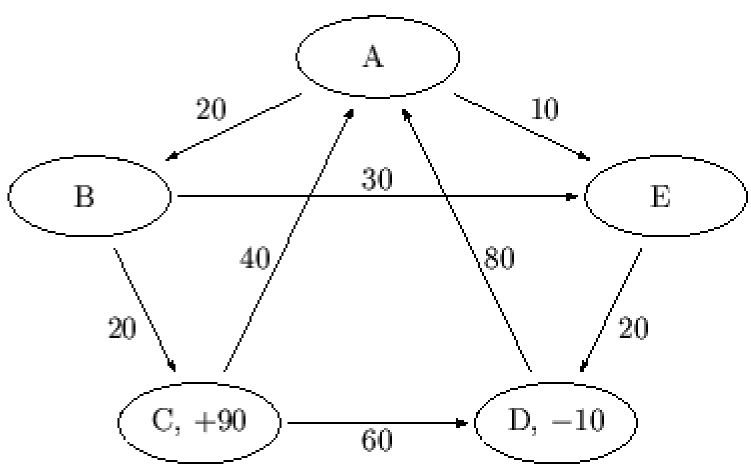
که A د مطلق ارزښت سره سم یا - - ډوله خورا لوي آیګن- ارزښت λ د آیګن – وکتور v سره ولري،نو صدق کوي:

$$A^n x = \lambda^n (cv + o(1)), \quad n \to \infty,$$

که x یو ناتریویال کمپوننت د λ په آیګن-فضا کې ولري، دا په دې معنا چې $x = cv + w$ د $c \neq 0$ او $v \nparallel w$ سره.

لیکونکي : اپپ، هیولیګ

دا تابع د مارکیټپرخي x_i د رقابت د فیرما ګانو کلنی تغیر ښايي.په دې ترتیب فیرماA د 80% بیلګې په توګه د فیرما D د مارکیټ برخه ګټي او د فیرما C خپله د مرکیټ برخه د 90% په شاوخوا کې لوېږي د نوي خرڅلاو امکانات پیداکولو سره ، په همدې وخت کې د مارکیټ برخې A او D ته له لاسه ورکوي.



د لیدخیرې څخه د مارکیټ نوې برخې(ونډه) رانیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

A نوې neu $= 0.7A + 0.4C + 0.8D$

B نوېneu $= 0.5B + 0.2A$

C نوېneu $= 0.9C + 0.2B$

D نوېneu $= 0.1D + 0.6C + 0.2E$

E نوې neu $= 0.8E + 0.3B + 0.1A\,.$

له $x = (A, B, C, D, E)^t$ سره لاس ته راځي:

x نوی neu

$$= \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} x\,.$$

د ایتراشن ماتریکس د n–توان سره ضربولو د nکلونو وروسته د مرکت ونډه راکوي.

نورميري شوي وکتورونه x^0 د یوه آیګن- وکتور max v (ماکس) پولې ته ځي(کونورګیریګي) د ماتر یکس د ارزښت له مخې لوی ا یګن ارزښتmax λ ته. سړی لاس ته راوړي λ max $= 1.1$ او دې ته اړوند ایګنوکتور

$$v_{\max} = (0.75, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5)^t\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اوږده وخت لپاره بازار يا مارکيټ د A ه خوا ټاکل کيږي يا تعينيږي. په سلو کې برخې د $\max v$ د نورمي کولو له لارې لاس ته راځي يعني , $\max\; v/\|v\|_1$ په دې توګه

$$A:\ 37.5\%,\ \ B,C,D:\ 12.5\%,\ \ E:\ 25\%\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د فيبوناچي پرلپسې يا - ترادف Fibonacci-Folge

د فيبوناچي پرلپسي يا ترادفونه داسې پيژند لري يا تعريف دي:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\,, \quad \text{د } n \geq 1\,, \text{ لپاره}$$

دا په دې معنا چې هره فيبوناچي پرلپسې د دواړو ترمخ غړو زياتونن يا جمعه ده.

د فيبوناچي لومړي عددونه دي:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots\,.$$

سرې د پيل ارزښت $a_1 = 1$ او $a_2 = 3$ ټاکي نو داسې په نامه لوکاس - $a_2 = 3$ Lucas- عدد:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots\,.$$

که دوه يو په بل پسې د فيبوناچي عددونه يوه وکتور

$$x_n = (a_n, a_{n-1})^t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته سره يوځاي شي، نو ريکوررزيون د

$$x_{n+1} = Ax_n$$

په څير د لاندې سره وليکو:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

د ماتريکسليکني په مرسته کېدی شي د فيبوناچي عدد دا اسيمپتوتيکي حالت وټاکل شي. د دې لپاره سرې د A آيګن-ارزښتونه او آيګن-وکتورونه شمېري:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad v_{\pm} = \begin{pmatrix} \lambda_{\pm} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

که سرې د ريکوررزيون وکتورونه د v_+ کرښيز کمبينېشن په حيث انځور کړي،

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} v_+ - \frac{1}{\sqrt{5}} v_- ,$$

، نو لاس ته راځي:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_+ \lambda_+^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_- \lambda_-^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n + o(\lambda_-^n) .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورمال ماتريکسونه Normale Matrizen

يو کمپلکس ماتريکس A نورمال بلل کيږي، که

$$AA^* = A^*A\,,$$

وي، د $A^* = \bar{A}^t$ سره. په ځانګړې توګه يونيتار او هرمييتيکي ماتريکسونه نورمال دي.

د حقيقي نورمال ماتريکسونو لپاره دی:

$$AA^t = A^tA\,,$$

کوم چې په ځانګړې توګه د اورتوګونال او سيومتري ماتريکسونو لپاره پوره دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،کيمرلي

د يونيتارو او هرميتيکي ماتريکسونو نورمالوالی تړلی له تعريف څخه لاس ته راځي.

د ئوه يونيتار ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA^{-1} = E = A^{-1}A = A^*A\,.$$

د يوه هرمېتيکي ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA = A^*A\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمالو ماتريکسونو يونيتار دياګونالي – يا دوه کونجتړي کول

Unitäre Diagonalisierung normaler Matrizen

يو ماتريکس A ټيک هلته نورمال دی، که A يونيتار دياګوناوړ وي، دا په دې معنا چې ، که وي:

$$U^{-1}AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

د کوم سره چې د U متې يو اورتونورمال بنسټ و آيګن – ارزښت λ_j ته له آيګن-وکتورونو تشکيل کړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک، کيمرلي

که

$$A = UDU^*, \quad U^* = U^{-1}\,,$$

وي، نو نورمال دی، ځکه چې لرو:

$$\begin{aligned} AA^* &= (UDU^*)(UDU^*)^* = UD(U^*U)D^*U^* \\ &= U(D^*D)U^* = (UD^*U^*)(UDU^*) \\ &= A^*A\,. \end{aligned}$$

د دې معکوس کېدی شي د يوه اورتوکونال بنسټ شتون نسبت بعد ته د ايندکشن له لارې وښايي. د ايندکشن پل لپاره يو يونيتار ماتريکس V جوړوو د لاندې سره:

$$V^*AV = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اینکشن نیونې یا فرضیې له مخې کېدی شي B د یونتارماتریکس W له لارې په دیاګونال بڼه ترنسفورمي شي، داسې چې سړی ځای په ځای کولی شي:

$$U = V \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & W \end{array} \right)$$
.

د V دجوړښت یا کنسترکشن ته د یوه نورمي آیګن – وکتور v څخه و آیګن- ارزښت λ ته ځي او بړدي

$$V = (v|\tilde{V}),$$

د کوم سره چې د $\tilde{V}$ متې وکتور v و اورتوګونال بنسټ ته پوره کوي. لاس ته راځي:

$$V^*AV = \left(\frac{v^*}{\tilde{V}^*} \right) \left(\ \lambda v \mid A\tilde{V} \ \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & c^* \\ \hline 0 & B \end{array} \right) .$$

ښوولو تهدومره پاتیږي، چې B نورمال او $c = 0$ دی. دواړه د A د نوپمالیټي څخه لاس ته راځي. دا د ورته والي ترنسفورمیشن سره ساتلي پاتې کیږیو ، پس د پورته مساوات د ښې اړخ $\tilde{D}$ لپاره هم صدق کوي.

که

$$\tilde{D}\tilde{D}^* = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 + |c|^2 & c^*B^* \\ \hline Bc & BB^* \end{array} \right)$$

$$\tilde{D}^*\tilde{D} = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 & \overline{\lambda}c^* \\ \hline \lambda c & B^*B \end{array} \right) ,$$

تشکیل کړو، نو غوښتونی خویونه د پورته ماتریکسونو د دیاګونال بلوکونو د پرتلې له لارې لاس ته راځي. لیکونکي: اپپ،هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماتريکسونه

$$A = \begin{pmatrix} 3+2i & 3-2i \\ 3-2i & 3+2i \end{pmatrix}$$

نورمال دي، چې د سيده شمېرنې له لارې تصديق کېدی شي.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix} = A^*A$$

د دې په تعقيب بايد A يونيتار دياګونالوړ وي. سرِی آيګن – ارزښتونه6 او $4i$ لاس ته راوړي او اړونده نورمي آيګن-وکتورونه د بېلګې په توګه دي:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

د انتظار سره سم $v_1 \perp v_2$ دی، او د يونيتار ماتريکس $U = (v_1, v_2)$ سره دياګونال ماتريکس لاس ته راځي:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+2i & 3-2i \\ 3-2i & 3+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: ايپ،هيوليک

د هرميتيکي ماتريکسونو دياګونال بڼه Diagonalform hermitescher Matrizen

ديوه هوموجېن ماتريکس $A\ (A = A^*)$ آيګن-ارزښتونه λ_i حقيقي دي او د آيګن-وکتورونو v_i ځخه يو اورتوګونال بنسټ شتون لري. په تعقيب

(c) ketabton.com: The Digital Library

ده د يونيتارماتريکس سره

$$U^*AU = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

ده د يونيتارماتريکس $U = (v_1, \ldots, v_n)$ سره.

په ځانګړې حالت کې حقيقي سيومتريکي ماتريکسونو $(A = A^t)$ آيګن-وکتورونه هم حقيقي دي.

ليکونکي: هيوليګ، ربل

يونيتار دياګوناوړوالی په نورمالو ماتريکسونو د اړونده ټوليزې نتيجې څخه لاس ته راځي، هغه چې هرميتيکي حالت خوندي لري. د ښولو دا پاتې دی چې آيګن – ارزښت λ حقيقي دی. که په ورته توګه v آيګن- وکتور وي، نو دا له لاندې لاس ته راځي:

$$\lambda v^* v = \quad v^*(\lambda v) = v^*(Av) = (A^*v)^*v$$

$$= \quad (Av)^*v = (\lambda v)^*v = \overline{\lambda} v^* v\,,$$

ځکه چې $\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ لرو.

ليکونکي: هيوليګ، ربل

هرميتيکي ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 - \mathrm{i} \\ -1 + \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

ديترمينانت 0 لري. پسې $\lambda = 0$ يو آيګن – ارزښت دی او سړی تړلی ګوري، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

يو اړونده آيګن-وکتور دی. له $\mathrm{Spur}\, A = 3 = \lambda + \varrho$ څخه د ويم آيګن – ارزښت په حيث $\varrho = 3$ لاسته راځي. يو اړونده آيګن-وکتور نسبت و کمپلکس سکالار ضرب ته هغه و v ته لاندې اورتوګونال وکتور دی:

$$w = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

د نورمي کولو له لارې يونيتار ماتريکس لاس ته راځي

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

په تعقيب باور لري:

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^*,$$

د

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

سره، هغه و U ته معکوس.

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت ديفينيت ماتريکسونه Positiv definite Matrizen

يو مربع ماتريکس A مثبت ديفينيت بلل کيږي، که وي:

$$v^*Av > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

که v^*Av يواځې نامنفي وي، نو A مثبت سيمي (نيم – يا برخه-) ديفينيت بولو.

يو مثبت ديفينيت ماتريکس A فقط مثبت دياګونالتوکي لري او آيګن-ارزښتونه. په ځنګړي توګه A معکوسوړ ده او معکوس يي هم مثبت ديفينيتدی.

ليکونکي: هيوليک، ربل

ريلا ي – ويش (هعني هغه د وېش تيجه) Rayleigh-Quotient

د يوه هرميتيکی مثبت ديفينيت ماتريکس S لپاره د داسې په نامه ريلای-وېش اکسترم – ارزښتونه

$$r_S(x) = \frac{x^*Sx}{x^*x}, \quad x \neq 0,$$

خورا کوچنی او خورا لوي د S آيګن – ارزښت دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

ماتريکس S کېدی شي ا يونيتار ماتريکس U له لارې دياګونال فروم ته واړول شي:

$$U^*SU = D, \quad D = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

د کوم سره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Sv_i = \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_i = \frac{v_i^* S v_i}{v_i^* v_i} > 0$$

او $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ نيول يا فرض کېدی شي.

که سړی $S = UDU^*$ او $x = Uy$ بدل کړي، نو دی

.

$$r_S(y) = \frac{y^* D y}{y^*(U^* U) y} = \frac{\sum_i \lambda_i |y_i|^2}{\sum_i |y_i|^2}.$$

دا بنايي چې

$$\lambda_{\min} \leq r_S(y) \leq \lambda_{\max},$$

چېرته چې د مطلوب آيګن-وکتورونو لپاره $y = e_n$ او $y = e_1$ لپاره صدق کوي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

مثلث بڼه Dreiecksform

يو کمپلکس مربع ماتريکس A کېدی شي د يوه ورته ترانسفورميشن له لارې په پورته مثلث بڼه

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانفورمي شي، چېرته چې دياګونالي د A آيګن-ارزښتونه λ_i خوندي لري.

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

ښوونه د ماترريکس په بعد n باندې د ايندکشن له لارې کيدی شي صورت ونيسي، د يوه (1×1)-ماتريکس د تريويال حالت څخه په پيل.

يو $(n \times n)$-ماتريکس A تر څيرنې لاندې نيسو، نو دا لږترلږه يو ايګنوکتور v لري.
دا د نورمي کيدلو وروسته يوه اورتوګونال بنسټ $\{v, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ ته ورپوره کيدی شي. په دې بنسټ کې څيرونه(فنکشن-که غواړۍ تابع) لاندې بڼه لري:

$$\tilde{A} = T^* A T = \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

د $((n-1) \times (n-1))$-ماتريکس لپاره د ايندکشن نيونې يا فرضيې له مخې يو يونيتار ترانفورميشن $\tilde{Q}$ شتون لری د $\tilde{Q}^* B \tilde{Q} = R_{n-1}$ سره. له دې امله د

$$Q = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

سره لاس ته راځي، چې

$$Q^* A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} T^* A T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & B\tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & \tilde{Q}^*B\tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & R_{n-1} \end{pmatrix} = R\,.$$

ليکونکي: هيوليگ، هيوررنر

اصلي وکتورونه Hauptvektoren

که λ د کمپلکس $(n \times n)$ - ماتريکس A يو آيګن-ارزښت وي، د الجبرې ډېرځلوالی m سره، نو يو وکتور v د

$$(A - \lambda E)^m v = 0\,, \quad v \neq 0$$

سره اصلی وکتور بلل کيږي و آيګن-ارزښت λ ته.

ټول اصلي وکتورونه و آئګن – ارزښت ته د صفر وکتور سره يوځاي د بعد m يو لاندې- يا برخوکتور جوړوي، دا اصليفضا H_λ و آيګن – ارزښت λ ته. دا کرښيزې څېروني يا فنکشن A ته انواريانت دی.

ټوله فضا د اصلي فضاو سيده جمعه يا زيتون دی:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda H_\lambda$$

ليکونکي: هيوليگ، هيوررنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه يې له ډېرو برخپلونو يا-قدمونو رايوځای کيږي.

اول - داچې يوونماتريکس يا واحد ماتريکس د هر ماتريکس سره بدلېدونکی دی يوه وکتور $v \in H_\lambda$ د څېرې(عکس ؟؟) Av لپاره صدق کوي:

$$(A-\lambda E)^m A v = \left(A^{m+1} + \cdots + \lambda^m E^m A\right) v = A\left(A^m + \cdots + \lambda^m E^m\right) v$$

$$= \qquad A(A-\lambda E)^m v = A \cdot 0 = 0 .$$

په تعقيب $Av \in H_\lambda$ دی.

دويم- د دې لپاره چې بعد وټاکو، ماتريکس A په پورتني مثلثبنه ترانفورمي کوو:

$$A \to B = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda & & * & * & * \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & * & * \\ & 0 & & R & \\ & & & & \end{pmatrix} .$$

دا چې د $v \in H_\lambda$ لپاره

$$0 = Q^{-1}(A-\lambda E)^m Q (Q^{-1} v) = (B-\lambda E)^m (Q^{-1} v) ,$$

دی، اصلي وکتورونه د $v \to w = Q^{-1} v$ سره سم اصلي وکتور ته ترانفورمي کيږي.

مکر د B له بنې روښانه دی، چې يوون – يا واحدوکتورونه e_i د $i \le m$ لپاره د B

په اصليفضا $Q^{-1} H_\lambda$ کې پراته دي. پسې يو وکتور v د $v_i \neq 0$ سره د يوه $i > m$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د $(B-\lambda E)^m$ له لارې په 0 نه ځېره کيږي يا فنکشن 0نه دی. په تعقيب $\dim H_\lambda = m$ لرو.

دريم – دا چې $\sum_\lambda \dim H_\lambda$ د الجبري د ډېرواره جمعي سره برابر دی، يعني برابر په n دی، بسيا کوي، چې د بنسټ خويونو لپاره د اصلي فضا کربنيز خپلواکوالی وښودل شي يا وښايو. دې ته استعماليږي، چې د $\varrho \neq \lambda$ لپاره لرو:

$$(A-\varrho E)v = 0 \wedge v \in H_\lambda \Rightarrow v = 0.$$

که د مختلو اصلي فضاو څخه يوه د وکتورونو جمعه ورکه شي،

$$v_\lambda + v_\varrho + v_\sigma + \ldots = 0,$$

، نو لاس ته راځي:

$$\left((A-\varrho E)^{m_\varrho}(A-\sigma E)^{m_\sigma}\ldots\right)v_\lambda = 0.$$

دا چې يوګونی ضريبونه H_λ انواريانت دي، په پورته يادونه استعمالوږ دی، او لاس ته ترې $v_\lambda = 0$ راځي. په ورته توګه $v_\varrho = v_\sigma = \ldots = 0$ ترې لاس ته راځي او له دې سره صفروکتور فقط په ساده ډول انځوروږ دی.

ليکونکي: هيليک، هيورنر

د اصلفضا ځيوکليکي بنسټ Zyklische Basen von Haupträumen

د يوه کمپلکس مربع ماتريکس A يو اصلفضا (اصلي فضا) کېدی شي د ځيکليکي برخفضاو په يوه سيده جمعي تجزيه شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$H_\lambda = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell\,,$$

دا په دې معنا چې هر برخفضا V_i د لاندې بنې يو بنسټ لري

$$B^{k_i}v_i,\,\ldots,\,Bv_i,\,v_i, \quad B = A - \lambda E,$$

د $w_i = B^{k_i}v_i$ سره يوه آيګن-وکتور و آيګن-ارزښت λ ته.

ماتريکس A برخفضا V_i اينواريانت پرېږدياو هلته لاندې ماتريکس-انځورونه لري:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

د تعريف سره سم H_λ له وکتورونو v څخه د $B^{k+1}v = 0$ سره جوړه ده، د کوم سره چې k کوچنۍ ده د λ د الجبري ډېرځلوالي m څخه. د بنسټ ټاکلې بنه له دې امله نږدېوالى لري. د دې لپاره چې وکتورونه

$$w_i \in \ker B\,,$$

چې بنسټ کره کوي ، وټاکو ، نو د ايګنوکتورونو $\ker B$ و λ ته برخفضاوې

$$U_j = \ker B \,\cap\, \mathrm{Bild}\; B^j$$

تر څېړنې لاندې نيسو. په روښانه توګه دى

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\emptyset = U_m \subset U_{m-1} \subset \cdots \subset U_0 = \ker B\,.$$

وکتورونه w_i به اوس ، له تشدېرۍ سره په پيل، ايندوکتي، جوړيږي. که $w_1, \ldots, w_{i-1}$ همدا اوس کره شوي وي ، نو سړی لويوالی دا لوي k_i داسې، د هغه U_{k_i} لپاره داسې چې W_{i-1} په کرښيزه هيولې w_j د دغه کې نه وی پروت، دا په دې معنا چې $v_i \neq 0$ باور لری د $B^{k_i} v_i = w_i \notin W_{i-1}, \quad Bw_i = 0\,.$ سره .

په دې ډول بالاخره د ټول آيګن-فضا $\ker B$ لپاره يو بنسټ $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ جوړيږي او اړونده ځيوکليکي بنسټونه د V_i لپاره.

د فضاو V_i د B سره (همداسې A) د ضرب له لارې روښانه دی. د غوښتل شوې ماتريکس انځورنه له اندې ځخه لاس ته ارځي

$$A(B^j v_i) = (\lambda E + B) B^j v_i = \lambda B^j v_i + B^{j+1} v_i\,,$$

، که د بنسټ وکتورونه ، لکه ځنګه چې ورکړ شوي دي، د کښته کېدونکي توان سره تنظيم کړي.

د جوړښت د ټيکوالي لپاره بايد برسېره پر دې د وکتورنو $B^j v_i$ بنسټ خويونه هم وښوول شي. دا د دوه پلونو (قدمونو) سره صورت نيسي.

اول - لومړی کرښي. خپلواکوالی ښوول کيږي. دا تخنيکي دلايل کزدی شي د دوه ځيکليکي ځنځيرونو د بېلګې

$$B^2 v_1,\ Bv_1,\ v_1, \quad Bv_2,\ v_2\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې لیدوړ شي. نیسو چې

$$\alpha_{2,1}B^2v_1+\alpha_{1,1}Bv_1+\alpha_{0,1}v_1+\alpha_{1,2}Bv_2+\alpha_{0,2}v_2=0,$$

دی، نو د B^2 سره د ضرب له لارې لرو

$$\alpha_{0,1}w_1=0 \implies \alpha_{0,1}=0\,,$$

د $B^3v_1=Bw_1=0$ او $B^2v_2=Bw_2=0$ له امله . د B سره د ضرب له لارې اوس لرو

$$\alpha_{1,1}w_1+\alpha_{0,2}w_2=0 \implies \alpha_{1,1}=\alpha_{0,2}=0$$

د جوړښت سره سم د آیګن-وکتورونو w_i کرښيز خپلواکوالی له امله. بالاخره لرو

$$\alpha_{2,1}=\alpha_{1,2}=0$$

بیا هم د آیګن-وکتور w_i د کرښيز خپلواکوالی له امله.

په ټولیز حالت په ورته توګه مخ ته ځو. د یوه کرښيز کمبینیشن د تحلیل په هکله بسټوکتور د B د مناسب توان سره ضربوي، تر څو د آیګن-وکتورونو ټول ترمونه له منځه ولاړ شي.

دویم - همدومرهښایو، چې هر وکتور $u\in H_\lambda$ د بنسټوکتورونو سره انځوروړ دی. پس وي دې $B^ku=0\,,$ $k\leq m$ ، د سره. د $k=1$ لپاره يې نه ښایو، ځکه چې وکتورونه w_i د جوړښت له امله د آیګن – فضا $\ker B$ لپاره یو بنسټ جوړوي. اندوکتيو سړی نیوی شي یا فرض کولی شي، چې په کې وکتورونه انځوروړ دي.

همداسې آیګن-وکتور $B^{k-1}u$ انځوروړ دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B^{k-1}u = \sum_i \alpha_i w_i .$$

له دې لاس ته راځی، چې

$$B^{k-1}\underbrace{(u - \sum_i \alpha_i B^{k_i-k+1} v_i)}_{u'} = 0 \,.$$

د دې په تعقيب u' انځوروړ دی او له دې سره u هم .

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

د جوردان بڼه Jordan-Form

يو کمپلکس مربعماتريکس کېدی شي د يوه ورته والي ترانفورمېشن له لارې د بلوک دياګونال بڼه باندې تراسفورم شي

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ$$

باندې تراسفورم شي. له دې سره د جوردانبلکونه دا لاندې بڼه لري

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix} ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A يوه آيګن – ارزښت λ_i سره

تر ځای بدلون پورې د جوردان بنه يواځنۍ ده.

ليکونکي:هيوليګ،هيورنر

دا چې اصلي فضاوې H_λ د فنکشن A لاندې انواريانت دي، کيدی شي د اصلي وکتورونو بلوکبنې پورې يوه بنسټ په نسبت لاس ته راوړل شي. د ځانګړو ځيوکليکي بسټونو

$$B^{k_i}v_i, \ldots, Bv_i, v_i, \quad B = A - \lambda_i E\,,$$

استعمال له لارې بلوکونه غوښتونې بڼه غوره کوي

ليکونکي: خيوليګ، هيورنر

ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

کرکتريستيکي بولينوم

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)^3 + 4(4 - 3(-1-\lambda)) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27$$

لري د ډبل صفرځايونو $\lambda = -3$ او ساده صفځايونو $\varrho = 3$ سره.

دا چې د ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

رانګ 2 دی، و ته فقط یو آیګن-وکتور شتون لري. د دې په تعقیب A د جوردان بڼه لري.

$$Q^{-1}AQ=J=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},Q=(w,v,\tilde{w}).$$

د کربنیز و مساواتشیستمونو د حل له لارې

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سړی لاندې آیګن-وکتورونه لاس ته راوړي:

$$w=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

اصلي ډیاګونال پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

دا په دې معنا چې د بېلګې $v = (-3, 4, 1)^t$ په توګه . له دې سره دی

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

څه چې د ازمايښت له لارې $A = QJQ^{-1}$ تصديق کيږي.

ليکونکي: خيوليګ، هيورنر

د يوه کمپلکس (2×2)-ماتريکس A لپاره 3 څرنګواليز (د کواليټي له مخې) مختلف جوردان-نورمالبڼې شتون لري:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, (\lambda \neq \varrho).$$

په لومړي حالت کې λ يو ډبل آيګن – ارزښت دی د فقط يوه (تر سکالار ضرب پورې) آيګن-وکتور w سره، دا په ې معا چې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 1.$$

يو په دې پورې اړونده اصلی وکتور v او له دې سره دې سره ترانسفورميشن ماتريکس د $Q = (w, v)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w = (A - \lambda E)v$$

د حل له لارې لاس ته رواړي ، همداسې د $\ker(A - \lambda E)^2$ ټاکلو له لارې.

د دې لپاره يو څرګنده بېلګه

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

کرکتريستيکی پولينوم

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

دی، د دبل صفرځای $\lambda = 2$ سره. د

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حل له راې سړی $w = (2,3)^t$ لاس ته راوړي او له دې سره

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

يو اړونده اصلي وکتور $v = (1,2)^t$. دا د ازمايښت سره تصديق کيږي:

$$A = QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

سره تصديق کيږي. ليکونکي: خيوليګ، کرايڅ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه کملکس (3×3) - ماتريکس A لپاره لاندې کولتاتيو مختلف جوردان –نورمالبڼې $J = Q^{-1}AQ$ شتون لرى:

اول – جوړه دوله مختلف آيګن-ارزښتونه λ, ϱ, σ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

دويم – يو ډبل آيګن – ازښت λ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}.$$

په دويم حالت کې

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

او $Q = (w, v, \tilde{w})$ دي له آيګن وکتورونو w او $\tilde{w}$ يوه اصلي وکتور v سره، هغه چې د مساوات سيستم د حل له لارې

$$(A - \lambda E)w = 0, \quad w = (A - \lambda E)v, \quad (A - \varrho E)\tilde{w} = 0$$

د حل له لارې ټاکل کېدى شي.

دريم – يو دريواره آيګن –ارزښت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

په دويم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 1$$

دی او سړی يو اصلي وکتور v د

$$(A - \lambda E)^2 v = 0\,, \quad (A - \lambda E)v \neq 0.$$

حل له لارې لاس ته راوړي.

اړونده آيګن – وکتور $w = (A - \lambda E)v$ دی، او يو غزېدلی کرښيز خپلواک آيګن – وکتور $\tilde{w}$ دا لاندې پوره کوي:

$$(A - \lambda E)\tilde{w} = 0, \quad w \perp \tilde{w}\,.$$

بالاخره $Q = (w, v, \tilde{w})$ دی.

په دريم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

دی او $Q = (w, v, u)$ دی له

$$(A - \lambda E)w = 0\,, \quad w = (A - \lambda E)v\,, \quad v = (A - \lambda E)u\,.$$

سره. ليکونکی: ويپر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (4x4) -ماتيکسونو جوردان-بڼې

Jordan-Formen von (4x4)-Matrizen

لاندې توابع ټول 14 ممکن (4×4) - ماتريکسونو د جوردان – بڼې ځای نيوني جوړښتونه ښايي .

- څلور مختلف آيګن – ارزښتونه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

- يو دوه ځله آيګن – ازښت λ_1 او دوه دوه ځله آيګن -ارزښتونه λ_2, λ_3

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- يو درې واره آيګن – ارزښت λ_1 او يو يوواره آيګن – ارزښت λ_2 .

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دوه دوه واره آيګن – ارزښت λ_1, λ_2

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- يو څلورواره آيګن – ارزښت λ_1.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: خيوليګ، هيورنر

د ماتريکسونو توانونه Potenzen vonMatrixen

د يو کمپلکس ماتريکس توانونه A^n، $n = 0, 1, \ldots$ تيک هلته صفر ماتريکس پولي ته تلونکي دي، که د ټولوآيګن-ارزښتونو λ مطلق ارزښت له 1 کوچنی دی.

پرلپسي (A^n) محدوده پاتې کيږي، که $|\lambda| \leq 1$ او د آيګن – ارزښت لپاره د ارزښت 1 سره

ليکونکي: خيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A د جوردان – بڼې $J = Q^{-1}AQ$ سره کېدی شي د ماتريکس – توانونه په لاندې بڼه و ليکل شي:

$$A^n = (QJQ^{-1})(QJQ^{-1})\cdots(QJQ^{-1}) = QJ^nQ^{-1}$$

دلته يواځې دې ته اړتيا ده چې د J پولې ته تلنه(ليميټ) تر څېړنې لاندې و نيل شي. د J د بلوکفورم (- بڼې) کېدی شي هر بلوک J_i ځانله تر څېړنې ونيل شي. د دې لپاره ليکو

$$J_i = (\lambda_i E) + D\,,$$

، د کوم سره چې D ګاوندی دياګونال د يو سره خوندي لري. لکه چې په ساده توګه ښوول کيږي، د بعد m د يوه بلوک لپاره $D^m = 0$ دی. پسې صدق کوي

$$(J_i)^n = \lambda_i^n E + \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1}D + \cdots + \binom{n}{m-1}\lambda_i^{n-m+1}D^{m-1}\,.$$

له دې کټمټوالي څخه کېدی شي د پرلبسپپولې ته تلنه(ليميټ کونورګنت) و لوستل شي.

د $|\lambda_i| < 1$ لپاره دی

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{j}\lambda_i^{n-j} = 0\,,$$

دی، ځکه چې $\binom{n}{j}$ فقط پولينوميال يعنې پولينومي لوييږي، د دې معکوس λ_i^{n-j} اکپوننشک ټيټيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

كه $|\lambda_i| = 1$ وي پرلپسي محدوده يا راپنده پاتيږي، كه $m = 1$ وي، دا په دې معنا، چې ګاوندی دیاګونال د یوه سره شتون نه لري.

ليكونكي: خيوليک، هيورنر

په زيګولار ارزښت توټه كونه Singulärwert-Zerlegung

هر يوه كمپلكس $(m \times n)$ ـماتريكس A ته يونيتار ماتريكسونه U او V شتون لري د

$$U^* A V = S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

سره.

زينګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k > s_{k+1} = \cdots = 0$$

د A^*A د آئګن – ارزښتونو ريښې دي او k د A رانګ دی.

د U متې u_j او د V متې v_j د AA^* همداسې A^*A د آيګن-وکتورونو اورتوګونال بنسټونه جوړوي او لاندې صدق كوي:

$$Av_j = s_j u_j,$$

د $1 \leq j \leq k$ لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سينګولارارزښت توټه کونې له لارې کېدی شي کرښيزه څېرونه يا فنکشن

$$x \mapsto y = Ax$$

په لاندې بڼه انځور شي:

$$y = \sum_{i=1}^{k} s_i (v_i^* x) u_i$$

له دې لاس ته راځي ، چې

$$\text{Kern}\, A = \text{span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}, \quad \text{Bild}\, A = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}.$$

ذاالاخره $\|A\|_2 = s_1$ او $\|A\|_F^2 = \sum_{j,k} |a_{j,k}|^2 = s_1^2 + \cdots + s_k^2$ دي.

ليکونکي: اېپ.هيوليګ

د هرمېتيکي ماتريکس A^*A د دياګونالي کونې له لارې لاس ته

$$V^*A^*AV = \text{diag}(s_1^2, \dots, s_k^2, 0, \dots, 0) = S^t S,$$

راځي، له هغې سره چې سرې نيولی شي، چې آيګن – ارزښتونه د خپلې لوېي پسې منظم دي. دا چې A^*A مثبت ديفينيت دي، کېدی شي چې فقط نامنفي آيګن-ارزښتونه د مربع په څېر وليکي او په دې توګه د $m \times n$ دياګونالماتريکس S تعريف کړي.

د پورته مساوات څخه لرو ، چې د AV متې اورتوګونال دي او نورم s_i لري:

$$AV = \begin{pmatrix} s_1 u_1 & \cdots & s_k u_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = US$$

د يوه يونيتارماتريکس U سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وروسته له دې چې غوښتونې انځورونه

$$A = USV^*$$

منځ ته ارغله، کېدی شئ پسې راتلونکې وینا ساده پسې وازمائل شي.

دا چې یونیتار ترانسفورمیشن د یوه ماتریکس رانګ نه تغیروي، صدق کوي

$$\text{Rang } A = \text{Rang } S = k \,.$$

پسې لرو

$$AA^*u_j = U(SS^t)U^*u_j = u_j(s_j)^2$$

او

$$A^*Av_j = V(S^tS)V^*v_j = v_j(s_j)^2 \,.$$

باالاخره Av_j د US د j ــمې متې سره برابر دی، یعنې د u_js_j سره برابر.

لیکونکې: اپپ.هیولیک

فاسد معکوس Pseudo-Inverse

یو کمپلکس $(m \times n)$-ماتریکس A د سینګولار-ارزښت-تړته کونې USV^* سره کیدی شي د اندولونې پرابلم(مسئله $|Ax - b| \to \min$ د مینیمال نورم سره په بڼه

$$x = A^+b, \quad A^+ = VS^+U^*,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وليکل شي، د کوم سره چې A^+ د A فاسد-معکوس بلل کيږي، او

$$S^+ = \mathrm{diag}(1/s_1, \ldots, 1/s_k, 0, \ldots, 0), \quad k = \mathrm{Rang}\, A\,,$$

د $(n \times m)$ - دياگونال ماتريکس د مثبت سينگولار ارزښت دی

د په څټ ارزښتونو سره.

که $\{u_1, \ldots, u_m\}$ او $\{v_1, \ldots, v_n\}$ د U همداسې V ، د مټو اورتوگونال بنسټونه وي، نو کېدی شي کرښيز فنکشن $b \mapsto x = A^+b$ په ضريبونو بڼه

$$x = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{s_\ell}\,(u_\ell^* b) v_\ell$$

انځور شي. له دې څخه په ځانگړي ډول لاس ته راځي، چې

$$\mathrm{Kern}\, A^+ = \mathrm{span}\{u_{k+1}, \ldots, u_m\}, \quad \mathrm{Bild}\, A^+ = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$$

او $\|A^+\|_2 = 1/s_k$.

ليکونکي: اپپ.هيوليگ

د د $2-$ نورم انواريانت له امله د يونيتار ترانفورميشن له لارې کېدی شي $Ax - b$ له کينې د U^* سره ضرب کړي. د

$$c = U^* b, \quad y = V^* x$$

سره ترې ورته د مينيمال کولو پرابلم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|Sy - c| = \left| \begin{pmatrix} s_1 y_1 - c_1 \\ \vdots \\ s_k y_k - c_k \\ -c_{k+1} \\ \vdots \\ -c_m \end{pmatrix} \right| \to \min .$$

مينيموم سړی د لومړيو k مساواواتو د حل له لارې لاس ته راوړي:

$$y_i = c_i / s_i, \ i = 1 : k .$$

د يونيتار مياتريكس $(|x| = |y|)$ V نورم ته ريښتينوالي له امله د مينيمال نورم د حل لپاره دی:

$$y_{k+1} = \cdots = y_n = 0 .$$

په ټوليزه توګه ترې لاس ته راځي

$$y = S^+ c, \quad s^+_{i,j} = \begin{cases} 1/s_i & \text{für } i = j \le k \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

د

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره دې د انډولوالي پرابلم حل شي

د زيګولار- ارزښت ټوټه کونې (تجزيه کونې) شمېرنې لپاره لومړی د

$$A^t A = \begin{pmatrix} 80 & -16 & 56 \\ -16 & 32 & -40 \\ 56 & -40 & 68 \end{pmatrix}$$

آيګن-ارزښتونه او آيګن-وکتورونه ټاکل کيږي او ترې لاس ته راځي

$$s_1^2 = 144,\ s_2^2 = 36,\ s_3^2 = 0, \quad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

له دې لرو

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AV = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = US.$$

د U دوه لومړنی متې د AV د اړنده متو سره د ويش له لارې لاس ته راځي او د سيګولار ارزښتونو (له دې شره بايد ئوون- يا واحد وکتورونه منح ته شي) له لارې، پاتې متې (نه يواځنی ټاکلې) و اورتونورمال بنسټ ته د پوره کونې له لارې لاس ته راځي:

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره فاسد- معکوسيت

$$A^{+} = V \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^{t} = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 & 6 \\ -5 & 3 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

دی او

$$x = A^{+}b = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د مينيمال نورم حل.

ليکونکي: اپپ.هيوليک

د توپوګرافيکي کچونداتنونو تيکاوی يا اصلاح

Korrektur topografischer Meßdaten

د توپګرافي جګوال h_i داتنونه يا اعداد چې کچوني له لارې لاس ته راړنې ته د جګوالو کمښتونه $d_{i,j}$ کچ کيږي. د کچوني ناتيکاوي په بنسټ د قانون له مخي صدق کوي $d_{i,j} \neq h_i - h_j$

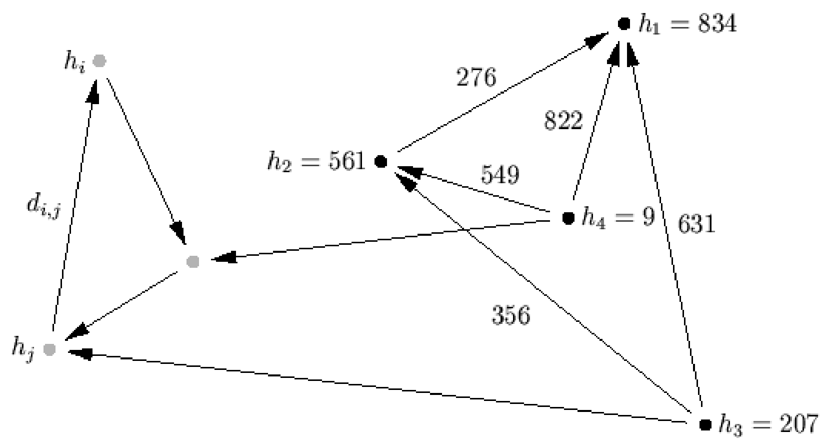
مناسب د جګوالي تيکاوي x_i کېدی شي د اندولوني پرابلم

$$\sum_{(i,j)} \Big(d_{i,j} - \big((h_i + x_i) - (h_j + x_j) \big) \Big)^2 \longrightarrow \min \; .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې حل شي.

د تلنلارې د ښوولو لپاره د کمو داتن سره يو مودل-پرابلم حل کيږي.



د جګوالي او کمښت ارزښتونو

$$h = (834, 561, 207, 9)^t, \quad d = (276, 631, 822, 356, 549)^t$$

لپاره، د $d = (d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}, d_{2,3}, d_{2,4})^t$ سره ، دا لاندې له ټاکلو اخوا (پورته، زيات) سيستم لاس ته راځي

F

$$A(h+x) = d, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

د مينيمال نورم غ،ښتونى حل دى:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = A^+(d - Ah) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د مينيمال – نورم – حل د څېړل شوي استعمال لپاره مخه ور دی، ځکه چې باید د ډېر امکان سره کوچنی تېکاوی وټاکل شي.

ليکونکی : ويپر

د مور-پينروز-شرطونه Moore-Penrose-Bedingungen

فاسد-معکوس به د لاندې کټمټوالي له لارې يواځنی کرکتريستيک شي:

- $AA^+A = A$
- $A^+AA^+ = A^+$
- $(AA^+)^* = AA^+$
- $(A^+A)^* = A^+A$
- ليکونکي: اپپ.هيوليک

ساده ښوول کيدی شي، چې د

$$A^+ = VS^+U^*, \quad A = USV^*$$

له لارې تعريف شوی فاسد-معکوس ورکړ شوي شرايط پوره کوي.

د بېلګې په توګه لومړی کټمټوالی د لاندې ښخه لاس ته ارځي

$$(USV^*)(VS^+U^*)(USV^*) = U[SS^+S]V^*,$$

ځکه چې په کونجيزو نوکانو يا قوسونو کې د ټوليز شوو دياګونال ماتريکسونو (دوه کونجتړو – يا قطبي ماتريکسونو) ضرب به د دياګونال توکو د ضربوني له لارې جوړېږ شي او لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_{i,i}^{+} = 1/s_{i,i}, \quad i \leq \text{Rang}\, A\,.$$

نور ټول کټمټوالي هم دسېده پسي- شمېرني له لاري لاس ته راځي.

د دې ښوونه چې وښايو A^{+} يواځنی کرکتريستيک شوی دی د ورکړ شوو شرايطو له لارې، نور هم خوراستونځمن دی، له دې امله يې دلته له څېړني تېرېږو.

ليکونکي: اپپ.هيوليک

اورتوګونال او ځانګړي اورتوګونال ګروپونه

Orthogonale und spezielle orthogonale Gruppe

د ټولو اورتوګونالو $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېری(سټ) د اورتوګونال ګروپ $O(n)$ سره ښايو يا په نخښنه کوو يا بول.

د $Q \in O(n)$ لپاره صدق کوي

$$Q^{-1} = Q^{t}\,, \quad |\det Q| = 1$$

او د يوه کواوردينات ترانسفورميشن

$$x \to x' = Qx$$

سره اوږدوالی اوسکلار ضرب ساتلی پاتې کيږي.

د ټول اورتوګونال $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېری د $\det Q = 1$ سره د ځرخونګروپ يا ځانګړی اورتوګونال ګروپ

$$SO(n) \subset O(n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلل کيږي.

Spiegelung هندارونه

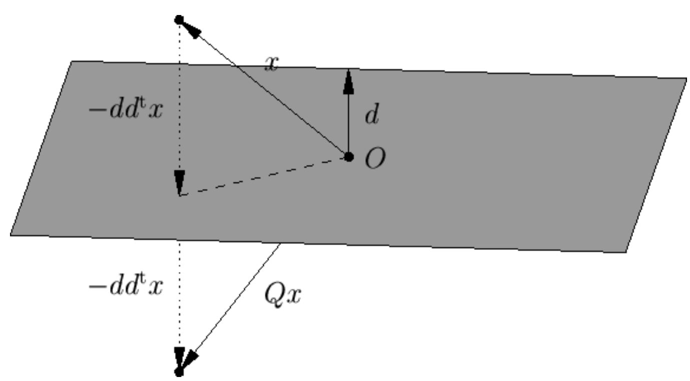
په $\mathbb{R}^n$ کې هندارونه (په هنداره انعکاسونه) و يوه يوونوکتور(واحد-) $d \neq 0$ ته اورتوګونال هايپرسطحه(Hyperebene)

$$H: \ d^t x = 0$$

باندې هندارونه د سيوم ترې اورتوګونال ماتريکس

$$Q = E - 2dd^t$$

له لارې د يوونماتريکس (واحد-) E سره په نښه کيږي



پکې يا ميلې په معنا ده

د Q سيومترې روښانه ده. له دې سره لرو :

$$QQ^t = Q^2 = (E - 2dd^t)^2 = E^2 - 4dd^t + 4dd^t dd^t = E\,,$$

دا په دې معنا چې Q اورتوګونال ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندارونې خويونو ښوولز لپاره لومړی په پامکې نيسو، چې وکتور

$$x - Qx = x - x + 2dd^t x = 2(d^t x)d$$

و d ته غبرګ دی، او منځټکی د x او Qx ترمنځ په هايپرهواره کې پروت دی:

$$d^t(x + Qx) = d^t x + d^t x - 2d^t dd^t x = 0\,.$$

له دې سره Qx په هايپرهواره د x هندارونه ده په سرچينه کې، هغه چې د d سره اورتوګونا ده.

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

ځرخون Drehung

آورتوګونال $(n \times n)$ - مآتريکس

$$\begin{array}{l} \\ \\ \text{Zeile } i \ \longrightarrow \\ \\ \text{Zeile } j \ \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & c & & -s & \\ & & & \ddots & & \\ & & s & & c & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

په پورته کې Zeile د ليکي يا کيلې په معنا ده

د $c = \cos\varphi$ او $s = \sin\varphi$ سره يوه ځرخون په φ په $\mathbb{R}^n$ کې پرته د $x_i x_j$ - سطحه کې په ګوته کوي(تحليلوي). ليکونکي: اپپ.هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساده شميرنه او د

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$$

په پام کې نيولو سره تصديقيږي، چې ځرخونماتريکس R اورتوګونال دی:

$$RR^{\mathrm{t}}=\begin{pmatrix}1 & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & \\ & & c^2+s^2 & & -sc+sc & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -sc+sc & & c^2+s^2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1\end{pmatrix}=E\,.$$

- ليکونکي: اپپ.هيوليک

ځرخونمحور او ځرخونکونج Drehachse und Drehwinkel

هر په $\mathbb{R}^3$ کې ځرخون Q يو ځرخون محور لري، دا پهدې معنا چې يو يوونوکتور u اينواريانت پريږدي،او په يوه کونج φ يو ځرخون ښايي په هغه هواره کې چې u ته(باندې) اورتوګونال ده.

نسبت و يوه اورتوګونال ولاړسيستم u,v,w ته Q لاندې د ماتريکس آنځورونه لري:

$$\tilde{Q}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

او د ځرخونکونج لپاره په ځانګړې توګه صدق کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Spur} Q - 1\right) .$$

- ليکونکي: هيوليگ، ربل

د يوه څرخونماتريکس Q لپاره لرو:

$$Q^{-1} = Q^{t}, \quad |\det Q| = 1 .$$

دا چې د يوه اورتوګونالماتريکس آيګن –ارزښت λ_i مطلق ارزښت 1 لري او $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det Q = 1$ دی، لرو، چې لږ تر لږه يو آيګن – ارزښت 1 دی. د مناسب په ګڼه کزلز يا نمرهکولو سره يا

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \quad \lambda_1\lambda_2 = 1$$

دی او يا

$$\lambda_i \in \{-1, 1\} .$$

دا نورمي شوی ايګن- وکتور u د آيګن – ارزښت 1 څرخونمحور ټټکي.

د يوه اورتوګونالولاړسيستم u, v, w لپاره باور لري:

$$Qu = u$$

$$Qv = \alpha v + \beta w$$

$$Qw = \gamma v + \delta w .$$

دا چې Qv, Qw کوم د u - کومپوننت نه لري، له لاندې له کونجساتونکو اورتوګونال مارتيکسونو څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \perp u \Rightarrow Qx \perp Qu = u\,.$$

که پورته مساوات د ماتریکس بڼه باندې

$$Q(\underbrace{u,v,w}_{P}) = (u,v,w)\underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{array}\right)}_{\tilde{Q}},$$

باندې ولیکل شي، له $\tilde{Q} = P^{-1}QP$ لاس ته ارځي، چې

$$\left(\begin{array}{cc} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{array}\right)$$

یو څرخون ماتریکس دی. په همدې ډول د شپور د انواریانت له امله لاس ته راځي:

$$\mathrm{Spur}\,Q = \mathrm{Spur}\,\tilde{Q} = 1 + 2\cos\varphi$$

- لیکونکي: هیولیګ، ربل

ماتریکس

$$Q = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{array}\right)$$

یو دیاګونال ماتریکس دی، څکه چې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q^{\mathrm{t}}Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = E \Rightarrow Q^{\mathrm{t}} = Q^*$$

او

$$\det Q = \det \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = +1\,.$$

ځرخونمحور د آئګن- وکتور u په حیث ټاکل کیږي و آیګن – ارزښت $\lambda = 1$ ته:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}_{Q-E}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ځرخونکونج φ له

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}\,Q - 1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

څخه لاس ته ارځي، د $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ په حیث .

د φ مخنخښه د ځرخونلور u د لوریزوالي په واک کې ده او کېدی شي د یوه ولاړسیستم(کواوردینات سیستم) $\{u, v, w\}$ وټاکپ شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w^tQv = w^t(\cos\varphi v + \sin\varphi w) = \sin\varphi\,.$$

د

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

سره د راوړل شوي بېلګې لپاره لرو:

$$\sin\varphi = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$$

نو لرو: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ليکونی: ويپر

د يو خرخون په ضربيونو توټه کونه Faktorisierung einer Drehung

يو خرخون Q په $\mathbb{R}^3$ کې په کواورد يناتمخور د د کواوردخرخونونو د ضرب په څېر کېدی انځور شي:

$$Q = D_z D_y D_x\,.$$

- ليکونکي: هيوليک، ربل

خرخون D کېدی شي و ټاکل شي، دا سې چې يو په بل پسې sukzessive د Q توکي q_{21}, q_{31}, q_{32} له منځه يووړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_x^{-1}D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} = R\,.$$

له دې سره داسې کار اخستل شوی یا مخ ته تللي یو، چې یو په خوښه آیګن-وکتور $(v_1, v_2)^t$

په $(1, 0)^t$ باندې د یوې سطحې د څرخون D له لارې ځان څېره کړی شي (یعنې د تابع په څېر ولیکل شي). دا چې $\det R = 1$ دی $r_{33} = 1$ لرو او د مټو د نورمي کولو له امله باید R یوونماتریکس (واحدماتریمس) وي. له دې سره غوښتونې انځورونه لاس ته راځي.

- لیکونکي: هیولیګ، ربل

د دې لپاره چې د ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{4}}{8} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}$$

په ضریبونو تونه کول لاس ته راوړو، نو لومړی توکی $q_{2,1}$ له منځه وړو د $\frac{\pi}{2}$ په کچه څرخون د z – محور باندې:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}.$$

داسې پای کوو چې د y -محور باندې د $\frac{\pi}{4}$ په کچه څرخوو:

:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} D_z^* Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

لاس ته راغلی ماتریکس یوو ځرخون D_x دی د x -محور باندې. په تولیزه توګه لاندې په ضریبونو تونه کونه لاس ته راوړو:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

D_x D_y D_z

- ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

ځرخونماتريکس Drehmatrix

په $\mathbb{R}^3$ کې يو ځرخون د نورمي شوي ځرخون محورلور u او ځرخونکونج φ سره ، داسې لوريزه لکه ښی پيچي ميخ ، د يو وکتور x فنکشن جوړوي

$$Qx = \cos\varphi\, x + (1-\cos\varphi)\, u u^{\mathrm{t}} x + \sin\varphi\, u \times x$$

، چيرته چې $v \times x$ د u او x صليب ضرب(وکتوري ضرب، چې x سره په نخښه کيږي) په نخښه کوي. اړونده ځرخونماتريکس دی:

$$Q: \quad q_{ik} = \qquad \cos\varphi\, \delta_{ik} + (1-\cos\varphi)\, u_i u_k + \sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j\,.$$

د کرونيکرسومبول δ_{ik} او ε -تنزور ε_{ijk} سره.

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

دا بسيا کوي پسي وښايو، چې $Qu = u$ او يو و u ته اورتوګونال وکتور v په يوه کونج φ د u په محور باندې وځرخي. لومړی غوښتنه ترلړ کتل کيږي. د v ځيرې يا تابع ارزښت په ځير لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Qv = \cos\varphi\, v + \sin\varphi\, u \times v\,,$$

څه چې په φ د څرخون سره د v او $u \times v$ څخه غزېدلې سطحه په ګوته کوي.

- ليکونکي: هيوليک، ربل

د تولیز فرمول سره سم د $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^t$ په محرڕر په $\varphi = \frac{\pi}{3}$ يو د څرخون ماتريکس Q له 3ترمونو څخه په لاندې ډول يوځاي کيږي:

په توليزه توګه لاس ته راوړ

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\cos\varphi\ \delta_{ik}: \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(1-\cos\varphi)u_i u_k: \quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j: \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ليکونکي: هيوليک، کرايځ

مربعيزه فورم(څلورى يې بڼه) Quadratische Form

د يوه حقيقي سيموتريک ماتريکس A لپاره دا لاندې

$$\alpha(x) = x^t A x$$

مربعيزه فورم نوموو.

د A د آيګن – ارزښت د مخنخښې بدلون له مخې لاندې درې تيوپه(ډولونه) توپيروو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- الیپتیکي (بیضوي ډوله) بڼه: ټول آيګن – ارزښتونه همغه مخنخښه لري.
- پارابولیک : لږ تر لږه يو آيګن – ارزښت صفر دی او نور آيګن ارزښتونه همه يابرابرې وخنخښې لري.
- های پارابولیکي : د مختلفو مخنخښو سره آيګن – ارزښتونه شتون لري.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د A سیومتري اړيين نه ده چې مخ له مخه ونیول شي(فرض شي)، د ټولیز ماتریکس لپاره کېدی شي مربع بڼه په لاندې ډول ولیکل شي:

$$x^{\mathrm{t}}Ax=\sum_{j,k}x_ja_{j,k}x_k=\sum_j a_{j,j}x_j^2+\sum_{j<k}(a_{j,k}+a_{k,j})x_jx_k$$

پس کېدی شي هر ځل دوه ترمونه سره يوځای کړو او مربع بڼه سیومتري کړو يا په سیمتري واړوو:

$$x^{\mathrm{t}}Ax=\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}(A+A^{\mathrm{t}})x\,.$$

مربع بڼې د بېلګې په توګه د يوه سکالارتابع f د تیلور- ودې د لومړي ترم په څېر رامنځ ته کیږي:

$$f(x)=f(0)+\operatorname{grad}f(0)^{\mathrm{t}}\,x+\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}(\mathrm{H}\,f(0))\,x\,.$$

په دې حالت کې $\mathrm{H}\,f$ د دويم ټوټه (partiellen -) مشتق د هسې-ماتریکس دی، د بدلونوالي په بنسټ سیومتري دی. لیکونکي: اېپ، هیولیګ

سیومتریک ماتریکس

$$A=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1+\lambda\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

آيګن – ارزښتونه 2 او 2λ لري.

مربعي بڼه

$$\alpha(x) = x^{t}Ax$$

د $\lambda > 0$ لپاره بيضوي(هګۍ ډوله) ده، د $\lambda = 0$ لپاره پارابوليک او د $\lambda < 0$ لپاره هايپارابوليک دی.

- ليکونکي: اپپ، هيوليک

کوادريک Quadrik

تکي

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) + 2\beta(x) + \gamma = 0\}$$

کوادريک بلل کيږي، چېرته چې α يو مربعيزه بڼه، β يوه کرښوزه بڼه او γ يوه ثابته ده.

Q د ماتريکس ليکدود په ډول ليکل په لارندې ډول ليکل کيږي

$$Q : \quad x^{t}Ax + 2b^{t}x + c = 0$$

د $\alpha(x) = x^{t}Ax$ او $\beta(x) = b^{t}x$ سره.

د Q انځورونه يواځنی نه ده. د بېلګې په توګه کېدی شي د تعريف مساوات د يوه په خوښه ثابتي سره ضرب شي.

- ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوادريکونو شډله ټوټه ونه Grobeinteilung der Quadriken

د يوه کوادريک د مساوات څخه په پيل

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

ليکو

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array} \right).$$

د $\tilde{x}^t = (1, x_1, \ldots, x_n)$ سره کېدی شي Q هم په لاندې هوموجين بڼه وليکل شي:

$$Q: \quad \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0$$

لاندې ډولونه يا تيوپونه توپيروو:

- مخروطي کوادريک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A$
- منځټکي کوادريک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 1$
- پارابوليکي کوادريک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 2$
- ليکونکي: اېپ، هيوليګ

کوادريک

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا دونه(ژباړی): په سطحه کې یوه کره(کرښه)، په درې بعدیزه (دریپراخیدونې) فضا کې یوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو یا متحولو له لارې تشریح یا ښوول کیدی شي.پای

$$Q: \quad x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2x_2 + \lambda = 0$$

دې د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره ورکړ شوي وي، همداسې د ماتریکس لکیندود

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \lambda, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

،

سره ورکړ شوي وي.

د $\lambda = 0$ لپاره $\operatorname{Rang} A = 1$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang} A = 2$ دی. د $\lambda = \pm 1$ لپاره $\operatorname{Rang} \tilde{A} = 2$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang} \tilde{A} = 3$ دی. له دی سره Q د $\lambda = 0$ لپاره یو پارابول ، د $\lambda = \pm 1$ لپاره مخروطي ډوله کوادریک او د نورو ټول ارزښتونو لپاره یو منځټکي کوادریک دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

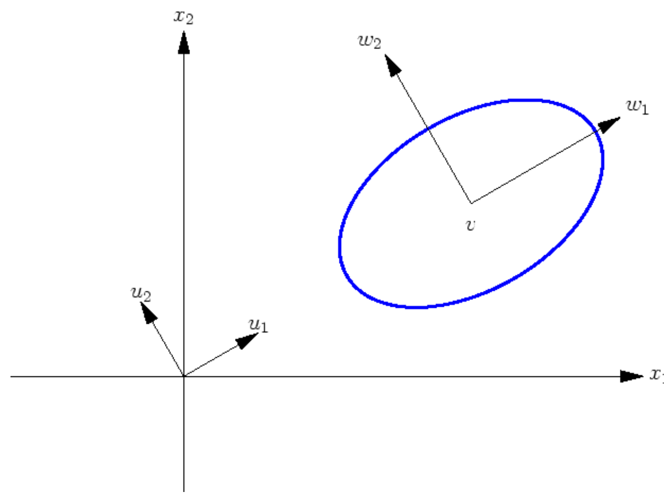
اصلي- محور –ترانفورمیشن Hauptachsentransformation

د څرخون او راکښنی له لارې په $\mathbb{R}^n$ کې کېدی شي یو کوادریک په نورمال بنه ترانسفورمي شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^t Ax + 2b^t x + c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1} + \gamma\,, \quad x = Uw + v\,,$$

چيرته چي $m = \text{Rang}\, A$ او $\beta\gamma = 0$ صدق کوي.



له دې سره د څرخون ماتريکس U متې د A آيګن –ارزښتونو λ_i ته آيګن-وکتورونه u_i خوندي لري، چې د هغې لور اصلي محور بلل کيږي. د راکښنې وکتور (راکښونوکتور) v د کوادريک منځټکی دی. ليکونکي: اپپ، هيوليګ

سيومتري مارتيکس A ته له آيګن –وکتورونو u_i څخه د $\det(u_1, \ldots, u_n) = 1$ سره يو اروتوګونال بنسټ شتون لري، د کومو سره چې لومړی و آيګن – ارزښتونو $\lambda_i \neq 0$ ته آيګن – وکتورونه نئول کيږي. د لومړي ځای بدلون $x = Uy = (u_1, \ldots, u_n)y$ پسې له دې سره لاندې دياګونال بڼه لاس ته راځي

$$y^t \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0)y + 2(\underbrace{U^t b}_{\tilde{b}})^t y + c\,.$$

له صفر څخه مختلف آيګن-ارزښتونو $\lambda_i \neq 0$ لپاره د نورو ورپسې ځای بدلون له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_i = z_i - \tilde{b}_i/\lambda_i$$

کیدی شیکربنیز ترمونه له ځایه یوړل شي (مربعي پوره کونه). ثابتې د

$$c \to \gamma = c - \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_i^2/\lambda_i \,.$$

سره سم تغیر خوري،نو اوس له دې سره اوس دا بڼه لرو

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=m+1}^{n} 2\tilde{b}_i z_i + \gamma \,.$$

که اوس یو $\tilde{b}_i \neq 0$ د $i \geq m+1$ سره شتون ولري، نو د یو ه بل څرخون پسي د

$$z_i' = z_i \,, \quad i \leq m$$

$$z_{m+1}' = (1/\beta) \sum_{m+1}^{n} \tilde{b}_i z_i \,, \quad \beta = \pm|\tilde{b}|$$

او په اړونده اورتوګونال د $z_{m+2}', \ldots, z_n'$ سره تکمي شوی

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (z_i')^2 + 2\beta z_{m+1}' + \gamma \,.$$

لاس ته راځي.

له دې سره د β سره مخ نخښه ډاسي ټاکل کیږي، چې د β سره ویش وروسته لږ تر لمه دومره مثبت لکه منفي ترمونه λ_i/β رامنځ ته شي.

اخرنی راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w_{m+1} = z'_{m+1} + \gamma/(2\beta)$$

$$w_i = z'_i\,, \quad i \neq m+1$$

ثابته له منځه وړي او باالاخرخ راکوي:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1}\,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

کوادريکونه

يا دونه(ژباړى): په سطحه کې يوه کره(کرښه)، په درې بعديزه (درېپراخيدونې) فضا کې يوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو يا متحولو له لارې تشريح يا ښوول کيدى شي.پاى

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

دې په نورمال فورم يا – پنې ترانسفورمي شي.

د ماتريکس لکندود سره لاس ته راځي

$$Q: \quad x^{t}Ax + 2b^{t}x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ 10 & 17 & 14 \\ 4 & 14 & 20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -24 \\ -57 \\ -39 \end{pmatrix}, \quad c = 207\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره.

ماتريکس A آيګن – ارزښتونه 36، 9 او 0 لري، په دې اړونده نورمي شوي آيګن-وکتورونه u_i د $\det(u_1,u_2,u_3)=1$ سره د بېلګې په توګه دي:

$$u_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^t\,,\quad u_2=\frac{1}{3}(2,1,-2)^t\,,\quad u_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^t\,.$$

د ترانسفورمېشن $x=Uy$ پسې د $U=(u_1,u_2,u_3)$ سره لاس ته راځي

$$Q:\quad 36y_1^2+9y_2^2-144y_1-18y_2+18y_3+207=0\,.$$

د مربعيزې تکميلوني له لارې

$$z_1=y_1-2\,,\ z_2=y_2-1\,,\ z_3=y_3$$

لاس ته راحي

$$Q:\quad 36z_1^2+9z_2^2+18z_3+54=0\,.$$

راکښنه

$$w_1=z_1\,,\ w_2=z_2\,,\ w_3=z_3+3$$

باالاحره نورمالفورم (- بڼه) راکوي

$$Q:\quad 36w_1^2+9w_2^2+18w_3=0\,.$$

په ټوليزه توګه ترانسفورمېشن لاندې فورم يابنه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = Uy = Uz + U \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Uw + U \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

پس راکښنه ده

$$v = U \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

او د د کوادریک منځ ټکی په ګوته کوي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

مخروط غوڅی Kegelschnitt

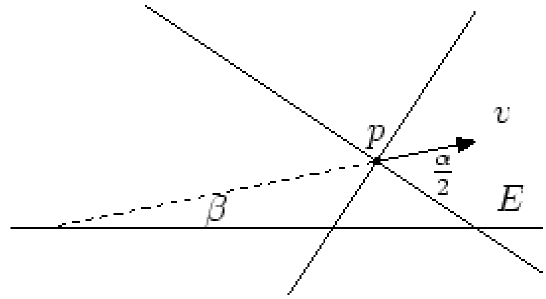
د یوه دېلمخروط غوڅی

$$K: \ (x-p)^{\mathrm{t}} v = \pm \cos\frac{\alpha}{2}\, |x-p||v|$$

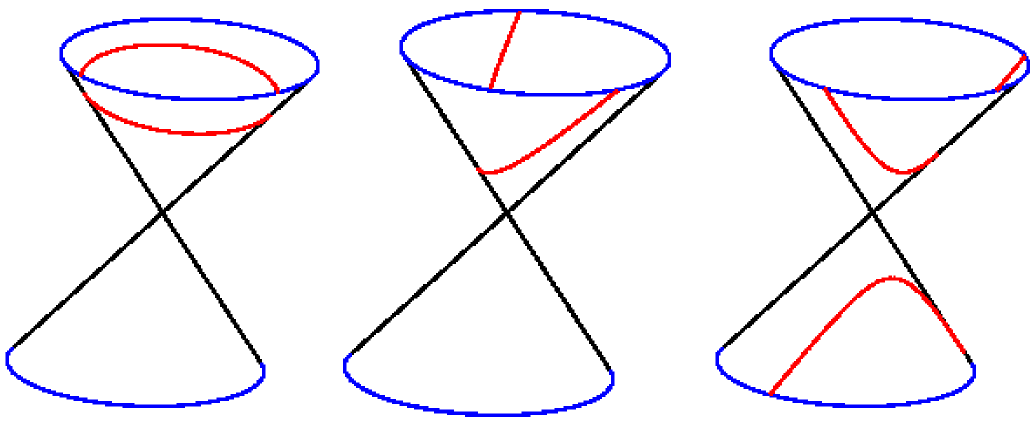
د څوکې p ($p_3 \neq 0$) ، لور v سره او وازولو کونج α د سطحې $E: \ x_3 = 0$ سره یوه مربعیزه کړه ده

$$K \cap E: \ a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مخروط غوښي تيوپ يا ډول د E او کرښي $p + tv$, $t \in \mathbb{R}$, ترمنځ کونج β د لويوالي په واک کې دی



Hyperbel: های پارابول
$\beta < \alpha/2$

Parabel: پارابول
$\beta = \alpha/2$

Ellipse: بيضوي يا هګبن
$\beta > \alpha/2$

ليکونکي: ايپ، هيوليک

د دوه بعدي کوادريکونو د اوکليدي نورمال بڼه

Euklidische Normalform der zweidimensionalen Quadriken

د سطحيزو کوادريکونو مختلف ډولونه شتون لري، د لاندې نورمال فورمونو سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مخروطي کوادريکونه

Normalform نورمال بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Punktټکی
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidendes Geradenpaar د غوڅوونکو کرښو جوړه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelgerade دبلې کرښې

- منځټکي کوادريکونه

Normalform نورما بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	(تش ډېرى)leere Menge
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Hyperbelهاى پارابول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	Ellipseبيضوي(هګۍ)
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$	leere Menge)تش ډېرى(
$-\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$	paralleles Geradenpaar د کرښو غبرګه جوړه

- پارابوليکي کوادريکونه

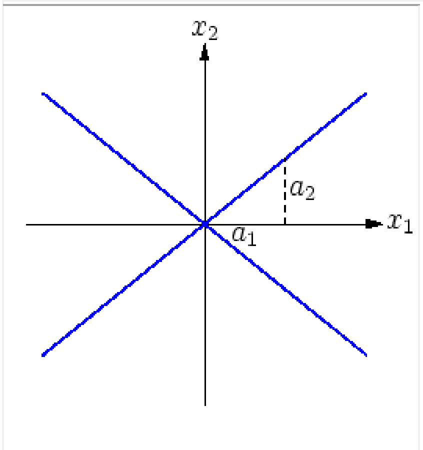
Normalform نورمال بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+2x_2=0$	Parabel پارابول

نورمالفورمونه يواځني دي، د ايندکسونو يا پېژند نخښنو تر ځای بدلون پورې او د مخروطي کوادريکونو د يوې ثابتې $c \neq 0$ سره د ضرب پورې.

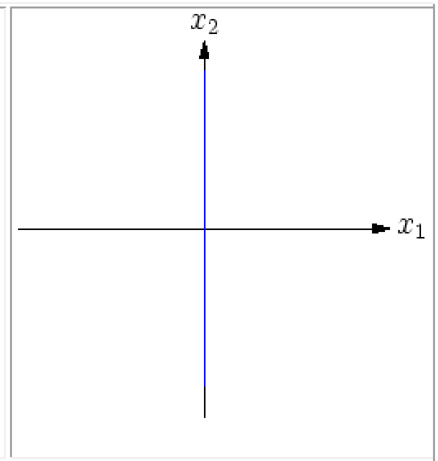
لويې a_i مثبت اينول کيږي او د کوادريکونو داصلي محور اوړدوالی بلل کيږي

schneidendes Geradenpaar د غوڅيدونکو کرښو جوړه	Doppelgerade ډبل کرښې

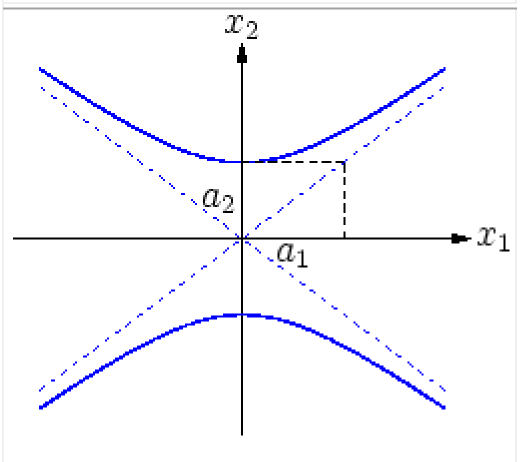
(c) ketabton.com: The Digital Library



Hyperbel هاى پارابول

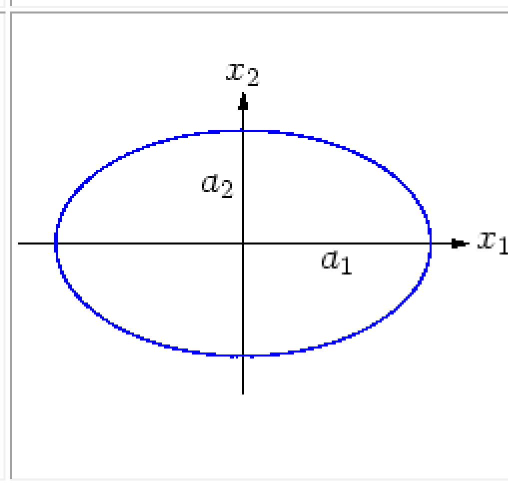


Ellipse بيضوي يا هکی



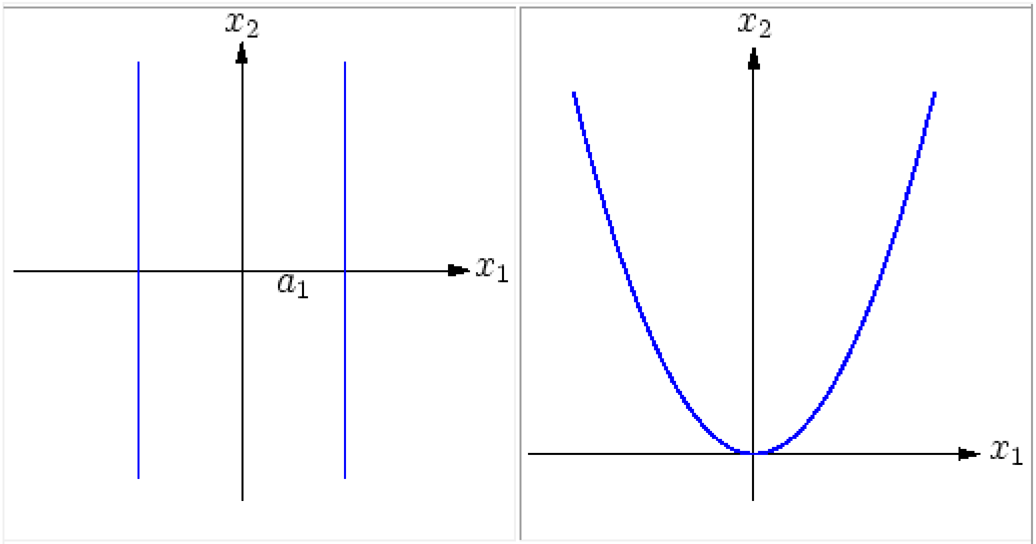
paralleles Geradenpaar

غبرگه(موازي) كرښجوره



Parabel پارابول

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: اپپ، هيوليګ

اوس دې د لاندې کوادريکونو نورمالفورم(- بڼه) او تيوپ وټاکل شي

$$Q: \quad 3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 - 12\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{2}x_2 - 8 = 0$$ د

ماتريکسفورم د مربعيز فورم څخه په پيل،

$$x^t Ax + 2b^t x + c = x^t \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x + 2\sqrt{2}\,(-6,-2)\,x - 8$$

لومړی سرِی د ماتريکس A آيګن – ارزښتونه او آيګن – وکتورونه ټاکي.

کرکتريتيکي پولينوم دی:

$$(3-\lambda)^2 - 25 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 25 = \lambda^2 - 6\lambda - 16$$

او لاندې صفرځايونه لري

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = 3 \pm 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

و $\lambda_1 = -2$ ته يو نورمي شوی آيګن-وکتور د لاندې کرښيز مساوات د حل څخه لاس ته راوړل کيږي

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} v_1 = 0$$

نو $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^t$ دی. دا چې دويم آيګن-وکتور په په لومړي بايد عمود (ولاړ) وي، نو لاس ته راځي $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$ ، د کوم سره چې مخنخښه داسي بايد ټاکل شوي وي، چې د لاندې ورکړ شوې ترانفورميشن ماتريکس ديترمينانت مثبت وي:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

د $x = Uy$ سره تراسفورمي شوي مساوات لاندې بڼه لري:

$$\begin{aligned} 0 &= y^t \tilde{A} y + 2\tilde{b}^t y + c \\ &= y^t U^t A U y + 2\left(b^t U\right) y + c \\ &= -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8\,. \end{aligned}$$

د مربعيزې پوره ونه يا تکميلونه راکوي

$$0 = -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad -2(y_1-2)^2+8(y_2-1)^2-8$$

$$= \quad -2z_1^2+8z_2^2-8$$

په همدې ډول

$$\frac{z_1^2}{2^2}-\frac{z_2^2}{1^2}+1=0\,.$$

نو مساوات يو هاى پارابول انځوروي.

(Autoren: Höllig/Hörner)

د درې بعدي کوادريکونو د اقليدس (اويکليد) نورمالفورم

Euklidische Normalform der dreidimensionalen Quadriken

د فضايي کوادريکونو 17 مختلف ډولونه شتون لري د لاندې نورمالفورمونو سره:

- مخروطي کوادريکونه

Bezeichnung نومونه	Normalform نورمال بڼه
تکیPunkt	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(Doppel-)Kegel(دبل)مخروط	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$
Geradeکرښه	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$
Schneidende Ebenenغوڅونکي سطحې	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$
Doppelebeneدبل سطحې	$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$

- منځنکي کوادريکونه

په نخښه ونه Bezeichnung	نورمال بڼه Normalform
(leere Menge) (تشډېرۍ)	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$
دوه پوښيز های پرابولوئيد zweischaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$
يوپوښيز های پرابولوئيد einschaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Ellipsoid ايليپسوېيد	$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0$
(leere Menge) تشدپرۍ	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$
hyperbolischer Zylinder هايپربوليكي توته	$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$
elliptischer Zylinder ايليپتيكي توته	$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$
(leere Menge) تشدپرۍ	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$
parallele Ebenen غبرګي سطحې يا ۰ هوارئ	$-\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$

- پارابوليكي كوادريكونه

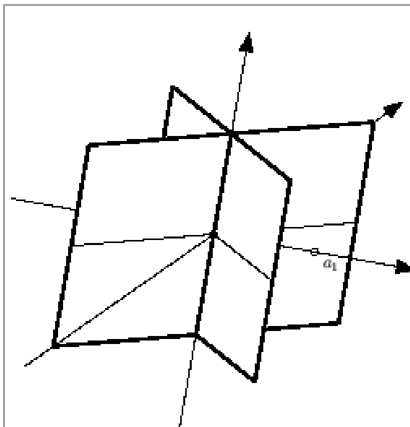
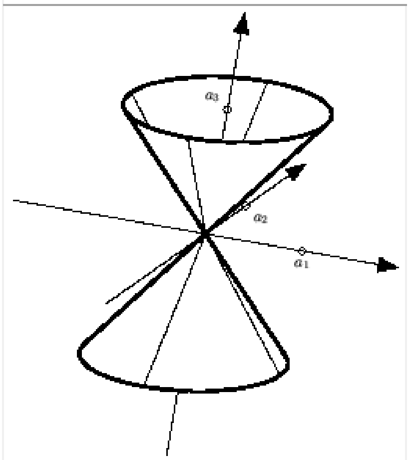
نومونه	نورمال بڼه
هګۍ ډوله ايليپميكي پارابولوئيد	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+2x_3=0$
هاي پارابوليكي پارابولوئيد	$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+2x_3=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارابولیکي توته	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$

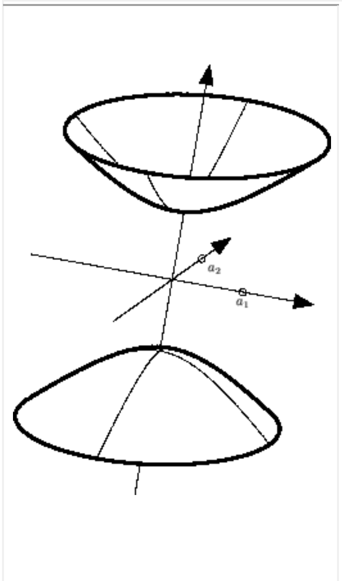
نورمال بڼې د ایندکسونو یا پیژند نخښو پورې یوائځني ټاکلي او مخروطئ کوادریکونه د ثابتې $c \neq 0$ سره د ضرب پورې یوائځني ټاکلي.

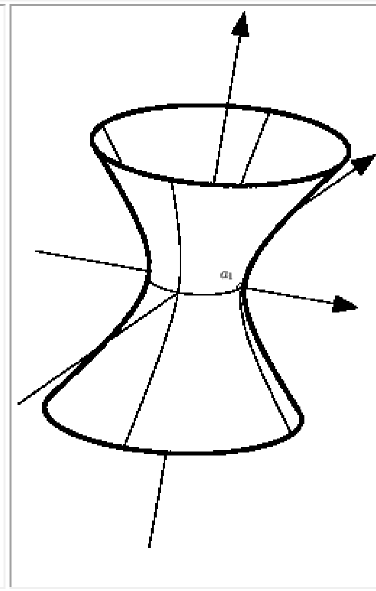
لویې a_i مثبت اینول کیږي او د کوادریکونو د اصلي محور اوږدوالی بلل کیږي.

غوڅوونکي سطحې	(ډبل) مخروط
	

یو یوښیز های پارابول	دوه یوښیز های پارابول

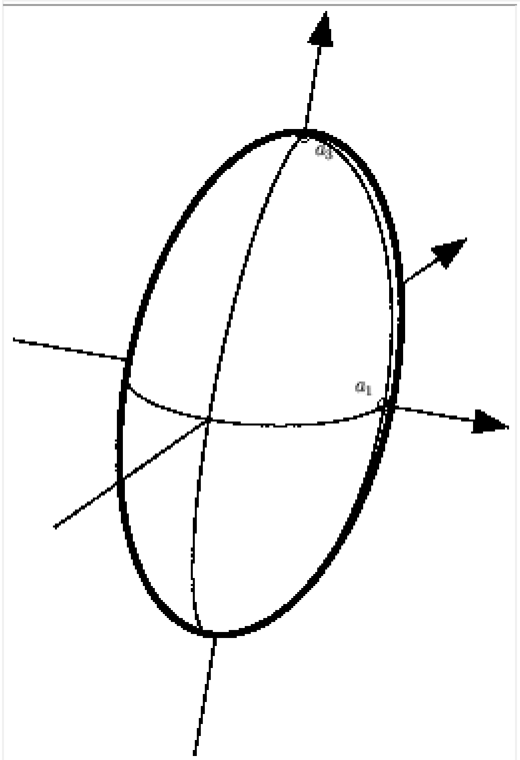
(c) ketabton.com: The Digital Library

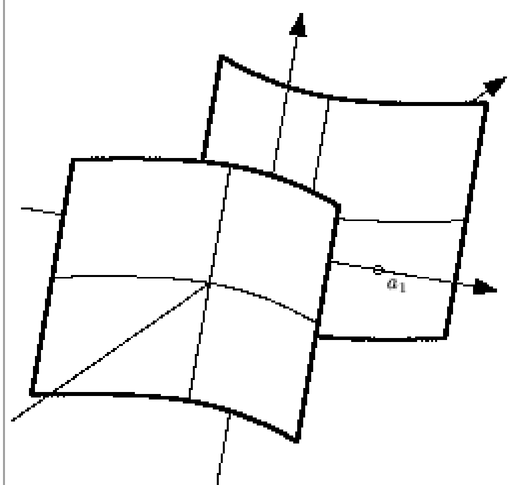




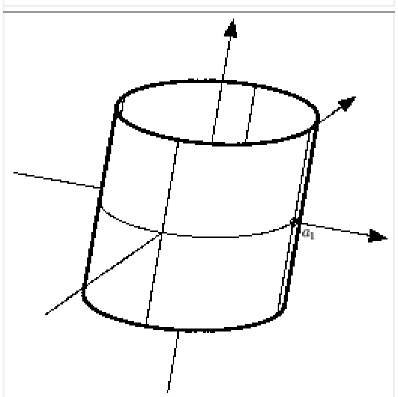
Ellipsoidهکی ډوله یا بیضوي ډوله	های پارابولیکي توته hyperbolischer Zylinder

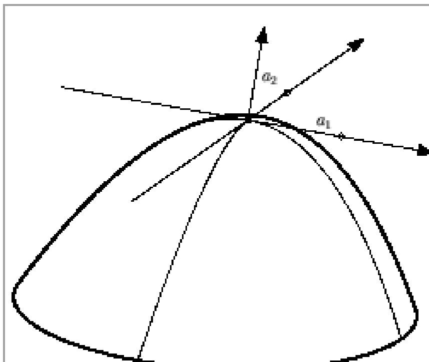
(c) ketabton.com: The Digital Library



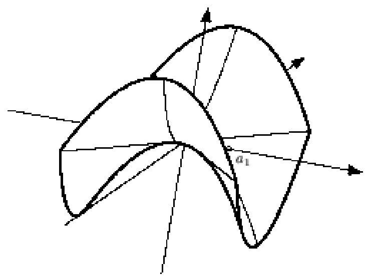
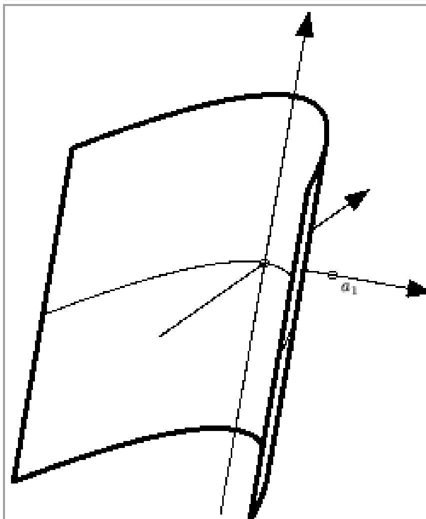


elliptischer Zylinder بيضوي توته	elliptisches Paraboloid بيضوي پارابولوئيد





(c) ketabton.com: The Digital Library

hyperbolisches Paraboloid های پارابوليکي پارابولوئيد	parabolischer Zylinder پارابوليکي توته يا - استوانه
	

ليکونکي: هيوليګ، هيرنر

اوس دې د لاندې کوادريکونو نورمال بڼه او تيوپ (ډول) و ټاکل شي:

$$Q: \quad x^t \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + 2\,(-2,1,2)\,x + 2 = 0$$

د ماتريکس کرکتريستيکي يا ټاټونکی پولينوم

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې صفرځاي لري:

$$\lambda_1 = 9\,, \quad \lambda_2 = 3\,, \quad \lambda_3 = -3\,.$$

و آيګن – ارزښتونو λ_i ته اړونده نورمي آيګن-وکتورونه دي:

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\,,$$

جېرته چې مخنخښه داسې ټاکل کيږي، چې ولاړسيستم منځ ته راځي.

د اورتوګونال ترانسفورميشن ماتريکس په حيث منځ ته راځي:

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

دا د $x = Uy$ سره ترانسفورمي مساوات لاندې بڼه لري:

$$y^t \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y + 2\,(0,3,0)\,y + 2 = 0\,.$$

مربعيزه پوره کونه راکوي

$$\begin{aligned} 0 &= 9y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \\ &= 9y_1^2 + 3(y_2+1)^2 - 6y_2 - 3 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad 9z_1^2 + 3z_2^2 - 3z_3^2 - 1$$

په همدې توګه

$$\frac{z_3^2}{\frac{1}{3}} - \frac{z_1^2}{\frac{1}{9}} - \frac{z_2^2}{\frac{1}{3}} + 1 = 0 .$$

نور مساوات يوپوښيز های پارابول انځوروي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

چې غوتې پسې وهې په لاس به درشي

چا وې دا چې په درياب کې ګور نه شته

برى د خداى (ج) سره دى.

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړى:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

(c) ketabton.com: The Digital Library

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې څنو ځايونو غزېدلې او څنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: څمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزى ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرئ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يي متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يي

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library