

گنونیو هنه

(د اعداد تیوری)

Nummbertheory

$$k = n \pmod{m}$$

smakhan1946@gmail.com

Ketabton.com

لیکونیکی: جورج کوننبرویر

ژبیری: ډاکتر ماخان (میری) شینواری

دلوي څښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بي وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لگښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: گڼونپوهنه
ليکونکی: پروفیسور جورج گوتنبرونر
ژباړی: ډاکتر ماخان،، میری،، شینواری
د خپریدو لړی:
خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولته
جرمني
چاپ کال: ۲۰۱۲
د ژباړې برېښنا پته: smakhan1946@gmail.com

چاپ چاري

چاپ ته يې د هر چمتو هیوادوال مرسته په سترگو منل کيږي

پښتو موزېبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

د ژباړې مننه

نيوليک

	د ژباړي سرريزه
	د ليکونکي سرريزه
۱	- ... خويونه
۱	د.. د ا کسيومونو سيستم
۸	د طبيعي اعدادو خای انخورونه
۱۴	-۲- په ... وپشوروالی
3۱	پروپشوني (مقسوم عليه)
۱۸	د اويکلید يا اقلیدس له مخي ټاکل
۲۸	خورا غټ گډ پروپشوني
۳۲	۳ - لومړني گڼونه
۳۸	نور خويونه
۴۲	(د خ غ ک او خ ک گ زياتخلي - -
۵۱	۴ - کونگروانخ
۵۱	د کونگروانخ سره شمېرنه
۵۸	د پروپشوروالي قوانين
۶۳	پاتي ټولگي

- د پاتي ټولگې کړی یا - رينگ ۶۷
- ۵ - الجبري کونگروانڅ ۷۵
- د کرښيزو کونگروانڅو حلوروالی ۷۵
- سيمولتان کونگروانت ۸۱
- الجبري کونگروانت ۸۷
- ۶- د حلونوو عملي شمېرڼه ۸۹
- د الجبري کونگرواينڅو دحلونو گڼون يا تعداد ۹۸
- لومړني پاتي ټولگي کروپونه ۱۰۱
- د ابل گروپ ۱۰۱
- د $\varphi(m)$ شمېرڼي ته ۱۰۳
- د اوپلر جمله ۱۱۰
- د (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) جوړښت ۱۱۶
- د حقيقي اعدادو g - اديکي وديزيڼه ۱۲۶
- ټولزه وديزيڼه ۱۲۶
- کله $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ دوه g - اديکي انځورونه لري؟ ۱۳۳
- کوم $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ يوه پای g - اديکي انځورونه لري؟ ۱۳۵

۱۳۸	پریودیکی وده
۱۴۵	خأنگری حالت: سوچه پریودیکی وده
۱۴۹	تولیز حالت: نه سوچه - پریودیکی وده
۱۵۰	۸ - N-م توان
۱۵۰	په خأنگری حالت بیرته اړول
۱۵۳	د... د حل لپاره تگلار
۱۵۸	د حل ساده متودونه
۱۵۸	خأنگری حالت
۱۶۵	د $x^n \equiv a(2^k), k \geq 3$ لپاره د حل متودونه
۱۶۹	خأوریز پاتی (که غواری: مربع باقیمانده)
۱۶۹	خأنگری حالت
۱۷۴	خأوریز پاتی (که غواری: مربع باقیمانده)
۱۷۴	خأنگری حالت
۱۷۹	لژندر-سومبول
۱۸۰	ساده خوږونه:
۱۸۶	د گاوس لیما یا جملگی
۱۹۶	د Legendre-Symbo لپاره د خأوری - یا ...
۲۰۱	جاکوبی سومبول
۲۰۵	خأنگری حالتونه

د ژباړې سرريزه

گرانو لوستونکو!

د ليکونکي سرريزه راوړل شوي هلته اړين څه شته دي، خو زه غواړم دومره يادونه وکړم، چې گڼوښوونه يا د اعدو تيوري يو له بنسټيزو درسونو څخه گڼل کيږي، چې ما يې ډېر وخت د يوې داسې ليکنې لټه کوله. ښه دي، دا مې يو ډېر ښه سکريپت پيدا کړ او بيا دا د ويانا د پوهنتون هم دي، چې ما هلته درس ويلی. دا په گوته کوم، چې د ويانا پوهنتون کې ډېر ښه او مشهور گڼوښووهان تير شوي او لا هم شته.

دا ما له دې امله هم اړيښه وبلله، چې زما په اند دا درس د افغانستان پوهنتونونو کې نه شته. هيله ده، چې دابه د گرانو هيوادوالوپه گټه وځوري.

په دې هيله هم، چې گڼوښوونه به دپه درسي پروگرام کې خوندي شي.

ستاسو ماخان

سرريزه:

په هغه وخت کې گاوس گڼونپوهنه یا د عددونو تیوري د ماتماتیک د ملکې (پاچاګۍ) په نوم ونوموله. د دې لپاره چې د شمیرپوهنې په دې ساحې بڼه وپوهیږو، مختلفې پیلونې – همداسې مخ ته تللي لکچرونه وړاندې کيږي.

گڼونتیوري د ډېرو داسې ساده برېښیدونکو پرابلمونو، بڼوونه او یا د هغوي تضاد تر څیرني لاندې نیسي، چې تر نن ورځې پورې دا پاتې دي یا نه دي شوی، او د پوره پام کونې له مخې خورا سخت مخ ته لیدل شوي دي. د وخت په تیریدو سره دې د گڼونپوهنې دې خویونو یو د شمیر پوهنې تیوري ودې خورا ستر د تغذیې ورشو وموندله، چې د خپل دسختیلین دپولې زیاته ور اخواته رسیدونکې ده. په دې اړوند دې دا هم په گوته شوې وي، چې د ساده پرابلمونو یو ډکې (حجم) شتون لري، د کومې له مخې چې هر څوک په خوښه ازمايلي شي ([Guy94] وگورئ).

، د گڼونتیوري یوه غټه معنا، چې د دې ساحې یا ورشو د یوه قهرمان څخه نږدې ۳۰۰ نا روښانه کلونو وروسته حل شوې: د فرمات Fermat گومان چې په بڼه توګه د ،، لوی فرمات Der große Fermat ،، تر نامه لاندې نوم یا شهرت لري. که څه هم عملي کارونه یا استعمال یې د ۱۹۹۴ د اندریو او ریچارد تیلور جملې څخه په سختی لیدل کيږي، بیا هم گڼونپوهنه سیده یا په همدې وخت کې په ماډرن شمیرپوهنه کې غوره رول لري. په دې اړونده سړی فقط د بیلګې په توګه کریپتوګرافي ته خپل پام اړوي، چیرته چې د خبرونو د کود (شفر) څخه وازونه، د نورو تر څنګ خورا لوي لومړنیو گڼونو ته اړتیا پېښيږي.

په ۶/۳ برخه کې لنډې پرابلم ته پام شوی دی، د گڼونپوهنې د بنسټیز د استعمالووالي دې دلته انتظار نه کيږي، ځکه چې بنسټیزه تیوري، نه مګر د هغې استعمال د دې سکریپت په ککره کې ځای لري. علاقمند لوستونکی دی په دې هکله نورو د گڼونتیوري زیاتو کتابونو لوستلو ته راوبلل شي. دا مخ ته پرته لیکنه د ویانا پوهنتو کې د ۲۰۰۰ او ۲۰۰۱ ژمي سمستر لپاره لکل شوې. بنسټیزې پوهنې یې له وړاندې – یا مخنیونه نه ده، مګر بڼه خو ده، چې د الجبري جوړښت او کلیمو سره بلدتیا شتون ولري. لکچر پروفیسر میچ او اړونده تمرینونه یې ډاکتر شویزنگایر مخ ته بیول. دا سکریپت د لکچر په لیکنو ولاړ دی او د تکمیل ادعا نه کوي.

جورج گوتنبرونر اپریل ۲۰۰۲

د $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ خوږونه

د \mathbb{Z} لپاره اګسیومسیستمونه Axiomensystemen

د $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ لپاره یو ممکنه اګسیوم دی:

لومړی: اګسیوم، ، + ، پوره کوي : $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$ او :

الف::

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ اسوځیاتیو قانون}$$

ب-

$$\exists 0 \in \mathbb{Z} (, Null) : a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in \mathbb{Z} \text{ (بي اغیزه يا ناپیلی توکی)}$$

پ -

$$\forall a \in \mathbb{Z} \exists -a \in \mathbb{Z} : a + (-a) = (-a) + a = 0 \text{ (په څټ يا معکوس توکی)}$$

ت -

$$a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{Z} \text{ (کموټاتیو يا د بدلېدو قانون)}$$

دویم : ضرب ، ، . ، پوره کوي $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}$ او :

الف-

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ (اسوځیاتیو قانون)}$$

ب -

ګڼونپوهنه

ناپېلی توکی) $(, , Ems)$ د $\exists 1 \in \mathbb{Z}, 1 \neq 0$ د $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \forall a \in \mathbb{Z}$ (بی اغیزه یا

پ-

(کموټاتیو یا د بدلېدو قانون) $a \cdot b = b \cdot a \forall a, b \in \mathbb{Z}$

ت-

(دیسټریبوتیو قانون) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

دریم: نسبت و نظم, \leq ته باور لري:

الف - $a \leq a \forall a \in \mathbb{Z}$ رفلکسیوي

ب. $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b \forall a, b \in \mathbb{Z}$ انټیسیومتری.

پ - $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ ترانزیتیو.

ب - $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a = b \vee a \leq b \vee b \leq a$

ټ - $a \leq b, c \in \mathbb{Z}$ په خوښه $\Rightarrow a + c \leq b + c \forall a, b \in \mathbb{Z}$

ټ - $a \leq b, c \in \mathbb{Z}, c > 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \forall a, b \in \mathbb{Z}$

څلوم- برخدېری $\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a > 0\}$ پوره منظمه ده، دا په دې معنا چې د \mathbb{N}

هره نانتش برخدېری A کوچنی توکی لري. (نو:

$(A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_0 \in A : a_0 \leq a, \forall a \in A$

یادونه ۱.۱.۱ د جمعی یا زیاتون د څلور خوینو لپاره $(\mathbb{Z}, +)$ یو ابل گروپ

جوړوي، د ضرب د خوینو سره په ګډه د $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ سره په اړوند د یوه

کموټاتیو رینګ څخه غږیرو، د یوې (واحد) توکي سره.

د اکسیومونو $3a - 3d$ سره په گډه (\mathbb{Z}, \leq) یو توتالمنظمه ډېری (،،خُنْخیر،،) جوړوي.. که ټول اکسیومونه $1 - 3$ باور ولري، نو دا بی یو منظم رینګ (کړی) دی (بېلګه: $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$)

یادونه ۱. ۱. ۲. سری کړی شي وښايي: $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes, \leq)$ یو په خوښه الجبري جوړښت دی، هغه چې دا پورته له ۱ تر ۴ اکسیومونه پوره کوي، نو دا بیا په روښانه توګه 1.1 برابر دی له $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ سره.

ترې لاس ته راوړنه: په $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ کې باور لري:

$$a \leq b, c < 0 \Rightarrow bc \leq ac. \quad (1.1)$$

ښوونه:

$$c < 0 \xrightarrow{3e} c + (-c) < 0 + (-c) \stackrel{1b}{=} -c \Rightarrow 0 < -c. \quad (1.2)$$

$$a \leq b \xrightarrow{3f} a \cdot (-c) \leq b \cdot (-c) \stackrel{UE}{=} -(ac) \leq -(bc) \xrightarrow{3e} (1.3)$$

$$\xrightarrow{3e} -(ac) + (bc) \leq -(bc) + (bc) = 0 \xrightarrow{3e} (1.4)$$

$$\xrightarrow{3e} (ac) - (ac) + (bc) \leq (ac) + 0 \Rightarrow (1.5)$$

$$\Rightarrow bc \leq ac. \quad (1.6)$$

کڼونپوهنه

جمله گۍ ۱ . ۱ . ۴ له $(\mathbb{Z}, +, -, \leq)$ څخه د \leq لپاره باور لري:

$$a \leq b \Leftrightarrow a = b \vee b = a + n \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (1.7)$$

(\Leftarrow)

ښوونه:

$$b = a + n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow b - a = n \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow b > a \Rightarrow a < b. \quad (1.8)$$

(\Rightarrow)

$$a \leq b \stackrel{3e}{\Rightarrow} a + (-a) \leq b + (-a) \Rightarrow 0 \leq b - a \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow b - a = 0 \vee b - a > 0 \Rightarrow b = a \vee b - a \in \mathbb{N} \quad (1.10)$$

$$\Rightarrow n := b - a \Rightarrow b = a + n \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.11)$$

د سره

لاس ته راوړنه ۱ . ۱ . ۵ : $\dots - 2 < -1 < 0 < 1 < 2 \dots$

جمله گۍ ۱ . ۱ . ۶ : د \mathbb{N} لپاره د اندکشن اصول باور لري، دا په دې معنا چې

$$\exists \emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N} \quad \text{د لاندې سره:}$$

$$1 \in A$$

1.

$$, n \in A \Rightarrow n + 1 \in A \quad 2.$$

نو باور لري $A = \mathbb{N}$.

ښوونه: وي دې $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}, A$ په خوښه دواړو خوڼو سره ورکړ شوي، ښايو:

$A = \mathbb{N}$ د $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ اکسیومونو په مرسته

نیسو $A \neq \mathbb{N}$. راوړو .

$$T := \mathbb{N} \setminus A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin A\}, \quad (1.12)$$

له دې امله $T \neq \emptyset$. د اکسیم 4 له مخې T یو کوچنی توکی $n_0 \in T$ لري.. دی $n_0 \neq 1$ ، ځکه چې د A خوی 1 له مخې:

$$1 \notin T = \mathbb{N} \setminus A. \Rightarrow 1 \in A, \quad (1.13)$$

د 1.1.4 پسي $n_0 > 1$ لرو ، داسې چې د 3e پسي باور لري:

$$n_0 - 1 \in \mathbb{N} \quad n_0 - 1 > 1 - 1 = 0, \quad (1.14)$$

(د \mathbb{N} تعريف وگورئ) د

$$n_0 - 1 < n_0 \quad (n_0 = (n_0 - 1) + 1 \stackrel{1.1.4}{\Rightarrow} n_0 - 1 < n_0), \quad (1.15)$$

له امله او داچې $n_0 \in T$ د T کوچنی توکی دی، لرو:

$$n_0 - 1 \notin T. \quad (1.16)$$

له دې امله $n_0 - 1 \in A$ باور لري (پام: $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$). له دې سره د A د 2 $n_0 \in A$ خوي له امله ، داسې چې هم $(n_0 - 1) + 1 \in A$ دی، دا په دې معناچې $n_0 \in A$. تضاد.

کینونپوهنه

جملگی ۱. ۱. ۷: (د پاتي سره وېش) که $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ وي، نو گڼونه يا عددونه
(یواځني ټاکلي) شتون لري د $q, r \in \mathbb{Z}$ سره د $a = bq + r$ سره د $0 \leq r < b$ سره.

بڼوونه: وي دي

$$M := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n = a - bx \quad x \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.17)$$

وښايه: $M \neq \emptyset$

که $a \geq 0$ وي، نو دی

$$n := a - b \cdot 0 = a \in \mathbb{N}_0, \quad (1.18)$$

پس $n \in M$ ، که $a < 0$ وي، نو $0 < -a$ او له $a \leq b$ څخه د [3f](#) له مخي لاس ته راځي

$$1 \cdot (-a) \leq b \cdot (-a), \quad (1.19)$$

دا په دي معنا، جي

$$-a \leq -(ba) \stackrel{3g}{\Rightarrow} a + (-a) \leq a + (-ba), \quad (1.20)$$

دا په دي معنا، چي $0 \leq a - b \cdot a$ ، له دي سره $a - ba \in \mathbb{N}_0$ او $n = a - ba \in M$ دی (د [3d](#) له مخي بل امکانات نه شته).

د له مخي دا ډبري یو کوچنی توکی r لري: ، داپه دي معنا، چي $r \in \mathbb{N}_0$ او

$$r = a - b \cdot x_0 \text{ für ein } x_0 \in \mathbb{Z}; \quad (1.21)$$

له دې سره لاس ته راځي

$$0 \leq r. \text{ چیرته چې } a = b \cdot x_0 + r; \quad (1.22)$$

نور غواړو وښايو: $r < b$

نیسو $r \geq b$ (3d)، د 1.1.4 پسي $x_0 < x_0 + 1$ باور لري، له دې

سره $-(x_0 + 1) < -x_0$ ، د $b > 0$ له امله د 3f پسي لرو:

$$-(x_0 + 1)b < -x_0b \stackrel{3e}{\Rightarrow} a - (x_0 + 1)b < a - x_0b = r; \quad (1.23)$$

باور لري

$$a = bx_0 + r \stackrel{r < b}{\leq} bx_0 + b = b(x_0 + 1), \quad (1.24)$$

نو لاس ته راځي: $a - b(x_0 + 1) \leq 0$ ، له دې سره

$$a - (x_0 + 1)b \in M. \quad (1.25)$$

تضاد، ځکه چې r په M کې کوچنی گن یا عدد دی.

$$a = -42, b = 32 : 1.1.8 \text{ بېلگه}$$

$$-42 = 32 \cdot (-1) + (-10) \quad \text{اجازه نه لري، ځکه چې } r = -10 < 0 \text{ دی.}$$

$$-42 = 32 \cdot (-2) + 22 \quad \text{د پاتې سره وېشې، ځکه چې } 0 \leq r = 22 < b = 32 \text{ دی.}$$

د پښې یادونه:

... غوره 1.1

سری هم وایي، تر ایزومورفي پوري،، .

د طبیعي ګڼونو یا - اعدادو خای انخورونه

لکه $273 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$ ، له دې سره

$$0 \leq 2 < 10, 0 \leq 7 < 10, 0 \leq 3 < 10$$

جملگی 1.2.1 : وي دې $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ ، نو یواځنی ټاکلی ګڼ یا عدد $n \geq 0, a_i \in \mathbb{N}_0$ شتون لری د لاندې سره:

$$a = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0, \quad (1.26)$$

د کوم سره چې $a_n > 0, 0 \leq a_i < b \ (i = 1, \dots, n)$

بنوونه:

شتون:

که $a < b$ وي، نو $a = a_0$ ، د کوم سره چې $n = 0, a_0 = a < b$ راکوي.

وي دې $a \geq b$. د وېش له امله د پاتي سره راکوي:

$$a = bq_1 + a_0, 0 \leq a_0 < b, \quad (1.27)$$

$$q_1 = bq_2 + a_1, 0 \leq a_1 < b, \quad (1.28)$$

$$\vdots (1.29)$$

$$q_i = bq_{i+1} + a_i, 0 \leq a_i < b. (1.30)$$

وښايه: $q_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots$) د پورا ايندکشن له لارې:

$$: i = 1$$

نيسو $q_1 < 0$ ، نو باور لري

$$a = bq_1 + a_0 < b \cdot 0 + a_0 = a_0 < b, (1.31)$$

- تضاد يا مخامخوالی!

$$i \rightarrow i + 1$$

نيسو $q_{i+1} < 0 \Rightarrow q_{i+1} \leq -1$ داسې چې

$$q_{i+1} + 1 \leq -1 + 1 = 0, (1.32)$$

نو

$$q_i = bq_{i+1} + a_i < bq_{i+1} + b = b(q_{i+1} + 1) \leq b \cdot 0 = 0 (1.33)$$

- تضاد!

باور لري: $q_i \geq q_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots$) . ځکه چې:

$$q_i = bq_{i+1} + a_i \geq bq_{i+1} \stackrel{b \geq 2, q_{i+1} \geq 0}{\geq} 2q_{i+1} \geq q_{i+1}. (1.34)$$

له دې سره $q_1 \geq q_2 \geq \dots$ دی، نو $q_i > q_{i+1}$ دی .

کڼونپوهنه

د ډېرې يا سټ $M := \{q_i \mid q_i > 0\}$ لپاره باور لري، $M \neq \emptyset$ ، نو يو کوچنی توکی $q_n \in M$ شتون لري. پسي لاس ته راځی $q_{n+1} = 0$. له دې سره:

$$q_n = bq_{n+1} + a_n = a_n, \quad (1.35)$$

دابه دې معنا چې $a_n = q_n > 0$ ، د په ځټ اښوونې له لارې لاس ته راوړو:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + a_0 = b(bq_2 + a_1) + a_0 = q_2b^2 + ba_1b + a_0 = \dots \\ &= q_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0 \quad (q_n = a_n > 0). \end{aligned}$$

یواځیوالی:

نیسو، چې دوه مختلفې انځورونې شتون لري. وي دې

$$a = a_nb^n + \dots + a_1b + a_0 = \bar{a}_mb^m + \bar{a}_{m-1}b^{m-1} + \dots + \bar{a}_1b + \bar{a}_0, \quad (1.36)$$

د $n \geq m$, $a_n > 0$, $0 \leq a_i < b \forall i$, $\bar{a}_m > 0$, $0 \leq \bar{a}_j < b \forall j$ سره.

له دې امله: $a_0 - \bar{a}_0 = bq$ د یوه $q \in \mathbb{Z}$ لپاره، د $0 \leq \bar{a}_0 < b$ له امله باور لري

$$-b < -\bar{a}_0 \leq 0 \stackrel{0 \leq a_0 < b}{\implies} -b < a_0 - \bar{a}_0 < b. \quad (1.37)$$

که $q > 0$ وي، نو $q \geq 1$ دی او د $b > 0 : a_0 - \bar{a}_0 = bq \geq b \cdot 1 = b$ له امله، تضاد.

که $q < 0$ وي، نو $q \leq -1$ دی او د $b > 0 : a_0 - \bar{a}_0 = bq \leq (-1)b = -b$ له امله تضاد.

نو باید $q = 0$ باور ولري، له دې سره $a_0 - \bar{a}_0 = b \cdot 0 = 0$ او $a_0 = \bar{a}_0$ له دې امله باور لري:

$$a_n b^n + \dots + a_1 b = \bar{a}_m b^m + \dots + \bar{a}_1 b; \quad (1.38)$$

د b سره لنډونې له لارې لاس ته راځي:

$$a_n b^{n-1} + \dots + a_2 b + a_1 = \bar{a}_m b^{m-1} + \dots + \bar{a}_2 b + \bar{a}_1. \quad (1.39)$$

په ورته توګه لاس ته راځي: $a_1 = \bar{a}_1, a_2 = \bar{a}_2, \dots, a_m = \bar{a}_m$ ، داسې چې په ټوليزه توګه راګوي:

$$a_n b^{n-(m+1)} + \dots + a_{m+1} = 0 \quad (n \geq m) \quad (1.40)$$

که $n > m$ وي له $a_n > 0, b > 0 \Rightarrow$ سره وي، نو لاس ته تری راځي: کينه لور له صفر لويه ده، تضاد.

له دې امله باید $n = m$ باور ولري، او $a_m = \bar{a}_m, a_0 = \bar{a}_0, a_1 = \bar{a}_1, \dots$ هم. \square

پېژند (تعريف) 1.2.2: پورتنی د $a \in \mathbb{N}$ يواځنی انځورونه د $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ له لارې د a ځای انځورونه بلل کيږي نسبت بنسټ b ته، سومبولیک

$a = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)_b$	(1.41)
---	--------

ګڼونپوهنه

که $b = 10$ وي، نو له دیکادیکي *dekadischen* یا لسميزي انځوروني غبریزو، د $b > 0$ سره له بینار یا دوه بیزي انځوروني غبریزو. که وي، نو سری لیکي $A = 10, B = 11, \dots$ (د دې لپاره چې له $1 \ 0$ څخه یې توپیر وکړای شو).

یادونه 1.2.3: د a ځای انځورونه نسبت $b \geq 2$ ته کېدی شي د 1.2.1 د بنووني په بنسټ و ټاکل شي 1.2.

$$a = q_1 b + a_0 \quad 0 \leq a_0 < b \Rightarrow a_0 \text{ ټاکلی} \quad (1.42)$$

$$q_1 = q_2 b + a_1 \quad 0 \leq a_1 < b \Rightarrow a_1 \text{ ټاکلی} \quad (1.43)$$

$$q_2 = q_3 b + a_2 \quad 0 \leq a_2 < b \Rightarrow a_2 \text{ ټاکلی} \quad (1.44)$$

بېلګه 1.2.4: وي دې $a = 731, b = 10$ ، غوښتنه: د انځورونه $731 : 10 = 73 + 1$ ، نو

$$\left. \begin{array}{l} 731 = 73 \cdot 10 + 1 \quad 0 \leq 1 < 10 \Rightarrow a_0 = 1 \\ 73 = 7 \cdot 10 + 3 \quad 0 \leq 3 < 10 \Rightarrow a_1 = 3 \\ 7 = 0 \cdot 10 + 7 \quad 0 \leq 7 < 10 \Rightarrow a_2 = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 731 = (731)_{10} \quad (1.45)$$

بېلګه 1.2.5: وي دې $a = 367, b = 2$ ، غوښتنه یا ثبوت: د بینار-یا دوه بیزه انځورونه $367 = 183 \cdot 2 + 1 = \dots$ سری داسې لیکي:

$$\begin{array}{r|l} 367 : 2 & 183 : 2 & 91 : 2 & 45 : 2 & 22 : 2 & 11 : 2 & 5 : 2 & 2 : 2 & 1 : 2 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

ګڼونپوهنه

$$\Rightarrow 367 = (101101111)_2$$

ازماښت:

$$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 9 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + \\ 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^8 = 367$$

په \mathbb{Z} کې توپه ونه \mathbb{Z} Teilbarkeit in \mathbb{Z}

لاندې برخه (خوړا غټ ګډ پروېشونې ggT)

- پروېشونې او $\text{ggT}(a, b)$ (مقسوم عليه او) يا

د اوکلید له مخې د ggT ټاکنه

د

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$$

خوړا غټ ګډ پروېشونې (بزرګترین مقسوم عليه مشترک)

Georg Gutenbrunner 2002-10-04

پروېشونې او خوړا غټ ګډ پروېشونې $\text{ggT}(a, b)$

پېژند(تعريف) 2.1.1 : وي دې $a \in \mathbb{Z}$ ، سړی وايي $b \in \mathbb{Z}$ وېشي، که د يوه $a = b \cdot q$ لپاره باور ولري $q \in \mathbb{Z}$.

ګڼونپوهنه

سومبولیک: $b \mid a$ ، b د a پروېشوني بلل کيږي، q د b پوره کېدونکي يا کمپلمنتار پروېشوني بلل کيږي. که b د a پروېشوني (مقسوم عليه) نه وي، نو لیکو $b \nmid a$.

د 1 پروېشوني د \mathbb{Z} یونونه يا واحدونه بلکيږي (دا فقط $\{1, -1\}$ دي).

یادونه 2.1.2: هر ګڼ يا عدد $a \in \mathbb{Z}$ پروېشوني $1, -1, a, -a$ لري، داسي په نامه ساده (نا اصلي) پروېشوني. که نور پروېشوني شتون ولري، نو دا اصلي پروېشوني بلل کيږي.

لېما جمله ګوټي 2.1.3:

$$b \mid a \Rightarrow b \cdot c \mid a \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{Z} \quad .1$$

$$bc \mid ac, c \neq 0 \Rightarrow b \mid a \quad .2$$

$$a \mid b, b \mid c \Rightarrow a \mid c \quad .3$$

$$a \mid b, b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b| \quad .4$$

$$|a| = |b| \quad a \mid b, b \mid a \Rightarrow a = \pm b \quad .5$$

(also) (نو)

$$b \mid a_1, \dots, b \mid a_n \quad a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z} \quad .6$$

که $\forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z} :$ سره، نو باور لري

$$b \mid \sum_{i=1}^n c_i a_i \quad .(2.1)$$

بڼونه:

ad [4](#)

$$a \mid b = a \cdot q \quad \text{لپاره} \quad q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \Rightarrow |b| = |a| \cdot |q|, \text{ پرتله له دې } b = 0,$$

$$\text{نو } |q| \geq 1 \text{ او } |a| \cdot |q| \geq |a| \text{ هم } > 0 \text{ پرتله له دې } b = 0.$$

ad [5](#)

$$a \mid b \Rightarrow b = aq, b \mid a \Rightarrow a = br \Rightarrow \text{Ist } a = 0,$$

نو له دې $b = 0$ لاس ته راځي. که $b = 0$ وي، نو $a = 0$ هم. که a او b د صفر سره برابر نه وي:

$$|a| \leq |b| \quad \text{او} \quad |b| \leq |a|, \quad \text{له دې سره } |a| = |b|, \quad \text{دې، داپه دې معناچې } a = \pm b.$$

دې .

ad [6](#)

$$a_1 = bq_1, \dots, a_n = bq_n \quad (q_i \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i c_i = \sum_{i=1}^n (bq_i) c_i = b \underbrace{\sum_{i=1}^n q_i c_i}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow b \mid \sum_{i=1}^n a_i c_i \quad \forall c_i \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

لاس ته راوړنه 2.1.4: هر $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ ، پای دېرې پروېشونې b لري، ځکه چې د(4) 2.1.3 پسي باور لري: $|b| \leq |a|$ ، نو $-|a| \leq b \leq |a|$ ، له دې امله

ګڼونپوهنه

$$b \in \{-|a|, -|a| + 1, \dots, |a| - 1, |a|\}, \quad (2.3)$$

دا فقط پای ډېر دي.

$$0 = b \cdot 0 \quad \forall b \in \mathbb{Z}$$

مګر: $a = 0$ ټول ګڼونه يا ټول عددونه د پروېشونو په څېر لري: ، دا په دې معنا چې a ناپای ډېر پروېشوني لري.

$$(\Rightarrow a \neq 0) \quad a \in \mathbb{N}$$

پسې راتلنه يا لاس ته راوړنه 2.1.5 د: د زیاتيزو يا مثبتو

پروېشونو د ټاکلو له امله کېدی شي سړی ځان په هغه د محدود کړي. سره رابند يا

$$1 \leq b \leq \sqrt{a}$$

ځکه چې: که q د $a \neq 0$ يو پروېشونی وي د سره او

$$r < \sqrt{a} \quad a = qr \quad (r \in \mathbb{Z})$$

وي، نو دی ، ځکه چې:

$$r \geq \sqrt{a} \Rightarrow a = qr \geq q\sqrt{a} > \sqrt{a}\sqrt{a} = a \quad (2.4)$$

- تضاد! له دې سره r پورره کېدونکې پروېشوني ده د سره.

$$\sqrt{80} < 9$$

بېلګه 2.1.6: $a = 80$ ، ټول پروېشوني غوښتونوي دي. د له امله ټول

زیاتيز يا مثبت پروېشوني b دي د سره وټاکل شي:

$$1 \leq b \leq \sqrt{80} < 9$$

$$1, 2, 4, 5, 8; 80, 40, 20, 16, 10. \quad (2.5)$$

له دې سره ټول پروېشوني دي:

$$\pm 40, \pm 80 \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 16, \pm 20,$$

پېژد (تعريف) 2.1.7: وي دي $a, b \in \mathbb{Z}$ ، نو $c \in \mathbb{Z}$ د a, b ګډ پروېشونى بلل کيږي، که $c | a$ او $c | b$ وي .

ياودونه 2.1.8 : که $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ وي، نو a د 2.1.4 پسي يا له مخي فقط پای ډېر پروېشونى لري. که $b \in \mathbb{Z}$ په خوښه وي، نو a او b فقط پای ډېر پروېشونى لري. د اکسيوم 3d له مخي \mathbb{Z} توتالي (ټول يا بېخي) منظم دى، يعنى د a, b ګډ پروېشونى يو خورا لوي توکى دى. نو سړى کړى شي تعريف کړي:

پېژند يا تعريف 2.1.9 : (خورا غټ ګډ پروېشونى يا بزرګترين مقسوم عليه Greatest Common Divisor) وي دي $a, b \in \mathbb{Z}$ ، نه دواړه صفر، نو $\text{ggT}(a, b)$ (انګرېزي بې $\text{gcd}(a, b)$) د ټولو ګډ پروېشونو خورا لوى (يعنى تر ټولو لوي) دى . دا يواځنى ټاکلى دى. دى، که $\text{ggT}(a, b) = 1$ وي، نو نسبي لومړني يا پريم بلل کيږي يا پروېش پردې (ګډ اصلي پروېشونى نه لري).

ياودونه 2.1.10 : که $a, b \in \mathbb{Z}$ دواړه صفر نه وي. نو کېدى شي سړى د $\text{ggT}(a, b)$ ټاکلو لپاره په زياتيزو يا مثبتو ګډو پروېشونو ځنونه محدود کړي، ځکه چې 1 يو ګډ پروېشونى دى، يعنى باور لري:

$$\text{ggT}(a, b) \geq 1$$

بېلګه 2.1.11 : $a = 12, b = -8$

د زياتيز پروېشونو له دې لاس ته راځي $a : 1, 2, 3, 4, 6, 12; b : 1, 2, 4, 8$ ګډ مثبت پروېشونى دي:

$$1, 2, 4 \Rightarrow \text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(12, -8) = 4$$

د اویکلید یا اقلیدس له مخې د ggT ټاکنه

جمله 2.2.1 : د اویکلید الګوریتم (Euklidische [2.1](#) Algorithmus) وي دي

$a, b \in \mathbb{N}$ او بې له ټولیزو بندیزونو $b \leq a$. که $b \mid a$ وي، نو $r_0 = b$ ،
که $b \nmid a$ باور لري، ځکه چې د وېش له لارې د پاتې سره $q_i, r_i \in \mathbb{Z}$ سری په
لاندې توګه ټاکي:

$$a = q_0 b + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b$$

$$b = q_1 r_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_2 r_2 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

⋮

$$r_{m-1} = q_m r_m + r_{m+1}, \quad 0 \leq r_{m+1} < r_m$$

⋮

نو کوچنی $n \in \mathbb{N}_0$ شتون لري د $r_{m+1} = 0, r_n \neq 0$ سره او $r_n = \text{ggT}(a, b)$ باور لري .

بڼوونه : که $b \mid a$ وي، نو باور لري

$$r_0 = b = \text{ggT}(a, b), r_1 = r_{0+1} = 0 \quad (2.6)$$

$$a = b \cdot q_0 + r_1 \quad \text{د لپاره.}$$

وي دي ، نو ، $a = q_0 b + r_1, 0 \leq r_1 < b$ ، $b \nmid a$ باور لري د $r_1 \neq 0$ سره. د جوړښت له مخې باور لري

$$r_1 > r_2 > \dots > r_i > r_{i+1} > \dots \quad (2.7)$$

وي دي ، نو ، $M := \{r_i \mid r_i > 0\}$ ، $M \neq \emptyset$ ، دی، ځکه چې $r_1 \neq 0$ ، له دي سره $r_1 \in M$. د پوره نظم اصولو له مخې (Axiom 4) په M کې يو کوچنی توکی شتون لري: r_n . نو باور لري:

$$r_n > 0 \ (r_n \in M) \quad \text{und} \quad r_{n+1} = 0 \ (0 \leq r_{n+1} < r_n). \quad (2.8)$$

$$r_n = \text{ggT}(a, b) \quad \text{وښايي:}$$

• $r_n \mid a, b$: اخرنی مساوات يا برابرون دی

$r_{n-1} = q_n r_n (+ r_{n+1}),$	(2.9)
----------------------------------	-------

نو $r_n \mid r_{n-1}$. له اخر د مخه مساوات دي:

$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n,$	(2.10)
------------------------------------	--------

نو $r_n \mid r_{n-1}, r_{n-2}$

کینونپوهنه

- که په ورته توگه مخ ته لار شو، نو ترې لاس ته راځي
 $r_n \mid r_2, r_n \mid r_1, r_n \mid b$ او له دې امله

$$r_n \mid q_0 b + r_1 = a \Rightarrow r_n \mid a, b. \quad (2.11)$$

$$r_n = \text{ggT}(a, b)$$

t دې په خوښه یو د a, b مثبت پروېشونی وي. نو د لومړي مساوات څخه لرو:

$$r_1 = a - q_0 b \stackrel{2.1.3(6)}{\Rightarrow} t \mid r_1; \quad (2.12)$$

له 2 مساوات:

$$r_2 = b - r_1 q_1 \Rightarrow t \mid r_2, \quad (2.13)$$

او همداسې پسي، تر

$$t \mid r_{n-1}, t \mid r_n \stackrel{2.1.3(4)}{\Rightarrow} |t| \leq |r_n|. \quad (2.14)$$

t مثبت، $t \leq r_n \Rightarrow r_n$ مثبت له دې لاس ته راځي. $\text{ggT}(a, b)$ غټ گډ پروېشونی دی.

یادونه 2.2.2: که د اعدادو یو (یا دواړه) $a, b \in \mathbb{Z}$ د صفر کوچني وي، نو د اوکلید الگوریتم دې په $|a|$ همداسې په $|b|$ باندې وکارول شي، ځکه چې

مور د a, b د مثبت پروېشونو پیدا کیدل غواړو (پام $\text{ggT}(a, b) \geq 1$).

بېلگه 2.2.3: $a = 97, b = -44$ ، نو باور لري: $|b| = 44 \leq 97 = a$ ، نو لاس ته راځي:

$$97 = 44 \cdot 2 + 9 \quad 0 \leq 9 < 44$$

$$44 = 9 \cdot 4 + 8 \quad 0 \leq 8 < 9$$

$$9 = 8 \cdot 1 + 1 \quad 0 \leq 1 < 8$$

$$8 = 1 \cdot 8 \quad \Rightarrow \text{ggT}(97, -44) = 1$$

بېژند يا تعريف 2.2.4: (ګرښيز کمپوزېشن يا - يوځای اېښوونه): وي دي $a, b \in \mathbb{Z}$

، نو يو $c \in \mathbb{Z}$ د a, b ګرښيز کمپوزېشن بلل کيږي، که $c = xa + yb$ وي د $x, y \in \mathbb{Z}$ ځانګړو سره.

که $a, b \in \mathbb{Z}$ د c, d ګرښيز ښيز کمپوزېشنونه وي، په دي پسي $\alpha c + \beta d$ ، $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

هم ګرښيز کمپوزېشن دي..

جمله 2.2.5: (اوکلید) که وي $a, b \in \mathbb{Z}$ ، نه دواړه صفر، نو $\text{ggT}(a, b)$ د a, b :

يو ګرښيز کمپوزېشن دي، د ټاکلو $\text{ggT}(a, b) = xa + yb$ لپاره $x, y \in \mathbb{Z}$.

ښوونه:

لومړی $b > 0$: نو $0 < b \leq a$ ، يعني $a, b \in \mathbb{N}$ ، داسي چې د اوکلید الګوريتم [2.2.1](#) سره باور لري:

$$\text{ggT}(a, b) = r_n, r_{n+1} = 0, r_0 = b \quad b \mid a. \quad (2.15)$$

دویم . له دې سره باور لري

$$r_{n-2} = q_{n-1}r_{n-1} + r_n, \dots, a = q_0b + r_1$$

$r_1 = a - q_0b,$ نو	$a, b \mid r_1$ داپه دې معنا چې کمپوزېشن دی
$\Rightarrow r_2 = b - q_1r_1,$	$a, b \mid r_2$ داپه دې معنا چې کمپوزېشن دی
$\dots \Rightarrow \underbrace{r_n}_{\text{ggT}(a,b)} = r_{n-2} - q_{n-1}r_{n-1},$	$a, b \mid r_n$ داپه دې معنا چې کمپوزېشن دی

$$\Rightarrow \text{ggT}(a, b) = xa + yb \quad .1$$

د ټاکلو یا معلومو $x, y \in \mathbb{Z}$ لپاره .

$$d = \text{ggT}(a, b) = a = 1 \cdot a + 0 \cdot b \quad : b = 0 \quad .2$$

$$-b > 0 \quad b < 0 \quad .3$$

دې او له ۱ . حالته باور لري نو :

$$\text{ggT}(a, b) = x \cdot a + y \cdot (-b)$$

(که غوښتونې وي a له $-b$ سره بدله کړی، که $a \leq -b$ باور ولري). که $r_0 = b$ وي، نو $b \mid a$ او $\text{ggT}(a, b) = 0 \cdot a + 1 \cdot b$. باور لري.

□

یادونه 2.2.6: ښوونه بېرته جوړځتیزه ده، دا یو متود راګوي د $x, y \in \mathbb{Z}$ ټاکلو لپاره په $\text{ggT}(a, b) = xa + yb$ کې، داسې چې د اوکلید الګوریم څخه پاتې افاده کوو یا وایو له مخ ته تیرو د کرښیز کمپوزیشن لویو څخه او په لاندې راتلونکي مساوات کې یې ځایه ځایو کوو.

بېلګه 2.2.7: $a = 111, b = 39$ ، نو دی، $b = 39 \leq 111 = a$ ، داسې چې د [2.2.1](#) سره باور لري:

$$111 = 2 \cdot 39 + 33 \quad 3 = 33 - 5 \cdot 6$$

$$39 = 1 \cdot 33 + 6 \quad = 33 - 5(39 - 33) = 6 \cdot 33 - 5 \cdot 39$$

$$33 = 5 \cdot 6 + 3 \quad = 6(111 - 2 \cdot 39) - 5 \cdot 39$$

$$6 = 2 \cdot 3. \quad = 6 \cdot 111 - 17 \cdot 39$$

بېلګه 2.2.8: د $\text{ggT}(a, b)$ د ټاکلو لپاره، که a او b د یوې اووښتونې یا متحولې په واک کې وي یا تابع وي. غواړو پیدا کړو:

کڼونپوهنه

$$d := \text{ggT}(2k - 1, 9k + 4) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

د $d \mid 2k - 1, d \mid 9k + 4$ له امله، په ځانگړې توگه باور لري:

$$b \mid 9(2k - 1) + (-2)(9k + 1) = -17. \quad (2.16)$$

(x, y داسې ټاکل سوي دي، چې له هغې سره اووښتونې يا متحوله لري کيږي، دا

زیات وخت ممکن دی، ځکه چې $\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad d = xa + yb$ د .

له دې سره باور لري: $d = 1$ يا $d = 17$ ($d > 0$) . د کوم لپاره $k \in \mathbb{Z}$ $d = 17$ دی؟

که $d = 17$ وي، نو دا په دې معنا چې $17 \mid 2k - 1, 17 \mid 9k + 4$ ، يعني،

$$k = \frac{1}{2}(17t + 1) \quad t \in \mathbb{Z} \quad 2k - 1 = 17 \cdot t$$

د یوه لپاره، له دې امله .

له دې امله باید t ناجوره يا طاق وي (پرتله له دې $k \in \mathbb{Z}$ دی)، يعني $t = 2n - 1, n \in \mathbb{Z}$. له دې نمله :

$$k = \frac{1}{2}(17(2n - 1) + 1) = \frac{1}{2}(34n - 16) = 17n - 8. \quad (2.17)$$

برعکس يا په څټ: که د یوه $n \in \mathbb{Z}$ لپاره $k = 17n - 8$ وي، نو بلاور لري:

$$2k - 1 = 34n - 16 - 1 = 34n - 17 = 17(2n - 1)$$

دا په دې معنا چې $17 \mid 2k - 1$.

$$9k + 4 = 9 \cdot 17n + 4 - 72 = 17(9n - 4)$$

دا په دې معنا چې $17 \mid 9k + 4$.

له دې امله باور لري: $d = 17 \Leftrightarrow k = 17n - 8, n \in \mathbb{Z}$ په خوښه، $d = 1$ پرته له دې له [2.2.5](#) څخه لاس ته راوړنې.

کورولار یا جملگی 2.2.9: وي دې $a, b \in \mathbb{Z}$ ، نه دواړه صفر، نو باور لري:

$$d = \text{ggT}(a, b) \Rightarrow \text{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \quad .1$$

$$\text{ggT}(a, b) = |t| \text{ د } \text{ggT}\left(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}\right) = 1 \text{ سره، نو دى } t \mid a, t \mid b \quad .2$$

$$\text{ggT}(a \cdot m, b \cdot m) = |m| \cdot \text{ggT}(a, b) \text{ نو، } m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \quad .3$$

ښوونه: ad 1:

[2.2.5](#) له مخې باور لري: $d = xa + yb$ د ټاکلو $x, y \in \mathbb{Z}$ لپاره، يعنې $1 = x\frac{a}{d} + y\frac{b}{d}$ ($d \neq 0$) داسې چې باور لري، وي دې $t \geq 1$ په خوښه د $t \mid \frac{a}{d}, t \mid \frac{b}{d}$ سره، نو د [2.1.3\(6\)](#) له مخې: $t \mid 1$ ،

دا په دې معنا چې $|t| \leq 1$ ، يعنې $t \leq 1$ ، له دې سره $t = 1$ نو $\text{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

ad 2:

له [2.2.5](#) سره د معلومو $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ لپاره $1 = \alpha\frac{a}{t} + \beta\frac{b}{t}$ راکوي، يعنې $t = \alpha a + \beta b$ د وړاندنيونو(فرضيو) وروسته $|t|$ د a, b يو گډ پروېشونى دى. وي دې $s \geq 1, s \mid a, s \mid b$ په خوښه، نو د [2.1.3](#) له مخې $s \mid t$ بارورلري، داسې چې $|s| \leq |t|$ دى، دا په دې معنا چې $s \leq |t|$. يعنې $\text{ggT}(a, b) = |t|$ دى.

ad 3:

$$\begin{aligned}
 & d = \text{ggT}(a, b) \quad \text{د 1 له مخې د} \\
 & \text{لپاره باور لري، چې} \quad \text{د} \quad \text{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \\
 & \text{له امله د} \quad \text{2.1.3 پسي لاس ته راځي} \quad d \mid a, b \\
 & \text{له دي سره لاس ته} \quad \text{md} \mid ma, mb \\
 & \text{د 2 پسي لاس ته راځي} \quad \text{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \text{ggT}\left(\frac{ma}{md}, \frac{mb}{md}\right) = 1 \\
 & \text{داپه دي معنا چې} \quad |md| = \text{ggT}(ma, mb)
 \end{aligned}$$

$$|m| \cdot d = |m| \text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(ma, mb).$$

يادونه 2.2.10 : که $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ وي (ريښتوني يا راشنل)، نو د

تولو $d = \text{ggT}(a, b)$: لپاره $\frac{\frac{a}{d}}{\frac{b}{d}} = \frac{a}{b}$ باور لري. د [2.2.9](#) (1) له مخې باور لري:

$$\text{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \quad \text{، دا په دي معنا چې} \quad \frac{1}{b} \text{ کېدی شي په } \frac{c}{d} \text{ بڼه د}$$

$$\text{ggT}(c, d) = 1 \quad \text{سره وليکل شي} \quad (c, d) \text{ حتی يواځني ټاکلي دي}.$$

Korollar (جمله، چې د بنوول شوي جملې څخه لاس ته راځي کورولار بلل کيږي)
2.2.11:

وي دي $a, b \in \mathbb{Z}$ ، نه دواړه صفر، نو باور لري: $d \in \mathbb{N}$ گڼ يا عدد ټيک هلته خرا

غټ پروېشونې (لنډ:خ غ پ ggT = gcm) دی، که $\text{ggT}(a, b)$

$$(1) \quad d \mid a, d \mid b$$

(2) $c \mid a, c \mid b$ (په خوښه $c \in \mathbb{Z}$) له دي لاس ته راځي $c \mid d$.

ښوونه:

 (\Rightarrow)

دی $d = \text{ggT}(a, b)$ ، نو باور $d \mid a, d \mid b$ لري، دا په دې معنا چې (1) باور لري،

وي دې c د a, b په خوښه پروېشونې، نو له $d = xa + yb$ ($x, y \in \mathbb{Z}$) لاس ته

راځي (جمله 2.2.5 دې وکتل شي)، چې $c \mid d$ دی (2.1.3) ، دا په دې معنا چې (2) باور لري.

 (\Leftarrow)

د (1) له مخې d د a, b گډ پروېشونې دی. وي دې $c \in \mathbb{Z}, c \geq 1$ په خوښه د

پروېشونې، نو د (2) له مخې لاس ته راځي $c \mid d$ ، دا په دې معنا چې د 2.1.3

پسي $|c| \leq |d|$ دی ، له دې سره $c \leq d$. يعني d د a, b خورا غټ گډ پروېشونې (بزرگترین مقسوم علیه مشترک؟) دی

□

جمله 2.2.12 : (بنسټيزه lemma) مرستندوی جمله چې د ښوونې يا ثبوت په جريان کې په کار راځي)) وي دې $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, \text{ggT}(a, b) = 1$ ، نو د $a \mid b \cdot c$ له مخې لاس ته راځي، چې $a \mid c$ دی.

ښوونه : له $\text{ggT}(a, b) = 1$ لاس ته راځي

$1 = xa + yb$	(2.18)
---------------	--------

ګڼونپوهنه

د څه يا ټاکلو $x, y \in \mathbb{Z}$ لپاره. له دې امله لاس ته راځي

$$c = xca + ybc. \quad (2.19)$$

د چې د وړاندنيوني $a \mid bc, a \mid a$ څخه باور لري $\stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} a \mid c.$

دیني یادون: اوکلید د 200-365 ز ک څخه له مخه.

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$$

خورا غټ ګډ پروېشوني $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$

پېژند يا تعريف :

لومړی : $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ دې وي، نو $b \in \mathbb{Z}$ د a_1, \dots, a_n ګډ پروېشوني بلل کيږي، که $b \mid a_i, i = 1, \dots, n$ باور دلري.

دويم : د ټول خورا غټ ګډ پروېشوني (نسبت \leq ته) د $\text{ggT}(a_1, \dots, a_n)$ سره په نڅښه کيږي. که ټول $a_i = 0$ صفر نه وي، نو $a_i \neq 0$ هر يو فقط پای ډېر پروېشوني لري، يعنې هم پای ډېر ګډ پروېشوني. د دوي تر منځ يو خورا غټ شتون لري.

درېم : که $\text{ggT}(a_1, \dots, a_n) = 1$ وي، نو a_1, \dots, a_n نسبي لومړني (وروسته به دا پروېش پردي وبلل شي) بلل کيږي.

څلورم : a_1, \dots, a_n جوړه (حفت) نسبي لومړني ګڼونه يا عددونه بلل کيږي، که $\text{ggT}(a_i, a_j) = 1$ وي د ټولو $\forall i \neq j$ لپاره.

يادونه 2.3.2 : له جوړه نسبي لومړنيو څخه لومړني لاس ته راځي. برعکسونه يا په

څټ کېدنه یې باور نه لري:

$$\text{ggT}(1, 2, 4) = 1, \text{ggT}(2, 4) = 2$$

دا په دې معنا چې $(1, 2, 4)$ نسبي لومړني مګر نه جوړه لومړني ګڼونه دي.

جمله 2.3.3: وي دې $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ، نه ټول صفر او $d = \text{ggT}(a_1, \dots, a_n)$ نو باور لري:

$d = \sum_{i=1}^n x_i a_i$	(2.20)
----------------------------	--------

د څه يا ځنو $x_i, i = 1, \dots, n$ لپاره.

ښوونه: وي دې

$M := \{c_1 a_1 + \dots + c_n a_n \in \mathbb{Z} \mid c_i \in \mathbb{Z} \ i = 1, \dots, n\},$	(2.21)
--	--------

نو $a_i \in M, i = 1, \dots, n$ ($c_i = 1, c_j = 0$) باور لري د $(i \neq j)$ او $M \neq \emptyset$ لپاره. د $a_i \in M$ له امله هم $-a_i \in M$ باور لري، که $a_i \notin \mathbb{N}$ وي، نو $-a_i \in \mathbb{N}$ باور لري، دا په دې معنا چې هم M طبيعي يا پيداېښتي ګڼونه يا عددونه لري. د \mathbb{N} د ټولنظم له مخې په M کې د ټولو طبيعي اعدادو ډېری يا ست يو خوا کوچنی توکی d^* لري، دا په دې معنا چې

$d^* = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$	(2.22)
-----------------------------------	--------

د ځنو $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ لپاره. وښايی: $d^* = d = \text{ggT}(a_1, \dots, a_n)$

د پاتې سره د a_i وېشنه په d^* له لارې راکوي:

$$a_i = q_i d^* + r_i, 0 \leq r_i < d^*; \quad (2.23)$$

نو $r_i = a_i - q_i d^*$ او $r_i \in M$ د a_1, \dots, a_n کرښيز کمپنیشن دی،
همداسې a_i ، په تعقیب کمښت یا تقریق هم. له دې سره له
څخه لرو. یعنې:

$$a_i = q_i d^* \quad \text{und} \quad d^* \mid a_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.24)$$

وي دې a_1, \dots, a_n, t د $t \geq 1$ یو په خوښه گډپروېشونی، نو t هر کرښيز
کمپنیشن وېشي یعنې دا لاندې هم

$$t \mid x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = d^*; \quad (2.25)$$

$$d^* = \text{ggT}(a_1, \dots, a_n) = d.$$

له دې سره د [2.2.11](#) پسې لرو، چې

□

د $d = \text{ggT}(a_1, \dots, a_n)$ د ټاکلو لپاره تلنلار:

د $n = 2$ لپاره: د اویکلید الگوریتم، جمله [2.2.1](#).

د $d \geq 1$ له امله کېدی شي سری ټول ونیسي (فرض کړي) پرته له دې

مطلق ارزښت، a_i ، چې صفر دي، (لري) پریرودي. سری اوس د a_1, \dots, a_n لاندې

هغه خورا کوچنی لټوي، دا دي بي له توليزو بنديزونو a_1 وي (کېدی شي نمره بدل شي). د پاتي سره د a_2, \dots, a_n وېش د a_1 له لارې راګوي:

$$a_i = q_i a_1 + r_i, 0 \leq r_i < a_1 \quad i = 2, \dots, n. \quad (2.26)$$

$$d = \text{ggT}(a_1, \dots, a_n) = d' = \text{ggT}(a_1, r_2, \dots, r_n) \quad \text{وېنایی:}$$

وي دي

$$d := \text{ggT}(a_1, \dots, a_n), d' := \text{ggT}(a_1, r_2, \dots, r_n); \quad (2.27)$$

نو باور لري $d \mid a_1, \dots, a_n$ ، يعني ، $d \mid a_1$ ، او له $r_i = a_i - q_i a_1$ لاس ته راځي $d \mid r_i \quad (i = 2, \dots, n)$ ، دا په دي معناچې d د a_1, r_2, \dots, r_n يو ګډ پروېشونی دی. d' خورا لويه ده له دي لاس تخ راځي $\Rightarrow d \leq d'$

برعکس يا په څټ باور لري: d' وېشي،، يعني داسي $a_1, d' \mid r_i \quad (i = 2, \dots, n)$

لاس ته راځي $a_i = q_i a_1 + r_i : d' \mid a_i \quad (i = 2, \dots, n)$ (د ليما يا جملگی

[2.1.3](#) پسې)، يعني d' د a_1, \dots, a_n ګډپروېشونی دی. d خورا لوی دی له دي لاس ته راځي $\Rightarrow d' \leq d \stackrel{3b}{\Rightarrow} d = d'$.

يادونه : په پام کې دي وي: د دي تئلار سره ګڼونه يا غددونه تل کوچني کيږي ($0 \leq r_i < a_1$) او د امکان په حالت کې حتی کميږي (کېدی شي $r_i = 0$ وي).

بېلګه 2.3.5 : $d = \text{ggT}(721, 613, 114)$

ګڼونپوهنه

$a_1 = 114$ ، وېش له پاتې سره :

$$721 = 6 \cdot 114 + 37, 0 \leq 37 < 114$$

$$613 = 5 \cdot 114 + 43, 0 \leq 43 < 114$$

$$d = \text{ggT}(114, 37, 43)$$

له دې سره:

$$\bar{a}_1 = 37$$

، وېش له پاتې سره:

$$114 = 4 \cdot 37 + 3, 0 \leq 3 < 37$$

$$43 = 1 \cdot 37 + 6, 0 \leq 6 < 37$$

$$d = \text{ggT}(37, 3, 6)$$

له دې سره:

$$\bar{a}_1 = 3$$

، وېش له پاتې سره:

$$37 = 12 \cdot 3 + 1, \dots \Rightarrow d = 1$$

۳ - لومړني ګڼونه (اعداد) Primzahlen

لومړني ګڼونه \mathbb{P}

Die Menge der Primzahlen \mathbb{P} بنسټونه *Grundlagen*

پېژند(تعريف) 3.1.1 : يو طبيعي گن يا عدد p لومړنی بلل کيږي، که هغه فقط ساده پروېشوني ولري، دا په دې معنا، چې فقط $\pm 1, \pm p$ پروېشوني دي. د ټول لومړنيو اعدادو ډېری د \mathbb{P} سره په نخښه کوو. جمله : (اویکلید) ناپای ډېر لومړني گنونه شته.

بنوونه: نیسو، چې p_1, \dots, p_n ټول لومړني اعداد دي چې شتون لري. جوړوو

$$N := p_1 \cdots p_n + 1. \quad (3.1)$$

ترخېړني نیسو

$$M := \{q \in \mathbb{N} \mid q > 1 \text{ او } q \mid N\}, \quad (3.2)$$

نو $M \neq \emptyset$ دی، ځکه چې $N \in M$ (په ساده توگه $N \mid N, N > 1$). د ټول نظم اصولو سره يو خورا کوچنی توکی q شتون لري، دا په دې معنا، چې $q > 1$ او $q \mid N$. وینایي: يو لومړنی عدد دی:

وي دې $t \mid q$ د $t > 1$ سره، نو د [2.1.3](#) پسي لاس ته راځي، چې $t \mid N \Rightarrow t \in M$ له $q, t \leq q$ د $M \Rightarrow t = q$ خورا کوچنی توکی دی. يعنې q لومړنی گن دی، له نیوني څخه لاس ته راځي: $\exists j : q = p_j$. له دې سره $q \mid N (q \in M)$ باولري او په ساده توگه :

کڼونپوهنه

$$p_j \mid p_1 \cdots p_n \stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} p_j \mid N - p_1 \cdots p_n = 1 \Rightarrow p_j \leq 1, (3.3)$$

- تضاد \square

د ټول لومړنيو اعدادو ټاکل، چې $\leq n$ دي ($n \in \mathbb{N}$ ورکړ شوی): د اراتوستنس [3.1](#) *Eratosthenes* غلبيل:

ټوله 1 تر n پورې ټول کڼونه وليکه، که ټول لومړني اعداد $\leq \sqrt{n}$ پېژندل شوي وي، نو سړی دې د ټولو دې لومړنيو کڼونو په ډېرواره کرښه راکاږي (تر پخپله لومړني $\leq \sqrt{n}$ عدد پورې)، اوس فقط لومړني کڼونه پاتې دي.

بېلگه 3.1.3: ټول له ≤ 50 لومړني عددونه وټاکي. د $\sqrt{50} < 8$ او 2, 3, 5, 7 له امله ټول لومړني عددونه < 8 لاس ته راځي (≤ 50 جوړه اعداد کېدی شي تر 2 پورې لري شي):

2, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23, ~~25~~, ~~27~~, 29, 31, ~~33~~, ~~35~~,
37, ~~39~~, 41, 43, ~~45~~, 47, ~~49~~

ټول اعداد چې کرښه په راکښل شوي نه ده لومړني اعداد دي او ≤ 50 دي.

یادوني 3.1.4:

لومړی: د دې لپاره چې ایا یو عدد پريم دی، که نه، یوه اغیزمنه – یا اقتصادي تڼلار نه شته (لږ تر لږه تر اوسه، وگورئ [Gut02b, Rie94])، کارونه یا استعمالیې په کریپتولوژي Kryptologie کې کيږي.

دویم: د لومړنیو ګڼونو جمله:

که $\pi(x)$ د لومړنیو ګڼونو ګڼون یا تعداد وي ، نو باور لري

$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$	(3.4)
-------------------------------	-------

دریم: د لویې $x \in \mathbb{N}$ لپاره

نږدې:

$$\pi(100) \sim 178; \pi(1000) \sim 1247; \pi(10000) \sim 9360$$

څلورم: لومړني اعداد په طبيعي اعدادو کټ ډېر نامنظم خواره دي، له يوې خوا يو په بل پسې لومړني ګڼونه شتون لري، چې د هغو کمښت 2 دی، داسې په نامه د لومړنیو اعدادو غبرګوني: (اټکل کيږي، چې ناپای ډېر د لومړنیو اعدادو غبرګوني شتون لري، د دې لپاره [Gut02a], [HL22] وګورئ).

له بلې خوا د دوه لومړنیو اعدادو ترمنځ په خوښه لویې تشياوي شتون لري:وي دي

$$(n+1)! + 2, \dots, (n+1)! + (n+1) \quad n \in \mathbb{N}$$

، نو ګڼونه

همدا اوس n يو په بل پسې اعداد دي، چې لومړني اعداد نه دي، ځکه چې:

$$2 \leq k \leq n+1 \quad g = (n+1)! + k$$

د سره وي، نو باور لري

$$\stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} k \mid g \quad k \mid k, k \mid (n+1)!$$

، کوم ته چې له دې لاس ته راځي

کڼونپوهنه

او $k \neq 1 (2 \leq k)$ $k \neq g (g = (n+1)! + k > k)$ (د اعدادو پرلپسې

کېدی شي لا له پخوا رامنځ ته شي، لکه د $n = 4$ لپاره $24 - 27$ دی دا همدا

اوس یوه تشیا ده، لکه چې غوښتل مو چیرته چې $27 \ll (4+1)! + 2$ (دی).

پنځم: د دیرینیلیت^{3.2} Dirichlet جمله: که $a, b \in \mathbb{N}$ وي د $\text{ggT}(a, b) = 1$ سره، نو ډېری دا لاندې خوندي لري

$$\{ak + b \mid k = 1, 2, \dots\} \quad (3.5)$$

ناپای ډېر لومړني اعداد. (د اریتمیتیکی پروګرشن لپاره د لومړنیو اعدادو جمله، تولیزه بنوونه ډېره پېچلې ده!)

د $\{4k + 1 \mid k = 1, 2, \dots\}$ لپاره، همداسې $\{4k + 3 \mid k = 1, 2, \dots\}$ لپاره لږ څه وروسته بنايو (جمله [9.2.8](#) همداسې جمله [3.1.10](#) وګورئ).

شپږم: د $2^{2^n} + 1 (n \in \mathbb{N})$ بنې عدد د فرمات عدد [3.3](#) *Fermat'sche Zahl* بلل کېږي، د $n = 0, 1, 2, 3, 4$ لپاره په رېښتوني لومړني اعداد دي: $3, 5, 17, 257, 65.537$

له دې پسې چا نور د فرمات اعداد پیدا نه کړل. تر اوسه معلومه نه ده، چې ایا پای او که ناپای ډېر فرمات ګڼونه شتون لري. د فرمات کوچنی عدد، چې تراوسه یط څوک

ترتیبولی نه شي F_{33} دی.

اوم : يو د $2^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) ښي عدد د مرزن عدد [3.4](#) *Mersenne'sche Zahl* بلل کيږي. د دې ډول ټول اعداد لومړني اعداد نه دي. دلته هم روښانه نه ده، چې ايا پای ډېر مرزن ګڼونه شتون لري. دا تراوسه خورا ستر لومړنی عدد مرزن عدد دی، داسې

$$p = 2^{13406857} - 1$$

ناميز

اتم: د ګولډباين ګومان : هر جوړه عدد له څلور سره برابر يا ترې لوی وي د دوه لومړنيو اعدادو د زياتون يا جمعې په څېر انځوروي دی. (د بېلګې په توګه

$$4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, \dots$$

د عدد 1742 په هکله ګومان کېدی

شي نه تراوسه وښوول شي او نه رد شي.

جمله 3.1.5: که $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ وي او p يو لومړنی عدد د $p \mid a_1 \cdots a_n$ سره

وي، نو لږ تر لږه p د ضريبونن يا څلوونو $a_i, 1 \leq i \leq n$ څخه يو وېشي.

ښوونه: د n پسي ايندګڼن:

: $n = 1$ ساده دی.

: $n \rightarrow n + 1$

وي دې $p \mid a_1 \cdots a_n a_{n+1}$ ، باور لري $p \mid a_{n+1}$ ، نو وښوول شو. پرته له دې:

$$\text{ggT}(p, a_{n+1}) = 1 \quad p \nmid a_{n+1}$$

دی، داسې چې د بنسټيزې جملهګۍ [2.2.12](#)

څخه لاس ته راځي، چې $p \mid a_1 \cdots a_n$ د ايندګڼن د نيونې يا فرضيې څخه لاس ته

راځي $p \mid a_i$ د $1 \leq i \leq n$ لپاره.

□

ګڼونپوهنه

لاس ته راورنه 3.1.6: د $n = 2$ لپاره باور لري: د $a_1 \cdot a_2$ یو پروپشنی دی،

p لومړنی ګڼ له دی لاس ته راځي $p \mid a_1 \vee p \mid a_2 \vee p \mid a_1, a_2$. په څټوالی یا

معکوسوالی هم باور لري: که g یو طبیعي عدد وی د،

سره، نو تل دواړه $g \mid a_1 \cdot a_2$ ($a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$) $g \mid a_1 \vee g \mid a_2$ لاس ته راځي،

، نو g بیا یو لومړنی ګڼ دی.

ښوونه: نیسو، چې g لومړنی عدد نه دی، نو g بیا اصلي پروپشنی لري، دا په دې

معنا چې $g = a \cdot b$ ، چېرته چې $1 < a < g, 1 < b < g$ دي. نو باور لري:

$g \mid a \cdot b$ ، یعنی د نیونی له مخې، $g \mid a \vee g \mid b$ که $g \mid a$ وي، نو

د $a \mid g$ ($g = a \cdot b$) سره لاس ته راځي، چې $g = \pm a$ - تضاد.

که $g \mid b$ وي، نو په ورته توګه لاس ته راځي $g = \pm b \Rightarrow g$ ، چې باید لومړنی وي.

□

نور خوښونه Weitere Eigenschaften

جمله 3.1.7: (لومړني ضربیتوته ونه یا په لورنیو ضربیونو توتته کونه) هر طبیعي

عدد $n > 1$ کېدی شي په یواځني ډول د لومړنیو عددونو د ضرب په څېر ولیکل شي) دا په دې معنا، چې لومړني ګڼونه د \mathbb{N} ضربی جوړښتڅښتنی دي).

ښوونه:

شتونوالی:

په n پسې د (توليز شوي) ايندکشن Induktion له لارې:

$$: n = 2$$

ساده

$$: n - 1 \rightarrow n :$$

بنايو: جمله د $2, 3, \dots, n - 1$ لپاره ټيک ده.

نسيده، نيسو چې $\exists k : 2 \leq k \leq n - 1$ ، کوم چې د لومړنيو گنونو يا عددونو ضرب نه دی. وي دي k_0 د دوی ترمنځ خورا کوچنی عدد. نو k_0 لومړنی عدد نه دی. يعنې که باور ولري $k_0 = a \cdot b$ ، چېرته چې $a < b < k_0$ ، له دي سره لاس ته راځي: a او b هر يو د لومړنيو گنونو ضرب دی، له دي امله k_0 هم د لومړنيو گنونو ضرب دی - تضاد!

وښايي: n د لومړنيو عددونو ضرب نه دی.

که n لومړنی عدد وي، نو مور کار تمام کړ.

که n لومړنی عدد نه وي، نو $n = cd$ باور لري د $1 < c, d < n$ سره. د پورته پام کوني څخه جمله د c, d لپاره ټيک ده، دا په دي معنا چې c, d هر يو د لومړنيو عددونو ضرب دی، يهني هم $n = c \cdot d$.

يواخپوالی يا يواځنوالی:

وي دي $n > 1$ او

$n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$	(3.6)
---------------------------------------	-------

کنونپوهنه

د کومو سره چې $p_i, q_j \in \mathbb{P}, r \leq s$ د $p_1 \mid p_1 \cdots p_r$ له امله لاس ته راځي $p_1 \mid q_1 \cdots q_s$ ، د [3.1.5](#) پسې لرو $p_1 \mid q_i$ (لومړنی عدد) د لږ تر لږه یوې i لپاره د $1 \leq i \leq s$ سره، له دې امله $p_1 = \pm 1$ یا $p_1 = \pm q_i$ (لومړنی عدد)، یعنی $p_1 = q_i$ (لومړنی عدد دی، یعنی > 1). د نمره بدلون سره کېدی سړی لاس ته راوړي: $p_1 = q_1 (q_i \rightarrow q_1)$. له دې سره لاس ته راځي

$$p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s \Leftrightarrow p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s; \quad (3.7)$$

په ورته توگه مخ ته څو، تر $p_r = q_r, 1 = q_{r+1} \cdots q_s$ پورې.

که $s > r$ وی نو باور لري چې q_{r+1} بنی خوا وېشي: $q_{r+1} \mid 1$ ، یعنی $q_{r+1} \leq 1$ ، و q_{r+1} ته تضاد چې لومړنی عدد دی له دې لاس ته راځي $s = r \Rightarrow$ او له دې سره $p_i = q_i, 1 \leq i \leq r$.

یادونه 3.1.8: که $g \in \mathbb{Z}$ وي د $g < -1$ سره، نو $-g > 1$ دی او د [3.1.7](#)

پسې $-g = p_1 \cdots p_r$ د ځنو، یواځنیو، لومړنیو ضربونو لپاره، یعنی

$$g = -p_1 \cdots p_r$$

یادونه 3.1.9: که د $n > 1$ د لومړنیو ضربونو توپه کونه سره یوځای کړو

$$n = p_1 \cdots p_r \quad (3.8)$$

مساوي عددونه سره یوځای کړو، نو د لومړنیو عددونو توان لاس ته راځي، یعنی

$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}, \alpha_i \in \mathbb{N}.$	(3.9)
--	-------

که دا دلته نه شتون لرونکو لومړنیو عددونه p د $p^0 := 1$ له لارې پوره کړو، نو سری لیکلی شي:

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p} \quad (3.10)$$

(د ټول لومړنیو عددونو ضرب، فقي پای ډېر $\alpha_p \neq 0$) له دې سره

هم لیکلی شو. یعنی د په ټولیزه توګه د ټول $g \in \mathbb{Z}, g \neq 0$ لپاره باور لري:

$$1 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^0$$

$$g = \pm \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p} \quad (\alpha_p \in \mathbb{N}_0). \quad (3.11)$$

جمله 3.1.10 (ډیرینلیت) د $4k + 3$ ($k = 0, 1, \dots$) بڼې ناپای ډېر لومړني
 ګڼونه شتون لري، دا به دې معنا، چې د $\{3, 7, 11, 15, 19, \dots\}$ عدونو په ډېری کې ناپای ډېر لومړني عددونه شتون لري..

بنوونه: نیسو چې په دې ډول ډېر لومړني عددونه شتون لري، چې د p_1, \dots, p_s سره یې سری په نخښه کولی شي. سری جوړوي

$$N := p_1^2 \cdots p_s^2 + 2; \quad (3.12)$$

کنونپوهنه

د نیوني یا فرضیې له مخې د ځنو
 $k_i \in \mathbb{N}_0 \ (i = 1, \dots, s)$
 لپاره
 $p_i = 4k_i + 3$
 باور لري، یعنی

$$p_i^2 = (4k_i + 3)^2 = 16k_i^2 + 24k_i + 9 = 4k + 1 \quad (3.13)$$

د یوه k لپاره. له دې امله
 $m \in \mathbb{N} \quad (4k + 3)(4l + 3) = 4m + 1$
 لپاره. د یوه
 $(4n + 1) + 2 = 4n + 3 \quad N := p_1^2 \cdots p_s^2 + 2$
 له دې امله
 بڼه لري.

وي دې $N \in \mathbb{N} \ (N > 1) \quad N = q_1 \cdots q_r$
 په لومړنیو ګڼونو توپه ونه. نه
 دي (ځکه چې بیا به N هم له دې بڼې وي). له دې امله q_j ،
 $q_j = 4k + 3 \quad 1 \leq j \leq r$
 سره (د پاتې سره وپشنه راکوي):
 $q_j = 4 \cdot k + a \quad 0 \leq a < 4$
 یعنی،

مګر $4k + 2$ او $4k + 0$ لومړني عددونه نه دي. که همدا اوس ترې
 $N = 4k + 3$
 دباندي دی. 2 د ضرب په حیث نه رامنځ ته کيږي، ځکه چې
 ناچوره دی.)

لاس ته راځي: $q_j = p_i$ د یوه $i \ (1 \leq i \leq s)$ لپاره چېرته چې لرو $q_i \mid N$ او

$$q_j = p_i \mid p_1^2 \cdots p_s^2 \Rightarrow q_j \mid N - p_1^2 \cdots p_i^2 \cdots p_s^2 = 2, \quad (3.14)$$

یعني $q_j \leq 2$ - تضاد ($q_j = 4k + 3 \geq 3$).

□

د ggT او kgV ترمنځ اړیکې (د x او y کک زیاتځلي - -

جمله 3.2.1: وي دی ، $b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p}$ ، $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}$ ، نو باور لري

$$\text{ggT}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}. \quad (3.15)$$

بنوونه: بنايو: وی دی ، $x = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\rho_p}$ ، $y = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sigma_p}$ ، نو باور لري:

$$x \mid y \Leftrightarrow \rho_p \leq \sigma_p \quad \forall p \in \mathbb{P}$$

(\Rightarrow) يا له نډې لاس ته راځي

$$x \mid y \Rightarrow y = x \cdot z$$

د $z = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\tau_p}$ سره په لومړنيو ضربونو ټوټه کوني په حيث، يعني

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\rho_p + \tau_p} = \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\rho_p} \right) \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\tau_p} \right) = xz = y = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sigma_p}. \quad (3.16)$$

په لومړنيو ضربونو ټوټه کوني د يواځيوالي په بنسټ لاس ته راځي عددونو په

$$\rho_p + \tau_p = \sigma_p \quad \forall p \in \mathbb{P}; \quad (3.17)$$

کڼونپوهنه

$$\rho_p \leq \sigma_p \quad \forall p \in \mathbb{P}$$

د [1.1.4](#) پسي لاس ته راځي

(\Leftrightarrow)

د [1.1.4](#) پسي باور لري:

$$\sigma_p = \rho_p + \tau_p \quad \tau_p \in \mathbb{N}_0 \quad \forall p \in \mathbb{P}. \quad (3.18)$$

وي دي $z := \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\tau_p}$ ، نو لاس ته راځي:

$$xz = \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\rho_p} \right) \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\tau_p} \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\rho_p + \tau_p} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sigma_p} = y, \quad (3.19)$$

$xz = y \Rightarrow x \mid y$
يعني

وي دي $d := \text{ggT}(a, b)$ او $d = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\gamma_p}$ ، د $d \mid a, b$ له امله باور لري
له دي سره $\gamma_p \leq \alpha_p, \beta_p \quad \forall p \in \mathbb{P}$.
برعکي له $\gamma_p \leq \min(\alpha_p, \beta_p)$.

$$\min(\alpha_p, \beta_p) \leq \alpha_p, \beta_p \quad \forall p \in \mathbb{P}, \quad (3.20)$$

څخه لاس ته راځي، چي عدد $c := \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}$ عددونه a, b ويشي، د

جملې [2.2.5](#) او جملگي يا کورولار [2.2.11](#) څخه $c \mid d$ لاس ته راځي، دا په دي معن،

چې $\min(\alpha_p, \beta_p) \leq \gamma_p \quad \forall p \in \mathbb{P}$
يعني د اکسيوم [3b](#) سره لاس ته راځي .

$$\gamma_p = \min(\alpha_p, \beta_p) \quad \forall p \in \mathbb{P}$$

له دې سره د لومړنيو ضربيونو يواځيوالي سره لاس ته راځي، چې $c = d$ ، دا په دې معنا، چې

$$\text{ggT}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}. \quad (3.21)$$

بېلګه 3.2.2 : وي دې ، نو د ناشتونو
لومړنيو ګڼونو د پوره کېدنې له امله د 0 اکسپننټ له لارې باور لري:

$$a = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2, b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^3$$

$$\Rightarrow \text{ggT}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p, \beta_p)} = 2^2 3^2 5^0 7^0 = 2^2 3^2. \quad (3.22)$$

کورولار يا جمګي 3.2.3 :

لومړی :

وي دې $a_i \in \mathbb{N}$, sei $a_i = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_{i,p}}$, $i = 1, \dots, n$
د لومړنيو ضربيونو ټوټه
کونه، نو باور لري

$$\text{ggT}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min_{1 \leq i \leq n} (\alpha_{i,p})}. \quad (3.23)$$

$$\text{kgV}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}. \quad (3.25)$$

بنوونه: وي دي $v = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$ ، نو $v > 0$ دی. له

$\alpha_p, \beta_p \leq \max(\alpha_p, \beta_p)$	(3.26)
--	--------

امله د جملې [3.2.1](#) بنوونه پسي باور لري، چې

$a v, b v.$	(3.27)
-----------------	--------

که $c = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\gamma_p}$ د a, b يو گډ زياتخه وي (c په خوښه، زياتيز)، نو له $a | c$ ،
 $\alpha_p \leq \gamma_p, \beta_p \leq \gamma_p \mid c$ او $\max(\alpha_p, \beta_p) \leq \gamma_p \forall p \in \mathbb{P}$ لاس ته راځي.
 يعنې باور لري: ، دا په دي معنا، چې $(c > 0, v > 0) \implies v \leq c$ د ليما(5) [2.1.3](#)
 له لاري دي. نو له دي سره v د a, b خورا کوچنی گډ زياتخه دی، يعنې

$$\text{kgV}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

بېلگه 3.2.9: وي دي $a = 2^3 3^2 5$ ، $b = 2^2 3^3 7$ ، نو

$$a = 2^3 3^2 5^{17^0}, b = 2^2 3^3 5^0 7^1$$

کنونپوهنه

$$\Rightarrow \text{kgV}(a, b) = 2^3 3^3 5^1 7^1 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

کورولار (جمله گئی) 3.2.10: وي دي $a, b \in \mathbb{Z}$ ، $v \leq 0$ ، نو $\text{kgV}(a, b)$ ټيک هلته دی، که وي

$$1. \quad a | v, b | v$$

$$2. \quad \text{له } a | c, b | c \Rightarrow v | c$$

د a_1, \dots, a_n لپاره په ټوليزه توگه:

تعريف 3.2.11: وي دي $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ، نو $v \in \mathbb{Z}$ د a_1, \dots, a_n يو گډ

زياتخه بلل کيږي، که $a_i | v, i = 1, \dots, n$.

وي دي $a_i \neq 0, i = 1, \dots, n$ ، نو دا د ټول مثبتو خورا کوچنيو گډزياتخه د

$$\text{kgV}(a_1, \dots, a_n)$$

سره په نخښه کوو (شتون و حالت $n = 2$ ته ورته مدلل وړ

دی)

که لږ تر لږه يو $a_i = 0$ وي، نو سړی تعريفوي $\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) := 0$.

يادونه 3.2.12: د $\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) = \text{kgV}(|a_1|, \dots, |a_n|)$ له امله کېدی

شي دا حالت په باندي $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ محدود شي.

$$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, a_i = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_{i,p}}$$

کورولار (حمله گئی) 3.2.13: وي دي په لږمړنی

ضريب ټوټه کونه، نو باور لري ($a_i \neq 0 \forall i$):

$$\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max_{1 \leq i \leq n} (\alpha_{i,p})}. \quad (3.28)$$

د kgV او ggT (خ غ پ او خوک ز) د اړیکې به هکله بالاخره لاندې جمله معلومات راکوي:

جمله 3.2.14: وي دي $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ او په نڅښه کړه $A_i := \frac{a_1 \cdots a_n}{a_i}$, $(i = 1, \dots, n)$ نو باور لري:

$$\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) \cdot \text{ggT}(A_1, \dots, A_n) = a_1 \cdots a_n. \quad (3.29)$$

ښوونه: وي دي $a_i = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_{i,p}}, i = 1, \dots, n$ نو باور لري.

$$A_i = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sum_{j \neq i} \alpha_{j,p}}, i = 1, \dots, n$$

او

$$\text{ggT}(A_1, \dots, A_n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min_{1 \leq i \leq n} (\sum_{j \neq i} \alpha_{j,p})}, \quad (3.30)$$

$$\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max_{1 \leq i \leq n} (\alpha_{i,p})}, \quad (3.31)$$

$$a_1 \cdots a_n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sum_{i=1}^n \alpha_{i,p}}. \quad (3.32)$$

وي دي $\alpha_{i_0,p} = \max_{1 \leq i \leq n} (\alpha_{i,p})$ ، نو باور لري، $\alpha_{i,p} \leq \alpha_{i_0,p}, i = 1, \dots, n$ يعنې

$$-\alpha_{i,p} \geq -\alpha_{i_0,p} \quad \text{او}$$

کونپوهنه

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{j,p} - \alpha_{i,p} \geq \sum_{j=1}^n \alpha_{j,p} - \alpha_{i_0,p}, \quad (3.33)$$

$$\sum_{j \neq i} \alpha_{j,p} \geq \sum_{j \neq i_0} \alpha_{j,p}, \quad i = 1, \dots, n$$

دا په دې معنا، چې

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j \neq i} \alpha_{j,p} \right) = \sum_{j \neq i_0} \alpha_{j,p}$$

نو له دې سره:

$$\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) \text{ggT}(A_1, \dots, A_n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_{i_0,p} + \sum_{j \neq i_0} \alpha_{j,p}} = (3.34)$$

$$= \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sum_{i=1}^n \alpha_{i,p}} = a_1 \cdots a_n. \quad (3.35)$$

$\text{kgV}(a_1, \dots, a_n)$

جملگی 3.2.15: دا یو امکان دی، چې د لویو گڼو یا عددونو

لپاره و شمېرو () $\text{ggT}(A_1, \dots, A_n) = \frac{a_1 \cdots a_n}{\text{ggT}(A_1, \dots, A_n)}$ ، چېرته چې د وېش له لارې د پاتې سره شمېرل کېږي.

$$\text{kgV}(6, 8, 15) = ?$$

بېلگه 3.2.16: ؟

(عددونه ډېر کوچني دي، دلته په لومړنیو ضریبونو توتنه کونه ښه ده)

$$A_1 = a_2 a_3 = 120, A_2 = a_1 a_3 = 90, A_3 = a_1 a_2 = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ggT}(A_1, A_2, A_3) = \text{ggT}(120, 90, 48) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{kgV}(6, 8, 15) = \frac{6 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 120.$$

لاس ته راوړنه 3.2.17:

$n = 2, a_1, a_2 \in \mathbb{N}; \text{kgV}(a_1, a_2) \text{ggT}(a_1, a_2) = a_1 a_2$
 دا په دې معنا، چې
 $\text{kgV}(a_1, a_2) \text{ggT}(a_1, a_2) = a_1 a_2$
 ، نو لاس ته راځي:

$$\text{kgV}(a_1, a_2) = a_1 a_2 \Leftrightarrow \text{ggT}(a_1, a_2) = 1, (3.36)$$

دا په دې معنا، چې د دوه ګڼونو a_1, a_2 خورا کوچنی ګڼزیاتځله ټیک هلته د هغو ضرب دی، که دا یو بل ته نسبي لومړني عددونه وي.

یادونه 3.2.18: په ټولیزه وګه: که $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ وي، نو
 $\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdots a_n$ ټیک هلته دی، که $a_i, i = 1, \dots, n$ جوړه یو
 بل ته نسبي لومړني عددونه وي. (بنوونه د لومړنیو فاکتورونو ټوټه کوني سره کيږي)

Kongruenzen

د ګونګروانځ سره شمېرنه Rechnen mit Kongruenzen

که $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ وي، د پاتې سره وېش راګوي:

$$a = qm + r, 0 \leq r < m; (4.1)$$

کنونپوهنه

$$m \mid a - r$$

$$a - r = qm$$

یعني ، دا به دې معنا، چې

بیژند(تعریف) 4.1.1 : که وي $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ په خوښه، نو a, b کونگروانڅ

مودولو m بلل کيږي، که $m \mid a - b$ ، سومبولیک یا لیکندود $a \equiv b(m)$

$$9 \mid 24 - 6 = -18 \quad 6 \equiv 24(9) \quad \text{، ځکه چې} \quad \text{بېلگه 4.1.2 :}$$

$$5 \mid 14 - (-1) = 15 \quad 14 \equiv -1(5) \quad \text{، ځکه چې}$$

لېما 4.1.3 : که وي $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ ، نو a, b ټیک هلته کونگروانټ مودولو

m دي، که a, b د m له لارې د پاتې سره په وېش کې دا یو د بل پاتې برابر دي.

بنوونه : وي دي $a = qm + r, 0 \leq r < m$ او $b = q'm + r', 0 \leq r' < m$

$a \equiv b(m) \Leftrightarrow r = r'$ (د پاتې سره وېش). بنایو:

$$(\Leftrightarrow)$$

$$r = r' :$$

$$a - b = (qm + r) - (q'm + r') = (q - q')m + \underbrace{(r - r')}_{=0}, (4.2)$$

دا په دې معن، چې $m \mid a - b$ ، له دې ، باور لري. $a \equiv b(m)$

(\Rightarrow) $a \equiv b(m) :$

$$m \mid a - b = (q - q')m + (r - r') \stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} m \mid r - r', (4.3)$$

وي، نو له $|r - r'| \leq 0$ باور لري . که $m = |m| \leq |r - r'|$ يعني
 $0 \leq r < m, 0 \leq r' < m$ ، لاس ته راځي، چې

$$0 \leq r < m, -m < -r' \leq 0, (4.4)$$

نو لرو $-m < r - r' < m$ ، دا په دې معنا، چې $|r - r'| < m$ - تضاد!

له دې سره لاس ته راځي $|r - r'| = 0$ ، يعني $r = r'$.

يادونه : \equiv له لارې په \mathbb{Z} د $m \in \mathbb{N}$ لپاره يو ورته اړيکي ، په خوښه مگر
 کره ټاکلي، تعريف دي:

لومړی :)

1. Reflexivität (هندارونه) $a \equiv a(m) \forall a \in \mathbb{Z}$ ، ځکه

$$m \mid a - a = 0$$

2. (Symmetrie سيوتري) ، چې

$$a \equiv b(m) \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid b - a \Rightarrow b \equiv a(m)$$

3. (Transitivität).

کینونپوهنه

$$a \equiv b(m), b \equiv c(m) \Rightarrow m \mid a - b, m \mid b - c$$

$$\stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} m \mid (a - b) + (b - c) = a - c \Rightarrow a \equiv c(m)$$

ختی لا ډېر باور لري (\equiv د $+$ او \cdot سره زعمور دی، د $+$ ، کونگروانڅ، کلمه دي
پع الجبر کې پرتله شي)

لېما 4.1.5: وي دي $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ په خوبنه. نو باور لري

1. $a \equiv b(m), c \equiv d(m) \Rightarrow a + c \equiv b + d(m)$
2. $a \equiv b(m), c \equiv d(m) \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d(m)$
3. $a \equiv b(m), t \mid m \Rightarrow a \equiv b(|t|)$
4. $a \equiv b(m), k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \Rightarrow ka \equiv kb(|k|m)$
5. $ka \equiv kb(m)$ für ein $k \in \mathbb{Z}, d = \text{ggT}(k, m) \Rightarrow a \equiv b(\frac{m}{d})$
6. $a \equiv b(m), a \equiv b(n), n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \equiv b(\text{kgV}(m, n))$

بنوونه:

1. $a \equiv b(m), c \equiv d(m) \Rightarrow m \mid a - b, m \mid c - d$
 $\stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} m \mid (a - b) + (c - d) \Rightarrow (a + c) \equiv (b + d)(m)$

$$a \equiv b(m), c \equiv d(m) \Rightarrow m \mid a - b, m \mid c - d \stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} m \mid (a - b)c = ac - bc$$

$$m \mid (c - d)b = cb - db$$

$$\Rightarrow m \mid (ac - bc) + (cb - db) = ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd(m)$$

$$a \equiv b(m) \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow t \mid a - b \Rightarrow a \equiv b(|t|)$$

$$a \equiv b(m) \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow km \mid k(a - b) = ka - kb \Rightarrow ka \equiv kb(|k|m)$$

$$ka \equiv kb(m) \Rightarrow m \mid ka - kb \Rightarrow k(a - b) = m \cdot s$$

1. $s \in \mathbb{Z}$ یوهه لپاره

$$\Rightarrow \frac{k}{d}(a - b) = \frac{m}{d} \cdot s \frac{m}{d} \mid \frac{k}{d}(a - b), \quad (4.5)$$

د کورولار یا جملگی (1) [2.2.9](#) له امله باور رې:

$$\text{ggT} \left(\frac{m}{d}, \frac{k}{d} \right) = 1, \quad (4.6)$$

نو د بنسټيزې لیما [2.2.12](#) څخه لاس ته راځي:

$$\frac{m}{d} \mid a - b \Rightarrow a \equiv b \left(\frac{m}{d} \right). \quad (4.7)$$

$$a \equiv b(m), a \equiv b(n)$$

کنونپوهنه

$\Rightarrow m \mid a - b, n \mid a - b,$	(4.8)
---	-------

دا په دې معنا، چې $a - b$ د m, n گډ ډېرځله دی

$\Rightarrow \text{kgV}(m, n) \mid a - b \Rightarrow a \equiv b(\text{kgV}(m, n)).$	(4.9)
---	-------

لومړی:

$$a \equiv b(m), c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + c \equiv b + c(m), ac \equiv bc(m)$$

\equiv ، دا په دې معنا، چې د ترنو یا کارونو یا عملیو سره زغور دی (د ورته اړیکو یا کونګروانځ اړیکو په هکله دتر مخه تېرې یادونې 4.1.4 وګورئ).

دویم:

$$\begin{aligned} a_i \equiv b_i(m), i = 1, \dots, k &\Rightarrow a_1 + \dots + a_k \equiv \\ &\equiv b_1 + \dots + b_k(m), a_1 \dots a_k \equiv b_1 \dots b_k(m) \end{aligned}$$

(بنوونه د ایندکشن له لارې).

دریم:

$$a_1 = \dots = a_k = a, b_1 = \dots = b_k = b \Rightarrow a^k \equiv b^k(m) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

د $c_i \in \mathbb{Z}$ سره، نو باور

$$a \equiv b(m), f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$$

لري

$$f(a) \equiv f(b)(m)$$

څلورم :

$$ka \equiv kb(m), \text{ggT}(k, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b(m)$$

$$3 \equiv 2(4) \quad 4 \cdot 4 \equiv 4 \cdot 2(4) \quad \text{لاس ته نه اځي} \quad \text{مگر له} \quad \text{. (!!!)}$$

پنجم :

$$ka \equiv kb(m), k \mid m \xrightarrow{4.1.5(5)} a \equiv b\left(\frac{m}{|k|}\right)$$

شپږم :

$$a \equiv b(m), a \equiv b(n), \text{ggT}(m, n) = 1 \Rightarrow a \equiv b(m \cdot n)$$

اوم :

$$a \equiv b(m), m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{په لومړنيو ضربيونو توټه كونه}$$

$$\Rightarrow a \equiv b(p_i^{\alpha_i}) \forall i = 1, \dots, k$$

$$(p_i^{\alpha_i} \mid m \quad \text{ځكه چې})$$

اتم :

$$a \equiv b(p_i^{\alpha_i}), i = 1, \dots, k, p_i \quad \text{مختلف لومړني گڼونه}$$

کنونپوهنه

$$\Rightarrow a \equiv b(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) : a \equiv b(m)$$

د پروبشنور والي قوانین Teilarkeitsregeln

هر یا یوه یا بل د پروبشنور قوانین پیژني. د دې قوانینو څخه زیات یې به روښانه ت وگه د لاندې جملې په بنسټ ولاړ دي.

جمله 4.2.1 : $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)$ دې د $n \in \mathbb{N}$ دیکادیکي یا لسمیزه انځوره وي. نو باور لري

1. $n \equiv a_0 (2)$,
2. $n \equiv a_0 + \dots + a_k (3)$,
3. $n \equiv a_0 + 10 \cdot a_1 (4)$,
4. $n \equiv a_0 (5)$,
5. $n \equiv (a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2) - (a_3 + 10a_4 + 10^2 a_5) + \dots (7)$,
- resp. (13) ,
6. $n \equiv a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 (8)$,
7. $n \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_k (9)$,
8. $n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k (11)$.

ښوونه:

لومړۍ: د $10 \equiv 0(2)$ له امله باور لري $10^i \equiv 0^i(2) \forall i \geq 1$ ، يعنې

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^k a_k \equiv a_0 + 0 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_k(2) \Rightarrow n \equiv a_0(2). \quad (4.10)$$

دويم:

د $10 \equiv 1(3)$ له امله باور لري: $10^i \equiv 1^i(3) \forall i \geq 1$ ، يعنې

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^k a_k \equiv a_0 + 1 \cdot a_1 + \dots + 1 \cdot a_k(3) \quad (4.11)$$

$$\Rightarrow n \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_k(3). \quad (4.12)$$

درېم:

د $10^2 \equiv 0(4)$ له امله باور لري $10^i \equiv 0^i(4) \forall i \geq 2$ ، يعنې

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^k a_k \equiv a_0 + 10a_1 + 0 \cdot a_2 + \dots + 0 \cdot a_k(4) \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow n \equiv a_0 + 10a_1(4). \quad (4.14)$$

څلورم: د $10 \equiv 0(5)$ له امله باور لري $10^i \equiv 0^i(5) \forall i \geq 1$ ، يعنې

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^k a_k \equiv a_0 + 0 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_k(5) \Rightarrow n \equiv a_0(5). \quad (4.15)$$

پنځم :

1. د ۱ - له امله

$$n = (a_0 + 10a_1 + 10^2a_2) + 10^3(a_3 + 10a_4 + 10^2a_5) + \quad (4.16)$$

$$+ 10^6(a_6 + 10a_7 + 10^2a_8) + \dots \quad (4.17)$$

او $1001 = 10^3 + 1 = 7 \cdot 13$ باور لري: $10^3 \equiv -1(7, 13)$ ، نو هم

داسې چې ، $(10^3)^i \equiv (-1)^i(7, 13) \forall i \geq 0$

$$n \equiv (a_0 + 10a_1 + 10^2a_2) + (-1)(a_3 + 10a_4 + 10^2a_5) + \quad (4.18)$$

$$(-1)^2(a_6 + 10a_7 + 10^2a_8) + \dots (7, 13). \quad (4.19)$$

$$10^i \equiv 0^i(8) \forall i \geq 3$$

د $10^3 \equiv 0(8)$ له امله باور لري: ، نو

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^k a_k \equiv \quad (4.20)$$

$$\equiv a_0 + 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + \dots + 0 \cdot a_k(8) \quad (4.21)$$

$$\Rightarrow n \equiv a_0 + 10a_1 + 10^2a_2(8). \quad (4.22)$$

$10 \equiv 1(9) \dots$ () Modul 3 ته ورته

له $10 \equiv -1(11)$ امله باور لري: $10^i \equiv (-1)^i(11) \forall i \geq 0$ ، نو

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^k a_k \equiv \quad (4.23)$$

$$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - + \dots + (-1)^k \cdot a_k(11) \quad (4.24)$$

$$\Rightarrow n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - + \dots + (-1)^k a_k(11). \quad (4.25)$$

جمله گي 4.2.2 : (پروېشنور قوانين) که $n = (a_k \dots a_0)_{10} \in \mathbb{N}$ وي، نو باور لري:

1. $2 \mid n \Leftrightarrow 2 \mid a_0$ ،
2. $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid a_0 + \dots + a_k$ ،
3. $4 \mid n \Leftrightarrow 4 \mid (a_1 a_0)_{10}$ ،
4. $5 \mid n \Leftrightarrow 5 \mid a_0$ ،
5. $7, 13 \mid n \Leftrightarrow 7, 13 \mid (a_2 a_1 a_0)_{10} - (a_5 a_4 a_3)_{10} + (a_8 a_7 a_6)_{10} - + \dots$ ،
6. $8 \mid n \Leftrightarrow 8 \mid (a_2 a_1 a_0)_{10}$ ،

کڼونپوهنه

7. $9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid a_0 + \dots + a_k$
8. $11 \mid n \Leftrightarrow 11 \mid a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k$

ښوونه : د بېلگې په توگه د دې لومړنيو درې راورل شوي قوانین ښايو، نو ټول کېدی شي په ورته توگه وښوول شي.

$$2 \mid n \Leftrightarrow n \equiv 0(2) \quad (4.26)$$

$$\Leftrightarrow^1 a_0 \equiv n \equiv 0(2) \quad (4.27)$$

$$\Leftrightarrow 2 \mid a_0. \quad (4.28)$$

يادونه 4.2.3 : سړی کړی شي د معلومو پروېشقوانينو پسې و غزوي، که مودول نسبي لومړني وي.

$$m = 2, n = 3 \Rightarrow \text{لکه}$$

لاس ته راځي او

$$\text{Etwa } m = 2, n = 3 \Rightarrow \text{bzgl. } 6 = \text{bzgl. } 2 \text{ und bzgl. } 3 \left(\text{ggT}(2, 3) = 1 \right).$$

Beispiel 4.2.4

$$n = 97234382 \mid n \quad 2 \mid 8 \quad 3 \mid n \quad 3 \mid 36 \quad 4 \nmid n$$

, da ; , da ; ,

$$4 \nmid 38 \quad 5 \nmid n \quad 5 \nmid 8 \quad 6 \mid n \quad 2 \mid n, 3 \mid n \wedge \text{ggT}(2, 3) = 1$$

da ; , da ; , da ;

$$7 \nmid n \quad 7 \nmid (438 - 723 + 009) = -276 \quad 8 \nmid n \quad 8 \nmid 438 \quad 9 \mid n$$

, da , da ; , da

$$9 \mid 36 \quad 11 \nmid n \quad 11 \mid (8 - 3 + 4 - 3 + 2 - 7 + 9) = 10 \quad 12 \nmid n$$

; , da ; ,

$$4 \nmid n$$

da ; ...

پاتې ټولګي Restklassen

د [4.1.3](#) له مخې باور لري: $a \equiv b(m)$ ټيک هلته يا هلته او هلته، که د m سره a او b وېشنې برابر پاتې ولري ($0 \leq r < m$).

که ټول $a, b \in \mathbb{Z}$ د دې خويونو سره د يوې ډېرې په توګه سره يوځای کړو، نو سړی داسې په نامه، پاتې ټولګي، لاس ته راوړي، فورمال د [4.1.4](#) پسې ، ، \equiv ، په \mathbb{Z} يو ورته اړيکه ده، يعنې له دې سره د \mathbb{Z} يو پارټیشن يا ټوټه کونه ورکړ شوی د پرديو $\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a(m)\}$ سره، داسې په نامه ورته ټولګي disjunkte ټولګيو \bar{a} ، دا په دې معنا، چې

$$\begin{aligned} 1. \quad & \bar{a} \neq \emptyset \\ 2. \quad & \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset \vee \bar{a} = \bar{b} \\ 3. \quad & \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} \bar{a} = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

باور لري:

لومړی: د \bar{a} څخه توکي بڼه $a + km$ لري (د $k \in \mathbb{Z}$ لپاره)، ځکه چې:

کنونپوهنه

$$k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = a + km \quad x \in \bar{a} \Leftrightarrow x \equiv a(m) \Leftrightarrow x - a = km$$

د یوه

لپاره . له دې سره

$$\bar{a} = \{a + km \mid k \in \mathbb{Z}\} = a + m\mathbb{Z}$$

په خوښه

دویم: $\forall a \in \mathbb{Z} : \bar{a} = \bar{r}$ د کوم سره چې $r \in \mathbb{Z}$ په m باندې a د

وېشنې پاتې دی ($0 \leq r < m$)، ځکه چې:

$$\begin{aligned} a = qm + r, 0 \leq r < m &\Leftrightarrow a - r = qm \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow m \mid a - r \Leftrightarrow a \equiv r(m) \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{r} \end{aligned}$$

بېژند(تعریف) 4.3.1: وي دی $m \in \mathbb{N}$ په خوښه، نو ورته یا اکویوانت ټولگی $\text{mod } m$ یو پاتې ټولگی $\text{mod } m$ بلل کیږي. هر د \bar{a} ټوکی د ټولگی \bar{a} نمایندده بلل کیږي. د ټول پاتې ټولگیو $\text{mod } m$ ډېری د \mathbb{Z}_m سره په نڅېنه کیږي.

لیما 4.3.2: د په خوښه $m \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري:

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$$

دا په دې معنا، چې \mathbb{Z}_m ټوکی لري.

بنوونه: که \bar{a} په خوښه پاتې ټولگی وي، نو باور لري:

$$a = qm + r, 0 \leq r < m, \quad (4.29)$$

دا په دې معن، چې $0 \leq r \leq m - 1$ ، دا په دې معنا، چې زیات له زیاته m مختلف پاتې ټولګي شتون لري.

که $r \equiv r' (m)$ $\bar{r} = \bar{r}'$, $0 \leq r \leq m - 1, 0 \leq r' \leq m - 1$ باور ولري، نو

باور لري ، په m باندې د r, r' د وېشني څخه r همداسې r' پاتې (که غواړی: باقي) پاتې کيږي، دا باید د [4.1.3](#) پسې باور ولري: $r = r'$. برعکس: $r = r' \Rightarrow \bar{r} = \bar{r}'$. نو ټیک m ټولګي شتون لري.

بېلګه 4.3.3: $m = 5 : \mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ ، څه:

$\bar{2} = \{2 + 5 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$ ، نو په

ځانګړې توګه

$$\bar{2} = \bar{17} = \overline{(-3)} = \dots$$

پېژند (تعریف) 4.3.4: د \mathbb{Z} یوه برخه ډېری کومه چې له هر پاتې ټولګي ټیک یو توکی خوندي لري، نو پوره مودولو m پاتې سیستم بلل کيږي.

بېلګه 4.3.5: $m = 4, \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}; \{0, 1, 2, 3\}$ یو پوره پاتې

سیستم $\text{mod } 4$ دی، همداسې $\{4, -3, -2, 4\}$ یا $\{100, 99, 98, 97\}$.

لیما 4.3.6: یوه برخه ډېری $\{r_1, \dots, r_m\} \subseteq \mathbb{Z}$ ټیک هلته یو پوره پاتې سیستم

مودولو m دی، که $r_i \not\equiv r_j (m) \forall i, j = 1, \dots, m : i \neq j$ وي.

بنوونه:

(\Rightarrow)

که $\{r_1, \dots, r_m\}$ یو پوره پاتي سیستم وي، نو r_i ، $i = 1, \dots, m$ په مختلفو پاتي ټولگيو $\text{mod } m$ کې پراته دي، نو باور لري

$$\forall i \neq j \quad r_i \not\equiv r_j(m)$$

 (\Leftarrow)

که باور ولري $r_i \not\equiv r_j \quad \forall i \neq j$ ، نو r_i په مختلفو پاتي ټولگيو کې پراته

دی، او ټول مختلف دي، نو $\{r_1, \dots, r_m\}$ یو پوره پاتي سیستم دی.

کورولار یا جمله گۍ 4.3.7: وې دي $\{r_1, \dots, r_m\} \subseteq \mathbb{Z}$ یو پوره پاتېسیستم

مودولو m او $a, b \in \mathbb{Z}$ دي د $\text{ggT}(a, m) = 1$ سره وي، نو

$$\{ar_1 + b, \dots, ar_m + b\}$$

هم یو پوره پاتي سیستم مودولو m دی.

بنوونه: نیسو چې $\exists i \neq j : ar_i + b \equiv ar_j + b(m)$ ، نو لاس ته رځي

$$ar_i \equiv ar_j(m), \quad (4.30)$$

او له دي سره د (4.1.6) له امله:

$$r_i \equiv r_j(m), \quad (4.31)$$

دا چې $\text{ggT}(a, m) = 1$ دی، نو تضاد ته ځو!

نو له دې سره لاس ته راځي

$$ar_i + b \not\equiv ar_j + b \quad \forall i \neq j, \quad (4.32)$$

او له [4.3.6](#) سره غوښتنه لرو.

جمله کې 4.3.8: وي دې $\{r_1, \dots, r_m\} \subseteq \mathbb{Z}$ يو پوره پاتي سيستم مودولو m ،
 $\{s_1, \dots, s_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ يو پوره پاتي سيستم مودولو n او $\text{ggT}(m, n) = 1$ ، نو

$\{nr_1 + ms_1, \dots, nr_m + ms_n\}$	(4.33)
---------------------------------------	--------

$$\{nr_1 + ms_1, \dots, nr_m + ms_n\} \quad (4.33)$$

يو پوره پاتي سيستم مودولو $m \cdot n$ دی.

ښوونه: نيسو، چې باور لري

$$nr_i + ms_j \equiv nr_k + ms_l(m \cdot n) \quad (4.34)$$

د ځنو $i \neq k$ همداسې $j \neq l$ لپاره يا دواړه. د $m \mid m \cdot n$ له امله لاس ته راځي:

$$nr_i + ms_j \equiv nr_k + ms_l(m), \quad (4.35)$$

$$nr_i \equiv nr_k(m) \quad \text{له دې سره}$$

له دې امله د لاس ته راوړني پسي [4.1.6\(4\)](#) لاس ته راځي: $r_i \equiv r_k(m)$ ځکه چې

$$\text{ggT}(m, n) = 1 \Rightarrow i = k$$

ګڼونپوهنه

د 4.3.6 له مخې . له دې سره نيوڼه داسې ده:

$$nr_i + ms_j \equiv nr_i + ms_l(m \cdot n) \Rightarrow ms_j \equiv ms_l(m \cdot n), \quad (4.36)$$

نو $s_j \equiv s_l(m \cdot n) \Rightarrow j = l$ دی دا د 4.3.6 له امله - تضاد دی □

د پاتې ټولګې کړی یا -- رینګ $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$

Der Restklassenring $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$

په $\mathbb{Z}_m = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ تعریفوو (توکي دي)

په $\mathbb{Z}_m = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ (m توکي دي) یو زیاتون یا جمعه \oplus او یو ضرب یا

خُل \odot تعریفوو د لاندې سره:

$$\bar{a} \oplus \bar{b} := \overline{a + b} \quad \text{او} \quad \bar{a} \odot \bar{b} := \overline{ab}. \quad (4.37)$$

بڼایو : دا تعریفونه د وکیلانو (Repräsentanten) خپلواک دي، دا په دې معنا،

چې ، نو $\bar{a} = \bar{a'}, \bar{b} = \bar{b'}$ هم باور لریاو همداسې $\overline{a + b} = \overline{a' + b'}$ هم $\overline{ab} = \overline{a'b'}$ هم

$$\bar{a} = \bar{a'} \Rightarrow a \equiv a'(m), \bar{b} = \bar{b'} \Rightarrow b \equiv b'(m),$$

نو:

$$\left. \begin{aligned} a + b &\equiv a' + b'(m), \\ a \cdot b &\equiv a' \cdot b'(m) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{4.1.5} \overline{a + b} = \overline{a' + b'}, \overline{ab} = \overline{a'b'}$$

نسبت جمعې \oplus ته باور لري: (\mathbb{Z}_m, \oplus) یو کموتاتیو ګروپ دی. ځکه چې:

$$1. \quad \overline{a} \oplus \overline{b} \in \mathbb{Z}_m, \quad \text{ځکه چې}$$

$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a + b} \in \mathbb{Z}_m \quad \forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_m.$	(4.38)
---	--------

$$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a + b} \in \mathbb{Z}_m \quad \forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_m. \quad (4.38)$$

$$2. \quad \overline{a} \oplus (\overline{b} \oplus \overline{c}) = (\overline{a} \oplus \overline{b}) \oplus \overline{c} \quad \forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}_m$$

ځکه چې ،

$$a + (b + c) = (a + b) + c \Rightarrow \overline{a + (b + c)} = \overline{(a + b) + c}. \quad (4.39)$$

$$3. \quad \overline{a} \oplus \overline{0} = \overline{0} \oplus \overline{a} = \overline{a} \quad \forall \overline{a} \in \mathbb{Z}_m \quad \overline{0} \in \mathbb{Z}_m$$

پوره کوي

$$4. \quad \overline{a} \oplus \overline{-a} = \overline{-a} \oplus \overline{a} = \overline{0} \quad \forall \overline{a} \in \mathbb{Z}_m$$

و ته زیلتیز یا مثبت معکوس دی، ځکه چې

$$\overline{a} \oplus \overline{-a} = \overline{-a} \oplus \overline{a} = \overline{0}. \quad (4.40)$$

$$5. \quad \overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a + b} = \overline{b + a} = \overline{b} \oplus \overline{a} \quad \forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_m$$

نسبت ضرب \odot ته باور لري: (\mathbb{Z}_m, \odot) یو نیم ګروپ دی د 1 سره. ځکه چې:

کنونپوهنه

$$\bar{a} \odot \bar{b} \in \mathbb{Z}_m \quad \text{.1} \quad \text{, ځکه چې}$$

$$\bar{a} \odot \bar{b} = \overline{ab} \in \mathbb{Z}_m \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m. \quad (4.41)$$

$$\bar{a} \odot (\bar{b} \odot \bar{c}) = (\bar{a} \odot \bar{b}) \odot \bar{c} \quad \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m \quad \text{.2} \quad \text{, ځکه چې}$$

$$a(bc) = (ab)c \Rightarrow \overline{a(bc)} = \overline{(ab)c}. \quad (4.42)$$

$$\bar{a} \odot \bar{1} = \bar{1} \odot \bar{a} = \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_m \quad \bar{1} \in \mathbb{Z}_m \quad \text{.3} \quad \text{پوره کوي}$$

$$\bar{a} \odot \bar{b} = \overline{ab} = \overline{ba} = \bar{b} \odot \bar{a} \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m \quad \text{.4}$$

$$\bar{a} \odot (\bar{b} \oplus \bar{c}) = (\bar{a} \odot \bar{b}) \oplus (\bar{a} \odot \bar{c}) \quad \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m \quad \text{.5}$$

$$a(b+c) = ab+ac \Rightarrow \overline{a(b+c)} = \overline{ab+ac} \quad \text{. (ځکه چې)}$$

له دې سره $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ یو کموتاتیو رینګ (کری) دی د 1 سره، داسې په نامه
 ،،پاتې ټولګي رینګ یا — (کری) mod m،، دی. د $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ انځورونه د
 جدول په مرسته صورت نیسي یا لاس ته راځي. دا د \mathbb{Z}_4 لپاره په لاندې ډول لیدل
 کیږي:

$\overline{00}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$
$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$
$\overline{22}$	$\overline{03}$	$\overline{2}$
$\overline{33}$	$\overline{30}$	$\overline{1}$
	$\overline{21}$	$\overline{0}$

$\overline{00}$	$\overline{00}$	$\overline{0}$
$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$
$\overline{20}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$
$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{2}$

په کړی یا رینګ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (کموتاتیو کړی د 1 سره) کې باور لري:

4.1 $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$. په ټولیزه توګه دا په $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ کې ټیک نه دی، دا د $m = 6$ لپاره باور لري $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{6} = \overline{0}$ ، چېرته چې $\overline{2}, \overline{3} \neq \overline{0}$ دی.

پیژند(تعریف) 4.4.1: $(R, +, \cdot)$ دې یو کموتاتیو کړی وي د 1 سره

لومړی: یو $a \in R, a \neq 0$ صفرپروېشونی (مقسوم علیه صفر،،،؟)، بلل کيږي، که $b \in R, b \neq 0$ یو شتون ولري د $ab = 0$ سره.

دویم: یو R انټیګریتی کړی (صفرپروېشونی ازاد یا بی صفرپروېشونی) بلل کيږي، که په R کې صفرپروېشونی شتون ونه لري.

کنونپوهنه

دریم: یو $a \in R$ یوون یا واحد بلل کیري، که یو $b \in R$ شتون ولري، د $ab = 1$ سره، a د b معکوس یا په څنټ بلل کیري (نسبت و ضرب ته)، سومبولیک: $b = a^{-1}$.

څلورم: که په R کې هر $a \neq 0$ یو یوون وي، نو $(R, +, \cdot)$ یو بدن یا تن یا جسم بلل کیري (انگریزي).

بېلگه 4.4.2:

لومړی: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ یو انټیگریټي کری ده، یوونونه یا واحدونه ± 1 دي.

دویم: $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ صفرپروېشوني $\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ او یوونونه $\bar{1}, \bar{5}$ لري.

دریم: $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ یو بدن دی، لکه په لاس ته راوړنه 4.1.6 کې چې لاس ته راځي.

پېژند (تعریف) 4.4.3: یو $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ لومړنی پاتي سیستم $\text{mod } m$ بلل کیري، که $\text{ggT}(a, m) = 1$ وي، دا په دې معنا، چې a و m ته نسبي لومړنی دی.

لېم 4.4.4: هر $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ د لومړني پاتي ټولگي توکي و مودول m ته نسبي لومړنی دی.

بنوونه: وي دې $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ لومړنی پاتي سیستم او $\text{ggT}(a, m) = 1$ (پرتله له دې بیا سړی بل نماینده سیستم ټاکي). وي دې $b \in \bar{a}$ په خوښه، و دې بنوول شي: $\text{ggT}(b, m) = 1$.

$p \mid b$ شته د $p \in \mathbb{P}$ ، داپه دېمعنا، چې يو لومړنی گڼ $\text{ggT}(b, m) \neq 1$ نيسو، چې
 او $p \mid m$ سره (که وي $c \mid b, c \mid m \Rightarrow$ له دې څخه د c په لومړنیو ضریبونو
 توپه کونه د $p \mid b, p \mid m$ سره لاس ته راځي). د $b \in \bar{a}$ له امله باور لري:

$$b = a + km \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.43)$$

دا چې $p \mid b, p \mid m$ د $b = a + km$ له امله لاس ته راځي:

$$p \mid a \Rightarrow \text{ggT}(a, m) \geq p \quad (4.44)$$

-- تضاد \square

جمله : په $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ کې یوونونه یا واحدونه ټیک لومړني پاتېتولگی دي. بنوونه:

لومړی: که $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ لومړنی پاتې تولگی وي له دې لاس ته راځي $\Rightarrow \text{ggT}(a, m) = 1$ ، د [2.2.5](#) پسي لاس ته راځي $1 = \alpha a + \beta m$ د ځنو $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ لپاره . له دې امله

$1 = \alpha a + \beta m \equiv \alpha a(m) \Rightarrow \bar{\alpha} = (\bar{a})^{-1},$	(4.45)
--	--------

دويم: \bar{a} يوون يا واحد دی.

درېم: که $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ يوون يا واحد وي، نو يو $\bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ شتون لري د $\bar{a}\bar{b} = \bar{1}$ سره،
 دا په دې معنا، چې $\bar{a}\bar{b} = \bar{1}$ ، له دې سره $ab \equiv 1(m)$ ، دا په دې معن،
 چې $ab - 1 = km$. نيسو چې $\text{ggT}(a, m) \neq 1$ ، نو
 $\exists p \in \mathbb{P} : p \mid a, p \mid m \Rightarrow p \mid 1$

-- تضاد \square

جمله 4.4.6: $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ ټيک هلته يو بدن دی، که m يو لومړنی گن وي.

بنوونه

(\Leftarrow)

وي دې $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p, \bar{a} \neq \bar{0}$. دا چې $1, 2, \dots, p-1$ نسبت p ته نسبي لومړنی دی،
 نو $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}$ باور لري، چې ټول پاتې ټولگي لومړني دي، نو هر يو په
 خوبنه $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$ هم.

نو ټول يوونونه يا واحدونه په \mathbb{Z}_p کې دي. نو د تعريف پسي باور لري: $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ يو بدن دی.

(\Rightarrow) وي دې $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ يو بدن. ودي بنوول شي: $m \in \mathbb{P}$

نيسو يا فرضوو، چې m نالومړنی دی، نو

$$m = rs, 1 < r < m, 1 < s < m. \quad (4.46)$$

له دې سره باور لري

$$\overline{m} = \overline{0} = \overline{rs} = \overline{r} \cdot \overline{s}. \quad (4.47)$$

باور لري، چې \overline{r} او \overline{s} صفر $\overline{0}$ نه دي. ځکه چې: له $\overline{r} = \overline{0}$ لاس ته راځي $r \equiv 0(m)$ ، دا په دې معنا، چې $m \leq r$ او $m \mid r$ -- تضاد يا مخامخوالی .

په ورته توګه د \overline{s} لپاره. دا چې $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ یو بدن دی، نو هر $\overline{r} \in \mathbb{Z}_m$ ته یو $\overline{r}^{-1} \in \mathbb{Z}_m$ شتون لري د $\overline{r}\overline{r}^{-1} = \overline{1}$ سره. نو له $\overline{r}\overline{s} = \overline{0}$ لاس ته راځي، چې $\overline{r}^{-1}\overline{r}\overline{s} = \overline{r}^{-1}\overline{0} = \overline{0}$ ، دا په دې معنا، چې $\overline{s} = \overline{0}$ -- تضاد يا مخامخوالی!

له دې امله m لومړنی عدد دی، او له دې سره $m \in \mathbb{P}$.

بېلګه 4.4.7: $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ یو بدن دی.

معکوس یې دي:

$$\overline{1}^{-1} = \overline{1}, \overline{2}^{-1} = \overline{3}, \overline{3}^{-1} = \overline{2}, \overline{4}^{-1} = \overline{4}$$

پښه نوټ: ::

$$4.1 \quad ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

په الجر کې همدا خوي د، صفر پروېشنی ازاد، بلل کيږي.

4.2 $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$

مور په راتلونکې کې د $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ په ځای $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ هم لیکو ، سره له دې ، د $+$ ، او \cdot ، سره هغه د \mathbb{Z} اصلي جمعه او ضرب په معنا پوهیږو!

الجبري کونگروانځ Algebraische Kongruenzen

د کرښیزو کونگروانځو حلوروالی

د جملې 4.4.5 پسی یو \bar{a} په \mathbb{Z}_m کې ټیک هلته یوون یا واحد دی، که $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ $\text{ggT}(a, m) = 1$ لومړنی پاتې سیستم وي. د داسې یوه \bar{a} لپاره له دې

امله یو $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ شتون لري د $\bar{ax} = \bar{1}$ سره ، دا په دې معنا، چې $\bar{ax} = \bar{1}$

او $ax \equiv 1(m)$ د $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ غوښتنه: $ax \equiv 1(m)$ سره.

په ټولیزه توګه: غواړو د $x \in \mathbb{Z}$ حل پیدا کړو د

$$ax \equiv b(m), a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, (5.1)$$

سره داسې کرښیز کونگروانځ یا ورته والی.

جمله 5.1.1: یو کرښیز کونگروانځ $ax \equiv b(m)$ ټیک هلته حل وړ دی، که

$\text{ggT}(a, m) \mid b$ وي. که دا حالت وي، نو ټیک ناګونگروانځ حل

$$d = \text{ggT}(a, m) \text{ mod } m$$

لرو.

$$\Leftrightarrow \text{ggT}(a, m) \mid b$$

شوننه: په یوه لومړي پل یا قدم کې بنایو: حلور

\Rightarrow

وي دي $ax \equiv b(m)$ حلور، دا په دې معنا، چې $ax_0 \equiv b(m) \quad \exists x_0 \in \mathbb{Z}$ سره
 ، نو $m \mid ax_0 - b$ او $ax_0 - b = tm$ د یوه $t \in \mathbb{Z}$ لپاره، له دې سره
 دی. له دې امله باور لري: $b = ax_0 + (-t)m$ $d = \text{ggT}(a, m)$ بنی خوا
 وپشي، او له دې سره هم b .

\Leftarrow

برعکس: که $d = \text{ggT}(a, m) \mid b$ وي، نو باور لري: $b = cd$ د یوه $c \in \mathbb{Z}$
 لپاره او د: [2.2.5](#) پسي $d = \alpha a + \beta m$ د $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ لپاره. له دې څخه لاس
 ته راځي:

$$b = cd = (c\alpha)a + (c\beta)m \equiv (c\alpha)a(m), (5.2)$$

دا په دې معنا، چې $ax \equiv b(m) \quad x = c\alpha \in \mathbb{Z}$ د یو حل دی.

اوس ځانونه د (اینکونگروانڅ) حلونو سره ځان مصروفوو:

وینایي: که $x_0 \in \mathbb{Z}$ حل وی، نو هر $x_1 \in \overline{x_0}$ هم حل دی ($\overline{x_0} \in \mathbb{Z}_m$).

د $ax_0 \equiv b(m)$ او $x_1 = x_0 + km$ له امله د یوه $k \in \mathbb{Z}$ لپاره باور لري:

کنونپوهنه

$$ax_1 = a(x_0 + km) = ax_0 + akm \equiv ax_0 \equiv b(m), \quad (5.3)$$

$$ax_1 \equiv b(m) \quad \text{نو هم.}$$

له دې امله غوښتنه:

وي دې $x_0 \in \mathbb{Z}$ حل، دا په دې معنا، چې $x \in \mathbb{Z}$ او $ax_0 \equiv b(m)$ په خوښه نو

حلونه دي، نو $ax \equiv b(m)$. له دې امله د کمښت يا تفریق له لارې:

$$a(x - x_0) \equiv b - b = 0(m)$$

نو.

$d \frac{a}{d} (x - x_0) \equiv d \cdot 0(m) \quad \left(d = \text{ggT}(a, m) \Rightarrow \frac{a}{d} \in \mathbb{Z} \right).$	(5.4)
---	-------

د [4.1.5\(5\)](#) پسي لاس ته راځي: د $\text{ggT}(d, m) = d$: له امله:

$$\frac{a}{d} (x - x_0) \equiv 0 \left(\frac{m}{d} \right), \quad (5.5)$$

دا په دې معنا، چې $\frac{m}{d} \mid \frac{a}{d} (x - x_0)$ د [2.2.9](#) له امله باور لري: $\text{ggT}\left(\frac{m}{d}, \frac{a}{d}\right) = 1$

د بتستيزې لیسما [2.2.12](#) سره لاس ته راځي $\frac{m}{d} \mid (x - x_0)$ ، دا په دې معنا، چې

د یوه $t \in \mathbb{Z}$ لپاره . له دې امله لاس ته راځي:

$$x = x_0 + t \frac{m}{d}. \quad (5.6)$$

وښايي: $x_0, x_0 + 1\frac{m}{d}, \dots, x_0 + (d-1)\frac{m}{d}$ حلونه دي.

وي دي $x_0 + k\frac{m}{d}$ د $0 \leq k < d$ سره، نو باور لري:

$$a\left(x_0 + k \underbrace{\frac{m}{d}}_{\in \mathbb{N}}\right) = ax_0 + ak \underbrace{\frac{m}{d}}_{\in \mathbb{N}} = ax_0 + \underbrace{\frac{a}{d}}_{\in \mathbb{N}} km \equiv ax_0 \equiv b(m). \quad (5.7)$$

وښايي: هر حل $x \in \mathbb{Z}$ يو له دي کونو d سره کونگروانځ مودولو m دی.

پورته لورته $x = x_0 + t\frac{m}{d}$ دی د يوه $t \in \mathbb{Z}$ لپاره. د d سره د پاتي سره وېشني

له امله سړی $t = qd + r$ د $0 \leq r < d$ سره لاس ته راوړي، نو

$$x = x_0 + t\frac{m}{d} = x_0 + (qd + r)\frac{m}{d} = x_0 + qm + r\frac{m}{d} \equiv x_0 + r\frac{m}{d} \quad (5.8)$$

د $0 \leq r < d$ سره.

وښايي: $x_0, x_0 + 1\frac{m}{d}, \dots, x_0 + (d-1)\frac{m}{d}$ کونگروانځ مودولو m دي.

نيسو: $x_0 + k\frac{m}{d} \equiv x_0 + l\frac{m}{d} (m)$ د $0 \leq k < l \leq d-1$ لپاره، نو باور لري:

$$(l-k)\frac{m}{d} \equiv 0(m) \Rightarrow m \mid (l-k)\frac{m}{d}. \quad (5.9)$$

، نو $l-k \equiv 0\left(\frac{m}{d}\right)$ ، $\text{ggT}(m, \frac{m}{d}) = \frac{m}{d}$ ، دا په دي معنا، چې

، له دي سره $l-k \equiv 0(d)$

کڼونپوهنه

$$d \mid l - k \leq d - 1 < d, (5.10)$$

نو $|d| \leq |l - k|$ ، دا په دې معنا، چې $d \mid l - k < d$ - تضاد! □

یادونه 5.1.2: د $ax \equiv b(m)$ د ټولو اینکونگروانت حلونو ته بسیا کوي، چې یو

خانگړی حل x_0 پیدا کړو. ټول اینکونگروانت حلونه دا لاندې څپره لري

$$x_0, x_0 + \frac{m}{d}, \dots, x_0 + (d - 1)\frac{m}{d}; (5.11)$$

له دې امله غوښتنه: د $ax \equiv b(m)$ یو خانگړی حل $x_0 \in \mathbb{Z}$.

د حل عملي شمېرنه:

بېلگه 5.1.3: د $32x \equiv 20(14)$; $\text{ggT}(32, 14) = 2 \mid 20$ له امله یو حل

شتون لري.

را کمونه:

د $32x \equiv 4x(14)$ او $20 \equiv 6(14)$ له امله کونگروانت $4x \equiv 6(14)$ دی.

لومړی: د بنوونې سره سم: د $\text{ggT}(4, 14) = 2 \mid 6$ له امله دوه مودولو 14 اینکونگروانت حلونه شتون لري.

د اکلید په لار: $2 = \text{ggT}(4, 14) = (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 14$ ، نو

$6 = 2 \cdot 3 = (-9) \cdot 4 + 3 \cdot 14,$	(5.12)
--	--------

دویم: دا په دې معنا، چې $x_0 = -9$ یو حل دی.

دریم: $\text{mod } 14$ اینګونګروانت حل د بېلګې په توګه دی

$x_1 = x_0 + 1 \cdot \frac{m}{d} = -9 + \frac{14}{2} = -2;$	(5.13)
---	--------

دریم: نو هم $5, 12, 19, 26, \dots$

له دې لاس ته راځي (\Rightarrow) د ټول حلونو ټولګه.

$$\bar{5} = \{5 + k \cdot 14 \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\bar{12} = \{12 + k \cdot 14 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

پنځم: د بڼې بدلون له لارې:

$$4x \equiv 6(14) \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 2x \equiv 2 \cdot 3(14) \stackrel{\text{ggT}(2,14)=2}{\Leftrightarrow}$$

$$2x \equiv 3(7) \Leftrightarrow$$

کونپوهنه

$$2x \equiv 10(7) \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot x \equiv 2 \cdot 5(7) \stackrel{\text{ggT}(2,7)=1}{\Leftrightarrow}$$

$$x \equiv 5(7)$$

شپږم: دویم حل: $5 + 7 = 12$

بېلگه 5.1.4: غوښتنه یا ثبوت د $\bar{3} \pmod{16}$ معکوس (نسبت ضرب ته) غواړو پیدا

کړو. د 4.4.5 پسي $\bar{3}^{-1} \in \mathbb{Z}_{16}$ شتون لري، ځکه چې $\text{ggT}(3, 16) = 1$ ، نو $\bar{3}$

یو لومړنی پاتې ټولگی دی. غواړو یو x پیدا کړو، د $3x \equiv 1(16)$ سره، له دې امله

، نو $3x \equiv -15(16)$ او $x \equiv -5(16)$ یا $x \equiv 11(16)$ داپه دې معن، چې

$$\bar{3}^{-1} = \bar{11}$$

سیمولتان کونگروانت Simultane Kongruenzen

غوښتنه: غواړو ټول $x \in \mathbb{Z}$ پیدا کړو، چې لاندې سیستم حل کړي:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x \equiv b_1(m_1) \\ \vdots \\ a_k x \equiv b_k(m_k) \end{array} \right\} (5.14)$$

ځانگړی حالت: $a_i = 1 \quad \forall i$ د لاندې نیونو یا فرضیو له مخې

لومړی: m_1, \dots, m_k جوړه نسبي لومړني.

دویم: $x \equiv b_i(m_i)$ د $\forall i$ لپاره حلور دی.

جمله 5.2.1: (چینایي پاتېجمله 5.1) یعنی د پاتو یا باقي مانده وو جمله)) : وي دي

$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ جوړه نسبي لومړني او $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ په خوښه. نودا لندي
حلور دی

$$x \equiv a_1(m_1), \dots, x \equiv a_k(m_k) \quad (5.15)$$

او دا په حقیقت کې مودولو $m_1 \cdots m_k$ یواځنی.

$$M := m_1 \cdots m_k, M_i := \frac{M}{m_i}, i = 1, \dots, k$$

بنوونه: وي دي

نو $\text{ggT}(M_i, m_i) = 1$ باور لري، ځکه چې: که p یو لومړنی عدد وي د

$p \mid M_i, p \mid m_i$ سره د یوه $1 \leq i \leq k$ لپاره، نو:

د [3.1.5](#) پسي $p \mid m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k$ د یوه $p \mid m_j$ لپاره $j \neq i$ --

تضاد، ځکه چې m_i جوړه لومړني وو د نیوني 1 له مخې.

له دي امله $M_i x \equiv 1(m_i)$ د [5.1.1](#) پسي یو حل $y_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq k$ لري.

راورو یا ترڅپرني نیسو:

کڼونپوهنه

$$x_0 = \sum_{i=0}^k a_i M_i y_i. \quad (5.16)$$

نو باور لري: x_0 د ورکړ شوي سيستم حل دی (5.15).

وي دي $1 \leq j \leq k$ په خوښه، نو مودولو m_j باور لري

$$x_0 = a_1 M_1 y_1 + \cdots + a_j M_j y_j + \cdots + a_k M_k y_k \quad (5.17)$$

$$\equiv 0 + \cdots + a_j M_j y_j + \cdots + 0 \quad (5.18)$$

$$= a_j \underbrace{M_j y_j}_{\equiv 1(m_j)} \quad (5.19)$$

$$\equiv a_j(m_j). \quad (5.20)$$

دا په دي معنا، چي x_0 د سيستم د k کونگروانتو هر يو پوره کوي.

وي دي $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ د سيستم حلونه، دا په دي

$$\alpha - \beta \equiv 0(m_i) \quad \text{باور لري، نو} \quad \alpha \equiv a_i(m_i), \beta \equiv a_i(m_i) \quad \forall i$$

معنا، چي $\alpha \equiv \beta(m_i)$ د $i = 1, \dots, k$ لپاره. دا چي m_1, \dots, m_k جوړه لومړني دي،

د (6) 4.1.5 پسي $\text{kgV}(a_1, \dots, a_k) = m_1 \cdots m_k$ باور لري او

تيک يو حل شتون لري. $\alpha \equiv \beta(m_1 \cdots m_k)$ ، دا په دې معنا، چې $m_1 \cdots m_k$

□

بېلګه 5.2.2 : لاندې سيستم ورکړ شوی:

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv 2(3) \\ x &\equiv 3(5) \\ x &\equiv 2(7) \end{aligned} \right\} (5.21)$$

دا چې $3, 5, 7$ جوړه نسبي لومړني دي، نو $\text{mod } 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ يو يواځنی حل لري

$$M = 105, M_1 = 35, M_2 = 21, M_3 = 15$$

لومړی : د بنووني سره سم:

$$35x \equiv 1(3) \Rightarrow y_1 = 2,$$

$$21x \equiv 1(5) \Rightarrow y_2 = 1,$$

$$15x \equiv 1(7) \Rightarrow y_3 = 1$$

$$\Rightarrow x_0 = \sum_{i=0}^3 a_i M_i y_i = 2 \cdot 35 \cdot 2 + 3 \cdot 21 + 2 \cdot 15 = 233 \equiv 2(3)$$

دويم: د **سکڅيسيف** پرځای کولو سره:

$$x \equiv 2(3) \Leftrightarrow x = 2 + 3t \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

کینونپوهنه

$$x \equiv 3(5) \Leftrightarrow 2 + 3t \equiv 3(5) \Leftrightarrow 3t \equiv 1(5) \Leftrightarrow 3t \equiv 6(5) \Leftrightarrow t \equiv 2(5)$$

$$\Leftrightarrow t = 2 + 5s \quad (s \in \mathbb{Z}),$$

$$x = 2 + 3t = 2 + 3(2 + 5s) = 8 + 15s \quad (s \in \mathbb{Z}).$$

نو

$$x \equiv 2(7) \Leftrightarrow 8 + 15s \equiv 2(7) \Leftrightarrow 15s \equiv -6(7) \Leftrightarrow 15s \equiv 15(7)$$

$$\Leftrightarrow s \equiv 1(7) \Leftrightarrow s = 1 + 7u \quad (u \in \mathbb{Z}),$$

$$x = 8 + 15s = 8 + 15(1 + 7u) = 23 + 105u \quad (u \in \mathbb{Z}).$$

نو

دریم : دا په دې معنا، چې $x = 23$ (مودولو) $\text{mod } 105$ د سیستم (5.18) یواځنی حل دی.

د دې ځانگړي حالت تر څنګ، اوس د کربنیزو کونګروانټو تولیز سیستم تر څپرني لاندې نيسو

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x \equiv b_1(m_1) \\ \vdots \\ a_k x \equiv b_k(m_k) \end{array} \right\} \quad (5.22)$$

نیونه یا فرضیه :

1. $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$. جوړه نسبي لومړني
2. هر k کونګروانټ حلور دی.

سری کړی شي وښايي:

جمله 5.2.3 : که کرښیزو کونګروانتو یو ټولیز [5.2](#) سیستم د پورته نیونو سره مخ ته ولرو، نو یواځنی ټاکلی حل $\text{mod } m_1 \cdots m_k$ شتون لري .

د لاندې یو په بل پسې ایښوونې له لارې عملي شمېرنې ته

بېلګه 5.2.4 : لاندې د کرښیزو کونګروانتو سیستم دې ورکړ شوی وي:

$$\left. \begin{array}{l} 4x \equiv 12(8) \\ 3x \equiv 5(7) \end{array} \right\} (5.23)$$

لکه ساده چې لیدل کیږي، دواړه نیونې پوره دي، د جملې [5.2.3](#) پسې د حلونو شتون تضمین دی.

$$4x \equiv 12(8) \Leftrightarrow x \equiv 3(2) \Leftrightarrow x \equiv 1(2) \Leftrightarrow x = 1 + 2t \quad (t \in \mathbb{Z}),$$

$$3x \equiv 5(7) \Leftrightarrow 3x \equiv 12(7) \Leftrightarrow x \equiv 4(7),$$

$$1 + 2t \equiv 4(7) \Leftrightarrow 2t \equiv 3(7) \Leftrightarrow 2t \equiv 10(7) \Leftrightarrow t \equiv 5(7)$$

نو

$$\Leftrightarrow t = 5 + 7s \quad (s \in \mathbb{Z}),$$

$$1 + 2(5 + 7s) = 11 + 14s \quad (s \in \mathbb{Z}).$$

نو

دا په دې معنا، چې $x = 11, 25, 39, 53$ مودولو $m_1 \cdot m_2 = 8 \cdot 7 = 56$ اینګروانت دي.

کڼونپوهنه

$$\overline{11}, \overline{25}, \overline{39}, \overline{53} \in \mathbb{Z}_{50}.$$

د سیستم حل (5.20). د ټول ځلونو ټولګه:

پښې یادونه:

... پاتې جمله 5.1 د ز. ک. څخه درېسوه کاله د مخه

.... ټولیز 5.2

د، ټولیز،، لاندې د 5.19 ډول یا تیوپ سیستم پوهیرو، چېرته چې ټول $\alpha_i = 1$ نه دي.

الجبري کونګروانټ Algebraische Kongruenzen

پېژند(تعریف) 5.3.1: وي دي

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (5.24)$$

يو پولینوم د $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$ سره، نو

$$f(x) \equiv 0(m) \quad (5.25)$$

يو الجبري کونګروانټ یل کيږي د درجي n . غوښتونې: ټول $x_0 \in \mathbb{Z}$ د لاندې سره

$$f(x_0) \equiv 0(m). \quad (5.26)$$

یادونه 5.3.2:

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0(m) \Leftrightarrow \overline{a_n x^n + \dots + a_0} = \overline{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{a_n x^n} + \dots + \overline{a_0} = \overline{0}.$$

نو : حلونه د پولینومون صفرځایونه دي

$$\overline{f} = \overline{a_n x^n} + \dots + \overline{a_1 x} + \overline{a_0} \quad \overline{a_0}, \overline{a_1}, \dots, \overline{a_n} \in \mathbb{Z}_m, (5.27)$$

په \mathbb{Z}_m کې.

یادونه 5.3.3 : $x_0 \in \mathbb{Z}$ د $f(x) \equiv 0(m)$ حل دی، نو هر $x_1 \in \overline{x_0}$ هم (له \mathbb{Z}_m) حل دی، ځکه چې

$$x_1 \in \overline{x_0} \Rightarrow x_1 = x_0 + km$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 + km \equiv x_0(m)$$

د لاس ته راوړنو سره (3) 4.1.6 :

$$\Rightarrow f(x_1) \equiv f(x_0)(m)$$

$$\Rightarrow x_1$$

بېلګه 5.3.4 : لومړی: $x^3 - x \equiv 0(3)$: ټول حلونه دي پيدا شي.

حلونه دي، دا په دي معنا، چې د یادونو 5.3.3 پسي هر ټول عدد حل دی. $x_0 = 0, 1, 2$

کښونپوهنه

دویم: $x^2 - 2 \equiv 0(8)$ د دې عددونو $0, 1, \dots, 7$ څخه کوم یو حل نه دی، دا په دې معنا، چې دا کونګروانت کوم حل نه لري.

د $f(x) \equiv 0(m)$ حل متودونو ته تشریح.

پېژند(تعریف) : که

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{Z})$$

وي، نو

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1 \quad (5.28)$$

د $f(x)$ (فورمال) مشتق بلل کيږي.

یادونه 5.3.6 : د ټول $\forall x, a \in \mathbb{Z}$ لپاره باور لري :

$$f(x) - f(a) = (x - a)g(x) \quad (5.29)$$

د یوه پولینوم g لپاره د په \mathbb{Z} کې ضریبونو سره، چېرته چې $g(a) = f'(a)$ باور لري..

، ځکه چې f پولینوم دی، دا په دې معنا، چې $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$)

مشتق $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ ، ځکه چې g پولینوم دی له دې لاس ته راځي، چې ناپېرېکېدونکی دی.)

د حلونو عملي شمېرنه Praktische Berechnung der Lösungen

لومړی : لېما 5.3.7 : $f(x) \equiv 0(m)$ تیک هلته حلور دی، که $f(x) = 0(p_i^{\alpha_i})$ حلور وي د ټولو $i = 1, \dots, k$ لپاره او که $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ د لومړنی ضرب توتنه ونه وي.

بنوونه :

(\Rightarrow)

که $f(x) \equiv 0(m)$ حلور وي، نو $f(x_0) \equiv 0(m)$ باور لري د یوه $x_0 \in \mathbb{Z}$ لپاره، یعنی $f(x) \equiv 0(p_i^{\alpha_i}) \forall i = 1, \dots, k$ هم حلور دی ځکه چې $p_i^{\alpha_i} \mid m$ (4.1.5(3))

(\Leftarrow)

که $f(x) \equiv 0(p_i^{\alpha_i}) \forall i = 1, \dots, k$ حلور وي، نو $f(a_i) \equiv 0(p_i^{\alpha_i})$ باور لري د $a_i \in \mathbb{Z} (i = 1, \dots, k)$ لپاره. په ټولیزه توګه a_i مختلف دي!

دا لاندې سیستم تر څېړنې نیسو

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv a_1(p_1^{\alpha_1}) \\ &\vdots \\ x &\equiv a_k(p_k^{\alpha_k}) \end{aligned} \right\} (5.30)$$

د چینایي پاتي جملې 5.2.1 له مخې دا سیستم یو حل $a \in \mathbb{Z}$ لري (مودولونه جوړه لومړني دي) دا په د بېمعنا، چې

کڼونپوهنه

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv a_1 (p_1^{\alpha_1}) \\ \vdots \\ a \equiv a_k (p_k^{\alpha_k}) \end{array} \right\} (5.31)$$

يعني د لاس ته راوړني(3) 4.1.6 له لارې :

$$f(a) \equiv f(a_i) (p_i^{\alpha_i}), i = 1, \dots, k, (5.32)$$

دا په دې معنا، چې $f(a) \equiv 0 (p_i^{\alpha_i}) \forall i$ ، له دې سره د (5) 4.1.5 پسي

$$f(a) \equiv 0 (p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}). (5.33)$$

يعني: $a \in \mathbb{Z}$ د ورکړ شوي کونگروانت حل دی.

دويم: د $f(x) \equiv 0 (p^n)$ ، p لږمړنی عدد د حل متود يا لار ، $n \in \mathbb{N}$ په خوښه د حلونو مودولو p کې و حلونو مودولو p^2 ته ؛ له دوی څخه و حلونو مودولو p^3 ته ، ... په ، ، مخ ته تلنه ، ، کې پروت دی ، ... تر هغې چې سړی حل مودولو p^n لاس ته راوړي:

$$f(x) \equiv 0 (p) \quad \text{د } 0, 1, \dots, p-1 \text{ څا په ځای کوني يا ايښووني له لارې د}$$

ټول حلونه پيدا د $f(x) \equiv 0 (p^{n-1})$ ټول حلونه دې معلوم وي ، نو باور لري:

لېما . وي دي . $f(x) \equiv 0(p^n)$ د $x_0 \in \mathbb{Z}$ حل ، نو باور لري :

$$x_0 = a + tp^{n-1}, \quad (5.34)$$

چېرته چې $f(a) \equiv 0(p^{n-1})$ د $a, t \in \mathbb{Z}$ سره دي .

بنونه:

د $f(x_0) \equiv 0(p^n)$ له امله هم باور لري،

يعني x_0 له نيوني سره سم پېژندلی دی ، $(x_0 \in \bar{a} \pmod{p^{n-1}})$ د يوه $a \in \mathbb{Z}$ لپاره ، يعني $x_0 = a + tp^{n-1}$ د $t \in \mathbb{Z}$ لپاره \square

نه د هر $t \in \mathbb{Z}$ لپاره دا $x_0 = a + tp^{n-1}$ د $f(x) \equiv 0(p^n)$ حل دی، دا کوم $t \in \mathbb{Z}$ دي؟

لېما 5.3.9: $x_0 = a + tp^{n-1}$ د $a, t \in \mathbb{Z}$ او $f(a) \equiv 0(p^{n-1})$ سره ټيک

هله د $f(x) \equiv 0(p^n)$ يو حل دی، که $t \in \mathbb{Z}$ د کرښيز کونگروانڅ يا ورته والي حل وي؟

$$f'(a)x + \frac{f(a)}{p^{n-1}} \equiv 0(p) \quad (5.35)$$

ښوونه:

 (\Rightarrow)

وي دي $x_0 = a + tp^{n-1}$ د $f(a) \equiv 0(p^{n-1})$ سره د $f(x) \equiv 0(p^n)$ يو حل، د ښوول دي: دا t د کرښيز گونگرواينڅ حل دی

$$f(x_0) - f(a) = (x_0 - a)g(x_0) = tp^{n-1}g(x_0) \Rightarrow \quad (5.36)$$

$$\Rightarrow f(a) + tp^{n-1}g(x_0) = f(x_0) \equiv 0(p^n). \quad (5.37)$$

د $p^{n-1} \mid f(a)$ (نيونه يا فرضيه) او $\text{ggT}(p^{n-1}, p^n) = p^{n-1}$ له امله لاس ته راځي:

$$\frac{f(a)}{p^{n-1}} + tg(x_0) \equiv 0(p). \quad (5.38)$$

دا چې $x_0 = a + tp^{n-1}$ دی، نو $p \mid x_0 - a$ باور لري: ، يعني $x_0 \equiv a(p)$ ، د(3) [4.1.6](#) پسي $g(x_0) \equiv g(a)(p)$ باور لری (ځکه چې g پولينوم دی)، دا په دې م عنا، چې

$$g(x_0) \equiv f'(a)(p) \Rightarrow \frac{f(a)}{p^{n-1}} + tf'(a) \equiv 0(p). \quad (5.39)$$

 (\Leftarrow)

وي دي $f'(a)x + \frac{f(a)}{p^{n-1}} \equiv 0(p)$ د $t \in \mathbb{Z}$ حل، دا په دي معنا، چي باور لري:

$$f'(a) \cdot t + \frac{f(a)}{p^{n-1}} \equiv 0(p). \quad (5.40)$$

بنايو؛ $f(x) \equiv 0(p^n)$ د $x_0 = a + tp^{n-1}$ يو حل دی.

لاس ته راځي: $p^{n-1}f'(a)t + f(a) \equiv 0(p^n)$ د $x_0 - a = tp^{n-1}$ له امله باور لري:

$$f'(a)(x_0 - a) + f(a) \equiv 0(p^n), \quad (5.41)$$

يعني $f(x_0) - f(a) + f(a) \equiv 0(p^n)$ ، ځکه چي

$$f(x_0) - f(a) = (x_0 - a)g(x_0) \equiv tp^{n-1}f'(a)(p^n). \quad (5.42)$$

له دي سره $f(x_0) \equiv 0(p^n)$ ، دا په دي معنا، چي

$$x_0 = a + tp^{n-1} \quad (5.43)$$

د $f(x) \equiv 0(p^n)$ حل دی.

کنونپوهنه

لومړی : $f(x) \equiv 0(p_i^{\alpha_i}) \quad a_i \in \mathbb{Z}$ د ټول حلونه د هر
 $i = 1, \dots, k \quad (m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k})$
 لپاره معلوم دي، نو بیا سری په خوښه یو k -
 $f(a_i) \equiv 0(p_i^{\alpha_i}) \quad \forall i$
 ټول یا k -گون جوړوي، چېرته چې ، او دا سیستم باورلري:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv a_1(p_1^{\alpha_1}) \\ \vdots \\ x \equiv a_k(p_k^{\alpha_k}) \end{array} \right\} (5.44)$$

یم : نو دا سیستم بیا د ضرب $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = m$ مودولو یواځنی حل $a \in \mathbb{Z}$
 $f(x) \equiv 0(m) \quad a \in \mathbb{Z}$ یو حل دی. هم د امله له دې امله

که 5.3.10 :

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 6 \equiv 0(135). 135 = 5^1 \cdot 3^3, p_1 = 5, \alpha_1 = 1, p_2 = 3, \alpha_2 = 3$$

لومړی : حل $\text{mod } 5^1$:

$$x^3 + 2x^2 - 2x - g \equiv 0(5) \quad \text{فقط حل } 1(-0, -2, -3, -4) \text{ لري، دا په دې}$$

م عنا، چې $\alpha_{11} = 1$. مخ ته تلنه یې اړینه نه ده، ځکه چې $\alpha_1 = 1$.

دویم: حل $\text{mod } 3^3$:لومړی $\text{mod } 3^1$:

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 6 \equiv 0(3)$$

حل 0, 2 لري.

له دې څخه $\text{mod } 3^2$:

د $a = 0$ مخ ته تلنه :

$$f(a) = f(0) = -6, f'(a) = -2$$

يعني بايد حل شي:

$$f'(0)x + \frac{f(0)}{p^1} \equiv 0(p), (5.45)$$

$$-2x + (-2) \equiv 0(3) \Rightarrow t = -1$$

دا په دې معنا، چې او

$$a_1 = a + tp^{n-1} =$$

$$0 + (-1)3 = -3$$

له دې څخه $\text{mod } 3^3$:

$$f(-3) = -9, f'(-3) = 13 \Rightarrow 13x - \frac{9}{3^2} \equiv 0(3)$$

دا په دې معنا، چې

$$13x \equiv 0(3) \quad , \text{ يعني } x \equiv 1(3) \quad , \text{ يعني } t = 1.$$

$$a_{21} = a_1 + tp^{3-1} = -3 + 1 \cdot 9 = 6. (5.46)$$

بېرته $\text{mod } 3^2$:

کڼونپوهنه

د $a = 2$ مخ ته بیونه یا مخ ته تلنه:

$$a_1 = a + tp^{2-1}$$

، چېرته چې t د

$$f'(a)x + \frac{f(a)}{p^{a-1}} \equiv 0(p); \quad (5.47)$$

حل دی.

$$f'(2) = 18, f(2) = 0$$

، یعنی حل کوو: $18x + \frac{0}{3} \equiv 0(3)$ ، دا په دې معنا، چې

$$18x \equiv -2(3)$$

$$\text{ggT}(18, 3) = 3 \nmid -2$$

د له امله لاس ته راځي:

کومه $t \in \mathbb{Z}$ شتون نه لري، ینی هم a_1 شتون نه لري، داپه دې معنا، چې د $a = 2$ و یو $\text{mod } 3^2$ حل ته مخ ته بیونه نه شته، یعنی هم $\text{mod } 3^3$ حل شتون نه لري.

$$\begin{array}{cc} \text{mod } 5^1 & \text{mod } 3^1 \\ : & : \\ 1 & 0 \quad 2 \end{array}$$

↓ ↓

$$\begin{array}{c} \text{mod } 3^2 \\ : \\ -3 \end{array}$$

مخ ته بیونه ناشوني ده

↓

$$\begin{array}{l} \text{mod } 3^3 \\ : \\ 6 \end{array}$$

لومړی: د $\text{mod } 5^1$ او $\text{mod } 3^3$ حلونو ټولګه: $(1, 6)$ و لاندې سیستم ته:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1(5) \\ x \equiv 6(3^3) \end{array} \right\} (5.48)$$

وېم:

$$x = 1 + 5t \Rightarrow 1 + 5t \equiv 6(3^3) \Rightarrow 5t \equiv 5(27) \xrightarrow{\text{ggT}(5,27)=1} t \equiv 1(27)$$

له دې سره: $x = 1 + 5t = 1 + 5 \cdot 1 = 6 \Rightarrow x = 6$ یواځنی $\text{mod } 135$
ناګونګروانځ حل دی.

د الجبري کونګرواینځو دحلونو ګڼون یا تعداد
بېلګه 5.3.11:

$$5x \equiv 10(30) : \text{ggT}(5, 30) = 5 \mid 10 \Rightarrow \exists 5 \text{ mod } 30 ,$$

$$x^2 \equiv 2(8) : ,$$

$$x^2 \equiv 1(8) : ,$$

کڼونپوهنه

$$x^3 - x \equiv 0(3) : .$$

یادونه 5.3.12: په څرگنده توګه په ټولیز ډول ناشوني دی، چې د الجبري ویناو د حلونو په تعداد څه ووايو. او همداسې لاندې جمله هم د تعجب وړ ده، هغه چې د ځانګړي حالت لپاره، چې د لومړني عدد مودولو دی، مګر سره له دې پوښتنې ته ځواب، چې څومره حلونه شتون لري، ولرو:

جمله (لاګرانژ (1736-1813) (5.3) 5.3.13 : وي دي

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{Z}$$

د $grad f = n$ ($i = 1, \dots, n$) سره او یو لومړنی عدد p دي ورګر شوی وي. که p ټول $a_i, i = 1, \dots, n$ ونه وېشي، نو $f(x) \equiv 0(p)$ خورا زیات $grad f = n(p)$ اینګونګرو اینټ حلونه لري.

ښوونه: سری کړی شي له وړاندې ونیسي چې $p \nmid a_n$ ، دا چې پرته له دې به باور ولري: $a_n x^n \equiv 0(p)$ ، او کونګرو اینټ ه یو کوچنی درجه ولري.

$n = 1$:

$$a_1 x + a_0 \equiv 0(p) \quad \text{wobei} \quad p \nmid a_1; \quad (5.49)$$

که $\text{ggT}(a_1, p) \mid -a_0$ ، نو باور لري، چې $\text{ggT}(a_1, p) = 1 \pmod p$ اینګونګرو اینټ حلونه شتون لري.

$n - 1 \rightarrow n$:

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0(p) \quad \text{mit} \quad (5.50)$$

$$\text{ggT}(a_n, p) = 1, p \nmid a_n.$$

يا حل نه شته، چي بيا کار تمامدی.

يا: $a \in \mathbb{Z}$ دي له هغو څخه يو حل وي، د پورته پسي باور لري:

$$f(x_0) - f(a) = (x_0 - a)g(x_0) \quad (5.51)$$

د $f(x) \equiv 0(p)$ د هر د ورپسي حل $x_0 \in \mathbb{Z}$ لپاره، يعنې:

$$(x_0 - a)g(x_0) \equiv 0(p) \Rightarrow p \mid (x_0 - a)g(x_0); \quad (5.52)$$

د [3.1.5](#) له مخي لاس ته راځي $p \mid x_0 - a$ يا $p \mid g(x_0)$ که $p \mid x_0 - a$ وي،

نو باور لري $x_0 \equiv a(p)$ ، دا په دي معنا، چي نور پسي اينکونگروانت حلونه نه شته..

که $g(x_0) \equiv 0(p)$ وي، له کوم سره چي د $f(x_0) - f(a) = (x_0 - a)g(x_0)$ له امله

$\text{grad } g = n - 1$ باور لري. پسي a_n د خوراجک ضريب هم دی! د

وراندنيوني له مخي باور لري $p \nmid a_n$.

ګڼونپوهنه

د ایدکشن وړاندنیونې له مخې د $x_0 \in \mathbb{Z}$ لپاره زیات له زیاته $n - 1$ امکانات)
 $f(x) \equiv 0(p) \pmod{p}$ شتون لري. له دې سره زیات له زیاته
 $(n - 1) + 1 = n \pmod{p}$ اینګونګروانت حلونه لري.

لومړني پاتي ټولګي ګروپونه \pmod{m}

Die prime Restklassengruppe \pmod{m}

د ابل ګروپ (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) Die abelsche Gruppe

د 4.4.5 پسي یونونه یا واحدونه (دا په دې معنا، چې د معکوس کیدونکو توکو

ضرب) ټیک د لومړنی پاتي ټولګي $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ دي، دا په دې معنا، چې هر د
 $\text{ggT}(a, m) = 1$ سره. وي دې په \mathbb{Z}_m^* کې د ټولو واحدونو ډېری یا ست. نو
 باور لري:

لېما 6.1.1 : (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) یو ابل ګروپ جوړوي.

بنوونه:

لومړی: که $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m^*$ وي، نو $\bar{a} \cdot \bar{b} \in \mathbb{Z}_m^*$ دی، نو $\bar{a} \cdot \bar{b} \in \mathbb{Z}_m^*$ دی، خکه
 $\bar{a}' \cdot \bar{b}' \in \mathbb{Z}_m$ د ځنو لپاره، یعنی
 $\bar{a} \cdot \bar{a}' = \bar{1}, \bar{b} \cdot \bar{b}' = \bar{1}$
 $(\bar{a} \cdot \bar{a}') \cdot (\bar{b} \cdot \bar{b}') = \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}, (6.1)$

دویم: دا په دې معنا، چې $(\bar{a}\bar{b})(\overline{a'b'}) = \bar{1}$ ، همداسې

$$(\overline{a'b'}) (\overline{ab}) = (\overline{a'a})(\overline{b'b}) = \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}; (6.2)$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \in \mathbb{Z}_m^*$$

دویم: یعنی د تعریف له مخې باور لري

دریم: اسوحياتيويتي روښانه ده، ځکه چې په $(\mathbb{Z}_{m,}^*, \cdot)$ کې پوره ده، او باور لري:

$$\mathbb{Z}_m^* \subseteq \mathbb{Z}_m$$

څلورام: کموتاتيويتي روښانه ده، ځکه چې همداسې له $(\mathbb{Z}_{m,}^*, \cdot)$ را پاتې ده.

پنځم: وي دی $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m^*$ ، نو يو $\overline{b} \in \mathbb{Z}_m$ شتون لري، د $\overline{a}\overline{b} = \overline{1}$ سره، يعني

$\overline{b}\overline{a} = \overline{1}$ (د کموتاتيويتي له امله)، دا په دې معنا، چې \overline{b} هم د \mathbb{Z}_m يو يوون يا واحد دی، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\overline{b} \in \mathbb{Z}_m^*. (6.3)$$

پېژند (تعريف) 6.1.2: د ابل گروپ $(\mathbb{Z}_{m,}^*, \cdot)$ لومړنی پاتېتولگي گروپ $\text{mod } m$ بلل کيږي.

بېلگه:

$$\mathbb{Z}_7^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}, \mathbb{Z}_{12}^* = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$$

څومره توکي لري؟ \mathbb{Z}_m^*

ګڼونپوهنه

په ټوليزه توګه د يوه ګروپ (G, \cdot) د توکو تعداد يا ګڼون د G نظم بلل کيږي. سومبولیک $|G|$.

پېژند يا تعريف 6.1.4: د (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) نظم د $\varphi(m)$ سره ښوول - يا په نڅښه کيږي، تابع يا بلواک

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \varphi(n) \mapsto |\mathbb{Z}_m^*| \quad (6.4)$$

د اوپلر Euler φ - تابع بلل کيږي.

ليما 6.1.5: وي دي $m \in \mathbb{N}$ په خوښه، نو د $k \in \mathbb{N}$ ګڼون يا تعداد $\varphi(m)$ دی د $\text{ggT}(k, m) = 1$ او د $1 \leq k \leq m$ سره .

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{m} = \bar{0}\}$$

ښوونه:

$$\bar{k} \in \mathbb{Z}_m^* \stackrel{4.4.5}{\Leftrightarrow} \text{mod } m \text{ لومړنی پاتي ټولگی دی}$$

$$\Leftrightarrow \text{ggT}(k, m) = 1,$$

دا په دي معنا، چي په \mathbb{Z}_m^* کي د توکو تعداد يا ګڼون د k د تعداد سره برابر دی، $\text{ggT}(k, m) = 1$ د $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq m$ سره . \square

پسې راتلنه يا نتيجه 6.1.6 : وي دي $p \in \mathbb{P}$ يو په خوښه لومړنی ګڼ يا عدد، نو
 $\varphi(p) = p - 1$
 باور لری:

د شمیرني ته $\varphi(m)$ *Zur Berechnung von*
 پېژند يا تعريف 6.1.7 : د ټولو اعداد يا د ټول اعدادو يوه ډېری لومړنس پاتي سيستم $\text{mod } m$ بلل کيږی، که دا له هر لومړنی ټولګي $\text{mod } m$ ټيک يو توکی ولري.

ليما 6.1.8 : يو لومړنی پاتي سيستم ټيک $\text{mod } m$ ټيک $\varphi(m)$ توکي لري، ځکه
 چې د 6.1.5 پسې ټيک يوونونه يا واحدونه $\varphi(m) = |\mathbb{Z}_m^*|$ ، يعنی لومړني پاتي
 ټولګي $\text{mod } m$ شتون لري.

بېلګه 6.1.9 :

لومړی : $m = 6\{0, 1, \dots, 5\}$ يو پوره پاتي سيستم دی، $\{1, 5\}$ يو لومړنی پاتي
 سيستم دی، يعنی : $|\mathbb{Z}_6^*| = 2$ ، دا په دې معنا، چې $\varphi(6) = 2$.
 دويم:

$$m = 5\{0, 1, \dots, 4\}$$

يو پوره پاتي سيستم دی، $\{1, 5\}$ يو لومړنی پاتي سيستم دی، يعنی $|\mathbb{Z}_6^*| = 2$ ، دا
 په دې معنا، چې $\varphi(6) = 2$.

کنونپوهنه

جمله 6.1.10 : وي دي $\{r_1, \dots, r_{\varphi(m)}\}$ ، $m, n \in \mathbb{N}, \text{ggT}(m, n) = 1$ يو

لومړنی پاتي سیستم $\text{mod } m$ دی، او $\{s_1, \dots, s_{\varphi(n)}\}$ يو لومړنی پاتي سیستم $\text{mod } n$ دی، نو

$$T = \{nr_i + ms_j \mid i = 1, \dots, \varphi(m), j = 1, \dots, \varphi(n)\} \quad (6.5)$$

يو لومړنی پاتي سیستم $\text{mod } m \cdot n$ دی.

بنوونه: $\{r_1, \dots, r_{\varphi(m)}\}$ و يوه پوره سیستم $\text{mod } m$ ته پوره يا تکميل کړی:

$$\{r_1, \dots, r_{\varphi(m)}, r_{\varphi(m)+1}, \dots, r_m\} \quad (6.6)$$

او $\{s_1, \dots, s_{\varphi(n)}\}$ و يوه پوره پاتي سیستم $\text{mod } n$ ته پوره کړی:

$$\{s_1, \dots, s_{\varphi(n)}, s_{\varphi(n)+1}, \dots, s_n\}. \quad (6.7)$$

د [4.3.8](#) پسي

$$R = \{nr_i + ms_j \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\} \quad (6.8)$$

يو پوره پاتي سیستم $\text{mod } m \cdot n$ دی، په ځانگړې توگه ټول گڼونه يا عددونه له R يعني هم له T ټول عددونه، انکونگروانځ $\text{mod } mn$ دي.

و بنايي:

که $a \in R$ او $\text{ggT}(a, mn) = 1$ وي، نو $a \in T$ باور لري.

د $a \in R$ له امله $a = nr_i + ms_j$ باور لري د ځنو $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ لپاره. باور لري: $\text{ggT}(r_i, m) = 1, \text{ggT}(s_j, n) = 1$ ، ځکه چې:

نیسو، چې $\text{ggT}(r_i, m) \neq 1$ ، نو یو لومړنی ګڼ یا عدد p شتون لري د لاندې سره

$$\left. \begin{array}{l} p \mid r_i \\ p \mid m \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p \mid nr_i, p \mid ms_j \Rightarrow p \mid \underbrace{nr_i + ms_j}_{a=} \\ p \mid mn \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ggT}(a, mn) \neq 1 \quad (6.9)$$

-- تضاد (په ورته توګه: $\text{ggT}(s_j, n) = 1 \Rightarrow nr_i + ms_j \in T$ د T تعریف له مخې).

وښایي:

$$\text{ggT}(a, mn) = 1 \quad \text{که } a \in T \text{ وي، نو باور لري:}$$

د $a \in T \subseteq R$ له امله باور لري:

$$a = nr_i + ms_j \quad (1 \leq i \leq \varphi(m), 1 \leq j \leq \varphi(n)); \quad (6.10)$$

نیسو، چې $\text{ggT}(a, mn) \neq 1$ ، نو یو لومړنی ګڼ یا عدد p شتون لري د لاندې سره:

$$p \mid a = nr_i + ms_j \wedge p \mid mn. \quad (6.11)$$

له دې سره لاس ته راځي $p \mid n$ یا $p \mid m$ ،

گنونه پوهنه

بي له توليزو بنديزونو يا محدوديتونو دي $p \mid m$ وي (ورته $p \mid n$). نو $p \mid ms_j$
 او $p \mid a$ باور لري، يعني $p \mid nr_i$ ، له دي سره د [3.1.5](#) له مخي $p \mid n \vee p \mid r_i$
 ، باور لري $p \nmid n$ ، ځکه چې پرته له دي $\text{ggT}(m, n) \neq 1$ له دي امله $p \mid r_i$
 لاس ته راځي، د $p \mid m$ سره لاس ته راځي $\text{ggT}(r_i, m) \neq 1$ - تضاد، ځکه چې
 T_i د لومړني پاتي سيستم $\text{mod } m$ توکي دي.

يعني: T يو لومړنی پاتي سيستم $\text{mod } mn$ دی. □

کورولار 6.1.11 : وي دي $\text{ggT}(m, n) = 1$ د $m, n \in \mathbb{N}$ سره، نو باور لري:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n). \quad (6.12)$$

بنوونه: د [6.1.10](#) له مخي

$$T = \{nr_i + ms_j \mid i = 1, \dots, \varphi(m), j = 1, \dots, \varphi(n)\} \quad (6.13)$$

يو لومړنی پاتي سيستم $\text{mod } mn$ دی، نو $\varphi(m) \cdot \varphi(n)$ توکي لري. دا چې
 هر پاتي سيستم همدا اوس $\varphi(mn)$ توکي لري، نو لاس ته راځي:
 $\varphi(m) \cdot \varphi(n) = \varphi(m \cdot n)$
 □ .

يادونه 6.1.12 : يو تابع $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ د لاندې خويونو سره

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \forall m, n : \text{ggT}(m, n) = 1 \quad (6.14)$$

ضریبی یا خلیزه تابع بیلیری.

له دې سره د اویلر φ -تابع د یوه ضریبی تابع بېلگه ده (کاپیتل یا برخه 11 وګورئ).

پسې راتلنه یا ترې لاس ته راوړنه 6.1.13 : وي دې $m \in \mathbb{N}$ او

$$\text{ggT}(p_i^{\alpha_i}, p_j^{\alpha_j}) = 1 \quad m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

د لومړنیضریب توته ونه، نو باور لري

، یعنی

$$\varphi(p_i^{\alpha_i} \cdot p_j^{\alpha_j}) = \varphi(p_i^{\alpha_i}) \cdot \varphi(p_j^{\alpha_j}). \quad (6.15)$$

له دې سره د اندکشن له لارې :

$$\varphi(m) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdots \varphi(p_k^{\alpha_k}), \quad (6.16)$$

دا په دې معنا، چې د $\varphi(m)$ شمېرنه د $\varphi(p^n)$ په شمېرنه ور اړول کیري، د لومړني عدد p او $n \in \mathbb{N}$ لپاره.

جمله 6.1.14 : وي دې p یو لومړنی ګڼ یا عدد، $k \in \mathbb{N}$ ، نو باور لري::

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} \quad (p^0 := 1). \quad (6.17)$$

کنونپوهنه

بنوونه : $R = \{1, 2, \dots, p^k\}$ دې یو پوره پاتي سیستم $\text{mod } p^k$ وي. لومړی هغه $a \in R$ پیدا کړی، چې و p^k ته نسبي لومړني نه وي:

$$\text{gg}\Gamma(a, p^k) \neq 1$$

$$\Rightarrow$$

$$\exists q \in \mathbb{P} : q \mid a, q \mid p^k \stackrel{3.1.5}{\Rightarrow} q \mid p \Rightarrow q = p \Rightarrow p \mid a, \quad (6.18)$$

$$p \mid a$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{gg}\Gamma(a, p^k) \geq p > 1 \Rightarrow \text{gg}\Gamma(a, p^k) \neq 1. \quad (6.19)$$

$\text{gg}\Gamma(a, p^k) \neq 1 \Rightarrow$	
$\exists q \in \mathbb{P} : q \mid a, q \mid p^k \stackrel{3.1.5}{\Rightarrow} q \mid p \Rightarrow q = p \Rightarrow p \mid a,$	(6.18)
$p \mid a \Rightarrow \text{gg}\Gamma(a, p^k) \geq p > 1 \Rightarrow \text{gg}\Gamma(a, p^k) \neq 1.$	(6.19)

دا په دې معنا، چې $a \in R$ ، کوم چې p^k ته نسبي لومړني نه دي، ټيک هغه دي د سره. يعني غوښتونې: ټول $p \mid a$ ، $a \in R$ ، دا په دې معنا، چې $a = p \cdot t$ ($t = 1, 2, \dots$)

د $1 \leq a \leq p^k$ ($a \in R$) له امله باور لري $1 \leq pt \leq p^k$ ، يعني ،
 بايد $1 \leq t \leq p^{k-1}$ باور ولري.

برعکس هر $t \in \mathbb{N}$ د $1 \leq t \leq p^{k-1}$ سره هم $p \mid pt = a$ پوره کوي. يعني
 تیک p^{k-1} گڼونه $a \in R$ شتون لري د $p \mid a$ سره، يعني

$$\text{ggT}(a, p^k) \neq 1$$

$$\Rightarrow \exists p^k - p^{k-1}a \in R : \text{ggT}(a, p^k) = 1$$

. له دې سره د پيژند له مخې هم باور لري: $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. □

کورولار يا وره جمل 6.1.15: وي دې $m \in \mathbb{N}, m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ په لومړنيو
 ضريبونو ټوټه کونه ، نو باور لري:

$$\varphi(m) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}) . \quad (6.20)$$

(دا په دې معنا، چې په په پاتېټولگي کړی (رين، حله) $\text{mod } m$ کې د يونونو يا
 واحدونو گڼون يا تعداد شتون لري).

بېلگه :

لومړی :

$$m = 25m = 5^2 \Rightarrow \varphi(25) = 25 - 5 = 20$$

يعني $|\mathbb{Z}_{25}^*| = 20$ ، دا په دې معنا، چې په \mathbb{Z}_{25} کې تیک 20 يونونه يا واحدونه
 شتون لري.

دويم:

$$m = 72m = 2^3 3^2 \Rightarrow \varphi(72) = (2^3 - 2^2)(3^2 - 3) = 4 \cdot 6 = 24$$

يعني $|\mathbb{Z}_{72}^*| = 24$ دا په دې معنا، چې په \mathbb{Z}_{72} کې ټيک 24 يونونه يا واحدونه شتون لري.

د اويلر جمله

Der Satz von Euler

ليما 6.1.17: وي دې $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ يو پای، ابل گروپ، نو باور لري:

لومړی: د هر $a \in G$ لپاره باور لري ، $ag_i \neq ag_j \forall i \neq j$

دويم: د هر $a \in G : a^n = e$ لپاره باور لري، د کوم سره چې e د (G, \cdot)

يوون يا واحد دی، او $n = |G|$ دی.

بنوونه:

يو ته :

وړاندنيونه $ag_i = ag_j$ د يوه $a \in G, i \neq j$ لپاره، نو د $a^{-1} \in G$: سره د ضربولو له لارې لاس ته راځي:

$$a^{-1}ag_i = a^{-1}ag_j, (6.21)$$

دا په دې معنا، چې $i \neq j$ د $g_i = g_j$ سره. تضادا!

دويم ته:

د لومړي ټکي له مخي $ag_i \neq ag_j$ باور لري، يعنې د $e(g_1 \cdots g_n) = g_1 \cdots g_n$ لپاره بېرته n مختلف توکي لاس ته راځي. له دې سره باور لري $i = 1, \dots, n$

$$g_1 \cdots g_n = (ag_1)(ag_2) \cdots (ag_n) = a^n(g_1 \cdots g_n), \quad (6.22)$$

همداسي

$$e(g_1 \cdots g_n)(g_1 \cdots g_n)^{-1} = a^n(g_1 \cdots g_n)(g_1 \cdots g_n)^{-1}. \quad (6.23)$$

له دې سره ترلې $e = a^n, n = |G|$ راکوي. □

جمله 6.1.18: (اويلر 6.1) وي دې $a, m \in \mathbb{N}, \text{ggT}(a, m) = 1$ ، نو باور لري:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1(m). \quad (6.24)$$

بنوونه: د $\text{ggT}(a, m) = 1$ له امله باور لري: $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ لومړنی پاتي ټولگی $\text{mod } m$ دی، يعنې $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m^*$ باور لري. د $|Z_m^*| = \varphi(m)$ له امله د تعريف له مخي، د 6.1.17 له مخي لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \bar{a}^{\varphi(m)} &= \bar{1}, \\ \text{d.h.} \\ \overline{a^{\varphi(m)}} &= \bar{1}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

کنونپوهنه

داسې چې $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (m)$ باور لري. □

يو ځانگړی غوره حالت او د [6.1.18](#) مشهور غوره حالت غواړو په لاندې کې ځانله تر څېړنې لاندې ونیسو:

کوروار 6.1.19: (کوچنی فرمات) د ټولو $a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P}$ لپاره باور لري:

$$a^p \equiv a(p). \quad (6.26)$$

ښوونه: دی $\text{ggT}(a, p) = 1$ ، نو د [6.1.18](#) له مخې باور لري: $a^{\varphi(m)} \equiv 1(p)$ او د $\varphi(p) = p - 1$ له امله لاس ته راځي:

$$a^{p-1} \equiv 1(p), \quad (6.27)$$

نو په ځانگړې توگه $a^p \equiv a(p)$.

که وي $\text{ggT}(a, p) \neq 1$ ، نو باور لري $a = pt, p \mid a \Rightarrow a^p \equiv 0 \equiv a(p)$

..جمله 6.1.20: (وېلسن [6.2](#) 1741-1793) : د يوه پيداېښتي گڼ يا طبيعي عدد p لپاره باور لري:

$$\begin{aligned} & \text{لومړنی عدد دی } p \\ & (6.28) \\ & \Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1(p). \end{aligned}$$

ښوونه:

(\Rightarrow)

وي دي $p \in \mathbb{N}$ لومړنی عدد. که وي $p = 2$ ، نو باور لري:

$$(2 - 1)! = 1 \equiv -1(2), (6.29)$$

نو غوښتنه ټیک ده.

وي دي $p > 2$ ، نو د ټولو $a \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري د

سر. د [6.1.19](#) له مخي دي a لپاره لاس

$$a^{p-1} \equiv 1(p)$$

ته راځي:

له دي سره ټول عددونه $1 \leq a \leq p - 1$ د الجبري کونگروانځ

حلونه دي. د [5.3.13](#) له مخي کونگروانځ خورازيات $x^{p-1} \equiv 1(p)$ د

پولينوم درجه ده $\text{mod } p$ بنکونگروانت حلونه، له دي سره لاس ته راځي:

همدا اوس ټول انکونگروانت $1, 2, \dots, p - 1$ $\text{mod } p$ حلونه دي.

پسي الجبري کونگروانځ

$$(x - 1)(x - 2) \cdots (x - (p - 1)) \equiv 0(p)$$

انکونگروانت حلونه $1, 2, \dots, p - 1$ لري. د $\text{grad} = p - 1$ له امله

ټیک $1, 2, \dots, p - 1$ $\text{mod } p$ انکونگروانت حلونه دي (د [5.3.13](#) سره د

کڼونپوهنه

ضریب دی، نو x^{p-1} یو دی، نو د p له لارې پروېشونې نه ده. د ضربولو وروسته
سری یو د $p-1$ درجې پولینوم د مطلق لري

$$c_0 = (-1)(-2)\cdots(-(p-1)) = (-1)^{p-1}(p-1)! = (p-1)! \pmod{p} \quad (6.30)$$

سره لاس ته راوړي، ځکه چې $p > 2$ ، نو ناجوره یا طاق دی.

له $x^{p-1} \equiv 1(p)$ څخه د دې کونگروانتونو کمون له لارې سری یو الجبري
کونگروانت لاس ته راوړي

$$f(x) \equiv 0(p), \quad \text{grad } f \leq p-2 \quad (6.31)$$

او مطلق غری $-1 - c_0 = -1 - (p-1)!$. دا کونگروانت زیات له زیاته
انکونگروانت حلونه لري، که p نه د f ټول ضریبونه $\text{grad } f \leq p-2 \pmod{p}$
ووبشي (5.3.13) مگر: $1, 2, \dots, p-1$ انکونگروانت \pmod{p} حلونه دي
. له دې سره لاس ته راځي: د f ټول کونگروانتونه وېشي، په ځانګړې توګه
 $-1 - c_0$ ، دا په دې معنا، چې

$$p \mid -1 - c_0 \Rightarrow -1 - c_0 \equiv 0(p) \Rightarrow c_0 \equiv -1(p), \quad (6.32)$$

دا په دې معنا، چې $(p-1)! \equiv -1(p)$

(\Leftarrow)

وي دي $n \in \mathbb{N}$ د $(n-1)! \equiv -1(n)$ سره نيسو، چي $n \notin \mathbb{P}$ له دي .
 سره يو لومړنی ګڼ p د $p \mid n$ سره او $2 \leq p \leq n-1$ سره شتون لري، له دي سره

$$p \mid (n-1)! \Rightarrow (n-1)! \equiv 0(p). \quad (6.33)$$

د $(n-1)! \equiv -1(n)$ له امله د $p \mid n$ سره لاس ته راځي، چي
 د $(n-1)! \equiv -1(p)$ له دي سره لاس ته راځي .

$$0 \equiv (n-1)! \equiv -1(p) \Rightarrow p \mid 0 - (-1) = 1 \quad (6.34)$$

--- تضاد) $p > 1, p \in \mathbb{P}$ □

يادونه 6.1.21 : د ويلسن (6.1.20) 1741-1793) جملې له امله دا تروسه يواځنی څرګنده يا معلوم د لومړنيو ګڼو قضيه انځوروي!

د (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) جوړښت Struktur von (\mathbb{Z}_m^*, \cdot)

د (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) نظم د اويلر φ تابع په څخه معلوم دی: $|\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m)$

د ګروپ تيوري له مخې خورا ځانګړي ګروپونه داسې په نامه ،، ځيوکليکي،، ګروپونه دي:

پيژند(تعريف) 6.2.1 : يو پای ګروپ (G, \cdot) ځيوکليکي دی، که

کنونپوهنه

$$G = \{a, a^2, \dots, a^{|G|} = e\} \quad (6.35)$$

د لږ تر لږه یوه $a \in G$ لپاره باور ولري. یو توکی $a \in G$ د دې خوي سره د (G, \cdot) تولیدېدونکی توکی بلل کیږي.

یادونه 6.2.2:

لومړی: د یوه ځیوکلیکي گروپ (G, \cdot) هر توکی g کیدی شي د یوه کره یا همغه کلک توکی $a \in G$ د توان په توگه ولیکل شي: $g = a^n$ د یوه $n \in \mathbb{N}$ لپاره د $1 \leq n \leq |G|$ سره.

دویم: هر ځیوکلیکي گروپ (G, \cdot) د ابل گروپ دی.

$$\begin{aligned} & \text{د یوه تولیدي توکي لپاره } (g, h \in G \Rightarrow g = a^m, h = a^n) \\ & a \in G \Rightarrow g \cdot h = a^m \cdot a^n = a^{m+n} = a^{n+m} = a^n \cdot a^m = h \cdot g \end{aligned}$$

بیلگه 6.2.3:

لومړی: (\mathbb{Z}_5^*, \cdot) ځیوکلیکي دی:

$$\mathbb{Z}_5^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \quad (\varphi(5) = 4) \quad \bar{2}^1 = \bar{2}, \bar{2}^2 = \bar{4}, \bar{2}^3 = \bar{3}, \bar{2}^4 = \bar{1} \Rightarrow a = \bar{2}$$

د (\mathbb{Z}_5^*, \cdot) یو تولیدي سیستم دی.

همداسي: $\bar{3}^1 = \bar{3}, \bar{3}^2 = \bar{4}, \bar{3}^3 = \bar{2}, \bar{3}^4 = \bar{1}$
 يو (\mathbb{Z}_5^*, \cdot) هم $a = \bar{3}$ نو د (\mathbb{Z}_5^*, \cdot) توليدي سيستم دی.

دويم: (\mathbb{Z}_8^*, \cdot) څيوکليکي نه دی:

دا په دی $\mathbb{Z}_8^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ ($\varphi(8) = \varphi(2^3) = 2^3 - 2^2 = 4$) $\bar{3}^2 = \bar{1}$

$$\bar{5}^2 = \bar{1}, \bar{7}^2 = \bar{1}$$

معنا، چې $\bar{3}$ توليدي نه دی، همداسي باور لري:

دریم: (\mathbb{Z}_2^*, \cdot) او (\mathbb{Z}_4^*, \cdot) څيوکليکي نه دي

$$\mathbb{Z}_2^* = \{\bar{1}\} - \text{trivial}; \mathbb{Z}_4^* = \{\bar{1}, \bar{3}\}, \bar{3}$$

-ساده دی،

$$\mathbb{Z}_2^* = \{\bar{1}\} - \text{trivial}; \mathbb{Z}_4^* = \{\bar{1}, \bar{3}\}, \bar{3}$$

(توليدي توکی دی)

اوس نو کوم (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) څيوکليکي دی؟

پيژند(تعريف) 6.2.4: يو ټول گڼ يا -عدد $g \in \mathbb{Z}$ ساده ريښه $\text{mod } m$ بلل کيږي،

که $\bar{g} \in \mathbb{Z}_m^*$ لومړنی پاتي ټولگيگروپ (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) توليد کړي.

بيلگه 6.2.5:

لومړی: 2 يو ساده ريښه $\text{mod } 5$ دی (پورته بيلگه وکوری: $\bar{2} \in (\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ توليدوي)،
 همداسي: $g = 3$ ساده ريښه $\text{mod } 5$ دی.

گنونپوهنه

دويم: کومه ساده ريښه $\text{mod } 8$ شتون نه لري (همداسي: (\mathbb{Z}_8^*, \cdot) څيوکليکي نه دی).
 دريم: 1 ساده ريښه $\text{mod } 2$ ، 3 ساده ريښه $\text{mod } 4$ دی.

يادونه 6.2.6: ساده ريښه $\text{mod } m$ دی، نو بيا هم هر $g \in \mathbb{Z}$ ، $g' \in \bar{g}$.

د هغه مودول $m \in \mathbb{N}$ ټاکنه، د کوم لپاره چې (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) څيوکليکي دی (دا په دې معنا، چې د هغه لپاره چې ساده ريښه $\text{mod } m$ شتون لري) 6.3:

ليما 6.2.7: وي دې (G, \cdot) يو پای ابل گروپ او $a \in G$ نو باور لري:

$$a^k = e \quad k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \text{ord } a \mid k. \quad (6.36)$$

له دې سره نظم $\text{ord } a$ خورا کوچنی طبيعي عدد $n \in \mathbb{N}$ دی، چې د هغې لپاره $a^n = e$ باور لري.

جمله 6.2.8: وي دې p يو لومړنی عدد، نو (\mathbb{Z}_p^*, \cdot) څيوکليکي يا تل بېرته راگرځېدونی دی.

(دایه دې معنا، چې ذات وخت ساده ريښه $\text{mod } p$ شتون لري، خو شمېرنو ته يې ټوليز متود شتون نه لري؟)

ليما 6.2.9: وي دې $p > 2$ يو لومړنی عدد، او $g \in \mathbb{Z}$ يوه ساده ريښه $\text{mod } p$. که $g^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ وي، نو هم يوه ساده ريښه $\text{mod } p^\alpha \forall \alpha \in \mathbb{N}$ ده.

جمله 6.2.10: وي دي $p > 2$ لومړنی عدد، نو $(\mathbb{Z}_{p^{\alpha}}^*, \cdot) \forall \alpha \in \mathbb{N}$ خیکلیکي دی (څیکلیکي دی) دا په دي معنا، چپوه ساده ریښه شتون لري). $\text{mod } p^{\alpha} \forall \alpha \in \mathbb{N}$

ښوونه: له ښوونې: که g ساده ریښه $\text{mod } p$ وي، نو باور لري:

$$g^{p-1} \not\equiv 1(p^2) \vee (g+p)^{p-1} \not\equiv 1(p^2). \quad (6.37)$$

پام؛ $g+p$ ساده ریښه $\text{mod } p$ دی. ($\Rightarrow \exists$) له دي لاس ته راځي تل يو g شتون لري لکه په [6.2.9](#) کي غوښتل شوي). \square

بیلگه 6.2.11: وي دي $p = 5$ ، د [6.2.3](#) له مخي $g = 2$ يوه ساده ریښه $\text{mod } 5$ دی، د

$$g^{p-1} = 2^4 = 16 \not\equiv 1(25) \quad (6.38)$$

له امله $g = 2$ يوه ساده ریښه $\text{mod } 5^{\alpha} \forall \alpha \in \mathbb{N}$ ده، دا په دي معنا، چي $\text{mod } 25, 125, 625, \dots$

په همدې توگه: $g = 3$ يوه ساده ریښه $\text{mod } 5$ ده، د

$$g^{p-1} = 3^{p-1} = 3^4 = 81 \not\equiv 1(25) \quad (6.39)$$

له امله 3 هم يوه ساده ریښه $\text{mod } 5^{\alpha} \forall \alpha \in \mathbb{N}$ دی.

کنونپوهنه

جمله 6.2.12: $p > 2$ دې یو لومړنی عدد وي، نو $(\mathbb{Z}_{2p^\alpha}, *)$ څیکلیکي دی $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ (دا په دې معنا، چې یوه ساده ریښه شتون لري).

ښوونه: له ښوونې څخه: g دې ناجوره وي، $g \in \mathbb{Z}$ ، او یوه ساده ریښه $g \pmod{p^\alpha}$ ، نو هم یوه ساده ریښه ده $(g \pmod{2p^\alpha})$ ، که g جوړه وي، نو $g + p^\alpha$ ناجوره دی او ساده ریښه \square .

بیلگه 6.2.13: وي دې $p = 5$ ، د 6.2.11 له مخې $g = 3$ یوه ساده ریښه

$\pmod{5^\alpha} \forall \alpha \in \mathbb{N}$ ده او ناجوره، نو لاس ته راځي: 3 یوه ساده ریښه $\pmod{2 \cdot 5^\alpha} \forall \alpha \in \mathbb{N}$ ده، دا په دې معنا، چې

د 6.2.11 له مخې $g = 2$ هم ساده ریښه ده، مگر جوړه، بیا هم $g' = 2 + 5^\alpha$ ناجوره او ساده ریښه $\pmod{5^\alpha}$ ده، نو هم ساده ریښه $\pmod{2 \cdot 5^\alpha}$ ده.

لیما 6.2.14: د $\alpha \geq 3$ لپاره $(\mathbb{Z}_{2^\alpha}^*, *)$ څیکلیکي نه دی. (دا په دې معنا، چې ساده ریښه $\pmod{2^\alpha}$ شتون نه لري د $\alpha \geq 3$ لپاره).

جمله: (گاوس 1777-1855). $(\mathbb{Z}_m^*, *)$ ټیک هلته څیکلیکي دی، که

د $m \in \{2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha\}$ سره او $p > 2, p \in \mathbb{P}$ په خوښه وي $\alpha \in \mathbb{N}$

(6.40)

نسبت $m = 2^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$ ته نو هم باور لري: $(\mathbb{Z}_{2^m}^*, \cdot)$ ، نږدي، ،fast`،
ځيکليکي دی:

جمله 6.2.16: هر $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{2^m}^*$ ته يو يواځنی ټاکلی $j \in \{0, 1\}$ او
 $n \in \{1, 2, \dots, 2^{\alpha-2}\}$ شته دی د لاندې سره.

$\bar{a} = \overline{(-1)^j 5^n}$.	(6.41)
-------------------------------------	--------

کارونه: کریپتولوژيKryptologie Anwendung:

د خبررسوني لپاره تل اړين همداسي غوښتنور دی، چې معلومات فقط نیونکي B او نه بل چا ته ورسیري. کریپتولوژي د متودونو پوهنه ده، چې د خورا کم یا مینیمال ورزیات معلومات له مخي (د له B لاري ورکړشوی) څوک د $A \rightarrow B$ څخه خبر پرانستلی نه شي، چې دا معلومات ونه لري.

بیلگه 6.3.1: (،Caesar`،) الفبي: A, B, \dots, Z ، په خوښه ټاکل $n \in \mathbb{N}$ شوی، تعریفوو:

A = n-ter Buchstabe, م توری -n

B = (n+1)-ter Buchstabe, م توری (n+1)

⋮

Y = (n-2)-ter Buchstabe م توری (n-2)

Z = (n-1)-ter Buchstabe. م توری ()

ګڼونپوهنه

له دې سره د $n=6$ لپاره بریدتی قلفیری و FSLWNKK ته وازېدنه ښوونې ده، که $n = 6$ معلوم وي.

دا تروسه جوت د خبرونو شفرکونه یا قلفونه متمان متود داسې په نامه تلنلار انځوروي.

فکر یا اند

په ټولیزه توګه یو ډېر په راتلونکي وخت کې، ډېرستر، طبیعي یا پیدایښتي ګڼ(عدد) $n \in \mathbb{N}$ په لومړنی ګڼونو نه شي ټوټه کیدی، حتی هلته هم نه، که سړی وپوهیږي، چې فقط دوه لومړني ضریبونه یا ځله وونی رامنځ ته کیري:

$$n = p \cdot q \quad (p, q \in \mathbb{P}). \quad (6.42)$$

تلنلار

که A و B به ته یو خبر استول غواړي، نو دوه ډېر ستر ګڼونه p, q ټاکي او یو عدد $e > 1, e \in \mathbb{N}$ چې $\varphi(n) = p \cdot q$ ته نسبي لومړني عدد دی، او په (څرګند ډول) n او e معلوم ورکوي. دلته غوره ټکی: که سړی n, e هم وپېژني، د n دواړه لومړني ضریبونه (په ټولیزه توګه) p, q نه ټاکل کیري. دا عددونه p, q باید سړی وپېژني د دې لپاره، چې

$$\varphi(n) = \varphi(p)\varphi(q) = (p-1)(q-1) \quad (6.43)$$

وټاکي (باید د خبرونو د وازولو لپاره وشمیرل شي: د یوه کرښیز کونګرواینڅ

$\text{mod } \varphi(n)$
حل یا اوبیونه).

د یوه خبر د قلفولو یا شفر کولو لپاره $\text{mod } \varphi(n)$ دا د یوه عدد ښه (لکه په بینار ښه)

اړوي او پیدایښتي بیت طبیعي عدد $w \in \mathbb{N}$ لاس ته راوړي. سړی کړی شي

لاس ته راوړي، داسې چې خبر په بلوکونو برخو یا سترو توتو د $w < n = p \cdot q$
 اوږدوالي سره توتې کړي، او دا ځانله یو پېه گوني دول ولیري. دا قلف شوی $l < n$
 لغات w د یوه کوچني بافي c په توگه تعریف دی، کوم چې د $w^e \in \mathbb{N}$ سره د وېشنې
 سره د $n = pq$ له لارې منځ ته راځي، داپه دې معنا، چې $w^e \equiv c(n)$. A اوس $c \in \mathbb{N}$
 ورلیري. د دې لپاره چې w وټاکي، له دې امله الجبري کونگرواینڅ

$x^e \equiv c(n)$	(6.44)
-------------------	--------

باید حل شي (w یو حل یا اوبی دی) .

دا چې $n \in \mathbb{N}$ ډېر لوي دی، امکان شتون لري، چې دا فقط په لومړنيو ضریبونو توتې
 شي، او $x^e \equiv c$ د یوگونو اعدو مودولو پسي حل شي (پېسي د چيني پاتي جمله [5.2.1](#)
 وکتل شي) . له دې سره باید د n دواړه لومړني ضریبونه p, q وټاکل شي. (نتشفر کیدی.
 دا د p, q لپاره ډېر لوي دی،، ناشونی،،) نو له $n, e, c \in \mathbb{N}$ څخه خبر په ټولیزه
 توگه نه شي وازیدی یا اشفري کیدی. نت

د $c \in \mathbb{N}$ وازول (د $w \in \mathbb{N}$ ټاکول لپاره) کیدی شي په لاندې توگه لاس ته راشي:
 $d \in \mathbb{N}$ $d \equiv c \pmod{\varphi(n)}$ یواځنی لاندې کرښیز کونگرواینڅ زیاتیز- یا مثبت حل دی

$ex \equiv 1(\varphi(n)),$	(6.45)
----------------------------	--------

کڼونپوهنه

نو باور لري، چې $w^{ed} \equiv w(n) : w \in \mathbb{N}$ خورا کوچنی څلوری یا مربع باقی دی،
 $w^{ed} \in \mathbb{N}$ کوم چې n له لاری د په وېش منځ ته راځي. (دا چې $c \equiv w^e$ يعني
 $w \in \mathbb{N}$ شمیرنه ده د B لپاره ممکن د لویو $w^{ed} \equiv c^d$ نو له دې سره د
 $n = pq, e, c, d \in \mathbb{N}$ څخه).

د $ex \equiv 1(\varphi(n))$ له امله کرښیز کونگرواینڅ $\text{ggT}(e, \varphi(n)) = 1$ ښوونه: د
 $\text{mod } \varphi(n)$ ناگونگرواینڅ حل لري: d . [5.1.1](#) له مخې ټیک یو

وښایی:

$w^{ed} \equiv w(n).$	(6.46)
-----------------------	--------

د $\text{ggT}(p, q) = 1$ او $n = pq$ له امله دې فقط وښوول شي، چې

$w^{ed} \equiv w(p) \wedge w^{ed} \equiv w(q)$	(6.47)
--	--------

باور لري (د [4.1.5\(6\)](#) له مخې لاس ته راځي، چې $w^{ed} \equiv w(pq)$ ځکه چې

$$\text{kgV}(p, q) = pq$$

دې، نو هم $p \mid w$ ، يعني $p \mid w^{ed} - w$ ، داسې چې $w^{ed} \equiv w(p)$
 باور لري. $p \nmid w$ دی: دا چې $ed \equiv 1(\varphi(n))$ (حل دی) بار لري

$ed = 1 + k \cdot \varphi(n)$	(6.48)
-------------------------------	--------

د یوه لپاره $e, d, 1, \varphi(n)$ $k \in \mathbb{N}$ زیاتیز یا مثبت دي. دا چې $\text{ggT}(w, p) = 1$ ، د w کوچني فرمات، [6.1.19](#) له مخې باور لري.

$w^{p-1} \equiv 1(p), w^{\varphi(n)} \equiv 1(p)$, دا په دې معنا چې	(6.49)
---	--------

له دې سره لرو:

$w^{ed} = w^{1+k\varphi(n)} = w^{1+k(p-1)(q-1)} =$ $w \cdot (w^{p-1})^{k(q-1)} \equiv w \cdot 1^{k(q-1)} = w(p).$	(6.50)
--	--------

ورته: $w^{ed} \equiv w(q) \Rightarrow$ غوښتنه. \square

یادونه: 6.3.2 B کړی شي د لاس ته راوړي خبر څخه e د $n = pq$ او $d \in \mathbb{N}$ له لارې پته خبر w وشميري

بیلگه 6.3.3 (گنونه په رښتیا ډېر واره دي!)

$n = 23 \cdot 3 = 69, \varphi(n) = 2 \cdot 22 = 44$ $p = 3, q = 23$ B
غوره ټاکي، یعنی
او ټاکي $e > 1 \in \mathbb{N}, e = 3$ (و 44 ته نسبي لومړنی).

B معلومات ورکوي: $n = 69, e = 3$ او له A څخه شفري خبر یا کود یا پت خبر
 $c = 12$ تر لاسه کوي.

کنونپوهنه

حلونه یا اوبیونه یې: $ex \equiv 1(\varphi(n))$ ، دا په دې معنا، چې $3x \equiv 1(44)$ ،
 $e^d \equiv w(n)$ ، دا په دې معنا، چې $\text{mod } 44$ یواځنی ټاکلی حل: $d = 15$. له دې سره ،
 $12^{15}(69)$ چې

$$12^{15} : 12^2 \equiv 6(69), 12^4 \equiv 6^2 = 36(69), 12^5 \equiv 36 \cdot 12 \equiv 18(69),$$

$$, 12^{10} \equiv 18^2 = 324 \equiv 48(69), 12^{15} = 12^{10} \cdot 12^5 \equiv 48 \cdot 18 \equiv 36(69)$$

نو $w \equiv 12^{15} \equiv 36(n)$ ، دا پټ لغات 36 وو.

۷- د حقیقي اعدادو g - ادیکي وديزیننه

g -adische Entwicklung reeller Zahlen

تولزه وديزیننه Allgemeine Entwicklungen

په برخه 1 کې د هر $a \in \mathbb{N}$ لپاره (له دې سره د هر $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ لپاره)
 وښوول شو:

که $g \in \mathbb{N}, g \geq 2$ وي ، نو $a_n > 0, 0 \leq a_i \leq g (i = 0, \dots, n-1)$ شتون لري د

$$a = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \dots + a_1 g + a_0 \quad (7.1)$$

سره

د $a \in \mathbb{N}$ -ادیکي وده) g .

د صفر سره نابرابرو حقيقي عددونو ته ټوليزونه:

د $\pi = 3,1415\dots$ لپاره باور لري:

$$\pi = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 10^{-i}. \quad (7.2)$$

جمله 7.1.1: $\alpha > 0$ دې يو حقيقي عددوي او $g \in \mathbb{N}, g \geq 2$ نو $a_i \in \mathbb{N}_0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) شتون لري د $0 \leq a_i \leq g$ ($i = 1, 2, \dots$)

سره، داسې چې دي

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}. \quad (7.3)$$

که α ريښتونی يا راشنل نه وي، نو دا انځورونه يواځنې ده (داسې په نامه g -ادیکي انځورونه).

بنوونه: د يوه داسې انځوروني يواځنوالی:

که $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ناراشنل وي، نو $[\alpha]$ د α پسي خورا کوچنی عدد په گوته کوي.

د ټوليزي بنووني روښانهونه يا تشریح:

$\pi = 3,1415\dots$ ، تعريف کړئ، $a_0 = [\pi] = 3$ ، $a_1 = \pi - [a_0]$ ، جوړ کړئ او $a_1 = [10a_1] = [1,415\dots] = 1$ تعريف کړئ،

کڻونپوهنه

$$\alpha_2 = 10\alpha_1 - [10\alpha_1] = 0,415\dots$$

$$a_2 = [10\alpha_2] = 4$$

توليز : $\alpha \in \mathbb{R}^+, g \in \mathbb{N}, g \geq 2$ دي
په خوښه وي. اندوکتيو جوړکړئ:

$$\alpha_1 = \alpha - [\alpha], \dots, \alpha_{i+1} = g\alpha_i - [g\alpha_i], \quad (7.4)$$

او له دي سره تعريف کړئ

$$a_0 = [\alpha], \dots, a_i = [g\alpha_i]. \quad (7.5)$$

باور لري: $0 \leq a_i \leq g \quad \forall i > 0$ ، ځکه چې

$$0 \leq \alpha_i = g\alpha_{i-1} - [g\alpha_{i-1}] < 1 \stackrel{g \geq 0}{\Rightarrow} 0 \leq g\alpha_i \leq g \Rightarrow \quad (7.6)$$

$$\Rightarrow 0 \leq [g\alpha_i] = a_i < g. \quad (7.7)$$

باور لري

$$\alpha_1 = \alpha - [\alpha] = \alpha - a_0 \Rightarrow \alpha = a_0 + \alpha_1$$

$$\alpha_2 = g\alpha_1 - [g\alpha_1] \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 g^{-1} + \dots$$

$$\Rightarrow \alpha = a_0 + a_1 g^{-1} + \alpha_2 g^{-1}. \quad (7.8)$$

و بنايي:

$$\alpha = a_0 + a_1g^{-1} + \cdots + a_n g^{-n} + \alpha_{n+1}g^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n = 1 :$$

$$\alpha = a_0 + a_1g^{-1} + \alpha_2g^{-1}$$

پورته لور ته واز دی

$$n \rightarrow n + 1 :$$

$$\alpha_{n+2} = g\alpha_{n+1} - [g\alpha_{n+1}] = g\alpha_{n+1} - a_{n+1} \Rightarrow \alpha_{n+1} = a_{n+1}g^{-1} + \alpha_{n+2}g^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = a_0 + a_1g^{-1} + \cdots + a_n g^{-n} + \alpha_{n+1}g^{-n} = \quad (7.9)$$

$$= a_0 + a_1g^{-1} + \cdots + a_n g^{-n} + (a_{n+1}g^{-1} + \alpha_{n+2}g^{-1})g^{-n} = \quad (7.10)$$

$$= a_0 + a_1g^{-1} + \cdots + a_n g^{-n} + a_{n+1}g^{-(n+1)} + \alpha_{n+2}g^{-(n+1)} \quad (7.11)$$

\Rightarrow

چې د $n + 1$ لپاره هم ټیک دی.

ناپای لړۍ تخیرني لاندې نیسو: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}$ د همدا اوس تعریف تعریف شوو a_i سره.

وینایی: دا لړۍ د α په لور ځي یا α ته کونورکنت کیري.

کڼونپوهنه

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}. \quad (7.12)$$

n - مه ټوټه - يا پارشل جمع (زياتون)

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i g^{-i} = a_0 + a_1 g^{-1} + \dots + a_n g^{-n} \quad (7.13)$$

$$s_n = \alpha - \alpha_{n+1} g^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

پوره کوي

د $0 \leq \alpha_{n+1} < 1$ او د $g^{-n} > 0$ ($g > 0$) له امله باور لري

$$0 \leq \alpha_{n+1} g^{-n} < g^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad (7.14)$$

له دې سره لرو: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1} g^{-n}) = 0$ دا په دې معنا، چې

مطلق د $\sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}$ ، دا په دې معنا، چې $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha - s_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha$

α په لور هڅيري.
يو اځنوالی (يو اځيوالی):

شتون لري د $\alpha \notin \mathbb{Q}$ نيسوچي،

(7.15)

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i g^{-i},$$

سره، چیرته چې $a_i \neq b_i$ د یوه i لپاره، وي دي خورا کوچنی عدد د $a_{i_0} \neq b_{i_0}$ سره. بی له تولیز محدودیت دي $a_{i_0} > b_{i_0}$ وی.

یعني

(7.16)

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{i_0-1} = b_{i_0-1},$$

او لاس ته راځي $\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i g^{-i} = \sum_{i=i_0}^{\infty} b_i g^{-i}$ ، له دي سره (د تولیز پولې ته تلني له امله کیدی شي سره راټول شي)

$$0 = \sum_{i=i_0}^{\infty} (a_i - b_i) g^{-i} = \quad (7.17)$$

$$= \underbrace{(a_{i_0} - b_{i_0})}_{\geq 1} g^{-i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \underbrace{(a_i - b_i)}_{\leq 1-g+1} g^{-i} \geq g^{-i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} (-g + 1) g^{-i} \quad (7.18)$$

$$= g^{-i_0} + (-g + 1) \sum_{i=i_0+1}^{\infty} g^{-i} = g^{-i_0} + (-g + 1) g^{-i_0+1} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} g^{-i}}_{= \frac{2-g}{-1+g}} \quad (7.19)$$

$$= g^{-i_0} - (g - 1) g^{-i_0-1} \frac{g}{g-1} = g^{-i_0} - g^{-i_0} = 0. \quad (7.20)$$

له دي سره باید په دي تخمین کې هر چیرته برابر والی باور ولري، نو له دي لاس ته راځي:

کنونپوهنه

$$a_{i_0} - b_{i_0} = 1 \wedge a_i - b_i = -(g-1) \forall i > i_0, \quad (7.21)$$

دا په دې معنا، چې

$$b_{i_0} = a_{i_0} - 1 \wedge b_i - a_i = g - 1 \forall i > i_0. \quad (7.22)$$

$$b_i = g - 1 \forall i > i_0 \quad \text{او} \quad a_i = 0$$

باور لري:

$$0 < a_i \quad \text{، نو د} \quad b_i \leq g - 1 \quad \text{سره لاس ته راځي، چې}$$

$$b_i - a_i < g - 1$$

-تضاد!

له دې سره ټول زیتوني یا د جمعې اجزای د a_i په انځورونه کې د $i > i_0$ سره
صفر دي، دا په دې معنا، چې

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} = a_0 + a_1 g^{-1} + \dots + a_{i_0} g^{-i_0} = a_0 + \frac{a_1}{g} + \dots + \quad (7.23)$$

تضاد دی! نو: α فقط یوه g -ادیکي وده لري. \square

یادونه 7.1.2: دی $g = 10$ (لسمیز سیستم)، نو سری د $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}$ لپاره
لیکي هم

$$a_0, a_1 a_2 \dots \quad 0 \leq a_i < 10 \forall i \geq 1. \quad (7.24)$$

کورولار 7.1.3: $\alpha > 0$ یو راشنل عدد دی، نو α خورا زیات دوه g -ادیکي
انځوروني، داسې په نامه

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i g^{-i}, \quad (7.25)$$

د کوم سره چې

$$a_i = 0 \quad \forall i > i_0 \quad .1$$

$$b_i = g - 1 \quad \forall i > i_0 \quad \text{او} \quad b_{i_0} = a_{i_0} - 1 \quad .2$$

کله $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ دوه g -ادیکي انځورونه لري؟

پېژند(تعریف) 7.1.4: سری وایي، $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha = \frac{a}{b}$ یو پای انځورونه لري، که وي

$$\alpha = \frac{a}{b} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}, \quad (7.26)$$

$$a_i = 0 \quad \forall i > i_0 \quad \left(\frac{a}{b} = a_0 + a_1 g^{-1} + \dots + a_{i_0} g^{-i_0} \right)$$

د کږم سره چې

7.1.5: کورولار $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ ټیک دوه مختلف g -ادیکي ودې لري، که $\frac{a}{b}$ یو یواځنی انځورونه ولري.

بنوونه:

(\Rightarrow)

دوه انځورونې لري، نو له دوي څخه یو د [7.1.3](#) له مخې پای دی. $\alpha = \frac{a}{b}$

(⇐)

$$\alpha = \sum_{i=0}^{i_0} a_i g^{-i}$$

وي دي يوه پای انځورونه، نو باور لري

$$\frac{\alpha}{b} = \sum_{i=0}^{i_0-1} a_i g^{-i} + a_{i_0} g^{-i_0} = \sum_{i=0}^{i_0-1} a_i g^{-i} + (a_{i_0} - 1) g^{-i_0} + g^{-i_0} = (7.27)$$

$$= \sum_{i=0}^{i_0-1} a_i g^{-i} + (a_{i_0} - 1) g^{-i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} (g-1) g^{-i}, \quad (7.28)$$

دا چې

$$-g^{-i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} (g-1) g^{-i} = -g^{-i_0} + (g-1) g^{-(i_0+1)} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} g^{-i}}_{\rightarrow \frac{g}{g-1}} = (7.29)$$

$$= -g^{-i_0} + (g-1) g^{-(i_0+1)} \frac{g}{g-1} = (7.30)$$

$$= -g^{-i_0} + g^{-i_0} = 0. \quad (7.31)$$

نو له دې سره يوه 2-مه g-اديکي انځورونه لري. □

کوم $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ یوه پای g - ادیکي انځورونه لري؟

جمله 7.1.6: که $\alpha \in \mathbb{Q}^+, \alpha = \frac{a}{b}$ وي د $\alpha, b \in \mathbb{N}$ او $\text{ggT}(a, b) = 1$ سره،

نو α تیک هلته یوو پای (او له دې سره 2 مختلف) g - ادیکي وده لري، که هر د مخرج لومړنی پروپشوني بنسټ وېشي.

بڼونه:

(\Rightarrow)

وي دې

$$\frac{a}{b} = \sum_{i=0}^n a_i g^{-i} = a_0 + a_1 g^{-1} + \dots + a_n g^{-n}, \quad (7.32)$$

نو باور لري

$$\frac{a g^n}{b} = a_0 g^n + a_1 g^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}, \quad (7.33)$$

له دې سره $b \mid a g^n$. وي دې p په خوښه د b لومړنی پروپشوني، نو $p \mid a g^n$ لاس ته راځي ، د [3.1.5](#) له مخې لاس ته راځي $p \mid a \vee p \mid g^n$ ، باور لري $p \nmid a$ ، ځکه چې پرته له دې به $\text{ggT}(a, b) \geq p > 1$ -تضاد وي.

له دې سره لاس ته راځي $p \mid g^n$ ، دا چې $p \in \mathbb{P}$ د [3.1.5](#) سره لاس ته راځي $p \mid g$

(\Leftarrow)

وي دې

$$b = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m} \quad (7.34)$$

د ماتلاندې يا مخرج په لومړني ضريبونو ټوټه کونه، نو $p_i | b$ باور لري ، نو د وړاند
 نيونې له مخې $p_i | g \forall i = 1, \dots, k$ له دې سره $p_i^{\alpha_i} | g^{\alpha_i} (i = 1, \dots, k)$
 وي دې $m := \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ نو باور لري .

$$p^{\alpha_i} | g^m (i = 1, \dots, k), \quad (7.35)$$

دا چې $m \geq \alpha_i$

د $\text{ggT}(p_i^{\alpha_i}, p_j^{\alpha_j}) = 1 \forall i \neq j$ له امله باور لري

$$\text{kgV}(p_1^{\alpha_1}, \dots, p_k^{\alpha_k}) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = b; \quad (7.36)$$

د تمريني بيلگې 24 له مخې باور لري: $b | g^m$. له دې سره دې $\frac{a}{b}g^m \in \mathbb{N}$ او وي دې

$$\frac{a}{b}g^m = a_0 + a_1g + \cdots + a_n g^n \quad (7.37)$$

$0 \leq a_i < g \forall i \geq 1$.
 g -ادیکي وده، د کوم سره چې

له دې لاس ته راځي:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_0}{g^m} + \frac{a_1}{g^{m-1}} + \cdots + \frac{a_n}{g^{m-n}} = a_0 g^{-m} + a_1 g^{-m+1} + \cdots + a_n g^{n-m}, \quad (7.38)$$

دا په دې معنا، چې $\frac{a}{b}$ یوه پای g -ادیکي وده لري. □

لاس ته راوړنه 7.1.7: وي دې

$$g = 10, \alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \text{ggT}(a, b) = 1, b > 0$$

دا چې لومړنۍ پروپوشوني همداسې لري، باید مخرج د لپاره وي، له دې سره شرایط پوره دي. له دې سره په ل

دا چې $g = 10$ فقط لومړنۍ پروپوشوني $p = 2$ همداسې $p = 5$ لري، باید د

$\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ لپاره مخرج (ماتلاندي) $b = 2^\alpha 5^\beta$ وي، د دې لپاره چې شرایط پوره شي. له دې سره په لسميز کې باور لري:

$$\alpha = \frac{a}{b}, \text{ggT}(a, b) = 1$$

که یو پای (او له دې سره دوه مختلف) انځورونه ولری \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow b = 2^\alpha 5^\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$$

له دې سره هم: $\exists p : p \mid b$ او $p \nmid 10 \Rightarrow$ (له دې لاس ته راځي) چې فقط یوه لسميزه انځورونه شتون لري.

بیلگه:

لومړی: $\alpha = \frac{287}{100} \in \mathbb{Q}^+$ ، د $b = 2^2 5^2$ له امله α یوه پای او له دې سره دوه لسميز انځورونه لري:

$$\alpha = 2.870000\dots = 2.869999\dots$$

کینونپوهنه

دویم: $\alpha = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}^+$ ، دا چې $b = 3^1$ د $2^a 5^b$ په بڼه نه دی، نو α فقط یوه لسمیزه انځورونه لري. یاد وپشنې له لارې، یاد [7.1.1](#) د بنوونې سره سم (α_i, a_i) :

$$\alpha = 1.6666\dots$$

دریم: $\alpha = 1 \in \mathbb{Q}^+$ د $\alpha = \frac{1}{1}$ او $\text{ggT}(1,1) = 1$ له امله لاس ته راځي چې $\alpha = 1$ یو پای او له دې سره دوه مختلف لسمیز انځورونه لري ($\alpha = \frac{3}{3}$) اجازه نه لري، ځکه چې $(\text{ggT}(a,b) \neq 1 \dots)$:

$$\alpha = 1.0000\dots = 0.9999\dots$$

$$0.999\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = 9 \left[\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i}_{\rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}} - 1 \right] = \quad (7.39)$$

$$= 9 \left[\frac{10}{9} - 1 \right] = 10 - 9 = 1. \quad (7.40)$$

پریودیکی وده

د یوه حقیقی عدد په لسمیزه وده کې کله کله ځنې عددونه منظم منځ ته راځي، لکه $\alpha = 1.70714285714285\dots$ ،

پوښتنه: کوم حقیقی اعداد دا خویونه لري؟

پيژند (تعريف) 7.2.1: د يوه حقيقي عدد $\alpha > 0$ يوه g -اديکي يا g -ايزه وده

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} = a_0 + a_1 \frac{1}{g} + a_2 \frac{1}{g^2} + \dots \quad (7.41)$$

تل بيرته راگرځيدونې يا پريوديکي بلل کيږي، که $n, e \in \mathbb{N}$ شتون ولري د لا ندي سره

$$a_{n+i} = a_{n+e+i} \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.42)$$

که n مينيمال يا خورا کوچنی ټاکلی وي، نو $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ ترمخ پريود يا - راگرځيدنه بلل کيږي او د هغه اوږدوالی، که $n = 1$ وي (داپه دې معنا، چې $\#$ ترمخ پريود)، نو وده سوچه پريودیک بلل کيږي.

که e خورا کوچنی ټاکلی وي، نو $a_n a_{n+1} \dots a_{n+e-1}$ تلبيرته راگرځيدونې بلل کيږي او e د هغه اوږدوالی.

د $g = 10$: لپاره سومبول يا نخبن:

$$\alpha = a_0 \cdot \underbrace{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}_{\text{Vorperiode}} \underbrace{a_n a_{n+1} \dots a_{n+e-1}}_{\text{Periode}} \underbrace{a_{n+e}}_{=a_n} \dots \underbrace{a_{n+2e-1}}_{=a_{n+e-1}} \dots \quad (7.43)$$

بيلگه 7.2.2:

د الماني پښتو: اوږدوال Länge ;

تل بيرته راگرځيدنه، له مخه تل بيرته راگرځيدنه = periode; Vor periode

کنونپوهنه

$$\alpha = 1. \underbrace{714285}_{\text{Periode}} \underbrace{70}_{\text{Vorperiode}}$$

Länge 6714285...
Länge 2

1.

$$. \alpha = 2.87000 \dots = 2.86999 \dots . 2$$

له مخ پرېود 87 نسبت 86 ته، اوږدوالی 2 ، پرېود 0 ، نسبت 9 ته، اوږدوالی 1

جمله 7.2.3: یو مثبت (زیاتیز) عدد α د یوه $g \geq 2$ لپاره (او له دې سره د $g \geq 2$ لپاره) ټیک هلته یو پرېودیکی g -ایزه وده لري، که α راشنل وي.

بنوونه:

$$(\Leftrightarrow)$$

وي وي $\alpha = \frac{a}{b}, \text{ggT}(a, b) = 1, b > 0$ او $g \geq 2$. لکه د [7.1.1](#) په بنوونه کې وي دې

$$\alpha_1 = \alpha - [\alpha],$$

$$\alpha_0 = [\alpha],$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{i+1} = g\alpha_i - [g\alpha_i],$$

$$a_i = [g\alpha_i].$$

$b\alpha_i \in \mathbb{Z}$ و بنایئ :

$i = 1$:

$$b\alpha_1 = b(\alpha - [\alpha]) = b\alpha - b[\alpha] = b \cdot \frac{a}{b} - \underbrace{\left[\frac{a}{b} \right]}_{\in \mathbb{Z}} \cdot b \in \mathbb{Z}$$

$i \rightarrow i + 1$:

$$b\alpha_{i+1} = b(g\alpha_i - [g\alpha_i]) = \underbrace{(b\alpha_i)}_{\text{Ind.VS:} \in \mathbb{Z}} g - \underbrace{b[g\alpha_i]}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

$b_i \equiv g^{i-1}b_1(b) \forall i \in \mathbb{N}$ ، و بنایئ: $b_i := b\alpha_i \forall i \in \mathbb{N}$ بیژند (تعریف)

$i = 1$:

$$g^{1-1}b_1 = b_1 \equiv b_1(b)$$

$i \rightarrow i + 1$:

$b_{i+1} =$	
$b\alpha_{i+1} = b(g\alpha_i - \underbrace{[g\alpha_i]}_{=a_i}) = \underbrace{(b\alpha_i)}_{=b_i} g - \underbrace{ba_i}_{\equiv 0(b)} \equiv g^{i-1}b_1g$	(7.44)

$= g^i b_1.$	(7.45)
--------------	--------

د $0 \leq \alpha_i < 1$ له امله باور لري

$$0 \leq b\alpha_i = b_i < b \quad (b > 0) \quad \forall i \in \mathbb{N}; \quad (7.46)$$

نو فقط پای دېر $b_i, i \in \mathbb{N}$ شته دی، له دې سره باید د دوي ترمنځ برابري منځ ته راشي، دا په دې معنا، چې $\exists n, e \in \mathbb{N}$ د $b_n = b_{n+e}$ سره. پورته لور ته $(i = n)$ باور لري:

$$g^{n-1} b_1 \equiv b_n = b_{n+e} \equiv b_1 g^{n+e-1}(b), \quad (7.47)$$

د g^i سره د ضرب له لارې ($i \in \mathbb{N}$) په خوښه لاس ته راځي:

$$g^{n-1+i} b_1 \equiv g^{n-1+e+i} b_1(b), \quad (7.48)$$

دا په دې معنا، چې دپورته لور ته: $b_{n+i} \equiv b_{n+e+i}$ ، يعني $b \mid b_{n+e+i} - b_{n+i}$.

د $0 \leq b_{n+i} < b$ او $0 \leq b_{n+e+i} < b$ له امله کمښت $< b$ دی، له دې سره لاس ته راځي

$$b_{n+e+i} = b_{n+i} \quad \forall i \in \mathbb{N}; \quad (7.49)$$

$$b_{n+e+i} = b_{n+i} \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$$

د $b_n = b_{n+e}$ له امله (پورته) باور لري

له دې سره:

$$b\alpha_{n+e+i} = b\alpha_{n+i} \quad (b \neq 0) \quad (7.50)$$

او

$$g\alpha_{n+e+i} = g\alpha_{n+i} \quad \forall i \in \mathbb{N}_0, \quad [g\alpha_{n+e+i}] = [g\alpha_{n+i}] \quad \forall i \in \mathbb{N}_0, \quad (7.51)$$

$$a_{n+e+i} = a_{n+i} \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$$

نو

له دې سره د $\alpha = \frac{a}{b}$ - ایزه وده تل بیرته راګرځیدوني ده.

(\Rightarrow)

وي دې حقيقي د پرېودیګي ودې سره، داپه دې معنا، چې $n, e \in \mathbb{N}$ شتون لري د $\alpha > 0$

$$a_{n+e+k} = a_{n+k} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

سره؟

$$a_{n+e+k} = a_{n+k} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

بنوول کيږي: $\alpha \in \mathbb{Q}$:

کنونپوهنه

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} = a_0 + a_1 g^{-1} + \cdots + a_n g^{-n} + a_{n+1} g^{-(n+1)} + \cdots + \quad (7.52)$$

$$+ a_{n+e-1} g^{-(n+e-1)} + \underbrace{a_{n+e}}_{=a_n} g^{-(n+e)} + \underbrace{a_{n+e+1}}_{=a_{n+1}} g^{-(n+e+1)} + \cdots + \quad (7.53)$$

$$+ \underbrace{a_{n+2e-1}}_{=a_{n+e-1}} g^{-(n+2e-1)} + \cdots = \quad (7.54)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} + a_n g^{-n} \underbrace{(1 + g^{-e} + g^{-2e} + \cdots)}_{\sum_{k=0}^{\infty} (g^{-e})^k \rightarrow \frac{1}{1-g^{-e}} = \frac{g^e}{g^e-1}} + \cdots + \quad (7.55)$$

$$a_{n+e-1} g^{-(n+e-1)} \underbrace{(1 + g^{-e} + g^{-2e} + \cdots)}_{\sum_{k=0}^{\infty} (g^{-e})^k \rightarrow \frac{1}{1-g^{-e}} = \frac{g^e}{g^e-1}} = \quad (7.56)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} + \frac{g^e}{g^e-1} (a_n g^{-n} + \cdots + a_{n+e-1} g^{-(n+e-1)}) \in \mathbb{Q}. \quad (7.57)$$

بیلګه 7.2.4: $g = 10, \alpha = 0.1342\overline{158}$ ، داچې دا یوه پریودیګي لسمیزه وده ده،

لاس ته راځي: α یو راشنل عدد دی، کوم؟

د $n = 4, e = 4$ ، د ترمخپریود اوږدوالی: $\Rightarrow n - 1 = 3$ د [7.2.3](#) د بنوونې له

مخې:

$$\alpha = \frac{134}{1000} + \frac{10^4}{10^4 - 1} \left(2 \cdot \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + 5 \cdot \frac{1}{10^6} + 8 \cdot \frac{1}{10^7} \right) = \dots = (7.5)$$

ځانگړی حالت: سوچه پریودیکی وده

پوښتنه: کله د $\alpha \in \mathbb{R}^+$ g - ایزه وده سوچه - پریودیکی ده؟

د [7.2.3](#) له مخې باید α راشنل وي، د $g = 10$ لپاره هر $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ د

$$\alpha = a_0.\overline{a_1 a_2 \dots a_e} \quad (7.59)$$

سره غواړو پیدا کړو.

جمله 7.2.5: که $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ وي د $ggT(a, b) = 1, b > 0$ سره، نو د g -

ایزه وده تیک هلته سوچه پریودیکی ده، که $ggT(b, g) = 1$ وي. که دا حالت وي، نو

د e پریودیکی اوردوالی د $\bar{g} \in \mathbb{Z}_b^*$ د نظم سره برابر دی (دا په دې معنا، چې د خورا

کوچني طبیعي کن k سره برابر دی، د $\bar{g}^k = \bar{1} \in \mathbb{Z}_b^*$ سره).

بنوونه:

(\Rightarrow)

وي دې $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+, ggT(a, b) = 1, b > 0$ د سوچه-پریودیکی g - ایزه وي سره، دا

په دې معنا، چې په $a_{n+i} = a_{n+e+i} \forall i \geq 0$ کې $n = 1$ دی، که e خورا کوچنی یا مینیمال وي.

د [7.2.3](#) بنوونې له مخې باور لري

$$g^{n+\varepsilon-1}b_1 \equiv g^{n-1}b_1(b), \quad (7.60)$$

نو د $n = 1$ له امله $g^\varepsilon b_1 \equiv b_1(b)$ دی.

$$\text{ggT}(b, b_1) = 1$$

وښایي:

نیسو چې $\exists p \in \mathbb{P}$ د لاندې سره

$$p \mid b, p \mid b_1 \stackrel{7.1.1}{=} b\alpha_1 = b \left(\frac{a}{b} - \underbrace{\left[\frac{a}{b} \right]}_{\in \mathbb{N}} \right) = a - b \underbrace{\left[\frac{a}{b} \right]}_{\in \mathbb{N}},$$

له دې سره لاس ته راځي $p \mid a$ - تضاد و $\text{ggT}(a, p) = 1$ ته.

له دې سره د $g^\varepsilon b_1 \equiv b_1(b)$ څخه د [4.1.5\(5\)](#) له مخې لاس ته راځي

$$g^\varepsilon \equiv 1(b). \quad (7.61)$$

وښایي: $\text{ggT}(b, g) = 1$. نیسو چې $\exists p \in \mathbb{P}$ د $p \mid b, p \mid g$ سره، نو باور لري

$$p \mid b, p \mid g^\varepsilon = 1 + tb \quad (t \in \mathbb{N}), \quad (7.62)$$

نو هم $p \mid 1$ - تضاد.

وي دي $\frac{a}{b}$ سوچه پريوديكي، نو وبنايي په (\mathbb{Z}_b^*, \cdot) کې. $e = \text{ord } \bar{g}$ پورته لور ته باور لري:

$$g^e \equiv 1(b) \wedge \text{ggT}(b, g) = 1; \quad (7.63)$$

) $\text{ord } \bar{g} \leq e$ دا په دي معنا، چې $\bar{g} \in \mathbb{Z}_b^*$ او $\bar{g}^e = \bar{1}$ په (\mathbb{Z}_b^*, \cdot) کې دي. يعني $\bar{g}^k = \bar{1}$ د پيژند له مخي خورا کوچني طبيعي عدد k دي د $\text{ord } \bar{g}$ سره.

وي دي $\text{ord } \bar{g} = k$ ، نو په (\mathbb{Z}_b^*, \cdot) کې باور لري $\bar{g}^k = \bar{1}$ ، دا په دي معنا، چې $g^{k+i} \equiv g^i(b) \forall i \geq 0$ او $g^k \equiv 1(b)$ له دي سره هم $\forall i \geq 0$ باور لري د b_1 سره د [7.2.3](#) بنووني له مخي.

له دي بنووني لاس ته راخي:

$$b_{k+i+1} \equiv b_{k+i}(b), \quad (7.64)$$

نو $b_{k+i+1} = b_{k+i}$ ، او

$$a_{1+k+i} = a_{1+i} \forall i \geq 0. \quad (7.65)$$

دا چې e د $a_{1+e+i} = a_{1+i} \forall i \geq 0$ ($n = 1$) سره خورا کوچني ده، لاس ته راخي $e \leq k = \text{ord } \bar{g}$ له دي امله په (\mathbb{Z}_b^*, \cdot) کې باور لري $e = k = \text{ord } \bar{g}$.

(⇐)

وي دي $gg\Gamma(b, g) = 1$ ، د ښوولو دی: د $\frac{a}{b}$ - ایزه وده سوچه پریودیکی ده.

دا چې $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ د [7.2.3](#) له مخې یو پریودیکی اونخورونه شتون لري، یعنی د لاندي سره:

$$g^{n-1}b_1 \equiv g^{n+e-1}(b). \quad (7.66)$$

دا چې $gg\Gamma(b, g) = 1$ ، نو $gg\Gamma(b, g^{n-1}) = 1$ هم شتون لري، یعنی دپورته

ګونګروانخ څخه لاس ته راځي $b_1 \equiv g^e b_1(b)$. یعنی د ټولو

$$i \geq 0: g^i b_1 \equiv g^{e+i} b_1(b)$$

لپاره، نو د جملې [7.2.3](#) د ښوونې له مخې لرو:

$$b_{i+1} \equiv b_{e+i+1}(b) \quad , \quad \text{له دې سره} \quad b_{i+1} = b_{e+i+1} \quad \forall i \geq 0$$

دا په دې معنا، چې د $\frac{a}{b}$ - ایز یا g - ایدیکی انخورونه $a_{1+i} = a_{1+e+i} \quad \forall i \geq 0$

پریودیکی ده د $n = 1$ سره، یعنی سوچه تل بیرته راګرځیدونې یا پریودیکی. □

یادونه [7.2.6](#): ایا د $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ - ایزه وده د $gg\Gamma(a, b) = 1, b > 0$ سره،

سوچه پریودیکی ده، او هم د پریود اوردوالی د ماتلاندي یا مخرج b په واک کې دی!

بیلګه [7.2.7](#):

$$g = 10, \alpha = \frac{3}{7} \in \mathbb{Q}^+ \quad . \quad 1.$$

دا چې $gg\Gamma(3, 7) = 1$ د [7.2.5](#) له مخې باور لري: $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ سوچه پریودیکی لسمیزه

وده لري ($\text{ggT}(7, 10) = 1$)، د كوم سره چې د بريود اوږدوالی $e = \text{ord } \overline{10}$ په (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) کې دی:

$$10^1 \not\equiv 1(7), 10^2 \not\equiv 1(7), \dots, 10^6 \equiv 1(7)$$

(د لومړي ځل لپاره)....

. $e = 6$ also $\Rightarrow \text{ord } \overline{10} = 6$

$$\left(\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}\right)$$

$$g = 10, \alpha = \frac{15}{7} \in \mathbb{Q}^+ \quad .2$$

$$\text{ggT}(15, 7) = 1$$

سوچه پريوديکي د $e = \text{ord } \overline{10} = 6$ سره.

$$\left(\frac{15}{7} = 2.\overline{142857}\right)$$

ټوليز حالت: نه سوچه - پريوديکي وده

جمله 7.2.8: وي دی $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+, \text{ggT}(a, b) = 1, b > 0$ دی.

$$g = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad (7.67)$$

د بنسټ $g \geq 2$ په لومړنيو ضريبونو ټوټه کونه او

$b = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k} \cdot t$	(7.68)
--	--------

کنونپوهنه

(د همغه p_i سره!) د $ggT(g, t) = 1$ سره، نو د تر مخ پر یو د اوردوالی $n-1$ په g - ایز دوه کې خورا کوچنی طبیعي عدد γ دی، د کوم لپاره چې $\frac{b}{t} \mid g^\gamma$ دی، او د \bar{g} پر یو د اوردوالی د پر یو د نظم سره برابر دی په (\mathbb{Z}_t^*, \cdot) کې.

بیلگه 7.2.9: $g = 10, \frac{a}{b} = \frac{239}{140} \in \mathbb{Q}^+$ ، لسمیزه وده سوچه پر یو دیک نه ده، ځکه

$$ggT(b, g) = ggT(140, 10) \neq 1$$

چې

د پر یو د اوردوالی:

$$\left. \begin{array}{l} g = 10 = 2 \cdot 5 \\ b = 140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \end{array} \right\} \Rightarrow t = 7, \frac{b}{t} = \frac{140}{7} = 20$$

$$20 \nmid 10^1, 20 \mid 10^2 = 100 \Rightarrow \gamma = 2.$$

د پر یو د اوردوالی:

په (\mathbb{Z}_t^*, \cdot) کې: $e = \text{ord } \bar{10}$ په (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) کې، پورته لور ته لاس ته راځي $e = 6$.

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = a_0 \cdot \underbrace{a_1 a_2}_{\text{Vorperiode}} \cdot \underbrace{a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}_{\text{Periode}}; \quad \frac{239}{140} = 1.70\overline{714285}$$

n-te Potenzreste

په ځانگړي حالت بېرته اړول

دلته $x^m \equiv a(m)$ په

$x^m \equiv a(p^\alpha)$	(8.2)
--------------------------	-------

بیره اړول کيږي د $\text{ggT}(a, p) = 1$ سره (يعني په $(\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*, \cdot)$ کې شميرنه).

ليما 8.1.2: $x^m \equiv a(m)$ د $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ سره ټيک هلته حولور ده، که

$$x^2 \equiv a(p_i^{\alpha_i}) \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (8.3)$$

حلور وي (برخه 5 وگورئ)

ليما 8.1.3: $x^n \equiv a(p^\alpha), p \in \mathbb{P}, \alpha \in \mathbb{N}$ د $a = p^k a'$ لپاره د $\text{ggT}(p, a') = 1$ سره ټيک هلته حولور ده، که $n | k$ او $x^n \equiv a'(p^{\alpha-k})$ حلور وي $(0 \leq a < p^\alpha)$.

بنوونه:

(\Rightarrow)

دې د $x_0 \in \mathbb{Z}$ $x^n \equiv a(p^\alpha)$ حل وي، نو باور لري:

$$x_0^n \equiv a(p^\alpha), \quad (8.4)$$

کنونپوهنه

دا په دې معنا، چې $x_0^n = a + rp^\alpha$ دی د یوه $r \in \mathbb{Z}$ لپاره.

وي دې $x_0 = p^\beta s$ د $\text{ggT}(p, s) = 1$ ($\beta \in \mathbb{N}_0$) سره، نو باور لري:

$$x_0^n = (p^\beta s)^n = p^{n\beta} s^n = a + rp^\alpha = p^k a' + rp^\alpha. \quad (8.5)$$

د $a = p^k a' < p^\alpha$ له امله باور لري: $k < \alpha$ ($a' > 0$)، یعنی، $p^k \mid p^\alpha$ ، له دې سره دپورته لور ته:

$$p^{n\beta-k} s^n = a' + rp^{\alpha-k}; \quad (8.6)$$

له دې سره باور لري: $p^k \mid p^{n\beta} s^n$ د $\text{ggT}(p, s) = 1$ له امله هم، $\text{ggT}(p^k, s^n) = 1$ دي، یعنی د [2.2.11](#) سره لاس ته راځي: $p^k \mid p^{n\beta}$ ، یعنی،

$$k \leq n\beta$$

که $k < n\beta$ وي، نو $n\beta - k > 0$ به وی او د

$$p^{n\beta-k} s^n = a' + rp^{\alpha-k} \quad (8.7)$$

له مخې به مو لروډی: $p \mid a'$ او $\text{ggT}(p, a') \neq 1$ چې تضاد دی.

له دې سره: $k = n\beta$ او $n \mid k$ ، پسي لاس ته راځي:

$$s^n = a' + rp^{\alpha-k}, \quad (8.8)$$

دا په دې معنا، چې $s^n \equiv a'(p^{\alpha-k})$ او $s \in \mathbb{Z}$ د $x^n \equiv a'(p^{\alpha-k})$ یو حل دی.

(⇐)

وي دي $x_0 \in \mathbb{Z}$ د $x^n \equiv a'(p^{\alpha-k})$ حل د $n | k$ او د $\text{ggT}(a', p) = 1$ سره، نو باور لري $x_0^n \equiv a'(p^{\alpha-k})$ ، يعني ، $x_0^n p^k \equiv a' p^k (p^\alpha)$ هم. د $n | k$ له امله باور لري $k = nt$ د يوه $t \in \mathbb{N}$ لپاره.

$$x_0^n p^{nt} \equiv a(p^\alpha) \Rightarrow (x_0 p^t)^n \equiv a(p^\alpha), \quad (8.9)$$

له دي سره $s = x_0 p^t \in \mathbb{Z}$ د کونکروانت $x^n \equiv a(p^\alpha)$ يو حل دی. □

يادونه 8.1.4: له دي سره د $x^n \equiv a'(p^{\alpha-k})$ له حل x_0 څخه د $\text{ggT}(a', p) = 1$

سره د $x^n \equiv a(p^\alpha)$ هر حل x_1 شميرل کیدی شي:

$$x_1 = x_0 p^t, \quad (8.10)$$

د کوم سره چې $k = nt$ باور لري.

لاس ته راوړنه 8.1.5: د مسألې $x^n \equiv a(p^\alpha)$ سره سرې کړی شي ځان په حالت

$\text{ggT}(a, p) = 1$ محدود کړي ($\Rightarrow \text{ggT}(a, p^\alpha) = 1$) ، دا په دي معنا، چې سرې

کړی شي په $(\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*, *)$ کې شميرنه وکړي ($\bar{a} \in \mathbb{Z}_{p^\alpha}^*$).

ليما 8.1.6: x_0 د $x^n \equiv a(p^\alpha)$ حل دی د $\text{ggT}(a, p) = 1$ سره، نو

$\text{ggT}(x_0, p) = 1$ هم باور لري (دا په دي معنا، چې

$$(\bar{x}_0^n = \bar{a} \in \mathbb{Z}_m^* \Rightarrow \bar{x}_0 \in \mathbb{Z}_m^*).$$

کڼونپوهنه

ښوونه: د $x_0^m \equiv a \pmod{p^\alpha}$ له امله باور لري $p^\alpha \mid x_0^m - a$ ، دا په دې معنا، چې

$$x_0^m - a = tp^\alpha \quad (t \in \mathbb{N}) \Rightarrow a = x_0^m - tp^\alpha. \quad (8.11)$$

نیسو چې $\exists q \in \mathbb{P}$ د $q \mid x_0, q \mid p$ سره، نو $q = p$ او $q = p \mid a$ لرو له دې لرو: تضاد دی.

له دې سره موږ سرچینه ییزه مسأله په $(\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*, \cdot)$ کې شمیرنه باندې بیرته وړوله.

پیژند(تعریف) 8.1.7: و ی د $\text{ggT}(a, m) = 1$ $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}$ سره، نو

$a \in \mathbb{Z}$ یو n -م توان مودولو m بلل کیږي، که $x^n \equiv a \pmod{m}$ حل وړ وي. (دا په دې معنا، چې $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m^*$ د یوه توکي $\bar{x}_0 \in \mathbb{Z}_m^*$ n -م توان دی).

بیلگه 8.1.8: $m = 6, a = 0, 1, 3, 4$ دویمتوانپاتې $\text{mod } 6$ دی، $a = 2, 5$ دویم توانپاتې $\text{mod } 6$ نه دی (پورته وگورئ).

پسې: هر $a \in \mathbb{Z}$ دریم توانپاتې $\text{mod } 6$ دی (پورته وگورئ)

د $x^n \equiv a \pmod{p^\alpha}, \text{ggT}(a, p) = 1$ د حل لپاره تگلار

لومړی: تولیز د الجبري کونگروانت لپاره له برخې 5 څخه (مفصل)

دویم: که د داسې په نامه اندکسجدول لهماځې یوه ساده ریښه $\text{mod } p^\alpha$ شتون ولري. پام دې وي: د گاوس 6.2.15 له مخې، د هر لومړني عدد $p \neq 2$ او هر $\alpha \in \mathbb{N}$ لپاره

یوه ساده ریښه $\text{mod } p^\alpha$ شتون لري، ورپسې د 2 او $4 = 2^2$ ته، مگر نه د 2^α لپاره د $\alpha \geq 3$ سره، د دې لپاره: ځانله پام په کار ی

پېژند 8.1.9: $m \in \mathbb{N}$ دې داسې وي، چې (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) څپوکلیکي يا تل بیرته راګرځیدونی دی، دا په دې معنا، چې ساده ریښه شتون (\exists) لري، دا په دې معنا، چې \bar{g} تولیدوي (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) او دی

$$\mathbb{Z}_m^* = \{\bar{g}, \bar{g}^2, \dots, \bar{g}^{\varphi(m)}\}. \quad (8.12)$$

که $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m^*$ په خوښه وي، نو خورا کوچنی طبیعي عدد k یا 0 بلل کيږي، چې د هغې لپاره $\bar{a} = \bar{g}^k$ د a ایندکس دی نسبت g ته، سومبولیک: $I_g(a)$. یادونه 8.1.10: یواځنی ټاکلی دی، ځکه چې

$$\mathbb{Z}_m^* = \{\bar{g}, \bar{g}^2, \dots, \bar{g}^{\varphi(m)}\} \quad (8.13)$$

او د دوي څخه ټول توکي مختلف دي: $\bar{a} = \bar{g}^{I_g(a)}$ ټیک یو ځل رامنځ ته کيږي. د ایندکی جدول د هر $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m^*$ لپاره (څپکلیکي وړاندنیونه) $I_g(a) \in \mathbb{N}_0$ راکوي.

بیلګه 8.1.11: $m = 14 = 2 \cdot 7$ ، د ګاوس 6.2.15 له مخې $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$ له دې امله څپوکلیکي دی، یعنی یوه ساده ریښه $\text{mod } 14$ شتون لري.

$g = 3$ یوه ساده ریښه $\text{mod } 7$ ده، ځکه چې

$$\mathbb{Z}_7^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\} \quad (8.14)$$

او $\bar{3} = \bar{3}, \bar{3}^2 = \bar{2}, \bar{3}^3 = \bar{6}, \bar{3}^4 = \bar{4}, \bar{3}^5 = \bar{5}, \bar{3}^6 = \bar{1}$ ، دا په دې معنا، چې $\bar{3}$ \mathbb{Z}_7^* تولیدوي،

ګڼونپوهنه

دا چې g ناجوره يا طاق دی، د [6.2.12](#) د بنوونې له مخې ترې لاس ته راځي: $g = 3$ هم ساده ریښه $\text{mod } 14$ دی.

$$\mathbb{Z}_{14}^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{9}, \bar{11}, \bar{13}\} \quad (8.15)$$

$$(\varphi(14) = \varphi(2 \cdot 7) = \varphi(2)\varphi(7) = 1 \cdot 6 = 6)$$

د $\bar{3} \in \mathbb{Z}_{14}^* : \bar{3} = \bar{3}, \bar{3}^2 = \bar{9}, \bar{3}^3 = \bar{13}, \bar{3}^4 = \bar{11}, \bar{3}^5 = \bar{5}, \bar{3}^6 = \bar{1}$ ټوان.

له دې سره لاندې ایندکس جدول راګوي:

\bar{a}	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{11}$	$\bar{13}$	(8.16)
$I_g(a)$	0	1	5	2	4	3	

ليما 8.1.12: وي دې g ساده ریښه $\text{mod } m$ ، نو باور لري:

$$g^i \equiv g^j (m) \Leftrightarrow i \equiv j (\varphi(m))$$

لومړی:

دويم: $a, b \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(a, m) = \text{ggT}(b, m) = 1$ دي، نو باور لري:

$$I_g(ab) \equiv I_g(a) + I_g(b)(\varphi(m)). \quad (8.17)$$

بنوونه:

لومړی: (\Rightarrow) (لاس ته راځي)

وي دي $g^i \equiv g^j(m)$ د $i > j$ لپاره، نو په (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) کې $\bar{g}^i = \bar{g}^j$ باور لري،
يعنې د $\bar{g}^{-j} \in \mathbb{Z}_m^*$ سره د ضرب له مخې لرو:

$$\bar{g}^{i-j} = \bar{1}. \quad (8.18)$$

دا چې \bar{g} د (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) گروپ توليدوي، $\text{ord } \bar{g} = \varphi(m)$ دی. د [6.2.7](#) له مخې لاس ته راځي

$$\varphi(m) \mid i - j, \quad (8.19)$$

داپه دي معنا، چې $i \equiv j(\varphi(m))$.

(\Leftarrow)

برعکس دي $i \equiv j(\varphi(m))$ وي، نو باور لري

$$\varphi(m) \mid i - j \Rightarrow i - j = t\varphi(m) \quad t \in \mathbb{Z}; \quad (8.20)$$

يعنې $i = j + t\varphi(m)$ او:

$$\bar{g}^i = \bar{g}^{j+t\varphi(m)} = \bar{g}^j (\bar{g}^{\varphi(m)})^t = \bar{g}^j, \quad (8.21)$$

دا په دي معنا، چې $\bar{g}^i = \bar{g}^j$ او له دي سره $g^i \equiv g^j(m)$.

ګڼونپوهنه

لومړۍ: د $\text{gg}\Gamma(a, m) = \text{gg}\Gamma(b, m) = 1$ له امله باور لري: $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m^*$ يعنې

يعنې، $\bar{a}\bar{b} \in \mathbb{Z}_m^*$ او باور لري $I_g(ab)$

$$\bar{g}^{I_g(ab)} = \bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{b} = \bar{g}^{I_g(a)+I_g(b)}, \quad (8.22)$$

$$\overline{g^{I_g(ab)}} = \overline{g^{I_g(a)+I_g(b)}}$$

دويم يعنې ، له دې سره

$$g^{I_g(ab)} \equiv g^{I_g(a)+I_g(b)}(m) \stackrel{1}{\Rightarrow} I_g(ab) \equiv I_g(a) + I_g(b) (\varphi(m)). \quad (8.23)$$

$$a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$$

ترې لاس ته راوړنه 8.1.13: وي دې

سره او $\text{gg}\Gamma(a_i, m) = 1$ ($i = 1, \dots, k$) دې يوه ساده ريښه $\text{mod } m$ وي،

نو د ايندکشن سره لاس ته راځي:

$$I_g(a_1 \cdots a_k) \equiv I_g(a_1) + \cdots + I_g(a_k) (\varphi(m)). \quad (8.24)$$

په ځانګړې توګه دې وي $a_i = a$ ($i = 1, \dots, k$) ، نو لاس ته راځي

$$I_g(a^k) \equiv kI_g(a) (\varphi(m)). \quad (8.25)$$

دا خويونه د هغه ورسره بلد لوګارېتم سره ورته دي، چې په اناليز کې څيرل شوي.

له دې امله I_g د اعدادو تيوريکي لوګارېتم بلل کيږي.

د حل ساده متودونه Einfache Lösungsmethode

ځانگړی حالت

له دې سره د ځنو الجبري کونگروانتونو د حل ساده امکانات شته، که یوه ساده ریښه شتون ولري:

$$g \quad \text{ggT}(a, m) = \text{ggT}(b, m) = 1 \quad ax \equiv b(m) \quad \alpha) \quad \text{ورکړل شوي:}$$

ساده ریښه $\text{mod } n$ ده. په \mathbb{Z}_m^* کې حل کوو $\bar{ax} = \bar{b}$ ، یعنې:

$$\bar{g}^{I_g(ax)} = \bar{g}^{I_g(b)} \Leftrightarrow g^{I_g(ax)} \equiv g^{I_g(b)}(m) \quad (8.26)$$

$$\stackrel{8.1,12}{\Leftrightarrow} I_g(ax) \equiv I_g(b)(\varphi(m)) \quad (8.27)$$

$$\Leftrightarrow I_g(a) + I_g(x) \equiv I_g(b)(\varphi(m)) \quad (8.28)$$

$$\Leftrightarrow I_g(x) \equiv I_g(b) - I_g(a)(\varphi(m)). \quad (8.29)$$

دې له ایندکس جدول څخه وټاکل شي. x د دې کرښیز مساوات حل وي، نو $I_g(x)$ که

ليما 8.2.1: $3x \equiv 5(14); \text{ggT}(3, 14) = \text{ggT}(5, 14) = 1, g = 3$
ساده ریښه $\text{mod } 14$ ده، حل کوو:

$I_3(x) \equiv I_3(5) - I_3(3)(6).$	(8.30)
-------------------------------------	--------

$$I_3(x) \equiv 5 - 1 = 4(6) \Rightarrow I_3(x) = 4 ($$

(0 ≥ کوچنی حل)

$$\Rightarrow x = \overline{11}$$

β)

ورکړل شوي د $ax^n \equiv b(m)$ سره او ساده g $\text{ggT}(a, m) = \text{ggT}(b, m) = 1$

رېښه $\text{mod } m$ ده. د حل دی: $\overline{ax^n} = \overline{b}$ په (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) کې، يعنې

$$\overline{y}^{I_g(ax^n)} = \overline{y}^{I_g(b)} \Leftrightarrow g^{I_g(ax^n)} \equiv g^{I_g(b)}(m) \quad (8.31)$$

$$\Leftrightarrow I_g(ax^n) \equiv I_g(b)(\varphi(m)) \quad (8.32)$$

$$\Leftrightarrow I_g(a) + I_g(x^n) \equiv I_g(b)(\varphi(m)) \quad (8.33)$$

$$\Leftrightarrow nI_g(x) \equiv I_g(b) - I_g(a)(\varphi(m)) \quad (8.34)$$

له دې لاس ته راځي: په نامعلومه $I_g(x)$ کې د دې کرښيز کونګروانت په حل بېرته اړوو، که دا حلور وي، نو $I_g(x)$ د اندکس جدول کې پيدا کړئ او اړونده $\overline{x} \in \mathbb{Z}_m^*$ وټاکئ.

بيلگه 8.2.2:

$$5x^2 \equiv 9(14), \text{ggT}(5, 14) = \text{ggT}(9, 14) = 1, g = 3$$

ساده رېښه $\text{mod } 14$ دی، له دې سره حل کوو:

$$2I_3(x) \equiv I_3(9) - I_3(5)(6) \Rightarrow 2I_3(x) \equiv 2 - 5 = -3(6). \quad (8.35)$$

د $ggT(2, 6) = 2 \nmid -3$ له امله حل نه شته، او لهدې سره د پیل یا سرچینیز کونګروانت $5x^2 \equiv 9(14)$ حل هم نه شته.

$$5x^3 \equiv 9(14), ggT(5, 14) = ggT(9, 14) = 1, g = 3$$

ساده ریښه $\text{mod } 14$ ده، د حل دی:

$$3I_3(x) \equiv I_3(9) - I_3(5) = 2 - 5 = -3(6). \quad (8.36)$$

د $ggT(3, 6) = 3 \mid -3$ له امله یو حل شتون لري (حتا 3 انګوروانت حلونه):

$$I_3(x) = \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{3} \\ \bar{5} \\ \bar{13} \end{cases} \quad (8.37)$$

د \bar{x} په حیث

۷)

$$ggT(a, m) = ggT(b, m) = ggT(c, m) = 1 \quad a \cdot b^x \equiv c(m) \quad \text{ورکړ شوي د}$$

سره او g ساده ریښه $\text{mod } m$ ده. د حل ده: $\bar{a} \cdot \bar{b}^x = \bar{c}$ په (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) کې. یعنې:

کنونپوهنه

$$\bar{g}^{I_g(ab^x)} = \bar{g}^{I_g(c)} \Leftrightarrow g^{I_g(ab^x)}(m) \equiv g^{I_g(c)}(m) \quad (8.38)$$

$$\stackrel{8.1,12}{\Leftrightarrow} I_g(a) + xI_g(b) \equiv I_g(c)(\varphi(m)), \quad (8.39)$$

دا په دې معن، چې باټي دی په x کې یو کرښیز کونګروانت حل کړو.

بیلګه 8.2.3:

$$3 \cdot 5^x \equiv 11(14) \text{ ggT}(3, 14) = \text{ggT}(5, 14) = \text{ggT}(11, 14) = 1, g = 3$$

ساده ریښه دی، له دې سره حل کوو:

$$\underbrace{I_3(3)}_{=1} + x \underbrace{I_3(5)}_{=5} \equiv \underbrace{I_3(11)}_{=4} \underbrace{(6)}_{=\varphi(14)}, \quad (8.40)$$

دا په دې معنا، چې $5x \equiv 3(6)$ ، یعنی حل کوو ، له دې سره $5x \equiv 15(6)$ ،
 $x \equiv 3(6)$ ، دا په دې معنا، چې $x_0 = 3$.

تري لاس ته راتلنه 8.2.4 : $\text{ggT}(a, m) = 1$ د $x^n \equiv a(m)$ سره او ساده g ریښه $\text{mod } m$ حلور ده....

$$\dots \Leftrightarrow \bar{g}^{I_g(x^n)} = \bar{g}^{I_g(a)} \quad (Z_m^*, \cdot) \quad \text{په کې} \quad (8.41)$$

$$\stackrel{8.1,12}{\Leftrightarrow} I_g(x^n) \equiv I_g(a)(\varphi(m)) \quad (8.42)$$

$$\Leftrightarrow nI_g(x) \equiv I_g(a)(\varphi(m)) \quad (8.43)$$

$$\stackrel{5.1.1}{\Leftrightarrow} \text{ggT}(n, \varphi(m)) \mid I_g(a). \quad (8.44)$$

$\text{ggT}(a, m) = 1$ داچې سړی پورته لور ته په $m = p^\alpha, p \in \mathbb{P}, \alpha \in \mathbb{N}$ او په

خان محدودولی شي، نو ټول حالتون پرته له $m = 2^k$ څخه د $k \geq 3$ سره رانیول

شوي یا رانگارل شوي دي (پرتله [6.1.10](#): د $p^\alpha, p \neq 2, \alpha \in \mathbb{N}$ لپاره په خوبنه

$(\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*, \cdot)$ څیکلیکي دی، دا په دې معنا، چې یوه ساده ریښه $\text{mod } p^\alpha$ شتون ري). دا په جمله [8.2.7](#) کې په ځانله ډول څیرل کیږي. د n - م توان لپاره یوه بله قضیه لاندې نتیجه انځوروي:

جمله : $m \in \mathbb{N}$ د \mathbb{Z}_m^* سره څیکلیکي وي. د $a \in \mathbb{Z}$

$\text{ggT}(a, m) = 1$ سره ټیک هلته n - م توان $\text{mod } m$ دی، که د

$d := \text{ggT}(n, \varphi(m))$ سره باور ولري:

$$a^{\frac{\varphi(m)}{d}} \equiv 1(m). \quad (8.45)$$

نو د $x^n \equiv a(m) \text{ mod } m$ انکونگروانت حلونو گنون یا تعداد d دی.

بنوونه:

(\Rightarrow)

کنونپوهنه

$$a^{\frac{\varphi(m)}{d}} \equiv (x_0^n)^{\frac{\varphi(m)}{d}} = \left(x_0^{\varphi(m)}\right)^{\frac{n}{d}} = 1^{\frac{n}{d}} = 1(m). \quad (8.46)$$

(\Leftarrow)

وي دي $a^{\frac{\varphi(m)}{d}} \equiv 1(m)$ ، دا چې \mathbb{Z}_m^* څپوکلپکي دی پوه ساده رپینه $g \pmod m$ شتون لري . یعنی

$\bar{a} = \bar{g}^{I_g(a)},$	(8.47)
-------------------------------	--------

دا په دي معنا، چې $a \equiv g^{I_g(a)}(m)$ او

$1 \equiv a^{\frac{\varphi(m)}{d}} \equiv \left(g^{I_g(a)}\right)^{\frac{\varphi(m)}{d}} = g^{\frac{\varphi(m)I_g(a)}{d}}(m),$	(8.48)
--	--------

$$\bar{1} = \bar{g}^{\frac{\varphi(m)I_g(a)}{d}}$$

دا په دي معنا، چې . د [6.2.7](#) له مخي لاس ته راځي

$$\underbrace{\text{ord}(\bar{g})}_{=\varphi(m)} \mid \frac{\varphi(m)I_g(a)}{d}, \quad (8.49)$$

$$d\varphi(m) \mid \varphi(m)I_g(a) \Rightarrow d \mid I_g(a)$$

دا په دي معنا، چې

له دي سره د [5.1.1](#) له مخي کرښيز کونگروانت

$$ny \equiv I_g(a)(\varphi(m)) \quad (8.50)$$

حلور دی، یعنی $a \in \mathbb{Z}$ -مه رپینه ده.

پسې د [5.1.1](#) له مخې باور لري: دا کرښيز کونگروانت $d \bmod \varphi(m)$ انکونگروانت حلونه لري. د $y_0 \in \mathbb{Z}$ لپاره د

$$ny_0 \equiv I_g(a)(\varphi(m)) \quad (8.51)$$

سره ټيک يو $x_0 \in \mathbb{Z}$ شتون لري د $x_0^m \equiv a(m)$ سره، ځکه چې:

له $y_0 = I_g(x_0) = I_g(x_1)$ لاس ته راځي

$$\overline{x_1} = \overline{g^{I_g(x_1)}} = \overline{g^{I_g(x_0)}} = \overline{x_0}, \quad (8.52)$$

يعني ټيک يو $\overline{x_0} \in \mathbb{Z}_m^*$ شتون لري.

له دې سره هم ټيک $x^m \equiv a(m)$ انکونگروانت $d = \text{ggT}(n, \varphi(m)) \bmod m$ حلونه لري. \square

بيلگه 8.2.6: وي دې $x^5 \equiv 7(25)$ حلور، دا په دې معنا، چې:

ايا $a = 7$ پنځه توان $\bmod 25$ دی؟

د گاوس له مخې: $a = 7, n = 5, m = 25 = 5^2$ $\mathbb{Z}_{5^2}^*$ څيوکليکي د

$$\varphi(m) = \varphi(25) = 20$$

کنونپوهنه

$$\Rightarrow d := \text{ggT}(n, \varphi(m)) = \text{ggT}(5, 20) = 5 \quad (8.53)$$

$$\Rightarrow a^{\frac{\varphi(m)}{d}} = 7^{\frac{20}{5}} = 7^4 \equiv (-1)^2(25) = 1(25), \quad (8.54)$$

دا په دې معنا، چې 7 پنځم توان $\text{mod } 25$ دی.

ټول حلونه د د ساده ریښې $g = 2$ او اندکس جدول له مخې لاس ته راځي

$$\Rightarrow 5 \text{ mod } 25$$

انکونگوانت حلونه $2, 7, 12, 17, 22$.

د $x^n \equiv a(2^k), k \geq 3$ لپاره د حل متودونه په پای کې لکه نور چې ویلي مو وو د

$$m = 2^k, k \geq 3,$$

حالت $\mathbb{Z}_{2^k}^*$ د نه ځیکلیکي، سره ځانونه په کار اچوو:

جمله 8.2.7: وي دې $a \in \mathbb{Z}, k \geq 3$ ، د $\text{ggT}(a, 2^k) = 1$ سره ټیک هلته n — توان $\text{mod } 2^k$ دی، که د $d = \text{ggT}(n, 2^{k-2})$ لپاره باور ولري:

$$1. \quad a^{\frac{2^k-2}{d}} \equiv 1(2^k)$$

$$2. \quad a \equiv 1(4) \text{ یا } n \text{ ناجوره یا طاق دی.}$$

3.

د $x^n \equiv a(m) \text{ mod } 2^k$ انکوگروانتو حلونو گڼ، n (تعداد) نو بیا 1 دی د n ناجوره یا طاق لپاره، او $2d$ د جوړه n لپاره.

د $x^n \equiv a(2^k)$ حل (نو) پیدا کول له بنوونې 8.2.7 څخه:

$\bar{a} \in \mathbb{Z}_{2^k}$
په لاندې بڼه

$$\bar{a} = \overline{(-1)^j 5^l}, \quad j \in \{0, 1\}, l \in \{1, \dots, 2^{k-2}\} \quad (8.55)$$

په یواځني ډول د 6.2.16 له مخې انځور کړئ، راوړو

$$nx \equiv l(2^{k-2}); \text{ همداسې } nx \equiv j(2) \quad (8.56)$$

ګرښیز کونګروانت دي، که α د $nx \equiv j(2)$ راکم شوی حل وي او β د $nx \equiv l(2^{k-2})$ راکم شوی حل، نو دی

$\bar{x}_0 = \overline{(-1)^{\alpha\beta} 5^{\beta}}$	(8.57)
---	--------

د $x^n \equiv a(2^k)$ حل دی. له دې سره سرې ټول حلونه لاس ته راوړي.

بیلګه 8.2.8:

$$x^3 \equiv 9(32) : N = 3, a = 9, m = 2^5 (k = 5) \quad .1$$

و بنایئ: $a = 9$. توانپاتي $\text{mod } 32$ دی (راوړو: \mathbb{Z}_{32}^* د ګاوس له مخې څپوکلیکي نه دی، ځکه چې $(k \geq 3, p = 2)$ د 8.2.7 سره سم:

$$d = \text{ggT}(n, 2^{k-2}) = \text{ggT}(3, 8) = 1 \Rightarrow \quad (8.58)$$

$$a^{\frac{2^k-2}{d}} = 9^{2^5-2} = (9^4)^2 = (81^2)^2 \equiv 1(32), \quad (8.59)$$

۳. 9 نو درې توانپاتي دی

حل: د $n = 3$ ناجوره يا طاق له امله فقط يو انکونگروانت $\text{mod } 32$ حلونه لري، د [8.2.7](#) بنووني سره سم:

$$\bar{a} = \bar{9} = \overline{(-1)^j 5^l}, \quad j \in \{0, 1\}, l \in \{1, \dots, 2^{k-2}\} \quad (8.60)$$

: $\text{mod } 324$.

$$5^0 \equiv 1, 5^1 \equiv 5, 5^2 \equiv -7, 5^3 \equiv -3, 5^4 \equiv -15, 5^5 \equiv -11, 5^6 \equiv 9(32),$$

4. يعني $j = 0, l = 6 \leq 2^{k-2} = 8$ له دې سره $\bar{9} = \overline{(-1)^0 5^6}$ ، د حل دي: $nx \equiv j(2)$ ، دا په دې معنا، چې $3x \equiv 0(2)$ ، دا په دې معنا، چې $\alpha = 0$ (راکم شوي)، $nx \equiv l(2^{k-2})$ ، دا په دې معنا، چې $3x \equiv 6(8)$ ، دا په دې معنا، چې $\beta = 2 \Rightarrow$ له دې لاس ته راځي يوگونی حل $\text{mod } 32$ دی.

$$\bar{x}_0 = \overline{(-1)^\alpha 5^\beta} = \overline{25}. \quad (8.61)$$

$$x^4 \equiv 177(224) : n = 4, a = 177, m = 224 = 7 \cdot 2^5,$$

$$\text{gg}\Gamma(177, 224) = 1$$

له دې جلا تر راوړو: $x^4 \equiv 177(7)$ او $x^4 \equiv 177(2^5)$

$$x^4 \equiv 177(7)$$

د ګاوس له مخې څپوکلیکي دی، د [8.2.5](#) سره سم: $\Rightarrow x^4 \equiv 2(7) : n = 4, a = 2, p = 7$

$$\varphi(7) = 6, d = \text{ggT}(n, \varphi(7)) = 2; a^{\frac{\varphi(7)}{2}} = 8 \equiv 1(7) \Rightarrow \quad (8.62)$$

د [8.2.5](#) له مخې باور لري 2 د 4-م توان د سره اینګونګروانت حلونه دی

$$\Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5 \quad x^4 \equiv 177(2^5)$$

$$\Rightarrow x^4 \equiv 17(2^5) : n = 4$$

$$17^{\frac{2^3}{4}} = 17^2 \equiv 1(32), a = 17 \equiv 1(4) \quad \text{جوړه مګر}$$

او همداسې د [8.2.7](#) له مخې: 17 د 4-م توان $\text{mod } 32$ دی د $8 \text{ mod } 32$ سره

اینګونګروانت حلونه y_1, y_2, \dots, y_8 دي.

$$\bar{a} = \overline{(-1)^j 5^l} \quad \text{د سره سم او کرښیزکوګروانت همداسې} \quad nx \equiv j(2)$$

$\Rightarrow nx \equiv l(2^{k-2})$ څخه لاس ته راځي ټول α ، ټول β څخه لاس ته راځي

$$\bar{y} = \overline{(-1)^{\alpha} 5^{\beta}} \quad \text{ټول (.)}$$

د چینایي پاتي جملې سره سم:

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv x_i(7), \\ x &\equiv y_s(32) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, s = 1, \dots, 8, \quad (8.63)$$

یعنې 16 سیسټمي له دې لاس ته راځي 16 حلونه.

څلوريز پاتې (که غواړئ: مربع باقیمانده) Quadratische Reste

ځانگړی حالت

مور اوس يو ځانگړی حالت رااخلو، او د هده حلوروالی تیک تر څیرني لاندې نيسو:

$n = 2$ دا په دې معنا، چې

$$x^2 \equiv a(m) \quad (9.1)$$

د څیرني دی. د دې د حلوروالی لپاره ساده قضیې تر څیرني لاندې نیول زمورموخه ده.

پېژند 9.1.1: $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(a, m) = 1$ مربعیز توانپاتې $\text{mod } m$ بلل

کیري، او هم لند مربعیز پاتې، که $x^2 \equiv a(m)$ حلور وي.

دا لاندې د $m = 2$ لپاره باور لري:

لیما یا جملگی 9.1.2: وي دې $\text{ggT}(a, m) = 1 \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$ سره

ناجوره (طاق)، دا په دې معنا، چې $2n + 1$ نو باور لري:

هر ناجوره عدد

$$x_0 = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (9.2)$$

حلور $\text{mod } 2$ دی.

بنوونه: $x_0^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1(2) (\equiv 2n + 1 \equiv a(2))$.

د عمومي قضیې 8.2.5 (هلته $n \in \mathbb{N}$ په خوبنه)، څیکلیکي یا تل بیرته راگرځیدونکی حالت له مخي:

جمله 9.1.3: وي دي $a \in \mathbb{Z}, m \geq 3; m \in \mathbb{N}$ د $\text{ggT}(a, m) = 1$ سره ټيک هلته مربع پاتي $\text{mod } m$ دی، که

$$a^{\frac{\varphi(m)}{2}} \equiv 1(m); \quad (9.3)$$

د $x^2 \equiv a(m)$ د حلونو تعداد يا گنون 2 وي.

بنوونه: ځکه چې $d = \text{ggT}(2, \varphi(m))$ او دا چې $\varphi(m)$ د $m \geq 3$ لپاره دی تل جوړه دی، نو د [8.2.5](#) له مخې باور لري:

لومړی: که د m د p_i لومړني ضربیتجزیه کې یو ناجوړه (طاق) رامنځ ته شي، نو $p_i - 1$ جوړه يا جفت دی او له دې امله $\varphi(m) \equiv 0(2)$ دی.

دویم: که نه، نو بیا ۲-م توان دی، یعنی $\varphi(m) = \frac{m}{2}$ جوړه دی.

$$(m = 2^\alpha \text{ د } \alpha \geq 2 \text{ سره، ځکه چې } m \geq 3)$$

جملگی ۹.۱.۴: (اویلر)

د $x^n \equiv a(2^k), k \geq 3$ لپاره د حل متودونه

په پای کې لکه نور چې ویلي مو وو د

$$m = 2^k, k \geq 3,$$

حالت $\mathbb{Z}_{2^k}^*$ د نه ځیکلیکي، سره ځانونه په کار اچوو:

جمله 8.2.7: وي دي $a \in \mathbb{Z}, k \geq 3$ ، د $\text{ggT}(a, 2^k) = 1$ سره ټيک هلته $n -$ م توان $\text{mod } 2^k$ دی، که د $d = \text{ggT}(n, 2^{k-2})$ لپاره باور ولري:

$$a^{\frac{2^k - 2}{d}} \equiv 1(2^k) \quad .4$$

کڼونپوهنه

5. $a \equiv 1(4)$ يا n ناجوره يا طاق دی.

6.

د $x^n \equiv a(m) \pmod{2^k}$ انکوگروانتو حلونو گڼ، n (تعداد) نو بيا 1 دی د n ناجوره يا طاق لپاره، او $2d$ د جوړه n لپاره.د $x^n \equiv a(2^k)$ د حل (نو) پيدا کول له بنووني [8.2.7](#) څخه: $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{2^k}$
په لاندې بڼه

$$\bar{a} = \overline{(-1)^j 5^l}, \quad j \in \{0, 1\}, l \in \{1, \dots, 2^{k-2}\} \quad (8.55)$$

په يواځني ډول د [6.2.16](#) له مخې انځور کړئ، راوړو

$nx \equiv j(2) \pmod{2^{k-2}}$; همداسې $nx \equiv l(2^{k-2})$	(8.56)
---	--------

کرښيز کونگروانت دي، که α د $nx \equiv j(2)$ راکم شوی حل وي او β د $nx \equiv l(2^{k-2})$ راکم شوی حل، نو دی

$$\bar{x}_0 = \overline{(-1)^{\alpha} 5^{\beta}} \quad (8.57)$$

د $x^n \equiv a(2^k)$ حل دی. له دې سره سرې ټول حلونه لاس ته راوړي.

بيلگه 8.2.8:

$$x^3 \equiv 9(32) : N = 3, a = 9, m = 2^5 (k = 5)$$

2.

و بنایئ: $a = 9$. توانپاتي $\pmod{32}$ دی (راوړو: \mathbb{Z}_{32}^* د گاوس له مخې څيوکليکي نه دی، ځکه چې $k \geq 3, p = 2$) د [8.2.7](#) سره سم:

$$d = \text{ggT}(n, 2^{k-2}) = \text{ggT}(3, 8) = 1 \Rightarrow \quad (8.58)$$

$$a^{\frac{2^k-2}{d}} = 9^{2^5-2} = (9^4)^2 = (81^2)^2 \equiv 1(32), \quad (8.59)$$

۳. 9 نو درې توانپاتي دی
حل: د $n = 3$ ناجوره يا طاق له امله فقط يو انکونگروانت $\text{mod } 32$ حلونه لري، د [8.2.7](#) بنووني سره سم:

$$\bar{a} = \bar{9} = \overline{(-1)^j 5^l}, \quad j \in \{0, 1\}, l \in \{1, \dots, 2^{k-2}\} \quad (8.60)$$

: $\text{mod } 32$.

$$5^0 \equiv 1, 5^1 \equiv 5, 5^2 \equiv -7, 5^3 \equiv -3, 5^4 \equiv -15, 5^5 \equiv -11, 5^6 \equiv 9(32),$$

4. يعني $j = 0, l = 6 \leq 2^{k-2} = 8$ له دې سره $\bar{9} = \overline{(-1)^0 5^6}$ ، د حل دي:
 $nx \equiv j(2)$ ، دا په دې معنا، چې $3x \equiv 0(2)$ ، دا په دې معنا، چې $\alpha = 0$ (راکم شوي)، $nx \equiv l(2^{k-2})$ ، دا په دې معنا، چې $3x \equiv 6(8)$ ، دا په دې معنا، چې $\beta = 2 \Rightarrow$ له دې لاس ته راځي يوگونی حل $\text{mod } 32$ دی.

$$\bar{x}_0 = \overline{(-1)^{\alpha} 5^{\beta}} = \bar{25}. \quad (8.61)$$

$$x^4 \equiv 177(224) : n = 4, a = 177, m = 224 = 7 \cdot 2^5, \\ \text{ggT}(177, 224) = 1$$

$$x^4 \equiv 177(2^5) \text{ او } x^4 \equiv 177(7) \\ x^4 \equiv 177(7)$$

د گاوس له مخې څيوکليکي دی، د [8.2.5](#) $\Rightarrow x^4 \equiv 2(7) : n = 4, a = 2, p = 7$ سره سم:

$$\varphi(7) = 6, d = \text{ggT}(n, \varphi(7)) = 2; a^{\frac{\varphi(7)}{2}} = 8 \equiv 1(7) \Rightarrow \quad (8.62)$$

د [8.2.5](#) له مخې باور لري د 2 د 4-م توان د سره اينکونگروانت حلونه دی

کنونپوهنه

$$\Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5$$

$$x^4 \equiv 177(2^5)$$

$$\Rightarrow x^4 \equiv 17(2^5) : n = 4$$

$$17^{\frac{2^3}{4}} = 17^2 \equiv 1(32) \quad \alpha = 17 \equiv 1(4)$$

جوړه مگر

او همداسې د [8.2.7](#) له مخې: 17 د 4-م توان $\text{mod } 32$ دی د $8 \text{ mod } 32$ سره

اینکونګروانت حلونه y_1, y_2, \dots, y_8 دي.

$$\bar{a} = \overline{(-1)^j 5^l} \quad nx \equiv j(2) \quad \text{د سره سم او کرښیزکوګروانت همداسې}$$

$$\Rightarrow nx \equiv l(2^{k-2}) \Rightarrow \bar{y} = \overline{(-1)^{\alpha 5^{\beta}}} \quad \text{تول } \beta \Rightarrow \text{خڅه لاس ته راځي } \alpha \text{ ، تول } \beta \Rightarrow \text{خڅه لاس ته راځي}$$

د چینایي پاتي جملې سره سم:

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv x_i(7), \\ x &\equiv y_s(32) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, s = 1, \dots, 8, \quad (8:63)$$

يعني 16 سيستمي له دې لاس ته راځي 16 حلونه.

څلوريز پاتي (که غواړئ: مربع باقیمانده)

ځانګړی حالت

مورن اوس یوځانګړی حالت رااخلو، او د هده حلوروالی تیک تر څیرني لاندې نیسو:

$n = 2$ دا په دې معنا، چې

$$x^2 \equiv a(m) \quad (9.1)$$

د څیړني دې د دې د حلورولي لپاره ساده قضیې تر څیړني لاندې نیول زموږ موخه ده.

پیژند 9.1.1: $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(a, m) = 1$ مربعیز توانپاتې $\text{mod } m$ بلل

کیري، او هم لنډ مربعیز پاتې، که $x^2 \equiv a(m)$ حلور وي.

دا لاندې د $m = 2$ لپاره باور لري:

لیما یا جملگی 9.1.2: وي دې $a \in \mathbb{Z}$ د $\text{ggT}(a, m) = 1$ سره

ناجوړه (طاق)، دا په دې معنا، چې $2n + 1$ نو باور لري:

هر ناجوړه عدد

$$x_0 = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (9.2)$$

حلور $\text{mod } 2$ دې.

بنوونه: $x_0^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1(2) \equiv 2n + 1 \equiv a(2)$.

د عمومي قضیې 8.2.5 (هلته $n \in \mathbb{N}$ په خوښه)، څیکلیکي یا تل بیرته راگرځیدونکی حالت له مخې:

جمله 9.1.3: وي دې $m \in \mathbb{N}, m \geq 3; a \in \mathbb{Z}$ د $\text{ggT}(a, m) = 1$ سره ټیک هلته مربع پاتې $\text{mod } m$ دې، که

$$a^{\frac{\varphi(m)}{2}} \equiv 1(m); \quad (9.3)$$

د $x^2 \equiv a(m)$ د حلونو تعداد یا گنون 2 وي.

بنوونه: ځکه چې $d = \text{ggT}(2, \varphi(m))$ او دا چې $\varphi(m)$ د $m \geq 3$ لپاره دې تل جوړه دې، نو د 8.2.5 له مخې باور لري:

کینونپوهنه

لومړی: که د m په لومنیو ضربیتجزیه کې یو ناجوره p_i منځ ته راشي، نو $p_i - 1$ جوړه دی او له دې امله

$$\varphi(m) \equiv 0(2)$$

دویم: که نه، نو یو 2 -م توان دی، یعنې $\varphi(m) = \frac{m}{2}$ ، جوړه.

($m = 2^\alpha$ د $\alpha \geq 2$ سره ځکه چې $m \geq 3$)

کورولار ۹ . ۱ . ۴ (اویلر) (Euler): وي دې $p > 2$ لومړنی عدد، $a \in \mathbb{Z}$ د

$$\text{ggT}(a, p) = 1$$

(خوړا غټ پروپشوی یا بزرکترین قاسم مشترک) سره ټیک هلته

مربعیز باقی یا پاتې $\text{mod } p$ دی، که

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(p). (9:4)$$

بڼوونه: د گاوس 6.2.15 له مخ او د $p \neq 2$ له امله (\mathbb{Z}_p^*, \cdot) تل بیرته راگرځیدني یا څیکلیکي دی.

جملگی ۹ . ۱ . ۵ - وي دې $p > 2$ یو لومړنی عدد، له $a \in \mathbb{Z}$ $\text{ggT}(a, p) = 1$

سره ټیک هلته مربع باقی یا پاتې $\text{mod } p^{\alpha} \forall \alpha \in \mathbb{N}$ دی، که a مربع باقی $\text{mod } p$ وي

بڼوونه:

(\Rightarrow)

ساده دی.

(\Leftarrow)

که a مربع باقي $\pmod p$ وي، نو د جملگي 9.1.4 له مخې باور لري: $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$

يعني، د يوه $t \in \mathbb{Z}$ لپاره له دې امله د هر $\alpha \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري: $a^{\frac{p-1}{2}} = 1 + tp$

$$a^{\frac{p(p^\alpha)}{2}} = a^{\frac{1}{2}p^{\alpha-1}(p-1)} = \left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^{p^{\alpha-1}} = (1 + tp)^{p^{\alpha-1}} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}, \quad (9.5)$$

خکه: (ايندکشن په α پسې).

$\alpha = 1$ $(1 + tp)^{p^{\alpha-1}} = 1 + tp \equiv 1 \pmod{p}. \quad (9.6)$	(9.6)
$\alpha \rightarrow \alpha + 1$ $(1 + tp)^{p^\alpha} = \left[(1 + tp)^{p^{\alpha-1}}\right]^p = (1 + rp^\alpha)^p = \quad (9.7)$	(9.7)
$1 + \underbrace{\binom{p}{1} rp^\alpha}_{=p} + \dots + r^p p^{\alpha p} \equiv 1 \pmod{p^{\alpha+1}}. \quad (9.8)$ $= \underbrace{\hspace{10em}}_{=1+sp^{\alpha+1}}$	(9.8)

د جملې 9.1.3 پسې لرو ($m = p^\alpha$ لپاره): $a \in \mathbb{Z}$ مربع پاتې $\pmod{p^\alpha}$ دی. □

د ناڅيکلکي حالت لپاره، يعني $a \in \mathbb{Z}$ بايد $m = 2^k, k \geq 3$ ناچوره (طاق) وي، لکه لاندې جمله چې بنايي:

کینونپوهنه

جمله ۹.۱.۶: وي دي $a \in \mathbb{Z}$ ناچوره، نو کونگر وانخ يا ورته والی دی $x^2 \equiv a(2^k)$

لومړی- د $k = 1$ لپاره تل حلور دی او ټیک يو حل لري.

دویم- د $k \geq 3$ لپاره حلور دی، د 4 حلونو سره، که $a \equiv 1(8)$ وي، پرته له ې نه.

بڼونه: لومړی- پورته وگوری: $m = 2 = 2^1$ ، دا چې ټول ناچوره گڼونه يا اعداد $\text{mod } 2$ دي، نو ټیک يو حل شتون لري.

دویم: د گاوس 6.2.15 له مخې، (\mathbb{Z}_4, \cdot) تلپيرته راگرځيدونی يا څيکلکي دي، يعنې د 9.1.3 له مخې: ناچوره مربع پاتي $\text{mod } 4 \dots$ دی.

$\dots \Leftrightarrow a^{\frac{m(4)}{2}} \equiv 1(4) \Leftrightarrow a^{\frac{2}{2}} \equiv 1(4) \Leftrightarrow a \equiv 1(4).$	(9.9)
---	-------

دريم: په همدې ترتيب د 9.1.3 پسي: د $x^2 \equiv a(4)$ د حلونو گڼون يا تعداد 2 دی.

. وي دي $m = 2^k, k \geq 3$ حلور، نو دی

$x_0^2 \equiv a(2^k)$	(9.10)
-----------------------	--------

څلورم- ديوه $x_0 \in \mathbb{Z}$ لپاره، له دې سره $x_0^2 \equiv a(8)$ ، ځکه چې $8 \mid 2^k (k \geq 3)$

، پسي د 8.1.6 له مخې باور لري: خورا غټ گډ پروپشونی)

بزرگترین مقسوم عليه) $\text{ggT}(x_0, 2^k) = 1$ ، نوله دې سره

$\text{ggT}(x_0, 8) = 1 (8 \mid 2^k, k \geq 3)$ $x_0 \in \mathbb{Z}$ دا په دې معنا، چې نسبت و 8 ته

نسي لومړنی عدد دی، يعنې: $x_0 = 1, 3, 5, 7(8)$ ، له دې سره $x_0^2 \equiv 1(8)$

په ټوليزه توګه:

$a \equiv x_0^2 \equiv 1(8).$	(9.11)
-------------------------------	--------

پنځم- وي دي په څټ يا برعکس $a \equiv 1(8)$ ، يعني هم ، $a \equiv 1(4)$ ، پسي باور لري

$a^{2^k-3} \equiv 1(2^k) \quad (k \geq 3).$	(9.12)
---	--------

شپږم- ايندګڼښتن: د نيوني يا قرضيې له مخي.

نيسو چي د لپاره سم دي، د لپاره باور لري:

$a^{2^{(k+1)}-3}$	=
$(a^{2^k-3})^2 = (1 + t2^k)^2 = 1 + 2t2^k + t^22^{2k} = 1 + s2^{k+1} \equiv$	(9.13)
$\equiv 1(2^{k+1}).$	(9.14)

$$(d = \text{gg}\Gamma(2, 2^{k-2}) = 2) \quad a \equiv 1(4)$$

اوم- له دي سره لرو او

$a^{\frac{2^k-2}{d}} = a^{2^k-3} \equiv 1(2^k);$	(9.15)
--	--------

اتم- نو د [8.2.7](#) له مخي لرو، چي $a \in \mathbb{Z}$ مربع پاتي يا باقي $\text{mod } 2^k$ دي. له دي

سره $2d = 4$ حلونه باور لري. \square

$$x^2 \equiv 110(211)$$

بيلګه ۹ . ۱ . ۷ : ايا \Leftrightarrow 110 مربع پاتي $\text{mod } 211$ حلور دي؟ (دي؟)

کنونپوهنه

د اوپلر 9.1.4 پسي $ggT(110, 211) = 1$ دا چې 211 یو لومړنی گن یا عدد دی، او بار لري، ټیک هلته حلور دی، که وي:

$a^{\frac{p-1}{2}} = 110^{105} \equiv 1(211)$	(9.16)
---	--------

- ډیر کار غواري!

Legendre-Symbol (1752-1833) لژندر-سومبول:

د $x^2 \equiv a(m), ggT(a, m) = 1$ حلوروالي لپاره نوې لار.

پیژند یا تعریف ۹ . ۲ . ۱ : (لژندر سیمبول 9.1): وي دي $p > 2$ یو لومړنی گن یا عدد،

$a \in \mathbb{Z}$ د لژندر سومبول له مخې مربع پاتي د دي لاندي له لاري تعریع دی:

$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$	a مربع باقي mod p دی.	(9.17)
	$P a$	
	انه مربع باقي mod p دی.	

ساده خویونه:

جملگی ۹ . ۲ . ۲ : که $a \equiv a'(p)$ وي، باور لري

$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a'}{p}\right).$	(9.18)
---	--------

بڼوونه:

$\text{mod } p \quad \left(\frac{a}{p}\right) = 1$ <p style="text-align: center;">مربع باقي</p>	(9.19)
$\Leftrightarrow x^2 \equiv a(p)$	(9.20)
$\Leftrightarrow x^2 \equiv a'(p)$	(9.21)
$\Leftrightarrow \left(\frac{a'}{p}\right) = 1.$	(9.22)

جملگی ۹. ۳ - وېش له باقي يا پاتي سره:

$a = p \cdot s + r$	(9.23)
---------------------	--------

$a = ps + r \equiv r(p)$ $0 \leq r < p$ د سره، له دي امله دی ، نو د [9.2.2](#) پسي:

$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{r}{p}\right) \dots$ <p style="text-align: center;">لڼوونه</p>	(9.24)
---	--------

جمله ۹. ۲. ۴: وي دی $p > 2$ يو لومړنی عدد او $a \in \mathbb{Z}$ (د خورا غټ گډ پروېشونی) سره، نو باور لري $\text{ggT}(a, p) = 1$

$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (p).$	(9.25)
--	--------

بنوونه:

- که $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ وي، نو a مربع پاتي $\text{mod } p$ دی او د [9.1.4](#) پسي يا له $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(p)$ مخي: ، له دې سره دی

$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (p).$	(9.26)
--	--------

- که $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ وي، نو a مربع باقي $\text{mod } p$ نه دی او د [9.1.4](#) له مخي يا $a^{\frac{p-1}{2}} - 1 \not\equiv 0(p)$ پسي: ، دا په دې معنا، چي $a^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1(p)$ مخي باور لري

$a^{p-1} \equiv 1(p),$	(9.27)
------------------------	--------

نو $a^{p-1} - 1 \equiv 0(p)$ ، د اسي چي په بدن (انگريزي يي فيلد) $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ کي p لومړنی گڼ يا عدد) باور لري:

$\bar{0} = \overline{a^{p-1} - 1} = \overline{(a^{\frac{p-1}{2}} - 1)(a^{\frac{p-1}{2}} + 1)} = \underbrace{\overline{a^{\frac{p-1}{2}} - 1}}_{\neq \bar{0}} \overline{a^{\frac{p-1}{2}} + 1};$	(9.28)
---	--------

دا چي بدن صفر نه لري، لرو

$\overline{a^{\frac{p-1}{2}} + 1} = \bar{0}.$	(9.29)
---	--------

له دې سره $a^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0(p)$ او $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ ، دا په دې معنا، چي

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (p). \quad (9.30)$$

کورولار ۹ . ۲ . ۵ : دې لومړني عدد وي او $p > 2$ د $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ د خ غ ک
یعني سره، نو باور لري $(i = 1, \dots, n) \text{ ggT}(a_i, p) = 1$

$$\left(\frac{a_1 \cdots a_n}{p}\right) = \left(\frac{a_1}{p}\right) \cdots \left(\frac{a_n}{p}\right). \quad (9.31)$$

ښوونه: $\text{ggT}(a_1 \cdots a_n, p) = 1$ ، ځکه چې پرته له دې به ، $p \mid a_1 \cdots a_n$ داسې ،
چې د یوه $1 \leq i \leq n$ لپاره د [3.1.5](#) له مخې $p \mid a_i$ لرو . – تضاد یا مخمخوالی! له دې
سره $\left(\frac{a_1 \cdots a_n}{p}\right)$ تعریف دی.

$$\left(\frac{a_1 \cdots a_n}{p}\right) \equiv (a_1 \cdots a_n)^{\frac{p-1}{2}} = a_1^{\frac{p-1}{2}} \cdots a_n^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a_1}{p}\right) \cdots \left(\frac{a_n}{p}\right) (p). \quad (9.32)$$

له دې امله p کمښت وېشي، یعنی $p \mid (\pm 1) - (\pm 1)$. دا کمښت صفر دی، که دواړه
عددونه برابر وي، او پرته له دې ± 2 .
له $p > 2$ امله باور لري: $p \nmid \pm 2 \Rightarrow$ یعنی لاس ته راځي کمښت $= 0$ لاس ته راځي
[\(9.26\)](#) . □

لاس ته راوړنه ۹ . ۲ . ۶ :

لومړۍ- $a \in \mathbb{Z} (a \neq 0)$ دې د $a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$
په لومړنيو ضریبونو توپه کونه یا تجزیه وي. نو د [9.2.5](#) له مخې باور لري:

کینونپوهنه

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{\pm 1}{p}\right) \left(\frac{p_1^{\alpha_1}}{p}\right) \cdots \left(\frac{p_k^{\alpha_k}}{p}\right), \quad (9.33)$$

دویم: نو شمیرو: $\left(\frac{-1}{p}\right)$ او $\left(\frac{q^x}{p}\right)$ د خ غ پ (قاسم بزرگ مشبرک) سره، دا په دې معنا، چې $\text{ggT}(p, q^x) = 1$ $p \neq q$.

دریم: $1 = \left(\frac{q^2}{p}\right)$ ، ځکه چې $x^2 \equiv q^2(p)$ د حل په حیث $x_0 = q$ لري، دا په دې معنا، چې q^2 تل مربع باقي دی. $\text{mod } p$

څلورم: ځانگړی حالت: $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$ ($1 = 1^2 \Rightarrow$) مو غوښتنه یا ثبوت دی.

پنځم: له ی امله فقط د شمیرلو لپاره: او $\left(\frac{-1}{p}\right)$ د $\left(\frac{q}{p}\right)$ سر لومړنی عدد 2 < دی، ځکه چې

$$\left(\frac{q^{2k}}{p}\right) = \left(\frac{(q^k)^2}{p}\right) = 1. \quad (9.34)$$

کورولار یا جملگی ۹ . ۲ . ۷ : وي دې $p > 2$ لومړنی عدد، نو باور لري:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

لومړی- -1 تیک هلته مربع باقي $\text{mod } p$ دی، که $p \equiv 1(4)$ وي.

ښوونه:

لومړی- د له مخې باور لري:

$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} (p);$	(9.35)
--	--------

دويم: نو p كمښت يا تفريق وېشي، دا 0 يا ± 2 دی. د $p > 2$ له امله دی
 $p \nmid \pm 2 \Rightarrow$ (له دې لاس ته راځي)
 \Rightarrow كمښت = 0

$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$	(9.36)
---	--------

دويم: مربع پاتي دی

$\dots \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$	(9.37)
$\Leftrightarrow \frac{p-1}{2}$ <p style="text-align: center;">جوړه</p>	(9.38)
$\Leftrightarrow \frac{p-1}{2} = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$	(9.39)
$\Leftrightarrow p-1 = 4k$	(9.40)
$\Leftrightarrow p = 4k + 1$	(9.41)
$\Leftrightarrow p \equiv 1(4).$	(9.42)

لاندي جمله د دیربينلت د جملې څوکه انځوروي، چې نوره غواړو وښايو:

کینونپوهنه

جمله ۹ . ۲ . ۸ : د $4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) بڼې ناپای دې لومړني ګڼونه شتون لري. بنوونه: ناسیده، نیسو چې د دې بڼې پای ډېر ګڼونه شتون لري:

p_1, \dots, p_n وي دې.

$N := (2p_1 \cdots p_n)^2 + 1,$	(9.43)
---------------------------------	--------

نو باور رې: $N = 2m + 1$ ، یعنی ناجوره، ا په دې معنا، چې $2 \nmid N$.
 د $N > 1$ له امله یو لومړنی عدد p د $p \mid N$ شتون لري، دا په دې معنا، چې $N \equiv 0(p)$ نو:

$(2p_1 \cdots p_n)^2 \equiv -1(p).$	(9.44)
-------------------------------------	--------

دا په دې معنا چې -1 مربع پاتې یا باقی $\pmod p$ دی. د [9.2.7](#) له مخې لرو یا لاس ته راځي:

$p \equiv 1(4),$	(9.45)
------------------	--------

دا په دې معنا چې $p = 4k + 1$. د نیوني یا فرضیې له مخو لاس ته راځي: $p = p_i$ د یوه $1 \leq i \leq n$ لپاره. له دې امله باور لري

$p \mid (2p_1 \cdots p_n)^2;$	(9.46)
-------------------------------	--------

د $p \mid N$ له امله لاس ته راځي:

$p \mid N - (2p_1 \cdots p_n)^2 = 1,$	(9.47)
---------------------------------------	--------

نو $p \leq 1$ - تضاد یا ردونه. \square

د ګاوس لیمایا جملگی

جمله ۹، ۲، ۹: (د ګاوس جمله ګی) وي دي $p > 2$ لومړنی عدد، $a \in \mathbb{Z}$ د خورا

غټ ګډ پروېشوني (بزرګترین مقسوم علیه مشترک) سره $\text{ggT}(a, p) = 1$.

جوړووو: $1 \cdot a, 2 \cdot a, \dots, \frac{p-1}{2} \cdot a$ او د p له لارې باقي سره د وېش له لارې د اړونده پاتې سره، نو باور لري

$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{n(a)},$	(9.48)
---	--------

چیرته چې $n(a)$ سره د پاتې یا باقي ګڼون یا تعداد په نڅښه کيږي، چې له $\frac{p}{2}$ لوی دي. بنوونه: د $i = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ لپاره دي وي:

$ia = pq_i + t_i \quad 0 \leq t_i < p$	(9.49)
--	--------

(د پاتې سره وېش) نو $t_i \neq 0 \forall i$ باور لري، پرته له دي $ia = pq_i$ ، يعني $p \mid ia$ ، داسې چې (د 3.1.5 له مخې): $p \mid i$ يا $p \mid a$ ، دا چې $\text{ggT}(a, p) = 1$ ، (خ غ ګ)، بايد باور ولري ($\Rightarrow p \leq i$)، له مخې يو مخامخوالی يا تضاد لاس ته راځي! په ځانګړي ډول باور لري:

$t_i \equiv ia(p) \quad \forall i = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}.$	(9.50)
--	--------

کنونپوهنه

وي دي $r_1, \dots, r_{n(a)}$ پورتنی پاتې له $\frac{p}{2} < t_i < p, s_1, \dots, s_k$ سره پاتې له
 $1 \leq t_i \leq \frac{p-1}{2}$ سره دا په دي معنا، چې $1 \leq t_i \leq \frac{p}{2}$
 (ناجوره!) p

$\Rightarrow n(a) + k = \frac{p-1}{2}.$	(9.51)
---	--------

وینایی: $r_1, \dots, r_{n(a)}, s_1, \dots, s_k$ ټول سره توپیر لري.

نیسو $t_i = t_j$ د $i > j$ لپاره، نو

$ia - ja = pq_i - pq_j = p(q_i - q_j);$	(9.52)
---	--------

$ia - ja = 0$ دی، نو $q_i - q_j = 0$
 ، دا په دي معنا چې $(i - j)a = 0$ ، یعنی $i = j$ ($a \neq 0$)
 -تضاد یا مخامخوالی!

دی، نو $q_i - q_j \neq 0$ ، $p \mid (i - j)a$ ، د [3.1.5](#) له مخې لاس ته راځي $p \mid i - j$ یا
 $\text{ggT}(p, a) = 1$ ، $p \mid a$ (خ غ ک) له امله لرو - تضاد یا مخامخوالی!
) $0 \leq i - j < \frac{p-1}{2} < p$ ، له کوم به چې $i - j = 0$ لاس ته راغلی وی.

جوړ کړی

$\alpha_i = p - r_i \ (i = 1, \dots, n(a)),$	(9.53)
--	--------

نو ټول $\alpha_1, \dots, \alpha_{n(a)}$ مختلف یا نابرابر دي (ټول $r_1, \dots, r_{n(a)}$ مختلف دي).

پسې لرو $\alpha_i \neq s_j \ \forall i, j$ ځکه چې:

$\alpha_i = p - r_i = s_j \Rightarrow r_i + s_j = p \equiv 0(p)$	(9.54)
--	--------

i, j	
$\Rightarrow ia + ja \equiv 0(p) \ (t_i \equiv ia(p) \ \forall i)$	(9.55)
$\Rightarrow p \mid (i+j)a \stackrel{3.1.5}{\Leftrightarrow} p \mid i+j \ (ggT(a, p) = 1);$	(9.56)

$1 \leq i+j \leq p-1 < p$ $1 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$
 له امله باور لري: د
 تضاد!

$\alpha_1, \dots, \alpha_{n(a)}, s_1, \dots, s_k$	(9.57)
---	--------

ټول مختلف دي يا توپير لري.

$0 < \alpha_i \leq \frac{p-1}{2}$
 باور لري: ، ځکه چې

$\frac{p}{2} < r_i < p \Rightarrow -p < -r_i < -\frac{p}{2} \Rightarrow 0 < p - r_i = \alpha_i < \frac{p}{2};$	(9.58)
$0 < s_j < \frac{p-1}{2}$	(9.59)

د پيژند له مخې باور لري.
 له دې سره هم

$1 \leq s_j \leq \frac{p-1}{2}; \quad 1 \leq \alpha_i \leq \frac{p-1}{2}$ او	(9.60)
---	--------

دا چې

$n(a) + k = \frac{p-1}{2}$	(9.61)
----------------------------	--------

کنونپوهنه

(ټول باقي يا پاتې توپير لري) $\alpha_1, \dots, \alpha_{n(a)}, s_1, \dots, s_k$ ټيک $\frac{p-1}{2}$ طبيعي اعداد دي د 1 او $\frac{p-1}{2}$ ترمنځ. له دې سره: ټيک اعداد $\alpha_1, \dots, \alpha_{n(a)}, s_1, \dots, s_k$ دي. له دې لاس ته راځي:

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{n(a)} s_1 \cdots s_k = 1 \cdot 2 \cdots \frac{p-1}{2} = \left(\frac{p-1}{2}\right)! \quad (9.62)$$

$$\Rightarrow (p-r_1) \cdots (p-r_{n(a)}) s_1 \cdots s_k = \left(\frac{p-1}{2}\right)! \quad (9.63)$$

$$\Rightarrow (-1)^{n(a)} r_1 \cdots r_{n(a)} s_1 \cdots s_k \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! (p) \quad (9.64)$$

$$\Rightarrow (-1)^{n(a)} t_1 \cdots t_{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! (p) \quad (9.65)$$

$$(d \text{ تعريف } r_i, s_j \text{ له څخه}) \quad (9.66)$$

$$\Rightarrow (-1)^{n(a)} 1 \cdot a \cdots \left(\frac{p-1}{2}\right) \cdot a \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! (p) \quad (9.67)$$

$$(d \text{ تعريف له مخې: } ia = pq_i + t_i \equiv t_i(p)) \quad (9.68)$$

$$\Rightarrow (-1)^{n(a)} a^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! (p). \quad (9.69)$$

باور لري $\text{ggT}((\frac{p-1}{2})!, p) = 1$ ، ځکه چې پرته له دې به وی

$$p \mid \left(\frac{p-1}{2} \right)! = 1 \cdot 2 \cdots \frac{p-1}{2}, \quad (9.70)$$

يعني د [3.1.5](#) له مخي:

$$\exists k : 1 \leq k \leq \frac{p-1}{2} < l : p \mid k \quad \text{اتضاد.} \quad (9.71)$$

$$\Rightarrow (-1)^{n(a)} a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(p) \quad (9.72)$$

$$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{n(a)}(p) \quad (9.73)$$

$$\stackrel{9.2.4}{\Leftrightarrow} \left(\frac{a}{p} \right) \equiv (-1)^{n(a)}(p) \quad (9.74)$$

$$\Rightarrow p \in \{0, \pm 2\} \text{ د کمنبت وېشي } \quad (9.75)$$

$$\Rightarrow \text{کمنبت بايد صفر وي } (p > 2, p \nmid 2!) \quad (9.76)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{p} \right) = (-1)^{n(a)}. \quad (9.77)$$

بيلکه 9.2.10 . ايا 7 څلورۍ پاتي يا مربع باقي $\text{mod } 13$ دی؟

$p = 13, a = 7, \text{ggT}(a, p) = 1$ خورا غټ گډ پروېشونۍ؛ جور کړی :
 $1 \cdot 7, \dots, 6 \cdot 7$

د 13 له لارې په وېش کې پاتې :

$t_1 = 7, t_2 = 1, t_3 = 8, t_4 = 2, t_5 = 9, t_6 = 3;$	(9.78)
---	--------

د دې پاتو گڼون یا تعداد $n(7)$ له $\frac{13}{2}$ لوي دي ، دا په دې معنا، چې $7 \geq 3$ برابر دی. له دې امله

$\left(\frac{7}{13}\right) = (-1)^3 = -1,$	(9.79)
--	--------

دا په دې معنا، چې $a = 7$ مربع یا څلورې پاتې $\text{mod } 13$ نه دی.

د $\left(\frac{q}{p}\right)$ شمیرنه:

د $\left(\frac{q}{p}\right)$ شمیرنې ته، د له ۲ لوي p, q مختلفو لومړنیو گڼونو سره.

جمله $11 : 2 : 9 : p, q$ مختلف لومړني گڼونه دي، $p > 2$ ، نو باور لري:

1. $q = 2$:

$$\left(\frac{2}{q}\right) = (-1)^{\frac{q^2-1}{8}}, \quad (9.80)$$

2. $q > 2$:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{iq}{p}\right]}. \quad (9.81)$$

دریم: $[x]$ د x پسي کوچنی عدد یا گڼ په نڅبنه کوي (بنوونه: د 9.2.9 بنووني ته ورته (ټاکو $a = q$) باور لري:

$$iq = pq_i + t_i \quad (i = 1, \dots, \frac{p-1}{2}), \quad 0 < t_i < p, \quad q_i = \left[\frac{iq}{p} \right]. \quad (9.82)$$

جوړ کړی:

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} iq = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (pq_i + t_i) = p \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right] + \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} t_i, \quad (9.83)$$

له دې سره:

$$q \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i}_{=\frac{1}{2}(\frac{p-1}{2})(\frac{p-1}{2})} = q \frac{p^2 - 1}{8} = p \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right] + \sum_{i=1}^{n(q)} r_i + \sum_{i=1}^k s_i \quad (9.84)$$

($r_i \dots$ پاتي (باقي) $> \frac{p}{2}$ ، $s_i \dots$ پاتي $\leq \frac{p}{2}$). د 9.2.9 بنووني له مخې باور لري:

$$\left\{ 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2} \right\} = \{p - r_1, \dots, p - r_{n(q)}, s_1, \dots, s_k\}; \quad (9.85)$$

نو باور لري:

کنونپوهنه

$$\frac{p^2 - 1}{8} = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i = \sum_{i=1}^{n(q)} (p - r_i) + \sum_{i=1}^k s_i = p \cdot n(q) - \sum_{i=1}^{n(q)} r_i + \sum_i (9.86)$$

د (9.64) او (9.66) کمون (تفریق) له لارې:

$$(q-1) \frac{p^2 - 1}{8} = p \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right] - p \cdot n(q) + 2 \sum_{i=1}^{n(q)} r_i. \quad (9.87)$$

له دې سره $\text{mod } 2$:

$$(q-1) \frac{p^2 - 1}{8} \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right] - n(q)(2). \quad (9.88)$$

- که $q > 2$ وي، نو q ناجوره (طاق) دی، یعنی $q-1$ جوړه (جفت)، نو $q-1 \equiv 0(2)$ له دې سره:

$$0 \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right] - n(q)(2) \Rightarrow n(q) \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right] (2). \quad (9.89)$$

د 9.2.9 له مخې لرو یا لاس ته راځي:

$$\left(\frac{q}{p} \right) = (-1)^{n(q)} = (-1)^{\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right]}. \quad (9.90)$$

- که $q = 2$ وي، نو $q - 1 = 1$ ، او د $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}$ لپاره باور لري:

$$0 < \frac{2}{p} \leq \frac{2i}{p} \leq \frac{p-1}{p} < 1, \quad (9.91)$$

- نو $\left[\frac{2i}{p}\right] = 0$ د $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}$ لپاره، له دې سره پاتيري

$$\frac{p^2 - 1}{8} \equiv -n(q)(2) \Rightarrow n(q) \equiv \frac{p^2 - 1}{8}(2). \quad (9.92)$$

د [9.2.9](#) له مخې لاس ته راځي:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{n(q)} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}. \quad (9.93)$$

جمله ګوتي 9.2.12: وي دې $p > 2$ يو لومړني ګڼ، نو باور لري: 2 ټيک څلورۍ

پاتي يا مربع باقي ده، که $p = 8k \pm 1 (k \in \mathbb{Z})$ وي.

بڼونه: 2 څلورۍ پاتي

$$\text{mod } p \Leftrightarrow \left(\frac{2}{p}\right) = 1 \quad (9.94)$$

$$\stackrel{9.2.11}{\Leftrightarrow} (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = 1 \quad (9.95)$$

کنونپوهنه

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 - 1}{8} \quad (9.96)$$

جوړه دی

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 - 1}{8} = 2n \quad n \in \mathbb{N} \quad (9.97)$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 1 = 16n. \quad (9.98)$$

د $p > 2$ لومړنی ګڼ $\text{mod } 8$ لاندې بڼه لري

$$8k \pm 1, 8k \pm 2, 8k \pm 3, 8k \pm 4 \quad (9.99)$$

$$\Rightarrow 8k \pm 1, 8k \pm 3 \Rightarrow p \text{ لومړنی ګڼ } p > 2$$

ناجوړه ګڼ

$$p = 8k \pm 3 \Rightarrow \text{که وی}$$

$$p^2 - 1 = 64k^2 \pm 48k + 9 - 1 \equiv 8(16) \not\equiv 0(16), \quad (9.100)$$

دا په دې معنا، چې $p^2 - 1 \neq 16n$ تضاد یا په څټوالي

په څټ یا برعکس:

$$p = 8k \pm 1 \Rightarrow p^2 - 1 = 64k^2 \pm 16k + 1 - 1 \equiv 0(16), \quad (9.101)$$

دا په دې معنا، چې $p^2 - 1 = 16n$ له دې سره .

$$p^2 - 1 = 16n \Leftrightarrow p = 8k \pm 1. \quad (9.102)$$

د Legendre-Symbol لپاره د څلورۍ - يا مربع ريځپروسيتي قانون reciprocity law

جمله 9.2.13: (مربع ريځپروسيتي): وي دې p, q لومړني گڼونه، ≥ 2 دواړه ، نو

$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}.$	(9.103)
---	---------

ښوونه: وي دې

$$M := \left\{ (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}, 1 \leq j \leq \frac{p-1}{2} \right\}, \quad (9.104)$$

نو M ټيک $\frac{p-1}{2} \frac{p-1}{2}$ توکي لري. راوړو

$$M_1 = \{(i, j) \in M \mid qi > pj\}, \quad (9.105)$$

$$M_2 = \{(i, j) \in M \mid qi < pj\}. \quad (9.106)$$

کینونپوهنه

باور لري $qi = pj$ ، لاس ته راځي ، يعني ، $p \mid qi$ ، $p \mid i$ ($\text{ggT}(p, q) = 1$) -
تضاد يا مخمخوالی و $1 < i \leq \frac{p-1}{2} < p$ ته. له دې سره:

$$M = M_1 \cup M_2, M_1 \cap M_2 = \emptyset. \quad (9.107)$$

وښايي:

$$M_1 = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}, 1 \leq j < \frac{qi}{p} \right\}, \quad (9.108)$$

$$M_2 = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i < \frac{pj}{q}, 1 \leq j \leq \frac{q-1}{2} \right\}. \quad (9.109)$$

د M_1 لپاره: د هر څه د مخه يا لومړی باور لري $M_1 \subseteq \{\dots\}$ ، ځکه چې

$$(i, j) \in M_1 \Rightarrow qi > pj \Rightarrow 1 \leq j < \frac{qi}{p}. \quad (9.110)$$

- په څټ يا برعکس: $\{\dots\} \subseteq M_1$ ، ځکه چې

$$1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}, 1 \leq j < \frac{qi}{p} \Rightarrow \frac{qi}{p} \leq \frac{qp-1}{p} - \frac{qp-1}{2p} < \frac{q}{2} \quad (9.111)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{qi}{p} \right] \leq \left[\frac{q}{2} \right] \leq \frac{q-1}{2}, \quad (9.112)$$

$$1 \leq j < \frac{qi}{p} \Rightarrow 1 \leq j \leq \left[\frac{qi}{p} \right] \leq \frac{q-1}{2}, \quad (9.113)$$

- دا په دې معنا، چې $(i, j) \in M$. بالاخره: $(i, j) \in M_1$ ، ځکه چې

$$1 \leq j < \frac{qi}{p} \Rightarrow pj < qi. \quad (9.114)$$

- ورته د M_2 لپاره. ګڼل یې: د هر لپاره توکي شتون لري، له دې سره باور لري

$$(9.115) \quad \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qi}{p} \right] \quad \text{توکي لري} \quad M_1 \text{ ټیک}$$

ورته

$$(9.116) \quad \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{pj}{q} \right] \quad \text{توکي لري} \quad M_2 \text{ ټیک}$$

نو $M = M_1 \cup M_2, M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ټیک

$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qi}{p} \right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{pj}{q} \right] = \frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}$	(9.117)
---	---------

توکي لري. د [9.2.11](#) له مخي باور لري:

$$\left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qi}{p}\right]} (-1)^{\sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{pj}{q}\right]} = (-1)^{\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qi}{p}\right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{pj}{q}\right]} = \quad (9.11)$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}. \quad (9.11)$$

جمله گي 9.2.14: p, q مختلف > 2 لومړني گڼونه يا اعداد دي، نو باور لري

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \quad (9.120)$$

تيک هلته، که $p \equiv 1(4)$ يا $q \equiv 1(4)$ يا دواړه وي.

بنوونه: د [9.2.13](#) له مخي يا پسي:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}. \quad (9.121)$$

د $\left(\frac{q}{p}\right) = \pm 1$ سره د ضرب له لاري لاس ته راوړو:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{q}{p}\right) = 1 &\Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right) \\ \left(\frac{q}{p}\right) = -1 &\Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right) (-1)^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right) \quad (9.12)$$

له دې سره:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \Leftrightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2} \text{ جوړه} \quad (9.12 \quad 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{p-1}{2} \vee \frac{q-1}{2} \text{ يا دواړه جوړه دي} \quad (9.12 \quad 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{p-1}{2} = 2n \vee \frac{q-1}{2} = 2m \Leftrightarrow p-1 = 4n, q-1 = 4m \quad (9.12 \quad 5)$$

$$\Leftrightarrow p \equiv 1(4) \vee q \equiv 1(4) \text{ دواړه.} \quad (9.12 \quad 6)$$

بيلګه 9.2.15: ايا $a = -21$ څلورۍ پاتې يا مربع باقي $\pmod{61}$ دي؟

$$x^2 \equiv -21(61) \quad (\text{دا په دې معنا چې اوببور يا حلور دی؟})$$

$$p = 61 \in \mathbb{P}, \text{ggT}(-21, 61) = 1 \quad \text{له دې سره ميژندر:}$$

$$\left(\frac{-21}{61}\right) = \left(\frac{(-1) \cdot 3 \cdot 7}{61}\right) \stackrel{9.2.5}{=} \left(\frac{-1}{61}\right) \left(\frac{3}{61}\right) \left(\frac{7}{61}\right) \stackrel{9.2.7}{=} 1 \left(\frac{3}{61}\right) \left(\frac{7}{61}\right) \quad (9.12 \quad 7)$$

$$\stackrel{9.2.1}{=} \left(\frac{61}{3}\right) \left(\frac{7}{61}\right) \stackrel{Red.}{=} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{7}{61}\right) = 1 \left(\frac{7}{61}\right) = \left(\frac{7}{61}\right) \quad (9.12 \quad 8)$$

کنونپوهنه

$$\stackrel{\text{Red.}}{\equiv} \left(\frac{5}{7}\right) \stackrel{9.2.14}{\equiv} \left(\frac{7}{5}\right) \stackrel{\text{Red.}}{\equiv} \left(\frac{2}{5}\right) \stackrel{9.2.12}{\equiv} -1 \quad (9.12)$$

9)

 $\Rightarrow -21$ څلورۍ پاتي $\text{mod } 61$ نه دي.

$$x^2 \equiv a(m)$$

پام يا يادونه 9.2.16: ، چيرته چې m لومړنی گڼ نه دی، نو ليژندر

لومړنیو ضربيونو يا ځله وونو ټوټه کيدنه. نو باور لري: $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ د m په

سومبول تعريف ده دی يا پي‌اند نه لري، مگر: وي دي

$$a \pmod{m \dots}$$

دی.

مربع باقي

$$\dots \Leftrightarrow x^2 \equiv a(m) \quad (9.130)$$

$$\Leftrightarrow x^2 \equiv a(p_i^{\alpha_i}) \quad i = 1, \dots, k \quad (9.131)$$

$$\stackrel{9.1.5}{\Leftrightarrow} x^2 \equiv a(p_i) \quad i = 1, \dots, k \quad (9.132)$$

$$\Leftrightarrow a \pmod{p_i} \quad i = 1, \dots, k \quad (9.133)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{p_i}\right) = 1 \quad i = 1, \dots, k. \quad (9.134)$$

جاکوبي سومبول Jacobi-Symbol

په لاندې کې د $x^2 \equiv a(m)$ د اوبی یا حل د پرېکړې لپاره یو بل امکان څیړو، مګر د لږ واړه بندیز سره:

پېژند 9.3.1: (جاکوب [9.2](#) سومبول): m دې یو ناجوره طبیعي ګڼ وي،
 $m = p_1 \cdots p_k$ چېرته چې p_1, \dots, p_k نه اړین مختلف طبیعي لومړني ګڼونه دي.
 $\text{ggT}(a, m) = 1$ $a \in \mathbb{Z}$ دی د سره، نو څلورۍ یامربع باقی د جاکوب له مخې په لاندې توګه تعریف دی

$\left(\frac{a}{m}\right) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{a}{p_i}\right)_L$	(9.135)
---	---------

او $\left(\frac{a}{1}\right) = 1$ [\[9.3\]](#)

یادونه 9.3.2: زیات وخت دا سومبول د کمیزو یا منفي ګڼونو $m < 0$ لپاره هم تعریفیږي:

$\left(\frac{a}{m}\right) := \left(\frac{a}{ m }\right).$	(9.136)
---	---------

دا مور نه پریردو، د دې لارې لاندې ترې لاس ته راتلنه په روښانه توګه ساده لاس ته راوړل کیږي.

یادونه 9.3.3

کڼونپوهنه

لومړی . $m \in \mathbb{N}$ جوړه دی، نو نو د $x^2 \equiv a(m)$ اوبیوروالي - یا د حلوروالي پرابلم په یوه ناجوړه موډل بیرته اړوو، ځکه چې: $m = 2^\alpha n$ د ناجوړه n سره (تل شونی دی)، نو باور لري:

$x^2 \equiv a(m) \Leftrightarrow x^2 \equiv a(2^\alpha) \quad \text{او} \quad x^2 \equiv a(n)$	(9.137)
--	---------

دویم. دلته $x^2 \equiv a(2^\alpha)$ له 9.1.6 سره پای شو او n ناجوړه دی

دریم: د پیژند یا تعریف له مخي دی

$\left(\frac{a}{p_i}\right)_L = \pm 1, \quad \text{ځکه چې} \quad \left(\frac{a}{m}\right)_J = \pm 1,$	(9.138)
---	---------

څلورم: $\left(\frac{a}{m}\right)_J = -1$ دی، نو a څلوری پاتي یا مربع باقي $\text{mod } m$ نه ده، ځکه چې د تعریف له مخي:

$-1 = \left(\frac{a}{m}\right)_J = \prod_{i=1}^k \left(\frac{a}{p_i}\right)_L,$	(9.139)
---	---------

پنځم: ینی لږ تر لږه $\left(\frac{a}{p_i}\right)_L = -1$ یو دی، دا په دې معنا، چې د دې i لپاره a څلوری پاتي $\text{mod } p_i$ نه دی. له دې سره a هم مربع باقي $\text{mod } m$ نه دی.

$$\left(x_0^2 \equiv a(m) \stackrel{p_i|m}{\Rightarrow} x_0^2 \equiv a(p_i) \right)$$

شپږم: $\left(\frac{a}{p_i}\right)_L = -1$ دی، نو a نه اړین یو مربع باقی $\text{mod } p_i$ دی (کیدى شي وي، مگر باید نه دی، چې وي).

بیلگه: $\left(\frac{2}{15}\right)$ جاکوبي-سومیل دی ($15 \in \mathbb{N}$ ناچوره (طاق) $(2, 15) = 1$)، د تعریف له مخې:

$\left(\frac{2}{15}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{5}\right),$	(9.140)
--	---------

له دې سره د [9.2.12](#) له مخې باور لري: $\left(\frac{2}{3}\right) = -1$ ځکه چې

$3 \neq 8k \pm 1, \left(\frac{2}{5}\right) = -1$ ځکه چې $5 \neq 8k \pm 1$

یعنې:

$\left(\frac{2}{15}\right) = (-1)(-1) = 1,$	(9.141)
---	---------

مگر 2 مربع باقی $\text{mod } 15$ نه دی. له دې امله په لومړنیو ضریبونو تجزیه.....

لومړی: $\alpha \equiv a'(m)$ دی، نو باور لري

کڼونپوهنه

$\left(\frac{a}{m}\right)_J = \left(\frac{a'}{m}\right)_J.$	(9.142)
---	---------

دويم: جمله گي [9.2.5](#) ته ورته د لیجنډر-سومبول لپاره او هم د جاکوبي سومبول لپاره باور لري

$\left(\frac{ab}{m}\right)_J = \left(\frac{a}{m}\right)_J \left(\frac{b}{m}\right)_J.$	(9.143)
--	---------

څلورم: پسي باور لري:

$\left(\frac{a}{m_1 m_2}\right)_J = \left(\frac{a}{m_1}\right)_J \left(\frac{a}{m_2}\right)_J.$	(9.144)
---	---------

يادونه: که په راتلونکي کي د سومبول ډول غوره وي، نو د $\left(\frac{a}{p}\right)_L$ سره د لیجنډر-

سومبول او له $\left(\frac{a}{p}\right)_J$ سره د جاکوبي سومبول سره توپيروي. دا پورته تعريف له دې امله وايي، چې جاکوبي سومبول د لیجنډر - سومبول ضرب دی.

ځانگړي حالتونه: $a = -1, a = 2$

لیجنډر ته ورته: د $a = -1$ همداسي د $a = 2$ لپاره جاکوبي-سومبول را اخلو:

ليما يا وړه جمله : $m = m_1 \cdots m_k \in \mathbb{N}$ ناچوره دی، نو باور لري:

لومړی:

$\frac{m-1}{2} \equiv \sum_{i=1}^k \frac{m_i-1}{2} (2),$	(9.145)
--	---------

دویم:

$\frac{m^2-1}{8} \equiv \sum_{i=1}^k \frac{m_i^2-1}{8} (2).$	(9.146)
--	---------

ښوونه : دا چې m ناچوره دی، باید هر m_i هم ناچوره وي ($\Rightarrow \frac{m_i-1}{2} \in \mathbb{N}$)

لومړی ، $\frac{m-1}{2} \in \mathbb{N}, \frac{m_i-1}{2} \in \mathbb{N}$ ، ایندکشن:

: $k = 1$

دلته نه ښوول کيږي.

$k \rightarrow k+1$
:

وي دی $m = m_1 \cdots m_k m_{k+1} \in \mathbb{N}$ ناچوره، نو هر m_i ناچوره دی، او هم
 $2 \mid m_{k+1} - 1$ ناچوره دی او همداسې $2 \mid m_{k+1} - 1$ هم، نو په ټوليزه توګه دا
 ضرب په 4 وېشور دی

$(m_1 \cdots m_k - 1)(m_{k+1} - 1) =$	(9.147)
---------------------------------------	---------

کنونپوهنه

$= \underbrace{m_1 \cdots m_k m_{k+1}}_{=m} - m_1 \cdots m_k - m_{k+1} + 1;$	
--	--

له دې امله: $(4) m - 1 \equiv m_1 \cdots m_k - 1 + m_{k+1} - 1$ ، کين او بنې لور ته

جوړه گڼ ځای دی، د $\text{ggT}(4, 2) = 2$ له امله د (5) 4.1.5 له مخې لاس ته راځي:

$\frac{m-1}{2} \equiv \frac{m_1 \cdots m_k - 1}{2} + \frac{m_{k+1} - 1}{2} (2).$	(9.148)
--	---------

د ایندکشن پسي لرو:

$\frac{m-1}{2} \equiv \sum_{i=1}^k \frac{m_i - 1}{2} + \frac{m_{k+1} - 1}{2} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{m_i - 1}{2} (2).$	(9.149)
---	---------

وښايي: که $a \in \mathbb{N}$ ناجوره وي، نو $8 \mid a^2 - 1$ باور لري:

$a = 2t + 1 \Rightarrow$	
$a^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 4t(t + 1) + 1$	(9.150)
$\Rightarrow a^2 - 1 = 4t(t + 1),$	(9.151)

جوړه دی، دا په دې معنا، چې ضريب يا ځله وونی 2 لري. $t + 1$ يا t جيره جي يا t يا $t + 1$ له دې سره باور لري

$8 \mid a^2 - 1 \left(\Rightarrow \frac{m_i^2 - 1}{8} \in \mathbb{N} \right).$	(9.152)
---	---------

۱ - ایندکشن:

۲ - $k = 1$:

۳ - دلته هم نه بنوول کيږي

$k \rightarrow k + 1$

:

۴ - وي دي $m = m_1 \cdots m_k m_{k+1} \in \mathbb{N}$ ، ناجوره، نو تول m_i ناجوره دي او $m_1 \cdots m_k$ هم، نو

$8 \mid m_{k+1}^2 - 1.$ او $8 \mid m_1^2 \cdots m_k^2 - 1$	(9.153)
--	---------

۵ - له دي سره $m_1^2 \cdots m_k^2 - 1 \equiv 0(8), m_{k+1}^2 - 1 \equiv 0(8)$ ، يعني د [4.1.5](#) له مخي

$(m_1^2 \cdots m_k^2 - 1)(m_{k+1}^2 - 1) \equiv 0(64).$	(9.154)
---	---------

۶ - دا په دي معنا، چي $64 \mid m_1^2 \cdots m_k^2 m_{k+1}^2 - m_1^2 \cdots m_k^2 + 1 - m_{k+1}^2$ ، نو

$m_1^2 \cdots m_k^2 m_{k+1}^2 - 1 \equiv m_1^2 \cdots m_k^2 - 1 + m_{k+1}^2 - 1(64),$	(9.155)
---	---------

۷ - نو:

$\frac{m^2 - 1}{8} \equiv \frac{m_1^2 \cdots m_k^2 - 1}{8} + \frac{m_{k+1}^2 - 1}{8} (8),$	(9.156)
--	---------

۸ - دا په دې معنا، چې د ایندکشن له مخې:

$$\frac{m^2 - 1}{8} \equiv \sum_{i=1}^k \frac{m_i^2 - 1}{8} + \frac{m_{k+1}^2 - 1}{8} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{m_i^2 - 1}{8} \pmod{8}. \quad (9.157)$$

د دې پرېکړې لپاره چې ایا -1 یا 2 څلورۍ پاتې (مربعباقي) دی که نه:

جمله : وي دې $m \in \mathbb{N}$ ناجوره، نو باور لري:

$\left(\frac{-1}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}},$	- ۱ (9.158)
$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}.$	- ۲ (9.158)

بڼوونه: وي دې $m = p_1 \cdots p_k$ ناجوره، $p_i \in \mathbb{P}$ ، ټول p_i ناجوره، يعنې > 2

- ۱

$$\left(\frac{-1}{m}\right) \stackrel{Def.}{=} \prod_{i=1}^k \left(\frac{-1}{p_i}\right)_L \stackrel{9.2.7}{=} \prod_{i=1}^k (-1)^{\frac{p_i-1}{2}} = (-1)^{\sum_{i=1}^k \frac{p_i-1}{2}}. \quad (9.160)$$

۲ - دا چې د(1) 9.3.5 له مخې باور لري:

$$\sum_{i=1}^k \frac{p_i - 1}{2} \equiv \frac{m-1}{2} (2) \Rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{p_i - 1}{2} = \frac{m-1}{2} + 2t \quad (t \in \mathbb{N}), \quad (9.161)$$

۳- او $(-1)^{2t} = 1$ ، لاس ته راځي:

$$(-1)^{\sum_{i=1}^k \frac{p_i - 1}{2}} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}. \quad (9.162)$$

۴-

$$\left(\frac{2}{m} \right) \stackrel{Def.}{=} (9.163)$$

$$\prod_{i=1}^k \left(\frac{2}{p_i} \right)_L \stackrel{9.2.11}{=} \prod_{i=1}^k (-1)^{\frac{p_i^2 - 1}{2}} = (-1)^{\sum_{i=1}^k \frac{p_i^2 - 1}{2}} \stackrel{9.3.5(2)}{=} (9.164)$$

$$\stackrel{9.3.5(2)}{=} (-1)^{\sum_{i=1}^k \frac{m^2 - 1}{2}}.$$

د جاکوبي-سومبول لپاره څلورۍ - يا مربع رځپېروختي قانون

ليجنډر- سومبول ته ورته د جاکوبپ-سومبول لپاره هم مربع رځپېروختي قانون) باور لري:

جمله : (مربع رځپېروختي قانون) وي دي $m, n \in \mathbb{N}$ د ناچوره (طاق)
 $ggT(m, n) = 1, m, n$
 (خورا غټ گډ پروېشونۍ) سره، نو با وړ لري:

$\binom{m}{n} \binom{n}{m} = (-1)^{\frac{m-1}{2} \frac{n-1}{2}}$	(9.165)
--	---------

بنسونه: وي دي $m = p_1 \cdots p_k, p_i \in \mathbb{P}$ ، نه په اړينه توگه مختلف،
 له $\text{ggT}(m, n) = 1$ نه په اړينه توگه مختلف. د $n = q_1 \cdots q_s, q_j \in \mathbb{P}$
 امله باور لري: $\text{ggT}(p_i, q_j) = 1, p_i, q_j > 2 \forall i, j$. پسي .

$\binom{n}{m} \stackrel{Def.}{=} \prod_{j=1}^s \binom{m}{q_j}_L = \prod_{i=1}^s \binom{p_1 \cdots p_k}{q_j} \stackrel{9.2.5}{=} \prod_{j=1}^s \left(\prod_{i=1}^k \binom{p_i}{q_j} \right);$	(9.166)
$\binom{n}{m} \stackrel{Def.}{=} \prod_{i=1}^k \binom{n}{p_i}_L = \prod_{i=1}^k \left(\frac{q_1 \cdots q_s}{p_i} \right) \stackrel{9.2.5}{=} \prod_{i=1}^k \left(\prod_{j=1}^s \binom{q_j}{p_i} \right);$	(9.167)

نو:

$\binom{m}{n} \binom{n}{m} =$	
-------------------------------	--

$\prod_{j=1}^s \prod_{i=1}^k \left[\binom{p_i}{q_j} \binom{q_j}{p_i} \right] \stackrel{9.2.13}{=} \prod_{j=1}^s \prod_{i=1}^k \left[(-1)^{\frac{p_i-1}{2} \frac{q_j-1}{2}} \right] =$	(9.168)
$= (-1)^{\left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i-1}{2} \right) \left(\sum_{j=1}^s \frac{q_j-1}{2} \right)}.$	(9.169)

دا چې باور لري:

$\sum_{i=1}^k \frac{p_i - 1}{2} \equiv \frac{m - 1}{2} (2),$	(9.170)
او	
$\sum_{j=1}^s \frac{q_j - 1}{2} \equiv \frac{n - 1}{2} (2)$	

پسې لاس ته راځي

$\left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i - 1}{2} \right) \left(\sum_{j=1}^s \frac{q_j - 1}{2} \right) \stackrel{9.3.5(1)}{=}$	
$\left(\frac{m - 1}{2} + 2t \right) \left(\frac{n - 1}{2} + 2n \right) =$	(9.168)
$= \frac{m - 1}{2} \frac{n - 1}{2} + 2v.$	(9.169)

له دې سره په ټولیزه توګه باور لري:

$$(-1)^{\left(\sum_{i=1}^k \frac{n_i-1}{2}\right)} \left(\sum_{j=1}^s \frac{r_j-1}{2}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \frac{n-1}{2} + 2v} = (-1)^{\frac{m-1}{2} \frac{n-1}{2}}. \quad (9.173)$$

پایله 9.3.8 : $a < 0$ دی، نو

$$\left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{-|a|}{m}\right) = \left(\frac{-1}{m}\right) \left(\frac{a}{m}\right), \quad (9.174)$$

د هغه سره چې $\left(\frac{-1}{m}\right)$ د 9.3.6 له مخې ټاکلی، او $|a| > 0$.

پایله 9.3.9 : (ورته و 9.2.14 ته)

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right) (-1)^{\frac{m-1}{2} \frac{n-1}{2}}, \quad (9.175)$$

نو ترې لاس ته راځي:

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right) \Leftrightarrow$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2} \frac{n-1}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{m-1}{2} \frac{n-1}{2} \text{ جوړه (جفت)} \quad (9.176)$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{2} \vee \frac{n-1}{2} \text{ جوړه} \quad (9.177)$$

جاکوبي-سومبول دا کره کوي، چې ایا a مربع باقي $\text{mod } m$ دی (که جاکوبي-سومبول 1 وي، نو پرېکره نه شته).

بیلګه 9.3.10 :

$$x^2 \equiv -8(15) \pmod{15} \quad \text{۱- ابيور يا حل وړ دی؟}$$

(دا په دې معنا، چې $a = -8$ مربعپاتي $\pmod{15}$ دی؟)

$$m = -8 < 0, n = 15 \notin \mathbb{P}, \text{ggT}(-8, 15) = 1, 15$$

ناجوره له دې لاس ته راځي جاکوبي

$\left(\frac{-8}{15}\right)_J =$	(9.178)
$\left(\frac{-1}{15}\right) \left(\frac{8}{15}\right) \stackrel{9.3.6}{=} (-1) \left(\frac{8}{15}\right) = (-1) \underbrace{\left(\frac{4}{15}\right) \left(\frac{2}{15}\right)}_{=1} \stackrel{9.3.6}{=}$	(9.179)
$\stackrel{9.3.6}{=} (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$	(9.179)

۲- (لرو چې) $\Rightarrow -8$ مربع باقي $\pmod{15}$ نه دی.

$$x^2 \equiv 59(125) \pmod{125} \quad \text{۳- اوبيور يا حل وړ دی؟}$$

$$\text{ggT}(59, 125) = 1, a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$$

، دواړه ناجوره، جاکوبي:

$\left(\frac{59}{125}\right)_J \stackrel{9.3.7}{=}$	
---	--

$\left(\frac{125}{59}\right) \stackrel{Red.}{=} \left(\frac{7}{59}\right) \stackrel{9.3.7}{=} - \left(\frac{59}{7}\right) \stackrel{Red.}{=} - \left(\frac{3}{7}\right) \stackrel{9.3.7}{=} \left(\frac{7}{3}\right) =$	(9.180)
$= \left(\frac{1}{3}\right) = 1 \dots$	(9.180)

وینا نه شته

۴ - مگر (تل کیری): $m = 125 = 5^3$ ، یعنی $p_1 = 5$ ، وشمیره:

$\left(\frac{59}{5}\right)_L = \left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{2^2}{5}\right) = 1$	(9.182)
---	---------

۵ - $59 \stackrel{9.1.5}{\Rightarrow}$ مربع باقي $\text{mod } 125$ دي.

۶ - ایا $x^2 \equiv 15(67)$ اوبیور یا حلور دی؟ (دا په دی معنا، چې $a = 15$ څلوری - یا مربع پاتي $\text{mod } 67$ دی؟)

$$\left(\frac{15}{67}\right) \stackrel{9.3.7}{=} \left(\frac{67}{15}\right) (-1) \stackrel{Red.}{=} (-1) \left(\frac{7}{15}\right) \stackrel{9.3.7}{=} (-1) \left(\frac{15}{7}\right) (-1) \stackrel{Red.}{=} \left(\frac{1}{7}\right) = 1.$$

مگر دا چې $\left(\frac{15}{67}\right)$ یو لیجنډر - سومبول دی، لاس ته رځي: 15 مربع باقي $\text{mod } 67$ دی.

۷ - ایا $x^2 \equiv 67(77)$ اوبیور دی؟

$77 \notin \mathbb{P} \Rightarrow$ لاس ته راځي جاکوبي $77 \notin \mathbb{P} \Rightarrow$ نسبي لومړنی، ناجوره،

$\left(\frac{67}{77}\right) \stackrel{9.3.7}{=} \left(\frac{77}{67}\right) (-1)^{\text{gerade}} = \left(\frac{77}{67}\right) \stackrel{\text{Red.}}{=} \left(\frac{10}{67}\right).$	(9.184)
---	---------

۸ - جوړه دی، $\notin \mathbb{P} \Rightarrow$

نه [9.2.13](#) او نه [9.3.7](#) استعمال وړ د کارونې وړ دی! له دې لاس ته راځي:

په لومړنيو گنونو ټوټه کونه:

$\left(\frac{10}{67}\right)_L = \left(\frac{2}{67}\right) \left(\frac{5}{67}\right) = (-1)(-1) = 1 \dots$	(9.185)
<p style="text-align: right;">وینا نه ده!</p>	
$67 \not\equiv \pm 1(8); \quad \left(\frac{2}{67}\right)_L \stackrel{9.2.12}{=} -1,$ <p style="text-align: center;">ځکه چې</p>	(9.186)
$\left(\frac{5}{67}\right)_L \stackrel{9.2.13}{=} \left(\frac{67}{5}\right) \stackrel{\text{Red.}}{=} \left(\frac{2}{5}\right) \stackrel{9.2.12}{=} -1,$ <p style="text-align: center;">ځکه چې</p>	(9.187)
$5 \not\equiv \pm 1(8).$	

۹ - مگر د پیژند له مخې:

$\left(\frac{67}{77}\right) = \left(\frac{67}{7}\right) \left(\frac{67}{11}\right) = \left(\frac{4}{7}\right) \left(\frac{1}{11}\right) = 1 \cdot 1.$	(9.188)
---	---------

۱۰ - دا چې دواړه (!) لیجنډر - سومبولونه برابر 1 دي، لاس ته راځي، چې 67 مربع باقي mod 77 دی.

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې
شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرېون (دا کتاب په دې څانګه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،د افغانستان روغي او بیا

آبادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينګمن ليکنې چې له برينګمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک
- ۲ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک
- ۳ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک
- ۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - اناليزی ۱

۷ - اناليزي ۲

۸ - کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ - فنکشنل اناليز

۱۲ - وکتور شميرنه

نوري ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زدهکونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه يا ست تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو ويونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زره له کومې (دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيرې.

ګڼونپوهنه

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتګارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريري:

د ګروپونو تيوري

- د بنوونځي لپاره فزيک د برينګمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

	<p>ماخان په اولني نوم ميړي شينواري د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمریز کي د شينواريو هسکه مينه کي دې نړۍ ته سترگي راغړولي.</p> <p>د هسکي ميني د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لېسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پوري (ښوونځي له لومړي ټولگي پيل او د دويم ټولگي څخه گام او پای).</p>
---	---

د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځۍ له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چي هلته يې د شميرپوهني ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دبانډنيو چارو وزارت کي مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پوري په بن کي د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير (صفر نه وو).

له هغي وروسته په جرمني کي سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پوري د د رياضي څانگه کي د پوهني وزارت درسي نساب کي دنده.

ماخان ميړي په ۱۹۷۲ کي له لري د ميرمن ښاپيري سره واده شوی، چي د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د ميرمن ښاپيري سره په ۱۹۶۳ ز ک کي کوزده کړي وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ويانا کي د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چي څانگه او اباسين نوميري. څانگه په المان کي د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه ساپکولوژي لوستلي.

**Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library**