کرنیز الجبر

$$\begin{array}{c|l} & A\cdot X_1 = b \\ - & A\cdot X_2 = b \\ \hline = & A\cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

له ن ج : بنستیز درس | کرنیز الجبر

2012

Ketabton.com

ژیاړی: ډاکتر ماخان(میړی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښيز الجبر

$$
\begin{array}{c|l}
 & A \cdot X_1 = b \\
- & A \cdot X_2 = b \\
\hline
= & A \cdot (X_1 - X_2) = 0
\end{array}
$$

dr.shinwari@hotmail.com

له ن ج : بنسټيز درس | کرښيز الجبر

ژباړی: ډاکتر ماخان(میړی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

نظر یا د پیداکیدو فکر ۱

هندسي لړۍ پرلپسي یا لړۍ ۲

د برنولي نا مساوات یا نابرابرون ۳

د یوه کرښیز مساواتسیستم جوړښت ۴

ماتریکسونه: ۵

تراسپوني ماتریکس ۷

سیومتریکي ماتریکسونه ۷

نا یو ډوله یا اینهوموجین ۸

یو ډوله یا هوموجین ۹

لیکه پوړیز بڼه ۹

دیترمینانتونه ۱۳

رانګ ۱۳

د حلفضا د دیمنزیون (بعد، پراخیدونی)تاکل ۱۳

د ګاوس - تلنلار یا - - قانون ۱۴

د ګاوس الګوریتموس ټیکاوی ۱۶

د حلونو یا اوبیونو نور قوانین ۱۷

ورته والي - یامشابهت اړیکي ۱۹

ډېرۍ یا سټ له تړنو یا عملیو سره ۱۹

لاندې برخه (که توټه برخه یا کښته برخه): ۲۰

ګروپ ۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ابل - یا کموتاتیو ګروپ ۲۱
کړۍ ۲۱
بدن یا تن ۲۳
پاتې ټولګې یا باقي ټولګې ۲۳
وکتور فضا ۲۷
کربنیز خپلواکوالی ۲۷
کربنیز بلواکواکوال ۲۸
د وکتور فضا تعریف ۲۸
د یوه وکتور فضا جوړونه یا که غواړۍ تولید ۲۹
سپاین یا کربنیزه Spann،((کربنیزه) رابنده ورشو ۳۴
جوړښتسیستم (تولیدي سیستم) ۳۴
بنسټ ۳۵
د شتاینیځ بدلونجمله ۳۵
بعد یا پراخېدونی ۴۰
لاندې وکتور فضا ۴۲
د لاندې فضاو لپاره د بعد یا پراخیدوني فرمول ۴۳
د فنکشنونو یا ځیرونو(توابعو) خویونه ۴۴
په کې (فنکشن یا تابع) ۴۴
په (په باندې او په کې فنکشن یا -- تابع) ۴۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

کربنیز فنکشنونه یا توابع ۴۵
زړی(هسته) او عکس یا څېره ۴۵
ځانګړي کربنیز فنکشنونه ۴۶
د ارزښتوني فنکشنونه یا توابع یا څېروني ۵۰
ایزومورفیزمونه ۵۱
ماتریکسونه ۵۲
د یوه ماتریکس رانګ ۵۳
د متې(درز یا ستني یا ولاړې ... ۵۵
په څټ- یا معکوس ماتریک ۵۵
دیترمینانتونه ۵۶
د لاپلاس د ودیزېني جمله ۵۸
د دیترمینانتونو ساده ټاکنه ۵۹
د ایندومورفیزم دیترمینانتونه ۶۱
أیګن ارزښت ۶۲
أیګنوکتور ۶۲
دوه -کونجتړې کیدونکې یا دوه-کونجتړې ۶۲
أیګن فضاوې ۶۳
ماتریکس سړی ځنګه دوه-کونجتړې یا... ۶۴
سکالار ضرب(دننني ځل یا ــضرب) او نورم ۶۵
د کوشي ــشوارخ- نامساوات ۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

اورتوګونال وکتورونه ۶۸

اورتونورمال بنسټونه: ۶۸

ځای بدلون ۶۸

ترانپوزیشن ۶۸

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې ۷۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

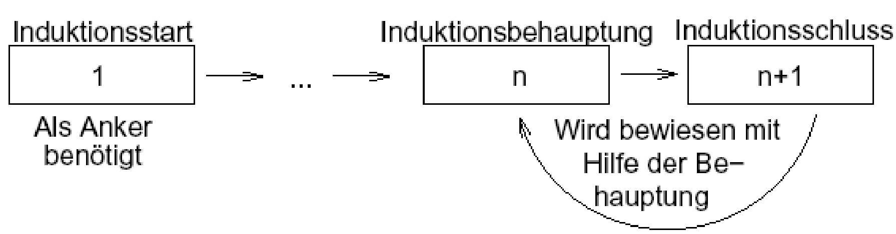
د ژباړې نیولیک

د دې سرلیک لاندې یوه بله لیکنه هم شته. دا مخ ته پرته لیکنه ساده او د پیل په څېر باید وکتل شي. دا لیکنه د بنسټیزو لیکنو ن ج څخه راژباړل شوې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نظر یا د پیداکیدو فکر

پوره اندکشن د ښوونې یو متود یا لار ده، هغه چې په کرښیزه الجبر کې زیات کارول کیږي. د ښوونې لپاره نیول کیږي چې یو تاکلی فرمول د اندکشن ثبوت د n لپاره صدق کوي. د اندکشن پای یا ختمپدلو – چې د اندکشن پل هم بلل کیږي- ښوول کیږي، چې دا فرمول د $n+1$ لپاره صدق کوي، دایې چې بیرته د اندکشن ثبوت باندې لاس ولرو یا راونیسو. د دې لپاره چې ښوونه پیخې ټیک یا پوره ټیک وي، د یوه نښلون ټکي ته اړتیا شته، له کوم چې n پیل کیږي. دا نښلونټکی د اندکشن پیل ټکی هم بللکیږي. یا د اندکشن پیل او په ښوونه کې په پیل کې راوړل کیږي.



.

د پورته دیښتو ژباړه له کیڼ و ښي لور ته:

پورته: د ایندکشن پیل. لاندې: د په باندې ایښولو (کلکولو) لپاره اړین.

لوریزۍ کرښې: لرو .

بیرته خیره پورته: د ایندکشن غوښتنه یا ثبوت د ایندکشن پای. لاندې: د غوښتنې یا ثبوت په مرسته ښوول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هندسي لړۍ پرلپسې یا لړۍ (   )

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د ښوولو دی:

د اندکشن پیل: $n = 1$

$$\begin{aligned} q^0 &= 1 \\ &= \text{Okay} \\ \tfrac{1-q^1}{1-q} &= 1 \end{aligned}$$

د اندکشن وړاندنیونه(فرضیه): د n لپاره دې ښوول شوي وي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د اندکشن پل : $n \leadsto n+1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

دا دد ښوولو دی.

کینې پیل کوو

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \\ &=_{nach\ Vor.} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q)q^n}{1-q} \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-q^n+(1-q)q^n}{1-q}\\
&= \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q}\\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}
$$

د برنولي نا مساوات يا نابرابرون Bernoulische Ungleichung

$(1+x)^a \geq 1+ax$ دې وښوول شو

د االندکشن پيل : $a=1$

$1+x \geq 1+x$: تيک دی.

د اندکشن پل:

$a \rightsquigarrow a+1$

$(1+x)^{a+1} \geq 1+(a+1)x$

دې وښوول شي

موږ. بېرته له ښۍ لورې پيل کوو

لاندې کې : Die Voraussetzug= نيونه(فرضيه)

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{a+1} &= (1+x)^a\cdot(1+x)\\
&\geq_{Voraussetzung} (1+ax)\cdot(1+x)\\
&= 1+x+ax+ax^2\\
&= 1+(a+1)x+ax^2\\
&\geq 1+(a+1)x
\end{aligned}
$$

د پوره اندکشن سره نور د ښوولو فرمولونه

$(1+x)^a \geq 1+ax \quad \forall x \geq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړيو n طبيعي اعدادو مجموعه:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

د يوه کرښيز مساواتسيستم جوړښت

يو کرښيز مساواتسيستم د يو کرښيزو مساواتو تعداد څخه جوړ دی. دا مساوات نامعلومې خوندي لري، هم داسې په نامه واريابلې (اووښتونې يا متحولې). نامعلومې د ضريبونو سره ضربيږي. که د نامعلومي ضريب 0 - وي يعنې باور ولري: $0 \cdot x_k$ (دلته x_k نامعلومه ده) – نو دا ډول نامعلومه په مساواتو کې هم پرئښوول کيږي يعنې نه ليکل کيږي. دا لاندې د يوه کرښيز مساواتسيستم يوه بېلګه ده:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \end{array}$$

او دا ټول a_{ij} عمومي ضريبونه دي او x_j واريابلې يا متحولې يا اووښتونې :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

وکتور $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ کوم چې زيات وخت عمود ليکل کيږي د حل وکتور بلل کئږي.
د يوه مساواتسيستم د ممکنه حلونو ډېرى يا سټ د حلونو ډېرى بلل کيږي:

$$\mathrm{L\ddot{o}s}(A, b) := \{x \in \mathbb{K}^n | Ax = b\}$$

که د حلونو ډېرئ تشه وي، نو د مساواتسيستم ناحلوړ يا نه حل کيدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماتريکسونه:

سړی کړی شي په لږ ځای کې کرښيز مساوات د ماتريکس په ډول وليکي. د مخه له دې چې دا کار کوو بايد ماتريکسونه راوپېژنو يا رامنځ ته کړو.

يو متريکس يو ولاړکوډيز يا ولاړکونجيز جدول دی د m کيلو يا ليکو او n درځونو يا متېو يا ولاړو ليکو سره.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

د ماتريکس ليکنډول mxn - ماتريکس

سړی کړی شي د ماتريکسونو يوګونې کرښې رادباندې وليکي. دا بيا د **ليکو وکتورونه** بلل کيږي. په ټيک دې ترتيب د ولاړو ليکو يا متېو يا **ستنو وکتورونه** هم لاس ته راوړی شوو، که سړی يوګونې متې رادباندې وليکي.

سړی کړی شي ماتريکسونه يو له بل سره جمعه کړي.

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

او سره ضرب کړي-+:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \dots & a_{11} \cdot b_{1m} + \dots + a_{1n} \cdot b_{nm} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \dots & a_{m1} \cdot b_{1m} + \dots + a_{mn} \cdot b_{nm} \end{pmatrix}$$

د ماتريکسونو په جمعه ساده پوهيدل کيدی شي. سړی سره جمعه کوي، جې اړونده کمپوننتونه يو له بل سره حمعه کړي، داسې نتيجه لاس ته راځي. د ماتريکسونو ضرب ستونځمندی. په ضرب کې د لومړۍ ماتريکس ليکه د دويمې ماتريکس د متې سره ضرب کيږي او ورپسې سره جمعه کيږي. او نتيجه يې داسې لاس ته راځي، چې c_{ij} يعنې i–مه ليکه ، j -مه مته کې ضرب د حل ماتريکس چې لاسته راشي، د لومړي ماتريکس د i–مې ليکې د j–مې متې يا ستن د توکو سره ضربوو او له ټولو ضربونو څخه جمعه جوړوو. دا يو ځل بيا ليکو:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

هيله ده، چې په دا موضوع کې به لږه روښنتيا منځ ته راغلې وي. داسې وايو چې سړی دښۍ ديترمينانت مته په $90°$ درجو د ساعت څرخوني (عقربک؟؟)په لور څرخوي، چې د کينې ماتريکس په ليکه پريوځي، يو په بل پراته توکي بيا سره ضربيوي او په دې پسې يې بيا له دې ضربونو جمعه جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د ماتریکس د ضریوني په بندیزونو هم پوهیږو. سړی کړی شي $n \times m$- ماتریکس فقط د $n \times m$ -ماتریکس سره ضرب کړي. دا په دې معنا، چې د کینږ ماتریکس لیکي تیک دومره باید اوږدې وي لکه د ښي ماتریکس متې (درځونه، ستنې) ، پرته له دې ته په لیکه نه ،، پربوځي،، یا سرخوري .

تراسپوني ماتریکس

د یوې ماتریکس ترانپوني ماتریکس داسې لاس ته راوړو، چې لیکې او متې سره بدلې شي. له توکي a_{ij} څخه توکی a_{ji} لاس ته راځي.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

بیلګه:

$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{pmatrix}$$

د مربع ماتریکسونو لپاره دا په همدې معنا دی لکه په ،،دوه – کونجتړې،، (قطر) باندې هندارونه(انعکاس).

سیومتریکي ماتریکسونه

یو ماتریکس تیک هلته سیومتریک دی، چې باور ولري:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

د کربنیزمساوات سیستم ځایسپمابیزه لیکندول

د یوه ماتیریکس په مرسته او کېدی شي کربنیزمساوات انرږي – او ځای سپماییز ولیکو. موږ ته دا بام ودریږي، چې دا نامعلومې تل په هر مساوات کې همهغه دي . نو لکه په ماتریکس ضربوني کې د ماتریکس ضربوني په مرسته دا د مساوات سیستم څخه دباندې راباسو او په دې توګه د ضریبونو(ځلوونو) ماتریکس A لاس ته راوړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A \cdot x = b$

د لیکبنې له مخې دا داسې برېښي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

د ګاوس تلنلار لپاره ، چې لاندې لیکل شوې ده، دا بیا په لنډه توګه تکراروو او $x-$ - وکتور هم لرې بریږدو. له دې سره نوکان او مساوات هم لرې پرېږدو یا نه لیکو او دا ټول په یوه کاستن Kasten, یا کارتون کې لیکو، چې دا لګه چې ګورو، په لاندې توګه لیکل کیږي.

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ \hline \end{array}$$

نا یو ډوله یا اینهوموجینبرابرون

یو کرښیز مساوات سیستم نایوډوله (اینهوموجین) بللکیږي، که که لږ تر لږه د یو b_i لپاره ($1 \leq i \leq n$) باور ولری

$b_i \neq 0$

په ریښتینې توګه دا پهدې معنا دی: پهښی لور صفرماتریکس نه دی ولاړ یا ځای په ځای نه دی.

یو ډوله یا هوموجین Homogen

د دې برعکس یو مساوات سیستم برابرډوله (هوموجین) بلل کیږی، که b صفروکتور وي، دا په دې معنا چې دټول b_i لپاره ($1 \leq i \leq n$) باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$b_i = 0$

دا دا معنا لري، چې په ښې اړخ صفروکتور پروت دی

لیکه- پوړیز بڼه Zeilenstufenform

موږ اوس طبعأ د کرښيز مساواتسیستم د اوبیونې یا حل سره مینه لرو. دا ګاوس الګوریتم چې یوځه کښته راځي، د اوبیونو یا حلونو د پیداکولو لپاره مرسته کوی. دا ماتریکس د ساده لیکه بدلون بڼې ځخه په لیک –پوړې –بڼې باندې اړوي. په لیکبوړیزبڼه کې یو ماتریکس مخ ته لرو، که هغه خورا ټیټه لیکه دا اکثره کینې پراته صفرونه ټولې لیکې خوندي ولري او د کینې پرتو صفرونو تعدا(ګڼون) پورته لور ته کم شي، د کوم سره چې کله کله یې له لیکې و لیکې ته یو ځل برابر باتې کیږی. لاندې ماتریکس د لیکې- پوړیز- بڼې ماتریکس بیلګه ده

$$\begin{pmatrix} 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \otimes \neq 0 \\ \oslash \neq 0 \text{ oder } 0 \end{matrix}$$

پورته الماني: د ،،یا،، په معنا

جمله :

موږ کړی شو هر ماتریکس په لیکه-پوړیز-بڼه ماتریکس واړوو. داچې د ګاوس تلنلار د دې لپاره یو الګوریم راکوي، چې دا متمین ده او دا جمله ښوول شوې.

د حلونو کریتیریوم

(نخښې، چې د دوه یا زیاتو شیانو یا کسانو ترمنځ پرې پرېکړه کیږي)

د دې لپاره چې د کرښیزمساتسیستم د حلونو تعداد وټاکلی شو، د حلونو کریتیرین یا نځښې(توپیرنخښې) شتون لري..

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرېدوله یا هموجین مساواتسیستم کړی شي یا ساده حل ولري او یا ډېر حلونه ولري.

ساده حل:

ساده حل يې صفروکتور دی، دا په دې معنا، چې ټول مساوات ټیک هلته پوره کيږي، که ټولې واریابلې(متحولې یا اووښتونې) صفر کېښوول شي.

دا حالت هلته رامنځ ته کیږی، چې که برابرېدوله مساوات سیستم په داسې لیکه-بوړیز-بڼه و اړولی شي، چې په هره لیکه کې له بورته تر کښته یو صفر ځا په ځای وی. او همدومره د ماتریکس متې ولرو لکه لیکې.
د یوه کرښیز مساوات سیستم بیلګه، چې یو د لیکه-پوړی-بڼې ماتریکس سره ، چې ښایي، چې فقط ساده حل شتون لري.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د دې مساواتسیستم د اخرنې لیکې څخه لاس ته راځي $x_3 = 0$. له دویمې لیکې لاس $x_2 = 0$ ته راځي او بالاخره $x_1 = 0$ ، له کومه امله چې موږ د حل په څېر فقط صفروکتور لاس ته راوړو.
د یو هموجین مسواتسیستم سره کړی شو و ازمایو، چې ایا ومتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک ای ا کرښیز بلواک دي. موږ له دې سره وکتورونه په متاریکس کې د متې وکتورونو په څير لیکو. که داسې لاس ته راوړی هموجین کرښیز م ساوات سیستم فقط ساده حلونه لري، ن و وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دی.

زیات حلونه یا اوبیونې:

دا هوموجین کرښیز مساوات سیستم زیات حلونه لري، که خپلواکه متحوله (اووښتونې) شتون ولري.. یوه خپلواکه اووښتونې هغه اووښتونې ده چې مساواتسیستم حل له لارې کره نه وي ټاکل شوي. موږ مړی شو داسې اووښتونې په خپله خوښه وټاکو او همداسې په خوښه زیات حلونه د مساوات سیستم لپاره لاس ته راځي.

دا حلونه یو وکتورفضا غزوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا څنګه پيژنو،چې ايا يو مياواتسيستم خپواکې متځولې لري؟ خپلواکې متحولې ټيک هلته شتون لري، چې په سيستم کې لږ مساوات شتون ولري، نسبت اووبنتونو ته.

بيلګه:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

داسې مساواتسيستمونههم شته، چې په هغې کې داسې نه ده، چې د متحولو څخه دې مساوات لږ وي. په داسې مساواتسيستم کې پيژنو، چې په ليکه پوړيزه کونه کې يوه صفرليکه شتونلري. پههوموجېنګربنيز سيستم کې کېدی شي داسې ليکه له منځه يوسو(پام! داپه ناهموجېن کې مکنه نه ده، ځکهچې دا حقيقت به مو لهمنځهوړی وي، چې کومحل شتون نه لري) . که د دې لهمنځه وړنې سره زياتې متحولې پاتې شي نسبت مساواتو ته ، ن و يو م ساواتسيستم بهولرو د خپلواکو (ازاده)متحولو سره .
که د يوه هوموجين مساوات سيستم د حل سره، په کوم کې چې ماتريکس له متو وکتورونو جوړ دی، چې کربنيز خپلواکوالی يې يو بل ته ازمايل کيږي، لاس ته راشي، نو وکتورونه يو بل ته کربنيز بلواک دي.

انهوموجين مساواتسيستمونه کېدی شي هيڅ حل، ټيک يو حل او يا ريات حلونه ولرودای شي.

هيڅ حل يا نه حل: يو انهوموجين کربنيز سيستم کوم حل نه لري، که د ديوه مساوات ضريبونه صفر وي، او اړونده b_i صفر نه وي..:

يعني

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i \quad b_i \neq 0$$

داسې يو برابرون يا مساوات بنه اړولی بنه بدل .**entartet** بلل کيږي. بنه اړول شوې مساوات نه پوره کيږي او له دې سره تېرلمسوات سيستم نه پوره کېدونکی دی، له کومه کبله چې موږ حل هم نه لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټيک يو حل:

يو انهوموجين مساوات ټيک يو حل لري، که دا اړونده هومجين مساوات سيستم – دا اړونده هوموجين مساوات سيستم جوړ شي، په کومکې چې ټول b_i د صفر سره برابر وليکل شي – فقط ساده حلونه ولري.

د دې لپاره چې حلونه وشميرلی شو، دا انهوموجين کربنيز سيستم د ليکی پوړيزبڼه باندې اړوو، لکه پورته مو چې داسې وکړل، د کوم سره چې موږ b_i ($1 \leq i \leq n$) هم بايد په پام کې ونيسو.

يو ناهوموجين مساوات سيستم کيدی شي د دې لپاره وکارول شي، چې و ازمايي، چې ايا يو وکتور د نورو وکتورونو څخه د کربنيز کمبينېشن په څېر جوړی شي که نه. ټيک هلته يو حل شته، که bد متو يا ستنو وکترونو د کربنيز کمبينېشن څخه جوړولی شي. که داسې يو حل شتون ونه لري، نو نه شي کېدی چې د متو وکترونو څخه کمبينی يا ترکيب کړي. که يو يا حتا زيات حلونه شتون ولري، نو دا په لاندې توگه دي:

زيات حلونه يا اوبيونې:

لکه په کربنيز هوموجېن مساواتسيستم کې ازادې متحولې په ناهوموجېن مساوات سيسم کې هم راپيدا کيږي يا منځ ته ارځي. دا بېرته په هغه وختکې شتون لري، که سړی زاتې متحولې ولري نسبت مساواتو ته. په ناهوموجېن سيستمکې هم سړی کړی شي صفرليکې لرې کړي، چېرته چې $b_i = 0$ هم وي. په هرحالت دا بڼه تغير شوې مساوات له منځه نهشي وړل کېدی.

ديترمينانتونه Determinante :

که د يوه مربع ماتريکس وکتورونه يو بل ته کربنيز بلواک وي، نو ديترمينات 0 دی. په بل حالت کې $\neq 0$. له دې سره د $Ax = b$ لپاره باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\det A \neq 0$ $\Rightarrow$	د هوموجين مساواتسيستم لپاره ساده حل،
$\det A = 0$ $\Rightarrow$	د ناهوموجين مساوات سيستم لپاره حلونه. د ناهوموجين سيستم لپاره حلونه يو حل يا هيڅ حل

رانګ Rang

$$rang(Ab) = rang(A)$$

حل شتون لري. د يوه ناهوموجين سيستم لپاره يو حل شتون لري. د يوه هوموجين سيستم لپاره ساده حل شتون لري.

د حلفضا د ديمنزيون (بعد، پراخيدونی)ټاکل

د يوه هوموجين مساواتسيستم د حلډېريو د د بعد ټاکلو لپاره مور کړی شو د ديمنزيون يا بعد فرمول څخه کار واخلو. دا چې هر ماتريکس A په يوه ټاکلي بنسټ f_A ايندومورفيزم انخوروي د هوموجېن کربنيزمساوات سيستم حلفضا لپاره

$$Lsg(A,0) = Kern(f_A)$$

باور لري او داسي کړس شو د بعد د فرمړل

$$\dim V = \dim(Kern(f)) + \dim(Bild(f)) \Leftrightarrow \text{d}$$

$$\dim(Kern(f)) = \dim V - \dim(Bild(f))$$

سره د حلفضا بعد وټاکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بعد يا پراخيدونی

يا 0 دی : نو بيا تيک ساده حل شتون لري، داسې په نامه صفروکتور.

يا >0 دی : نو په دې حالت کې ازادې اووښتونې(متحولې (شتون لري، بعد لويوالی د متحولو تعداد دی، چې لرو يې:

پوښتنه:

موږ عکس(ځيره) ځنګه ټاکو؟ موږ دلته بايد يوون – واهدوکتورنه په ماتريکونو وځغوو يا راوړو. موږ بای د پسې د بيلد(ځيرې) پراخېدونی وشمېرو، داسې چې په هغې کې بېرته يو کربنيزمساواتسيستم حل کړو. موږ له دې سره يو د شميرنې پانګه لرودی شو. او که اشتباه کړم؟

د ګاوس - تلنلار يا - - قانون Gauss-Verfahren

د ګاوس-قانون د دې لپاره دی، چې يو ماتريکس په ليکه وکتورونو راوړي. د ليکه وکتورونو بدليدنه او ليکه کمون يا تفريق د تر مخه سکالار ضرب په بنسټ د برخه اخستونکو ليکو تر هغې مخ ته بيايي، چې ماتريکس په ليکه پوړيز ماتريکس بدل شي. د ګاوس قانون تل د کترولو دی يا عملي کيدی شي.خو سه له دې هم کېدی شي، چې په قوي ډول ناټيک وي. اوس الګوريموس ،، پروګرامي ،، کوو:

لاندې يا کښته برخه:
د ګاوس قانون د يوه ماتريکس د ليکه پوړيز بڼې باندې اړولو لپاره

- په پيل کې ازمايو، چې اياماتريکس ماتريکس همرا اوس ليکه پوړيز بڼه لري. په بېخي ځانګړې توګه $A=0$ ، يعنې فقط له 0 –نو ځخه جوړ ماتريکس ليکه پوړيزبڼه لري.

- د دې عمل جراکولو له مخه – او نظري په دې مهال هم- کېدی شي او بايد هم ليکې بدلې شي، که دا کار ګټور وي. دا په دې معنا، چې د ليکې د پيوت توکي(Pivotelemente) له پورته بيخې کيڼ تل پسې ښې لور ته لاړ شي. د پيوت توکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه توکي بللکيږي، کوم چې له ښي لورې کتل شوي په يوه ليکه کې لومړی يا په سر کې د 0 سره نابرابر وي.

- د i سره پيل شوې هر ي ليکي لپاره د پورته ليکې د $i = 1$ سره تر د اخرې ليکي پورې لاندې ډول مخ ته ځو:

د هرې ليکي لپاره ، چې وي – ليکه j تل له ليکي i کښته پرته ده - د i ډيرواره له ليکې j ته ور زياتوي يا تر کموي(که غواړی، جمعه کوي يا ترې تفريقوي) ، داسې چې a_{ji} - دلته i اووښتوني يا متحوله د متې يا درڅ ګنه(نمره) په ګوته کوي- 0 شي.

د ګاوس الګوريتموس يوه ليدنه

په لاندې کې Aktuelles ورځنی يا اکتول

لومړی پل يا تلنلار i=1

$$\begin{array}{rcccc} \text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & \uparrow & & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} \text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & \uparrow & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} \text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & \uparrow & & & \end{array}$$

دويمه پل يا تلنه i=2

$$\begin{array}{rcccc} & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & & \uparrow & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & 0 & 0 & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ & & \uparrow & & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم پل یا تلنه i=3

$$\begin{array}{rcccc} & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & 0 & X \\ & & & \uparrow & \end{array}$$

له ماتریکی داسې په لاس راړی لیکه پوړیز بڼه وکتور څخه کېدی شي حلونه (اوبیونې) وشمېرل شي.

دا داسې کوو چې دا مساواتسیستم بېرته په ماتریکس بڼه په یوګونو مساواتو بدل کړو او له لاندې څخه په پیل په اړونده متحولې پسې حل کړو.

کخ دا مساواتسیستم زیات حلونه لرودی شي، نو له دې سره پېژنو، چې متحولې شتون لري، چې د هغو ارزښتونه ه شو ټاکلی. دا نو ازادې متحولې دي.

د ګاوس الګوریتموس ټیکاوی

د دې لپاره چې وښایو چې ګاوس قانون یو کرښیز مساوات سیستم$\overline{A}$ د ټیک همغه یا برابر حلډېری (حلسټ) سره لکه مساواتسیستمA یې چې تولیدوي، باید وښایو، چې لاندې بڼه بدلونونه په حلونو کوم اغیز نه لري.

لومړی: د لیکو بدلونه

دویم : د لیکو صربونه د سره او بالاخره یې د بلې لیکې سره زیاتول یا کمول(جمعه او تفریق)

ښوونه یې:

لومړی : دا ساده دی. د یوه مساولتسیستم د لیکو بدلون په حلونو کوم اغیز نه لري، ځکه چې لړې پرلپسې پروا نه لري..

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم : موږ د مساواتسیستم دوه لیکې ترځېړنې لاندې نیسو، څکه چې بڼه بدلون فقط د دې دوه لیکو په مرسته صورت نیسي. نور و دوه لیکو سره سراوکار نه لرو او د حلونو ډېرۍ تغیر نه خوري:

$$\begin{array}{lccccccc}(1) & a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ (2) & a_{j1}x_1 & + & \cdots & + & a_{jn}x_n & = & b_j\end{array}$$

لومړۍ لیکه د λ سره ضربوو، په مساوات کې تغیر نه راځي، څکه چې سړی λ بیرته لنډولی شي یا کمولی شي یا که غواړۍ اختصار کولی شي:

$$\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n = \lambda \cdot b_i$$

دا(1) اوس د دویمې(2) لیکې سره جمعه کوو، لکه چې ترې لرو

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n + (\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n) = b_j + (\lambda \cdot b_i)$$

پوهیږو چې دلته هم په حل کې کوم تغیر نه راځي، څکه چې مساوات ورسره زیاتوو، چې په دواړو لورو ته راغلی او دواړو لورو ته همغه برخه ورکوو. دا بیرته سره لنډیدی شي او موږ بیرته وتونمساوات لرو.

د حلونو یا اوبیونو نور قوانین

د یوه کرښیزمساواتسیستم د حل لپاره د ګاوس قانون ترڅنګ نور قوانین هم شته. په ښوونځي کې مو د بدلون قوانین وپیژندل. په دې کې یو مساوات د یوې متحولې یا اووښتونې سره حل کیږي او بیایې ارزښت د مساوات سیستم په بل مساوات کې کېښوول کیږي.په همدې ترتیب دې کار ته دوام ورکوو، چې بیداشوط اوښتونې ارزښت د مساوات سیستم په هبل مساوات کز څا په څای کیږي، تر څو چې د ټولو متحولو ارزښتونه پیداشي.که د اووښتون و ارزښتونه په پای کز څا په څاشي او لاس ته راشی ، $0 = 0$ ، نو مساوات سیستم ناپای ډېر حلونه یا اوبیونې لري. که د دې څا په څای کونې وروسته ،، کینې اړخ $\neq$ ښی اړخ،، نو کوم حل شتون نه لري. په ورته توګه دا مساوي ایښونې قانون هم کارول کیږي، د کوم سره چې دوه مساوات د یوهې اووښتونې په لور حل شي او بیا

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابر ولیکل شي.

په پای کې باید وکورو، چې د یوه کرښیزمساوات سیستم ځنګه حلونه لاس ته راړو، که ورته سیستم حل کړ شوی وي:

غواړو د یوه ناهموجین کرښیز مساوات سیستم حلډېری I وټاکو. موږ د هوموجین کرښیز مساوات سیستم حلډېری یا حل سټ H پیژنو. د هوموجین کرښیز مساواتسیستم حلونو ډېری یا سټ H د اړونده تابع د زړي(هستې) Kern سره برابره ده. برسره پردې موږ د ناهوموجین سیستم ټوټه یا برخه حل یا د حل یوه برخه حل v_0 پیژنو.

موږ کړی شو د دې ناهوموجین سیستم حلډېری I پیداکړو، داسې چې

د ناهوموجین سیستم ټولو حلونه v_0 جمعه کوو:

$$I = v_0 + H = \{v_0 + h \;\forall\; h \in H\}$$

د هوموجین کرښیزمساواتسیستم حلونه $Ax = 0$ د کرښیزو توابعو زړی(که غواړی: هسته) دی. موږ کړی شو ، لکه د ماتریکس A سره چې انځور یړي، دا زړی و دې ټوټه – یا برخا حل ته ورزیات یا ور جمعه کړو. دا ځانله (تنها) د ناهوموجین مسوات سیستم سره نه کوو بلکه د هوموجین مساوات سیستم سره هم همداسې مخ ته ځو.

$$Lsg(A, 0) = v_0 + Kern(A)$$

د هوجین مساواتسیستم ته تل یو ساده حل0 شتون ري، له دې سره لرو

$$Lsg(A, 0) = 0 + Kern(A) = Kern(A)$$

موږ د ناهوموجین مساواتسیستم دوه حلونه لرو. له دې دوه وو څخه یو حل د هوموجین مساوات سیستم لپاره جوړولی شو، داسې دواړه حلونه یو بل کم یا تفریق کړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{c|l} & A\cdot X_1=b \\ - & A\cdot X_2=b \\ \hline = & A\cdot(X_1-X_2)=0 \end{array}$$

ورته والي - یامشابهت اړیکې **Äquivalenzrelationen**

په A یوه اړیکه~ ټیک هلته ورته بللکیږی، که د ټول $a,b,c\in A$ لپاره باور ولري

لومړی : $a\sim a$ یا $(a,a)\in\sim$ انهکاس یا هندارون اړیکې یا (Reflexiv)

دویم : که $a\sim b$، نو $b\sim a$ یا که $(a,b)\in\sim$، نو $(b,a)\in\sim$ سیومتریک اړیکې (Symmetrisch)

دریم : که $a\sim b$ او $b\sim c$ ، نو $a\sim c$ یا که $(a,b),(b,c)\in\sim$، نو $(a,c)\in\sim$ ترانسیتیو اړیکې (Transitiv)

ورته اړیکې یوه ډېرۍ(سټ) په،، ورته ټولګیو،، ویشي.

ډېری یا سټ له ترنو یا عملیو سره

د ښوونځي او هم د شمېرپوهنې په ورځني ژوند کې له دې سره بلد یو، چې له کومو سره ترمونه ساده کېدی شي. دا زیات وخت ډېره مرسته کوي. د بېلګې په توګه د دېستزیبوتیو قانون په مرسته لاندې ترم خورا زر ګڼلی شو، لکه بې له دې قانون.

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{13}{2}\right)\cdot\frac{8}{13}=\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{13}+\frac{13}{2}\cdot\frac{8}{13}=\frac{1}{13}+4=4\frac{1}{13}$$

د بینوم لومړۍ جملې هم د دیستریبوتیو قانون ډېر واره استعمالول دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)\cdot a+(a+b)\cdot b = a\cdot a+b\cdot a+a\cdot b+b\cdot b = \\ = a^2+2ab+b^2$$

په لاندې برخه کې اوس   شمېرنې نور قوانین ، چې د اکسیومونه بلل کیږي و تعریفو. دا قوانین د ډېریو لپاره صدق کوي د اړونده ترنو سره. زیات وخت پوښتنې رامنځ ته کیږي، چې دا ااکسیومونه له کومه راځي. اکسیومونه خویونه ل ري، چې دا په ساده توګه تعریفیږي، بې له ثبوته. طبعأ دا په خوښه نه ټاکل کیږي. مګر په لومړي سر کې یا د پیل زده کوونکو لپاره په دې بسیا کوو، چې دا دې شتون ولري.

لاندې برخه (که ټوټه برخه یا کښته برخه):

Unterabschnitte

موږ او یو په بل پسې یوګوني تعریفونه ورکوو. له دې سره پورته و کښته لور ته تل زیات امسیمونه باور لري. د بیلګې په توګه تنونه یا اجسام له دوه کموتاتیو ګروپونو منځ ته راځي، یو ځل نسبت جمعې یا زیاتون + ته او یوځل نسبت و ضرب ۰ یا ⁎ ته او دې سره اړونده دیستریبوتیو قانون څخه یو ځای یا په ګډه، یعنې بدن یا تن یا جسم له ګروپ څخه زیات دی.

ګروپ

یوه حوږه یا یو ګون $(G,+)$ ، چې G یوه ډېری ده او $+$ یوه ترنه یا عملیه ده،

$$+ : G \times G \to G$$

ګروپ بللکیږی، که لاندې اکسیومونه پوره وی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

G1 : $(a+b)+c=a+(b+c)\forall\ a,b,c\in G$ اسوښیاتیو قانون.

G2 : یو $e\in G$ (ناپیلی توکی) شتون لري چې د $\forall\ a\in G$ لپاره لاندې خویونه پوره کوي:

لومړی: $e+a=a$

دویم : د هر $a\in G$ لپاره یو $a'\in G$ شتون لري (په څټ یا برعکس توکی) د $a'+a=e$ سره

د ابل - یا کموتاتیو ګروپ **Abelsche / kommutative Gruppe**

یو ګروپ د ابل ګروپ بلل کیږي، که د د ګروپ د اکسیومونو **G1** او **G2** برسېره دا $a+b=b+a$ هم $\forall\ a,b\in G$ باور ولري (کموتاتیو قانون) *(Kommutativgesetz)*.

کړۍ Ring

یو ګون $(R,+,*)$ ، چېرته چې R یوه ډېرۍ او $+,*$ دوه تړونونه یا عملیې دي د لاندې سره

$$+:R\times R\to R \qquad *:R\times R\to R,$$

کړۍ یا رینګ بلل کیږي، که لاندې اکسیومونه پوره وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

R1 : د + سره یو ځای کموتاتیو ګروپ (اسوشاتیوۀ ناپیلی توکی، په ځېټ یا برعکس توکی دی.

R2 : $(a*b)*c = a*(b*c) \forall \ a,b,c \in R$ (د * لپاره اسوشاتیو دی.

R3 : دېستربوتیو قانون باور لري:

(a) $\forall \ a,b,c \in R : (a+b)*c = a*c + b*c$

(b) $\forall \ a,b,c \in R : a*(b+c) = a*b + a*c$

کړۍ د یوي توکي (واحد توکي) سره Ring mit Einselement

$(R,+,*)$ یوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$\exists 1 \in R$ (ناپیلی توکی یا یوې توکی د ترڼې لپاره) د هغه لپاره چې باور لري:

$1*a = a$

کموتاتیو کړۍ:Kommutativer Ring

$(R,+,*)$ یوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$\forall \ a,b \in R : a*b = b*a$ (د * لپاره کموتاتیو قانون)

کموتاتیو کړۍ د یوی توکي (واحد عنصر) سره

کړۍ، په کومو کې چې کموتاتیو قانون باور لري او دا هم یو یویتوکی ولري، یعني د دوه پورته اکسیومونو سره، کموتاتیو کړۍ د یویتوکي سره بللکیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدن یا تن یا پټی Field Körper

یو ارزښت نظم یا توپل $(K, +, *)$ یو تن دی، که باور ولري

K1 : د کموتاتیو کړۍ اکسیومونه د یو یتوکي سره باور لري.

K2: $\forall a \in K \exists a^{-1}$، داسې چې $a * a^{-1} = 1$ باور لري (د ترنې $*$لپاره په څټ یا برعکس توکی)

پولینوم کړی Polynomring

$\mathbb{K}$ دې یو تن وي. د $\mathbb{K}_n[t]$ ډېری د لاندې بڼې پولینومونو څخه جوړه ده

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

د کومو سره $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ، t یوه اووښتونې(متحوله) او n د پولینوم درجه بللکیږي. د پولینومونو دا ډېری یو کموتاتیو کړۍ ده. د یوه پلینوم Pخورا جګ ضریب(څلوونی) - په پورتنی بېلګه کې یعنې n ، چې باید $a_n \neq 0$ وي - د پولینوم درجه بللکیږي. که دا 0 وي، یعنې د ټولو i لپاره $a_i = 0$ ، نو دا پولینوم صفر پولینوم بلل کیږي. د صفرپلینوم درجه ناپای ده:

$$\deg P := \begin{cases} \infty & \text{falls } P = 0 \\ n & \max\ (i \text{ für das gilt } a_i \neq 0) \end{cases}$$

پاتې ټولګي یا باقي ټولګي Restklassen

اوس غواړم د بدن لپاره یوه بله بېلګه درو پېژنم یا معرفي کړم، د لومړنیو ګڼونو پاتې ټولګي. د لومړنیو ګڼونو پاتې ټولګي کېدی شي بدنونه شي، داسې چې په هغو کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمعه(زياتون) او ضرب(ځل) تعريف شي. داسې تنونه $\mathbb{F}_p$ بللکيږي يعنې د بېلګې په توګه $\mathbb{F}_7$ د پاتېتولګې 7 لپاره. په روڅني ژوند کې د پاتې تولګي سره ډېر شمېرل کيږي، د بېلګې په توګه د ليکنيزې جمعې سره 2.2 :

$$\begin{array}{r} 8 \\ + \quad {}_1\, 9 \\ \hline 1\ \ 7 \end{array}$$

موږ 8 او 9 د7 سره جمعه کړل چې چېرته موهغه لاس ته راغلی زيات هېر کړی نه دی. موږ اوس کړی شو چې هغه زيات يا لاس ته راغلی پرېږدو او وليکو

$$8 \bmod 10 + 9 \bmod 10 \equiv 7 \bmod 10$$

چېرته چې ،، mod ،، مودولو**modulo** په معنا دی، يعنې د وېش پاتې يا باقي.

په ورته توګه نور پاتې ټولګي هم تعريفولی شو. د دې په ځايچې په 10 يې ووېشو په 3 يې وېشو.

$$\begin{array}{r} 3 \\ + \quad {}_1\, 2 \\ \hline 1\ \ 2 \end{array}$$

د دې لپاره کړی شو، چې يو د جمعې او ضرب جدول جوړ کړو:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

په همدې توګه دا کار بيا کړو، دا وار د پاتې ټولګې 4 لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

اوس کړی شو د بدن اکسیومونه په یوګوني ډول په هغو پاتې ټولګیو پورې اړونده بدن بانديې د جدول ارزښتونو په مرسته و ازمایو. کموتاتیو قانون باور لري، که جدول په دوه -کونجتړې(قطر) باندې هنداروِن یا انعکاس سیومتریک وي. په ځټ یا معکوس توکی شتون لري، که د جدول په هره لیکه او هره متړه کې د بدن هر توکی یوځل منځ ته راشي یا شتون ولري. صفرتوکی شتون لري، که   په هره لیکه او هره متړه کې منځ ته راشي یا شتون ولري. اسوځیاتیو او دېستریبوتیو قوانین له جدول ځخه په ساده توګه نه شي لوستل کېدی.

وروسته له دې چی دا نښلونټکي(د نښلونو ټکي) لرو، پېژنو، چې بدن $\mathbb{F}_4$ شتون نه لري. دا د ضرب د معکوس توکی قانون په خلاف دی.   داسې x نه شته چې $2 \cdot x = 1$ باوري کړي

یعنې د 4 پاتې ټولګي ځخه بدن   نه شي جوړېدلای. برعکس یو بدن $\mathbb{F}_3$ له پاتې ټولګي 3 خځخه ممکن دی، ځکه چې هېڅ اکسیوم نه زیانمن یا زخمي کیږي: ګورو چې سیمتریک، برعکس او ناپیلی توکي شتون لري . همداسې د نږدې پسې ازمایلو ځخه ګورو چې اسوځیاتیو او دېستریبوتیو قوانین هم باوري دي.

که نور هم ځیرنه ژوره کړو، نو په دې کې یو سیستم ګورو،   چې کله یو پاتې ټولګی p یو بدن $\mathbb{F}_p$ کیږي. دا حالت ټیک هلته رامنځ ته کیږي، چې p یو لومړنی ګڼ(عدد) وي. دا ثبوت دلته نه راوړو.

مګر غواړو چې په پای تعریف کړو، چې یو کرکتریستیک (خوی ټاکونی) ځه شی دی او ولې د یوه په خوښه بدن $\mathbb{K}$کرکتریستیک تل یو لومړنی ګڼ او یا 0 دی:

پیژند(تعریف):

$\mathbb{K}$ دې یو ردن وي او 1 د ضرب یو ناپیلی توکی(یوونتوکی، عنصر واحد) وي. د یوه زیاتیز یا مثبت عدد n لپاره د $n \cdot 1$ لاندې پو هیږو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}}.$$

د بدن $\mathbb{K}$ کرکتریستیک په لاندې توګه تعریف دی

$\mathrm{char}\mathbb{K} = \begin{cases} 0 \\ n \end{cases}$	که n>0 شتون ونه لري، چې n.1=0 باور ولري که n شتون ونه لري، چې باور ولر n1=0

ښوونه: n تل یو لومړنی ګڼ دی:

وي دې $n \neq 0$ (د تعریف دویم حالت). که n لومړنی عدد نه وی، نو دا په لاندې ضقیبونو ټوټه کیږی [2.3] .

$$\begin{aligned} & n1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (n_1 \cdot n_2)1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n_1 1 \cdot n_2 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n_1 1 = 0 \wedge n_2 1 = 0 \end{aligned}$$

دا تضاد دی. څکه چې $n_1 < n$ او $n_2 < n$ باید کرکتریستیک $\mathbb{K} = n_1$ char اویا $\mathbb{K} = n_2$ char کرکتریستیک وي. دی char $\mathbb{K}$ = n او له دې سره n په ضریبونو نه شي ټوټه (تجزیه) کېدی، نو له دې امله یو لومړنی عدد دی.

موږ د ښوونځي څخه غوره بدنونه پیژنو، لکه د هوښیار اعدادو(کسري-) $\mathbb{Q}$ ، د ریل یا حقیقی اعداد $\mathbb{R}$ بدنونه او وروسي د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ بدنونه هم. دا ټول زدنونه کرکتریستیک 0 لري. نور د اعدادو غوره ډېری هم شته لکه د ټول ګڼونو (- اعدادو) ډېری. دا فقط یو کموتاتیو ګروپ جوړوي، څکه چې په نسبت و ضرب ته معکوس توکی نه لری. دا له دې امله داسې ده،چې موږ په دې عددونو کې ماتونه(کسرونه) نه لرو. د ټولو طبیعي اعدادو $\mathbb{N}$ ډېری چې 0 ورسره تړلی دی او یا نه،

(c) ketabton.com: The Digital Library

متأسفانه چې حتا یو ګروپ هم نه دی، ځکه چې د جمعي معکوس توکي نه لرو، د بېلګې په توګه د $3+x=1$ لپاره x شتون نه لری، ځکه چې $x=-2$ شتون نه لري.

وکتور فضا der Vektorraum

لاندې برخه

کرښیزبلواکوالی (خطي تابعیت)

یادونه (ژباړې): ګ‍,رو چې دلته مو تابع کلیمه، چې د فنکشن لپاره کارول کیږي، ناټیکاوي ته لاربنودوي. دلته د بلواکوالي یا تابعیت څخه موخه فنکشن نه دی. پای.

یو د وکتورونو $(v_1,\ldots,v_n)$ کورنۍ کېدی شي کرښیز بلواکه یا کرښیز خپلواکه وي، نه دواړه یو ځای کېدی شي او هم نه له دوه څخه یوه هم نه . یوه کورنۍ هغه ډېرۍ ده، چې یو توکی په کې دوه ځله هم راتلی شي. پس موږ په خوښه وکتورونه لرو- په کوم کې چې همغه وکتور ختی دوه ځله راتلی شي- کوم چې موږ داپه خپلو اړیکو کې یو له بل سره ځېړو.

کرښیز خپلواکوالی

V دې یو $\mathbb{K}-$ -وکتورفضا وي. یوه د وکتورونو $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ پای کورنۍ له V څخه کرښیز خپلواک بلل کیږی، که له $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{K}$

$$\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_nv_n=0$$

څخه لاس ته راشي، چې $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې صفر وکتور د نورو وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_n$ څخه ساده ترکیب کیدی شي

کرښيز بلواکوالی:

V دې بیا هم یو $\mathbb{K}-$ -وکتورفضا وی. یوه د وکتورونو $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ پای کورنۍ له V څخه کرښیز بلواک بلل کیږی، که له $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لاس ته راشي، چې هم ساده حل $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ شته ، او هم یو حل له کوم سره چې لږ تر لږه یو $(1 \leq i \leq n)\, \lambda_i \neq 0$ دی.

دا په دې معنا دی، چې موږ صفروکتورونه د ساده حلونو یا اوبیونو څخه په بل ډول هم د وکترونو د کورنې څخه جوړولی شو

د وکتور فضا تعریف:

اوس د وکتورفضا تعریف ته راځو:

$\mathbb{K}$ دې یو بدنوي. یودرېګون $(V, +, *)$ چې V یوه n-ګون

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $+$ او $*$ ترني یا عملیې وي

$$\begin{aligned} + &: V \times V \to V \\ * &: \mathbb{K} * V \to V \end{aligned}$$

$\mathbb{K}$ -وکتور فضا بلل کیږي، که لاندې اکسیونونه باور ولري:

$(V,+)$ یو کموتاتیو ګروپ دی.

S1 : $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v$ (آسوځیاتیو قانون)

S2 : $1 \in \mathbb{K} : \forall\ v \in V : 1 * v = v$ (ناپیلی توکی)

D1 : $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v$ (دیستریبوتیو قانون)

D2 : $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in V$ باور لري $\lambda * (v + w) = \lambda * v + \mu * w$ (دېتریبوتیو قانون)

د یوه وکتور فضا جوړونه یا که غواړی تولید Erzeugen eines Vektorraums

اوس غواړو $n-$ ګونی 3.1 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، چې دوکتورفضا د تولید لپاره اړتی ورته لرو تولید کړو. دا کړی شو که موږ دا ټول ولیکو . دا د ډېرو کمو وکتورونو لپاره هم موخه ور دی. مګر د زیاتو وکتورفضاو لپاره دا نا ممکن دی، څکه چې موږ ناپای ډېر ګونونه لرو. موږ باید دا د یوه شمېرقانون سره تولید کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کربنیز ترکیبوالی

وي دي $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ په $\mathbb{K}-$ -وکتور فضا کې یوه د وکتورونو کورنۍ. هر د $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K})$ بڼې

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

وکتور v د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ کربنیز ترکیب بلل کیږي.
اوس ، د کلمو،، کربنیز خپل(بل)واک،، او د ،،کربنیز ترکیب،، ترمنځ یو څو ښوونې یا ثبوتونه راړل کیږي. د دې ښوونو لاس ته راوړنې به شاید د ډېرو زده کړو په غوښنه او وینو ته تللي وي. تاسو پوهیږئ چې دا داسې دی. خو بیا هم موږ باید دا یو ځل وښایو:

جمله ؛

که د کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه یو بل ته کربنیزخپلواک وي، نو کېدی شي هر وکتور $v \in L(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د دوی له لارې په یوه ټاکلې لار ترکیب شي. له

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \qquad v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n$$

څخه لاس ته راځي

$$\lambda_1 = \mu_1; \;\; \lambda_2 = \mu_2; \;\; \lambda_n = \mu_n$$

ښوونه:

$$\begin{aligned} & v = v \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad & (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0 \end{aligned}$$

د کربنیزخپلواکوالي له امله باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda_1 - \mu 1 = 0;\ \ \lambda_2 - \mu_2 = 0;\ \ldots\ \lambda_n - \mu_n = 0$$
$$\Rightarrow\ \ \lambda_1 = \mu 1;\ \ \lambda_2 = \mu_2;\ \ldots\ \lambda_n = \mu_n$$

له دې سره کېدی شي وکتور ټیک په یوه ډول ترکیب شي.

برعکس یا په څېړ کیدی شي وښوول شي:

جمله :

که چیرې یو وکتور v ټیک په یوه ډول له وکتورکورنیو $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ څخه د کرښیز ترکیب کیدی شي، نو نو د دې کورنی وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

ټیک په یوه ډول تکیبوړ په دې معنا دی، چې که

$$\begin{aligned} & v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \\ \text{und}\quad & v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \end{aligned}$$

باور ولري، $\lambda_1 = \mu_i$ باور لري او له دې سره $\lambda_i - \mu_i = 0$

$$\begin{aligned} & v = v \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \\ \Leftrightarrow\quad & (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0 \end{aligned}$$

داچې $\lambda_i - \mu_i = 0$ د $1 \le i \le n$ لپاره د کورنې وکتورونه کرښیز خپلواک دي.

جمله:

که د یوې کورنې $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه کرښیز بلواک وي، نو له یوه څخه زیات امکانات شته چې وکتور v ترکیب کړو. کرښیز بلواک په دې معنا دی، چې لږ ترلږه یوه v_i لپاره $(1 \le i \le n)$ باور ولري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه:

که موږ وکتور v ولرو، کړی شو دا په لاندې ډول ترکیب کړو:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

له دې ځخه لاس ته راځي $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. اوس کړی شو دا پورته یادشوی کرښیز ترکیب د v_i لپاره ځای په ځای کړو او لاس ته راوړو

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \\ &\quad \lambda_i \cdot (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n) \\ &\quad + \ldots + \lambda_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad v &= (1+\lambda_i)\lambda_1 v_1 + \ldots + (1+\lambda_i)\lambda_n v_n \end{aligned}$$

نو $(1+\lambda_i)\lambda_1, \ldots, (1+\lambda_i)\lambda_n$ یو نوی امکان دی چې v ترکیب کړو او د دې سره همدا اوس دوه امکانات لرو

موږ کړی شو چې لاندې دوه واقعیتونه هم ثبوت کړو:

جمله :

که یو وکتور v_i د کورنی $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ کرښیز د کورنۍ $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ ځخه نه شي ترکیبېدی، نو د کورنی $(v_1, \ldots, v_n)$ وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

ښوونه:

نیسو چې دا کرښیز بلواک دي. داپه دې معنا، چې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لپاره لږ ت ر لږه د يوه λ_i لپاره $(1 \le i \le n)$ باور لري

$$\lambda_i \neq 0$$

دا په دې معنا چې

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n = -\lambda_i v_i$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_1}{-\lambda_i} v_1 + \ldots + \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i} v_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i} v_{i+1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{-\lambda_i} v_n = v_i$$

نو کېدی شي، چې v_i له $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ کرښيزه ترکيب کړاي شي. دا نيونې ته تضاد دی. نو بايد وکتورونه کرښيز خپلواک وي.

په همدې توګه برعکس ی په ښتې هم باور لري:

جمله:

که د کورنی $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک وي، نو کوم يو وکتور د بل ځخه کرښيز ترکيب کېدی نه شي.

ښوونه:

نيسو، چې دا شونی دی، يو وکتور v_i $(1 \le i \le n)$ کېدی شي کرښيز ترکيب کړاي شی. نو باور لري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو، چې $\lambda_i \neq 0$ دی، څکه چې $\lambda_i = -1$. او د کورنۍ وکتورونه به کرښیز بلواک وی. تضاد. بو دا ممکن نه ده، چې له دې وکتورونو څخه کوم یو له بل څخه کرښیز ترکیب کړي، څکه چې بیا به کرښیز خپلواکوالی زخمي شوی یا زیانمن شوی وي.

سپاین یا کرښیزه **Spann**،((کرښیزه) رابنده ورشو)**Abschluss، lineare Hülle**

په یوه $\mathbb{K}-$ - وکتورفضا کې د یوې کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د ټولو کرښیز ترکیبونو ډېرۍ سپاین یا کرښیزه رابنده ورشو بلل کیږي

$span(v_1, \ldots, v_n)$

یا د وکتورونو د کورنۍ کرښیزه (که غواړۍ) سمڅه(**Hülle**)

روښانه دې وي: د یوه سپاین وکتورونه ناجبري کرښیز خپلواک نه دي.

جوړښتسیستم (تولیدي سیستم) **Erzeugendensystem**

د وکتورکورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د وکتور فضا V تولیدی سیستم بلل کیږی، که باور ولري

$$V = span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

داپه دې معنا چې وکتورونه د وکتور فضا V مکمله یا پوره غزوي.

دلته کېدی شي، چې د وکتورونو کورنۍ کرښیز بلواک یا کرښیز خپلواک وی. دا یواځې باید وکتور فضا و غزوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټ Basis

د وکتورونو $(v_1, \ldots, v_n)$ کورنی د وکتور V بنسټ بلل کیږي، که د کورنی یوګوني وکتورونه

- یو بل ته کرښیز خپلواک دي

- او که د وکتورونو کورنی ټول وکتور V وغزوي، یعني د V یو تولیدي(جوړختيز) سیستم دی:

$$V = span(v_1, \ldots, v_n)$$

او

$$\text{und} \quad \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

له دې سره یو تولیدي سیستم ټیک هلته یو بنسټ دی، چې د دې تولیدي سیستم وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

د شتاینیځ بدلونجمله Austauschsatz von Steinnitz

جمله:

په یوه د $\mathbb{K}-$ - وکتورونو کورنی(که فضا) V کې دې یو بنسټ

$$B := \{v_1, \ldots, v_r\}$$

او یوه کرښیز ځپلواکه کورنې

$$(w_1, \ldots, w_n)$$

ورکړ شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی $r \geq n$. سړی کړی شي د بنسټ n وکتورونه د nکربشیز خپلواکو کتورونو کورنیو سره بدل کړای شي، داسې چې نوی بنسټB^* بېرته کربشیز خپلواک دی او د وکتورفضا V_K بنسټ دی. د ايدنکس د ګڼې بدلون وروسته کېدی شي داسې ولیکو:

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r\}$$

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r\}$$

يا په ځانکړي حالت $n = r$:

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n\}$$

ښوونه:

ښوونه د بدلون لیما سره صورت نیسي. دا دبدلون لېما) وړه چمله) د د بنټ څخه یو وکتور اخلي او یو بل ورزیاتوي:

بدلون جمله ګی **Austauschlemma**

یو $K-$ -وکتورفضا V دې د بنسټ

$$B := \{v_1, \ldots, v_r\}$$

سره ورکړ شوې وي او يوه w د

$$w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \underline{\underline{\lambda_k v_k}} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r \in V$$

د $(\star) \quad \lambda_k \neq 0$ سره او

$$\lambda_k \neq 0.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو

$$B' := \{v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_r\}$$

بېرته یود V بنسټ دی .

یعنې سږی کړی شي v_k د w وکتور سره بدل کړي. (دا نور $\lambda_1 \dots \lambda_r$ بې له λ_k باید حتمأ 0 نه وي.، مګر دوی کړی شي).

د بدلون جملې ښوونه **Beweis des Austauschlemmas** :

د لیکنې د ساده کونې لپاره نیسو، چې $k = 1$ دی. موږ ښایو چې

$$B' := \{w, v_2, \dots, v_r\}$$

هم د V_K بنسټ دی.

- د بنسټ 3.2 ټول وکتورونه $v \in V$ د کربنیزترکیب په څېر لیکل کېدی شي یعنې

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r \quad (\star\star)$$

داچې $\lambda_1 \neq 0$ دي، کړی شو په لاندې ډول یې بنهبدل کړو

$$\begin{aligned} & w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \qquad (von\ \star) \\ \Leftrightarrow\ & \lambda_1 v_1 = w - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_r v_r \\ \Leftrightarrow\ & v_1 = \tfrac{w}{\lambda_1} - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \tfrac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r \end{aligned}$$

- اوس کړی شو دا په $\star\star$ کې ځای په ځای کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} v &= \mu_1\left(\frac{w}{\lambda_1}-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2-\ldots-\frac{\lambda_r}{\lambda_1}v_r\right)+\ldots+\mu_r v_r \\ &= \mu_1\frac{w}{\lambda_1}-\mu_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2-\ldots-\mu_1\frac{\lambda_r}{\lambda_1}v_r+\ldots+\mu_r v_r \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1}w+\left(\mu_2-\mu_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)v_2+\left(\mu_3-\mu_1\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)v_3+\ldots+\left(\mu_r-\mu_1\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)v_r \end{aligned}$$

له دې لاس ته راځي، چې نوی بنسټ لږ تر لږه یو تولیدي سیستم دی.

- اوس پاتې دادی چې کربنیز خپلواکوالی و ښایو

$$\mu w+\mu_2 v_2+\ldots+\mu_r v_r=0$$

د $\star$ ځا ي په ځای کونه:

$$\begin{aligned} & \mu(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_r v_r)+\mu_2 v_2+\ldots+\mu_r v_r=0 \\ \Leftrightarrow\quad & \mu\lambda_1 v_1+(\mu\lambda_2+\mu_2)v_2+(\mu\lambda_3+\mu_3)v_3+\ldots+(\mu\lambda_r+\mu_r)v_r=0 \end{aligned}$$

نو $\mu\lambda_1=\mu\lambda_2+\mu_2=\mu\lambda_3+\mu_3=\ldots=\mu\lambda_r+\mu_r=0$ ، ځکه چې B کربنیزخپلواکه وه ($\mu_2=\mu_3=\ldots=\mu_r=0$) او $\mu=0$ ، ځکه چې $\lambda_1\neq 0$.

له دې ځخه کربنیز خپلواکوالی لاس ته راځي

د بدلون جملې ښوونه:

له دې وروستهچې ومو ښوول، چې سړی یو وکتور v_k له بنسټ ځخه را اخستی شي او د وکتور wسره یې بدلولی شي، که دا اړونده $\lambda_k\neq 0$ وي(کړی شي، چې د نمرې یا ګڼې بڼلون سره اِه تېیک ځای ته راوړل شي)، باید وښایو، چې د زاړه بنسټ لپاره تل داسې یوه $\lambda_k\neq 0$ شتون لري، داسې چې موږ وکتورونه پرلپسې سره بدلولی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که صفر وکتورونه سره بدل کړو، نو ښوونې ته نه اړکيږو. موږ اړيين نه يو چې کوم وکتور پيدا کړو، چې له هغو سره بنسټ وکتور بدل کړو. دا زموږ د ايندکشن پيل دی.

- زموږ د ايندکشن نيونه ده، چې k وکتورونه مو سره بدل کړي دي او بيرته مو يو بنسټ لاس ته راوړی دی:

$$B' = \{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_r\}$$

- د ايندکشن پای :

که موږ وکتور w_{k+1} بدل کړو، نو بايد يو λ_i د $k+1 \leq i \leq r$ سره پيداکړو، د کوم لپاره چې $\lambda_i \neq 0$ باور لري. باور لري :

$$w_{k+1} = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + \underbrace{\lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r}_{\text{mindestens ein } \lambda_i \neq 0}$$

دا پورته لړ تر لږه يوه $\lambda_i \neq 0$.

دا چې کرښيزخپلواکه کورنۍ $(w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots)$ کرښيز خپلواکه وه، اجازه نه شته چې $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k \neq 0$ وي، ځکه چې پرته له دې کرښيز خپلواکوالی زخمي شوی وي.

داچې w_{k+1} هم صفر وکتور نه دی، ځکه چې بيا به کرښيز خپلواکوالی زخمي شوی وي، نو يو λ_i ($k+1 \leq i \leq r$) شتون لري د $\lambda_i = 0$ سره.

د ښوونې ځخه لاس ته راوړنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که یو $K-$ - وکتورفضا V یو پای بنسټ ولري، نو د V هر بنسټ پای دی.
- د یوې وکتورفصا هر دوه بنسټونه برابر اوږدوالی لري.
- بنسټ پوره کېدنه:

په یوه پای تولېدکېدونکي وکتور فضا Vکې دې کربنیز خپلواک وکتورونه $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ورکړل شوي وي. نو کېدی شي سرې پیدا کړي، داسې چې

$$B := \{w_1, w_2, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_r\}$$

د V یو بنسټ وي.

- $v_i, \ldots, v_n$ دې د کربنیز خپلواک وکتورونو ډېرۍ وي، چې یوه وکتور فضا غزوي، نو د $v_i, \ldots, v_{n+1}$ ډېرۍ په هر حالت کربنیز بلواک ده.

دا په دې معنا چې بل وکتور نه شي پیداکېدی چې و $v_i, \ldots, v_n$ ته کربنیز خپلواک وي.

- د بنسټ بدلید جمله:

$v_i, \ldots, v_n$ دې کربنیز خپلواک وکتورونه وي، چې یوه وکتور فضا غزوي(دا په دې معنا چې دا یو بنسټ دی)، نو $w_i, \ldots, w_n$ کربنیز خپلواک وکتورونه ، چې د وکتورونو$v_i, \ldots, v_n$ د کربنز ترکیب څخه جوړیدی شي، برابره وکتورفضا غزوي.

بعد یا پراخېدونی(Dimension)

که Vیوه $K-$ - وکتور فضا وي، نو تعریفوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$dim_k V = \begin{cases} \infty \\ r \end{cases}$	که V پای بنسټ ونه ري، کهV د r اوږدوالي بنسټ ولري

د پراخېدوني یا بعد جمله:

وي دې $f : V \to W$ (V, W دلته $\mathbb{K}-$ -وکتورفضاوې دي) یو کرښیزبلواک. نو د بعد یاپراخېدوني جمله باور لري:

$$dim\ V = dim\ Bild(f) + dim\ Ker(f)$$

Bildځیره او Ker(Kern) زړی یا هسته

ښوونه :

یادونه:

$dimV$: دV د بنسټ وکتورونو ګڼون یا تعداد.

$dim\ Bild(f)$: د وکتورونو ګڼون یا تعداد د V د لاندې وکتورفضا (Bild (f کې.

$dim\ Ker(f)$: د f په زړي(هسته) کې د وکتورونو ګڼون یا تعداد. دا بېرته د V لاندې وکتورفضا ده.

لومړی: دا چې زړی (Ker (f د V لاندېوکتورفضا ده، په هر حالت لرو

$$dimV \geq dim\ Ker(f).$$

د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ د زړي د بنسټونو وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

د بنسټتکیلېدوجملې په بنسټ کېدی شي دې بنسټ ته کرښیز خپلواک وکتورنه V ته ورزیات کړي او دا بنسټ په دې توګه د V یوه بنسټ ته پوره یا تکمیل کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B_V := \{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots v_k\}.$$

لومړی: موږ اوس پرېږدو چې تابع f د وکتورفضا V په بنسټ وڅغلي. نو لاس ته راوړو:

$$Bild(f) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)}_{=0} + \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i)$$

د زړي بنسټوکتورونه په 0 تنظیمیږي یا څېره کیږي . له دې امله د څېرې یا عکس د بنسټوکتورونو ګڼون یا تعداد او له دې سره د عکس پرخېدونی یا بعد دی.

$$\begin{aligned} & dim \;\; Bild = dim \;\; V - dim \;\; Kern \\ \Leftrightarrow \quad & dim \;\; V = dim \;\; Bild + dim \;\; Kern \qquad !!! \end{aligned}$$

لاندې وکتور فضا

تعریف (پېژند):

د وکتورفضا V په $\mathbb{K}$ باندې یو لاندې وکتورفضا Uمنځ ته راځي، که سرې د وکتورفضا ټاکلي توکي لرې پرېږدي(لنډ:پرېږدي). له دې سره باید د لاندېوکتورفضا پاتې توکي دا لاندې ځویونه پوره کړی:

- $U \neq \emptyset$

- د ټول $x, y \in U$ لپاره $x + y \in U$ باور لري او د ټولو $x \in U$ ، $\lambda \in \mathbb{K}$ لپاره $\lambda x \in U$ باور لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library

خويونه:

- له دې سره يو وکتورفضا لږترلږه دړه لاندې وکتورفضاوې لري. يو څل دا اکسيومونه پخپله په وکتورفضا کې ورکړل شوي، داسې چې داوکتور فضا و خپل ځان ته لاندېوکتورفضا ده. له بلې خوا هروکتورفضا صفروکتور لري. دا صفر وکتور ځانله هم يوه وکتورفضا ده.

- $U_1 \cap U_2$ لاندې فضاو ده، کهU1 اوU2 لاندې فضاوې وي.

- $V_{\mathbb{K}}$ دې يوه وکتورفضا وې او $v_1, \ldots, v_n \in V_{\mathbb{K}}$. هر کرښيز ترکيب $L(v_1, \ldots, v_n)$ يوه لاندېفضا ده.

د لاندې فضاو لپاره د بعد يا پراخيدوني فرمول

$$dim(U_1 \cap U_2) + dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2)$$

ښوونه د وکتورفضاو د بنسټ د وکتورونو د ګڼون يا تعداد باندې مخ ته بيول کيږي. د وکتورفضا $U_1 \cap U_2$ بنسټ يو څل وکتورفضا U_1 او يو څل وکتورفضا U_2 ته وريوره يا تکميل کيږي. د وکتورفضا $U_1 + U_2$ بنسټ[3.3] د غوځي بنسټ دی جمعه يې دا نور د U_1 او U_2 وکتورونه

فنکشنونه يا توابع ، په ځانګړې توګه کرښيزې-

تعريف: X او Y ډېرۍ يا ستونه دي. يو تابع f يو ترتيب يا تنظيم دی، د کومو له لارې چې هرتوکی $x \in X$ په ټيم يوه توکي $f(x) = y \in Y$ تنظيم شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f : X \longrightarrow Y$

- دا چې دا توکی ځنګه ترتیبیږي دا پروا نه لري. لومی په کربښیزو توابعو کې بندیزونه راړل کیږي، دا چې تابع باید کربښیزهوي.

- د Y په توکي کېدی شي د X ډېر توکي وښايي یاپه ډېرو توکو ترتیب یا تنظیم شي. مګر برعکس ممکن نه دی. دا په Y کې توکی، کوم چې د X توکی له ښودل کیږي یا په کوم چې د X توکی تنظیم شي، باید تل یواځنی ټاکلی وي.

د فنکشنونو یا څیرونو(توابعو) خویونه Eigenschaften von Abbildungen

په باندې فنکشن(- تابع) Surjektiv

$f : V \to W$
دې یوه تابع وي. تابع په باندې ده، چه باور ولري:

$\forall \; w \in W \; \exists v \in V$ ، داسې چې $f(v) = w$.

په کې (فنکشن (څیرونه یا تابع)) Injektiv

$f : V \to W$
دې یو تابع وي. تابع په باندې دی، که باور ولري:

$\forall x, y \in V$

$$x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y) \qquad f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

په (په باندې او په کې فنکشن یا -- تابع) Bijektiv

په توابع هم په باندې تابع دي او هم په کې تابع (سوزجکتیو، اینجکتیو) دي یخد په باندېولی اوپهکې والی پوره کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\forall\ w \in W\ \ !\exists\ v \in V$ ، داسې چې باور لري $f(v) = w$. (هر $w \in W$ تیک یو پخوا یا تر مخځېره $v \in V$ لري)

کرښيز فنکشنونه يا توابع Lineare Abbildung

تعريف(پيژند)

يو تابع $f : V \to W$ ، د کوم سره چې V او W وکتورفضاوې دي په همغه بدن K ، کرښيز بلل کيږي(يا د وکتورونو هومومورفيزم)، که $\forall\ x, y \in V$ او $r \in K$ لپاره باور ولري:

$$\begin{aligned} L1: &\quad f(x+y) = f(x) + f(y) \\ L2: &\quad r \cdot f(x) = f(r \cdot x) \end{aligned}$$

سرې کړی شي دواړ هاکسيومونه په باندې تګه سره رايوځای کړي:

$$L : f(r \cdot x + y) = r \cdot f(x) + f(y)$$

زړی(هسته) او عکس يا ځېره Bild und Kern

د يوه تابع $f : V \longrightarrow W$ ځېره يا عکس په لاندې توګه تعريف دی

د لږ ترلږه يوه لپاره.

$$Img(f) := \{w \in W | f(v) = w \text{ für mindestens ein } v \in V\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع $f : V \longrightarrow W$ زړی په لاندې توګه تعریف دی

$Kern(f) := \{v \in V | f(v) = 0\}$

څانګړي کرښیز فنکشنونه (توابع)

یو کرښیز تابع $F : V \to W$

یو مونومورفیزم Monomorphismus بلل کیږي، که F اینجکتیو وي.

ایپیمورفیزم Epimorphismus ، که Fسورجکتیو وي،

ایزومورفیزم **Isomorphismus**،که F بیجکتیو وي،

ایندومورفیزم**Endomorphismus** ، که $V = W$ او

اوتومورفیزم**Automorphismus** ، که $V = W$ اوF بیجکتیو وي.

د په باندې، په کې ، په (باندې او کې) فنکشنونو یا توابعو لپاره ښوونه

X→X

وې دی $f : X \to X$. لاندې ویناوې برابر ارزښته یا ایکویوالنت دي:

(i) f په کې دی injektiv

(ii) f ist surjektivپه باندې دی

(iii) f ist bijektivپه دی

دا چې له (iii) څخه (i) او(ii) لاس ته راځي او او څخه لاس ته راځي روښانه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوولو دی چې لومړی. (ii)→(i) او دویم. (i)→(ii)

لومړی: اینجکتیو له دې لاس ته راڅي سورجکتیو. دا داسط ښایو، که په کې وښایو، چې،، نه سورجکتیو له دې لاس ته راڅي نه اینجکتیو،،. د نور کلمو سره:: تابع سورجکتیو ده، که دا اینجکتیو وي، څکه چې که سورجکتیو نه وي، نو ایجکتیو به هم نه شوی کېدی:

- په باندې یا سورجکتیو په دې معنا ده،چې د ټولو $x \in X$ لپاره په وتونډېرۍ کې یو $x' \in X$ شتون لري، داسې چې باور $f(x') = x$ لري . که یو تابع په باندې نه وي، نو یو $x \in X$ په کوخه ډېرۍ کې له مخه څېره ونه لري(یعني چې دا یې څېر هوي).
نو $f(X) \neq X$ باور لري .

وي دې $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یعني $|X| = n$ ، نو $|f(X)| = m < n$ دی.[4.1] نو نو اوس دا **Schubfachprinzip** von Dirichlet (د دیریښلیت(شمیر پوه) د میزکورونو(لکه چې د میز خانه یې پول)، خو داسې چې ډیطر کورګړي ولري(ژباړی) اصول) وایي، چې که n شیان په mکورونو(خانو) کې کېږدو او $n > m$ وي، نو لږ ترلږه په یوه کور کې له یوه زیات شیان باید واچول شي.

د دې لاس ته راوړني سره اینجکتیووالی نه دی ورکړ شوی، څکه چې $f(x) = f(x')$ مګر $x \neq x'$ (ټیک هلته چې په یوه کور کې دوه توکي پراته دي).

دویم : سورجکتیو له دې لاس ته راڅي اینجکتیو. موږ ښایو چې که تابع اینجکتیو نه وي، نو سورجکتیو هم نه ده.

1. f په کې نه ده، نو $f(x) = f(x')$ شتون لري د $x \neq x'$ سره . نو $f(X) \neq X$ دی او دا چې لږ تر لږه په $|f(X)| < |X|$ کې یو توکی کم دی لږ تر لږه $|f(X)| = n - 1$ کېدی شي وي ، داسې چې $|f(X)| < |X|$ او له دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره تابع په باندې نه ده، داسې چې په موخه ډېرۍ کې يو توکی $x \in X$ شتون
لري د کوم لپاره چې په وتونډېرۍ کې $x' \in X$ شتون نه لري.

F په کې(اينجکتيو) $\Leftrightarrow$ Ker (F) = 0

وي دې $F : V \rightarrow W$ او $x, v_1, v_2, n \in V$ او $0 \in W$

له دې لاس ته راځي:

دا چې F په کې يا اينجکتيو دی نو هر شکل يا ځېره يو پخوا يا ترمخ شکل لري.

د 0 پخواشکل يا ترمخ شکل يا ځېره دې n وي. $\Longleftrightarrow$
$Ker(F) = \{n\} \Rightarrow F(n) = 0$

دا چې کربنيز دی بايد باور ولري:

$$\begin{aligned} & F(x) + F(n) = F(x+n) \\ \Leftrightarrow \quad & F(x) = F(x+n) - F(n) \\ \Leftrightarrow \quad & F(x) = F(x+n) - 0 \\ \Leftrightarrow \quad & F(x) = F(x+n) \\ \Rightarrow \quad & n = 0 \end{aligned}$$

نو $Ker(F) = 0$

له دې لاس ته راځي ($\Leftarrow$) :
$Ker(F) \Leftrightarrow \{v \in V | F(v) = 0\}$

د په باندېوالي خوونه: دا چې تابع کربنيزه دی با ور لري:

د په کې والي ښوونه:

$$\begin{aligned} & F(v_1) = F(v_2) \\ \Leftrightarrow \quad & F(v_1) - F(v_2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & F(v_1 - v_2) = 0 \\ Da\ \ Ker(F) = 0 \quad \Rightarrow \quad & F(v_1 - v_2) = F(0) \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره دی $v_1 = v_2$.

L په کې ⇔ کربښیزخپلواک وکتورونه په کربښیز خپلواک وکتورونو ځېره کيږي

L په کې ⇔ کربښیزخپلواک L کربښیز خپلواک

له دې لاس ته راځي(⇐:) :

ښايو: $L(v) = L(w) \Rightarrow \ldots \Rightarrow v = w$

وي دې $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ بنسټ، $v, w \in V$ او بنسټ او

$L(v_1), \ldots, L(v_i), \ldots, L(v_n)$ کربښیز خپلواک

$$\begin{aligned} & L(v) = L(w) \\ \Leftrightarrow\quad & L(\sum \lambda_i v_i) = L(\sum \mu_i v_i) \\ \Leftrightarrow\quad & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \\ \Rightarrow\quad & \sum (\lambda_i - \mu_i) L(v_i) = 0 \ \ (v \end{aligned}$$

(د کربښیز کمبینیشن د یواخیوالي له امله)

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0 \\ \Rightarrow\quad & v = w \end{aligned}$$

په کې والی ښايي

له دې لاس ته راځي يا

⇒:

ښايو: $L(\sum \lambda_i v_i) = 0$

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i v_i = \sum \mu_i v_i \\ \Leftrightarrow\quad & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \end{aligned}$$

د ا ينجکتيويتي له امله

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \sum(\lambda_i - \mu_i)L(v_i) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \sum(\lambda_i - \mu_i) = 0 \\ &\Rightarrow \quad L(\sum \lambda_i v_i) = 0 \end{aligned}$$

د ارزښتوني فنکشنونه یا توابع یا څېروني

موږ د بېلګې په توګه درې پولینومونه P_1, P_2, P_3 لرو د لاندې سره

$$\begin{aligned} P_1 &= (x-1)(x-2)(x-4) \\ P_2 &= (x-3)(x-5)(x-1) \\ P_3 &= (x-4)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

موږ اوس کړی شو یو د ارزښتوني تابع یا څېرونه تعریف کړو(a ځای دی په کوم کې چې ارزونه کیږی)

$$W_a(P) : P \mapsto P(a)$$

د ارزښتوني پولینوم کرښیز دی څکه چې لاندې $\forall\ P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ او $\lambda \in K$ [4.2] باور لري :

$$W_a(\lambda P + Q) = \lambda W_a(P) + W_a(Q)$$

په دې توګه د ارزښتوني تابع سره کرښیز خپلواک وکتورونه په کرښیز خپلواک وکتورونو ځېره کیږي ای ماپینګmapping جوړوي، دا په دې معنا چې

P_1, P_2, P_3 کرښیز خپلواک دي، که $W_a(P_1), W_a(P_2), W_a(P_3)$ کرښیز خپلواک وي.

موږ د

$$\lambda_1 W_a(P_1) + \lambda_2 W_a(P_2)) + \lambda_3 W_a(P_3) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره ښایو

: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$:

په دې معنا چې P د 1 په ځای کې ارزښتول کیږي، یعني دپولینوم $P(1)$ ارزښت تاکل کیږي، که 1 ځای په ځای کړو :

	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	
P_1	$=0$	$=0$	$\neq 0$	$\Rightarrow \lambda_3 = 0$
P_2	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$\Rightarrow \lambda_2 = 0$
P_3	$\neq 0$	$=0$	$=0$	$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

داچې درې وکتورونه، چې د ارزښتوني له لارې جوړیږي یا منځ ته راځي یا تولیدیږي، کرښیز خپلواکدي، دادرې وکتورونه P_1, P_2, P_3 هم کرښیز خپلواک دی.

ایزومورفیزمونه Isomorphismen

V او W دې $\mathbb{K}-$ - وکتورفضاوې وي . V د $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ وکتور فضا بنسټ وي. تابع $f: V \to W$ ټیک هلته ایزومورفیزم[4.3], ده، که

$(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$

د W یو بنسټ وي. دا جمله په څټ یا برعکس هم باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

V دې يو $\mathbb{K}-$ -وکتروفضا او $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ دې بنسټ وي.

موږ ايزمورفيزم

$\mathbb{K}^n \longrightarrow V$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

کانونيکي بنسټ- ايزومورفيزم بولو. د اړتيا په حالت کې دا په $\Phi_{(v_1, v_2, v_n)}$ توګه هم ښايو. موږ دلته ګورو چې د کانونيکي بنسټ-ايزومورفيزم څخه کار اخستلای شو، چې د يوونوکتورونو (واحد-) سره (کانونيکي بنسټ) او د وکتروفضا V د بنسټوکتورونو څخه يو ماتريکی جوړ کړو، چې د دواړو وکتورفضاو ترمنځ ترنفورمي کيږي.

موږ دا داسې کړو چې د V د بنسټ وکتورونه يو په بل پسې په ماتريکس کې وليکو.

ماتريکسونه Matrizen

يو ماتريکس $Mat(m \times n; K)$ يو د m ليکو او n درڅونو(متو، ستنو) نظم دی د K بدن (پټي، ورشو، ساحه) څخه. د يوه ماتريکس د يوګونو توکو د ليکې – او – متې کېدی شي د ايندکس ليکدودIndizeschreibweise سره ټيک کره شي:

a_{ij}

دلتهi ليکه او j مته په کوته کوي.

کرښيزې فنکشنونه (توابع) د ماتريکسونو په څېر

هر کرښيزه تابع کېدی شي په ټيک يوه ماتريکش تنظيم شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه ماتريکس رانګ Rang

د يوه ماتريکس رانګ د کرښيز خپلواکو ليکو/ يا د همغې د متو ګنون يا تعداد دی.

د متو رانګ = د ليکو راګ Zeilenrang = Spaltenrang

جمله :

د هر $m \times n$ ماتريکی لپاره باور لري:

د ليکوراګ=د متو رانګ يا رانګ

ښوونه:

ورکړ شوی يو $(m \times n)$ ماتريکس

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

موږ د $R_1, \ldots, R_m$ سره ليکې-وکتورونهښايو:

$$\begin{array}{rcccc} R_1 = & (a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n}) \\ R_2 = & (a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n}) \\ & & \cdots & & \\ R_m = & (a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn}) \end{array}$$

کهr د ليکې رانګ وي، نو موږ r کرښيز خپلواک وکتورونه لرو، کوم چې د دې لپاره بنسټ جوړوي:

$$S_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n}), S_2 = (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n}), \ldots, S_r = (b_{m1}, b_{m2}, \cdots, b_{mn})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هر لیکه وکتور R_i د لاندې بنسټ وکتورونو کربنيز ترکيب دی:

$$\begin{aligned} R_1 &= k_{11}S_1 + k_{12}S_2 + \ldots + k_{1r}S_r \\ R_2 &= k_{21}S_1 + k_{22}S_2 + \ldots + k_{2r}S_r \\ &\ldots \\ R_m &= k_{m1}S_1 + k_{m2}S_2 + \ldots + k_{mr}S_r \end{aligned}$$

د دې لپاره چې د ماتريکس هر توکی a_{ji} لاس ته راوړو، بايد ټول ضريبونه، د ليکې وکتور ونه د ليکېفضاځخه وکتوروفضا انځور کړ، د بنسټ وکتور د اړونده توکي سره ضرب کړو. دا د a_{11} لپاره د بېلګې په توګه دی

$$a_{11} = k_{11} \cdot b_{11} + k_{12} \cdot b_{21} + \ldots + k_{1r} \cdot b_{r2}$$

له دې سره a د ټولو i لپاره د ليکې ډول دی.

$$\begin{aligned} a_{1i} &= k_{11}b_{1i} + k_{12}b_{2i} + \ldots + k_{1r}b_{ri} \\ a_{2i} &= k_{21}b_{1i} + k_{22}b_{2i} + \ldots + k_{2r}b_{ri} \\ &\ldots \\ a_{mi} &= k_{m1}b_{1i} + k_{m2}b_{2i} + \ldots + k_{mr}b_{ri} \end{aligned}$$

موږ کړی شو اوس هر د متې وکتور په لاندې توګه وليکو:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = b_{1i} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix} + b_{2i} \cdot \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{ri} \cdot \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}.$$

له دې امله دا وکتورونه د r وکتورونو کربنيز ترکيب دی:

$$\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړیین نهده چې داوکتورونه دې یو بل تهکرښیز خپلواک وي. مګر په هر حالت باید هغه خوراجګ ګڼ(عدد) په r رابند یا محدود وي، چې له کومهامله دی

د متې(درز یا ستنې یا ولاړې لیکې یا کیلې) رانګ Spaltenrang $\leq r$

سرِی همداسې د تراسپونی شوې ماتریکس سره هم مخ ته ځي او په دې توګه ،، Zeilenrangد لیکې رانګ ،، لاس ته راوړي. له دې سره دی: $\leq r$

د لیکې رانګ = دمتې رانګ

په ځنډ- یا معکوس ماتریک Inverse Matrix

یو مربع یا ځلوریزه $n \times n$ ماتریکسA یو معکوس ماتریکس A^{-1} لري،، که یو لهدې لاندې برابر ارزښته اړیکو ځخه یو پوره وي.

- د متو (لیکو) وکتورونه کرښیز خپلواک دي.
- $rang(A) = n$
- $det(A) \neq 0$

- له دې سره اړوند کرښیزه تابع f_A یو ایزومورفیزم دی.

څرخون- او هدارون-ماتریکسونه(--- د انعکاسونې --)

په $\mathbb{R}^2$کې څرخون یا څرخونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $\mathbb{R}^2$ کې هندارونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

دیترمینانتونه Determinanten

دیترمینانتونه دڅه لپاره دي؟

دیترمینانتونه په $\mathbb{R}^2$ کې د غبرګ اړخيز(موازی الاضلاع) په $\mathbb{R}^2$کې د يوه شپات(کشکول شوی کوادر يا مکعب) او په $\mathbb{R}^n$ کې د يوه غبرګ خوايز سطحه ورکوي.
له دې سره روښانهکېدی شي،چې ولې يو ديترمينات صفر دی، که وکتورونه يو بل ته کرښيز بلواک وي. که په کې دوه وکتورونهورکړ شوې وي او دا يو بل ته کرښيز بلواک وي، نو دا يو غبرګاړخيز نه شي غزولی او له دې امله مساحت صفر دی. له دې سره هر مربع – يا څلوری-ماتريکس يوه ګڼ يا عدد سره تنظيميږي.

تعريف(پيژند) Definition

ديترمينانت هر ماتريکس $M(n \times n, \mathbb{K})$ يو عددK بانديې تنظيموي:

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

فنکشن (تابع) لاندې خويونه لري:

لومړی: ديترمينانت په هره ليکه کې کرښيزه ده. داپه دې معنا، چې که سرې له ماتريکس M يوه کرښه لرې بريږدي يا پريږدي او د يو کتور x سره بدله کړي، چې بيا دا تابع نسبت دې وکتور ته څان کرښيز نيسي.

دويم : که د ماتريکس د ليکې رانک نسبت د ليکې تعدادn ته کوچنی وي، نو $\det A = 0$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم : د یوونماتریکس یا واحدماتریکس ډیترمینانت 1 دی:

$$\det(E) = 1$$

ټیک یوه تابع شته، چې دا خویونه پوره کوي. دا باید وښایو، داسې چې موږ یواځنوالی او شتونوالی وښایو. دا هر شرط لپاره باید په یواځې تگهوښول شي.

مرشتندوي جمله:Hilfssätze :

د ښوونې لپاره لومړی لاندې مرستندوی جملې ښایو:

لومړی: که په ماتریکس A کې دوه لیکې بدلې شي، نو ماتریکس A' لاس ته راځي، نو باور لري.

$$\det A' = -\det A$$

.

دویم : که د یوعماتریکس لیکه د یوه سکالار λ سره ضرب شي نو ماتریکس A' لاس ته راځي او له دې سره باور لري:

$$\det A' = \lambda \det A$$

دریم : که په یوه ماتریکس A کې یوه لیکه د ماتریکس د بلې لیکې سره **جمعه** (ورزیاته) شي نو ماتریکس A' لاس ته راځي، نوله دې ځخه دیترمینان بې اغیزه پاتې کیږي: $\det A = \det A'$

د دې مرستندوی او یواځنوالی او شتون جملو ښوونه دې په Jänich کې وکتل شي.

د دیترمینانتو ساده شمېرنه

لاندې برحه

(c) ketabton.com: The Digital Library

- 2×2
- 3×3

د لاپلاس د وديزېنې جمله Laplace Entwicklungssatz

د لاپلاس د وديزېنې جمله مرسته کوي، کد له 3×3 ماتريکسونو څخه لوی ديترمينانتونه ټاکوا[6.1] .

سرې کړی شي ديترمينانت ته وده ورکړای شي، که ماتريکس تل په کوچنيو ديترمينانتونو و وېشي. دلته لاندې ماتريکس A_{ij} هغه ماتريکس ده، چې د ماتريکس A د $i-$-مې او $j-$-مې ليکې همداسې متې د لرې کولو څخه لاس ته راځي. سرې کړی شي چې وديزيېنه سرته ورسوي يا د ليکې له لارې

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

يا د متوو پسې

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

د ضريب يا خلووني $(-1)^{i+j}$ په مرسته يو د سترنجتختې ډوله مخ يا موسترمنځ ته راځي. له دې سره د ديترمينانت مخنخبنه ټاکل کيږي:

+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+

بېلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$	ودیزیینه پورته لیکه پسې پورته لیکه => په لاندې دیترمینات کې د لیکې په څیر له منځه وړل کیږي =

$$+a_{11}\cdot det\underbrace{\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{1.Spalte\ \ ausgeblendet} \quad -a_{12}\cdot det\underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{2.Spalte\ \ ausgeblendet}$$

۱ -م. درځ لرې کړي   ۲ -م درځ لرې کړي

$$+a_{13}\cdot det\underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}}_{3.Spalte\ \ ausgeblendet} \quad -a_{14}\cdot det\underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}}_{4.Spalte\ \ ausgeblendet} =$$

۳ ــم درځ لرې کړی   ۴ ــم درځ لرې کړي

د دیترمینانتونو ساده تاکنه

- که یوه لیکه یا متّه کربنیز بلواک وي، نو باور لري

$$det\ \ A = 0$$

دا د لاندې سره په برابره معنا ده(د لیکو تعداد همداسې د متو تعداد)

$$rang\ A < n$$

- که څوک یوه متّه د بلې سره بدله کړي یا یوه لیکه د بلې سره بدله کړي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

مخنخښه تغیر خوري(دا چې د دیترمینانت تابع الترنیري(بدیلي) **alternierend** ده)

$$det\ A_{ij} = -det\ A_{ji}$$

- کهد ماتریکس یوه لیکه د سکالار سره ضرب شي،نوباید تنها دیترمینانت هم د همغه سکالار سرهضرب شي:

$$det\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \lambda\cdots\lambda & \lambda a & \lambda\cdots\lambda \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \lambda\ det\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

په همدې توګه که دیترمینانت د λ^n سره هم ضربې شي، د کوم سره چې n د لیکو تعداد دی، داسې دهلکه که یوه ماتریکس ټوله له λ سره ضرب شي.

$$det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det\ A$$

- د یوونماتریکس (واحد-) دیترمینانت 1 ده:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- د یوه درېګوډي ماتریکس دیترمینانت د هغه د دوه کونجتړې ضرب دی:

$$det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \ \cdots\ \cdot \lambda_n$$

- ماتریکس څخه $n \times n$ داسې یوه درېګویزه ماتریکس کړی شو د هر په خوښه د ساده لیکو عملیو څخه د ګاوسقانون له مخې لاس ته راوړو. موږ باید د دیترمینانت په ټاکلو یواځې دې ته پام وکړو، چې لیکه بدلون دیترمینانت ته له

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځانسره يوسو. نو که r د ليکو د بدلون تعدادوي، چې موږ سر ته رسولې چې درېګوډيزه بڼه لاس ته راوړو، باور ولري::

$$\det A' = (-1)^r \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ \ldots \ \cdot a_{nn}$$

- که څوک يوه ماتريکس ترنسپوني کړي(داپه دې معنا چې د ليک څخه متې جوړوي او له متو څخه ليکې او يا په مربع يا څلوريزه ماتريکسونوکې دا په دوهکونجترې(قطر) هنداره کوي) په دې حالت کې د ترادپوني ماتريکس ديترمينانت ارزښه د نه ترانپوني شوې ماتريکس د ديترمينانت سره برابر دی:

$$\det \ A = \det \ A^T$$

کوچنی بام: په ضرب کې دې پامدې وي. باور لري

$$(AB)^t = B^t A^t$$

- ديترمينانت- ضرب-جمله

$$\det(A \cdot B) = \det \ A \cdot \det \ B$$

.... ښوونه يې دلته ورزياته کړی.

د ايندومورفيزم ديترمينانتونه

دا چې موږ هر ايندومورفيزم f د مربع – يا څلوری-ماتريکس سره انځورولی شو[6.2]، له دې سرهکړی شو چې د ايندومورفيزم ديترمينانت هم تعريف کړو:

$$\det f := det A_f \in \mathbb{K}$$

اوس داپوښتنه رامنځ ته کوو، چې ايا د V د مختلفو بنسټونو لپاره ديترمينانتونه مختلف دي. دا کېدی شي وښوول شي چې ديترمينانت د بنسټ د ټاکنو يا انتخاب څخه خپلواک

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي. له دې سره لهدې امله کړی شو چد د يوه ايندومورفيزم ديترمينانت يواځنې ت عريف کړو.

أيګن ارزښت(Eigenwerte(Eigenvalue

يادونه: دا أيګن په ټول ژبوکې همداسې ليکي. دا الماني وی يا لغات دی، د خپل په معنا دی.

أيګن ارزښت(Eigenwerte(Eigenvalue

F دې د وکتورفضا V_K ايندومورفيزم وي. يو $\lambda \in K$ أيکنارزښت بلل کيږي، که يو $v \in V$ شتون ولري د $v \neq 0$ سره ، داسې چې باور ولري.

$$F(v) = \lambda v$$

أيګنوکتور Eigenvektoren

F دې د وکتورفضا V_K يو ايندومورفيزم وي. هر له صفر وکتور مختلف $v \in V$ د

$$F(v) = \lambda v$$

سره د F أيګنوکتور بلل کيږي(أيګن ارزښت λ ته)

دوه -کونجتړې کيدونکې يا دوه-کونجتړې کيدنوړ(قطري کيدونکې) Diagonalisierbar

يو ايندومورفيزم دوه کونجتړې کېدونکی (قطري کېدونکې يا – وړ) بلل کيږي، که د أيکن وکتورونو څخه يو بنسټ شتون ولري. دا په دې معنا چې د ايندومورفيزم لپاره يو دوه کونجتړی ماتريکس د لاندې بڼه شتون لري(د متو وکتورونه بنسټ ومتورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

شتون لري، λ_i أيګن ارزښتونه دي)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

أيګن فضاوې Eigenräume

F دې د V ايندومورفيزم وي او $\lambda \in K$ ، نو

$$Eig(F;\lambda) := \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$$

د F يو أيګنفضا بولو نسبت و λ ته.

- اګن فضا د V وکتورفضا يو برخوکتور فضا ده.
- صفروکتور په ليګنوکتور کې خوندي نه دی.
- $Eig(F;\lambda)\{0\}$ د λ اړونده أيګنوکتورونو ډېری ده
- (S.210) ...

کرکتريستيکي پولينوم يا سرې څګګه أيګن ا رزښتونه پيدا کوي؟

سړی کړی شي چې أيګن ارزښتونه وټکي، داسي چې د کرکتريستيکي پولينوم صفرځايونه پيدا کوي. باور لري[7.1]

د ايګن ارزښت دی له دې لاس ته راځي او په ځت

$$\lambda \ ist \ Eigenwert \ von \ F \Leftrightarrow det(F - \lambda id_V) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی د لاندې ماتریکسونو دوه -کونجتړې(قطر) پیداکوي:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{mn}-\lambda \end{pmatrix}$$

سړی أیګن وکتورونه او أیګن ارزښتونه څنګه پیدا کوي؟

که څوک أیګن-ارزښت λ ولري،نو کېدی شي و هغه ته مناسب أیګنوکتور وټاکي، داسې چې سړی لاندې برابرون - یا مساواتسیستم حل کړي:

$$(A-\lambda I)X=0$$

لکه کریتیکي پولینوم لپاره سړی همداسې ببړته ماتریکس جوړوي، چېرته چې د λ لپاره أیګن ارزښتونه ځای په ځای کوي . بیا سړی دا هوموجېن مساواتسیستم حل کوي.

یو ماتریکس سړی څنګه دوه-کونجتړې یا قطري کوي؟

لومړ: که لړ ایګنوکتورونه تولید یا جوړېدی شي، دې ته (نسبت دې ته) چې ماتریګس درزونه همداسې لیکي لري، نو متریکس دوه کونجتړې کیدونکې نه ده.

که پوره وکتورونه شتون لري او ودې ته ایګن ازښتونه نو $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ باور لري

$$D=S^{-1}AS=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

سکالار ضرب(دننني څل یا ــضرب) او نورم

(c) ketabton.com: The Digital Library

Skalarprodukt (Innenprodukt) und Norm

سکالار ضرب

تعریف یا پيژند:

یو تابع $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $(x,y) \to \; <x,y>$ سکالار ضرب بلل کيږي، که $\forall \; x, x', y \in \mathbb{R}^n$ دا لاندې باور ولري:

- $<x+x', y> = <x,y> + <x',y>$ کربنيزوالی (
- $<x,y> = <y,x>$ (سیومتري (Symmetrie
- $<x,x> \geq 0$ او $<x,x> = 0 \Rightarrow x = 0$ مثبت او دیفینیت) Positiv und definit)

بېلګه:

- $<a,b> \mapsto a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n$

نورم Norm

پيژند(تعریف): يوه ځيرونه یا فنکشن $|| \; || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ نورم بلل کيږي، که لاندط امسیومونه باور ولري

- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ دیفینیت
- $||x|| \geq 0$ مثبت

(c) ketabton.com: The Digital Library

- $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ هوموجين

- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ درې ګوډي يا مثاثاتي نابرابرون

بيلګه:

$$||a||_\infty = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_\infty = \max(|a_i|; i = 1, \ldots, n)$$

ماکسيموم يا خورا جګ ارزښت

$$||a||_1 = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_1 = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

(يو نورم)

$$||a||_2 = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_2 = \sqrt{< a, a >} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2}$$

(د پيوتاګوراس نورم)

د وازيدو کونج تعريف:

د يوې وکتورفضا د x او y وکتورونو ترمنځ د وازېدوکونج α په لاندې توګه تعريف دی

$$< x, y >= ||x||\,||y|| \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{< x, y >}{||x||\,||y||}$$

د وازيدو کونج د تعريف لپاره بايد کوساين تل تعريف وي. موږ بايد وښايو، چې دا لاندې باور لري:

$$-1 \leq \frac{< x, y >}{||x||\,||y||} \leq 1$$

دا د کوشي –شوارځ- نامساواتو خونديونه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوشي –شوارڅ- نامساوات

دپه خوښه وکتورونو $u, v \in V$ لپاره باور لري:

$$< u, v >^2 \leq < u, u >< v, v >$$

يا ورته(اکويوالنت):

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||$$

ښوونه:

د $y = 0$ لپاره ساده دی. وي دې $y \neq 0$. موږ له يوه واړه چل څخه کار اخلو او $\lambda := \frac{< x, y >}{||x|| \, ||y||} \in \mathbb{R}$ ږدو. لاندې باور لري:

$$\begin{aligned} 0 \leq < x - \lambda y, x - \lambda y > &= < x, x > -2\lambda < x, y > + \lambda^2 < y, y > \\ &= ||x||^2 - 2\frac{< x, y >^2}{||y||^2} + \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \\ &= ||x||^2 - \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \end{aligned}$$

په ورته توګه باور لري $< x, y >^2 = ||x||^2 ||y||^2$ او له دې سره $| < x, y > | \leq ||x|| \, ||y||$.

نورمال شوي ا و اورتوګونال وکتورونه

وکتورونو نورماليدنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورونه نورمال شوي دي، چې اوږدوالی 1 لري، دا په دې معنا، چې $< v, v >= 1$
یا $||v|| = 1$.

یو وکتور نورمال کیدی شي یا کیږي، داسې چې دی د په څټ یا معکوس ارزښت سره ضرب شي:

$$v_{normalisiert} = \frac{1}{||v||} \cdot v$$

اورتوګونال وکتورونه (یو په بل ولاړ -)

دوه وکتورونه v_1 او v_2 یو بل ته اوتوګونال دي، که دا یو په بل ولاړ یا عمود وي. یا نیغ ولاړ وي. له دې امله د دوي سکالار ضرب یا ځل 0 دی.

$< v_1, v_2 >= 0$

هر وکتورفضا ته لږ ترلږه یو(یعنې په ریښتونې زیات) له اورتوګونال وکتورونو بنسټونه شته. کا دا هو اوږدوالی 1 ولري، نو دا *اورتونورمال* دي.

اورتونورمال بنسټونه:

یو اورتونورمال بنسټ هغه بنسټ دی، په هغه چې ټول وکتورونه دي چې نسبت سکالار ضرب ته اوږدوالی 1 لري او یو بل ته اورتوګونال دي.

سړی کړی شي هر بنسټ ته د شمیدت اورتوګونالیدونکي تلنلار **Schmidtschen Orthnormalisierungsverfahrens** په مرسته یو اورتونورمال بتسټ جوړ کړي:

موږ غواړو د $i = 1$ تر $i = n$ پورې لاندې فرمول وځغلوو، د کوم سره چې د n بنسټ وکتورونو تعداد یاګنون دی، او یو بل پسې اورتوګونال وکتورونه د 1 اوږدوالي پیدا کوي یا میندي، چې دا موږ سملاسي د بل وکتور شمیرنو لپاره اړین مومو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e_i = \frac{v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k >}{\left\| v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k > \right\|}$$

ځای بدلون Permotation

لیکندود

یو ځايبدلون یو په – یعني بیجکتیو ځیرونه یا فنکشن دی، کوم چې n توکي ($n > 0$) تنظیموي.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \sigma(2) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$$

دا پورته لیکنډول دا معنا لري، چې د بیلګې په توګه 1 د $\sigma(1)$ ځای ته راکښل کیږي.

په همدې توکه ځیوکلیکي یا تل بیرته راګرځیدونې لیکندود هم ورځنی یا بلد دی. د بیلګې په توګه:

$$(12)(3)(564) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

ترانپوزیشن Transposition

یو ترانسپوزیشن د ټیک دوه یتوکو بدلون دی په ځیوکلیکي لیکندود یعنې (ab) .

هر پرموتیشن د دوه ترانپوزشنونو کمپوزشن(ضرب) دی.

د ممکنه ځای بدلونو ګڼون یا تعداد

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یوه ډېرۍ یا سټ n توکي لري، نو دا $n!$ ځای بدلونونه ممکن دي.

پاتې یا تش ځایونه

که یو پرموتیشن له یوه کوچني ځای څخه و یوه لوي پسې څېره کړي، نو تشځایونه تولیدیږي. که $j < k$ او $\sigma(k) < \sigma(j)$ وي، نو دا یو تشځای دی.

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ - ډېرئ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library