# کرښیز الجبر

$$
\begin{array}{c|l}
 & A \cdot X_1 = b \\
- & A \cdot X_2 = b \\
\hline
= & A \cdot (X_1 - X_2) = 0
\end{array}
$$

له ن ج : بنسټیز درس | کرښیز الجبر

2012

Ketabton.com

ژیاړی: ډاکتر ماخان(میږی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library



# کرښيز الجبر

$$\begin{array}{c|l} & A \cdot X_1 = b \\ - & A \cdot X_2 = b \\ \hline = & A \cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

dr.shinwari@hotmail.com

له ن ج : بنسټيز درس | کرښيز الجبر

ژباړی:  ډاکټر ماخان(ميږى)  شينوارى

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرلیک

نظر يا د پيداکيدو فکر ۱

هندسي لړی پرلپسي يا لړی ۲

د برنولي نا مساوات يا نابرابرون ۳

د يوه کربنيز مساواتسيستم جوړښت ۴

ماتريکسونه: ۵

تراسپوني ماتريکس ۷

سيومتريکي ماتريکسونه ۷

نا يو ډوله يا اينهوموجين ۸

يو ډوله يا هوموجين ۹

ليکه پوړيز بڼه ۹

ديترمينانتونه ۱۳

رانګ ۱۳

د حلفضا د ديمنزيون (بعد، پراخيدونی)تاکل ۱۳

د ګاوس - تلنلار يا - - قانون ۱۴

د ګاوس الګوريتموس ټيکاوی ۱۶

د حلونو يا اوبيونو نور قوانين ۱۷

ورته والي - يامشابهت اړيکي ۱۹

ډېری يا سټ له تړنو يا عمليو سره ۱۹

لاندې برخه ( که توټه برخه يا کښته برخه): ۲۰

ګروپ ۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ابل - يا کموتاتيو ګروپ ۲۱
کړۍ ۲۱
بدن يا تن ۲۳
پاتې ټولګي يا باقي ټولګي ۲۳
وکتور فضا ۲۷
کرښيز خپلواکوالی ۲۷
کرښيز بلواکواکوال ۲۸
د وکتور فضا تعريف ۲۸
د يوه وکتور فضا جوړونه يا که غواړۍ توليد ۲۹
سپاين يا کرښيزه Spann،( (کرښيزه) رابنده ورشو ۳۴
جوړښتسيستم ( توليدي سيستم) ۳۴
بنسټ ۳۵
د شتاينيځ بدلونجمله ۳۵
بعد يا پراخېدونی ۴۰
لاندې وکتور فضا ۴۲
د لاندې فضاو لپاره د بعد يا پراخيدوني فرمول ۴۳
د فنکشنونو يا ځيرونو(توابعو) خويونه ۴۴
په کې (فنکشن يا تابع) ۴۴
په ( په باندې او په کې فنکشن يا -- تابع) ۴۴

(c) ketabton.com: The Digital Library





کرښیز فنکشنونه یا توابع ۴۵
زړی(هسته) او عکس یا څېره ۴۵
ځانګړي کرښیز فنکشنونه ۴۶
د ارزښتوني فنکشنونه یا توابع یا څېروني ۵۰
ایزومورفیزمونه ۵۱
ماتریکسونه ۵۲
د یوه ماتریکس رانګ ۵۳
د متې( درز یا ستنې یا ولاړې ... ۵۵
په څټ- یا معکوس ماتریک ۵۵
دیترمینانتونه ۵۶
د لاپلاس د ودیزېنې جمله ۵۸
د دیترمینانتونو ساده ټاکنه ۵۹
د ایندومورفیزم دیترمینانتونه ۶۱
أیګن ارزښت ۶۲
أیګنوکتور ۶۲
دوه -کونجترې کیدونکې یا دوه-کونجترې .... ۶۲
أیګن فضاوې ۶۳
ماتریکس سړی څنګه دوه-کونجترې یا... ۶۴
سکالار ضرب(دننی ځل یا –ضرب) او نورم ۶۵
د کوشي –شوارخ- نامساوات ۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library



اورتوګونال وکتورونه ۶۸
اورتونورمال بنسټونه: ۶۸
ځای بدلون ۶۸
ترانپوزیشن ۶۸
د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې ۷۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



# د ژباړي نیولیک

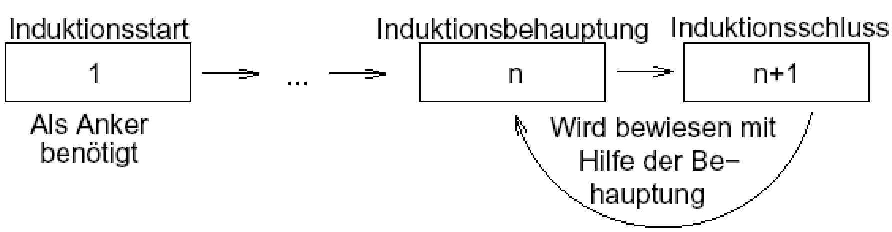
د دې سرلیک لاندې یوه بله لیکنه هم شته. دا مخ ته پرته لیکنه ساده او د پیل په څیر باید وکتل شي. دا لیکنه د بنسټیزو لیکنو ن ج څخه راژباړل شوې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



نظر يا د پيداکيدو فکر

پوره اندکشن د ښووني يو متود يا لار ده، هغه چې په کرښيزه الجبر کې زيات کارول کيږي. د ښووني لپاره نيول کيږي چې يو تاکلی فرمول د اندکشن ثبوت د $n$ لپاره صدق کوي. د اندکشن پای يا ختمپدلو – چې د اندکشن پل هم بلل کيږي- ښوول کيږي، چې دا فرمول د $n+1$ لپاره صدق کوي، دايې چې بېرته د اندکشن ثبوت باندې لاس ولرو يا راونيسو. د دې لپاره چې ښوونه پيخې ټيک يا پوره ټيک وي، د يوه نښلون ټکي ته اړتيا شته، له کوم چې $n$ پيل کيږي. دا نښلونټکی د اندکشن پيل ټکی هم بللکيږي. يا د اندکشن پيل او په ښوونه کې په پيل کې راوړل کيږي.




.

د پورته دېښتو ژباړه له کين و ښي لور ته:

پورته: د ايندکشن پيل. لاندې: د په باندې اينبولو ( کلکولو) لپاره اړين.

لوريزئ کرښي: لرو .

بيرته خيره پورته: د ايندکشن غوښتنه يا ثبوت د ايندکشن پای. لاندې: د غوښتني يا ثبوت په مرسته ښوول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



# هندسي لړۍ پرلپسې یا لړۍ ( )

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د ښوولو دی:

د اندکشن پیل: $n = 1$

$$\begin{aligned} q^0 &= 1 \\ &= \text{Okay} \\ \tfrac{1-q^1}{1-q} &= 1 \end{aligned}$$

د اندکشن وړاندنیونه(فرضیه): د $n$ لپاره دې ښوول شوي وي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د اندکشن پل : $n \leadsto n+1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

**دا دد ښوولو دی.**

**کينې پيل کوو**

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \\ &=_{nach\ Vor.} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q)q^n}{1-q} \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-q^n+(1-q)q^n}{1-q}\\
&= \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q}\\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}
$$

## Bernoulische Ungleichung د برنولي نا مساوات يا نابرابرون

$(1+x)^a \geq 1+ax$ دې وښوول شو

د االندکشن پيل : $a=1$

$1+x \geq 1+x$ : تيک دی.

د اندکشن پل:

$a \leadsto a+1$

$(1+x)^{a+1} \geq 1+(a+1)x$

دې وښوول شي

موږ بېرته له ښیٔ لورې پیل کوو

لاندې کې : Die Voraussetzug= نيونه(فرضيه)

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{a+1} &= (1+x)^a\cdot(1+x)\\
&\geq_{Voraussetzung} (1+ax)\cdot(1+x)\\
&= 1+x+ax+ax^2\\
&= 1+(a+1)x+ax^2\\
&\geq 1+(a+1)x
\end{aligned}
$$

**د پوره اندکشن سره نور د ښوولو فرمولونه**

$(1+x)^a \geq 1+ax \quad \forall x \geq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لومړیو $n$ طبیعي اعدادو مجموعه:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

## د یوه کرښیز مساواتسیستم جوړښت

یو کرښیز مساواتسیستم د یو کرښیزو مساواتو تعداد څخه جوړ دی. دا مساوات نامعلومې خوندي لري، هم داسې په نامه واریابلې ( اووښتوني یا متحولې). نامعلومې د ضریبونو سره ضربیږي. که د نامعلومې ضریب $0$ - وي یعنې باور ولري: $0 \cdot x_k$ ( دلته $x_k$ نامعلومه ده) – نو دا ډول نامعلومه په مساواتو کې هم پرئښوول کیږي یعنې نه لیکل کیږي. دا لاندې د یوه کرښیز مساواتسیستم یوه بېلګه ده:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \end{array}$$

او دا ټول $a_{ij}$ عمومي ضریبونه دي او $x_j$ واریابلې یا متحولې یا اووښتونې :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

وکتور $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ کوم چې زیات وخت عمود لیکل کیږي د حل وکتور بلل کېږي.
د یوه مساواتسیستم د ممکنه حلونو ډېرۍ یا سټ د حلونو ډېرۍ بلل کیږي:

$$\text{Lös}(A, b) := \{x \in \mathbb{K}^n | Ax = b\}$$

که د حلونو ډېرۍ تشه وي، نو د مساواتسیستم ناحلوړ یا نه حل کیدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



# ماتریکسونه:

سړی کړی شي په لږ ځای کې کرښيز مساوات د ماتریکس په ډول ولیکي. د مخه له دې چې دا کار کوو باید ماتریکسونه راوړو یا رامنځ ته کړو.

یو متریکس یو ولاړکوډیز یا ولاړکونجیز جدول دی د $m$ کیلو یا لیکو او $n$ درځونو یا متېو یا ولاړو لیکو سره.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

د ماتریکس لیکنډول mxn - ماتریکس

سړی کړی شي د ماتریکسونو یوګونې کرښې رادباندې ولیکي. دا بیا د **لیکو وکتورونه** بلل کیږي. په ټیک دې ترتیب د ولاړو لیکو یا متو یا **ستنو وکتورونه** هم لاس ته راوړی شوو، که سړی یوګونې متې رادباندې ولیکي.

سړی کړی شي ماتریکسونه یو له بل سره جمعه کړي.

$$A+B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

او سره ضرب کړي-+:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A\cdot B \;:=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+\dots+a_{1n}\cdot b_{n1} & \dots & a_{11}\cdot b_{1m}+\dots+a_{1n}\cdot b_{nm} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}\cdot b_{11}+\dots+a_{mn}\cdot b_{n1} & \dots & a_{m1}\cdot b_{1m}+\dots+a_{mn}\cdot b_{nm} \end{pmatrix}$$

د ماتریکسونو په جمعه ساده پوهیدل کیدی شي. سړی سره جمعه کوي، جې اړونده کمپوننتونه یو له بل سره حمعه کړي، داسې نتیجه لاس ته راځي. د ماتریکسونو ضرب ستونځمندی. په ضرب کې د لومړۍ ماتریکس لیکه د دویمې ماتریکس د متې سره ضرب کیږي او ورپسې سره جمعه کیږي. او نتیجه یې داسې لاس ته راځي، چې $c_{ij}$ یعني i–مه لیکه ، j -مه متِه کې ضرب د حل ماتریکس چې لاسته راشي، د لومړي ماتریکس د i–مې لیکې د j–مۍ متې یا ستن د توکو سره ضربوو او له ټولو ضربونو څخه جمعه جوړوو. دا یو ځل بیا لیکو:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \dots + a_{in}\cdot b_{nj} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

هیله ده، چې په دا موضوع کې به لږه روښنتیا منځ ته راغلې وي. داسې وایو چې سړی دښۍ دیترمینانت متِه په $90°$ درجو د ساعت ځرخوني (عقربک؟؟)په لور څرخوي، چې د کیڼې ماتریکس په لیکه پریوځي، یو په بل پراته توکي بیا سره ضربیوي او په دې پسې یې بیا له دې ضربونو جمعه جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوس د ماتريکس د ضريوني په بنديزونو هم پوهيږو. سړی کړی شي $n \times m$- ماتريکس فقط د $n \times m$ -ماتريکس سره ضرب کړي. دا په دې معنا، چې د کيڼ ماتريکس ليکې ټيک دومره بايد اوږدې وي لکه د ښي ماتريکس متې (درځونه، ستنې) ، پرته له دې ته په ليکه نه ،، پرېوځي،، يا سرخوري .

## تراسپوني ماتريکس

د يوې ماتريکس ترانپوني ماتريکس داسې لاس ته راوړو، چې ليکې او متې سره بدلې شي. له توکي $a_{ij}$ څخه توکی $a_{ji}$ لاس ته راځي.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

بيلګه:

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{pmatrix}$$

د مربع ماتريکسونو لپاره دا په همدې معنا دی لکه په ،،دوه – کونجتړې،، ( قطر) باندې هندارونه(انعکاس).

## سيومتريکي ماتريکسونه

يو ماتريکس ټيک هلته سيومتريک دی، چې باور ولري:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

د کرښيزمساوات سيستم ځايسپماييزه ليکندول

د يوه ماتيريکس په مرسته او کېدی شي کرښيزمساوات انرږي – او ځای سپماييز وليکو. مور ته دا بام ودريږي، چې دا نامعلومې تل په هر مساوات کې همهغه دي . نو لکه په ماتريکس ضربونې کې د ماتريکس ضربونې په مرسته دا د مساوات سيستم څخه دباندې راباسو او په دې توګه د ضريبونو( ځلوونو) ماتريکس $A$ لاس ته راوړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$A \cdot x = b$

د ليکبڼي له مخې دا داسې برېښي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

د ګاوس تلنلار لپاره ، چې لاندې ليکل شوې ده، دا بيا په لنډه توګه تکراروو او $x-$ - وکتور هم لرې بريږدو. له دې سره نوکان او مساوات هم لرې پرېږدو يا نه ليکو او دا ټول په يوه Kasten, کاستن يا کارتون کې ليکو، چې دا لګه چې ګورو، په لاندې توګه ليکل کيږي.

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ \hline \end{array}$$

## نا يو ډوله يا اينهوموجينبرابرون

يو کربښيز مساوات سيستم نايوډوله (اينهوموجين) بللکيږي، که که لږ تر لږه د يو $b_i$ لپاره ($1 \leq i \leq n$ ) باور ولرى

$b_i \neq 0$

په رېښتينې توګه دا پهدې معنا دى: پهښى لور صفرماتريکس نه دى ولاړ يا ځاى په ځاى نه دى.

## يو ډوله يا هوموجين Homogen

د دې برعکس يو مساوات سيستم برابرډوله (هوموجين) بلل کيږى، که $b$ صفروکتور وي، دا په دې معنا چې دټول $b_i$ لپاره ( $1 \leq i \leq n$) باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$b_i = 0$

دا دا معنا لري، چې په ښې اړخ صفروکتور پروت دی

## لیکه- پوړیز بڼه **Zeilenstufenform**

موږ اوس طبعاً د کرښیز مساواتسیستم د اوبیونې یا حل سره مینه لرو. دا ګاوس الګوریتم چې یوځه کښته راځي، د اوبیونو یا حلونو د پیداکولو لپاره مرسته کوی. دا ماتریکس د ساده لیکه بدلون بڼې څخه په لیک –پوړې –بڼې باندې اړوي. په لیکبوړیزبڼه کې یو ماتریکس مخ ته لرو، که هغه خورا ټيټه لیکه دا اکثره کيڼ پراته صفرونه ټولې لیکې خوندي ولري او د کيڼ پرتو صفرونو تعدا(ګڼون) پورته لور ته کم شي، د کوم سره چې کله کله یې له لیکې و لیکې ته یو ځل برابر باتې کیږی. لاندې ماتریکس د لیکې- پوړیز- بڼې ماتریکس بیلګه ده

$$\begin{pmatrix} 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \otimes \neq 0 \\ \oslash \neq 0 \text{ oder } 0 \end{matrix}$$

پورته الماني: د ،،یا،، په معنا

جمله :

موږ کړی شو هر ماتریکس په لیکه-پوړیز-بڼه ماتریکس واړوو. داچې د ګاوس تلنلار د دې لپاره یو الګوریم راکوي، چې دا متمین ده او دا جمله ښوول شوې.

د حلونو کریتیریوم

( نځښې، چې د دوه یا زیاتو شیانو یا کسانو ترمنځ پرې پریکړه کیږي)

د دې لپاره چې د کرښیزمساتسیستم د حلونو تعداد وټاکلی شو، د حلونو کریتیرین یا نځښې(توپیرنځښې) شتون لري..

(c) ketabton.com: The Digital Library



برابرډوله يا هموجين مساواتسيستم کړی شي يا ساده حل ولري او يا ډېر حلونه ولري.

ساده حل:

ساده حل يې صفروکتور دی، دا په دې معنا، چې ټول مساوات ټيک هلته پوره کيږي، که ټولي واريابلي( متحولي يا اووښتوني) صفر کېښوول شي.

دا حالت هلته رامنځ ته کيږی، چې که برابرډوله مساوات سيستم په داسي ليکه-بوږيز-بڼه و اړولی شي، چې په هره ليکه کې له بورته تر کښته يو صفر ځا په ځای وی. او همدومره د ماتريکس متې ولرو لکه ليکې.
د يوه کرښيز مساوات سيستم بيلګه، چې يو د ليکه-پوړی-بڼې ماتريکس سره ، چې ښايي، چې فقط ساده حل شتون لري.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د دې مساواتسيستم د اخرني ليکي څخه لاس ته راځي $x_3 = 0$ . له دويمي ليکي لاس $x_2 = 0$ ته راځي او بالاخره $x_1 = 0$ ، له کومه امله چې موږ د حل په څېر فقط صفروکتور لاس ته راوړو.
د يو هموجين مسواتسيستم سره کړی شو و ازمايو، چې ايا ومتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک ای ا کرښيز بلواک دي. موږ له دې سره وکتورونه په متاريکس کې د متې وکتورونو په څير ليکو. که داسې لاس ته راوړی هموجين کرښيز م ساوات سيستم فقط ساده حلونه لري، ن و وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک دی.

زيات حلونه يا اوبيونې:

دا هوموجين کرښيز مساوات سيستم زيات حلونه لري، که خپلواکه متحوله ( اووښتونې) شتون ولري.. يوه خپلواکه اووښتونې هغه اووښتونې ده چې مساواتسيستم حل له لارې کره نه وي ټاکل شوي. موږ مړی شو داسې اووښتونې په خپله خوښه وټاکو او همداسې په خوښه زيات حلونه د مساوات سيستم لپاره لاس ته راځي.

دا حلونه يو وکتورفضا غزوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا څنګه پیژنو،چې ایا یو میاواتسیستم  خپواکې متخولې لري؟ خپلواکې متحولې تیک هلته شتون لري، چې  په  سیستم کې لږ مساوات شتون ولري،  نسبت اووښتونو  ته.

بیلګه:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

داسې مساواتسیستمونههم شته، چې په هغې کې داسې نه ده، چې د متحولو څخه دې مساوات  لږ وي. په داسې مساواتسیستم کې پیژنو، چې  په لیکه پوړیزه کونه کې یوه صفرلیکه شتونلري.  پههوموجېنګربنیز سیستم کې  کېدی شي داسې لیکه له منځه یوسو( پام! داپه ناهموجېن  کې مکنه نه ده، ځکهچې دا حقیقت به مو لهمنځهوړی وي،  چې کومحل شتون نه لري) .  که د دې لهمنځه وړنې سره  زیاتې متحولې پاتې شي نسبت مساواتو ته ، ن و یو م ساواتسیستم بهولرو د خپلواکو (ازاده)متحولو  سره .
که د یوه هوموجین مساوات سیستم د حل سره، په کوم کې چې ماتریکس له متو وکتورونو جوړ دی، چې کربنیز خپلواکوالی یې  یو بل ته ازمایل کیږي، لاس ته راشي، نو وکتورونه یو بل ته کربنیز بلواک دي.

انهوموجین  مساواتسیستمونه  کېدی شي هیڅ حل، تیک یو حل  او یا ریات حلونه ولرودای شي.

هیڅ حل یا نه حل:  یو انهوموجین کربنیز سیستم کوم حل نه لري، که  د دیوه مساوات ضریبونه صفر وي،  او اړونده  $b_i$  صفر نه وي..:

یعني

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i \quad b_i \neq 0$$

داسې یو برابرون یا مساوات  بنه اړولی بنه بدل  .**entartet** بلل کیږي. بنه اړول شوې مساوات نه پوره کیږي او له دې سره  ټږلمسوات سیستم نه پوره کېدونکی دی، له کومه کبله  چې موږ حل هم نه لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ټيک يو حل:

يو انهوموجين مساوات ټيک يو حل لري، که دا اړونده هومجين مساوات سيستم – دا اړونده هوموجين مساوات سيستم جوړ شي، په کومکې چې ټول $b_i$ د صفر سره برابر وليکل شي – فقط ساده حلونه ولري.

د دې لپاره چې حلونه وشميرلی شو، دا انهوموجين کربنيز سيستم د ليکی پوړيزبڼه باندې اړوو، لکه پورته مو چې داسې وکړل، د کوم سره چې موږ $b_i$ ( $1 \leq i \leq n$ ) هم بايد په پام کې ونيسو.

يو ناهوموجين مساوات سيستم کيدی شي د دې لپاره وکارول شي، چې و ازمايي، چې ايا يو وکتور د نورو وکتورونو څخه د کربنيز کمبينېشن په څېر جوړی شي که نه. ټيک هلته يو حل شته، که $b$ د متو يا ستنو وکترونو د کربنيز کمبينېشن څخه جوړولی شي. که داسې يو حل شتون ونه لري، نو نه شي کېدی چې د متو وکترونو څخه کمبينی يا ترکيب کړي. که يو يا حتا زيات حلونه شتون ولري، نو دا په لاندې توګه دي:

زيات حلونه يا اوبيونې:

لکه په کربنيز هوموجېن مساواتسيستم کې ازادې متحولې په ناهوموجېن مساوات سيسم کې هم راپيدا کيږي يا منځ ته ارځي. دا ښېرته په هغه وختکې شتون لري، که سړی زاتې متحولې ولري نسبت مساواتو ته. په ناهوموجېن سيستمکې هم سړی کړی شي صفرليکې لرې کړي، چېرته چې $b_i = 0$ هم وي. په هرحالت دا ښه تغير شوې مساوات له منځه نهشي وړل کېدی.

## ديترمينانتونه Determinante :

که د يوه مربع ماتريکس وکتورونه يو بل ته کربنيز بلواک وي، نو ديترمينات 0 دی.
په بل حالت کې $\neq 0$ . له دې سره د $Ax = b$ لپاره باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| $\det A \neq 0$<br><br>$\Rightarrow$ | د هوموجين مساواتسيستم لپاره ساده حل، |
| $\det A = 0$<br><br>$\Rightarrow$ | د ناهوموجين مساوات سيستم لپاره حلونه.<br>د ناهوموجين سيستم لپاره حلونه يو حل يا هيڅ حل |

## رانګ Rang

$$rang(Ab) = rang(A)$$

حل شتون لري. د يوه ناهوموجين سيستم لپاره يو حل شتون لري. د يوه هوموجين سيستم لپاره ساده حل شتون لري.

# د حلفضا د ديمنزيون (بعد، پراخيدونی)ټاکل

د يوه هوموجين مساواتسيستم د حلډېريو د د بعد ټاکلو لپاره مور کړی شو د ديمنزيون يا بعد فرمول څخه کار واخلو. دا چي هر ماتريکس $A$ په يوه ټاکلي بنسټ $f_A$ ايندومورفيزم انخوروي د هوموجېن کربنيزمساوات سيستم حلفضا لپاره

$$Lsg(A, 0) = Kern(f_A)$$

باور لري او داسي کړس شو د بعد د فرمړل

$$\dim V = \dim(Kern(f)) + \dim(Bild(f)) \Leftrightarrow \text{d}$$

$$\dim(Kern(f)) = \dim V - \dim(Bild(f))$$

سره د حلفضا بعد وټاکو

(c) ketabton.com: The Digital Library



## بعد یا پراخیدونی

یا $0$ دی : نو بیا تیک ساده حل شتون لري، داسې په نامه صفروکتور.

یا $>0$ دی : نو په دې حالت کې ازادې اووښتونې( متحولې ( شتون لري، بعد لویوالی د متحولو تعداد دی، چې لرو یې:

پوښتنه:

موږ عکس( څیره) څنګه ټاکو؟ موږ دلته باید یوون – واهدوکتورنه په ماتریکونو وځغوو یا راوړو. موږ بای د پسې د بیلد( څېرې) پراخېدونی وشمېرو، داسې چې په هغې کې بېرته یو کرښیزمساواتسیستم حل کړو. موږ له دې سره یو د شمیرنې پانګه لرودی شو. او که اشتباه کړم؟

## د ګاوس - تلنلار یا - - قانون Gauss-Verfahren

د ګاوس-قانون د دې لپاره دی، چې یو ماتریکس په لیکه وکتورونو راوړي. د لیکه وکتورونو بدلیدنه او لیکه کمون یا تفریق د تر مخه سکالار ضرب په بنسټ د برخه اخستونکو لیکو تر هغې مخ ته بیایي، چې ماتریکس په لیکه پوړیز ماتریکس بدل شي. د ګاوس قانون تل د کنټرولو دی یا عملي کیدی شي.خو سه له دې هم کېدی شي، چې په قوي ډول ناټیک وي. اوس الګوریموس ،، پروګرامي ،، کوو:

لاندې یا کښته برخه:
د ګاوس قانون د یوه ماتریکس د لیکه پوړیز بڼې باندې اړولو لپاره

- په پیل کې ازمایو، چې ایاماتریکس ماتریکس همرا اوس لیکه پوړیز بڼه لري. په بېخي ځانګړې توګه $A=0$ ، یعنې فقط له 0 –نو څخه جوړ ماتریکس لیکه پوړیزبڼه لري.

- د دې عمل جراکولو له مخه – او نظري په دې مهال هم- کېدی شي او باید هم لیکې بدلې شي، که دا کار ګټور وي. دا په دې معنا، چې د لیکې د پیوټ توکي( Pivotelemente ) له پورته بیخي کیڼ تل پسې ښي لور ته لاړ شي. د پیوټ توکي

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه توکي بللکیږي، کوم چې له ښي لورې کتل شوي په یوه لیکه کې  لومړی  یا په سر کې د  0  سره نابرابر وي.

-   د $i$  سره  پیل شوې هر ی لیکي   لپاره د پورته لیکي  د $1 = i$  سره تر  د اخرې لیکي پورې  لاندې ډول مخ ته ځو:

د هرې   لیکې   لپاره ، چې   وي – لیکه $j$  تل  له لیکي $i$ کښته پرته ده - د $i$

ډیرواره  له لیکي $j$  ته ور زیاتوي یا تر کموي( که غواړی، جمعه کوي یا  ترې

تفریقوي) ، داسې چې $a_{ji}$  - دلته  $i$  اووښتوني یا متحوله  د متې یا درځ ګڼه(نمره)    په ګوته کوي- 0  شي.

د ګاوس الګوریتموس  یوه لیدنه

په لاندې کې Aktuelles  ورځنی یا اکتول

لومړی پل یا تلنلار  i=1

$$\begin{array}{rcccc}
\text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & X & X & X & X \\
 & X & X & X & X \\
 & \uparrow & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc}
\text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & X & X & X & X \\
 & \uparrow & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc}
\text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & \uparrow & & &
\end{array}$$

دویمه پل یا تلنه i=2

$$\begin{array}{rcccc}
 & X & X & X & X \\
\text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
 & & \uparrow & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc}
 & X & X & X & X \\
\text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & 0 & 0 & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\
 & & \uparrow & &
\end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریم پل یا تلنه i=3

$$\begin{array}{rcccc} & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & 0 & X \\ & & & \uparrow & \end{array}$$

له ماتریکی داسې په لاس راړی لیکه پوړیز بڼه وکتور څخه کېدی شي حلونه (اوبیونې) وشمېرل شي.

دا داسې کوو چې دا مساواتسیستم بېرته په ماتریکس بڼه په یوګونو مساواتو بدل کړو او له لاندې څخه په پیل په اړونده متحولې پسې حل کړو.

کخ دا مساواتسیستم زیات حلونه لرودی شي، نو له دې سره پېژنو، چې متحولې شتون لري، چې د هغو ارزښتونه ه شو ټاکلی. دا نو ازادې متحولې دي.

## د ګاوس الګوریتموس ټیکاوی

د دې لپاره چې وښایو چې ګاوس قانون یو کرښیز مساوات سیستم$\overline{A}$ د ټیک همغه یا برابر حلډېری ( حلسټ) سره لکه مساواتسیستم$A$ یې چې تولیدوي، باید وښایو، چې لاندې بڼه بدلونونه په حلونو کوم اغیز نه لري.

لومړی: د لیکو بدلونه

دویم : د لیکو صربونه د سره او بالاخره یې د بلې لیکې سره زیاتول یا کمول(جمعه او تفریق)

ښوونه یې:

لومړی : دا ساده دی. د یوه مساولتسیستم د لیکو بدلون په حلونو کوم اغیز نه لري، ځکه چې لړې پرلپسې پروا نه لري..

(c) ketabton.com: The Digital Library



دويم : موږ د مساواتسيستم دوه ليکې ترځېږنې لاندې نيسو، څکه چې بڼه بدلون فقط د دې دوه ليکو په مرسته صورت نيسي. نور و دوه ليکو سره سراوکار نه لرو او د حلونو ډېرۍ تغير نه خوري:

$$\begin{array}{lccccccc} (1) & a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ (2) & a_{j1}x_1 & + & \cdots & + & a_{jn}x_n & = & b_j \end{array}$$

لومړۍ ليکه د $\lambda$ سره ضربوو، په مساوات کې تغير نه راځي، څکه چې سړی $\lambda$ بيرته لنډولی شي يا کمولی شي يا که غواړۍ اختصار کولی شي:

$$\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n = \lambda \cdot b_i$$

دا(1) اوس د دويمې(2) ليکې سره جمعه کوو، لکه چې ترې لرو

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n + (\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n) = b_j + (\lambda \cdot b_i)$$

پوهيږو چې دلته هم په حل کې کوم تغير نه راځي، څکه چې مساوات ورسره زياتوو، چې په دواړو لورو ته راغلی او دواړو لورو ته همغه برخه ورکوي. دا بيرته سره لنډيدی شي او موږ بيرته وتونمساوات لرو.

## د حلونو يا اوبيونو نور قوانين

د يوه کرښيزمساواتسيستم د حل لپاره د ګاوس قانون ترڅنګ نور قوانين هم شته. په ښوونځي کې مو د بدلون قوانين وپيژندل. په دې کې يو مساوات د يوې متحولې يا اووښتونې سره حل کيږي او بيايې ارزښت د مساوات سيستم په بل مساوات کې کېښوول کيږي.په همدې ترتيب دې کار ته دوام ورکوو، چې بيداشوط اوښتونې ارزښت د مساوات سيستم په هبل مساوات کز ځا په ځای کيږي، تر څو چې د ټولو متحولو ارزښتونه پيداشي.که د اووښتون و ارزښتونه په پای کز ځا په ځاشي او لاس ته راشی ، $0 = 0$ ، نو مساوات سيستم ناپای ډېر حلونه يا اوبيونې لري. که د دې ځا په ځای کونې وروسته ،، کينې اړخ $\neq$ ښی اړخ،، نو کوم حل شتون نه لري. په ورته توګه دا مساوي ايښونې قانون هم کارول کيږي، د کوم سره چې دوه مساوات د يوهې اووښتونې په لور حل شي او بيا

(c) ketabton.com: The Digital Library



برابر ولیکل شي.

په پای کې باید وکورو، چې د یوه کرښیزمساوات سیستم ځنګه حلونه لاس ته راړو، که ورته سیستم حل کړ شوی وي:

غواړو د یوه ناهموجین کرښیز مساوات سیستم حلډېری $I$ وټاکو. موږ د هوموجین کرښیز مساوات سیستم حلډېری یا حل سټ $H$ پیژنو. د هوموجین کرښیز مساواتسیستم حلونو ډېری یا سټ $H$ د اړونده تابع د زړي(هستې) Kern سره برابره ده. برسره پردې موږ د ناهوموجین سیستم ټوټه یا برخه حل یا د حل یوه برخه حل $v_0$ پیژنو.

موږ کړی شو د دې ناهوموجین سیستم حلډېری $I$ پیداکړو، داسې چې

د ناهوموجین سیستم ټولو حلونه $v_0$ جمعه کوو:

$$I = v_0 + H = \{v_0 + h \ \forall \ h \in H\}$$

د هوموجین کرښیزمساواتسیستم حلونه $Ax = 0$ د کرښیزو توابعو زړی( که غواړی: هسته) دی. موږ کړی شو ، لکه د ماتریکس $A$ سره چې انځور یړي، دا زړی و دې ټوټه – یا برخا حل ته ورزیات یا ور جمعه کړو. دا ځانله (تنها) د ناهوموجین مسوات سیستم سره نه کوو بلکه د هوموجین مساوات سیستم سره هم همداسې مخ ته ځو.

$$Lsg(A, 0) = v_0 + Kern(A)$$

د هوجین مساواتسیستم ته تل یو ساده حل$0$ شتون ري، له دې سره لرو

$$Lsg(A, 0) = 0 + Kern(A) = Kern(A)$$

موږ د ناهوموجین مساواتسیستم دوه حلونه لرو. له دې دوه وو څخه یو حل د هوموجین مساوات سیستم لپاره جوړولی شو، داسې دواړه حلونه یو بل کم یا تفریق کړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\begin{array}{c|l} & A\cdot X_1 = b \\ - & A\cdot X_2 = b \\ \hline = & A\cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

## ورته والي - یامشابهت اړیکې **Äquivalenzrelationen**

**په $A$ یوه اړیکه~ ټیک هلته ورته بللکیږی، که د ټول $a,b,c \in A$ لپاره باور ولري**

لومړی : $a \sim a$ یا $(a,a) \in\sim$ انهکاس یا هندارون اړیکې یا (Reflexiv)

دویم : که $a \sim b$، نو $b \sim a$ یا که $(a,b) \in\sim$، نو $(b,a) \in\sim$ سیومتریک اړیکې (Symmetrisch)

دریم : که $a \sim b$ او $b \sim c$ ، نو $a \sim c$ یا که $(a,b),(b,c) \in\sim$ ، نو $(a,c) \in\sim$ ترانسیتیو اړیکې (Transitiv)

ورته اړیکې یوه ډېری(سټ) په،، ورته ټولګیو،، ویشي.

## ډېری یا سټ له ترنو یا عملیو سره

د ښوونځي او هم د شمېرپوهنې په ورځني ژوند کې له دې سره بلد یو، چې له کومو سره ترمونه ساده کېدی شي. دا زیات وخت ډېره مرسته کوي. د بېلګې په توګه د دېستزیبوتیو قانون په مرسته لاندې ترم خورا زر ګڼلی شو، لکه بې له دې قانون.

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{13}{2}\right)\cdot\frac{8}{13}=\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{13}+\frac{13}{2}\cdot\frac{8}{13}=\frac{1}{13}+4=4\frac{1}{13}$$

د بینوم لومړی جملې هم د دیستریبوتیو قانون ډېر واره استعمالول دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)\cdot a+(a+b)\cdot b = a\cdot a+b\cdot a+a\cdot b+b\cdot b =$$
$$= a^2+2ab+b^2$$

په لاندې برخه کې اوس شمېرنې نور قوانين ، چې د اکسيومونه بلل کيږي و تعريفو. دا قوانين د ډېريو لپاره صدق کوي د اړونده ترنو سره. زيات وخت پوښتنې رامنځ ته کيږي، چې دا االکسيومونه له کومه راځي. اکسيومونه خويونه ل ري، چې دا په ساده توګه تعريفيږي، بې له ثبوته. طبعأ دا په خوښه نه ټاکل کيږي. مګر په لومړي سر کې يا د پيل زده کوونکو لپاره په دې بسيا کوو، چې دا دې شتون ولري.

## لاندې برخه ( که ټوټه برخه يا کښته برخه):

### Unterabschnitte

مونږ او يو په بل پسې يوګوني تعريفونه ورکوو. له دې سره پورته و کښته لور ته تل زيات امسيمونه باور لري. د بيلګې په توګه تنونه يا اجسام له دوه کموتاتيو ګروپونو منځ ته راځي، يو ځل نسبت جمعې يا زياتون + ته او يوځل نسبت و ضرب ۰ يا * ته او دې سره اړونده ديستريبوتيو قانون څخه يو ځای يا په ګډه، يعنې بدن يا تن يا جسم له ګروپ څخه زيات دی.

ګروپ

يوه حوړه يا يو ګون $(G,+)$ ، چې $G$ يوه ډېرۍ ده او $+$ يوه ترنه يا عمليه ده،

$$+ : G \times G \to G$$

ګروپ بللکيږی، که لاندې اکسيومونه پوره وی:

(c) ketabton.com: The Digital Library



**G1** : $(a+b)+c = a+(b+c) \forall\ a,b,c \in G$ اسوښياتيو قانون.

**G2** : يو $e \in G$ ( ناپيلی توکی) شتون لري چې د $\forall\ a \in G$ لپاره لاندې خويونه پوره کوي:

لومړی: $e + a = a$

دويم : د هر $a \in G$ لپاره يو $a' \in G$ شتون لري (په ځېټ يا برعکس توکی) د $a' + a = e$ سره

## د ابل - يا کموتاتيو ګروپ **Abelsche / kommutative Gruppe**

يو ګروپ د ابل ګروپ بلل کيږي، که د د ګروپ د اکسيومونو **G1** او **G2** برسېره دا $a+b = b+a$ هم $\forall\ a,b \in G$ باور ولري ( کموتاتيو قانون) *(Kommutativgesetz)*.

## کړی Ring

يو ګون $(R,+,*)$ ، چېرته چې $R$ يوه ډېری او $+,*$ دوه ترونونه يا عمليې دي د لاندې سره

$$+ : R \times R \to R \qquad * : R \times R \to R,$$

کړی يا رينګ بلل کيږي، که لاندې اکسيومونه پوره وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



**R1** : د + سره یو ځای کموتاتیو ګروپ ( اسوشاتیوږ ناپیلی توکی، په څټ یا برعکس توکی دی.

**R2** : $(a * b) * c = a * (b * c) \forall \; a, b, c \in R$ ( د $*$ لپاره اسوشاتیو دی.

**R3** : دېستربوتیو قانون باور لري:

(a) $\forall \; a, b, c \in R : (a + b) * c = a * c + b * c$

(b) $\forall \; a, b, c \in R : a * (b + c) = a * b + a * c$

## کړۍ د یوي توکي (واحد توکي) سره Ring mit Einselement

$(R, +, *)$ یوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$\exists 1 \in R$ ( ناپیلی توکی یا یوې توکی د ترڼې لپاره ) د هغه لپاره چې باور لري:

$1 * a = a$

کموتاتیو کړۍ:Kommutativer Ring

$(R, +, *)$ یوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$\forall \; a, b \in R : a * b = b * a$ ( د $*$ لپاره کموتاتیو قانون)

کموتاتیو کړۍ د یوی توکي ( واحد عنصر) سره

کړۍ، په کومو کې چې کموتاتیو قانون باور لري او دا هم یو یویتوکی ولري، یعني د دوه پورته اکسیومونو سره، کموتاتیو کړۍ د یویتوکي سره بللکیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## بدن یا تن یا پټیField Körper

یو ارزښت نظم یا توپل $(K, +, *)$ یو تن دی، که باور ولري

**K1** : د کموتاتیو کړۍ اکسیومونه د یویتوکي سره باور لري.

**K2**: $\forall a \in K \exists a^{-1}$ ، داسې چې $a * a^{-1} = 1$ باور لري ( د ترنې $*$لپاره په څټ یا برعکس توکی)

### پولینوم کړۍ Polynomring

$\mathbb{K}$ دې یو تن وي. د $\mathbb{K}_n[t]$ ډېرۍ د لاندې بڼې پولینومونو څخه جوړه ده

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

د کومو سره $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ، $t$ یوه اووښتونې(متحوله) او $n$ د پولینوم درجه بللکيږي. د پولینومونو دا ډېرۍ یو کموتاتیو کړۍ ده. د یوه پلینوم $P$خورا جګ ضریب(څلوونی) - په پورتنۍ بېلګه کې یعنې $n$ ، چې باید $a_n \neq 0$ وي - د پولینوم درجه بللکيږي. که دا $0$ وي، یعنې د ټولو $i$ لپاره $a_i = 0$ ، نو دا پولینوم صفر پولینوم بلل کيږي. د صفرپلینوم درجه ناپای ده:

$$\deg P := \begin{cases} \infty & \text{falls } P = 0 \\ n & \max\ (i \text{ für das gilt } a_i \neq 0) \end{cases}$$

## پاتې ټولګي یا باقي ټولګي Restklassen

اوس غواړم د بدن لپاره یوه بله بېلګه دروپېژنم یا معرفي کړم، د لومړنیو ګڼونو پاتې ټولګي. د لومړنیو ګڼونو پاتې ټولګي کېدی شي بدنونه شي، داسې چې په هغو کې

(c) ketabton.com: The Digital Library



جمعه(زیاتون) او ضرب(ځل) تعریف شي. داسې تتونه $\mathbb{F}_p$ بللکیږي یعنې د بېلګې په توګه $\mathbb{F}_7$ د پاتېتولګي 7 لپاره. په روڅني ژوند کې د پاتې تولګي سره ډېر شمېرل کیږي، د بېلګې په توګه د لیکنیزې جمعې سره [2.2] :

$$\begin{array}{r} 8 \\ + \quad {}_1\,9 \\ \hline 1\ \ 7 \end{array}$$

موږ 8 او 9 د7 سره جمعه کړل چې چېرته موهغه لاس ته راغلی زیات هېر کړی نه دی. موږ اوس کړی شو چې هغه زیات یا لاس ته راغلی پرېږدو او ولیکو

$$8 \bmod 10 + 9 \bmod 10 \equiv 7 \bmod 10$$

چېرته چې ،، mod ،، مودولو**modulo** په معنا دی، یعني د وېش پاتې یا باقي.

په ورته توګه نور پاتې تولګي هم تعریفولی شو. د دې په څایچې په 10 یې ووېشو په 3 یې وېشو.

$$\begin{array}{r} 3 \\ + \quad {}_1\,2 \\ \hline 1\ \ 2 \end{array}$$

د دې لپاره کړی شو، چې یو د جمعې او ضرب جدول جوړ کړو:

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

| · | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

په همدې توګه دا کار بیا کړو، دا وار د پاتې تولګي 4 لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library



| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

| · | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

اوس کړی شو د بدن اکسیومونه  په یوګوني ډول  په هغو پاتې ټولګیو پورې اړونده بدن باندې  د جدول ارزښتونو په مرسته و ازمایو. کموتاتیو قانون باور لري،  که  جدول په دوه -کونجترې( قطر) باندې  هندارون یا انعکاس سیومتریک وي.  په ځټ یا معکوس توکی شتون لري، که  د جدول په هره لیکه او  هره مټه  کې  د بدن هر توکی یوځل  منځ ته راشي یا شتون ولري. صفرتوکی شتون لري، که   په هره لیکه او  هره مټه کې منځ ته راشي یا شتون ولري.  اسوځیاتیو او ډېستریبوتیو قوانین له جدول  ځخه په ساده توګه نه  شي لوستل کېدی.

وروسته له دې چې دا نښلونټکي( د نښلونو ټکي) لرو، پېژنو، چې بدن $\mathbb{F}_4$ شتون نه لري. دا د ضرب د معکوس توکی  قانون په خلاف دی.   داسې $x$ نه شته  چې$2 \cdot x = 1$ باوري کړي

یعنې  د$4$ پاتې ټولګې ځخه  بدن   نه شي جوړېدلای.  برعکس  یو بدن $\mathbb{F}_3$ له پاتې ټولګې $3$ خځخه  ممکن دی، ځکه چې هېڅ اکسیوم نه  زیانمن یا زخمي کیږي:  ګورو چې سیمتریک، برعکس او ناپیلی  توکي شتون لري . همداسې د نږدې  پسې ازمایلو ځخه ګورو چې اسوځیاتیو او ډېستریبوتیو قوانین هم باوري دي.

که نور هم  ځیرنه ژوره کړو، نو په دې کې یو سیستم ګورو،   چې کله یو پاتې ټولګی $p$ یو بدن$\mathbb{F}_p$ کیږي. دا حالت تیک هلته رامنځ ته کیږي، چې $p$ یو لومړنی ګڼ(عدد) وي. دا ثبوت دلته نه راوړو.

مګر غواړو چې په پای تعریف کړو،  چې یو کرکتریستیک ( خوی ټاکونی) ځه شی دی او ولې د یوه په خوښه  بدن $\mathbb{K}$کرکتریستیک تل یو لومړنی ګڼ او یا $0$ دی:

پیژند(تعریف):

$\mathbb{K}$ دې یو ردن وي او $1$ د ضرب یو ناپیلی توکی(یوونتوکی، عنصر واحد) وي. د یوه زیاتیز یا مثبت عدد $n$ لپاره د $n \cdot 1$ لاندې پوهیږو

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}}.$$

د بدن $\mathbb{K}$ کرکتریستیک په لاندې توګه تعریف دی

| | |
|---|---|
| $\mathrm{char}\mathbb{K} = \begin{cases} 0 \\ n \end{cases}$ | که n>0 شتون ونه لري، چې n.1=0 باور ولري<br><br>که n شتون ونه لري، چې باور ولر n1=0 |

ښوونه: $n$ تل یو لومړنی ګڼ دی:

وي دې $n \neq 0$ ( د تعریف دویم حالت). که $n$ لومړنی عدد نه وی، نو دا په لاندې ضقیبونو ټوټه کیږی [2.3] .

$$\begin{aligned} & n1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (n_1 \cdot n_2)1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & n_1 1 \cdot n_2 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & n_1 1 = 0 \wedge n_2 1 = 0 \end{aligned}$$

دا تضاد دی. ځکه چې $n_1 < n$ او $n_2 < n$ باید کرکتریستیک $\mathbb{K} = n_1$ char اویا char $\mathbb{K} = n_2$ کرکتریستیک وي. دی char $\mathbb{K}$ = n او له دې سره $n$ په ضریبونو نه شي ټوټه (تجزیه) کېدی، نو له دې امله یو لومړنی عدد دی.

موږ د ښوونځي ځخه غوره بدنونه پیژنو، لکه د هوښیار اعدادو(کسري-) $\mathbb{Q}$ ، د ریل یا حقیقی اعداد $\mathbb{R}$ بدنونه او ورپسې د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ بدنونه هم. دا ټول زدنونه کرکتریستیک $0$ لري. نور د اعدادو غوره ډېرۍ هم شته لکه د ټول ګڼونو ( - اعدادو) ډېرۍ. دا فقط یو کموتاتیو ګروپ جوړوي، ځکه چې په نسبت و ضرب ته معکوس توکی نه لری. دا له دې امله داسې ده،چې موږ په دې عددونو کې ماتونه( کسرونه ) نه لرو. د ټولو طبیعي اعدادو $\mathbb{N}$ ډېرۍ چې $0$ ورسره تړلی دی او یا نه،

(c) ketabton.com: The Digital Library



متأسفانه چې حتا یو ګروپ هم نه دی، څکه چې د جمعې معکوس توکي نه لرو، د بېلګې په توګه د $3+x=1$ لپاره $x$ شتون نه لری، څکه چې $x=-2$ شتون نه لري.

## وکتور فضا **der Vektorraum**

لاندې برخه

کرښیزبلواکوالی ( خطي تابعیت)

یادونه (ژباړی): ګړو چې دلته مو تابع کلیمه، چې د فنکشن لپاره کارول کیږي، ناتیکاوي ته لاربنودوي. دلته د بلواکوالي یا تابعیت څخه موخه فنکشن نه دی. پای.

یو د وکتورونو $(v_1,\ldots,v_n)$ کورنۍ کېدی شي کرښیز بلواکه یا کرښیز خپلواکه وي، نه دواړه یو ځای کېدی شي او هم نه له دوه ځخه یوه هم نه . یوه کورنۍ هغه ډېری ده، چې یو توکی په کې دوه ځله هم راتلی شي. پس موږ په خوښه وکتورونه لرو- په کوم کې چې همغه وکتور ختی دوه ځله راتلی شي- کوم چې موږ داپه خپلو اړیکو کې یو له بل سره ځېړو.

## کرښیز خپلواکوالی

$V$ دې یو $\mathbb{K}-$-وکتورفضا وي. یوه د وکتورونو $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ پای کورنی له $V$ ځخه کرښیز خپلواک بلل کیږی، که له $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_n v_n=0$$

ځخه لاس ته راشي، چې $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا په دې معنا، چې صفر وکتور د نورو وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_n$ څخه ساده ترکیب کیدی شي

کربنیز بلواکواکوال:

$V$ دې بیا هم یو $\mathbb{K}-$ -وکتورفضا وی. یوه د وکتورونو $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ پای کورنۍ له $V$ څخه کربنیز بلواک بلل کیږی، که له $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لاس ته راشي، چې هم ساده حل $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ شته ، او هم یو حل له کوم سره چې لږ تر لږه یو $(1 \leq i \leq n)\, \lambda_i \neq 0$ دی.

دا په دې معنا دی، چې موږ صفروکتورونه د ساده حلونو یا اوبیونو څخه په بل ډول هم د وکترونو د کورنې څخه جوړولی شو

## د وکتور فضا تعریف:

اوس د وکتورفضا تعریف ته راځو:

$\mathbb{K}$ دې یو بدنوي. یودرېګون $(V, +, *)$ چې $V$ یوه $n$-ګون

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



او $+$ او $*$ ترني يا عمليې وي

$$\begin{array}{lll} + & : & V \times V \to V \\ * & : & \mathbb{K} * V \to V \end{array}$$

$\mathbb{K}$ -وکتور فضا بلل کيږي، که لاندې اکسيونونه باور ولري:

$(V,+)$ يو کموتاتيو ګروپ دی.

**S1** : $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v$ ( آسوځیاتیو قانون)

**S2** : $1 \in \mathbb{K} : \forall\ v \in V : 1 * v = v$ ( ناپیلی توکی)

**D1** : $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v$ (دیستریبوتیو قانون)

**D2** : $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in V$ باور لري $\lambda * (v + w) = \lambda * v + \mu * w$ (دېتريبوتيو قانون)

د يوه وکتور فضا جوړونه يا که غواړی توليد Erzeugen eines Vektorraums

اوس غواړو $n-$ ګونی 3.1 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، چې دوکتورفضا د توليد لپاره اړتی ورته لرو توليد کړو. دا کړی شو که موږ دا ټول وليکو . دا د ډېرو کمو وکتورونو لپاره هم موخه ور دی. مګر د زياتو وکتورفضاو لپاره دا نا ممکن دی، څکه چې موږ ناپای ډېر ګونونه لرو. موږ بايد دا د يوه شمېرقانون سره توليد کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



# کرښيز ترکيبوالی

وي دي $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ په $\mathbb{K}-$-وکتور فضا کې يوه د وکتورونو کورنۍ. هر د $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K})$ بڼې

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

وکتور $v$ د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ کرښيز ترکيب بلل کيږي.
اوس ، د کلمو،، کرښيز خپل(بل)واک،، او د ،،کرښيز ترکيب،، ترمنځ يو څو ښوونې يا ثبوتونه راړل کيږي. د دې ښوونو لاس ته راوړنې به شايد د ډېرو زده کړو په غوښنه او وينو ته تللي وي. تاسو پوهيږئ چې دا داسې دی. خو بيا هم موږ بايد دا يو ځل وښايو:

جمله ؛

که د کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه يو بل ته کرښيزخپلواک وي، نو کېدی شي هر وکتور $v \in L(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د دوی له لارې په يوه ټاکلې لار ترکيب شي. له

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \qquad v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n$$

څخه لاس ته راځي

$$\lambda_1 = \mu_1; \quad \lambda_2 = \mu_2; \quad \lambda_n = \mu_n$$

ښوونه:

$$\begin{aligned} & v = v \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad & (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0 \end{aligned}$$

د کرښيزخپلواکوالي له امله باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\lambda_1 - \mu 1 = 0;\ \ \lambda_2 - \mu_2 = 0;\ \ldots\ \lambda_n - \mu_n = 0$$
$$\Rightarrow\ \ \lambda_1 = \mu 1;\ \ \lambda_2 = \mu_2;\ \ldots\ \lambda_n = \mu_n$$

له دې سره کېدی شي وکتور ټیک په یوه ډول ترکیب شي.

برعکس یا په څټ کیدی شي وښوول شي:

جمله :

که چیرې یو وکتور $v$ ټیک په یوه ډول له وکتورکورنیو $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ څخه د کرښیز ترکیب کیدی شي، نو نو د دې کورنی وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

ټیک په یوه ډول تکیبوږ په دې معنا دی، چې که

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$
$$\text{und}\quad v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

باور ولري، $\lambda_1 = \mu_i$ باور لري او له دې سره $\lambda_i - \mu_i = 0$

$$v = v$$
$$\Leftrightarrow\ \ \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$
$$\Leftrightarrow\ \ (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

داچې $\lambda_i - \mu_i = 0$ د $1 \leq i \leq n$ لپاره د کورنې وکتورونه کرښیز خپلواک دي.

جمله:

که د یوې کورنې $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه کرښیز بلواک وي، نو له یوه څخه زیات امکانات شته چې وکتور $v$ ترکیب کړو. کرښیز بلواک په دې معنا دی، چې لږ ترلږه یوه $v_i$ لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور ولري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ښوونه:

که موږ وکتور $v$ ولرو، کړی شو دا په لاندې ډول ترکیب کړو:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

له دې ځخه لاس ته راځي $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ . اوس کړی شو دا پورته یادشوی کرښیز ترکیب د $v_i$ لپاره ځای په ځای کړو او لاس ته راړو

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \\ &\quad \lambda_i \cdot (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n) \\ &\quad + \ldots + \lambda_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad v &= (1+\lambda_i)\lambda_1 v_1 + \ldots + (1+\lambda_i)\lambda_n v_n \end{aligned}$$

نو $(1+\lambda_i)\lambda_1, \ldots, (1+\lambda_i)\lambda_n$ یو نوی امکان دی چې $v$ ترکیب کړو او د دې سره همدا اوس دوه امکانات لرو

موږ کړی شو چې لاندې دوه واقعیتونه هم ثبوت کړو:

جمله :

که یو وکتور $v_i$ د کورنی $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ کرښیز د کورنۍ $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ ځخه نه شي ترکیبېدی، نو د کورنی $(v_1, \ldots, v_n)$ وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

ښوونه:

نیسو چې دا کرښیز بلواک دي. داپه دې معنا، چې د

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لپاره لږ تر لږه د یوه $\lambda_i$ لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور لري

$$\lambda_i \neq 0$$

دا په دې معنا چې

$$\begin{aligned} & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n = -\lambda_i v_i \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\lambda_1}{-\lambda_i} v_1 + \ldots + \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i} v_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i} v_{i+1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{-\lambda_i} v_n = v_i \end{aligned}$$

نو کېدی شي، چې $v_i$ له $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ کرښيزه ترکيب کړاي شي. دا نیونې ته تضاد دی. نو باید وکتورونه کرښيز خپلواک وي.

په همدې توګه برعکس ی په ښتې هم باور لري:

جمله:

که د کورنی $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه یو بل ته کرښيز خپلواک وي، نو کوم یو وکتور د بل ځخه کرښيز ترکيب کېدی نه شي.

ښوونه:

نیسو، چې دا شونی دی، یو وکتور $v_i$ $(1 \leq i \leq n)$ کېدی شي کرښيز ترکيب کړاي شی. نو باور لري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګورو، چې $\lambda_i \neq 0$ دی، څکه چې $\lambda_i = -1$ . او د کورنۍ وکتورونه به کرښيز بلواک وی. تضاد. بو دا ممکن نه ده، چې له دې وکتورونو ځخه کوم يو له بل ځخه کرښيز ترکيب کړي، څکه چې بيا به کرښيز خپلواکوالی زخمي شوی يا زيانمن شوی وي.

## سپاین یا کرښیزه **Spann**،( **(کرښیزه) رابنده ورشو)lineare Hülle ،Abschluss**

په يوه $\mathbb{K}-$ - وکتورفضا کې د يوې کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د ټولو کرښيز ترکيبونو ډېرۍ سپاين يا کرښيزه رابنده ورشو بلل کيږي

$span(v_1, \ldots, v_n)$

يا د وکتورونو د کورنۍ کرښيزه (که غواړۍ) سمڅه( **Hülle** )

روښانه دې وي: د يوه سپاين وکتورونه ناجبري کرښيز خپلواک نه دي.

## جوړښتسيستم ( توليدي سيستم) Erzeugendensystem

د وکتورکورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د وکتور فضا $V$ توليدی سيستم بلل کيږی، که باور ولري

$$V = span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

داپه دې معنا چې وکتورونه د وکتور فضا $V$ مکمله يا پوره غزوي.

دلته کېدی شي، چې د وکتورونو کورنی کرښيز بلواک يا کرښيز خپلواک وی. دا يواځې بايد وکتور فضا و غزوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## بنسټ Basis

د وکتورونو $(v_1,\dots,v_n)$ کورنۍ د وکتور $V$ بنسټ بلل کيږي، که د کورنۍ يوګوني وکتورونه

- يو بل ته کرښيز خپلواک دي

- او که د وکتورونو کورنۍ ټول وکتور $V$ وغزوي، يعني د $V$ يو توليدي(جوړختيز) سيستم دی:

$$V = span(v_1,\dots,v_n)$$

او

$$\text{und}\quad \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

له دې سره يو توليدي سيستم ټيک هلته يو بنسټ دی، چې د دې توليدي سيستم وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک دي.

## د شتاينيځ بدلونجمله Austauschsatz von Steinnitz

جمله:

په يوه د $\mathbb{K}-$ - وکتورونو کورنۍ(که فضا) $V$ کې دې يو بنسټ

$$B := \{v_1,\dots,v_r\}$$

او يوه کرښيز ځپلواکه کورنۍ

$$(w_1,\dots,w_n)$$

ورکړ شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



دی $r \geq n$ . سړی کړی شي د بنسټ $n$ وکتورونه د $n$کربشیز خپلواکو کتورونو کورنیو سره بدل کړای شي، داسې چې نوی بنسټ$B^*$ بېرته کربشیز خپلواک دی او د وکتورفضا $V_K$ بنسټ دی. د ایدنکس د ګڼې بدلون وروسته کېدی شي داسې ولیکو:

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r\}$$

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r\}$$

یا په ځانکړي حالت $n = r$ :

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n\}$$

ښوونه:

ښوونه د بدلون لیما سره صورت نیسي. دا دبدلون لېما ) وړه چمله) د د بنټ څخه یو وکتور اخلي او یو بل ورزیاتوي:

بدلون جمله ګی **Austauschlemma**

یو $K-$ -وکتورفضا $V$ دې د بنسټ

$$B := \{v_1, \ldots, v_r\}$$

سره ورکړ شوې وي او یوه $w$ د

$$w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \underline{\underline{\lambda_k v_k}} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r \in V$$

د $\lambda_k \neq 0 \quad (\star)$ سره او

$$\lambda_k \neq 0.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو

$$B' := \{v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_r\}$$

بېرته یود $V$ بنسټ دی .

یعنې سرِی کړی شي $v_k$ د $w$ وکتور سره بدل کړي. ( دا نور $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ بې له $\lambda_k$ باید حتمأ 0 نه وي.، مګر دوی کړی شي).

د بدلون جملې ښوونه **Beweis des Austauschlemmas** :

د لیکنې د ساده کونې لپاره نیسو، چې $k = 1$ دی. موږ ښایو چې

$$B' := \{w, v_2, \ldots, v_r\}$$

هم د $V_K$ بنسټ دی.

- د بنسټ 3.2 ټول وکتورونه $v \in V$ د کربنیزترکیب په څېر لیکل کېدی شي یعنې

$$v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_r v_r \quad (\star\star)$$

داچې $\lambda_1 \neq 0$ دي، کړی شو په لاندې ډول یې بنهبدل کړو

$$\begin{aligned} & w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \qquad (von\ \star) \\ \Leftrightarrow\ & \lambda_1 v_1 = w - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_r v_r \\ \Leftrightarrow\ & v_1 = \frac{w}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r \end{aligned}$$

- اوس کړی شو دا په $\star\star$ کې ځای په ځای کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\begin{aligned} v &= \mu_1\left(\frac{w}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2 - \ldots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1}v_r\right) + \ldots + \mu_r v_r \\ &= \mu_1\frac{w}{\lambda_1} - \mu_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2 - \ldots - \mu_1\frac{\lambda_r}{\lambda_1}v_r + \ldots + \mu_r v_r \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1}w + \left(\mu_2 - \mu_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)v_2 + \left(\mu_3 - \mu_1\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)v_3 + \ldots + \left(\mu_r - \mu_1\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)v_r \end{aligned}$$

له دې لاس ته راځي، چې نوی بنسټ لږ  تر لږه يو توليدي سيستم دی.

- اوس  پاتې دادی چې کرښيز خپلواکوالی  و ښايو

$$\mu w + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_r v_r = 0$$

د $\star$  ځا ي په ځای کونه:

$$\begin{aligned} & \mu(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r) + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_r v_r = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \mu\lambda_1 v_1 + (\mu\lambda_2 + \mu_2)v_2 + (\mu\lambda_3 + \mu_3)v_3 + \ldots + (\mu\lambda_r + \mu_r)v_r = 0 \end{aligned}$$

نو $\mu\lambda_1 = \mu\lambda_2 + \mu_2 = \mu\lambda_3 + \mu_3 = \ldots = \mu\lambda_r + \mu_r = 0$ ، څکه چې $B$ کرښيزخپلواکه وه  ( $\mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_r = 0$ )     او $\mu = 0$ ، څکه چې $\lambda_1 \neq 0$ .

له دې  ځخه کرښيز  خپلواکوالی لاس ته راځي

## د بدلون جملې ښوونه:

له دې وروستهچې ومو ښوول، چې  سړی يو وکتور $v_k$ له بنسټ ځخه  را اخستی شي او د وکتور  $w$سره يې بدلولی شي، که دا اړونده $\lambda_k \neq 0$ وي( کړی شي، چې د نمرې يا ګڼې بڼلون سره اِه ټيک ځای ته راوړل شي)، بايد وښايو، چې  د زاړه بنسټ لپاره تل داسې يوه $\lambda_k \neq 0$ شتون لري، داسې چې موږ وکتورونه پرلپسې سره بدلولی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



- که صفر وکتورونه سره بدل کړو، نو ښوونې ته نه اړکیږو. موږ اړیین نه یو چې کوم وکتور پیدا کړو، چې له هغو سره بنسټ وکتور بدل کړو. دا زموږ د ایندکشن پیل دی.

- زموږ د ایندکشن نیونه ده، چې $k$ وکتورونه مو سره بدل کړي دي او بیرته مو یو بنسټ لاس ته راوړی دی:

$$B' = \{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_r\}$$

- د ایندکشن پای :

که موږ وکتور $w_{k+1}$ بدل کړو، نو باید یو $\lambda_i$ د $k+1 \leq i \leq r$ سره پیداکړو، د کوم لپاره چې $\lambda_i \neq 0$ باور لري. باور لري :

$$w_{k+1} = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + \underbrace{\lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r}_{\text{mindestens ein } \lambda_i \neq 0}$$

دا پورته لږ تر لږه یوه $\lambda_i \neq 0$ .

دا چې کرښیزخپلواکه کورنۍ $(w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots)$ کرښیز خپلواکه وه، اجازه نه شته چې $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k \neq 0$ وي، ځکه چې پرته له دې کرښیز خپلواکوالی زحمي شوی وي.

داچې $w_{k+1}$ هم صفر وکتور نه دی، ځکه چې بیا به کرښیز خپلواکوالی زخمي شوی وي، نو یو $\lambda_i$ ( $k+1 \leq i \leq r$ ) شتون لري د $\lambda_i = 0$ سره.

د ښوونې ځخه لاس ته راوړنه

(c) ketabton.com: The Digital Library



- که یو $K-$ - وکتورفضا $V$ یو پای بنسټ ولري، نو د $V$ هر بنسټ پای دی.
- د یوې وکتورفضا هر دوه بنسټونه برابر اوږدوالی لري.
- بنسټ پوره کېدنه:

په یوه پای تولېدکېدونکي وکتور فضا $V$کې دې کرښیز خپلواک وکتورونه $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ورکړل شوي وي. نو کېدی شي سړی پیدا کړي، داسې چې

$$B := \{w_1, w_2, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_r\}$$

د $V$ یو بنسټ وي.

- $v_i, \ldots, v_n$ دې د کرښیز خپلواک وکتورونو ډېرۍ وي، چې یوه وکتور فضا غزوي، نو د $v_i, \ldots, v_{n+1}$ ډېرۍ په هر حالت کرښیز بلواک ده.

دا په دې معنا چې بل وکتور نه شي پیداکېدی چې و $v_i, \ldots, v_n$ ته کرښیز خپلواک وي.

- د بنسټ بدلید جمله:

$v_i, \ldots, v_n$ دې کرښیز خپلواک وکتورونه وي، چې یوه وکتور فضا غزوي( دا په دې معنا چې دا یو بنسټ دی)، نو $w_i, \ldots, w_n$ کرښیز خپلواک وکتورونه ، چې د وکتورونو $v_i, \ldots, v_n$ د کرښز ترکیب څخه جوړیدی شي، برابره وکتورفضا غزوي.

## بعد یا پراخېدونی( Dimension)

که $V$یوه $K-$ - وکتور فضا وي، نو تعریفوو

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| $dim_k V = \begin{cases} \infty \\ r \end{cases}$ | که V پای بنسټ ونه ري، <br> کهV د r اوږدوالي بنسټ ولري |

د پراخېدوني یا بعد جمله:

وي دې $f : V \to W$ ( $V, W$ دلته $\mathbb{K}-$ -وکتورفضاوې دي) یو کرښیزبلواک. نو د بعد یاپراخېدوني جمله باور لري:

$$dim\ V = dim\ Bild(f) + dim\ Ker(f)$$

Bildڅېره او Ker(Kern) زړی یا هسته

ښوونه :

یادونه:

$dimV$ : دV د بنسټ وکتورونو ګڼون یا تعداد.

$dim\ Bild(f)$ : د وکتورونو ګڼون یا تعداد د V د لاندې وکتورفضا Bild (f) کې.

$dim\ Ker(f)$ : د f په زړي( هسته) کې د وکتورونو ګڼون یا تعداد. دا بېرته د V لاندې وکتورفضا ده.

لومړی: دا چې زړی Ker (f) د V لاندېوکتورفضا ده، په هر حالت لرو

$$dimV \geq dim\ Ker(f).$$

د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ د زړي د بنسټونو وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

د بنسټتکیلېدوجملې په بنسټ کېدی شي دې بنسټ ته کرښیز خپلواک وکتورنه $V$ ته ورزیات کړي او دا بنسټ په دې توګه د $V$ یوه بنسټ ته پوره یا تکمیل کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$B_V := \{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots v_k\}.$$

لومړی: موږ اوس پرېږدو چې تابع $f$ د وکتورفضا $V$ په بنسټ وشغلي. نو لاس ته راوړو:

$$Bild(f) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)}_{=0} + \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i)$$

د زړې بنسټوکتورونه په 0 تنظيميږي يا څېره کيږي . له دې امله د څېرې يا عکس د بنسټوکتورونو ګڼون يا تعداد او له دې سره د عکس پرخېدونی يا بعد دی.

$$\begin{aligned} & dim\ \ Bild = dim\ V - dim\ \ Kern \\ \Leftrightarrow\ \ & dim\ V = dim\ \ Bild + dim\ \ Kern \qquad !!! \end{aligned}$$

## لاندې وکتور فضا

تعريف (پېژند):

د وکتورفضا $V$ په $\mathbb{K}$ باندې يو لاندې وکتورفضا $U$منځ ته راځي، که سړی د وکتورفضا ټاکلي توکي لرې پرېږدي(لنډ:پرېږدي). له دې سره بايد د لاندېوکتورفضا پاتې توکي دا لاندې ځويونه پوره کړی:

- $U \neq \emptyset$

- د ټول $x, y \in U$ لپاره $x + y \in U$ باور لري او د ټولو $x \in U$ ، $\lambda \in \mathbb{K}$ لپاره $\lambda x \in U$ باور لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library



خويونه:

- له دې سره يو وکتورفضا لږترلږه دږه لاندې وکتورفضاوې لري. يو څل دا اکسيومونه پخپله په وکتورفضا کې ورکړل شوي، داسې چې داوکتور فضا و خپل ځان ته لاندېوکتورفضا ده. له بلې خوا هروکتورفضا صفروکتور لري. دا صفر وکتور ځانله هم يوه وکتورفضا ده.

- $U_1 \cap U_2$ لاندې فضاو ده، کهU1 اوU2 لاندې فضاوې وي.

- $V_{\mathbb{K}}$ دې يوه وکتورفضا وي او $v_1, \ldots, v_n \in V_{\mathbb{K}}$ . هر کرښيز ترکيب $L(v_1, \ldots, v_n)$ يوه لاندېفضا ده.

## د لاندې فضاو لپاره د بعد يا پراخيدوني فرمول

$$dim(U_1 \cap U_2) + dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2)$$

ښوونه د وکتورفضاو د بنسټ د وکتورونو د ګڼون يا تعداد باندې مخ ته بيول کيږي. د وکتورفضا $U_1 \cap U_2$ بنسټ يو څل وکتورفضا $U_1$ او يو څل وکتورفضا $U_2$ ته ورپوره يا تکميل کيږي. د وکتورفضا $U_1 + U_2$ [3.3]بنسټ د غوځې بنسټ دی جمعه يې دا نور د $U_1$ او $U_2$ وکتورونه

**فنکشنونه يا توابع ، په ځانګړې توګه کرښيزې-**

تعريف: $X$ او $Y$ ډېرې يا سټونه دي. يو تابع $f$ يو ترتيب يا تنظيم دی، د کومو له لارې چې هرتوکی $x \in X$ په ټيم يوه توکي $f(x) = y \in Y$ تنظيم شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f : X \longrightarrow Y$

- دا چې دا توکی ځنګه ترتیبيږي دا پروا نه لري. لومی په کرښیزو توابعو کې بندیزونه راړل کیږي، دا چې تابع باید کرښیزهوي.

- د $Y$ په توکي کېدی شي د $X$ ډېر توکي وښايي یاپه ډېرو توکو ترتیب یا تنظیم شي. مګر برعکس ممکن نه دی. دا په $Y$ کې توکی، کوم چې د $X$ توکی له ښودل کیږي یا په کوم چې د $X$ توکی تنظیم شي، باید تل یواځنی ټاکلی وي.

## د فنکشنونو یا څیرونو(توابعو) خویونه Eigenschaften von Abbildungen

په باندې فنکشن(- تابع) Surjektiv

$f : V \to W$
دې یوه تابع وي. تابع په باندې ده، چه باور ولري:

$\forall \ w \in W \ \exists v \in V$ ، داسې چې $f(v) = w$ .

په کې (فنکشن (څیرونه یا تابع)) Injektiv

$f : V \to W$
دې یو تابع وي. تابع په باندې دی، که باور ولري:

$\forall x, y \in V$

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \qquad x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)$$

په ( په باندې او په کې فنکشن یا -- تابع) Bijektiv

په توابع هم په باندې تابع دي او هم په کې تابع ( سوزجکتیو، اینجکتیو) دي یخد په باندېولی اوپهکې والی پوره کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$\forall\ w \in W\ \ \exists!\ v \in V$ ، داسې چې باور لري $f(v) = w$ . ( هر $w \in W$ تیک یو پخوا یا تر مخځېره $v \in V$ لري)

## کرښيز فنکشنونه يا توابع Lineare Abbildung

تعريف(پيژند)

يو تابع $f : V \to W$ ، د کوم سره چې $V$ او $W$ وکتورفضاوې دي په همغه بدن $K$ ، کرښيز بلل کيږي( يا د وکتورونو هومومورفيزم)، که $\forall\ x, y \in V$ او $r \in K$ لپاره باور ولري:

$$\begin{aligned} L1: &\quad f(x+y) = f(x) + f(y) \\ L2: &\quad r \cdot f(x) = f(r \cdot x) \end{aligned}$$

سرې کړی شي دواړ هاکسيومونه په باندې تکه سره رايوځای کړي:

$$L : f(r \cdot x + y) = r \cdot f(x) + f(y)$$

## زړی(هسته) او عکس يا څېره Bild und Kern

**د يوه تابع $f : V \longrightarrow W$ څېره يا عکس په لاندې توګه تعريف دی**

**د لږ ترلږه يوه لپاره.**

$$Img(f) := \{w \in W | f(v) = w \text{ für mindestens ein } v \in V\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د یوه تابع $f : V \longrightarrow W$ زړی په لاندې توګه تعریف دی

$$Kern(f) := \{v \in V | f(v) = 0\}$$

## ځانګړي کرښيز فنکشنونه (توابع)

یو کرښيز تابع $F : V \to W$

یو مونومورفيزم Monomorphismus بلل کيږي، که $F$ اينجکتيو وي.

اپيمورفيزم Epimorphismus ، که $F$سورجکتيو وي،

ایزومورفيزم **Isomorphismus**،که $F$ بيجکتيو وي،

ايندومورفيزم**Endomorphismus** ، که $V = W$ او

اوتومورفيزم**Automorphismus** ، که $V = W$ او$F$ بيجکتيو وي.

د په باندې، په کې ، په ( باندې او کې) فنکشنونو یا توابعو لپاره ښوونه

X→X

وې دی $f : X \to X$ . لاندې ويناوې برابر ارزښته یا ايکويوالنت دي:

(i) $f$ په کې دی injektiv

(ii) $f$ ist surjektivپه باندې دی

(iii) $f$ ist bijektiv په دی

دا چې له (iii) ځخه (i) او(ii) لاس ته راځي او ځخه لاس ته راځي روښانه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ښوولو دی چې لومړی. (ii)→(i) او دویم. (i)→(ii)

لومړی: اینجکتیو له دې لاس ته راځي سورجکتیو. دا داسط ښایو، که په کې وښایو، چې،، نه سورجکتیو له دې لاس ته راځي نه اینجکتیو،،. د نور کلمو سره:: تابع سورجکتیو ده، که دا اینجکتیو وي، ځکه چې که سورجکتیو نه وي، نو ایجکتیو به هم نه شوی کېدی:

- په باندې یا سورجکتیو په دې معنا ده،چې د ټولو $x \in X$ لپاره په وتونډېری کې یو $x' \in X$ شتون لري، داسې چې باور $f(x') = x$ لري . که یو تابع په باندې نه وي، نو یو $x \in X$ په کوخه ډېری کې له مخه ځېره ونه لري(یعني چې دا یې ځېر هوي). نو $f(X) \neq X$ باور لري .

وي دې $X := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یعني $|X| = n$ ، نو $|f(X)| = m < n$ دی[4.1]. نو نو اوس دا Schubfachprinzip von Dirichlet ( د دیریښلیت(شمیر پوه) د میزکورونو( لکه چې د میز خانه یې پول)، خو داسې چې ډیطر کورګړي ولري(ژباړی) اصول) وایي، چې که $n$ شیان په $m$کورونو(خانو) کې کېږدو او $n > m$ وي، نو لږ ترلږه په یوه کور کې له یوه زیات شیان باید واچول شي.

د دې لاس ته راوړنې سره اینجکتیووالی نه دی ورکړ شوی، ځکه چې $f(x) = f(x')$ مګر $x \neq x'$ ( ټیک هلته چې په یوه کور کې دوه توکي پراته دي).

دویم : سورجکتیو له دې لاس ته راځي اینجکتیو. موږ ښایو چې که تابع اینجکتیو نه وي، نو سورجکتیو هم نه ده.

1. $f$ په کې نه ده، نو $f(x) = f(x')$ شتون لري د $x \neq x'$ سره . نو $f(X) \neq X$ دی او دا چې لږ تر لږه په $|f(X)| < |X|$ کې یو توکی کم دی لږ تر لږه $|f(X)| = n - 1$ کېدی شي وي ، داسې چې $|f(X)| < |X|$ او له دې

(c) ketabton.com: The Digital Library



سره تابع په باندې نه ده، داسې چې په موخه ډېرۍ کې يو توکی $x \in X$ شتون لري د کوم لپاره چې په وتونډېرۍ کې $x' \in X$ شتون نه لري.

F په کې(اينجکتيو) $\Leftrightarrow$ Ker (F) = 0

وي دې $F : V \to W$ او $x, v_1, v_2, n \in V$ او $0 \in W$

له دې لاس ته راخي:

دا چې $F$ په کې يا اينجکتيو دی نو هر شکل يا ځېره يو پخوا يا ترمخ شکل لري.

د $0$ پخواشکل يا ترمخ شکل يا ځېره دې $n$ وي. $\Longleftrightarrow$
$Ker(F) = \{n\} \Rightarrow F(n) = 0$

دا چې کربنيز دی بايد باور ولري:

$$\begin{aligned} & F(x) + F(n) = F(x+n) \\ \Leftrightarrow\ & F(x) = F(x+n) - F(n) \\ \Leftrightarrow\ & F(x) = F(x+n) - 0 \\ \Leftrightarrow\ & F(x) = F(x+n) \\ \Rightarrow\ & n = 0 \end{aligned}$$

نو $Ker(F) = 0$

له دې لاس ته راخي ($\Leftarrow$) :
$Ker(F) \Leftrightarrow \{v \in V | F(v) = 0\}$

د په باندېوالي خوونه: دا چې تابع کربنيزه دی با ور لري:

د په کې والي ښوونه:

$$\begin{aligned} & F(v_1) = F(v_2) \\ \Leftrightarrow\ & F(v_1) - F(v_2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & F(v_1 - v_2) = 0 \\ Da\ \ Ker(F) = 0\ \Rightarrow\ & F(v_1 - v_2) = F(0) \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



له دې سره دی $v_1 = v_2$ .

L په کې ⇔ کربښيزخپلواک وکتورونه په کربښيز خپلواک وکتورونو څېره کيږي

L په کې ⇔ کربښيزخپلواک L کربښيز خپلواک

له دې لاس ته راځي( ⇐: ) :

ښايو: $L(v) = L(w) \Rightarrow \ldots \Rightarrow v = w$

وي دې $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ بنسټ، $v, w \in V$ او بنسټ او

$L(v_1), \ldots, L(v_i), \ldots, L(v_n)$ کربښيز خپلواک

$$\begin{aligned} & L(v) = L(w) \\ \Leftrightarrow \quad & L(\sum \lambda_i v_i) = L(\sum \mu_i v_i) \\ \Leftrightarrow \quad & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \\ \Rightarrow \quad & \sum (\lambda_i - \mu_i) L(v_i) = 0 \ \ (v \end{aligned}$$

( د کربښيز کمبينيشن د يواخيوالي له امله)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0 \\ \Rightarrow \quad & v = w \end{aligned}$$

په کې والی ښايي

له دې لاس ته راځي يا

⇒:

ښايو: $L(\sum \lambda_i v_i) = 0$

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i v_i = \sum \mu_i v_i \\ \Leftrightarrow \quad & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \end{aligned}$$

د ا ينجکتيويتي له امله

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \sum(\lambda_i - \mu_i)L(v_i) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \sum(\lambda_i - \mu_i) = 0 \\ &\Rightarrow \quad L(\sum \lambda_i v_i) = 0 \end{aligned}$$

## د ارزښتوني فنکشنونه يا توابع يا څېروني

موږ د بېلګې په توګه درې پولينومونه $P_1, P_2, P_3$ لرو د لاندې سره

$$\begin{aligned} P_1 &= (x-1)(x-2)(x-4) \\ P_2 &= (x-3)(x-5)(x-1) \\ P_3 &= (x-4)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

موږ اوس کړی شو يو د ارزښتوني تابع يا څېرونه تعريف کړو( $a$ ځای دی په کوم کې چې ارزونه کيږی)

$$W_a(P) : P \mapsto P(a)$$

د ارزښتوني پولينوم کرښيز دی څکه چې لاندې $\forall \ P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ او $\lambda \in K$ [4.2] باور لري :

$$W_a(\lambda P + Q) = \lambda W_a(P) + W_a(Q)$$

په دې توګه د ارزښتوني تابع سره کرښيز خپلواک وکتورونه په کرښيز خپلواک وکتورونو ځېره کيږي ای ماپينګmapping جوړوي، دا په دې معنا چې

$P_1, P_2, P_3$ کرښيز خپلواک دي، که $W_a(P_1), W_a(P_2), W_a(P_3)$ کرښيز خپلواک وي.

موږ د

$$\lambda_1 W_a(P_1) + \lambda_2 W_a(P_2)) + \lambda_3 W_a(P_3) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



لپاره ښايو

: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ :

په دې معنا چې P د 1 په ځای کې ارزښتول کيږي، يعني دپولينوم $P(1)$ ارزښت تاکل کيږي، که 1 ځای په ځای کړو :

| | $P(1)$ | $P(2)$ | $P(3)$ | |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | $= 0$ | $= 0$ | $\neq 0$ | $\Rightarrow \lambda_3 = 0$ |
| $P_2$ | $= 0$ | $\neq 0$ | $= 0$ | $\Rightarrow \lambda_2 = 0$ |
| $P_3$ | $\neq 0$ | $= 0$ | $= 0$ | $\Rightarrow \lambda_1 = 0$ |

داچې درې وکتورونه، چې د ارزښتونې له لارې جوړيږي يا منځ ته راځي يا توليديږي، کرښيز خپلواکدي، دادرې وکتورونه $P_1, P_2, P_3$ هم کرښيز خپلواک دی.

## ايزومورفيزمونه **Isomorphismen**

$V$ او $W$ دې $\mathbb{K}-$ - وکتورفضاوې وي . $V$ د $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتور فضا بنسټ وي. تابع $f: V \to W$ ټيک هلته ايزومورفيزم[4.3], ده، که

$(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$

د $W$ يو بنسټ وي. دا جمله په څټ يا برعکس هم باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$V$ دې یو $\mathbb{K}-$ -وکتروفضا او $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ دې بنسټ وي.

موړ ایزمورفیزم

$\mathbb{K}^n \longrightarrow V$

$$\left( \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{array} \right) \longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

کانونیکي بنسټ- ایزومورفیزم بولو. د اړتیا په حالت کې دا په $\Phi_{(v_1, v_2, v_n)}$ توګه هم ښایو. موړ دلته ګورو چې د کانونیکي بنسټ-ایزومورفیزم ځخه کار اخستلای شو، چې د یوونوکتورونو (واحد-) سره (کانونیکي بنسټ) او د وکتروفضا $V$ د بنسټوکتورونو ځخه یو ماتریکی جوړ کړو، چې د دواړو وکتورفضاو ترمنځ ترنفورمي کیږي.

موړ دا داسې کړو چې د $V$ د بنسټ وکتورونه یو په بل پسې په ماتریکس کې ولیکو.

## ماتریکسونه Matrizen

یو ماتریکس $Mat(m \times n; K)$ یو د $m$ لیکو او $n$ درځونو(متو، ستنو) نظم دی د $K$ بدن (پټې، ورشو، ساحه) ځخه. د یوه ماتریکس د یوګونو توکو د لیکې – او – متې کېدی شي د ایندکس لیکدودIndizeschreibweise سره ټیک کره شي:

$a_{ij}$

دلته$i$ لیکه او $j$ مته په کوته کوي.

کرښیزې فنکشنونه (توابع) د ماتریکسونو په څېر

هر کرښیزه تابع کېدی شي په ټیک یوه ماتریکش تنظیم شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



# د یوه ماتریکس رانګ Rang

د یوه ماتریکس رانګ  د کرښیز خبلواکو لیکو/  یا د همغې د متو  ګنون یا تعداد دی.

د متو رانګ  = د لیکو راګ Zeilenrang = Spaltenrang

**جمله :**

**د هر $m \times n$ ماتریکی لپاره باور لري:**

**د لیکوراک=د متو رانګ یا رانګ**

**ښوونه:**

**ورکړ شوی یو $(m \times n)$ ماتریکس**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

موږ د $R_1, \ldots, R_m$ سره لیکي-وکتورونهښایو:

$$\begin{aligned} R_1 = &\quad (a_{11}, \quad a_{12}, \quad \cdots, \quad a_{1n}) \\ R_2 = &\quad (a_{21}, \quad a_{22}, \quad \cdots, \quad a_{2n}) \\ & \qquad\qquad \cdots \\ R_m = &\quad (a_{m1}, \quad a_{m2}, \quad \cdots, \quad a_{mn}) \end{aligned}$$

که$r$ د لیکي رانک  وي، نو موږ  $r$  کرښیز خپلواک وکتورونه لرو، کوم چې د دې لپاره بنسټ جوړوي:

$$S_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n}), S_2 = (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n}), \ldots, S_r = (b_{m1}, b_{m2}, \cdots, b_{mn})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



هر ليکه وکتور $R_i$ د لاندې بنسټ وکتورونو کرښيز ترکيب دی:

$$\begin{aligned} R_1 &= k_{11}S_1 + k_{12}S_2 + \ldots + k_{1r}S_r \\ R_2 &= k_{21}S_1 + k_{22}S_2 + \ldots + k_{2r}S_r \\ &\cdots \\ R_m &= k_{m1}S_1 + k_{m2}S_2 + \ldots + k_{mr}S_r \end{aligned}$$

د دې لپاره چې د ماتريکس هر توکی $a_{ji}$ لاس ته راوړو، بايد ټول ضريبونه، د ليکې وکتور ونه د ليکېفضاڅخه وکتوروفضا انځور کړ، د بنسټ وکتور د اړونده توکي سره ضرب کړو. دا د $a_{11}$ لپاره د بېلګې په توګه دی

$$a_{11} = k_{11} \cdot b_{11} + k_{12} \cdot b_{21} + \ldots + k_{1r} \cdot b_{r2}$$

له دې سره a د ټولو i لپاره د ليکې ډول دی.

$$\begin{aligned} a_{1i} &= k_{11}b_{1i} + k_{12}b_{2i} + \ldots + k_{1r}b_{ri} \\ a_{2i} &= k_{21}b_{1i} + k_{22}b_{2i} + \ldots + k_{2r}b_{ri} \\ &\cdots \\ a_{mi} &= k_{m1}b_{1i} + k_{m2}b_{2i} + \ldots + k_{mr}b_{ri} \end{aligned}$$

موږ کړی شو اوس هر د متې وکتور په لاندې توګه وليکو:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = b_{1i} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix} + b_{2i} \cdot \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{ri} \cdot \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}.$$

له دې امله دا وکتورونه د $r$ وکتورونو کرښيز ترکيب دی:

$$\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اړيين نهده چې داوکتورونه دې يو بل تهکرښيز خپلواک وي. مګر په هر حالت بايد هغه خوراجګ ګڼ(عدد) په$r$ رابند يا محدود وي، چې له کومهامله دی

د متې( درز يا ستنې يا ولاړې ليکې يا کيلې) رانک Spaltenrang $\leq r$

سړی همداسې د تراسپونی شوې ماتريکس سره هم مخ ته ځي او په دې توګه ،، $\leq r$ Zeilenrangد ليکې رانګ ،، لاس ته راوړي. له دې سره دی:

د ليکې رانګ = دمتې رانګ

# په ښت- يا معکوس ماتريک Inverse Matrix

يو مربع يا څلوريزه $n \times n$ماتريکس$A$ يو معکوس ماتريکس $A^{-1}$ لري،، که يو لهدې لاندې برابر ارزښته اړيکو څخه يو پوره وي.

- د متو ( ليکو) وکتورونه کرښيز خپلواک دي.
- $rang(A) = n$
- $det(A) \neq 0$
- له دې سره اړوند کرښيزه تابع $f_A$ يو ايزومورفيزم دی.

څرخون- او هدارون-ماتريکسونه( --- د انعکاسونې --)

په $\mathbb{R}^2$کې څرخون يا څرخونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په $\mathbb{R}^2$ کې هندارونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

## دیترمینانتونه Determinanten

دیترمینانتونه دڅه لپاره دي؟

دیترمینانتونه په $\mathbb{R}^2$ کې د غبرګ اړخیز(موازی الاضلاع) په $\mathbb{R}^2$کې د یوه شپات( کشکول شوی کوادر یا مکعب) او په $\mathbb{R}^n$ کې د یوه غبرګ خوایز سطحه ورکوي.
له دې سره روښانهکېدی شي،چې ولې یو دیترمینات صفر دی، که وکتورونه یو بل ته کرښیز بلواک وي. که په کې دوه وکتورونهورکړ شوې وي او دا یو بل ته کرښیز بلواک وي، نو دا یو غبرګاړخیز نه شي غزولی او له دې امله مساحت صفر دی. له دې سره هر مربع – یا څلوری-ماتریکس یوه ګڼ یا عدد سره تنظیمیږي.

### تعریف(پیژند) Definition

دیترمینانت هر ماتریکس $M(n \times n, \mathbb{K})$ یو عدد $\mathbb{K}$ باندې تنظیموي:

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

فنکشن (تابع) لاندې خویونه لري:

لومړی: دیترمینانت په هره لیکه کې کرښیزه ده. داپه دې معنا، چې که سړی له ماتریکس $M$ یوه کرښه لرې بریږدي یا پرېږدي او د یو کتور $x$ سره بدله کړي، چې بیا دا تابع نسبت دې وکتور ته ځان کرښیز نیسي.

دویم : که د ماتریکس د لیکې رانک نسبت د لیکې تعداد $n$ ته کوچنی وي، نو $\det A = 0$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریم : د یوونماتریکس یا واحدماتریکس ډیترمینانت $1$ دی:

$$\det(E) = 1$$

ټیک یوه تابع شته، چې دا خویونه پوره کوي. دا باید وښایو، داسې چې موږ یواځنوالی او شتونوالی وښایو. دا هر شرط لپاره باید په یواځې تګهوښول شي.

مرشتندوي جمله:Hilfssätze :

د ښوونې لپاره لومړی لاندې مرستندوی جملې ښایو:

لومړی: که په ماتریکس $A$ کې دوه لیکې بدلې شي، نو ماتریکس $A'$ لاس ته راځي، نو باور لري.

$$\det A' = -\det A$$

.

دویم : که د یوعماتریکس لیکه د یوه سکالار $\lambda$ سره ضرب شي نو ماتریکس $A'$ لاس ته راځي او له دې سره باور لري:

$$\det A' = \lambda \det A$$

دریم : که په یوه ماتریکس $A$ کې یوه لیکه د ماتریکس د بلې لیکې سره جمعه ( ورزیاته) شي نو ماتریکس $A'$ لاس ته راځي، نوله دې ځخه دیترمینان بې اغیزه پاتې کیږي: $\det A = \det A'$

د دې مرستندوی او یواځنوالی او شتون جملو ښوونه دې په Jänich کې وکتل شي.

## د دیترمینانتو ساده شمېرنه

**لاندې برخه**

(c) ketabton.com: The Digital Library



- $2 \times 2$
- $3 \times 3$

## د لاپلاس د وديزېني جمله Laplace Entwicklungssatz

د لاپلاس د وديزيني جمله مرسته کوي، کد له $3 \times 3$ ماتريکسونو ځخه لوی ديترمينانتونه ټاکو[6.1] .

سرې کړی شي ديترمينانت ته وده ورکړای شي، که ماتريکس تل په کوچنيو ديترمينانتونو و وېشي. دلته لاندې ماتريکس $A_{ij}$ هغه ماتريکس ده، چې د ماتريکس $A$ د $i-$-مي او $j-$-مي ليکي همداسې متې د لرې کولو ځخه لاس ته راځي. سرې کړی شي چې وديزيينه سرته ورسوي يا د ليکې له لارې

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

يا د متوو پسې

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

د ضريب يا ځلووني $(-1)^{i+j}$ په مرسته يو د سترنجتختې ډوله مخ يا موسترمنځ ته راځي. له دې سره د ديترمينانت مخنخبنه ټاکل کيږي:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| + | − | + | − | + |
| − | + | − | + | − |
| + | − | + | − | + |
| − | + | − | + | − |
| + | − | + | − | + |

بېلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| ودیزیینه پورته لیکه پسې پورته لیکه =><br>په لاندې دیترمینات کې د لیکې په ځیر له منځه وړل کیږي<br>= | $det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ |

$$+a_{11}\cdot \underbrace{det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{1.Spalte\ \ ausgeblendet} \quad -a_{12}\cdot \underbrace{det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{2.Spalte\ \ ausgeblendet}$$

۱ -م. درخ لرې کړي      ۲ -م درخ لرې کړي

$$+a_{13}\cdot \underbrace{det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}}_{3.Spalte\ \ ausgeblendet} \quad -a_{14}\cdot \underbrace{det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}}_{4.Spalte\ \ ausgeblendet} =$$

۳ –م درخ لرې کړی      ۴ –م درخ لرې کړي

## د دیترمینانتونو ساده ټاکنه

- که یوه لیکه یا متِه کرښیز بلواک وي، نو باور لري

$$det\ \ A = 0$$

دا د لاندې سره په برابره معنا ده( د لیکو تعداد همداسې د متو تعداد)

$$rang\ A < n$$

- که څوک یوه متِه د بلې سره بدله کړي یا یوه لیکه د بلې سره بدله کړي،

(c) ketabton.com: The Digital Library



مخنخښه تغير خوري( دا چې د ديترمينانت تابع الترنيري(بدیلي)
**alternierend** ده)

$$det\ A_{ij} = -det\ A_{ji}$$

- کهد ماتريکس يوه ليکه د سکالار سره ضرب شي،نوبايد تنها ديترمينانت هم د همغه سکالار سرهضرب شي:

$$det\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \lambda\cdots\lambda & \lambda a & \lambda\cdots\lambda \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \lambda\ det\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

په همدې توګه که ديترمينانت د $\lambda^n$ سره هم ضربې شي، د کوم سره چې $n$ د ليکو تعداد دی، داسې دهلکه که يوه ماتريکس ټوله له $\lambda$ سره ضرب شي.

$$det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det\ A$$

- د يوونماتريکس ( واحد-) ديترمينانت $1$ ده:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- د يوه درېګوډي ماتريکس ديترمينانت د هغه د دوه کونجتړې ضرب دی:

$$det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \ \cdots\ \cdot \lambda_n$$

- ماتريکس څخه $n \times n$ داسې يوه درېګويزه ماتريکس کړی شو د هر په خوښه د ساده ليکو عمليو څخه د ګاوسقانون له مخې لاس ته راوړو. موږ بايد د ديترمينانت په ټاکلو يواځې دې ته پام وکړو، چې ليکه بدلون ديترمينانت ته له

(c) ketabton.com: The Digital Library



څانسره یوسو. نو كه $r$ د لیكو د بدلون تعدادوي، چې موږ سر ته رسولې چې درېګوډیزه بڼه لاس ته راوړو، باور ولري::

$$\det A' = (-1)^r \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ \ldots \ \cdot a_{nn}$$

- كه څوک یوه ماتریكس ترنسپوني کړي( داپه دې معنا چې د لیک څخه متې جوړوي او له متو څخه لیكي او یا په مربع یا څلوریزه ماتریكسونوكې دا په دوهكونجتړې(قطر) هنداره كوي) په دې حالت كې د ترادپوني ماتریكس دیترمینانت ارزښه د نه ترانپوني شوې ماتریكس د دیترمینانت سره برابر دی:

$$\det \ A = \det \ A^T$$

كوچنی بام: په ضرب كې دې پامدې وي. باور لري

$$(AB)^t = B^t A^t$$

- دیترمینانت- ضرب-جمله

$$\det(A \cdot B) = \det \ A \cdot \det \ B$$

....... ښوونه يې دلته ورزیاته كړی.

## د ایندومورفیزم دیترمینانتونه

دا چې موږ هر ایندومورفیزم $f$ د مربع – یا څلوری-ماتریكس سره انځورولی شو[6.2]، له دې سرهكړی شو چې د ایندومورفیزم دیترمینانت هم تعریف كړو:

$$\det f := det A_f \in \mathbb{K}$$

اوس داپوښتنه رامنځ ته كوو، چې ایا د $V$ د مختلفو بنسټونو لپاره دیترمینانتونه مختلف دي. دا كېدی شي وښوول شي چې دیترمینانت د بنسټ د ټاكنو یا انتخاب څخه خپلواک

(c) ketabton.com: The Digital Library



دي. له دې سره لهدې امله کړی شو چد د یوه ایندومورفیزم دیترمینانت یواځنې ت عریف کړو.

## أیګن ارزښت(Eigenwerte(Eigenvalue

یادونه: دا أیګن په ټول ژبوکې همداسې لیکي. دا الماني وی یا لغات دی، د خپل په معنا دی.

أیګن ارزښت(Eigenwerte(Eigenvalue

$F$ دې د وکتورفضا $V_K$ ایندومورفیزم وي. یو $\lambda \in K$ أیکنارزښت بلل کیږي، که یو $v \in V$ شتون ولري د $v \neq 0$ سره ، داسې چې باور ولري.

$$F(v) = \lambda v$$

### أیګنوکتور Eigenvektoren

$F$ دې د وکتورفضا $V_K$ یو ایندومورفیزم وي. هر له صفر وکتور مختلف $v \in V$ د

$$F(v) = \lambda v$$

سره د $F$ أیګنوکتور بلل کیږي( أیګن ارزښت $\lambda$ ته)

### دوه -کونجتړې کیدونکې یا دوه-کونجتړې کیدنوړ(قطري کیدونکې) Diagonalisierbar

یو ایندومورفیزم دوه کونجتړې کېدونکی ( قطري کېدونکې یا – وړ) بلل کیږي، که د أیکن وکتورونو څخه یو بنسټ شتون ولري. دا په دې معنا چې د ایندومورفیزم لپاره یو دوه کونجتړی ماتریکس د لاندې بڼه شتون لري( د متو وکتورونه بنسټ ومتورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



شتون لري، $\lambda_i$ أيګن ارزښتونه دي)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

## أيګن فضاوې Eigenräume

$F$ دې د $V$ ايندومورفيزم وي او $\lambda \in K$ ، نو

$$Eig(F;\lambda) := \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$$

د $F$ يو أيګنفضا بولو نسبت و $\lambda$ ته.

- اګن فضا د $V$ وکتورفضا يو برخوکتور فضا ده.
- صفروکتور په ليګنوکتور کې خوندي نه دی.
- $Eig(F;\lambda)\{0\}$ د $\lambda$ اړونده أيګنوکتورونو ډېری ده
- (S.210) ...

کرکتريستيکي پولينوم يا سړی څګګه أيګن ا رزښتونه پيدا کوي؟

سړی کړی شي چې أيګن ارزښتونه وټکي، داسي چې د کرکتريستيکي پولينوم صفرځايونه پيدا کوي. باور لري[7.1]

د ايګن ارزښت دی له دې لاس ته راځي او په ځت

$$\lambda \ ist \ Eigenwert \ von \ F \Leftrightarrow det(F - \lambda id_V) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



سړی د لاندې ماتریکسونو دوه -کونجتړې(قطر) پیداکوي:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{mn}-\lambda \end{pmatrix}$$

سړی أیګن وکتورونه او أیګن ارزښتونه څنګه پیدا کوي؟

که څوک أیګن-ارزښت $\lambda$ ولري،نو کېدی شي و هغه ته مناسب أیګنوکتور وټاکي، داسې چې سړی لاندې برابرون - یا مساواتسیستم حل کړي:

$$(A-\lambda I)X=0$$

لکه کریتیکي پولینوم لپاره سړی همداسې بېرته ماتریکس جوړوي، چېرته چې د $\lambda$ لپاره أیګن ارزښتونه ځای په ځای کوي . بیا سړی دا هوموجېن مساواتسیستم حل کوي.

یو ماتریکس سړی څنګه دوه-کونجتړې یا قطري کوي؟

لومړ: که لږ ایګنوکتورونه تولید یا جوړېدی شي، دې ته ( نسبت دې ته) چې ماتریګس درزونه همداسې لیکې لري، نو متریکس دوه کونجتړې کیدونکې نه ده.

که پوره وکتورونه شتون لري او ودې ته ایګن ازښتونه نو $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ باور لري

$$D=S^{-1}AS=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

سکالار ضرب(دننی ځل یا ــضرب) او نورم

(c) ketabton.com: The Digital Library



## Skalarprodukt (Innenprodukt) und Norm

سکالار ضرب

تعريف يا پيژند:

يو تابع $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ , $(x,y) \to \ <x,y>$ سکالار ضرب بلل کيږي، که $\forall\ x,x',y \in \mathbb{R}^n$ دا لاندې باور ولري:

- $<x+x',y> = <x,y> + <x',y>$ کربنيزوالی (
- $<x,y> = <y,x>$ ( سيومتري Symmetrie)
- $<x,x> \geq 0$ او $<x,x> = 0 \Rightarrow x = 0$ مثبت او ديفينيت) Positiv und definit)

بېلګه:

- $<a,b> \mapsto a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n$

## نورم Norm

پيژند( تعريف): يوه ځيرونه يا فنکشن $||\ || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ نورم بلل کيږي، که لاندط امسيومونه باور ولري

- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ديفينيت
- $||x|| \geq 0$ مثبت

(c) ketabton.com: The Digital Library



- $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ هوموجين

- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ درې ګوډي يا مثاثاتي نابرابرون

بيلګه:

$$||a||_\infty = ||(a_1, a_2, \dots, a_n)||_\infty = \max(|a_i|; i = 1, \dots, n)$$

ماکسيموم يا خورا جګ ارزښت

$$||a||_1 = ||(a_1, a_2, \dots, a_n)||_1 = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

(يو نورم)

$$||a||_2 = ||(a_1, a_2, \dots, a_n)||_2 = \sqrt{< a, a >} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2}$$

(د پيوتاګوراس نورم)

د وازيدو کونج تعريف:

د يوې وکتورفضا د $x$ او $y$ وکتورونو ترمنځ د وازېدوکونج $\alpha$ په لاندې توګه تعريف دی

$$< x, y >= ||x|| \, ||y|| \, \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{< x, y >}{||x|| \, ||y||}$$

د وازيدو کونج د تعريف لپاره بايد کوساين تل تعريف وي. موږ بايد وښايو، چې دا لاندې باور لري:

$$-1 \leq \frac{< x, y >}{||x|| \, ||y||} \leq 1$$

دا د کوشي –شوارخ- نامساواتو خونديونه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



# د کوشي –شوارخ- نامساوات

دپه خوښه وکتورونو $u, v \in V$ لپاره باور لري:

$$< u, v >^2 \leq < u, u >< v, v >$$

یا ورته(اکویوالنت):

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||$$

ښوونه:

د $y = 0$ لپاره ساده دی. وي دې $y \neq 0$. موږ له یوه واړه چل څخه کار اخلو او $\lambda := \frac{< x, y >}{||x|| \, ||y||} \in \mathbb{R}$ ږدو. لاندې باور لري:

$$\begin{aligned} 0 \leq < x - \lambda y, x - \lambda y > &= < x, x > -2\lambda < x, y > + \lambda^2 < y, y > \\ &= ||x||^2 - 2\frac{< x, y >^2}{||y||^2} + \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \\ &= ||x||^2 - \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \end{aligned}$$

په ورته توګه باور لري $< x, y >^2 = ||x||^2 ||y||^2$ او له دې سره $| < x, y > | \leq ||x|| \, ||y||$.

نورمال شوي ا و اورتوګونال وکتورونه

وکتورونو نورمالیدنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



وکتورونه نورمال شوي دي، چې اوږدوالی $1$ لري، دا په دې معنا، چې $< v,v >= 1$

یا $||v|| = 1$.

یو وکتور نورمال کیدی شي یا کیږي، داسې چې دی د په څښ یا معکوس ارزښت سره ضرب شي:

$$v_{normalisiert} = \frac{1}{||v||} \cdot v$$

## اورتوګونال وکتورونه ( یو په بل ولاړ -)

دوه وکتورونه $v_1$ او $v_2$ یو بل ته اوتوګونال دي، که دا یو په بل ولاړ یا عمود وي. یا نیغ ولاړ وي. له دې امله د دوي سکالار ضرب یا ځل $0$ دی.

$< v_1, v_2 >= 0$

هر وکتورفضا ته لږ ترلږه یو( یعنې په ریښتونې زیات) له اورتوګونال وکتورونو بنسټونه شته. کا دا هو اوږدوالی $1$ ولري، نو دا *اورتونورمال* دي.

اورتونورمال بنسټونه:

یو اورتونورمال بنسټ هغه بنسټ دی، په هغه چې ټول وکتورونه دي چې نسبت سکالار ضرب ته اوږدوالی $1$ لري او یو بل ته اورتوګونال دي.

سړی کړی شي هر بنسټ ته د شمیدت اورتوګونالیدونکي تلنلار **Schmidtschen Orthnormalisierungsverfahrens** په مرسته یو اورتونورمال بتسټ جوړ کړي:

موږ غواړو د $i = 1$ تر $i = n$ پورې لاندې فرمول وځغلوو، د کوم سره چې د $n$ بنسټ وکتورونو تعداد یاګنون دی، او یو بل پسې اورتوګونال وکتورونه د $1$ اوږدوالي پیدا کوي یا میندي، چې دا موږ سملاسي د بل وکتور شمیرنو لپاره اړین مومو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$e_i = \frac{v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k >}{\left\| v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k > \right\|}$$

## ځای بدلون Permotation

ليکندود

يو ځايبدلون يو په – يعني بيجکتيو ځيرونه يا فنکشن دی، کوم چې $n$ توکي ( $n > 0$ ) تنظيموي.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \sigma(2) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$$

دا پورته ليکنښول دا معنا لري، چې د بيلګې په توګه $1$ د $\sigma(1)$ ځای ته راکښل کيږي.

په همدې توکه ځيوکليکي يا تل بيرته راګرځيدونې ليکندود هم ورځنی يا بلد دی. د بيلګې په توګه:

$$(12)(3)(564) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

ترانپوزيشن Transposition

يو ترانسپوزيشن د ټيک دوه يتوکو بدلون دی په ځيوکليکي ليکندود يعنې $(ab)$ .

هر پرموتيشن د دوه ترانپوزشنونو کمپوزشن( ضرب) دی.

د ممکنه ځای بدلونو ګڼون يا تعداد

(c) ketabton.com: The Digital Library



که یوه ډېرۍ یا سټ $n$ توکي لري، نو دا $n!$ ځای بدلونونه ممکن دي.

پاتې یا تش ځایونه

که یو پرموتیشن له یوه کوچني ځای څخه و یوه لوي پسې څیره کړي، نو تشځایونه تولیدیږي. که $j < k$ او $\sigma(k) < \sigma(j)$ وي، نو دا یو تشځای دی.

# د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې

## د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې څنو ځایونو غزېدلې او څنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: څمککچپوهنه( هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون ( دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

*Mathematical Formulas*

(c) ketabton.com: The Digital Library



2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو تولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

*Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)* :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه ( هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱۸ - ډېرئ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند ( منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې( دا هغه ليکنې دي، چې څنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرلیک

**Get more e-books from www.ketabton.com**
**Ketabton.com: The Digital Library**