



۳

# شمېر پوهنه

## د ښوونځي لپاره

(رياضي په درې برخو کې)

درېمه برخه



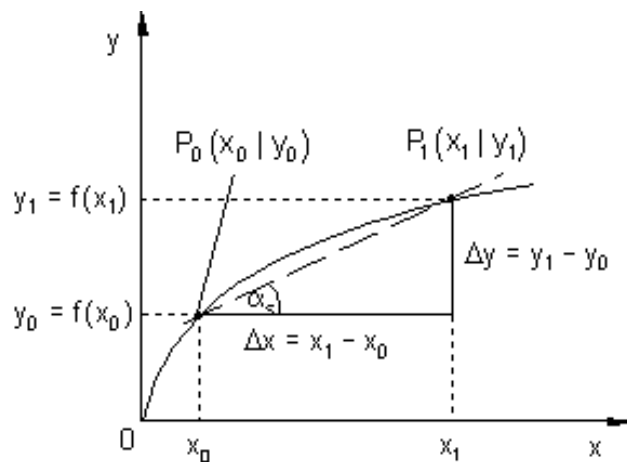
Ketabton.com

ليکونکی:

برينگمن (له برينگمن ن ج څخه)

ژباړی: ډاکتر ماخان (مېړی) شينواری

## شميرپوهنه د بنوونځي لپاره (رياضي په درې برخو کې)



دریمه برخه

لیکونکی: پروفیسر برینکمن (له برینکمن ن ج څخه)

ژباړی: ډاکتر ماخان (میری) شینواری

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت -  
په ما د پوهنې لپاره د لگښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

## کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: شميرپوهنه دښوونځي لپاره

ليکونکي: پروفيسور برينکمن  
ژباړی : ډاکتر ماخان،، ميري،، شينواری

[makhanshinwari@gmail.com](mailto:makhanshinwari@gmail.com)

د خپریدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

۲۰۱۲

چاپ کال

چاپ چاري دانش خپرندويي ټولني تخنيکي خانگه

[WWW.danishpress.com](http://WWW.danishpress.com)

د چاپ حقوق خپرندوي ټولني ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

## د خپرنډوی ټولني يادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولني د علمي، ساينسي او طبي اثارو د خپرولو لړۍ پيل کړې، تراوسه يې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هيواولو ته وړاندې کړي دي.

مور باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په يوه مهمه غني ژبه بدلېدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډميکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بيلابيلو ګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر مور ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحاديې له خوا د ډاکټر ماخان شينواري تراوسه زياتو چاپ شويو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمير پوهني نويو ژباړو او ليکنو او دوه ټولنيزو ليکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساينسي اثارو د خپراوي په لړ کې د يوه مهم ګام په توګه ګڼل کېدای شي او هيله ده، چې د دې برخې مينه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کټه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

## د ژباړې مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي گټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهني توانمندي، مگر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ، د افغانستان کلتوري ودې ټولنه، جرمني، د غرو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوي ټولني په توگه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملگرو او ملگرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د بناغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، بناغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، بناغلي ډاکتر سردار گانه وال، بناغلي ډاکتر مانوکل گانه وال، بناغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، بناغلي دپلوم انجنیر محمد ایوب بیان، همداسې زما د ملگري ارواښاد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي بناغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي، دپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانگي شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن بناپړۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجر و نه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار ۲۰۱۲ ز ک

## نيوليک

دریمه برخه:

الف	د ژباړې سریزه
۱	مشتق
۱	...پیل او بنسټونه
۱	جگینه او تانجنت
۱۲	دفرنشلوېش او مشتق
۶۵	د دفرنشل لارې یا قاعدې
۸۴	د جگو درجو مشتق (ابلايتونگنه)
۸۹	تانجنت او نورمال یا ولاړه
۹۱	د یوې تابع د استعمال بیلگه...
۹۴	په ت ولید کې د مشتق استعمال
۹۷	د الجبري توابعو مشتق
۱۰۳	د مشتق استعمال په طبیعي علومو کې
۱۳۹	ټولگه:
۱۴۱	د سیکانت جگوالي او تانجنت جگوالي
۱۴۵	مونوتوني – یا یو غریزوالي
۱۴۵	د یو غریزوالي خوږونه

- ۱۵۰ افراطي ارزبنتونه
- ۱۵۵ اوړونتيکی او زینتيکی
- ۱۶۴ د گرو يا منخنيو خبرې اترې يا بحث  
نرخشميرنه د مشتق استعمال په حيث
- ۲۹۳ مشقشميرنه د تولگي کار چمتوالي لپاره
- ۳۲۳ اتيگر الشميرنه
- ۳۲۳ پيل راوړني
- ۳۲۵ سطحه شميرنه او بنسټ يا لومړنی تابع
- ۳۲۸ ناتيکلی انتيگرال
- ۳۳۳ د نامعلوم اتيگرال څخه و معلوم امتيگرال ته
- ۳۳۷ د انتيگرېشن پوله بدلون
- ۳۴۴ له دوه گرافونو څخه رابندي سطحې شميرنه
- ۳۵۶ انتيگرال د منځ ا رزبنت په حيث
- ۳۶۰ اناليز ۲
- ۳۶۰ اکسپوننشل توابع او  $e$  - توابع
- ۳۷۸ د اکس توابعو استعمال
- ۳۸۶ محور غوڅتکي او اکس. مساوات
- ۳۸۹ د توان او لوکارېتم توابع
- ۳۹۰ د اکسپوننشل توابعو لپار د حل لاري

- د ۴۰۴ - توابعو مشتق د ضرب او خُنزيري قانون سره
- د ۴۱۶ - تابع انتيگرېشن يا گډونه
- د بدلون سره ټاکلی انتيگرال ۴۱۸
- ناتاکلی انتيگرال ۴۲۶
- د مشتق او انتيگرال ششميرني سره مخامخ کول ۵۵۴
- ناپربکيدنوالی يا متماديت، .... ۵۶۷
- ناپربکيدنوالی يا متماديت، .... ۵۶۷
- مشتقوړوالی(رابيليدوړوالی) ۵۶۹
- انتیگرالوړوالی: ۵۷۲
- د ټاکلو انتيگرالونو حل د بدلون له لارې: ۵۷۶
- توتېه انتيگرالونه ( يا دضربونوانتيگرال) ۵۷۸

.  
.  
.  
.  
.  
.  
.  
.  
.



## الف

---

### د ژباړې سرريزه

گرانو هيوادوالو او د شميرپوهنې مينه والو!

دا څو كاله د مخه د ځنو شميرپوهنيزو كلمو په لټه كې د برينكمن د ن ج سره مخامخ شوم. دا چې دې ليكنې بڼه خونديونه يا متن درلود او زيات تمرينونه د حل سره، نو ما وبتيله، چې دا به پښتو ته اړوم. دا يوه ډېره بڼه ليكنه ده، چې زده كوونكي بنوونكي او داسې لږ د شميرپوهنې سره بلد ميندې او پلرونه ترې گټه اخستلی شي. په دې ليكنه كې هر څه خورا بڼه روښانه شوي دي او په مختلفو بيلگو سمبال دي د حلونو يا اوبيونو سره، چې لوستنه يې هر د شميرپوهنې مينه وال لپاره د پيرځويني وړ بولم.

ككتاب په درې برخو كې چاپيري، چې هره برخه يې يوه خپلواکه او د يوې ځانگړې برخې خونديونه لري. زه په دې باور لرم، چې د شميرپوهنې مينه وال دا كار داسې لږ په غور وگوري، نو زر به ورسره مينه پيدا كړي.

دا كتابونه هم د هغو ۲۵ رياضي كتابونو لړۍ ده، چې ما چاپ ته چمتو كړي دي، خو نه پوهيرم، چې څو دا نور به ترې كله چاپ شي. كه څه پاتې شو، نو هغه به د دې كتابونو سره ن ج ته پورته كړم.

گرانو لوستونكو!

دا زموږ د هيواد اړتيا لپاره په پوهنيزه اړخ كې په سره تيره اوبه تويول دي. دا كتابونو، چې كوم چې چاپيري د زر دانو يا پنځه سوه څخه به نه اوږي، نو د يوه پنځوس ميليونه كمو زيات ولس لپاره زردا نې چې چاپيري، دا خو اصلاً په شمير كې نه راځي، خو دا به په خروار گڼو.

په لومړي كتاببرخه كې ځمكچپوهنه يا هندسه ورسره مل ده او په دويمه كتاببرخه كې مي وكتور شميرنه ورسره زياته كړي.

## ب

دریمه کتاببرخه مشتق او انتیگرال ته ځانگړې شوي.

گرانو لوستونکو!

د برینکمن د لیکنو لړۍ د شمیرپوهنې په څانگه کې د بنوونځیو لپاره نوره هم پسي غزېدلې، چې ما هغه د گرانو لوستونکو لپاره رازباړلي.

دا احصایه یا ستاتیستک دی او د احتمالوالي شمیرنه ده. دا دواړه کتابونه، چې دلته یې تاسو ته ژباړه وړاندې کيږي، هم په زیاتو تمرینونو، اود دوی په اوبیونو یا حلونو سره سمبال ده.

زما په اند، داسې لیکنه په پښتو کې د لومړي ځل لپاره کيږي، چې نومه ونې به دلته هم څه ناڅه گرانو لوستونکو ته نابلدې وي، خو پرې پوهیدنه شونې ده. هر څه په روښانه توگه ورکړل شوي.

گرانو هیوادوالو!

داچې ما یوځای یا نوره هم ښه په یوه وار ډېر کار را ونیوه، نو هر ورو به ناتیکاوي زما له خوا په کې رامنځ ته شوي وي، خو دا به داسې ناتیکاوي نه وي، چې شمیرپوهنیزې ستونځې رامنځ ته کړي. له دې امله له ستاسو څخه زما په ستونځو پوهیدلو له امله زیاته مننه.

په دې هیله، چې زما په غوښتنو او ستونځو به و پوهیږي په دې لیکنو او ژباړه کې ما ته هیڅ مادي گټه نه شته. دا دې په ما زموږ د بي وزلي ولس د ډېر مصرف(لگښت) په هکله د یوې کوچنۍ پیرزوينې په حیث وړاندې وي

**مننه:**

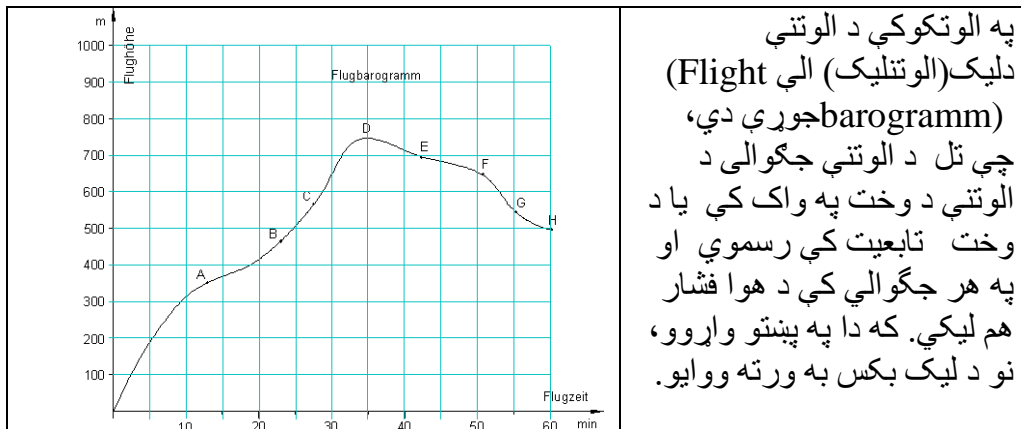
له هر څه د مخه د دې لکچرونو لیکنو لیکونکو شمیرپوهانو یعنی ستر پروفیسور بریکمن څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه بهیې زموږ ولس هم گټه پورته کړي.

## دفرنخیالشمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

ننوتنه او بنستونه

جگیدنه او تانجنت:

په یوه ټکي کې د تابع د گراف میل (جگیدنه)



په پورته گراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونو جگوالی بنوول شوی.

-ایا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جگوالی زیات دی؟  
 -ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جگوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د  
 ارزښت له مخې جگوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

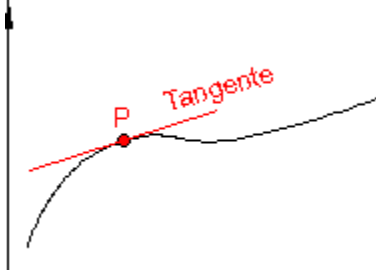
-ایا د یوې کرښې او منحنی جگوالی هر چیرته توپیر لري او که نه ؟

لاس ته راورنه :

۱ - گورو، چې په یوه منحنی کې د گراف جگوالی هر چیرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په گوته کړو، چې هلته میل څیرل کیږي.

۲ - په لاندې بیلگه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده) کرښې میل هر چیرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جگوالی څخه غږیږو.

برښي چې لاندې پیژند یا تعریف هوښیارانه یا عاقلانه دی:

	<p>پیژند ( تعریف ):</p> <p>د یوې تابع گراف میل (جگوالی) د P په یوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنټ د میل د گراف سره برابر دی</p>
--	--

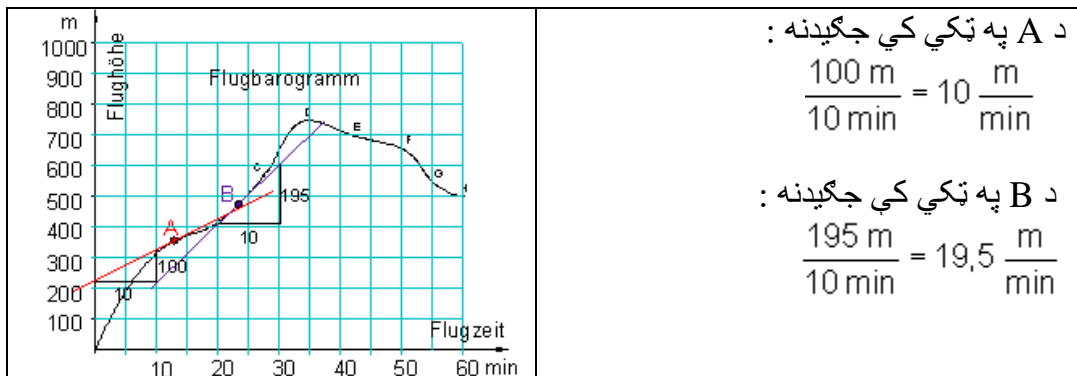
لیدل کیږي چې دلته یو تانجنټ د کرښې تعریف لري، چې د لمستکي (مماس) په چاپیریال کې د امکاناتو سره سم د مماس ټکي ته ښه ور نږدې کیږي.

ددې پیژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه گراف میل (جگیدنه) د یوې کرښې میل دی.

د گراف د جگیدني ټاکلو لپاره د A او B په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنټ) انځوروو، چې گراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.

د میل یا جگیدني مثلث په مرسته جگیدنه په شپږل یا ساده ډول شمیرل کیدی شي:

### ۳ – دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رایبیلدنه)



زموږ د بیلګې لپاره میل یا جگیدنه په یوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي (سلاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

د A په ټکي کې : د الوتې وخت نږدې  $12,5 \text{ min}$  ، د میل یا جگیدني چټکتیا (سرعت) نږدې  $10 \frac{\text{m}}{\text{min}}$  ده

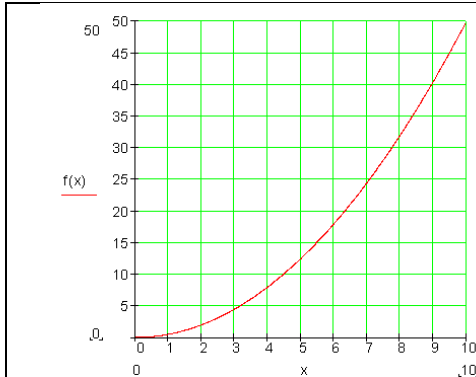
د B په ټکي کې : د الوتې وخت نږدې  $23,0 \text{ min}$  ، د جگیدني چټکتیا (سرعت) نږدې  $19,5 \frac{\text{m}}{\text{min}}$  ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخې تعریف شوی ، چې د لمستکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د گراف میل د A او B په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی یا بسیا نه کوي.

### په یوه ټکي کې د تابع دگراف میل (جگیدنه):

معلومه ده ، چې یو ریلګاډی د تمخای څخه له خوزېدو (حرکت) وروسته خپله چټکتیا (سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي. وهلي لار (د تمخای څخه لږوالی) تل زیاتېږي. د تمخای څخه لږوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې ده .

دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)



دا عمل د لاندې تابع مساوات له لارې لیکلی شو.

دلته د  $x$  وخت د ثانیه او د  $s$  لار د متر لپاره لیکو  $s = f(x) = 0,5x^2$

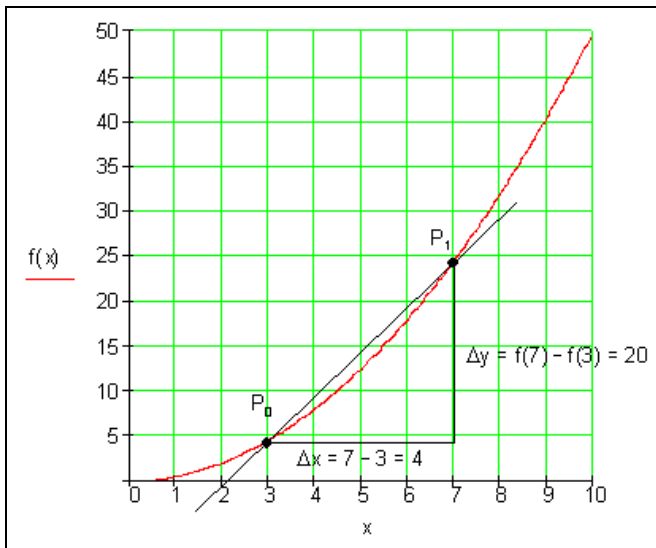
مخامخ : د تابع گراف

اوس باید منځنی ارزښت (منځنی جگوالی) **Average rate of change** د ۳-مې او ۷-مې ثانیه ترمنځ وشمیرل شي.

ددې لپاره اړونده سیکانټ انځور او د هغې جگوالی شمیرو.

اوس دې د تغیر ارزښت (منځنی جگوالی) د ۳-مې او ۷-مې ثانیه ترمنځ وشمیرل شي.

په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا جگوالی څومره دی؟



د منځنی جگوالی داسې مخ ته بوزی، چې د  $P_0$  او  $P_1$  ترمنځ واټن تل کوچنی شي، داسې چې  $P_1$  د  $P_0$  په لور وخوريزي.

د ۳-می او ۷-می دقیقې ترمنځ منځنی تغیر ارزښت (جگوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{24,5 - 4,5}{7 - 3} = \frac{20}{4} = 5$$

د ۳-می او ۴-می دقیقې ترمنځ منځنی تغیر ارزښت (منځنی جگوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{8 - 4,5}{4 - 3} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنزدې کیدني شمیرنه

Intervall $[3; x]$	$[3; 4]$	$[3; 3,1]$	$[3; 3,01]$	$[3; 3,001]$
$\Delta x = x - 3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x) - f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په گوته کوي، چې که ټکی  $P_1$  د ټکي  $P_0$  په لور وخورېږي یا ورنزدې شي، نو د تغیر ارزښت (جگیدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنزدې کیږي.

موږ په دې توگه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیر ارزښت (لحظوي جگیدني) ته تل ورنږدې کیږي.

که موږ فیزیکی لویي (واحدونه یا یوونونه) په خپله بیلگه کې وکاروو، نو د تغیر ارزښت (جگوالی) لپاره  $m/s$  باور لري. دا د چټکتیا لپاره یوون (واحد) دی

دا په دې مانا دی، چې د لار-وخت دیاگرام چټکتیا (سرعت) په گوته کوي.

## لحظوي یا سترگو رپ تغیر ارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تگلار

د  $f(x) = 0,5x^2$  لپاره په اینتروال  $[3; \Delta x]$  کې منځنی تغیر ارزښت (جگوالی)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3 + \Delta x)^2 - 0,5 \cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5[9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2] - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} \\ &= \frac{0,5 \cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3 + 0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0,5\Delta x \end{aligned}$$

دا  $3 + 0,5\Delta x$  د منځنی تغیر ارزښت دی

که اوس  $\Delta x$  تل کوچنی شي، مورن وایو که  $\Delta x$  د صفر په لور وهڅیږي یا لارشي یعنی ( $\Delta x \rightarrow 0$ )، نو د منځنی تغیر ارزښت  $3 + 0,5\Delta x$  د 3 په لور ځي یا هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترگو رپ) تغیر ارزښت دی د  $x_0$  په ځای کې.

د دې لپاره لیکو: د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور لري:  $3 + 0,5\Delta x \rightarrow 3$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 + 0,5\Delta x) = 3 \quad \text{یا}$$

پوښتنې

1 - کیمیاوي تعامل د مختلفې چټکتیا سره صورت نیسي. د بیلگی به توگه که که ځینک د مالگی به تیزابو کی وچول شی، نو هایدروجن تری تری راوځي یا رامنح ته کیریز لاندې جدول د هایدروجن سټ یا مقدار ورکوي، چې د وخت په واک کې دی یا تابع دي.

وخت په S	2	4	6	8	10	12
د اوبو سټ یا مقدار په ملي لیتر ml	21	30,5	35,5	40,5	42,5	43



الف- د دې لپاره یو دیاگرام وکارئ.

ب - د هایدروجن تولید په هکله څه وینا کیدای شی؟

پ - په لاندې انټروالونو کې د تغیر ارزښت وشمیرئ.

$$[2; 4]; [4; 8]; [8; 12]$$

دویم - د  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$  تغیر ارزښت په انټروالونو

$$[1; 1.5]; [-4; -2.5]; [2; t]$$

د  $t \neq 2; [3; 3+h]$  او  $h > 0$  سره وشمیرئ.

دریم - تابع  $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$  ورکړ شوی

الف - د  $f(x)$  منحنی تغیر ارزښت په انټروال  $I = [2; 5]$  وشمیرئ.

ب - د  $s(x)$  سیکانټ مساوات په  $P(2 | f(2))$  او  $Q(5 | f(5))$  ټکو کې وټاکئ.

پ - د  $f(x)$  لحضوي تغیر ارزښت د  $x = 2$  په ځای کې وشمیرئ.

ت - د  $f(x)$  او  $s(x)$  گرافونه په وضعیه قیمتسیستم کې وکارئ

څلورم - یو جسم په ازاده غورځولو کې داسې حرکت کوي، چې په  $t$  وخت کې  $S(t) = 5t^2$  لار وهي ( $S$  په متر او  $t$  دقیقه).

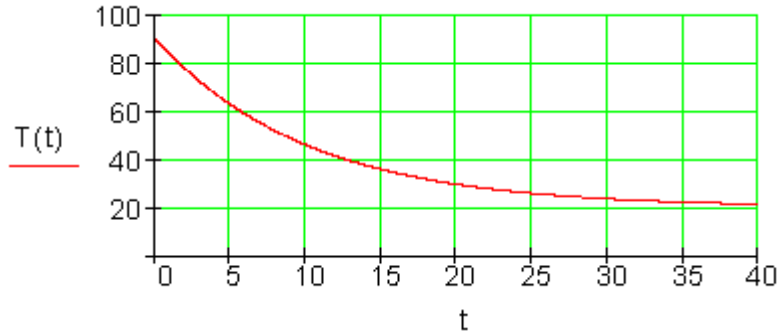
پنځم - یو تولید له خپل جمتوالي وخت څخه وروسته سریري.

ټمپراتور (تودوخې)  $T(t) = 20 + 70e^{-0.1t}; t \geq 0$  ( $t$  په دقیقو،  $T(t)$  په څلزیوس درجې)

د سریدو مخته تگ وشمیرئ.

دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

څیره د تابع  $T(t)$  گراف بنایي.



الف - له کوم حرارت څخه مخ ته ځو؟

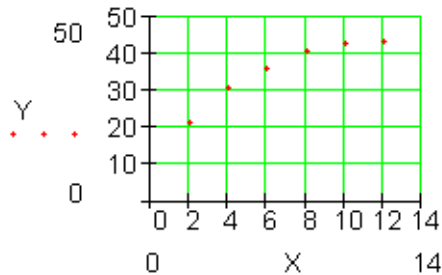
ب - فیرینی کوم حرارت لري، که یخه شي؟

پ - په کوم وخت کي چټکتیا(سرعت) ، د هغې سره چي فیرینی یخیري ، خورا لویه ده.

ت - په لومړیو لسو دقیقو کي د منځني تودوخې تغیر وشمیرئ.

مفصل حلونه

دلومړي مفصل حل الف -



ب - د هایدروجن تولید د وخت به واحد کی تل کمیري پ - تغیر اربښت  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$[2; 4]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30,5 - 21}{4 - 2} = 4,75$$

$$[4; 8]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{40,5 - 30,5}{8 - 4} = 2,5$$

$$[8; 12]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{43 - 40,5}{12 - 9} = 0,625$$

	[2; 4]	[4; 8]	[8; 12]
$\frac{m}{s}$	4,75	2,5	0,625

دویم - د منځنی تغیر اربښت  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$   $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$

$$[1; 1,5]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1,5) - f(1)}{1,5 - 1} = \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{-\frac{3}{8}}}$$

$$[-4; -2,5]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-2,5) - f(-4)}{-2,5 - (-4)} = \frac{\frac{81}{16} - 9}{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{-\frac{21}{8}}}$$

$$[2; t]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2} = \frac{\frac{1}{4}t^2 - t + 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot 2^2 - 2 + 1\right)}{t - 2} = \frac{\frac{1}{4}t^2 - t + 1}{t - 2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(t^2 - 4t + 4)}{t - 2} = \frac{\frac{1}{4}(t - 2)^2}{t - 2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}(t - 2) \text{ für } t \neq 2}}$$

$$[3; 3+h]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+h) - f(3)}{3+h-3} = \frac{\frac{1}{4}(3+h)^2 - (3+h) + 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot 3^2 - 3 + 1\right)}{h}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(9+6h+h^2) - 3 - h + 1 - \frac{9}{4} + 3 - 1}{h} = \frac{\frac{1}{4}h + \frac{1}{4}h^2}{h} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h}}$$

دریم: الف \_  $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$  منځنی تغیر ارزښت به  $[2; 5]$  کې دی

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2}$$

$$f(5) = \frac{3}{4} \cdot 25 - 3 \cdot 5 = 3,75 \quad f(2) = \frac{3}{4} \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -3 \quad \Delta x = 5 - 2 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3,75 - (-3)}{3} = \frac{6,75}{3} = \underline{\underline{2,25}}$$

ب - د  $s(x)$  سیکانت مساوات چې له  $P$  او  $Q$  ټکو تیریري، ټیک همداسې شمیرل کیري، لکه کرښه چې له دوه ټکو تیریري.

$P(2; -3)$  لاس ته راځي د  $a$  له امله

$Q(5; 3,75)$  لاس ته راځي د  $a$  له امله

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = 2,25 : \quad s(x) = a_1 \cdot x + a_0$$

سره د  $a$  پوښتنبرخه هم

وگورئ:

$$\Rightarrow s(x) = 2,25x + a_0$$

$$P(2 | -3) : s(2) = -3 \Leftrightarrow 2,25 \cdot 2 + a_0 = -3 \Leftrightarrow a_0 = -7,5$$

$$\Rightarrow s(x) = 2,25x - 7,5$$

د تانجنت جگوالی

پ- لخصوي تغیر ارزښت د  $x = 2$  په ځای کې:

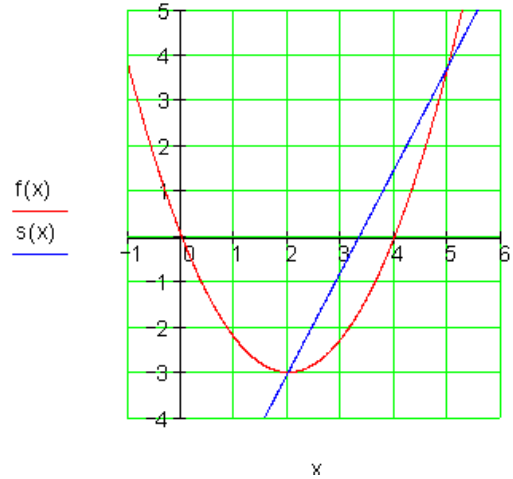
۱۱

- دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{3}{4}(2+\Delta x)^2 - 3(2+\Delta x) + 3}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{3}{4}[4+4\Delta x+(\Delta x)^2] - 6 - 3\Delta x + 3}{\Delta x} = \frac{3+3\Delta x + \frac{3}{4}(\Delta x)^2 - 6 - 3\Delta x + 3}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{3}{4}(\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{3}{4}\Delta x\end{aligned}$$

منحنی تغیر ارزبنت په انتروال  $[2; \Delta x]$  کی.

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ لپاره دی: } \frac{3}{4}\Delta x \rightarrow 0$$

د  $f(x)$  لحضوي تغیر ارزبنت د  $x = 2$  په ځای کې 0 دی

ت-

څلورم - لحضوي جټکتیا یا سرعت د لحضوي تغیر ارزبنت سره په یوه معنا دی.

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره صدق کوي:  $10 + 5\Delta x \rightarrow 10$

$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2 + \Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره صدق کوي.  $20 + 5\Delta x \rightarrow 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3 + \Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره صدق کوي.  $30 + 5\Delta x \rightarrow 30$

پنځم - الف- پيلتودوخي کيدی شي له  $90^\circ\text{C}$  گراف څخه ولوستل شي.

ب- تابع ارزښت اسپيتوتیکي د ارزښت  $20^\circ\text{C}$  په لور هڅيري يا ځي.

پ-د سریدني چټکتيا په پيل کي خ ورا لويه وي.

$$[0; 10]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{T(10) - T(0)}{10 - 0} \quad \text{ت-}$$

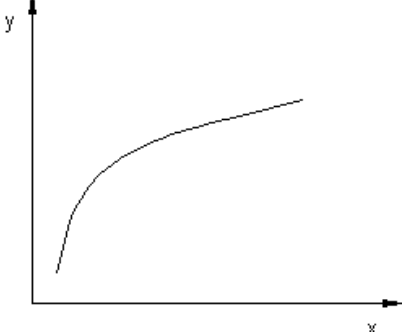
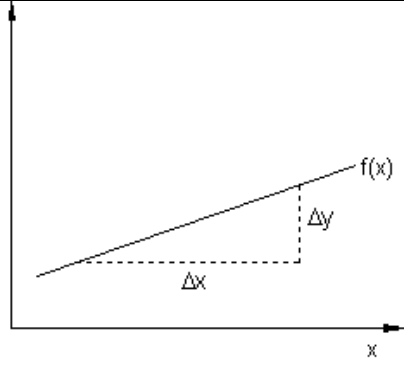
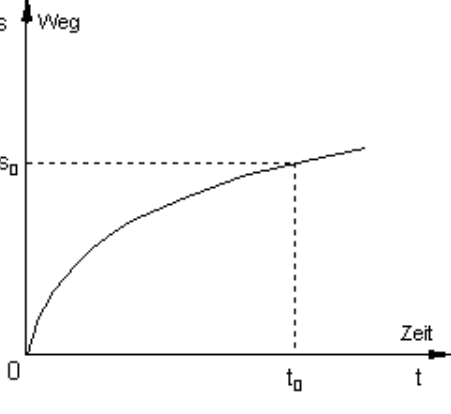
$$\text{د سره } T(10) = 20 + 70 \cdot e^{-0,1 \cdot 10} \approx 45,75 \text{ und } T(0) = 20 + 70 \cdot \frac{e^{-0,1 \cdot 0}}{1} = 90$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \underline{\underline{-4,425}} \quad \text{کيري:}$$

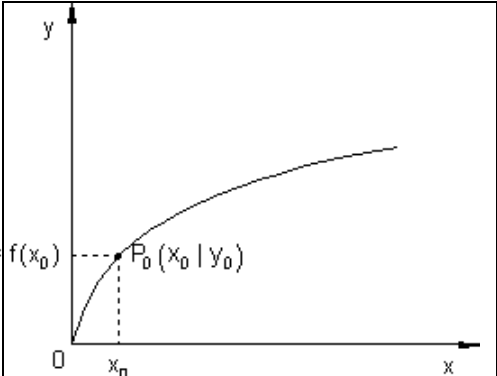
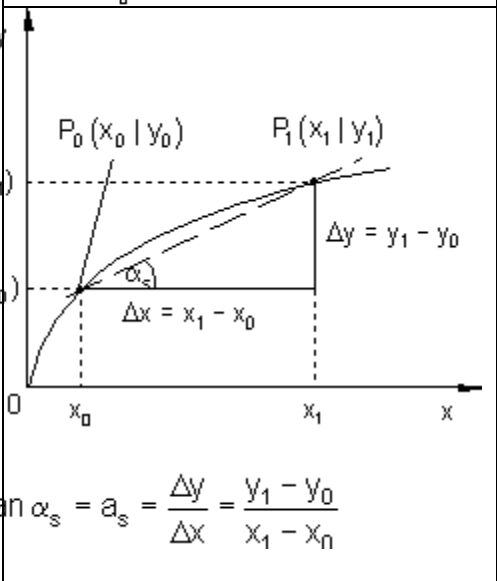
کمیزه يا منفي مخنځبنه په دې معنا ده، چې تغیر قیمت منفي دی، د فیریني تودوخي کميري.

**کمبنت وپش (تفاضلوپش) او مشتق يا رابيليدنه**

**د غوڅووني (تقاطع) جگوالي څخه د تانجت جگوالي ته**

	<p>یو تابع <math>y = f(x)</math> او اړونده گراف دې ورکړ شوی وي.</p> <p>که د تابع جگیدني حالت په پام کې ونیسو، نو گورو چې د تابع جگیدنه په نږدې ټولو ټکو کې توپیر لري.</p>
	<p>یوه ثابت جگیدنه، لکه په کرښیز یا لاینیز تابع <math>f(x) = a_1x + a_0</math> کې د</p> $a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{konstant}$
	<p>په زیاتو وختونو اړینه ده، چې د تغیر حالت (د جگیدني حالت) کې د تابع د تلني حالت وڅېړو.</p> <p>نو له دې امله لحظوی چټکتیا (همغه وختیزه - یا سملاسي) <math>v(t_0)</math> په لار- وخت دیاگرام کې وڅېړو.</p> <p>د مشتق شمېرنې په مرسته دا پرابلم حل کېدی شي.</p>
$t_0 \hat{=}$ $s_0 \hat{=}$	<p>په پام کې نیولی سترگو رپ تر دې سترگو رپ پورې وهلي لار</p>

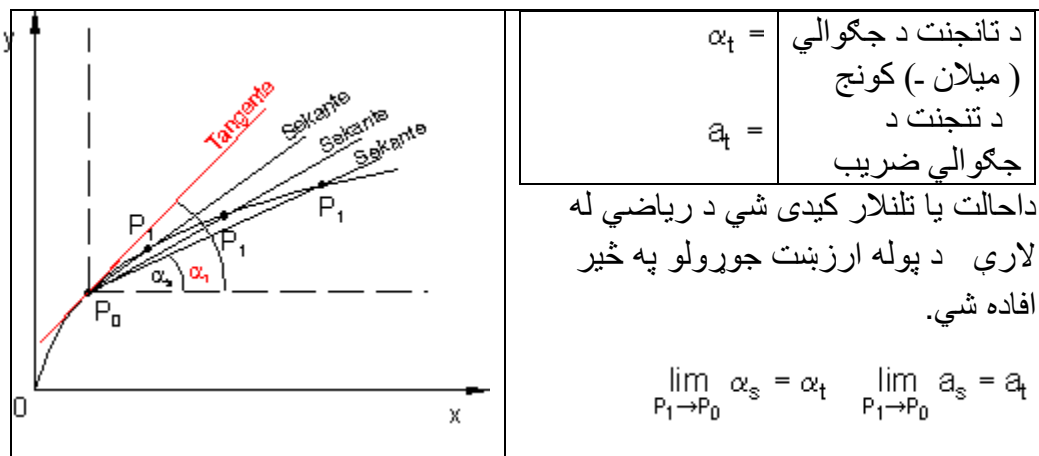
د یوه تابع د جگیدني ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې **differenzieren** د مشتق نیونه بلل کېږي.

	<p>یو تابع <math>y = f(x)</math> او د هغه گراف دې ورکړ شوی. په ټکي <math>P_0(x_0   y_0)</math> کي ورکړ شوی وي. ددې جگوالی پیدا کړی شي.</p>				
 $\tan \alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$	<p>ددې پرابلم د حل لپاره داسې مخ ته خو، چې لومړی جگوالی په نږدې توگه (تقریبي) پیدا کوو.</p> <p>ددې لپاره یو بل ټکی <math>P_1(x_1   y_1)</math> د <math>P_0</math> ټکي په نږدې کي ټاکو.</p> <p>کربنه، چې دواړه ټکي سره تړي، یعنی سیکانت، یو جگوالی ښایي، چې د ټکو <math>P_1</math> او <math>P_0</math> ترمنځ د تابع،، منځنی جگوالی،، په گوته کوي.</p> <p>دا د جگوالیمثلث له لارې ټاکل کيږي.</p>				
<table border="1" data-bbox="205 1275 696 1373"> <tbody> <tr> <td><math>\alpha_s \triangleq</math></td> <td>جگېدو کونج</td> </tr> <tr> <td><math>a_s \triangleq</math></td> <td>جگېدو ضریب</td> </tr> </tbody> </table>	$\alpha_s \triangleq$	جگېدو کونج	$a_s \triangleq$	جگېدو ضریب	
$\alpha_s \triangleq$	جگېدو کونج				
$a_s \triangleq$	جگېدو ضریب				

که ټکی  $P_1$  د ټکي  $P_0$  په نږدې کي وټاکو یا ځای په ځای کړو، نو دا په ټکي  $P_0$  کي د تابع دنوي سیکانت جگوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی  $P_1$  تل و ټکي  $P_0$  ته ورنږدې کړو، نو د پولي حالت په څېر یوه کربنه منځ ته راځي، چې د تابع گراف په ټکي  $P_0$  کي لمسوي.

د تانجنت جگېدنه په ټکي  $P_0$  کي ټیک د تابع د گراف جگېدنه په ټکي  $P_0$  کي ښایي.





## کمبنتویش (تفاضلوپش Difference quotient) او مشتق

### د سیکانت جگیدنه (منځی تغیر ارزښت)

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د  $x$  لپاره د مساوات بنی خوا ځای په ځای کوو

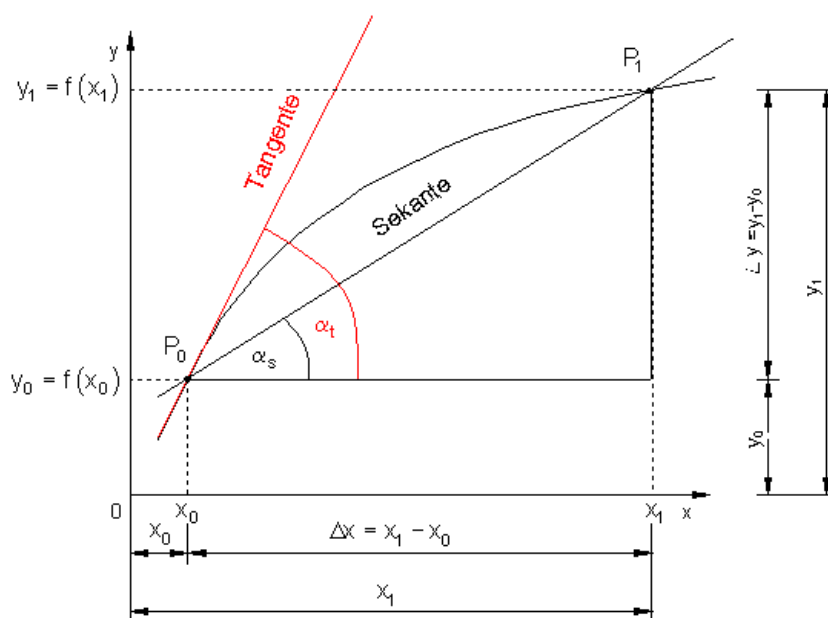
$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د تنجنت جگیدنی سره د پوله ارزښت (حد) له لاری لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي - دسترگو رپ تغیر ارزښت دی

$$a_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \text{یا لند}$$



په ورته توگه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څیرني لاندې نیسو:

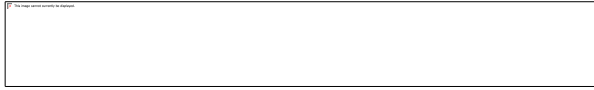
د یوې کرښې میل یا جگیدنه بی له مشتق نیوني ټاکلکیدی شي.  
کرښه  $y = f(x) = mx + a$  لرو.

د دې کرښې د جگیدني فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پیژند (تعریف):

دفرنخیالوېش (کمېنتوېش)



د  $x_0$  په ځای کې د تابع  $f(x)$  مشتق یا رابیلیدنه بلل کیږي

تعریف (پیژند):

د تابع لومړی مشتق یا رابیلیدنه د  $x_0$  په ځای کې د تانجنت جگیدنه ورکوي، چې د تابع گراف یې په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  کې لمسوي او له دې سره غبرگ د تابع د گراف جگیدنه ده په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  کې. دا سری د تابع جگیدنه هم بولي.

تانجنت جگیدنه په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  کې



د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق یعنی څه؟

ددې د روبښانه ونې لپاره د لاندې بیلگې څخه کار اخلو

بیلگه:

تابع  $y = f(x) = x^2$  دې ورکړ شوي وي.

غواریو د  $x = x_0$  په خای کې او په خانگری توگه د  $x_0 = 2$  په خای کې د هر څه لومړی کمبنتویش (د تفاضل وېش) پیدا کوو.

$x = x_0 :$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$
---	---

اوس د لیمیت د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو  $f'(x_0) = 2x_0$  لرو او د  $x_0 = 2$  لپاره  $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$  باور لري.

د  $x_0 = 2$  په خای کې د تابع  $y = f(x) = x^2$  لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د  $x_0 = 2$  په خای کې میل یاجگوالی 4 لري. (لاندې تکرار شوی)

اوس د لیمیت د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

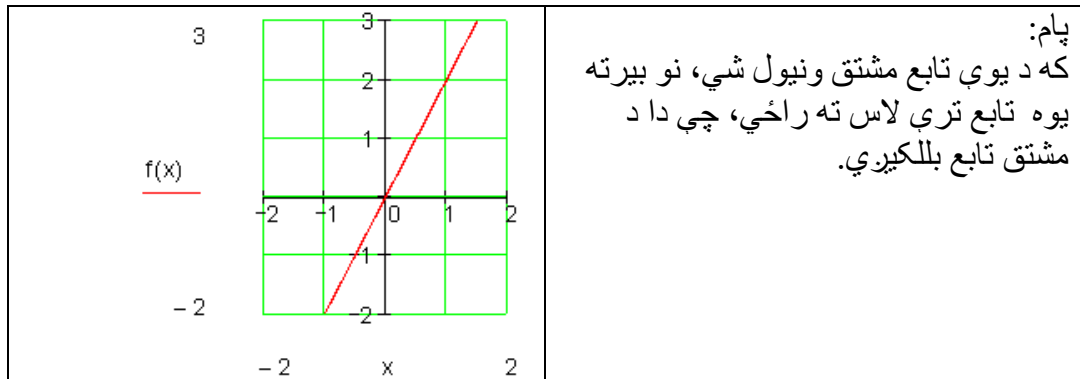
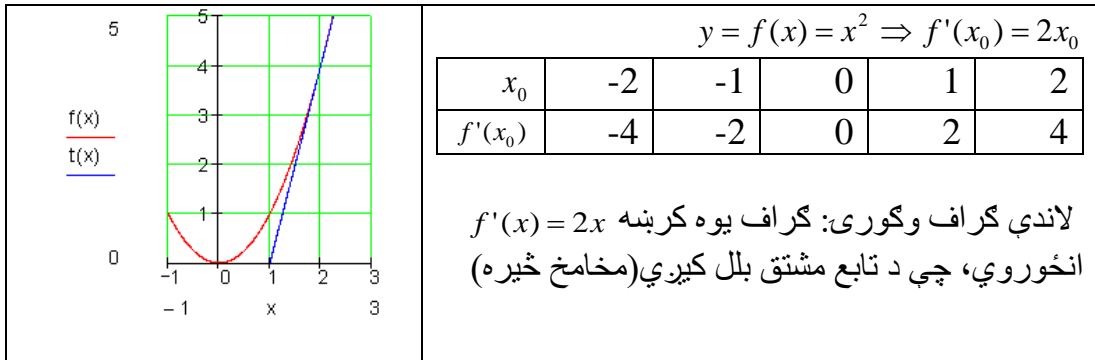
نو  $f'(x_0) = 2x_0$  لرو او د  $x_0 = 2$  لپاره  $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$  باور لري.

د  $x_0 = 2$  په خای کې د تابع  $y = f(x) = x^2$  لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د  $x_0 = 2$  په خای کې میل یاجگوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:

پایله یا لاس ته راوړنه یې کیدی شي، د تابع د گراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د  $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2 | 4)$  په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جگیدنه لاس ته راوړو.

لکه پورته بېلگه کې:  $y = f(x) = x^2$  په هر خوښه ځای  $x_0$  کې تابع پیدا کوو:



د مشتق تابع:

د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کيږي.

بیلگه:

د  $f(x) = x^3$  تابع دې ورکړ شوی دی.

فعالیت: گران لوستونکي دې د  $f(x) = x^3$  تابع او د تابع د مشتق گراف وروسته له حله رسم کړي.

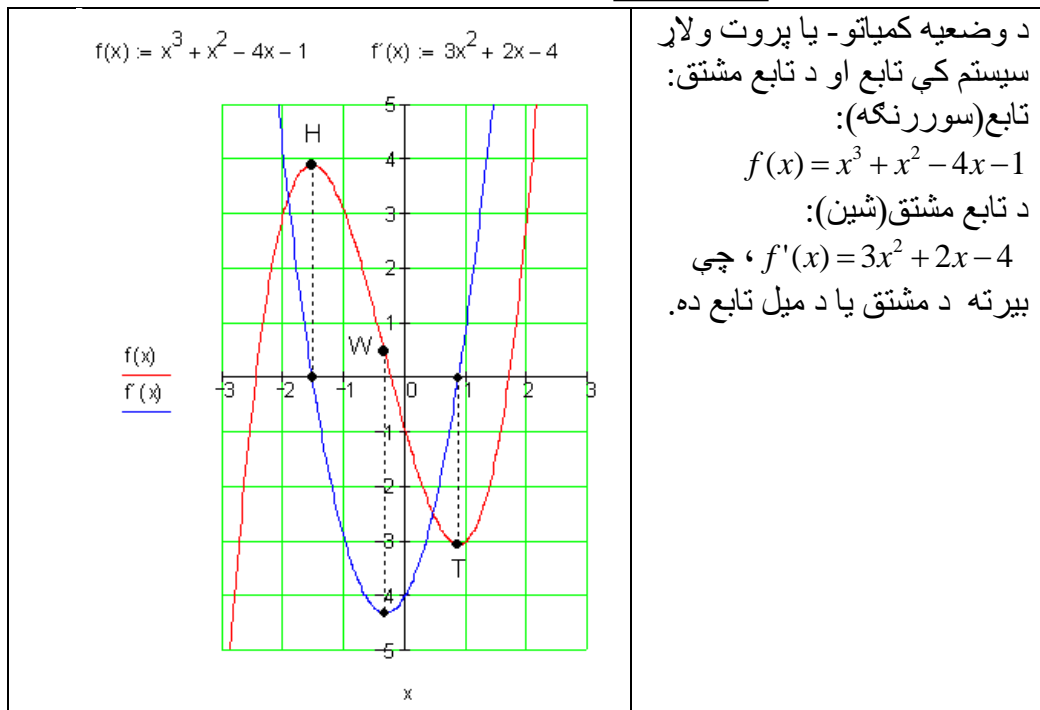
مورن غواړو په  $x_0$  ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

نو  $f'(x_0) = 3x_0^2$  د تابع  $f(x) = x^3$  مشتق دی په خای یا تکی  $x_0$  کې.

د مشتق تابع داسې ده:  $f'(x_0) = 3x_0^2$



$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ورکر شوي تابع}$$

غوښتونۍ: د  $x_0$  په ځای کې د مشتق تابع

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{x_0}{x_0(x_0 + \Delta x)} - \frac{(x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-\Delta x}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= -\frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \right) = -\frac{1}{x_0^2}$$

نو  $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$  د  $x_0$  په ځای کې مشتق دی

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{د مشتق تابع ده:}$$

بېلگه ۴: یوه تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  دې ورکر شوي وي.

د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق پیدا کړی او د مشتق تابع.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \end{aligned} \right.$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو  $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$  د  $x_0$  په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  دی.

د  $f(x) = x^q$  ډول توابعو مشتق د  $q \in \mathbb{Q}$  سره.

د شمیرني په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f'(x) = 2 \cdot x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -x^{-2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$



که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو کومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري:

## د توان قانون بی له بنوونی

لومړی: زاړه ضریبونه د ضریب یا فاکتور په حیث د  $x$  کین لور (په غربي ادبیاتو کې ورته وایي: ترمخ) ته ولیکي

دویم: نوی اکسپوننت هغه زور اکسپوننت دی، چې ۱ ترې کم شوی وي.

بیلگه:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

مور اوس د څو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیرني لاندې نیسو.

بیلگه ۱:

د یوې ثابتې مشتق:

مور دالاندې تابع لرو، چې ارزښت یې یو ثابت دی

$$y = f(x) = c = \text{Const}$$

نو د هر  $x_0$  ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

بیلگه ۲:

یوه  $f(x)=x$  خطي (کرنیزه) تابع لرو.د  $x_0$  په خای کې غوارو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} & \Rightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

نو  $f'(x_0)=1$  د  $x_0$  په خای کې د تابع مشتق دی او  $f'(x_0)=1$  د مشتق تابع ده یعنی یوه ثابتته ده.

بیلگه ۳:

د  $y=f(x)=c \cdot u(x)$  ډوله تابع مشتق د  $c$  ثابتي سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتي سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د (ثابتي  $c$ ) سره ضرب شوی وي. یعنی

له  $y=f(x)=c \cdot u(x)$  څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

ثبوت:

$f(x_0) = c u(x_0)$ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot u(x_0 + \Delta x) - c \cdot u(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \cdot \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} c}_c \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \underline{\underline{c \cdot u'(x_0)}}$
---	---

بیلکه :

$$f(x) = 3x^4 \quad c = 3 \quad u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3$$

$$f'(x) = c \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$$

پیژند (تعریف): دفرنخیاالویش

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$$

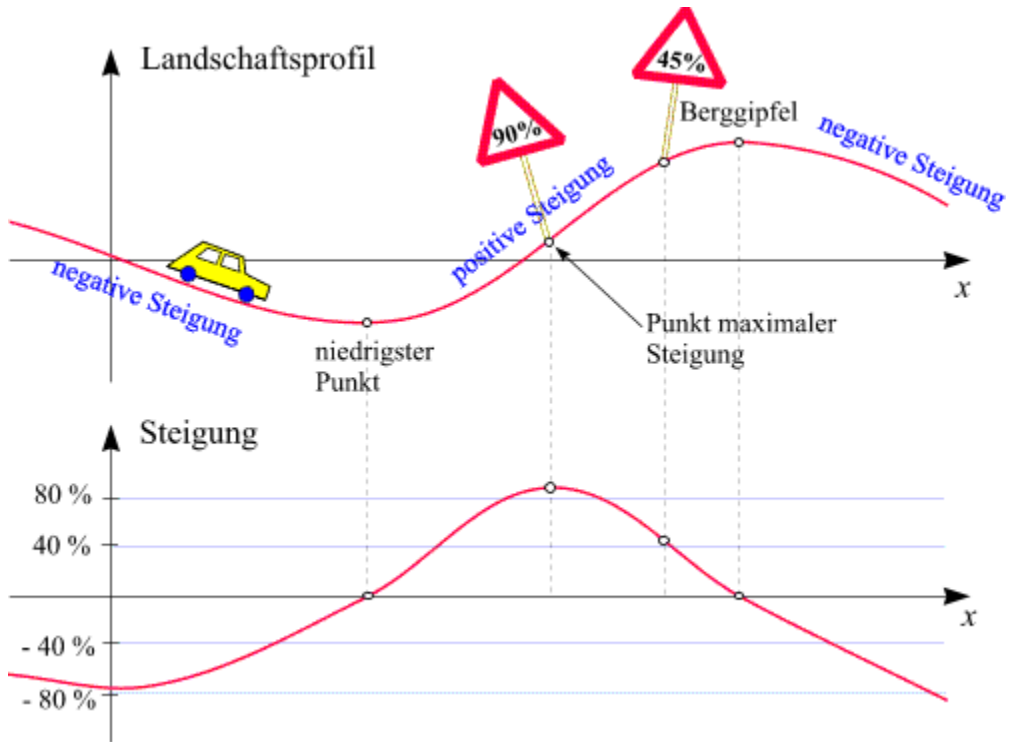
## په بیدیا کی جگوالی

د تابع گراف د سرک په څیر په فکر کی راولو، چې په بیدیا کی جگ او تیتیری یا کبته پورته ځغلی، نو په بنه توگه یې رسمولی شو، چې د گراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کی راځي:

په لاندې څیره کی د لغاتونو په ترتیب ژباړه: د بیدیا جوړښت، منفي یا کمیزه جگیدنه، خورا تیت ټکی، زیاتیزه یا مثبت جگیدنه، د خورا جگي جگیدني ټکی، د غره څوکه، منفي جگیدنه.

پسي لاندې څیره کی: جگیدنه

د سرک کښته یا لاندې لور ته د ځانگړي دیاگرام سره د سرک جگیدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې یوه دویمه منحنی ورکوي.



دیاگرامونه په کره توره وگورئ او وڅېړئ، چې د دویمې منحنی خویونه د لومړي منحنی له خویونو را برسیره کړی.

چیرته چې سرک خورا تیبټ ټکی لري، هلته د جگیدني ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځایه تیرېږي په افقي ټا پراته ټول ځغلي او په همدې توره که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.

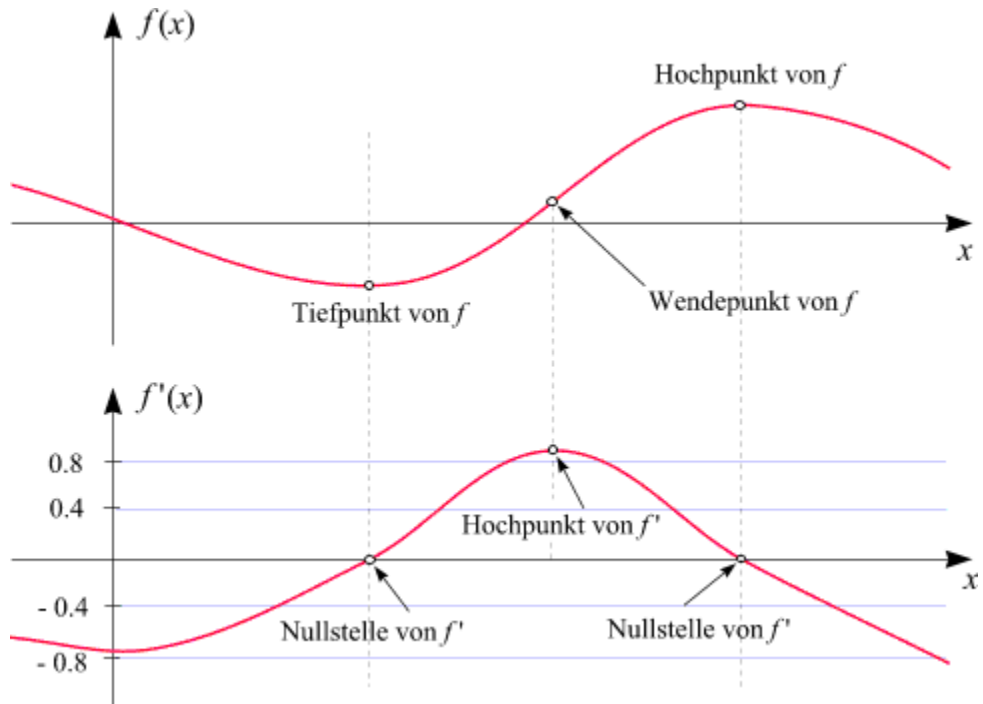
دا ټیک هغه ټکي دي، د کومو په چاپیریال کې چې منفي او مثبت جگیدنه یو بل سره رابندوي یا پولې لري.

د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چې هلته جگیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلگه کې 90%).

همدی ته ورته په دویمه منحنی (کبری) کې یو ه خوکه لري، مگر دا په دې بیدیا کې هغه ستره،،خوکه،، نه ده، مگر که خوکه غواړي، نو یوه د،،جگیدني خوکه،، ده.

اوس دا دواړه کبري یا منحنی په ورسره بلده یا معمول ریاضیکي ډول په لاندې شکلونو کې ښایو او سره پرتله کوو:

(دالماني پښتو ژباړه له پورته کښته لور له کین وښي لو رته: د  $f$  خورا جگ- یاماکسیمال ټکی، د  $f$  خورا ټیټکی، د  $f$  اوړون- یا د انعطاف ټکی، د  $f'$  خورا جگ ټکی، د  $f'$  صفرخای د  $f'$  صفرخای)



لومړی منحنی د  $f(x)$  گراف دی، دویمه منحنی یا کبره د مشتق تابع  $f'(x)$  گراف دی.

دا دواړه گرافونه بیا هم ټیک وگوری او وهڅیری، چې وپوهیږی، چې دا یو د پیل سره په هره برخه کې څنگه یو د بل سره اړیکي لري.

د  $f(x)$  گراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په یوه کې  $f(x)$  مینیمال - یا خورا ټیټ ټکی په بل کې  $f(x)$  ماکسیمال - یا خورا جګ ټکی دی. په دې ځایونو کې  $f(x)$  صفرځایونه لري. هغه ټکی چې هلته د  $f(x)$  گراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اوږونټکی بلل کیږي. دا چې په دې ټکي کې د  $f(x)$  مشتق خورا جګ دی (په دې بیلګه کې  $0,9$ )، دا د  $f'(x)$  عظمي نقطه (خورا جګ ټکی) ده.

د ازادې سترګې سره د هغه ځای له لاندې منحنی څخه بڼه څرګندېږي، نسبت و پورته منحنی ته.

دې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولی شو یا ګومان راوړی شو: که یوه تابع  $f(x)$  ولرو، نو د دې  $f(x)$  تابع په هکله د  $f(x)$  له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لاس روړی شو.

دا مورته د ماکسیمیا او مینیمیا (د خورا جګ او خورا ټیټ ارزښت) په هکله (چې دا دواړه د افراطي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې گراف چېرته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

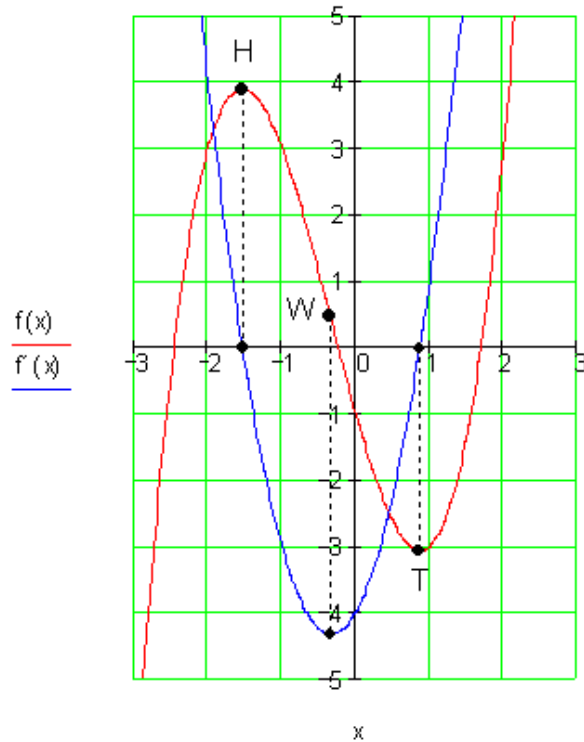
## په کواوردینات سیستم (پروت - ولاړ-) کې تابع

### او د تابع مشتق

$$\text{تابع: } f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1 \quad \text{مشتق: } f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موردا د مشتق تابع یاد جګېدني (میلان) تابع بولو

$$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \quad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$$



د دواړو توابعو گراف په یوه قمیټي وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع  $f(x)$  یو جگ ټکی (H) همداسې ټیټ ټکی (T) لري گراف د مشتق تابع  $x$ -محور کې غوڅوي، په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع  $f(x)$  پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د  $f(x)$  جگیدنه صفر ده.

د مشتق تابع  $f'(x)$  هلته مینیموم لري، چیرته چې د  $f(x)$  جگیدنه د H او T ترمنځ په پام ونيول شي د مطلق قیمت له مخي خورا لویه ده.

## پوښتنې II:

لومړۍ - د  $f(x)$  تابع مشتق د  $x=2$  او  $x=u$  په ځایونو کې وشمیرئ

الف -  $f(x) = x^2 + 3$  ب -  $f(x) = \frac{2}{x}$  پ -  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  ت -  $f(x) = \sqrt{x}$

دویم - مشتق یې وشمیرئ

الف -  $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2$  ب -  $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8$

پ -  $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4$  ت -  $s(t) = -\frac{5}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{5}{2}$

ب -  $f(x) = -(x-6)^2(x+1)$  ث -  $f(x) = \frac{1}{2}(x^2-2)^2$

دریم - مشتق یې وشمیرئ:

الف -  $f(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1)$  ب -  $f(x) = x\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4\right)$

پ -  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  ت -  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

ب -  $f(x) = 6x + \frac{5}{x}$  ث -  $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x}$

څلورم - مشتق یې وشمیرئ:

الف -  $f_t(x) = \frac{t}{2}x^4 - 2tx^3 + t^2$  ب -  $f_k(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + (k+1)x$



$$\text{پ - } f_t(x) = \frac{1}{2t}(x^2 - t)^2 \quad \text{ت - } f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x - 3$$

$$\text{ب - } f(t) = 5t^3 - 2t + 5 \quad \text{ث - } f(z) = -1,5z^3 + 2,5z^2 + z$$

$$\text{ج - } A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1 \quad \text{ح - } A(u) = \frac{1}{2}u(u^2 + 1)$$

پنجم - د  $f(x)$  جگوالی د  $x = -3$  په ځای کې وشمیری او د  $f(x)$  قاطع یا غوڅتکي د  $x$  - محور سره وشمیری .

$$\text{الف - } f(x) = 3x^2 - 5 \quad \text{ب - } f(x) = 4x - \frac{1}{x}$$

شپږم - مشتق یې وشمیری:

$$\text{الف - } f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \quad \text{ب - } f(x) = -x^2 + 2x - 1 \quad \text{پ - } f(x) = x + 1$$

$$\text{ت - } \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 4 \quad \text{ث - } f(x) = 5b; b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{ج - } f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$$

$$\text{ج - } f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 \quad \text{ح - } f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$\text{خ - } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7 \quad \text{ځ - } f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 5x + 8$$

مفصل حلونه

لومړی -

الف -

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$\begin{aligned} x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{(2+\Delta x)^2 + 3 - (2^2 + 3)}{\Delta x} \\ &= \frac{4 + 4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - 4 - 3}{\Delta x} = \frac{4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x} \cdot (4 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 4 + \Delta x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = \underline{\underline{4}}$$

$$\begin{aligned} x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(u+\Delta x) - f(u)}{\Delta x} = \frac{(u+\Delta x)^2 + 3 - (u^2 + 3)}{\Delta x} \\ &= \frac{u^2 + 2u \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - u^2 - 3}{\Delta x} = \frac{2u \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x} \cdot (2u + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2u + \Delta x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2u + \Delta x) = \underline{\underline{2u}}$$

- ب

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$\begin{aligned} x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - \frac{2}{2}}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - \frac{1 \cdot (2+\Delta x)}{2+\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{2 - 1 \cdot (2+\Delta x)}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{2 - 2 - \Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\frac{\Delta x}{1} (2+\Delta x)} = \frac{-1}{2+\Delta x} \end{aligned}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{-1}{2+\Delta x} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

:

:

$$\begin{aligned}
 x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(u + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{u + \Delta x} - \frac{2}{u}}{\Delta x} = \frac{\frac{2 \cdot u}{u \cdot (u + \Delta x)} - \frac{2 \cdot (u + \Delta x)}{u \cdot (u + \Delta x)}}{\Delta x} \\
 &= \frac{\frac{2 \cdot u - 2 \cdot (u + \Delta x)}{u \cdot (u + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{2 \cdot u - 2 \cdot u - 2 \cdot \Delta x}{u \cdot (u + \Delta x)} = \frac{-2 \cdot \Delta x}{u \cdot (u + \Delta x)} \\
 &= \frac{-2 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot u \cdot (u + \Delta x)} = \frac{-2}{u \cdot (u + \Delta x)} = \frac{-2}{u^2 + u \cdot \Delta x} \\
 f'(u) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{-2}{u^2 + u \cdot \Delta x} \right) = \underline{\underline{-\frac{2}{u^2}}}
 \end{aligned}$$

بـ

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
 x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2 + \Delta x + 1} - \frac{1}{2 + 1}}{\Delta x} \\
 &= \frac{\frac{1}{3 + \Delta x} - \frac{1}{3}}{\Delta x} = \frac{\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot (3 + \Delta x)} - \frac{1 \cdot (3 + \Delta x)}{3 \cdot (3 + \Delta x)}}{\Delta x} \\
 &= \frac{\frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot (3 + \Delta x)}{3 \cdot (3 + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{3 - 3 - \Delta x}{3 \cdot (3 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{3 \cdot (3 + \Delta x)} = \frac{-1 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot 3 \cdot (3 + \Delta x)} = \frac{-1}{3 \cdot (3 + \Delta x)}
 \end{aligned}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{-1}{3(3 + \Delta x)} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{9}}}$$

$$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{u + \Delta x + 1} - \frac{1}{u + 1}}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 \cdot (u+1)}{(u+1) \cdot (u+\Delta x+1)} - \frac{1 \cdot (u+\Delta x+1)}{(u+1) \cdot (u+\Delta x+1)} \\
 &= \frac{1 \cdot (u+1) - 1 \cdot (u+\Delta x+1)}{(u+1) \cdot (u+\Delta x+1)} = \frac{u+1-u-\Delta x-1}{(u+1) \cdot (u+\Delta x+1)} = \frac{-\Delta x}{(u+1) \cdot (u+\Delta x+1)} \\
 &= \frac{-1 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot (u+1) \cdot (u+\Delta x+1)} = \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)} \\
 f'(u) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)} = \frac{-1}{(u+1)(u+1)} = \underline{\underline{-\frac{1}{(u+1)^2}}}
 \end{aligned}$$

-ت

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
 x=2: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2+\Delta x} - \sqrt{2}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{2+\Delta x} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2})}{\Delta x \cdot (\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2})} \\
 &= \frac{2+\Delta x-2}{\Delta x \cdot (\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2})} = \frac{1 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot (\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}}$$

$$\begin{aligned}
 x=u: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(u+\Delta x) - f(u)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{u+\Delta x} - \sqrt{u}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{u+\Delta x} - \sqrt{u}) \cdot (\sqrt{u+\Delta x} + \sqrt{u})}{\Delta x \cdot (\sqrt{u+\Delta x} + \sqrt{u})} \\
 &= \frac{u+\Delta x-u}{\Delta x \cdot (\sqrt{u+\Delta x} + \sqrt{u})} = \frac{1 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot (\sqrt{u+\Delta x} + \sqrt{u})} = \frac{1}{\sqrt{u+\Delta x} + \sqrt{u}}
 \end{aligned}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{u+\Delta x} + \sqrt{u}} \right) = \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{u}}}}$$

دویم - مفصل حلونہ

$$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = -8x^3 + 6x - 4 \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2} \quad \text{پ -}$$

$$s(t) = -\frac{5}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{5}{2} \Rightarrow s'(t) = -\frac{5}{3}t + \frac{2}{3} \quad \text{ت -}$$

ب -

$$f(x) = -(x-6)^2(x+1) = -x^3 + 11x^2 - 24x - 36 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 22x - 24$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^2 = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 4x \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16} \quad \text{دریم - الف -}$$

$$f(x) = x\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4\right) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3x - 4 \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{ت -}$$

$$f(x) = 6x + \frac{5}{x} = 6x + 5x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 6 - 5x^{-2} = 6 - \frac{5}{x^2} \quad \text{ث -}$$

ج --

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} = x^3 - 2x^2 + x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - x^{-2} = 3x^2 - 4x - \frac{1}{x^2}$$

خلورم - مفصل حلونه

$$f_t(x) = \frac{t}{2}x^4 - 2tx^3 + t^2 \Rightarrow f'_t(x) = 2tx^3 - 6tx^2$$

الف -

$$f_k(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + (k+1)x \Rightarrow f'_k(x) = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + k + 1$$

ب -

$$f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x - 3 \Rightarrow f'_a(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2ax + a - \frac{1}{2}$$

پ -

$$f_t(x) = \frac{1}{2t}(x^2 - t)^2 = \frac{1}{2t}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}t \Rightarrow f'_t(x) = \frac{2}{t}x^3 - 2x$$

ت -

$$f(t) = 5t^3 - 2t + 5 \Rightarrow f'(t) = 15t^2 - 2$$

ب -

$$f(z) = -1,5z^3 + 2,5z^2 + z \Rightarrow f'(z) = -4,5z^2 + 5z + 1$$

ث -

$$A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1 \Rightarrow A'(u) = u + 5$$

ج -

$$A(u) = \frac{1}{2}u(u^2 + 1) = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u \Rightarrow A'(u) = \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}$$

چ -

پنجم - مفصل حلونه

الف -

$$f(x) = 3x^2 - 5 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow f'(-3) = 6 \cdot (-3) = \underline{\underline{-18}}$$

د  $f(x)$  صفرخایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow f'\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 6 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \underline{\underline{\pm 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}}}$$

ب -

$$f(x) = 4x - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 4 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(-3) = 4 + \frac{1}{9} = \underline{\underline{\frac{37}{9}}}$$

د  $f(x)$  صفرخایونه :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f'\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{1}{\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2} = 4 + \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$$

شپږم - مفصل حلونه

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x + 3 \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = -x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = -2x + 2 \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1 \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 4 \Rightarrow f'(x) = x - \frac{1}{3} \quad \text{ت -}$$

$$f(x) = 5b; b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \text{ټ -}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{2}{3} \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 6x - 4 \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{3}{4} \quad \text{چ -}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7 \Rightarrow f'(x) = x + 3 \quad \text{ح -}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 5x + 8 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x + 5 \quad \text{خ -}$$

پوښتنی :

### III مشتق شمیرنه

اول- مشتق یی ونیسی

$$f(x) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{10} \quad \text{ب -} \quad f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = -x^3 + x^2 - x + 7 \quad \text{ت -} \quad f(x) = x^3 - x^2 + x + 1 \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + \pi \quad \text{ث -} \quad f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 2x^2 - x + 1 \quad \text{ت -}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{چ -} \quad f(x) = 4x^3 + \pi x^2 + bx + c \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4x + 7 \quad \text{خ -} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^3 - \frac{1}{\pi}x^2 + \alpha x \quad \text{ح -}$$



دویم - مشتق یی ونیسی

الف -  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 1$  ب -  $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2x + 2$

پ -  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$  ت -  $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

ث -  $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 1$  ج -  $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{7}x^2 + 7$

د -  $f(x) = 1$  ه -  $f(x) = 0$

ز -  $f(x) = 2x^6 - 4x^4 + 2x^2$  ح -  $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 4$

دریم - مشتق یی ونیسی

الف -  $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{2} \cdot x$  ب -  $f(x) = \sqrt{3} \cdot x^3 - \sqrt{2} \cdot x^2 + 1$

پ -  $f(x) = \frac{4}{3\pi}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 1$  ت -  $f(x) = 3,5x^2 - 1,5x + 2$

ث -  $f(x) = 0,5x^2 - 2,5x + 1$  ج -  $f(x) = 3,1x^2 + \frac{7}{2}x - 7$

د -  $f(x) = 1,5x^3 - 2,5x^2 + 1$  ه -  $f(x) = -2,5x^3 + 1,5x^2 - 1$

ز -  $f(x) = t \cdot x^3 + 2x^2 - 4x$  ح -  $f(x) = 7,2x^2 - 8,2x + b$

خ - خ

خلورم - مشتق یی ونیسی

$$\text{الف - } f(x) = x^{-1} \text{ ب - } f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{پ - } f(x) = \frac{2}{3x} + 2 \text{ ت - } f(x) = 2x^{-2} + 3x^{-1} + 2$$

$$\text{ث - } f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-1} \text{ ج - } f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{د - } f(x) = x^{\frac{1}{4}} \text{ ه - } f(x) = \sqrt{x} \text{ و - } f(x) = \sqrt{x} \text{ ز - } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ ح - } f(x) = \sqrt{x^3} \text{ خ - } f(x) = \sqrt{x^3}$$

خوابونه

### مشتق شمیرنه III

مفصل حلونه:

لومری:

$$\text{الف - } f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{8}{5}x - \frac{3}{4}$$

$$\text{ب - } f(x) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{10} \Rightarrow f'(x) = -\frac{6}{7}x + \frac{4}{9}$$

$$\text{پ - } f(x) = x^3 - x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$\text{ت - } f(x) = -x^3 + x^2 - x + 7 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2x - 1$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 2x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 4x - 1 \quad \text{ب۔}$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + \pi \Rightarrow f'(x) = -2x^2 + 3x + 2 \quad \text{ث۔}$$

$$f(x) = 4x^3 + \pi x^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 2\pi x + b \quad \text{ج۔}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{چ۔}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^3 - \frac{1}{\pi}x^2 + \alpha x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{2}{\pi}x + \alpha \quad \text{ح۔}$$

$$f(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4x + 7 \Rightarrow f'(x) = \frac{12}{5}x^2 - \frac{3}{2}x + 4 \quad \text{خ۔}$$

دویم:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x + 3 \quad \text{الف۔}$$

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 8x^3 + 6x - 2 \quad \text{ب۔}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 + x - 1 \quad \text{پ۔}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + x^2 - x \quad \text{ت۔}$$

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2x \quad \text{ث۔}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{7}x^2 + 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^3 + \frac{10}{7}x \quad \text{ث۔}$$

$$f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = 2x^6 - 4x^4 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 12x^5 - 16x^3 + 4x \quad \text{ح -}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - 1 \quad \text{خ -}$$

دریم:

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{2} \cdot x \Rightarrow f'(x) = 4x^2 + 3x + \sqrt{2} \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = \sqrt{3} \cdot x^3 - \sqrt{2} \cdot x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3\sqrt{3} \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = \frac{4}{3\pi}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{\pi}x^2 + \frac{2}{3}x \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = 3,5x^2 - 1,5x + 2 \Rightarrow f'(x) = 7x - 1,5 \quad \text{ت -}$$

$$f(x) = 0,5x^2 - 2,5x + 1 \Rightarrow f'(x) = x - 2,5 \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = 3,1x^2 + \frac{7}{2}x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6,2x + 3,5 \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = 1,5x^3 - 2,5x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4,5x^2 - 5x \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = -2,5x^3 + 1,5x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = -7,5x^2 + 3x \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = t \cdot x^3 + 2x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 3tx^2 + 4x - 4 \quad \text{ح -}$$

$$f(x) = 7,2x^2 - 8,2x + b \Rightarrow f'(x) = 14,4x - 8,2 \quad \text{خ -}$$

څلورم:

$$f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = \frac{2}{3x} + 2 = \frac{2}{3}x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} = -\frac{2}{3x^2} \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = 2x^{-2} + 3x^{-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = -4x^{-3} - 3x^{-2} \quad \text{ت -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-1} \Rightarrow f'(x) = x^{-3} - 2x^{-2} \quad \text{ت -}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \quad \text{ح -}$$

$$f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \quad \text{خ -}$$

پوښتنې

#### IV مشتق شمیرنه

لومړی: مشتق یې ونیسئ

$$\text{الف - } f(x) = 4x^2 - 3x + 2 \quad \text{ب - } f(x) = -2x^2 + 6x - 4$$

$$\text{پ - } f(x) = 2x^3 - x^2 + 1 \quad \text{ت - } f(x) = -7x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$\text{ث - } f(x) = (x^2 - 3)^2 \quad \text{ډ - } f(x) = 1 - x^3$$

$$\text{ج - } f(x) = 1 - x^4 \quad \text{چ - } f(x) = 2x^2 - x^4$$

$$\text{ح - } f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 \quad \text{خ - } f(x) = -3x^7 + 1$$

دویم: مشتق یې ونیسئ

$$\text{الف - } f(x) = a + 3bx^2 \quad \text{ب - } f(x) = 3x^7 - 0,5x^3$$

$$\text{پ - } f(x) = 0,125x^8 - 30x^4 \quad \text{ت - } f(x) = 0,01ax^{12} - 0,5bx^8$$

$$\text{ث - } f(x) = 3ax^5 - 0,5bx^4 \quad \text{ډ - } f(x) = 0,25x^8 + 0,5x^{10}$$

$$\text{ج - } f(x) = 0,25ax^4 + 0,5bx^5 \quad \text{چ - } f(x) = 0,5bx^6 + 0,2ax^5$$

$$\text{ح - } f(x) = -0,5x^5 \quad \text{خ - } f(x) = 0,5x^3 + 3x^2$$

دریم: مشتق یې ونیسئ

$$\text{الف - } f(x) = -3x^7 + 2x \text{ ب - } f(x) = 0,5x^3 + 2x$$

$$\text{پ - } f(x) = 2x^3 - 3x^2 \text{ ت - } f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$$

$$\text{ث - } f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \text{ ج - } f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$$

$$\text{د - } f(x) = \frac{1}{18}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + x^2 \text{ ه - } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

$$\text{و - } f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 \text{ ز - } f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$$

ځلورم: مشتق یې ونیسئ

$$\text{الف - } f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \text{ ب - } f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + x^2$$

$$\text{پ - } f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \text{ ت - } f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x + 9$$

$$\text{ث - } f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x \text{ ج - } f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$$

$$\text{د - } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3 \text{ ه - } f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$$

$$\text{و - } f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 \text{ ز - } f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 5x$$

حلونه

### مشتق شمیرنه IV

مفصل حلونه:

لومړی:

$$\text{الف. } f(x) = 4x^2 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 8x - 3$$

$$\text{ب. } f(x) = -2x^2 + 6x - 4 \Rightarrow f'(x) = -4x + 6$$

$$\text{پ. } f(x) = 2x^3 - x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 2x$$

$$\text{ت. } f(x) = -7x^3 + 2x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = -21x^2 + 4x - 1$$

$$\text{ث. } f(x) = (x^2 - 3)^2 = x^4 - 6x^2 + 9 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x$$

$$\text{ج. } f(x) = 1 - x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2$$

$$\text{د. } f(x) = 1 - x^4 \Rightarrow f'(x) = -4x^3$$

$$\text{ه. } f(x) = 2x^2 - x^4 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 4x$$

$$\text{و. } f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1,5x^2 + 6x$$

$$\text{ز. } f(x) = -3x^7 + 1 \Rightarrow f'(x) = -21x^6$$

دویم:

$$\text{الف. } f(x) = a + 3bx^2 \Rightarrow f'(x) = 6bx$$

$$\text{ب. } f(x) = 3x^7 - 0,5x^3 \Rightarrow f'(x) = 21x^6 - 1,5x^2$$

$$\text{پ. } f(x) = 0,125x^8 - 30x^4 \Rightarrow f'(x) = x^7 - 120x^3$$

$$\text{ت. } f(x) = 0,01ax^{12} - 0,5bx^8 \Rightarrow f'(x) = 0,12ax^{11} - 4bx^7$$



$$f(x) = 3ax^5 - 0,5bx^4 \Rightarrow f'(x) = 15ax^4 - 2bx^3 \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = 0,25x^8 + 0,5x^{10} \Rightarrow f'(x) = 5x^9 + 2x^7 \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = 0,25ax^4 + 0,5bx^5 \Rightarrow f'(x) = 2,5bx^4 + ax^3 = \text{ج}$$

$$f(x) = 0,5bx^6 + 0,2ax^5 \Rightarrow f'(x) = 3bx^5 + ax^4 \quad \text{چ -}$$

$$f(x) = -0,5x^5 \Rightarrow f'(x) = -2,5x^4 \quad \text{ح -}$$

$$f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1,5x^2 + 6x = \text{خ}$$

دریم:

$$f(x) = -3x^7 + 2x \Rightarrow f'(x) = -21x^6 + 2 \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = 0,5x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 1,5x^2 + 2 \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} \quad \text{ت -}$$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 2x \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = \frac{1}{18}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 2x = \text{ح}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = x - 2 \quad \text{- ج}$$

$$f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{2}x \quad \text{- ح}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 3 \quad \text{= خ}$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2} \quad \text{څلورم: الف}$$

$$f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + x^2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x \quad \text{- ب}$$

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x + 9 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2} \quad \text{- پ / ت}$$

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 \quad \text{- ټ}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} \quad \text{- ټ}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 1 \quad \text{= ج}$$

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8 \quad \text{- ج}$$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x \quad \text{- ح}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 5x \Rightarrow f'(x) = x^3 + 4x^2 + 5 \quad \text{= خ}$$

## پوښتنې

## مشتقشمیرنه VI

لومړی: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ:

الف-  $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$  ب-  $f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$

پ-  $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2$  ت-  $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8$

ب-  $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4$  ث-  $f(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$

دویم: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ:

الف-  $f(x) = -(x-6)^2(x+1)$  ب-  $f(x) = \frac{1}{2}(x^2-2)^2$

پ-  $f(x) = \frac{1}{16}(x^3+x-1)$  ت-  $f(x) = x\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4\right)$

ب-  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  ث-  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

دریم: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ:

الف-  $f(x) = \frac{k}{2}x^4 - 2kx^3 + k^2$  ب-  $f(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + (k+1)x$

پ-  $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x - 3$  ت-  $f(x) = \frac{1}{2k}(x^2 - k)^2$

ب-  $f(t) = 5t^3 - 2t + 5$  ث-  $f(z) = -1,5z^3 + 2,5z^2 + z$

څلورم: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ:

$$A(u) = \frac{1}{2}u(u^2 + 1) \quad \text{ب} \quad A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1 \quad \text{الف}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} \quad \text{ت} \quad f(x) = 2\pi x^5 - 7x^3 + \frac{3}{\pi} \quad \text{پ}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad \text{ث} \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \quad \text{ب}$$

$$f(x) = \frac{(x^2 + 4x + 4)^2}{x + 2} \quad \text{ج} \quad f(x) = \frac{4x^2 + 12x + 9}{2x + 3} = \text{ج}$$

پځم: نلاندې تابع ورکړ شوي:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2; x \in \mathbb{R}$$

الف- د  $f(x)$  تابع جگوالی د  $x_0$  په ځای کې وښایی د  $x_0 \in [-4; -1; 0; 1,5; 3]$  سره

ب- تابع  $f(x)$  په کوم ټکي کې د 3 جگوالي سره تانجنت لري؟

پ- د  $f(x)$  په  $(2 | f(2))$  ټکي باندې د تانجنت مساوات وښایی

ت- د  $f(x)$  په  $(2 | f(2))$  ټکي باندې د نورمال یا عمود مساوات وښایی

ټ- تانجنت او نورمال یا عمود په وضعیهقیمتسیستم کې رسم کړی.

$$\alpha(x) = t \cdot f(x); t \in \mathbb{R}^*$$

د  $x$  محور په  $S_1$  او  $S_2$  کې غوڅوي (قطع کوي)

د  $t$  د کومو ارزښتونو لپاره تانجنت په  $S_1$  او  $S_2$  یو بل سره عمود دي؟

حلونه

مشتق شمیرنه VI

نتیجی:

لومری-

الف -

$$f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2 \quad f''(x) = 60x^2 - 24x + 6$$

$$f'''(x) = 120x - 24$$

$$f'(x) = -4x^3 \quad f''(x) = -12x^2 \quad f'''(x) = -24x \quad \text{ب -}$$

$$f'(x) = -8x^3 + 6x - 4 \quad f''(x) = -24x^2 + 6 \quad f'''(x) = -48x \quad \text{پ -}$$

$$f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x \quad f''(x) = 6x^2 - 6x + 5 \quad f'''(x) = 12x - 6 \quad \text{ت -}$$

$$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2} \quad f''(x) = \frac{3}{16}x \quad f'''(x) = \frac{3}{16} \quad \text{ث -}$$

$$f'(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3} \quad f''(x) = -\frac{5}{3} \quad f'''(x) = 0 \quad \text{ث -}$$

دویم:

$$f'(x) = -3x^2 + 22x - 24 \quad f''(x) = -6x + 22 \quad f'''(x) = -6 \quad \text{الف -}$$

$$f'(x) = 2x^3 - 4x \quad f''(x) = 6x^2 - 4 \quad f'''(x) = 12x \quad \text{ب -}$$

$$\text{پ۔ } f'(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16} \quad f''(x) = \frac{3}{8}x \quad f'''(x) = \frac{3}{8}$$

$$\text{ت۔ } f'(x) = 3x^2 - 3x - 4 \quad f''(x) = 6x - 3 \quad f'''(x) = 6$$

$$\text{ب۔ } f'(x) = 4ax^3 + 2bx \quad f''(x) = 12ax^2 + 2b \quad f'''(x) = 24ax$$

$$\text{ث۔ } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b \quad f'''(x) = 6a$$

دریم:

$$\text{الف۔ } f'(x) = 2kx^3 - 6kx^2 \quad f''(x) = 6kx^2 - 12kx \quad f'''(x) = 12kx - 12k$$

$$\text{ب۔ } f'(x) = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + k + 1 \quad f''(x) = \frac{6}{k}x + 2k \quad f'''(x) = \frac{6}{k}$$

$$\text{پ۔ } f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2ax + a - \frac{1}{2} \quad f''(x) = \frac{3}{2}x + 2a \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

$$\text{ت۔ } f'(x) = \frac{2}{k}x^3 - 2x \quad f''(x) = \frac{6}{k}x^2 - 2 \quad f'''(x) = \frac{12}{k}x$$

$$\text{ب۔ } f'(t) = 15t^2 - 2 \quad f''(t) = 30t \quad f'''(t) = 30$$

$$\text{ث۔ } f'(z) = -4,5z^2 + 5z + 1 \quad f''(z) = -9z + 5 \quad f'''(z) = -9$$

څلورم:

$$\text{الف۔ } A'(u) = u + 5 \quad A''(u) = 1 \quad A'''(u) = 0$$

$$\text{ب۔ } A'(u) = \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2} \quad A''(u) = 3u \quad A'''(u) = 3$$

پ۔

$$f'(x) = 10\pi x^4 - 21x^2 \quad f''(x) = 40\pi x^3 - 42x \quad f'''(x) = 120\pi x^2 - 42$$

$$f'(x) = 1 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) = 0 \quad \text{ت۔}$$

$$f'(x) = 1 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) = 0 \quad \text{ب۔}$$

$$f'(x) = 1 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) = 0 \quad \text{ث۔}$$

$$f'(x) = 2 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) = 0 \quad \text{ج۔}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 \quad f''(x) = 6x + 12 \quad f'''(x) = 6 \quad \text{چ۔}$$

پنجم:

الف۔

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

x	-4	-1	0	1,5	3
f'(x)	4	2,5	2	1,25	0,5

ب۔ د (-2; -5) په ټکي کې د f(x) تانجنت جگوالی 3 لري.

پ۔ په f(x) باندې د تانجنت مساوات په ټکي (2 | f(2)) کې: t(x) = x + 1

ت۔ په ټکي (2 | f(2)) کې په f(x) باندې د عمود مساوات: n(x) = -x + 5

ب۔ ث۔ د  $t_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$  لپاره تانجنتونه په ټکو  $S_1$  او  $S_2$  کې یو په بل عمودي.

مفصل حل:

لومړی: الف۔

$$f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$$

$$f'(x) = 5 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x^1 - 2 \cdot 1 + 0 = \underline{\underline{20x^3 - 12x^2 + 6x - 2}}$$

$$f''(x) = 20 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x^1 + 6 \cdot 1 - 0 = \underline{\underline{60x^2 - 24x + 6}}$$

$$f'''(x) = 60 \cdot 2x^1 - 24 \cdot 1 + 0 = \underline{\underline{120x - 24}}$$

$$f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2) \quad \text{ب.}$$

اول- حل د ضرب له لاري (د بېنوم دريمه جمله)

$$f(x) = a^4 - x^4 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{-4x^3}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

دويم - د ضرب د قانون له مخي حل (مفصل)

$$f(x) = \underbrace{(a^2 + x^2)}_u \underbrace{(a^2 - x^2)}_v \Rightarrow u' = 2x \quad v' = -2x$$

$$f'(x) = u'v + uv' = 2x \cdot (a^2 - x^2) + (a^2 + x^2)(-2x)$$

$$= 2a^2x - 2x^3 - 2a^2x - 2x^3 = \underline{\underline{-4x^3}}$$

$$f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

$$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2$$

$$f'(x) = -8x^3 + 6x - 4 \quad f''(x) = -24x^2 + 6 \quad f'''(x) = -48x \quad \text{پ.}$$

$$f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8$$

$$f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x \quad f''(x) = 6x^2 - 6x + 5 \quad f'''(x) = 12x - 6 \quad \text{ت.}$$

ث -



$$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{32} \cdot 3x^2 + \frac{3}{2} \cdot 1 - 0 = \underline{\underline{\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2}}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{32} \cdot 2x^1 + 0 = \underline{\underline{\frac{3}{16}x}} \quad f'''(x) = \frac{3}{16} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{3}{16}}}$$

ث -

$$f(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3} \quad f''(x) = -\frac{5}{3} \quad f'''(x) = 0$$

دویم: الف -  $f(x) = -(x-6)^2(x+1)$

- حل د ضربولو له لاری

$$f(x) = -(x^2 - 12x + 36)(x+1) = -[x^3 + x^2 - 12x^2 - 12x + 36x + 36]$$

$$= -[x^3 - 11x^2 + 24x + 36] = -x^3 + 11x^2 - 24x - 36$$

$$f'(x) = \underline{\underline{-3x^2 + 22x - 24}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{-6x + 22}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-6}}$$

دوي - حل د ځنډیري قانون له مخي.

$$f(x) = -\underbrace{(x-6)^2}_u \underbrace{(x+1)}_v \quad u' = 2(x-6) \cdot 1 = 2x - 12 \quad v' = 1$$

$$f'(x) = -[u'v + uv'] = -[(2x-12)(x+1) + (x-6)^2 \cdot 1] =$$

$$-[2x^2 + 2x - 12x - 12 + x^2 - 12x + 36] = -[3x^2 - 22x + 24] = -3x^2 + 22x - 24$$

$$\Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{-6x + 22}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-6}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^2 \quad \text{ب -}$$

اول - حل د ضربولو له لارې

$$f(x) = \frac{1}{2} \underbrace{(x^2 - 2)^2}_{\text{2. bin. Formel}} = \frac{1}{2}(x^4 - 4x^2 + 4) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$$

$$f'(x) = \underline{2x^3 - 4x} \Rightarrow f''(x) = \underline{6x^2 - 4} \Rightarrow f'''(x) = \underline{12x}$$

یادونه: په پورته کې 2.bin.Formel د دویم بینوم فرمول په معنا دی.

دویم-د ځنزیري قانون سره حل:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2(x^2 - 2) \cdot 2x = 2x(x^2 - 2) = \underline{2x^3 - 4x}$$

$$f''(x) = \underline{6x^2 - 4} \Rightarrow f'''(x) = \underline{12x}$$

پ -

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{16}(3x^2 + 1) = \underline{\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16}} \quad f''(x) = \underline{\frac{3}{8}x} \quad f'''(x) = \underline{\frac{3}{8}}$$

ت -

$$f(x) = x \left( x^2 - \frac{3}{2}x - 4 \right) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x$$

$$f'(x) = \underline{3x^2 - 3x - 4} \Rightarrow f''(x) = \underline{6x - 3} \Rightarrow f'''(x) = \underline{6}$$

دلته به د ضرب قانون استعمال لږ غزېدلی وی.

ب -

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx \quad f''(x) = 12ax^2 + 2b \quad f'''(x) = 24ax$$

ث -

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b \quad f'''(x) = 6a$$

دریم: الف-

$$f(x) = \frac{k}{2}x^4 - 2kx^3 + k^2$$

$$f'(x) = 2kx^3 - 6kx^2 \quad f''(x) = 6kx^2 - 12kx \quad f'''(x) = 12kx - 12k$$

ب -

$$f(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + \underbrace{(k+1)}_{\text{Konstante}} x$$

$$f'(x) = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + (k+1) \cdot 1 = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + \underbrace{k+1}_{\text{Konstante}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{6}{k}x + 2k \Rightarrow f'''(x) = \frac{6}{k}$$

یادونه: دلته او په لاندې حل کې Konstante د ثابتې په معنا دی.

پ-

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \underbrace{\left(a - \frac{1}{2}\right)}_{\text{Konstante}} x - 3$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2ax + \left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot 1 = \frac{3}{4}x^2 + 2ax + a - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{3}{2}x + 2a \Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2k}(x^2 - k)^2 \quad \text{ت -}$$

اول - د ضرب له لاری حل (د بینوم دویم فرمول)

$$f(x) = \frac{1}{2k}(x^2 - k)^2 = \frac{1}{2k}(x^4 - 2kx^2 + k^2) = \frac{1}{2k}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}k$$

$$f'(x) = \frac{2}{k}x^3 - 2x \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{k}x^2 - 2 \Rightarrow f'''(x) = \frac{12}{k}x$$

دویم : د ځنډیري قانون له مخي (ساده دی)

$$f'(x) = \frac{1}{2k} \cdot 2(x^2 - k) \cdot 2x = \frac{2}{k}x(x^2 - k) = \frac{2}{k}x^3 - 2x$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{6}{k}x^2 - 2 \Rightarrow f'''(x) = \frac{12}{k}x$$

$$f(t) = 5t^3 - 2t + 5$$

$$f'(t) = 15t^2 - 2 \quad f''(t) = 30t \quad f'''(t) = 30 \quad \text{ت -}$$

$$f(z) = -1,5z^3 + 2,5z^2 + z$$

$$f'(z) = -4,5z^2 + 5z + 1 \quad f''(z) = -9z + 5 \quad f'''(z) = -9 \quad \text{ت -}$$

څلورم:

$$A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1$$

$$A'(u) = u + 5 \quad A''(u) = 1 \quad A'''(u) = 0 \quad \text{الف-}$$

ب -

$$A(u) = \frac{1}{2}u(u^2 + 1) = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u$$

$$A'(u) = \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow A''(u) = \underline{\underline{3u}} \Rightarrow A'''(u) = \underline{\underline{3}}$$

دلته به د ضرب قانون لږ غزېدلی وی.

پ -

$$f(x) = 2\pi x^5 - 7x^3 + \frac{3}{\pi}$$

$$f'(x) = 10\pi x^4 - 21x^2 \quad f''(x) = 40\pi x^3 - 42x \quad f'''(x) = 120\pi x^2 - 42$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} \quad \text{ت -}$$

اول- د تابع ترم د ترم بڼه بدلون له لارې ساده کونه:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x + 1)}{x + 1} = x + 1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

دویم - د وېش قانون استعمال (زیات وخت نیسي)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

$$د \quad u = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow u' = 2x + 2 \quad \text{سره}$$

او  $v = x + 1 \Rightarrow v' = 1$  همداسې له  $v^2 = (x + 1)^2$  څخه لرو:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x + 2)(x + 1) - (x^2 + 2x + 1) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 4x + 2 - x^2 - 2x - 1}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)^2} = 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow f'''(x) = 0$$

د وېش قانون دې فقط په هغه حالتونو کې اسمعمال شي، که تابعترم په بله لار نه شي ساده کیدی.

$$ب - \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$$

اول - تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - 1)}{x - 1} = x - 1$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow f'''(x) = 0$$

د وېش قانون باندې صرف د نظر کیري.

$$ث - \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

اول - تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow f'''(x) = 0$$

د ویش قانون باندي صرف نظر کیري.

$$f(x) = \frac{4x^2 + 12x + 9}{2x + 3} = \text{ج}$$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لاري ساده کړی

$$f(x) = \frac{4x^2 + 12x + 9}{2x + 3} = \frac{(2x + 3)(2x + 3)}{2x + 3} = 2x + 3$$

$$f'(x) = \underline{2} \Rightarrow f''(x) = \underline{0} \Rightarrow f'''(x) = \underline{0}$$

د ویش له قانون څخه تیرپرو

$$f(x) = \frac{(x^2 + 4x + 4)^2}{x + 2} - \text{چ}$$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لاري ساده کړی

$$f(x) = \frac{(x^2 + 4x + 4)^2}{x + 2} = \frac{[(x + 2)^2]^2}{x + 2} = \frac{(x + 2)^4}{x + 2} = (x + 2)^3$$

دویم – ځنزیري قانون استعمال کړی:

$$f'(x) = 3(x + 2)^2 \cdot 1 = 3(x^2 + 4x + 4) = \underline{\underline{3x^2 + 12x + 12}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6x + 12 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

د ویش قانون باندي صرف نظر کیري.

پنځم:

الف-

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

$$f'(-4) = 2 - \frac{1}{2} \cdot (-4) = 2 + 2 = 4$$

$$f'(0) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 2$$

$$f'(3) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 2 - 1,5 = 0,5$$

$$f'(-1) = 2 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = 2 + \frac{1}{2} = 2,5$$

$$f'(1,5) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 1,5 = 2 - 0,75 = 1,25$$

x	-4	-1	0	1,5	3
f'(x)	4	2,5	2	1,25	0,5

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad \text{ب۔}$$

د تانجنت جگیدنه به  $x_0$  کی ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x_0) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د  $P(-2 | -5)$  په ټکي کې په  $f(x)$  باندې تانجنت ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad P(2 | f(2)) \quad \text{پ۔}$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د  $x_0 = 2$  سره لرو:

$$t(x) = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x - 2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x + 1}}$$

ت۔

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad P(2 | f(2))$$



$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

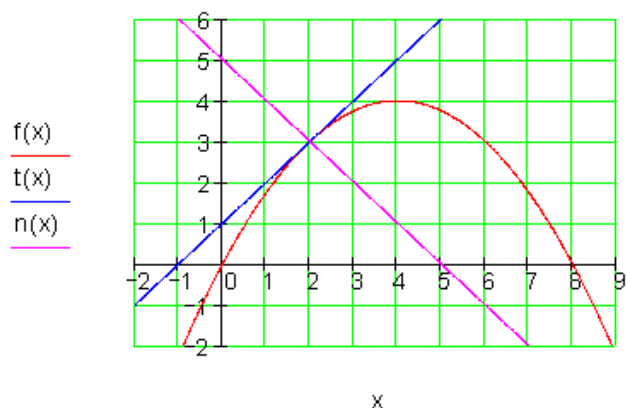
د  $x_0 = 2$  سره لرو:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x - 2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x + 5}}$$

ب -



$$g(x) = t \cdot f(x) = 2tx - \frac{1}{4}tx^2 \quad \text{ث -}$$

د  $g(x)$  صفرخايونه:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2tx - \frac{1}{4}tx^2 = 0 \Leftrightarrow x \left( 2t - \frac{1}{4}tx \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow S_1(0|0)$$

$$2t - \frac{1}{4}tx = 0 \mid -2t \Leftrightarrow -\frac{1}{4}tx = -2t \mid : \left( -\frac{1}{4}t \right) \Leftrightarrow x_2 = 8 \Rightarrow S_2(8|0)$$

د  $S_1$  او  $S_2$  عمودوالی په دي معنا دی چي:

$g'(0)$  د  $S1(0,0)$  په تکی کې د  $t_1(x)$  تانجنت جگوالی دی. د تانجنت  $t_2(x)$  جگوالی په تکی  $S2(8,0)$  کې دی هغه  $t_1(x)$  ته عمود وي. د دې لپاره باید صدق وکړي:

$$g'(8) = -1/g'(0) \quad (1)$$

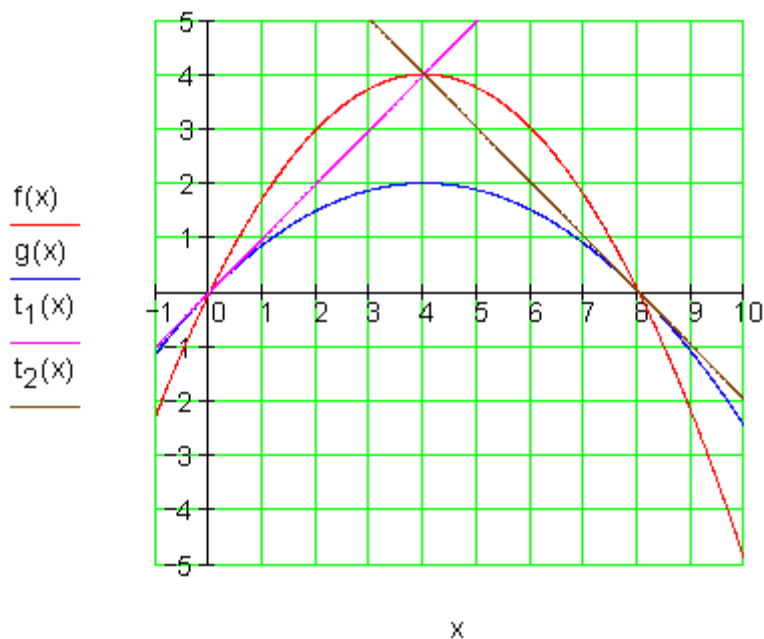
$$g'(x) = 2t - \frac{1}{2}tx \Rightarrow g'(8) = 2t - \frac{1}{2}t \cdot 8 = 2t - 4t = -2t$$

$$g'(0) = 2t \quad \text{همداسې}$$

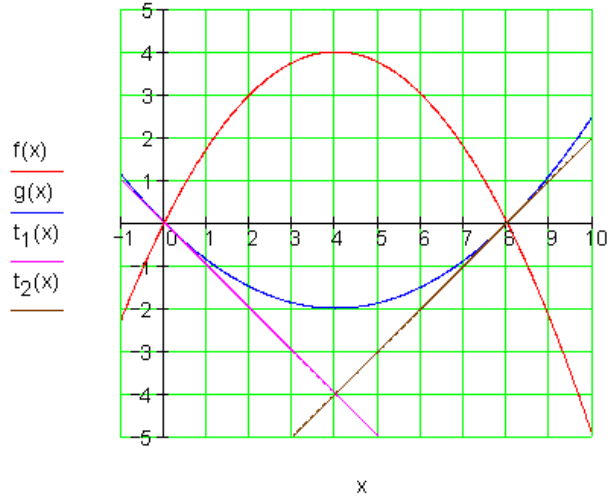
په (1) کې ځای په ځای کړی

$$-2t = -\frac{1}{2t} \cdot 2t \Leftrightarrow -4t^2 = -1 \mid : (-4) \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \underline{\underline{t_{1/2} = \pm \frac{1}{2}}}$$

د  $t=1/2$  لپاره صدق کوي.



د  $t = -1/2$  لپاره صدق کوي:



### III.3.1 د مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعی یا زیاتون قاعده):

که یو تابع  $f(x)$  د دوه توابعو  $u(x)$  او  $v(x)$  د جمعی څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعی څخه جوړ دی، یعنی:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \right]}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{f'(x) = u'(x) + v'(x)}}$$

بیلگه:

د دی ورکړ  $f(x) = 5x^2 + 3x$  ,  $u(x) = 5x^2$  ,  $v(x) = 3x$  توابعو شتق وشمیری. بنوونه:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 + 3x & u(x) &= 5x^2 & v(x) &= 3x \\ \Rightarrow u'(x) &= 10x & v'(x) &= 3 \\ f'(x) &= u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}} \end{aligned}$$

د جمعی قاعده ټولزه کونه: که چیرې  $f_1, f_2, \dots, f_n$  توابع او  $k_1, k_2, \dots, k_n$  ثابت عددونه وي نو لرو (بی له بنوونې):

$$\begin{aligned} &[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)]' \\ &= k_1 f_1'(x) + k_2 f_2'(x) + \dots + k_n f_n'(x) \end{aligned}$$

قضیه (د ضرب قاعده):

که  $f(x)$  او  $g(x)$  دوه توابع وي، نو بنایو:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

بنوونه: 
$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنی په صورت کې د  $-f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)$  ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

له پورته څخه لاس راځي یعنی د دواړو لورو لیمیټ نیسو یا پوله ټاکو:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

بیلکه:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \cdot x^3 \quad u(x) = x^2 \quad v(x) = x^3 \\ \Rightarrow u'(x) &= 2x \quad v'(x) = 3x^2 \\ f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^4 = \underline{\underline{5x^4}} \end{aligned}$$

بیلکه:

که  $g(x) = x^2 - 1$  او  $h(x) = \sqrt{x}$  ولرو، نو د  $f(x) = g(x)h(x)$  مشتق غواړو پیدا کړو.

بنوونه:

په لاندې توگه مخ ته خو:

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}, \quad f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښايو:

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښايو (ثبوت کړو).

لومړۍ لار:

لومړۍ لار یا طریقه یې په لاندې کې ښايو او دویمه لار دې گران زده کوونکي وښايي:

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \right]
 \end{aligned}$$

غواړو  $f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)$  صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \\
 &= \frac{1}{g(x)g(x)} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
 &= \frac{1}{[g(x)]^2} \left[ g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
 &= \frac{1}{[g(x)]^2} [g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}
 \end{aligned}$$

یعني لرو:

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

دویمه لار:

د  $\frac{1}{g(x)}$  مشتق غواړو پیدا کړو او بنايو چي دی:

$$(f(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \left( \frac{1}{g(x)} \right)' = - \frac{g'(x)}{g^2(x)} \quad (*)$$

که  $f(x) = \frac{1}{g(x)}$  کېږدو نو لرو:

$$(f(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x) \cdot h}$$

$$= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{-\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$  وېش ولرو او وغواړو چې مشتق یې پیدا کړو، نو له پورته

بنوونې، د (\*) اړیکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \left[ f(x) \frac{1}{g(x)} \right]'$$

$$= f(x) \left( \frac{1}{g(x)} \right)' + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= f(x) \left( \frac{g'(x)}{(g(x))^2} \right) + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

یا په لنډه توګه دا لاندې:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

بیلګه:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \quad u(x) = x \quad v(x) = x+2$$

$$\Rightarrow u'(x) = 1 \quad v'(x) = 1 \quad [v(x)]^2 = (x+2)^2$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{1 \cdot (x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + x^3}{x^4} \quad u(x) = 2x^2 + x^3 \quad v(x) = x^4$$

$$\Rightarrow u'(x) = 4x + 3x^2 \quad v'(x) = 4x^3 \quad [v(x)]^2 = x^8$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{(4x + 3x^2) \cdot x^4 - (2x^2 + x^3) \cdot 4x^3}{x^8}$$

$$= \frac{4x^5 + 3x^6 - 8x^5 - 4x^6}{x^8} = \frac{-x^6 - 4x^5}{x^8} = \frac{-x^5(x+4)}{x^8} = \frac{-x+4}{x^3}$$

بیلگه:

د  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$  تابع (د  $x^2-4 \neq 0$  سره) مشتق غوارو پیدا کرو.

حل: که چیرې  $g(x) = x^2$  او  $h(x) = x^2 - 4$

$$g'(x) = 2x$$

وضع شي نو لرو:

$$h'(x) = 2x$$

او د ویش قانون له مخي لرو:

$$f'(x) = \left[ \frac{g(x)}{h(x)} \right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{[x^2-4]^2}$$

$$= \frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$



دفر نخیال شمیرنه (مشتق یا راییلیدنه) ۷۱

تولگه:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	<p>کمبنتویش:            (د سیکانت جگیدنه یا منحنی تغیر            ارزینت)</p>
$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	<p>دفرنشلویش            (د تانجنت جگیدنه یا لحضوي تغیر            ارزینت)</p>
<p>د ثابتي یا تل همغې قانون  <math>f(x) = c \cdot u(x)</math> د <math>c</math> ثابت تي سره  <math>f'(x) = c \cdot u'(x)</math> یا لنډ: <math>f' = c \cdot u'</math></p>	
<p>د جمعې- یا زیاتون قانون  <math>f(x) = u(x) + v(x)</math>  <math>\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)</math>            یا لنډ: <math>f' = u' + v'</math></p>	
<p>د ضرب – یا حل قانون  <math>f(x) = u(x) \cdot v(x)</math>  <math>\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)</math>            یا په لنډه بڼه: <math>f' = u' \cdot v + u \cdot v'</math></p>	
<p>د وېش قانون  <math>f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}</math>  <math>\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}</math>            یا په لنډه بڼه: <math>f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}</math></p>	
<p>زنخیري قانون:  <math>f(x) = f[z(x)]</math>  <math>\Rightarrow f'(x) = \underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}</math>            د باندنی مشتق      دننی مشتق</p>	

## دنورو پسی توابعو مشتق:

تابع مساوات	مشتق تابع مساوات
-------------	------------------

$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
--------------	---------------

$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
------------------	-------------------

$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
------------------	--------------------

$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
-----------------	-----------------------

بیلگه:

$f(x) = x \cdot e^x$  د ضرب قانون:  $u' \cdot v + u \cdot v'$  د  $u = x; u' = 1; v = e^x; v' = e^x$  سره.

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$$

ثابتي دقانون:  $f(x) = 3 \ln x$   $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

د ضرب قانون:  $f(x) = x^2 \cdot \ln x$  د  $u' \cdot v + u \cdot v'$

سره  $u = x^2; u' = 2x; v = \ln x; v' = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = \underline{\underline{(2 \ln x + 1)x}}$$

زنخیری قانون:  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$   $f'(x) = f'(z) \cdot z'$

$$z = \frac{1}{2}x \Rightarrow z' = \frac{1}{2} \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$u(x) = 3 \cos(x) \quad v(x) = -2 \sin(x) \quad \text{د جمعې قانونو:} \quad f(x) = 3 \cos(x) - 2 \sin(x)$$

$$\Rightarrow u'(x) = -3 \sin(x) \quad v'(x) = -2 \cos(x)$$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{-3 \sin(x) - 2 \cos(x)}}$$

### 3.III : د مشتقشمیرني قوانین

پوښتنې

#### مشتقشمیرنه **V**

لومړۍ: مشتق یې ونیسئ:

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 \quad \text{ب -} \quad f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^4 \quad \text{ت -} \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 3 \quad \text{ث -} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \quad \text{ج -} \quad f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \quad \text{= ج}$$

$$f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{= خ} \quad f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 5 \quad \text{ح -}$$

دویم: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ د دې لپاره تاسو ته معلوم مشتقواعد وکاروئ او قاعده چې کاروئ و لیکئ

## دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

الف-  $f(x) = 4x^3$  - ب  $f(x) = 3e^x$  - پ  $f(x) = 5 \ln x$

ت -  $f(x) = x^2 + x$  - ب  $f(x) = 2x^3 - 3x^2$  - ث  $f(x) = 4x^5 - 2 \ln x + 3e^x$

ج =  $f(x) = x \cdot e^x$  - چ  $f(x) = x^2 \cdot \ln x$  - ح  $f(x) = x^3 \cdot (x^2 - 1)$

دریم: د لاندی توابعو مشتق ونیسئ د دی لپاره تاسو ته معلوم مشتق قواعد و کاروی او قاعده چي کاروی و لیکئ

الف-  $f(x) = \frac{x+1}{x}$  - ب  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  - پ  $f(x) = \frac{(x+1) \cdot e^x}{x}$

ت -  $f(x) = (x+1)^2$  - ب  $f(x) = (x^2+1)^2$  - ث  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

ج =  $f(x) = 2ax^3 - 4bx$  - چ  $f(x) = e^{ax}$  - ح  $f(x) = e^{-(x-2)}$

څلورم: د لاندی توابعو مشفقونه پیدا کری:

الف-  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7$  - ب  $f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \sqrt{x}$

پ-  $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3}}{x^3}$  - ت  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

ب-  $f(x) = (a^2 + x)^2$  - ث  $f(x) = (2x^3 - 3)^2$

پنځم: د لاندی توابعو مشفقونه پیدا کری:

الف-  $f(x) = (x + e^x) \cdot \ln x$  - ب  $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

پ-  $f(x) = (x+1) \cdot e^{(x+1)}$  - ت  $f(x) = a \ln x - be^x - 3x^2$

$$f(x) = \sqrt{\frac{3+x}{3-x}} \quad \text{ت} \quad f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$$

شپرم: د لاندې توابعو دريواره مشتق ونئسئ

$$\text{الف-} \quad f(x) = 3x + 4 \quad \text{ب-} \quad f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3$$

$$\text{پ-} \quad f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad \text{ت-} \quad f(x) = (2x + 1)^3$$

$$\text{ب-} \quad f(x) = x - x^4 + 3 + x \quad \text{ت-} \quad f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4$$

$$\text{ج-} \quad f(x) = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2 \quad \text{چ-}$$

## مفصل حلونه

### مشتقشمیرنه V

یادونه: په لاندې کې (Sr) د جمعی قانون (Pr) د ضرب قانون،  
Kettenregel ځنډیري قانون (Kr) د ثابتې قانون (Qr) د وېش قانون په معنا دي

لورمړی:

$$\text{الف-} \quad f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$\text{ب-} \quad f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x^2 + 2x$$

$$\text{پ-} \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x$$

$$f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{8}{3}x^3 + 12x \quad \text{ت -}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \Rightarrow f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x^2 - 2 \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{2} = \text{ج}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 \quad \text{چ -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 5 \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 2x - 1 \quad \text{ح -}$$

$$f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{12}x^3 - x = \text{خ}$$

دویم:

$$\text{الف - } f(x) = 4x^3 \quad \text{د ثابتي قانون: } f'(x) = 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = \underline{12x^2} \quad \text{(Kr)}$$

$$\text{ب - } f(x) = 3 \cdot e^x \quad \text{(Kr)} \quad f'(x) = 3 \cdot (e^x)' = \underline{3e^x}$$

$$\text{پ - } f(x) = 3 \cdot \ln(x) \quad \text{(Kr)} \quad f'(x) = 3 \cdot [\ln(x)]' = 3 \cdot \frac{1}{x} = \underline{\frac{3}{x}}$$

$$\text{ت - } f(x) = x^2 + x \quad \text{د جمعي قانون: } f'(x) = \underline{2x+1}$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 \quad (\text{Sr/Kr}) \quad f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x = \underline{\underline{6x^2 - 6x}} \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = 4x^5 - 2 \cdot \ln(x) + 3 \cdot e^x$$

$$(\text{Sr/Kr}) \quad f'(x) = 4 \cdot 5x^4 - 2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot e^x = \underline{\underline{20x^4 - \frac{2}{x} + 3e^x}} \quad \text{ث -}$$

ج =  $f(x) = x \cdot e^x$  د ضرب قانون  $u' \cdot v + u \cdot v'$  د  $u = x; u' = 1; v = e^x; v' = e^x$  سره

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$$

چ -  $f(x) = x^2 \cdot \ln x$  د ضرب قانون  $(\text{Pr})$  د  $u'v + uv'$  د  $u = x^2; u' = 2x; v = \ln x; v' = 1/x$  سره.

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x) \quad (\text{Pr}): \quad u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{mit } u = x^2; u' = 2x; v = \ln(x); v' = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x = \underline{\underline{(2 \ln x + 1)x}}$$

$$f(x) = x^3 \cdot (x^2 - 1) \quad (\text{Pr/Sr}): \quad u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{ح -}$$

د  $u = x^3; u' = 3x^2; v = x^2 - 1; v' = 2x$  سره

$$f'(x) = 3x^2 \cdot (x^2 - 1) + x^3 \cdot 2x = 3x^4 - 3x^2 + 2x^4 = \underline{\underline{5x^4 - 3x^2}}$$

دریم: الف-د لاندې پښتو:

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{د وېش قانون:} \quad \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

د  $u = x+1; u' = 1; v = x; v' = 1; v^2 = x^2$  سره

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x - (x+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x - x - 1}{x^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$$

ب -

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad (\text{Qr/Sr}): \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\text{mit } u = x; u' = 1; v = x+1; v' = 1; v^2 = (x+1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{(x+1)^2}}}$$

پ- د... سره

$$f(x) = \frac{(x+1)e^x}{x} \quad (\text{Qr/Pr/Sr}): \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\text{mit } u = (x+1)e^x; u' = e^x + (x+1)e^x; v = x; v' = 1; v^2 = x^2$$

$$f'(x) = \frac{[e^x + (x+1)e^x] \cdot x - (x+1)e^x \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{xe^x + x^2e^x + xe^x - xe^x - e^x}{x^2} = \underline{\underline{\frac{(x^2 + x - 1)e^x}{x^2}}}$$

ت -

$$f'(x) = f'(z) \cdot z' \quad \text{ځنډيري قانون: } f(x) = (x+1)^2$$

$$z = x+1 \Rightarrow z' = 1 \quad f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z$$

$$f'(x) = 2(x+1) \cdot 1 = \underline{\underline{2(x+1)}}$$

$$f(x) = (x^2+1)^2 \quad \text{ت -}$$



خُنزیري قانون:  $f'(x) = f'(z) \cdot z'$

$$z = x^2 + 1 \Rightarrow z' = 2x \quad f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z$$

$$f'(x) = 2(x^2 + 1) \cdot 2x = 4x(x^2 + 1) = \underline{\underline{4x^3 + 4x}}$$

ث -  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$  خُنزیري قانون  $f'(x) = f'(z) \cdot z'$

$$z = \frac{1}{2}x \Rightarrow z' = \frac{1}{2} \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}}}$$

$$f(x) = 2ax^3 - 4bx \quad (\text{Sr/Kr}) \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 3ax^2 - 4b = \underline{\underline{6ax^2 - 4b}} = \text{ج}$$

چ -  $f(x) = e^{ax}$  خُنزیري قانون:  $f'(x) = f'(z) \cdot z'$

$$z = ax \Rightarrow z' = a \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \Rightarrow f'(x) = e^{ax} \cdot a = \underline{\underline{ae^{ax}}}$$

- ح

خُنزیري قانون:  $f'(x) = f'(z) \cdot z'$   $f(x) = e^{-(x-2)}$

$$z = -(x-2) = -x+2 \Rightarrow z' = -1 \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-(x-2)} \cdot (-1) = \underline{\underline{-e^{-(x-2)}}}$$

خُورم:

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{9x^2 - 4x + 1}} \quad \text{الف}$$

$$f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot e^x = \underbrace{x^{\frac{5}{2}}}_u \cdot \underbrace{e^x}_v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv' \quad \text{ب -}$$

د  $u = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$  او  $v = e^x \Rightarrow v' = e^x$  سره لرو:

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \cdot e^x + x^{\frac{5}{2}} \cdot e^x = \underline{\underline{\left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}\right) e^x}}$$

پ-  $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3}}{x^3} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^3} = \frac{x^{\frac{4}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}}{x^3} = \frac{x^{\frac{8}{2}}}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} = x \Rightarrow f'(x) = 1$

ت-  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

د  $u = 2x-1 \Rightarrow u' = 2$  او  $v = x+2 \Rightarrow v' = 1$  سره لرو:

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot (x+2) - (2x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \underline{\underline{\frac{5}{(x+2)^2}}}$$

ب-  $f(x) = (a^2 + x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(a^2 + x) \cdot 1 = \underline{\underline{2(a^2 + x)}}$

ث -

$$f(x) = (2x^3 - 3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(2x^3 - 3) \cdot 6x^2 = 12x^2(2x^3 - 3) = \underline{\underline{24x^5 - 36x^2}}$$

پنجم:

الف-

$$f(x) = \underbrace{(x + e^x)}_u \cdot \underbrace{\ln(x)}_v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

د  $u = x + e^x \Rightarrow u' = 1 + e^x$  او  $v = \ln(x) \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$  سره کیږي یا لرو:

$$f'(x) = (1 + e^x) \cdot \ln(x) + (x + e^x) \cdot \frac{1}{x} = \ln x + \ln x \cdot e^x + 1 + \frac{e^x}{x}$$

ب -

د  $f(x) = \ln(x^2 - 1)$  زنجیري قانون  $f'(x) = f'(z) \cdot z'$

$$z = x^2 - 1 \Rightarrow z' = 2x \quad f(z) = \ln(z) \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

ب-  $f(x) = (x+1) \cdot e^{(x+1)} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$

د  $u = (x+1) \Rightarrow u' = 1$  او  $v = e^{(x+1)} \Rightarrow v' = e^{(x+1)}$  سره

$$f'(x) = 1 \cdot e^{(x+1)} + (x+1) e^{(x+1)} = [1 + (x+1)] e^{(x+1)} = \frac{(x+2) e^{(x+1)}}{}$$

ت -  $f(x) = a \cdot \ln(x) - b \cdot e^x - 3 \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{x} - be^x - 6x$

ب -  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

د  $u = (x+1)^2 \Rightarrow u' = 2(x+1)$  او  $v = (x-1)^2 \Rightarrow v' = 2(x-1)$

د  $v^2 = (x-1)^4$  سره لرو:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{2(x+1) \cdot (x-1)^2 - (x+1)^2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\
 &= \frac{(x-1) [2(x+1)(x-1) - 2(x+1)^2]}{(x-1)^4} = \frac{2(x+1)(x-1) - 2(x+1)^2}{(x-1)^3} \\
 &= \frac{2(x^2-1) - 2(x+1)^2}{(x-1)^3} = \frac{2x^2 - 2 - 2x^2 - 4x - 2}{(x-1)^3} = \frac{-4x-4}{(x-1)^3} = \underline{\underline{-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}}}
 \end{aligned}$$

ث -

$$f(x) = \sqrt{\frac{3+x}{3-x}} = \left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{3+x}{3-x}\right)'$$

د ځنډېري قانون له مخې منځشمیرنه:

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad u = 3+x \Rightarrow u' = 1; v = 3-x \Rightarrow v' = -1; v^2 = (3-x)^2$$

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)' = \frac{1 \cdot (3-x) - (3+x) \cdot (-1)}{(3-x)^2} = \frac{3-x+3+x}{(3-x)^2} = \frac{6}{(3-x)^2}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{6}{(3-x)^2} = \frac{3(3-x)^{\frac{1}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (3-x)^2} = \frac{3(3-x)^{-\frac{3}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{3}{(3-x)^{\frac{3}{2}} (3+x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{(3-x)(3-x)^{\frac{1}{2}} (3+x)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{3}{(3-x) [(3-x)(3+x)]^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\frac{3}{(3-x)(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}}}
 \end{aligned}$$

شپیرم:

$$\text{الف- } f(x) = 3x + 4 \Rightarrow f'(x) = 3 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) = 0$$

$$f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3 = 5x^3 - 3x - 4$$

$$\Rightarrow f'(x) = 15x^2 - 3 \quad f''(x) = 30x \quad f'''(x) = 30 \quad \text{ب-}$$

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 9x^2 + 4x + 1 \quad f''(x) = 18x + 4 \quad f'''(x) = 18 \quad \text{پ-}$$

$$f(x) = (2x + 1)^3$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(4x^2 + 4x + 1) = 24x^2 + 24x + 6$$

$$f''(x) = 48x + 24 \quad f'''(x) = 48 \quad \text{ت-}$$

$$f(x) = x - x^4 + 3 + x = -x^4 + 2x + 3$$

$$\Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 2 \quad f''(x) = -12x^2 \quad f'''(x) = -24x \quad \text{ث-}$$

ث -

$$f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4 = x^4 - 9x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 9 \quad f''(x) = 12x^2 \quad f'''(x) = 24x$$

ج- ثابت یا تل همغه=konstant

$$f(x) = \underbrace{a+b+c^2}_{\text{Konstante}} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$$

$$f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = -3cx^2 - \underbrace{a+b+c^3-1}_{\text{Konstante}}$$

$$f''(x) = -6cx \quad f'''(x) = -6c$$

ج -

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 4x + 5 \quad f''(x) = 24x - 4 \quad f'''(x) = 24$$

### د جگو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاسته راځي. د  $f'(x)$  بیا مشتق نیوني سره د  $f''(x)$  مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادېږي.

بیلگه:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x) = 6x + 2}}$$

د  $f''(x)$  بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x) = 6}}$$

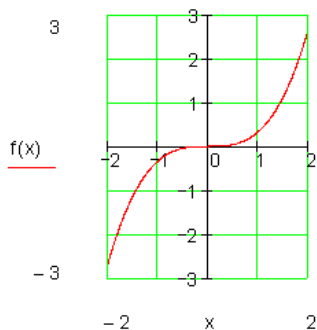
د  $f(x) = \frac{x^3}{3}$  تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

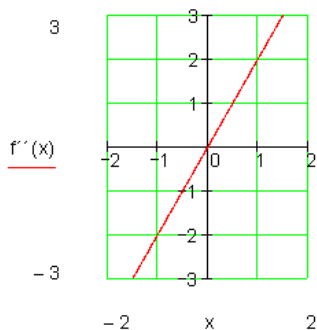
د تابع گراف :

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

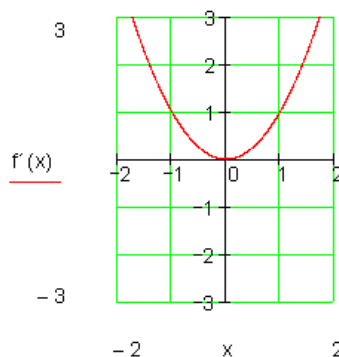
$$f(x) = \frac{x^3}{3}$$



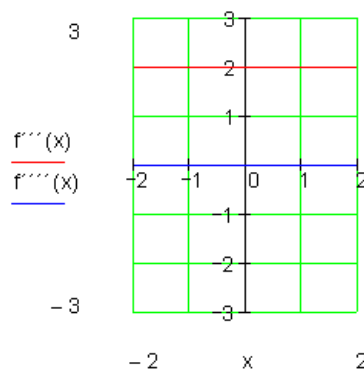
$$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$$



$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$$

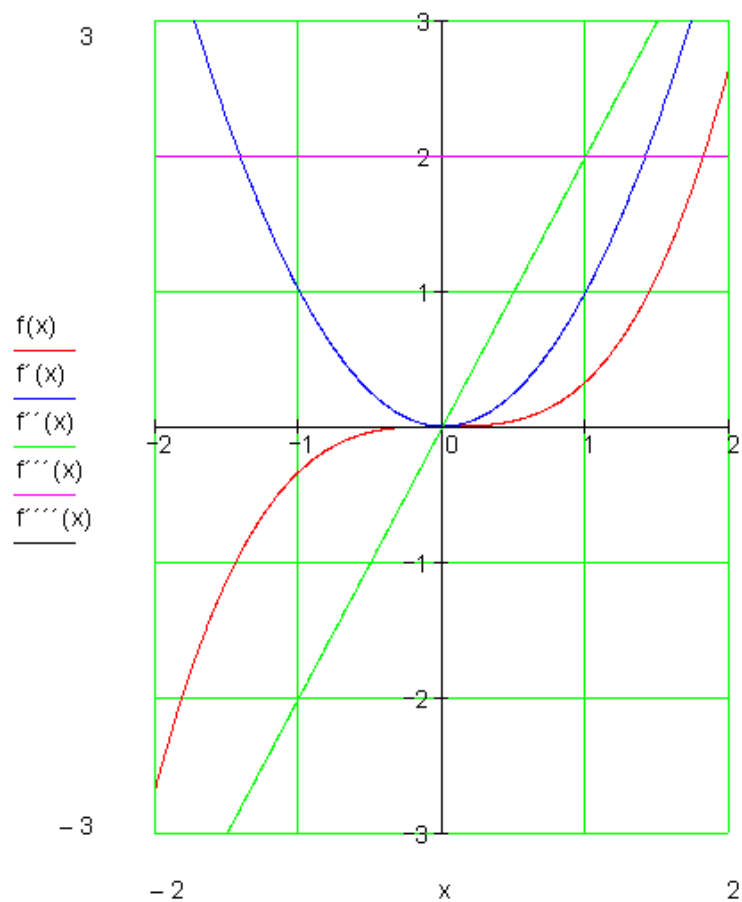


$$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 0$$



د ټولو توابعو گراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې (دا گراف د لاندې بیلګې پسي دی)

$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$	بیلګې:
$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$	اول:
$f''(x) = 24x - 4$	
$f'''(x) = 24$	



دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$

$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$



ټولګه:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

د  $f(x)$  لومړی مشتق د  $f(x)$  مشتق تابع ده:

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

د  $f(x)$  دویم مشتق د  $f'(x)$  مشتق تابع دی:

$$f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$$

د  $f(x)$  دریم مشتق د  $f''(x)$  مشتق تابع دی:

په ځانګړي ډول: یو په خوشه ویاند – یا راشنل تابع  $f(x)$  په خوښه د مشتق قابلیت لري.

## تانجنت او عمود

### د تانجنت جګینه

بیلګه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

تابع لرو.

د تانجنت میل: د یوه تابع د ګراف میل په ټکي  $(x_0 | f(x_0))$  کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

مور  $f(x)$  تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

مور مربع تابع لرو

$$f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

د تابع مشتق

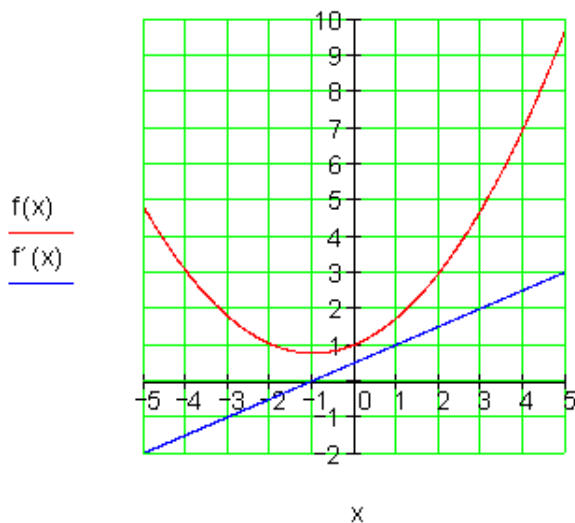
ارزښتجدول:

$x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
$f'(x)$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د  $f(x)$  ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرتکی دی:  $S(-1, 0.75)$   
د  $x = -1$  ارزښت لپاره  $f'(-1) = 0$  د میل تابع ارزښت دی:  
دا دا معنی لري، چې په ککرتکي کې د  $f'(x)$  میل صفر دی.  
تانجنت په  $s$  کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت (افقي) ځغلي؛ یعنی د  
 $-x$  محور سره غبرگ ځغلي.

گرافونه:

$$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \quad f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



بیلگه:

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7$$

تانجنت دی پیداکړی شي، چې د  $f(x)$  گراف د  $P(-2, f(-2))$  په ټکي کې لمسوي،

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 14x + 1 \quad P(-2 | f(2)) \Rightarrow x_0 = -2 \\
 t(x) &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
 f'(x_0) &= f'(-2) = 24 - 28 + 1 = -3 \\
 f(x_0) &= f(-2) = -16 + 28 - 2 - 7 = 3 \\
 \Rightarrow t(x) &= -3(x + 2) + 3 = -3x - 6 + 3 = \underline{\underline{-3x - 3}}
 \end{aligned}$$

**پایله:**

د  $f(x)$  تابع گراف کی تانجنت او عمود په  $P(x_0, f(x_0))$  ټکي کی لاندې بڼه لري.

$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{جگیدنه}}(x - x_0) + f(x_0)$	$n(x) = -\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{جگیدنه}}(x - x_0) + f(x_0); \quad f'(x_0) \neq 0$
د تانجنت مساوات	د عمود مساوات

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پیل: تانجنت دې د  $f(x)$  گراف د  $P(x_0, f(x_0))$  په ټکي کی لمس کړي. عمود (نورمال) دې د  $f(x)$  گراف د په  $P(x_0, f(x_0))$  ټکي کی عمود یا ولاړ غوڅ کړي. د تانجنت مساوات:  $t(x) = m_t \cdot x + b_t$

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + b_t \quad (1) \quad \text{د } m_t = f'(x_0) \text{ سره لیکو:}$$

دا چې  $P(x_0, f(x_0))$  تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x_0 + b_t = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کی ږدو، نو لږ:

$$\begin{aligned}
 t(x) &= f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) \\
 &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)
 \end{aligned}$$

عمود (نورمال):

د منحنی سره په همغه ټکي کی چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

## دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رایلیدنه)

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)}}$$

بیلگه:

$$د \quad f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \quad \text{تابع لرو.}$$

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کری:

حل: په لاندې توگه د تابع مشتق نیسو او گراف یې (خبره لاندې کینل شوي) کارو:

$x$	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad \text{لرو:}$$

د تانجنت میل په ټکي  $x_0$  کې د میل ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د  $P(-2, -5)$  په ټکي کې تانجنت په  $f(x)$  باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad , P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د  $x_0 = 2$  په ځای کې دا لاندې لرو:

$$t(x) = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x - 2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x + 1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x, \quad P(2 | f(2))$$

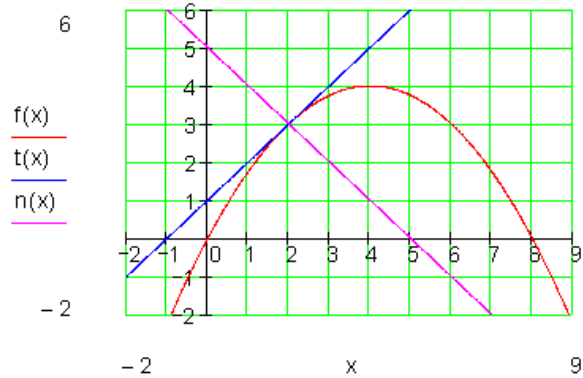
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

د  $x_0 = 2$  سره لاندې راځوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

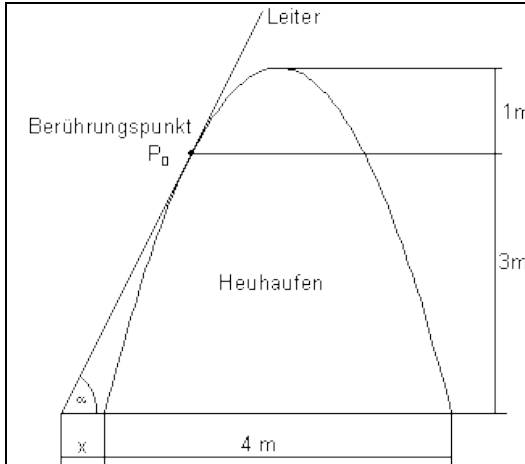
$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x - 2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x + 5}}$$



د یوې تابع د استعمال بیلگه د تانجنټ له پاره :

له ځمکې څخه د وینو په توپۍ یوه زینه ایښول کیږي. دا زینه په درې متره جگوالي توپۍ لمسوي.

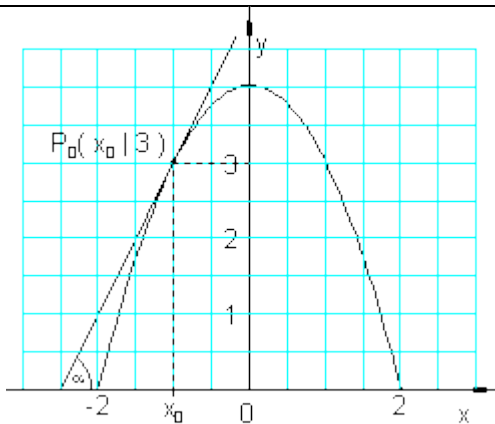
## دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رایلیدنه)



د وینو توپی دی د یوه کینکودي پارابول  
خیره ولری، چي بنسټ یې ۴ متره سرور  
دی او ۴ متره جگوالی لری. غوارو په دی  
یوه زینه کیردو، چي د وینو توپی سره  
تانجنت جوړ کړي.

په کومه زاویه (کونج) باید دا زینه کینول  
شي؟

د وینو توپی له بیخ څخه دی په کوم  
لرېوالي په ځمکه دا زینه کینول شي؟



مورد د  $y$  محور داسي کارو، چي د  
پارابول له ککړي (څوکي) څخه تېرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

مورد د  $x_0$  لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{0/2} = \pm 1$$

شمیرنه :

د نورو شمیرنو لپاره ارزښت  $x_0 = -1$  کاروو. زینه توپی په  $P_0(-1, 3)$  ټکي کې  
لمسوي. مورد په  $P_0(-1, 3)$  ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow x_0 = -1; f(x_0) = 3$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$d \quad f'(x) = -2x \quad \text{سره لاس ته راځي}$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

$$\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63,4^\circ}} \quad \text{جوړه زاویه:}$$

د زینې او د وینو توپې تر منځ واټن د  $f(x)$  د صفرځای او د تانجنټ  $t(x)$  د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2,5$$

د  $x$  ارزښتونو  $-2,5$  او  $-2$  ترمنځ واټن  $0,5$  دی.

زینه د وینو د توپې له پینو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنټ مساوات څنګه ټاکل کېږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

## په توليد کي د مشتق استعمال

فعاليت : يوه فابريکه  $x$  توليد کوي. په دې توليد د لگښت کيږي، چې دا د توليد په واک کي دى، چې مور ورته د لگښت تابع وايو او په  $K(x)$  سره بنايو.

څنگه کولى شو، چې د زيات توليد لپاره لگښت را تيبت کړو؟

د لگښت تابع  $K(x)$  د توليد سټ (دېرې) او ټول لگښت تر منځ تړاو انځوروي.

که توليد د  $\Delta x$  شاو خوا کي زيات شي، نو لگښت هم د  $\Delta K$  په شاو خوا کي زياتيږي.

کمښتويش (تقسيم تفاضل)  $\frac{\Delta K}{\Delta x}$  د منځني لگښت زياتوالى بسايي، د يوه  $\Delta x$  توليد تغير سره (منځنى تغير ارزښت)

د  $x_0$  ځاى کي لحضوي تغير ارزښت د مشتق لگښت بلل کيږي. دا د پوله ارزښت  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$  سره ټاکل کيږي، دا په دې معني، چې د لگښت د تابع  $K$  مشتق.

پيژند : د لگښتتابع  $K(x)$  مشتق د مشتق ارزښت  $K'(x)$  په نامه يادوو يا يې پوله لگښت  $K'(x)$  هم بولو.

بيلگه: د لگښت تابع  $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$  دې ورکړ شوي وي.

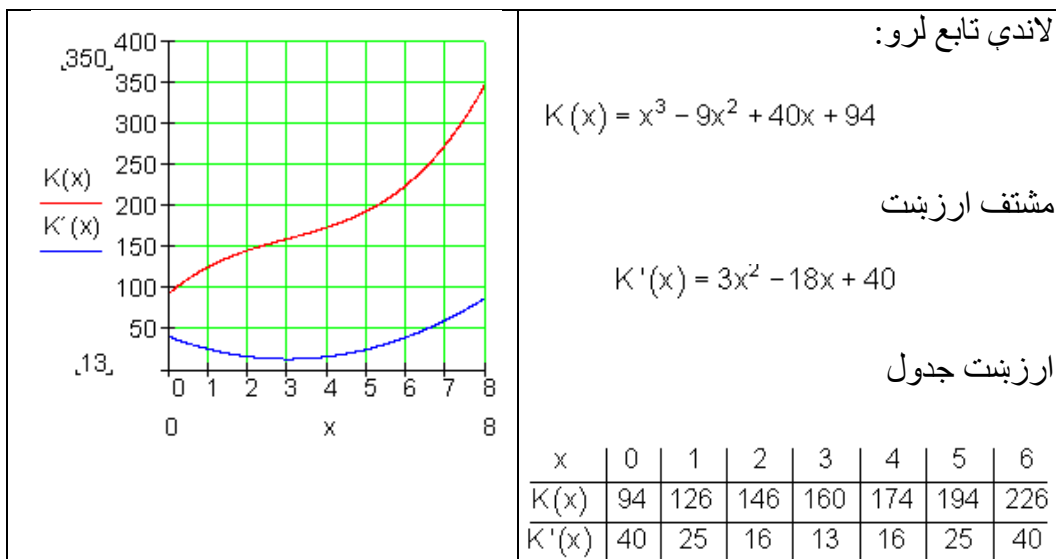
الف: مشتق ارزښت وټاکي، يو ارزښت جدول د  $K(x)$  او  $K'(x)$  لپاره وکارى او په پروتولاړ سيستم يا کواورديناټسيستم کي يې گراف وکارى.

پوله ارزښت د  $I = [0 ; 6]$  لپاره په ۱ پل (قدو) پراخوالي سره.

ب : د دېر کم لگښت زياتوالى و ټاکي:



دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلدنه) ۹۵



خورا کم د لگښت زیاتوالی (لگښت جگېدنه) د پارابول  $K'(x)$  په ککره (خوکه) کې پروت دی، یعنی هلته چې تانجنت  $K'(x)$  پروت یا افقي دی

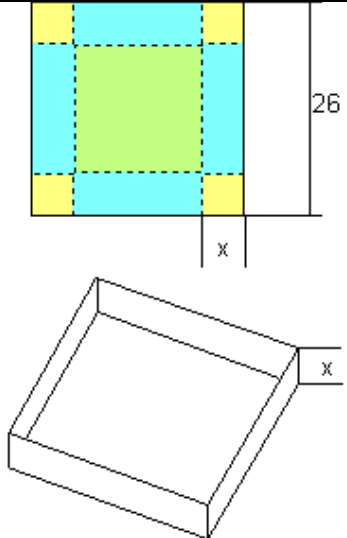
$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

د تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره:

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

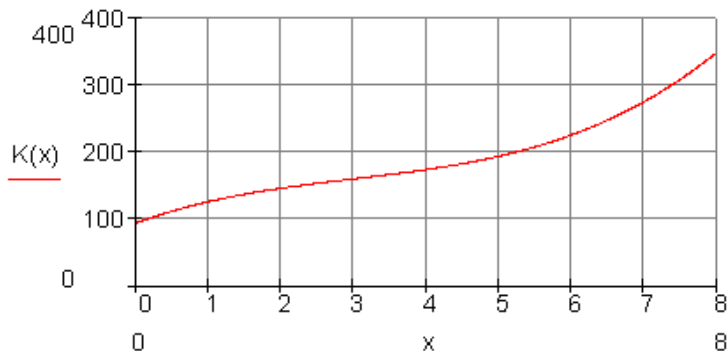
همدا نتیجه مور د  $K'(x)$  لپاره جدول څخه هم لوستلی شوه.

نتیجه په دې معنا ده: کوچنی نرخ جگوالی د یوه  $x = 3$  مقدار څخه لاس ته راوړو، دا هلته **13 GE / ME** دی.

	<p>د ي، مربع کارتون (د کلک کاغذ څخه جوړ) څخه، چې ۲۶ سانتيمتره د اړخ اوږدوالی لري يو بکس جوړوو بي له سرپوښ، چې د <math>x</math> جگوالی لري. الف: د يوه تابع ترم وټاکي، چې د بکس حجم (ډکي) <math>V</math> د <math>x</math> په واکوالي يا تابعيت کي ښايي.</p> <p>ب - گراف وکارئ او په نږدې توگه يي ماگسيما (خورا جگ) حجم و ټاکي.</p>
---	---

- د يوه روغتون د نرختابع (مصرف تابع)  $K(x)$  د ناروغانو گڼه (تعداد)  $x$  او د ټول مصرف ترمنځ اړيکي انځوروي، داسي چې  $x = 1$  د 100 ناروغانو معنی او  $y = 1$  دی معنی چې  $1000 \text{ € / Tag.}$  يوزر يورو په ورځ ( $1000 \text{ € / Tag.}$ ).

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



الف: د مصرف تابع په خپله کتابچه کي وليکي.

ب: د لگښت تابع مشتق د مشتق لگښت (-مصرف) يا دحدمصرف په نامه ياديږي. تاسو د لگښت زياتيدنه د ناروغانو په واکوالي يا تابعيت کي تشریح کړئ. (د  $K(x)$  جگيدونه).

$K'(x)$  وټاکي او گراف يي په وضعيه سيستم (پروت- ولاړ-سيستم) کي انځور کړئ

پ: د ناروغانو د کوم تعداد سره د لگښت زیاتوال خورا کم دی؟ دا قیمتونه وشمیری.

## د الجبري توابعو مشتق

د الجبري او نورو توابعو بیژندونه:

1- یو بنسټیز تابع الجبري بلل کېږي، که د ترتیب قانون یې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي، په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري عملی (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) چې مخرج یې صفر نه وي (توانکونه او جذرنیونه) د توان-اوریبني اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي.

2- نالجبري توابع ترانسڅنډنت بلل کېږي، لکه اکسپوننشل-ولوگاریمی- او د زاویو توابع.

3- یو الجبري تابع راشنل بللکیري، که د ترتیب قانون یې د یو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای پیرې راشنل د شمېر عملی ((جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) چې مخرج یې صفر نه وي) توانکونه او جذرنیونه (د توان-اوریبني اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي.

بیلگه:

د  $f(x) = \sqrt{x}$  تابع ورکړ شوی په  $x_0$  کې د تابع مشتق پیدا کړئ او د مشتق تابع په گوته کړئ.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}$
$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}$
$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$

$$f'(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د  $x_0$  په ځای کې  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  د تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  مشتق دی.

د تیرو درسونو پر بنسټ  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  د مشتق تابع ده.

د  $f(x) = x^q$  ;  $q \in Q$  ډوله توابعو مشتق:

د شمیرني له مخې لاندې لاس ته را وړني لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f'(x) = 2 \cdot x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کیري، چې لاندې جوړبښتقانون باور لري:

$f(x) = x^q \Rightarrow f'(x) = q \cdot x^{q-1}$ <p style="text-align: center;"><math>q \in Q</math> سره</p>	<p>د توان (پونټخ) قانون بی له ښوونې:</p> <p>1- مختني اکسپوننت د متحولې <math>x</math> تر مخ د فاکتور په څېر لیکل کېږي.</p> <p>2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.</p>
--	---

بیلگه: د  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  مشتق پیدا کری.

بنوونه:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

بیلگه:

د  $f(x) = 3x^4$  تابع مشتق پیدا کری.

بنوونه:

$$f(x) = 3x^4 \quad c = 3 \quad u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3$$

$$f'(x) = c \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$$

بیلگه:

غوارو د  $f(x)$  تابع مشتق د  $x = 2$  په خای کې ونیسو:

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = \underline{\underline{4}}$$

$$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = 2u + \Delta x$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2u + \Delta x) = \underline{\underline{2u}}$$

بیلگه:

د تابع  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  مشتق د  $x = 2$  په خای کې پیدا کری.

بنوونه:

## دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{1}{3(3 + \Delta x)}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{-1}{3(3 + \Delta x)} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{9}}}$$

$$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{-1}{(u + \Delta x + 1)(u + 1)}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(u + \Delta x + 1)(u + 1)} = \underline{\underline{-\frac{1}{(u + 1)^2}}}$$

بیلگه 2:

(توان (Potence) مشتق، چی طبیعی جگ عدد یا اکسپوننت لري: مور د  $y = f(x) = x^n$ ,  $1, 2, 3, \dots$  غوارو مشتق یی پیدا کړو: بنوونه: مور په لاندې توگه مخ ته خو.

د بینوم جملی په بنسټ په هر  $x_0$  ځای کې دا لاندې باور لري.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} \\ &= \frac{\binom{n}{0}x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1}h + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n - x_0^n}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left( x_0^n + nx_0^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x_0^n \right) \\ &= nx_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \end{aligned}$$

د  $h \rightarrow 0$  لپاره تابع  $y = x^n$  د  $x_0$  په هر ځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري:

$$(dy/dx)_{x=x_0} = f'(x) = nx^{n-1}$$

ددې پورته بېلگې بل ډول بنوونه دي د پوښتنې په څېر وي.

د زنجيري توابعو مشتق

د  $u$  تابع کېدی شي د  $v$  تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع (خنجیروني قاعده)، پېژند ورسو (تعریف ساحه)  $D(u)$  د دنني تابع د  $W(v)$  سره گډ توکي يا عناصر ولري.

ددې لپاره لیکو:  $u \circ v(x) = u(v(x))$ ، که د  $f$  تابع د  $y = f(x) = u(z)$  سره او  $z = v(x)$  وي.

اوس د  $x = x_0$  ځای کې د  $y = f(g(x))$  تړلي يا خنجیري تابع مشتقووالي څیرو:

$$f(x) = f[g(x)] \\ \Rightarrow f'(x) = f'(g) \cdot g'(x)$$

دنننی مشتق د باندنی مشتق (دادې ورپورته شي)

ددې لپاره نیسو چی:

1- د  $g(x)$  دنننی تابع د  $x = x_0$  په ځای کې مشتقور ده. دانو بیا باید د  $x_0$  په یوه معلوم تعریف شوي چاپیریال کې متمادي (نه پریکیدونکی) وي.

مور لرو:  $g(x+h) \rightarrow g(x_0)$  د  $h \rightarrow 0$  لپاره.

همداسې  $g(x_0 + h) = g(x_0) + k$  داسې، چې  $k \rightarrow 0$  د  $h \rightarrow 0$  لپاره.

2- که د  $y = f(z)$  د باندنی تابع په  $z = z_0$  کې د مشتق قابلیت ولري.

د  $y = f(g(x))$  کمښتویش کیدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه(فورم) یې هم بدله شي :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)}$$

$$= \frac{f(z_0 + k) - f(z_0)}{k} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

که  $h > 0$  لاره شي ( همداسې  $k > 0$  خواته ځي) نو دا اړیکې مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_0=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} ; \dots\dots (*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_0=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چیرې د ځای په ځای (فیکس) ځای  $x = x_0$  لپار بیرته  $x$  نیسو، نو کیدی شي چې (\*) فرمول په لاندې ډول ورکړ شي او د  $z = g(x)$  ,  $y = (z)$  لپاره باور ولري:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} ; \dots\dots (**)$$

په پام کې دي وي، چې  $\frac{dy}{dx}$  د  $z = g(x)$  په ځای کې باید ترتیب (تنظیم) شي.

دا (\*) فرمول ځنځیري قاعده(لار،قانون) بلل کیري او د پورته نیونو یا فرضیو سره باوري دی. دا په ساده ډول په یاد لرلی شو، ځکه چې بنی خوا د کینې خوا سره د فورمال  $dz$  زیاتیدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته بنووني لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

جمله :  
زنځیري قاعده



دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه) ۱۰۳

لرو :  $f(z) = f(g(x))$ ، نود  $z = g(x)$  تابع په  $x$  او د  $y = f(z)$  تابع په  $z = g(x)$  کې د مشتق قابلیت لري یا مشتقور دی، نو ترلی ورکړ شوی د  $y = f(g(x))$  تابع هم په  $x$  کې د مشتق قابلیت لري او دا باوري کېږي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dg}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

بېلگه:

د  $f(x) = (x^2 + 2)^2$  مشتق ونیسئ.

$$f(x) = (x^2 + 2)^2$$

Substitution بدلون  $f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z \quad z'(x) = 2x$

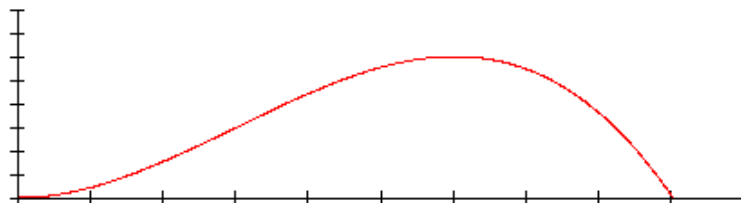
$$f'(x) = f'(z) \cdot z'(x) = 2z \cdot 2x = 2(x^2 + 2) \cdot 2x = \underline{\underline{4x^3 + 8x}}$$

د مشتق استعمال په طبیعي علومو

په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کېږي، چې د یوې متحولې (اوښتونې)  $x$  په واک کې وي.

په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څیرو، چې د وخت په واک کې وي وي.

لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلي لار (دا وروسته روښانه کېږي)



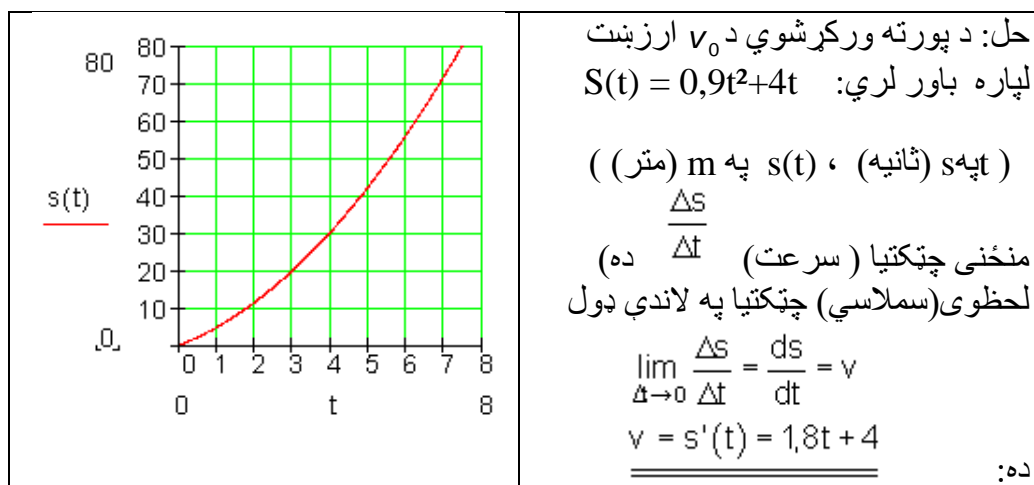
فعالیت:

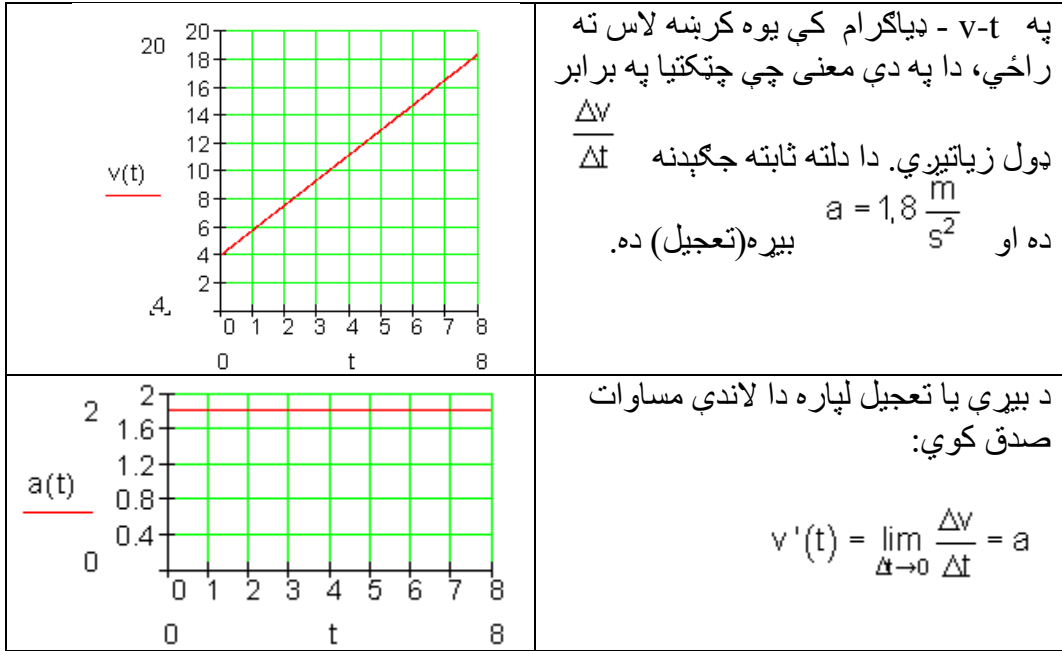
گران زده کوونکي دي د فزیک د درسونو له مخي د چټکتيا او بيړي تعريفونه ور کړي او د لار، وخت، چټکتيا او بيړي فرمولونه دي وليکي.

بیلگه:

د یوه په برابر ډوله بیړه (تعجیل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنی سرعت)  $v_0 = 4 \frac{m}{s}$  او  $a = 1,8 \frac{m}{s^2}$  بیړي (تعجیل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$



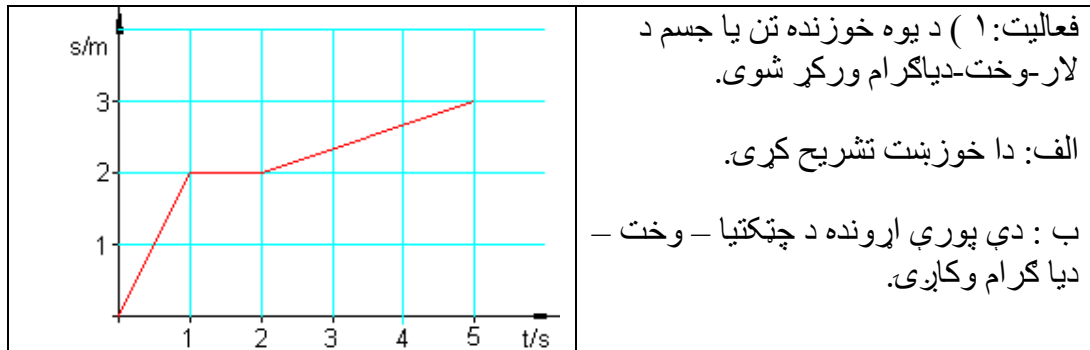


پام : د یوه برابر ډوله په بیرته (تعجیل) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$\left| s(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \right| \quad \boxed{v(t) = s'(t) = at + v_0} \quad \boxed{a(t) = v'(t) = a}$$

د یوې چټکتیا (سرعت)  $v$  لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره  $v(t) = s'(t)$  لرو. د

$s'(t)$  لپاره داسې  $v(t) = s'(t)$  هم لیکو.

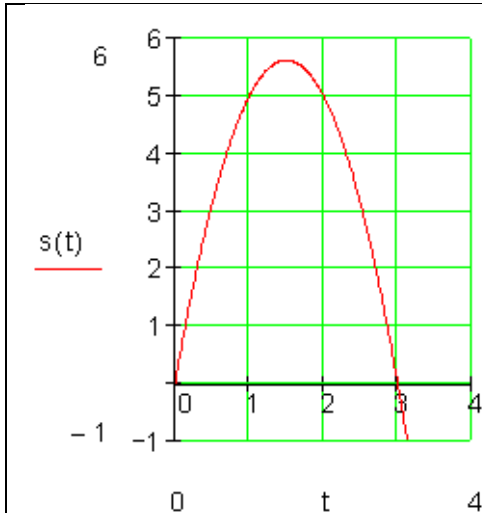


(۲) يوه تيره د پيل چټکتيا  $v_0 = 7 \frac{m}{s}$  سره عمودي (ولاره) پورته غورځول کيږي. د لار-وخت-قانون دی:

$$s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

د  $g = 10 \frac{m}{s^2}$  (را تولي (گردي شوي) سره.

(الف) د کوم وخت وروسته د تيرې چټکتيا (سرعت) صفر دی؟  
 (ب) خورا جگ د ميل جگوالی وشميرئ.



(۳) تابع د يوه خوزبنت د لار-وخت-دياگرام بڼايي.

(الف) د ورځني ژوند څخه يوه بيلگه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټيک وي.

د منحنی تلنه د  $t > 3$  لپاره فزيکي څه مفهوم لري؟

(ب) د خوزبنت لپاره د لار-وخت-دياگرام په لاندې ډول دی.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او  $v_0$  وټاکئ

(پ) د اړونده بيړې - وخت-دياگرام وکارئ او دا تشریح کړئ.

يوه منفي چټکتيا (سرعت) څه معنا لري؟

(۴) يو تن (جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي، چې د  $t$  وخت کې  $S(t) = 5 \cdot t^2$  لار وهي.

په وختونو  $t=1;2;3$  کې لحظوي چټکتيا (سرعت) وښايئ.

۴ - حل:

لحوضي جټکټيا د سملاسي تغیر ارزښت سره په دي لاندې معنا دی:

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1 + \Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور لري:  $10 + 5\Delta x \rightarrow 10$ 

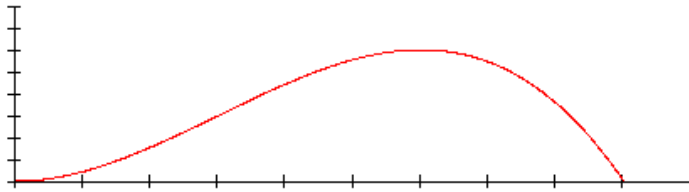
$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2 + \Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور لري:  $20 + 5\Delta x \rightarrow 20$   
د  $\Delta x \rightarrow 0$ 

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3 + \Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور لري  
د  $30 + 5\Delta x \rightarrow 30$ 

تمرین: لاندې د  $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$ ;  $x > 0$  تابع گراف او په ورنږدې توگه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحنی (کره) ښايي، چې لاندې څیره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف: توپ کوم خورا جگ (ماکسیمال) جگوالی لري او د وهلتکي (شوت شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب: د توپ وهلتکي (شوت شوي ټکي) څخه توپ څومره لري بیرته ځمکې ته راځي؟

پ: د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهني ځای څخه ۹ متره لري او ۲ متره جگ دی. ایا توپ له دې څخه جگ الوزي؟

ت: توپ د تور لاین (د  $x$  محور) څخه په ۲ متره جگوالي الوزي. له گول څخه په کوم لړبوالي دا ازاده شوت وهل شوی دی؟

تانجنت او نورمال.

تمرینونه III :

د  $f(x)$  گراف تانجنت په ټکي  $(x_0, f(x_0))$  کې:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad x_0 = 2 \quad -1$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \quad x_0 = 2 \quad -2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = -1 \quad -3$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \quad x_0 = 1 \quad -4$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \quad x_0 = 1 \quad -5$$

$$-6 \quad f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \quad x_0 = 3 \quad -7$$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad x_0 = 1 \quad -8$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 0 \quad -9$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 1 \quad -10$$

### حلونه

#### تمرینونه مشتقشمیرنه III

نتیجی او مفصل حلونه

نتیجی:

لومری:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad x_0 = 2 \Rightarrow P_0(2|2) \quad t(x) = -3x + 8$$

دویم:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \quad x_0 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 \left( 2 \mid \frac{11}{4} = 2,75 \right) \quad t(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}$$

دریم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = -1 \Rightarrow P_0(-1 \mid 7) \quad t(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$$

څلورم:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1 \mid 2) \quad t(x) = 9x - 7$$

پنځم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0 \left( 1 \mid \frac{1}{2} = 0,5 \right) \quad t(x) = -2x + \frac{5}{2}$$

شپږم:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow P_0 \left( -\frac{3}{2} \mid -\frac{1}{8} \right) \quad t(x) = \frac{19}{4}x + 7$$

اوم:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \quad x_0 = 3 \Rightarrow P_0(3 \mid -1) \quad t(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

اتم:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0 \left( 1 \mid -\frac{9}{2} \right) \quad t(x) = -6x + \frac{3}{2}$$

نهم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 0 \Rightarrow P_0(0 \mid 4) \quad t(x) = -4x + 4$$

لسم:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1 \mid 0) \quad t(x) = -\frac{11}{3}x + \frac{11}{3}$$

## مفصل حلونه 1

لومړی:

شمیرنه:



$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad x_0 = 2 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

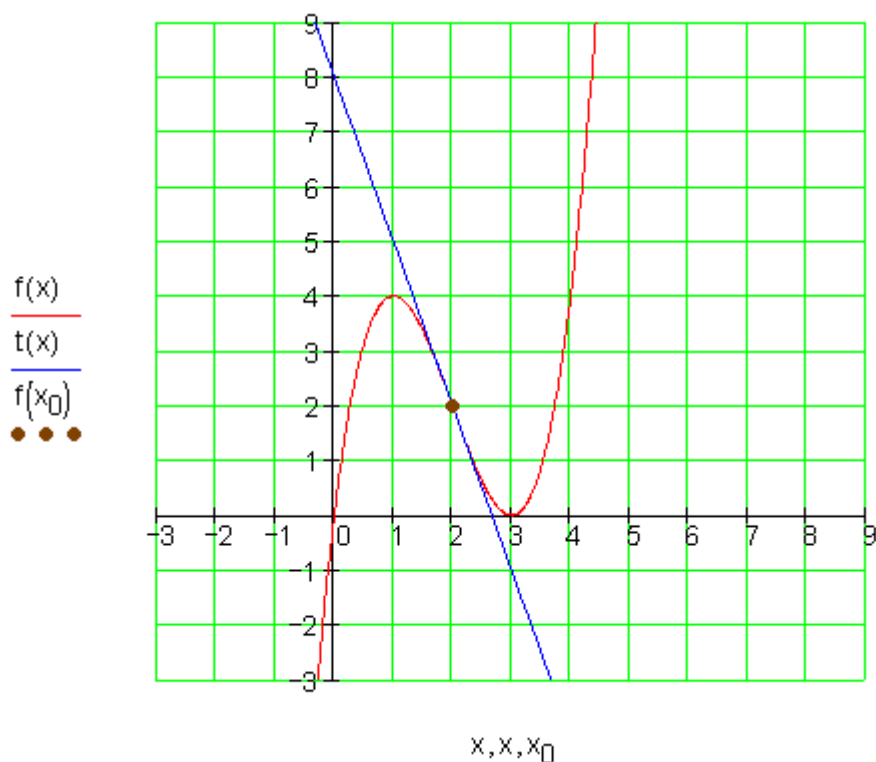
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$$

$$f(x_0) = f(2) = 8 - 24 + 18 = 2 \Rightarrow P_0(2 | 2)$$

$$t(x) = -3(x - 2) + 2 = -3x + 6 + 2 = -3x + 8$$

گرافونه

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad x_0 = 2 \Rightarrow P_0(2 | 2) \quad t(x) = -3x + 8$$



دویم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \quad x_0 = 2 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{15}{4} \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{9}{2} \cdot 2 + \frac{15}{4} = \frac{12}{4} - \frac{36}{4} + \frac{15}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 8 - \frac{9}{4} \cdot 4 + \frac{15}{4} \cdot 2 + \frac{9}{4} = \frac{8}{4} - \frac{36}{4} + \frac{30}{4} + \frac{9}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 \left( 2 \mid \frac{11}{4} = 2,75 \right)$$

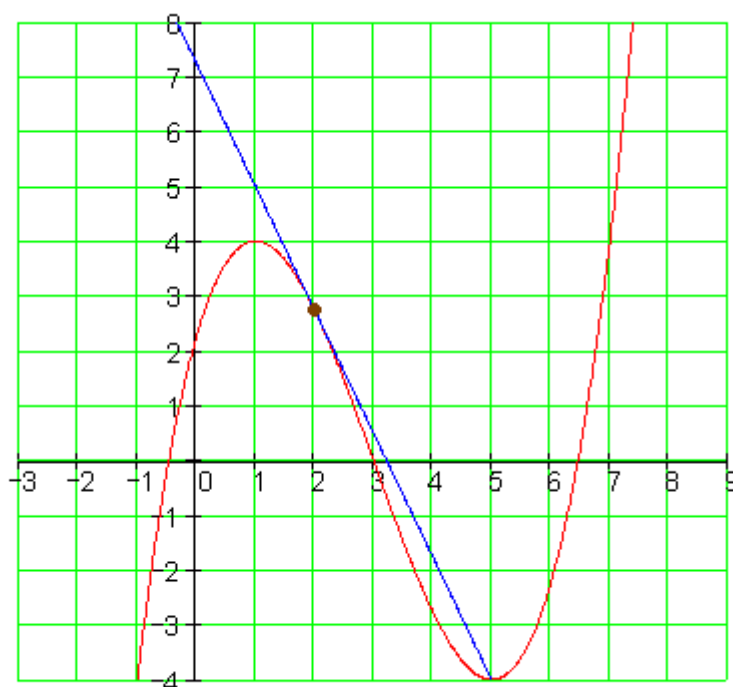
$$t(x) = -\frac{9}{4}(x-2) + \frac{11}{4} = -\frac{9}{4}x + \frac{18}{4} + \frac{11}{4} = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}$$

گرافونه

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \quad x_0 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 \left( 2 \mid \frac{11}{4} = 2,75 \right) \quad t(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}$$

$$\frac{f(x)}{t(x)}$$

$$\frac{f(x_0)}{\bullet \bullet \bullet}$$
 $x, x, x_0$ 

دریم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = -1 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

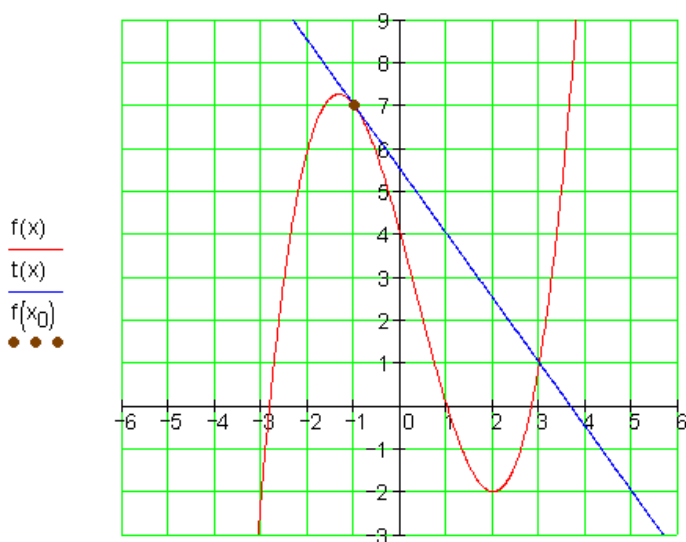
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = f'(-1) = \frac{3}{2} + 1 - 4 = \frac{3}{2} + \frac{2}{2} - \frac{8}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_0) = f(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + 4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{2} + \frac{8}{2} = 7 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(-1|7)}}$$

$$t(x) = -\frac{3}{2}(x+1) + 7 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{14}{2} = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$$

گرافونه

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = -1 \Rightarrow P_0(-1|7) \quad t(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$$

 $x, x, x_{\eta}$ 

څلورم: شمیرنه:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \quad x_0 = 1 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

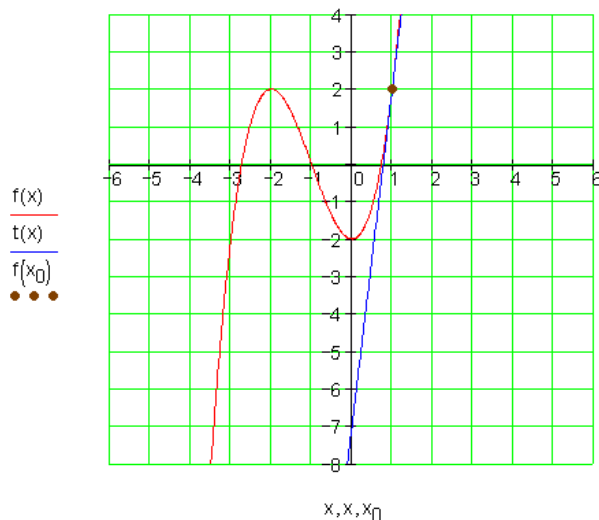
$$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3 + 6 = 9$$

$$f(x_0) = f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 = 1 + 3 - 2 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1|2)}}$$

$$t(x) = 9(x-1) + 2 = 9x - 9 + 2 = \underline{\underline{9x - 7}}$$

گراف

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1 | 2) \quad t(x) = 9x - 7$$



پنجم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \quad x_0 = 1 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

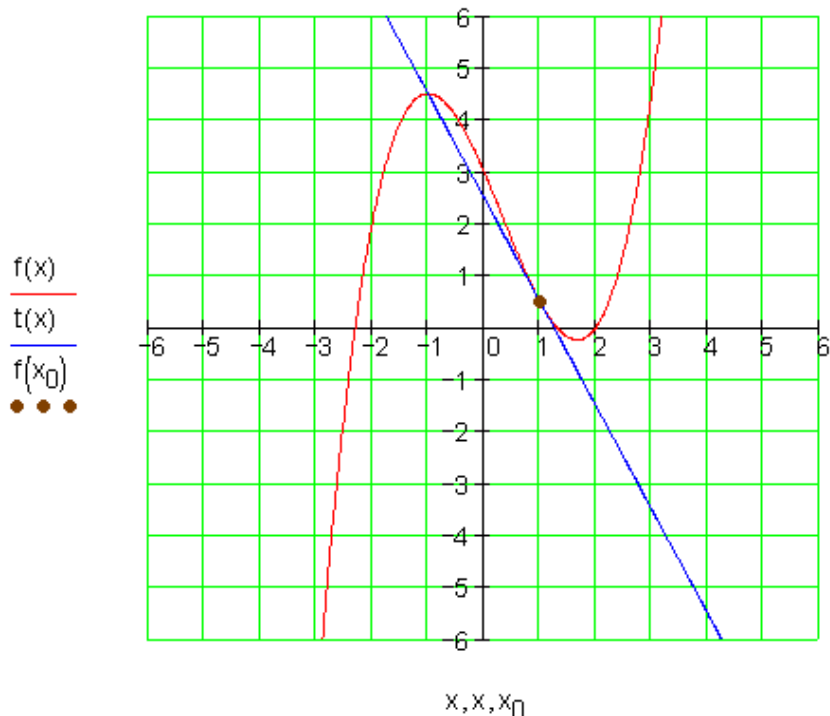
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = \frac{3}{2} - 1 - \frac{5}{2} = -2$$

$$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3 = -\frac{5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P_0\left(1 \mid \frac{1}{2}\right)$$

$$t(x) = -2(x - 1) + \frac{1}{2} = -2x + 2 + \frac{1}{2} = -2x + \frac{5}{2}$$

گراف

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \mid \frac{1}{2} = 0,5\right) \quad t(x) = -2x + \frac{5}{2}$$



شمیرنه: شمیرنه:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2} \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5 \Rightarrow f'(x_0) = f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{9}{4} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 5 = \frac{27}{4} + \frac{12}{4} - \frac{20}{4} = \frac{19}{4}$$

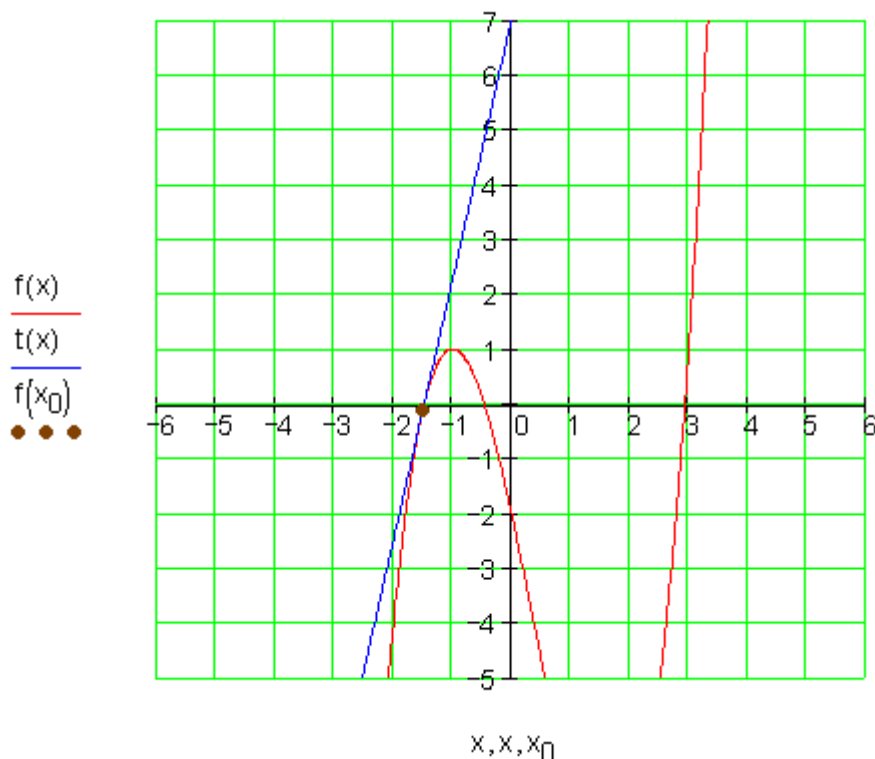
$$f(x_0) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{15}{2} - 2 = -\frac{27}{8} - \frac{18}{8} + \frac{60}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{1}{8} \Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2} \mid -\frac{1}{8}\right)$$

$$t(x) = \frac{19}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{8} = \frac{19}{4}x + \frac{57}{8} - \frac{1}{8} = \frac{19}{4}x + \frac{56}{8} = \frac{19}{4}x + 7$$

کراف

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2} \mid -\frac{1}{8}\right) \quad t(x) = \frac{19}{4}x + 7$$

:



اووم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \quad x_0 = 3 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

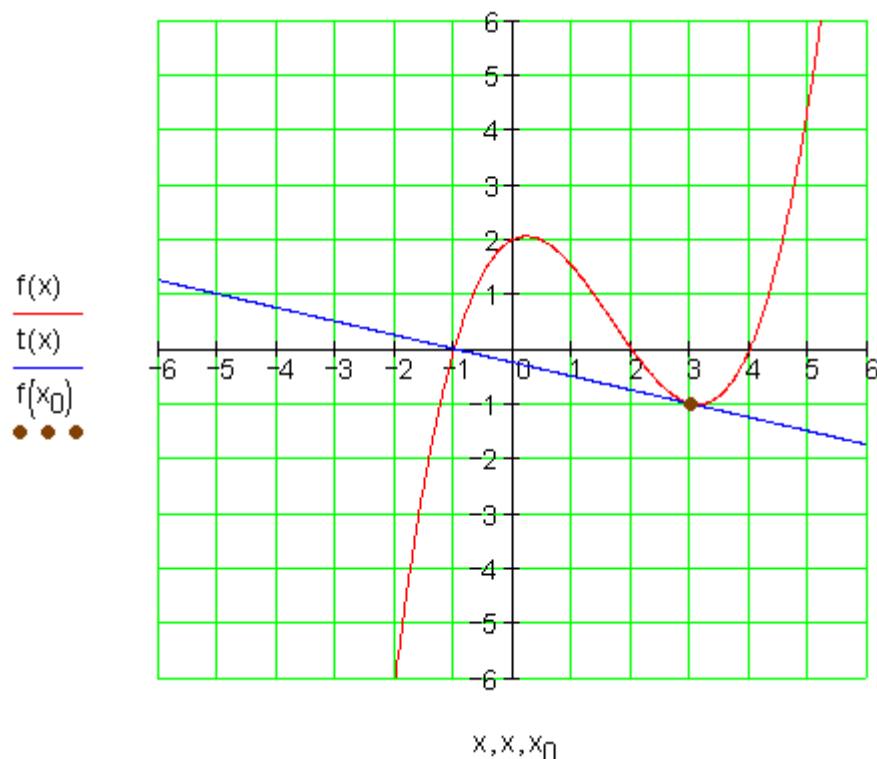
$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(3) = \frac{27}{4} - \frac{15}{2} + \frac{1}{2} = \frac{27}{4} - \frac{30}{4} + \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$f(x_0) = f(3) = \frac{27}{4} - \frac{45}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{27}{4} - \frac{45}{4} + \frac{6}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{4}{4} - 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(3|-1)}}$$

$$t(x) = -\frac{1}{4}(x-3) - 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{4}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}}$$

گراف

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \quad x_0 = 3 \Rightarrow P_0(3|-1) \quad t(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$



اتم: شمیرنه:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad x_0 = 1 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

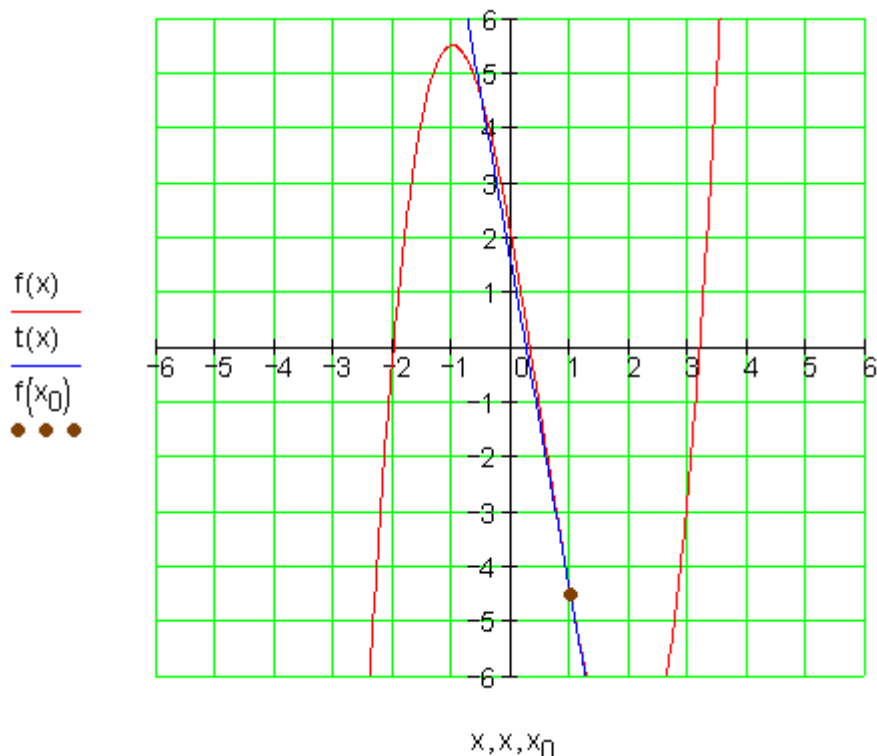
$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3 - 3 - 6 = -6$$

$$f(x_0) = f(1) = 1 - \frac{3}{2} - 6 + 2 = \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{12}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow P_0 \left( 1 \mid -\frac{9}{2} \right)$$

$$t(x) = -6(x - 1) - \frac{9}{2} = -6x + 6 - \frac{9}{2} = -6x + \frac{12}{2} - \frac{9}{2} = -6x + \frac{3}{2}$$

کراف

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0 \left( 1 \mid -\frac{9}{2} = -4,5 \right) \quad t(x) = -6x + \frac{3}{2}$$



نهم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 0 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = -4$$

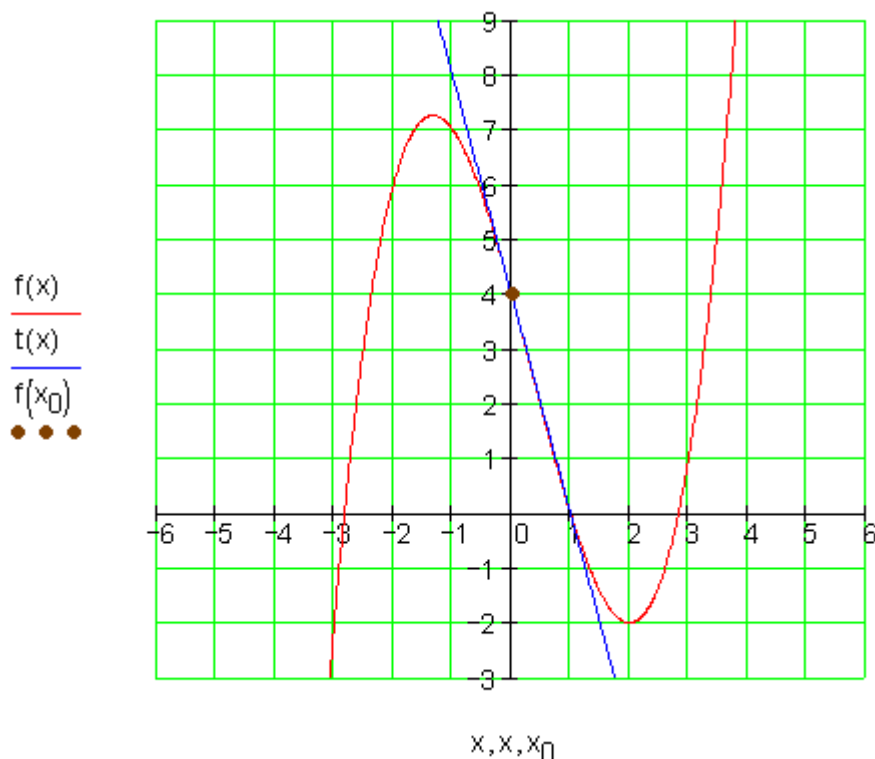
$$f(x_0) = f(0) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(0|4)}}$$

$$t(x) = -4(x - 0) + 4 = \underline{\underline{-4x + 4}}$$

گراف

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(0|4)}} \quad t(x) = -4x + 4$$





لسم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 1 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 1 - \frac{2}{3} - 4 = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - 4 + 4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{12}{3} + \frac{12}{3} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1|0)}}$$

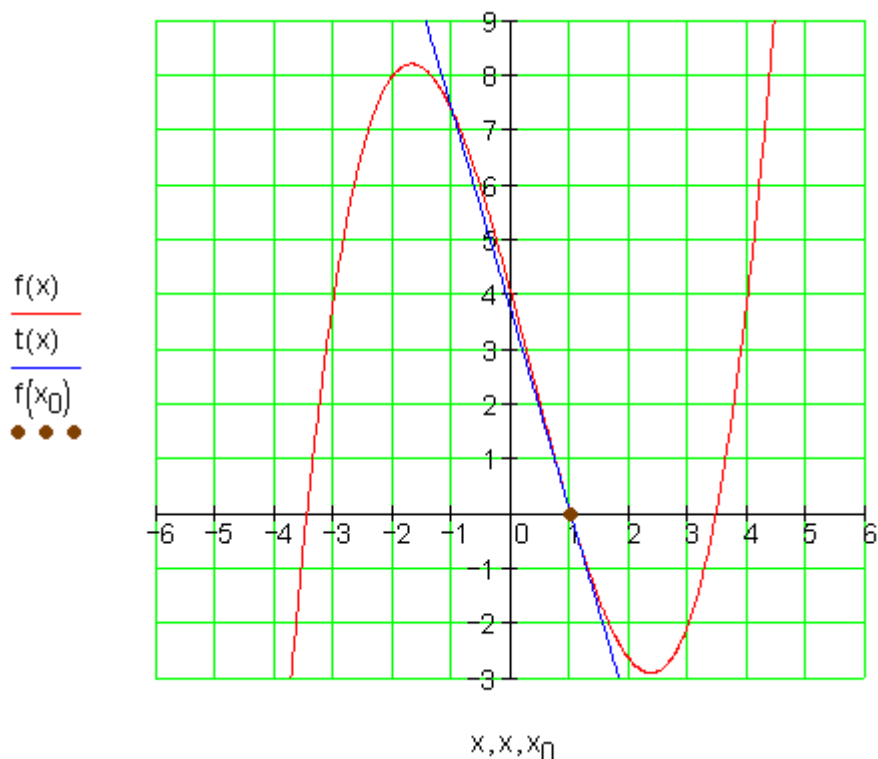
$$t(x) = -\frac{11}{3}(x - 1) + 0 = \underline{\underline{-\frac{11}{3}x + \frac{11}{3}}}$$

گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1|0) \quad t(x) = -\frac{11}{3}x + \frac{11}{3}$$

.

.



### مشتق شميرنه VII

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; x \in \mathbb{R}$$

لومړۍ ورکړشوي تابع:

الف-  $f(x)$  په کوم ځای کې جگپښه 2 لري؟

ب- د  $f(x)$  جگپښه په  $x = 1,5$  ځای کې  $-0,25$  ده.

د همدې جگپښې سره بې له شمېرنې بل ځای ورکړی.

د خپل گومان په هکله دليل راوړی

پ-  $f(x)$  په کومو ټکو کې پروت يا افقي تانجنت لري؟ مساوات يې ورکړی.

ت - په سرچینه کې په  $f(x)$  باندې تانجنت وټاکي

ټ - په  $f(x)$  باندې تانجنت د  $P(u | f(u))$  په ټکي کې وټاکي

ث - کومه کرښه په  $f(x)$  په  $N(3 | 0)$  ټکي کې عمود غوڅوي؟

دویم: -  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1; x \in \mathbb{R}$  تابع ورکړ شوي

الف - کرکتریسټیکي یا خوږیز ټکي و ټاکي او اړونده تانجنت یې ورکړي.

ب- په  $f(x)$  باندې تانجنت په  $x = 1$  او  $x = -1$  د  $y$  - محوډ غوڅوي یا قطع کوي د دې پوښتنې دلیل راوړي؟

دريم -  $f(x) = -x^4 + 2x^3; x \in \mathbb{R}$  تابع ورکړ شوي

الف -  $f(x)$  د  $x$  محور سره او د ټکو په هکله چې هلته افقي تانجنت لري مطالعه کړي.

ب-  $t(x)$  په  $f(x)$  د  $P(1 | f(1))$  په ټکي تانجنت دی.

د تانجنت مساوات وټاکي. د  $t(x)$  غوڅتکي د  $f(x)$  سره وټاکي.

پ - په کومو ټکو کې  $f(x)$  د  $1/8$  جگیدني سره عمود لري؟ د عمود مساوات ورکړي.

څلور -  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x; x \in \mathbb{R}$  تابع ورکړ شوي ده.

الف-  $f(x)$  په کرښو ضریبونو تجزیه کړي او گراف یې وکاري.

ب - په  $f(x)$  باندې تانجنتونو مساوات په  $x = 2$  کې وټاکي او دا تانجنت د الف په وضعیه قیمتسیستم کې رسم کړي..

پ - ټکي  $P(u | f(u))$  داسې وټاکي، چې په  $P$  د  $f(x)$  په تانجنت د  $f(x)$  په سرچیني تانجنت سره غیرگ یعنی موازي وي.

ت - په کوم ځاي کې  $f(x)$  خورا کوچنی تانجنت لری؟

پنځم- يوه تيگه د  $v_0 = 7 \text{ m/s}$  پيل جکتيا يا سرعت سره عمود پورته غورځول کيږي.

د لار-وخت دياگرام دی:  $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$  د  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  سره.

الف- په کوم وخت  $t$  کې د تيگې جگوالی صفر دی؟

ب- د جگپښي ماکسيمال جگوالی وشمېری.

حلونه

مشتقشميرنه VII

نتيجي او مفصل حلونه

مفصل حلونه:

لومړی:

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1 \quad \text{الف -}$$

جگوالی په  $x_0$  کې ارزښت 2 لری

$$\Rightarrow f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 - 1 = 2 \Rightarrow \underline{x_{01/2} = \pm 3}$$

$F(x)$  تابع د  $x_{1/2} = \pm 3$  په ځايونو کې جگپښه 2 لري.

ب -  $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$  يو پارابول او له دې امله محور سيومتري دی.

له  $f'(1,5)=0,25$  څخه  $f'(-0,25)=-0,25$  لاس ته راځي.

$$df(x) = \pm 1,5 x_{1/2}^1 \text{ په ځای کې } -0,25 \text{ جگیدنه لري.}$$

په  $f(x)$  یو پروت یا افقي تانجنت په ټکو کې پروت دی، چې هلته جگوالی صفر وي.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{3}) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}; f(-\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow P\left(\sqrt{3} \mid -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right); Q\left(-\sqrt{3} \mid \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

تانجنتونه کرني دي، د  $x$  - محور سره غبرګي ځلي.

$$t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}; t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1 \quad \text{ت -}$$

په سرچینه کې د تانجنت مساوات:  $x_0 = 0$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) = f'(0) = -1; f(x_0) = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow t(x) = -1(x - 0) + 0 = \underline{\underline{-x}}$$

ټ -

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

د تانجنت مساوات د  $P(u;f(u))$  په ټکي کې.

$$t(x) = f'(u)(x-u) + f(u)$$

$$f'(u) = \frac{1}{3}u^2 - 1; f(u) = \frac{1}{9}u^3 - u$$

$$t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)(x-u) + \frac{1}{9}u^3 - u = \underline{\underline{\left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3}}$$

ث - کرنبه، چي  $f(x)$  په  $N(3 | 0)$  کي غوڅوي، په دې ټکي کي عمود ده.

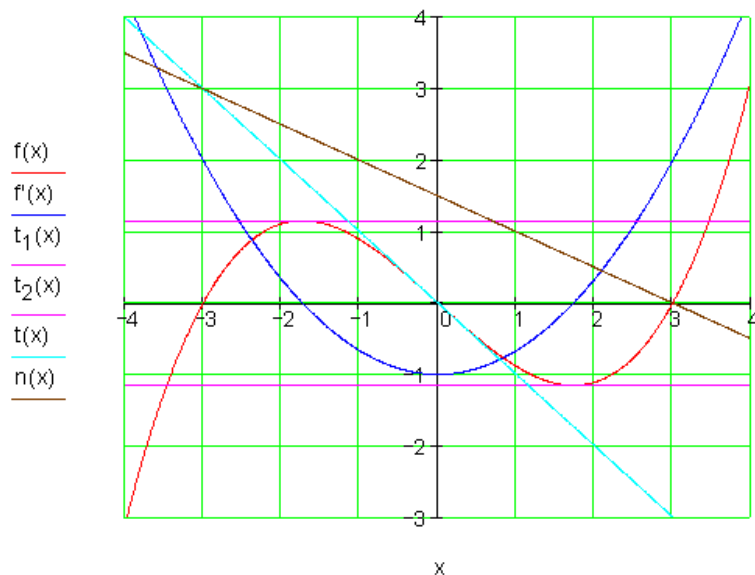
$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1; N(3 | 0) \Rightarrow x_0 = 3$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$$

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{2}; f(x_0) = f(3) = 0$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{2}(x-3) + 0 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}}$$

Die Graphen: گراف :



دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه) ۱۲۵

دویم: الف- کرکتریسټیک یا خوي ټاکونکي ټکي صفرخایونه دي، چې په دې ټکو کې د تانجنټونو جگوالی دی، په هغو پاکومو کې چې پروت یا افقي تانجنټ شته وي.

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1; f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1 = 0 \quad \text{صفرخایونه:}$$

بي- یا دوه مربعیز مساوات.

د په خای ایښوونې Substitution له لارې حل یا اوبیونه:

$$x^2 = z \Rightarrow f(z) = \frac{z^2}{4} - \frac{3}{4}z - 1$$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{z^2}{4} - \frac{3}{4}z - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 4; z_2 = -1$$

د 22 لپاره حل نه شته.

$$z_1 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2 \Rightarrow \underline{P_{x_1}(2|0)}; \underline{P_{x_2}(-2|0)}$$

$$f'(2) = 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2 = \underline{5}; f'(-2) = (-2)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-2) = \underline{-8 + 3 = -5}$$

د پروت تانجنټ سره ټکي.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_{2/3} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$P_2(0|-1); P_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \mid -\frac{25}{16}\right); P_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \mid -\frac{25}{16}\right)$$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1; f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$$

## دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

تانجنت په  $x = 1$  او  $x = -1$  کې.

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$t_1(x) = f'(1)(x - 1) + f(1); t_2(x) = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

د ټکي سیومتری له امله

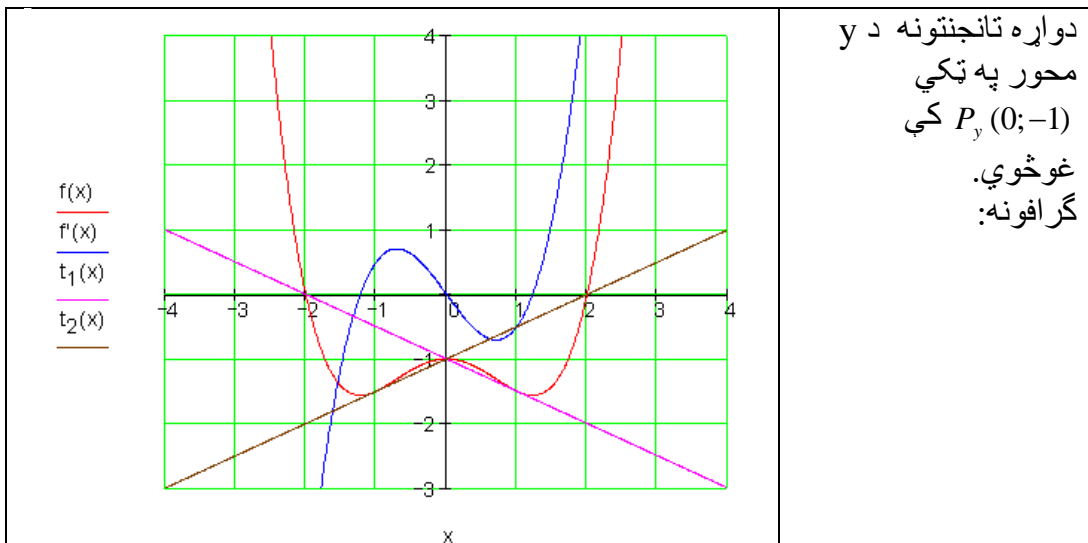
$$f'(1) = -\frac{1}{2}; f'(-1) = -f'(1) = \frac{1}{2}$$

د محور سیومتری له امله

$$f(1) = -\frac{3}{2}; f(-1) = f(1) = -\frac{3}{2}$$

$$t_1(x) = -\frac{1}{2}(x - 1) - \frac{3}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x - 1}}$$

$$t_2(x) = \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}x - 1}}$$





$$\text{دریم: الف- } f(x) = -x^4 + 2x^3; f'(x) = -4x^3 + 6x^2$$

$$\text{صفرخایونه: } f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0; x_4 = 2$$

$$\underline{\underline{P_{x4}(2|0)}} \text{ دریواره صفرخای او } \underline{\underline{P_{x1/2/3}(0|0)}}$$

پروت یا افقی تانجنتونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = 0; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16} \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0|0)}; \underline{\underline{P_3\left(\frac{3}{2} \mid \frac{27}{16}\right)}}$$

ب -

$$f(x) = -x^4 + 2x^3; f'(x) = -4x^3 + 6x^2; P(1|f(1))$$

په  $f(x)$  تانجنت د  $x_0 = 1$  ټکي کې د  $f'(1) = 2$  او  $f(1) = 1$  سره.

له دې لاس ته راځي:  $t(x) = 2x - 1$

د  $t(x)$  غوڅټکی د  $f(x)$  سره

$$f(x) = t(x) \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 2x - 1 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 - 2x + 1 = 0$$

د  $P(1;1)$  سره ځای په ځای کونې یا ایښوونې سره ډبل صفرخایونه

$$\therefore x_{1/2} = 1 \Rightarrow (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

**پولینومو پش:**

$$\begin{array}{r} (-x^4 + 2x^3 - 2x + 1) : (x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 1 \\ \underline{-(-x^4 + 2x^3 - x^2)} \phantom{+ 1} \\ \phantom{-} x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-(x^2 - 2x + 1)} \\ \phantom{-} 0 \end{array} \quad -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_{3/4} = \pm 1}}$$

د عمود جگوالی دی:  $F(-1) = -3 \Rightarrow Q(-1; -3)$  د  $t(x)$  د  $fx$  سره یو بل غوڅتکی دی.

پ-

$$f(x) = -x^4 + 2x^3; f'(x) = -4x^3 + 6x^2$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

د عمود جگوالی دی:

$$\frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = -8 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 = -8 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 + 8 = 0$$

د  $x = 2$  یو حل دی (د ازماښت له لارې پیدا شوی)

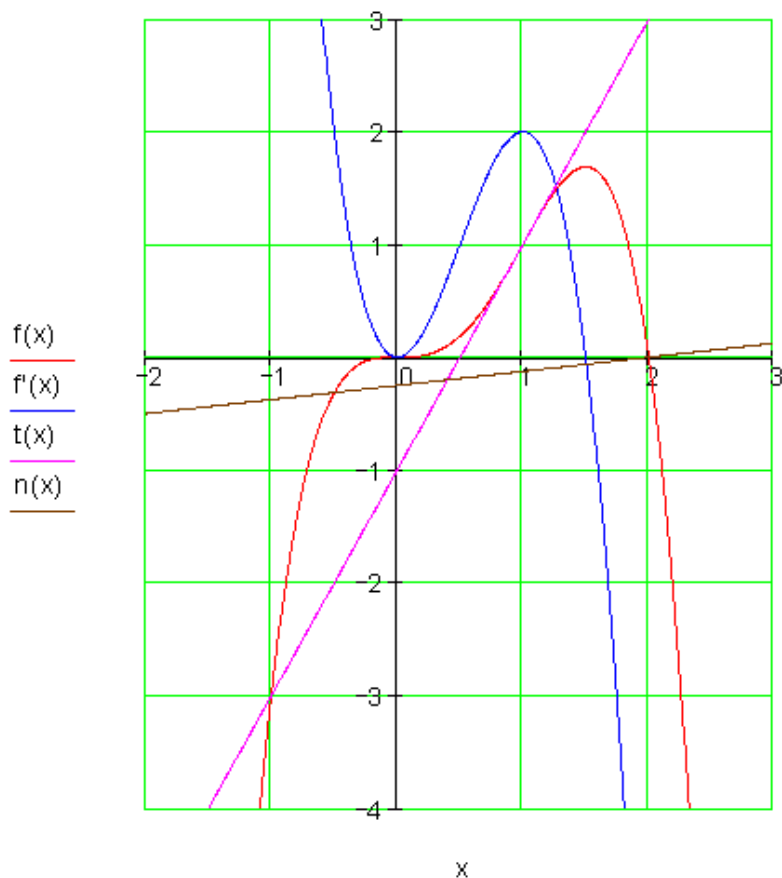
هورنر Horner

$$\begin{array}{r} -4 \quad 6 \quad 0 \quad 8 \\ x = 2 \quad \underline{-8} \quad \underline{-4} \quad \underline{-8} \\ \phantom{x = 2} \quad -4 \quad -2 \quad -4 \quad 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -4x^2 - 2x - 4 = 0 \\ p = \frac{1}{2}; q = 1 \Rightarrow D < C \end{array}$$

بل حل نه شته.

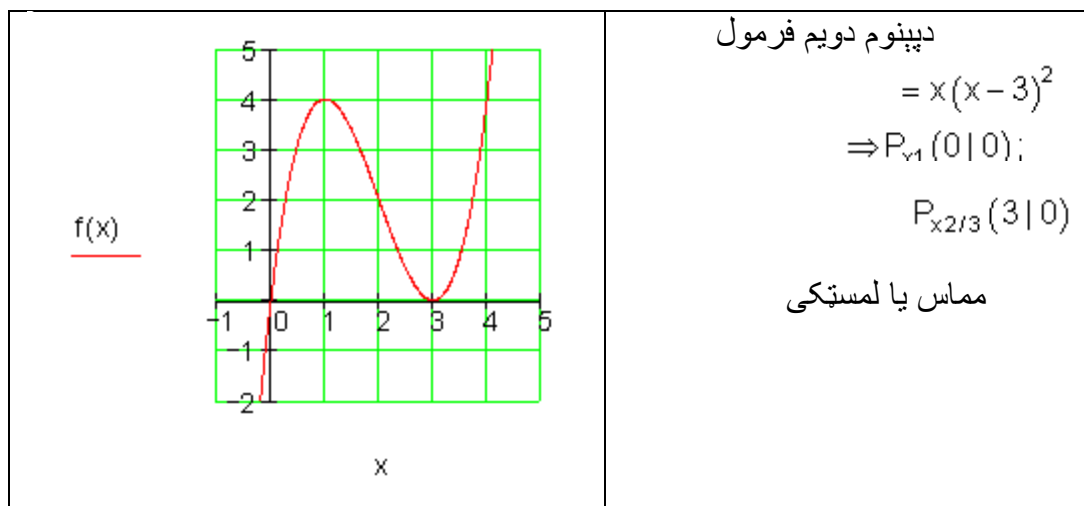
$$x = 2 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow n(x) = \frac{1}{8}(x-2) + \underbrace{f(2)}_0 \Rightarrow n(x) = \underline{\underline{\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}}$$

کرافونه:

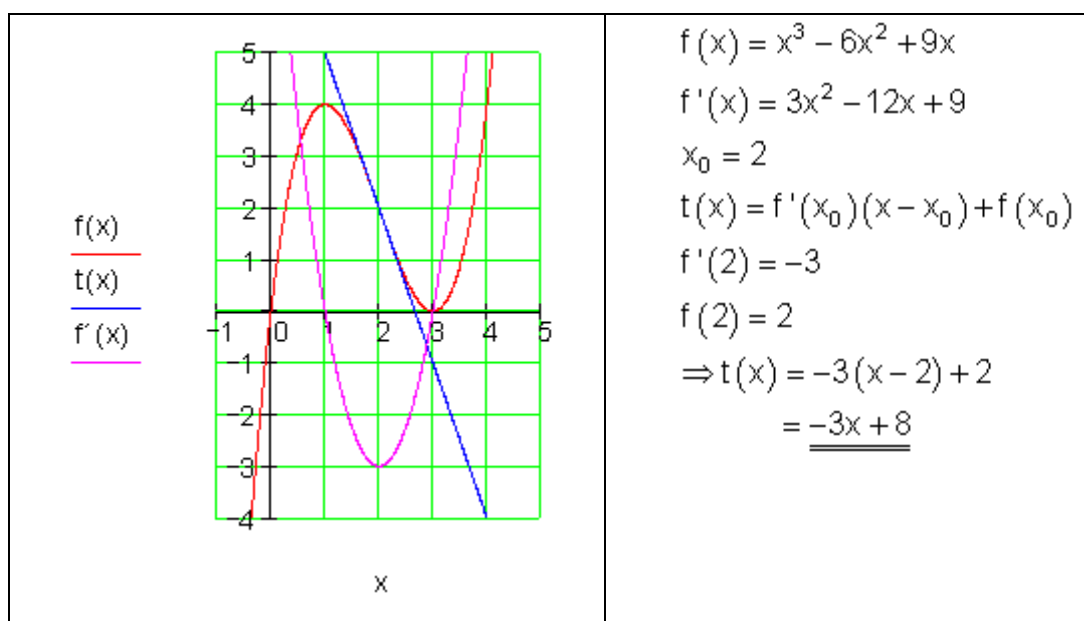


څلورم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \\ &= x \underbrace{(x^2 - 6x + 9)}_{\text{الف}} \end{aligned}$$



ب-



ب-

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x; f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

تانجنت په سرچینه کې  $f'(0) = 9$  جگوالی لري.

دی سره غبرگ هر تانجنت همدا یا برابر جگوالی لری پس هر په  $P(u;f(u))$  ټکی همز

$$f'(u) = 9 \Leftrightarrow 3u^2 - 12u + 9 = 9 \Rightarrow u_1 = 0; u_2 = 4$$

$$u_1 = 0 \Rightarrow f(u_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0|0)}}$$

$$u_2 = 4 \Rightarrow f(u_2) = f(4) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(4|4)}}$$

ت -

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x; f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$f(x)$  د  $f'(x)$  جگپدنه ده، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د هغه مینیموم د هغه غوڅټکی یا د تقاطع ټکی دی، هلته  $f'(x)$  یو پروت یا افقی تانجنت لری.

$$\text{شرطونه: } f''(x) = 0$$

$$F''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

د  $x = 2$  په ځای کې  $f(x)$  خورا کمه جگپدنه لری.

$$f(2) = 2 \Rightarrow$$

په  $P(2;2)$  ځای کې  $f(x)$  خورا کمه جگپدنه لری.

هغه هلته ارزښت  $f(2) = -3$  لری.

پنځم:

$$\text{الف - } s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{د} \quad v_0 = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{سره} \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v(t) = s'(t) = v_0 - gt$$

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = 0,7 \text{ s}$$

وروسته له 0,7S نیځه  $v(t)=0$  سرعت لري

ب - د میلان یا جگېډني خورا لوي یا ماکسیمال جگوالی

کښته لور ته وتز پارابول دی، چې ککرتکی یا رآس يي د غورخوني ماکسیمال جگوالی ورکوي.

د ککرتکي یا رآس شرطونه:  $t = 0,7 \text{ s} \Leftrightarrow s'(t) = v(t) = 0$  د دي لپاره پرڅه الف وکوری.

خورا لوي جگوالی:  $s(0,7) = 2,45$

خورا لوي یا ماکسیمال جگوالی 2,45 m دی.

پوښتنې

### مشتقشمېرنه VIII

اول - د يوي فابريکي ټول مصرف د 10 ME ماکسیمال تولید په  $K(x)$  سره ښایو. د يوه ME د خرڅلاو نرخ 28 GE دی.

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$$

الف - د نرختابع مشتق وشمېری. ( مشتقارزښت تابع یا پوله نرخ تابع ) او گراف يي وکاروی. گراف يي تشریح کړی.

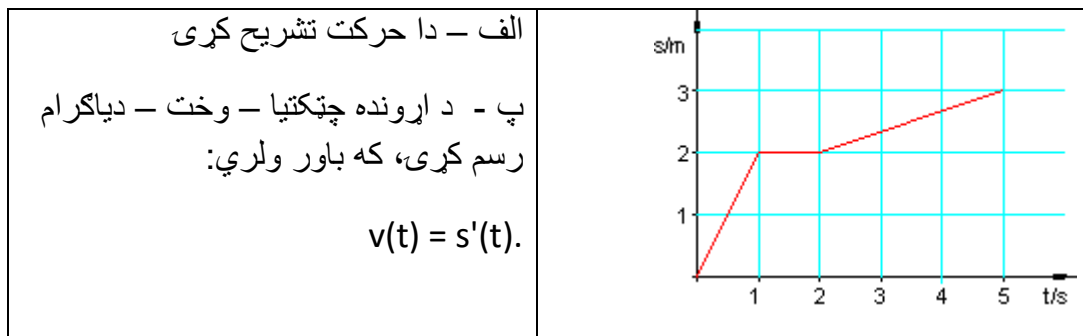
ب - مینیمال یا خورا کم د مشتقلگښت وشمېری.

پ - وښایي، چې د هر تولید ډبري یا ست مشتقنرخ یا مشتقلگښت مثبت دی.

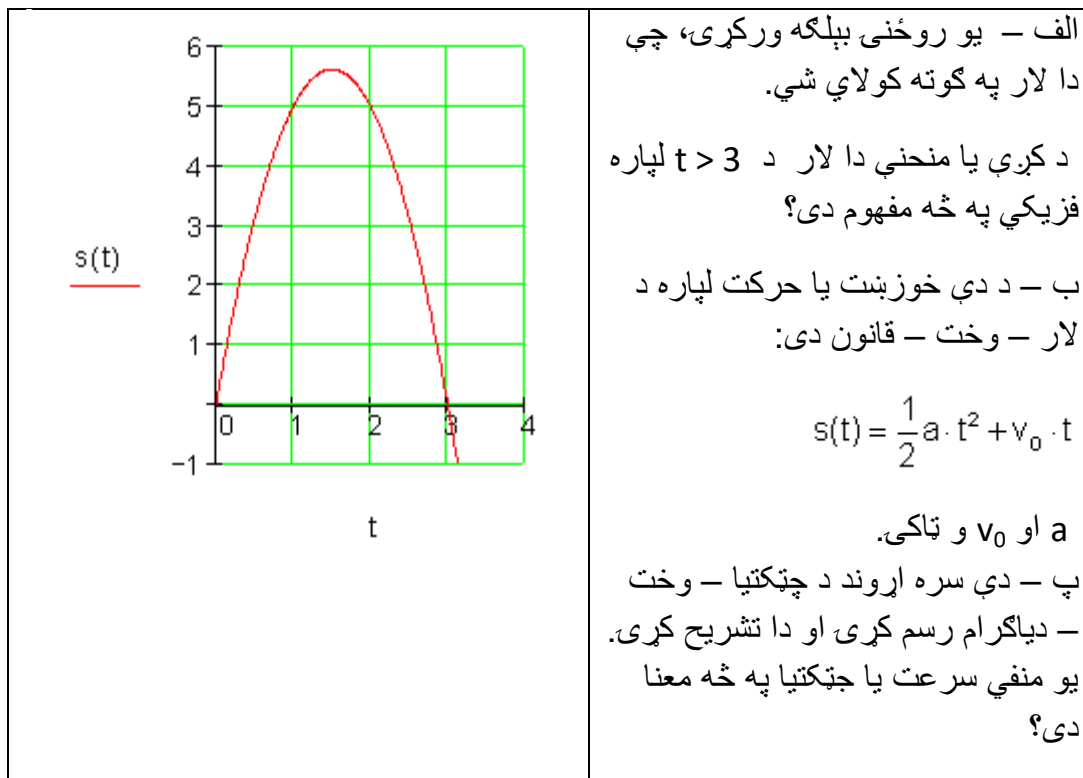
ت - په کومه ورشو کې گټي فکر وشي؟

ب - په کومه ورشو کې گټه زیاتیري؟

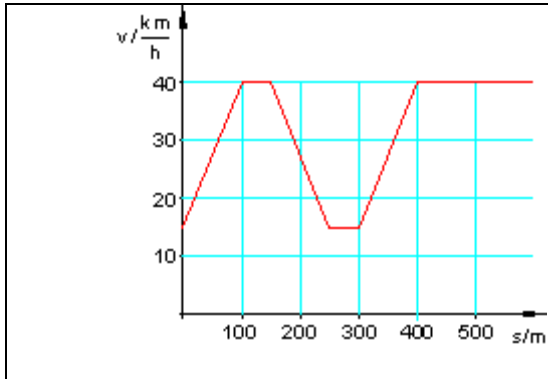
دویم\_ د یوه خوزنده جسم یا تن د لار - وخت- دیاگرام  $s(t)$  ورکړی



دریم - تابع د یوه خوزبنت یا حرکت لار د لار - وخت دیاگرام کې بنایي.



څلورم:



د یوه خوزبنت د چټکتیا لار ورکړی.

دا دیاگرام تشریح کړی.

د ممکنه توټه کربنو تلنلار په هکله ویناوې وکړی.

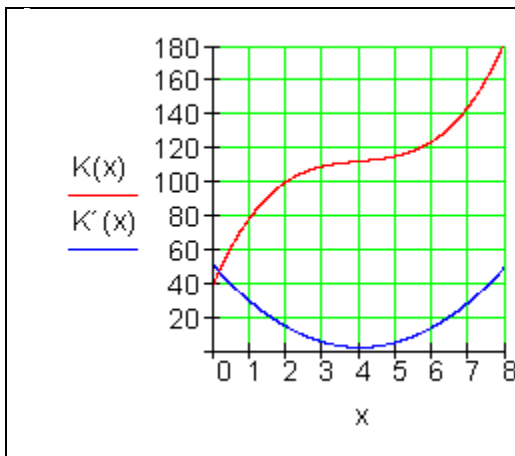
حلونه

### مشتقشمیرنه VIII

مفصل ځوابونه:

لومړی:

الف-



الف -

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$$

$$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$$

د پولې لگښت گراف پورته لور ته واز پارابول دی.

په ککره یا رأس کې یې پوله لگښت خورا کم دی.

ب - د خورا کم مشتقلگښت لپاره شرطونه:  $K''(x) = 0$



$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$$

$$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$$

$$K''(x) = 6x - 24$$

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$K'(4) = 2$$

له دې لاس ته راځي: د یوه 4ME ( څلور ډېری یا سټ واحدونه) تولید مشتقلگښت د 2GE/ME سره خورا کم دی.

پ –

$$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50 \quad \text{د} \quad K'(4) = 2 \quad \text{لپاره مثبت دی.}$$

که له نیوني یا فرضیې سره سم  $K'(x) \in \mathbb{R}_+$  مثبت وي، د صفرځاي د لرلو اجازه نه شته.

مور  $K'(x)$  په صفرځایونو څېړو:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 50 = 0$$

$$\Rightarrow p = -8; q = \frac{50}{3}; D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - \frac{50}{3} < 0$$

له دې لاس ته راځي چې حل یا اوبی نه شته.

مشتقلگښت د هر تولید لپاره مثبت دی.

څه چې د بنوولو وو.

ت – د لاس ته راوړني ( یعنی هر څه چې پلورل شوي وي) تابع:  $E(x) = 28x$  ( له پوښتنې کولو لاس ته راځي).

د گټې تابع:  $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 12x^2 - 22x - 40$

گټه هلته کيږي، چې د گټې تابع مثبت ارزښت لري.

ازمایو:

$G(5) = 25$ ;  $G(4) = 0$ ، پس د  $G(x)$  صفرځای  $x_1 = 4$  دی.

هورنر:

$$\begin{array}{r} -1 \quad 12 \quad -22 \quad -40 \\ x = 4 \quad \underline{-4} \quad \underline{32} \quad \underline{40} \\ -1 \quad 8 \quad 10 \quad 0 \end{array} \Rightarrow -x^2 + 8x + 10 = 0$$

$$x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{26} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 \approx 9,1}}$$

د  $\underline{\underline{4 \leq x \leq 9,1}}$  لپاره فابریکه په گټه کار کوي.

ب- د کټي زیاتیدل څکه، چې  $G(x)$  مثبتنه جگپښه لري او  $G(x) > 0$  دی.

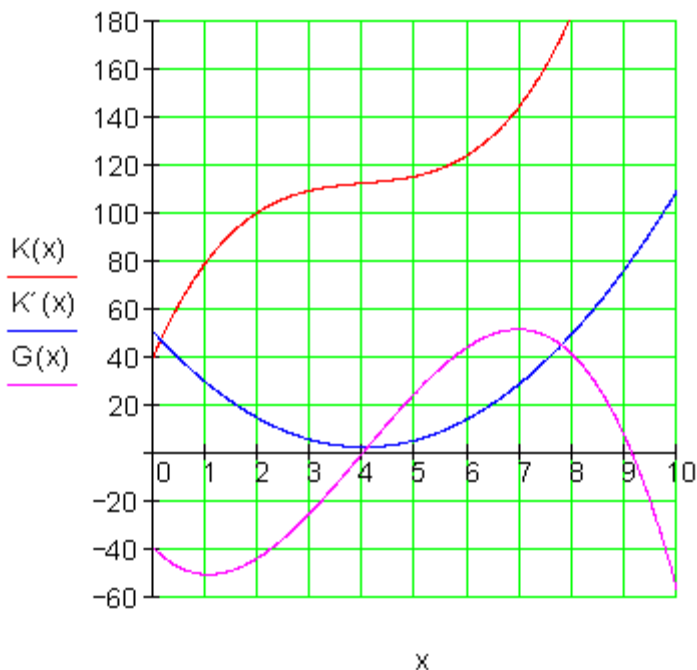
یعني:  $G(x) > 0 \wedge G'(x) > 0$

$$\text{لپاره یا } x \in \left[ 4 - \sqrt{\frac{26}{3}}; 4 + \sqrt{\frac{26}{3}} \right] \text{ د } G'(x) = -3x^2 + 24x - 22 > 0$$

$$x \in [1,05; 6,9]$$

د گټې زیاتیدنه:  $\underline{\underline{[4; 9,1] \cap [1,05; 6,9] = [4; 6,9]}}$

ګرافونه:



دویم:

<p>ب-</p>	<p>الف - له 0 تر 1 s پورې: خوزبنت د مساوي پاتي چټکتيا سره <math>v = 2 \text{ m/s}</math> له 1 تر 2 s پورې. خاي په خاي درېدنه: <math>v = 0 \text{ m/s}</math> له 2 تر 5 s پورې. خوزبنت د مساوي پاتي چټکتيا سره: <math>v = 1/3 \text{ m/s}</math></p>
-----------	---

درېم: الف - يوشی عمود پورته لور ته غورخول کيږي. د  $t > 3$  لپاره  $s < 0$  دی، دا په دې معنا چې دا شی د غورخول خاي څخه لاندي يا کښته دی.

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \quad \text{ب - د خوزبنت مساوات.}$$

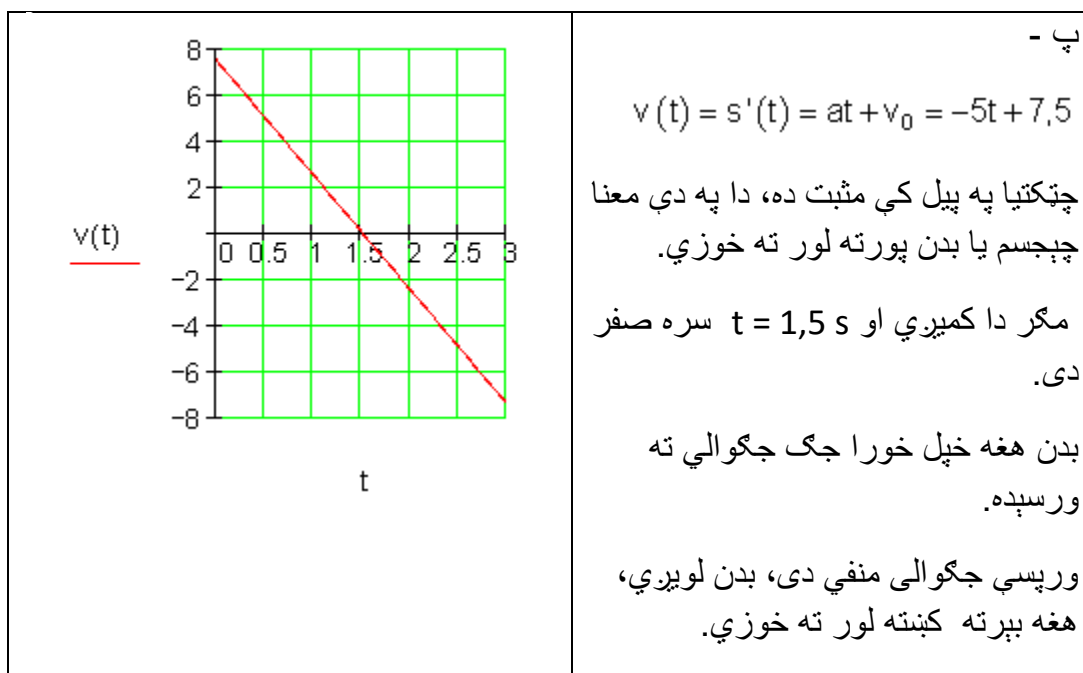
د  $a$  او  $v_0$  د خوزبنا لپاره د گراف له دوه ټکو څخه کار اخلو.

$$P_1(1|5): s(1) = \frac{1}{2}a + v_0 = 5$$

$$P_2(3|0): s(3) = \frac{9}{2}a + 3v_0 = 0$$

$$a = -5; v_0 = 7,5$$

$a < 0$  په دې معنا، چې دا يو ځنډشوی حرکت دی.



څلورم:

0 - 100 m: چټکتيا زياتيري.

100 - 150 m چټکتيا برابره پټيري  $40 \text{ km/h}$ .

150 - 200 m [ټکتيا کميري.

300 m - 250 چټکتیا برابره پاتیري.. 15 km/h :

300 - 400 چټکتیا زیاتیري.

له 400 m وروسته چټکتیا ثابته پاتیري. 40 km/h.

روښانه ونه: په کښته لوډلي سرک په تعجیل یا په بیره کیري، پسي سرک هوار دی.

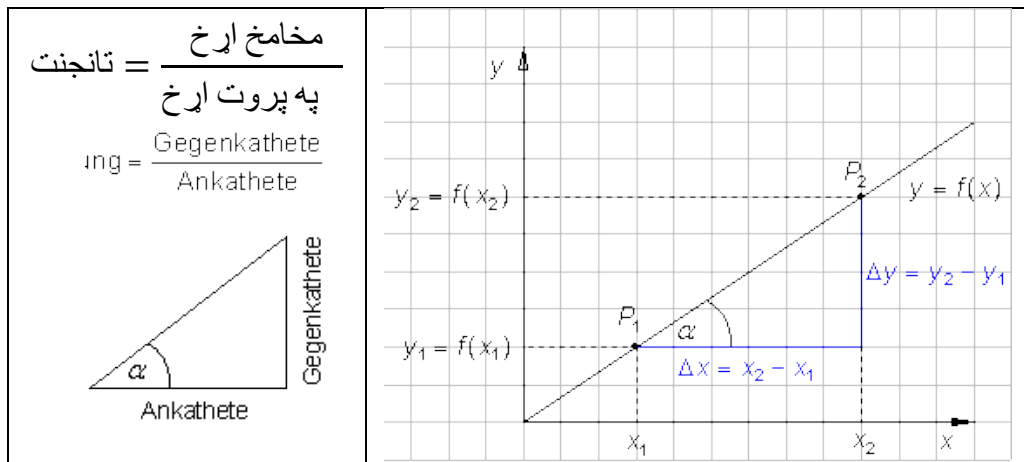
ورپسي سرک مایل په غره پورته کیري چټکتیا تر 15 km/h پوري کمیري. پسي کښته

لویري، چي سرعت یا چټکتیا بیرته زیاتیري. له دي وروسته هغه خورا جگه د 40

km/h چټکتیا یا سرعت ساتلي پاتیري په دا پسي لږ پاتي کرښه باندي.

## ټولگه :

د کرښي جگیدنه:



د کرښي لپاره د جگیدني فرمول

$$\text{جگیدنه} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{یا} \quad \text{جگیدنه} = \frac{\text{مخامخ اړخ}}{\text{په پروت اړخ}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

بیلگه:

تکی  $P_0(2|3)$  او  $P_1(5|7)$  په کرښه پراته دي

د  $x_0 = 2$  او  $f(x_0) = f(2) = 3$  سره

همداسې  $x_1 = 5$  او  $f(x_1) = f(5) = 7$  د کرښې جگیدنه ده:

$$\text{Steigung} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{7 - 3}{5 - 2} = \frac{4}{3} = \underline{\underline{3}} = \text{جگیدنه}$$

د یوې کرښې جگیدنه

مور لروده:  $\Delta x = x_1 - x_0$

مور دا مساوات په  $x_1$  پسې بڼه بدلوو

$$\Delta x = x_1 - x_0 \quad | + x_0 \Leftrightarrow \Delta x + x_0 = x_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = x_0 + \Delta x}}$$

اوس د جگیدني فرمول کي لیکو:

د  $f(x_1)$  په ځای  $f(x_0 + \Delta x)$  د  $x_1 - x_0$  په ځای  $\Delta x$

له دې سره د جگیدني فرمول دا بڼه لري:

$$\text{Steigung} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \text{جگیدنه}$$

دا فرمول کمښت وپښ دفرنسوبش بولو.

مور د دې فرمول باوریوالی د پورته تمرین سره ازمايو.

### دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلدنه) ۱۴۱

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 5 - 2 = 3 \quad \text{او} \quad P_1(5|7) \quad x_0 = 2 \quad \text{او} \quad P_0(2|3)$$

جگینه =

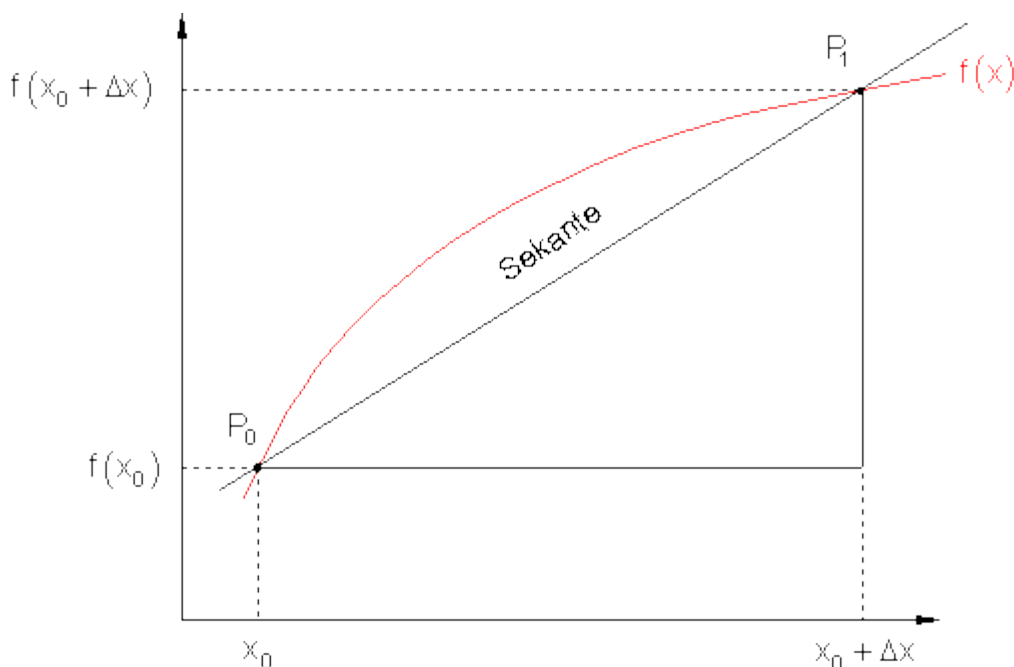
$$\text{Steigung} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(2+3) - f(2)}{3} = \frac{f(5) - f(2)}{3} = \frac{7 - 3}{3} = \frac{4}{3}$$

د یوې کرني باوریوالی کیدی شي هم د کمینتوبش سره وټاکل شي.

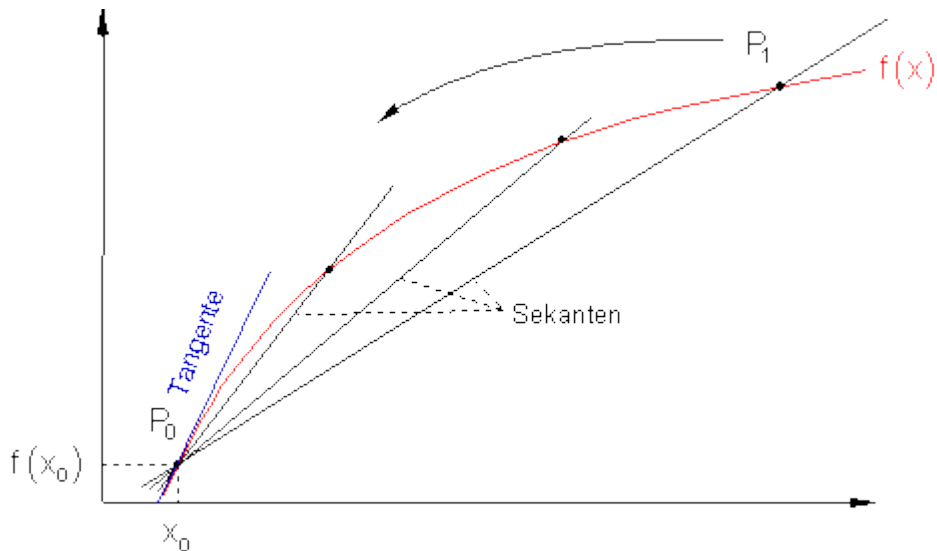
### د سیکانت جگینه او د تانجنت جگینه

پراېلم: د یوه په خوښه تابع  $f(x)$  په ټکي  $P_0$  کې د گراف جگینه څومره لویه ده؟

د سیکانت یا ټوټهونې جگینه د  $P_0$  او  $P_1$  ترمنځ منځنی جگینه.



د سيكانت سره څه پيښيري، كه مور ټكي  $P_1$  تل پسې د ټكي  $P_0$  په لور و خوزوو يا بوزو؟



سيكانت يا غوڅووني تل د  $f(x)$  گراف ته ور نږدې كيږي.

که  $P_1$  په  $P_0$  ولويږي يا پريوځي، نوره نو بيا سيكانت يا غوڅووني نه شته. دا بيا تانجنت شوی دی.

تانجنت يوه کرينه ده، چې د  $f(x)$  گراف په ټكي  $P_0$  كي لمسوي.

د تعريف يا پيژند له مخې د يوه د گراف جگيدنه په ټكي  $P_0$  كي د تانجنت د جگوالي سره برابره ده.

کمبنتوپش، دفرنشلوپش، مشتق او د جگيدني تابع

د دې لپاره چې د يوه گراف  $f(x)$  د  $x_0$  په ځای كي يعني په ټكي  $(x_0 | f(x_0))$  كي وشميرو، کيدی شي دسيكانتجگيدني فرمول لپاره دا ،، دلتا، تل کوچنی شي، کوم چې



دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه) ۱۴۳

د ټکي  $P_1$  راکښنه د  $P_0$  په لور راکوي یا په گوته کوي.

$$\text{Sekantensteigung} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \text{د سیکانت جگیدنه (کمښتوېش)}$$

د گراف  $f(x)$  جگیدنه د  $x_0$  په ځای کې د پوله جوړوني له لارې راکوي یعني

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\text{دفرنخیالوېش})$$

پوله ارزښت په دې معنا، چې ،  $x$  دلتا، د صفر په لور هڅیږي، یعني په خوبه کوچنی کيږي، بي له دې چې ټیک صفر شي. ک د ،  $x$  دلتا، لپاره ارزښت صفر ایښول شوی وی، نو به و یوه نه تعریف شوي افاده او بیښه لاس ته راوړي وی.

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0)}{0} = \frac{f(x_0) - f(x_0)}{0} = \frac{0}{0}$$

تعریف نه

په یاد ولره: د دفرنشلوېش

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} := f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$$

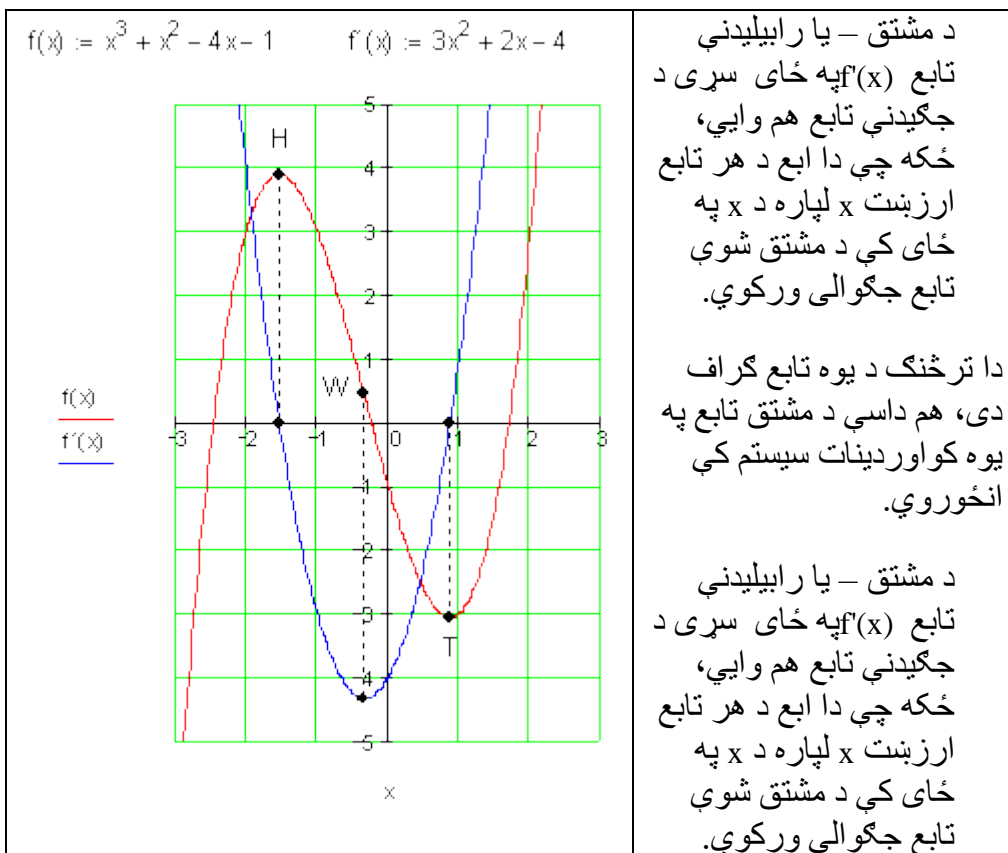
د  $x_0$  په ځای کې د تابع  $f(x)$  مشتق یا رابیلیدنه بلل کيږي او د  $x_0$  په ځای کې د  $f(x)$  جگیدنی لپاره یوه کچه ونه ده

د مشتق بیلگه:

تابع  $y=f(x)=x^2$  لرو، غواړو د  $x=x_0$  په ځای کې مشتق پیداکړو

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = \underline{\underline{2x_0}}
 \end{aligned}$$

دا چې د  $f(x) = x^2$  لپاره  $x = x_0$  په خوښه ټاکل کیدی شي، د دې تابع لپاره باور لري: (د مشتق- یا رابیلیدني تابع)  $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$



دا پورته ترڅنگ د یوه تابع گراف دی، هم داسې د مشتق تابع په یوه کواوردینات سیستم کې انځوروي

پام ولره:

په افراطي خایونو (جگتکو، تیت ټکو) کې د مشتق تابع هر خُل ارزښت صفر لري. په اوړونټکو – یا انعطاف ټکو کې (W) د مشتق تابع یو افراطي خای لري.

## یو غریزوالي

د یو غریزوالي خوږونه:

یو غریزې توابع (Monotony (یوناني: یو غریز، برابر ډوله)

جگیدونکې (متزاید)، تیتیدونکې (متناقص) توابع (جگ-تیتیدونکې توابع)

که د ټولو  $x_1 < x_2$  لپاره د  $f$  یوه تابع په یوه اینټروال کې  $f(x_1) \geq f(x_2)$  یا  $f(x_1) \leq f(x_2)$  وي، نو تابع په دې اینټروال کې مونوټون جگیدونکې ( - تیتیدونکې) بلل کېږي، که  $f(x_1) = f(x_2)$  په کې اجازه ونه لري، نو دا  $f(x_1) > f(x_2)$  یا  $f(x_1) < f(x_2)$  کره یا ټینګه مونوټون جگیدونکې (همغریز تیتیدونکې) بلل کېږي.

لاندې قواعد، چې له همغریزوالي په لاس راځي، د همغریزوالي حالت لپاره ګټور دي.

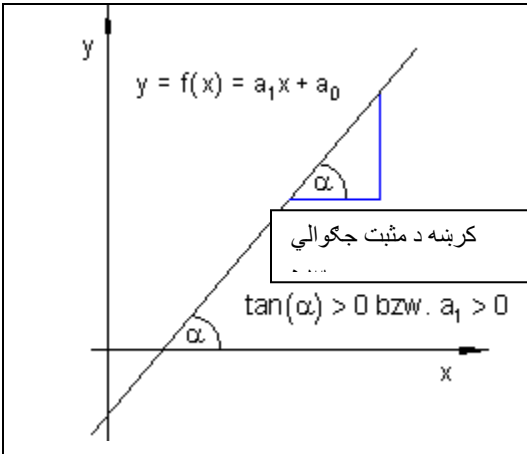
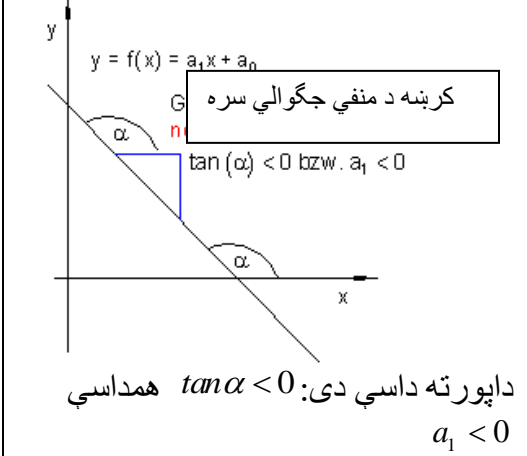
د  $f$  یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو (ساحه)  $D$  کې مونوټون جگیدونکې ده، که د خوښې  $x_1$  او  $x_2$  لپاره، چې په  $D$  کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د  $f$  یو تابع ټیک هلته په  $D$  کې مونوټون ټیټېدونکې ده، که د خوښې  $x_1$  او  $x_2$  لپاره، چې په  $D$  کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

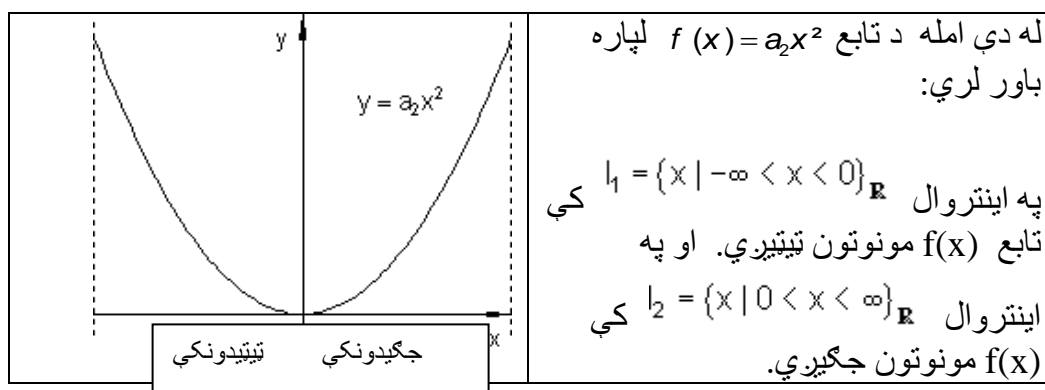
یو غریزوالی (یکنواخت) Monotony جگټیوالی، د جگټیوالی جملې

 <p><math>y = f(x) = a_1x + a_0</math></p> <p>کرښه د مثبت جگوالي ..... <math>\tan(\alpha) &gt; 0</math> bzw. <math>a_1 &gt; 0</math></p>	<p>دا <math>f(x) = a_1x + a_0</math> کرښیز (خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې لپاره مسؤل یې ثابته جگېدنه یا ثابت میل د <math>\alpha</math> چې <math>a_1 = \tan(\alpha)</math> دی، چېرته چې د کرښې او مثبت لوریز د -محور ترمنځ زاویه (کونج) ده.</p> <p>په مخامخ شکل کې: کرښه د مثبت میل سره <math>a_1 &gt; 0 \Leftrightarrow \tan \alpha &gt; 0</math></p>
 <p><math>y = f(x) = a_1x + a_0</math></p> <p>کرښه د منفي جگوالي سره ..... <math>\tan(\alpha) &lt; 0</math> bzw. <math>a_1 &lt; 0</math></p> <p>داپورته داسې دی: <math>\tan \alpha &lt; 0</math> همداسې <math>a_1 &lt; 0</math></p>	<p>که <math>0 &lt; \alpha &lt; 90^\circ</math> یا <math>0 &lt; a_1 &lt; \infty</math> وي، دا په دې مانا چې <math>\alpha &gt; 0 \vee a_1 &gt; 0</math> همداسې (<math>\Leftrightarrow</math>)، نو کرښه جگړي. دا دا معنی لري، چې د جگېدونکي <math>x</math> سره د تابع <math>f(x)</math> ارزښت هم جگړي.</p> <p>په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جگړي سره: <math>\tan \alpha &lt; 0</math> همداسې (<math>\Leftrightarrow</math>) <math>a_1 &lt; 0</math></p>

که  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  یا  $-\infty < a_1 < 0$  وي، دا په دې معنی، چې  $\alpha < 0$  همداسې  $a_1 < 0$ ، نو کرښه ټیټیږي یا لوړیږي. دا په دې معنی، چې د جگړدونکي  $x$  سره د تابع ارزښت  $f(x)$  کوچنی کیږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزې تابع (یا د جگ-ټیټیډونکې تابع) غږیزو او له یوه مونوتون جگیدونکې تابع څخه، که  $a_1 > 0$  وي. له یوې همغږیز یا مونوتون ټیټیډونکې تابع څخه، که  $a_1 < 0$  وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کېږي، چې د منحنیو تله راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنټ ایښول کېدی شي.



لکه د کرښې په ګراف کې، چې جگیدنه ثابتې وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جگیدنه ثابتې نه ده، بلکې دا د منحنی له یوه ټکي څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنټ جگیدنه  $0 <$  ← منحنی مونوتون جگيږي

د تانجنټ جگیدنه  $0 >$  ← منحنی مونوتون ټیټیږي

د تانجنټ جگیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کېږي.

روښانه ده چې د  $f(x)$  تابع لومړی مشتق  $f'(x)$  د تابع میل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتوني قضیه په لاندې ډول فرمولوو.

قضیه: د  $f(x)$  تابع دې په اینټروال  $I$  کې مشتقور وي.

۱ که د  $f(x)$  تابع په اینټروال  $I$  کې همغږیز – یا مونوتون جگیدونکې وي، نو باور لري:  $f'(x) \geq 0$  د ټولو  $x \in I$  لپاره

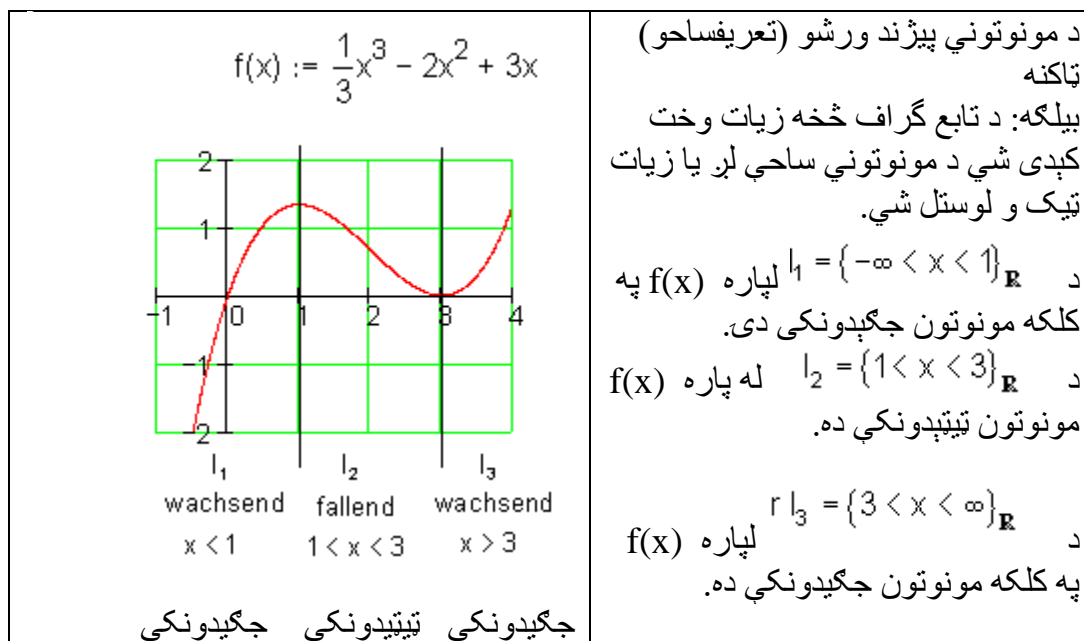
که  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې مونوتون ټیټیدونکې وي، نو باور لري:  $f'(x) \leq 0$  د ټولو  $x \in I$  له پاره.

۲. که  $f'(x) \geq 0$  وي، دټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې مونوتون جگیدونکې ده.

که  $f'(x) \leq 0$  وي دټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې مونوتون ټیټیدونکې ده.

۳. که  $f'(x) > 0$  وي، دټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې په کلکه مونوتون جگیدونکې ده.

که  $f'(x) < 0$  وي دټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې په کلکه مونوتون ټیټیدونکې ده.



باور لري:  $f'(x) > 0$  لاس ته راځي: کره مونوتون جگیدونکې

$f'(x) < 0$ : لاس ته راځي: کره مونوتون ټیټیډونکی

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

لومړی پل: نامساوات  $f'(x) > 0$  همداسې نامسات  $f'(x) < 0$ : حل کوو

دویم پل: د  $f'(x)$  توتوته کوته په کرښیزو ضربونو یا فاکتورونو

$$f'(x) = (x-1)(x-3)$$

دریم پل: د مخنځیني جدول.

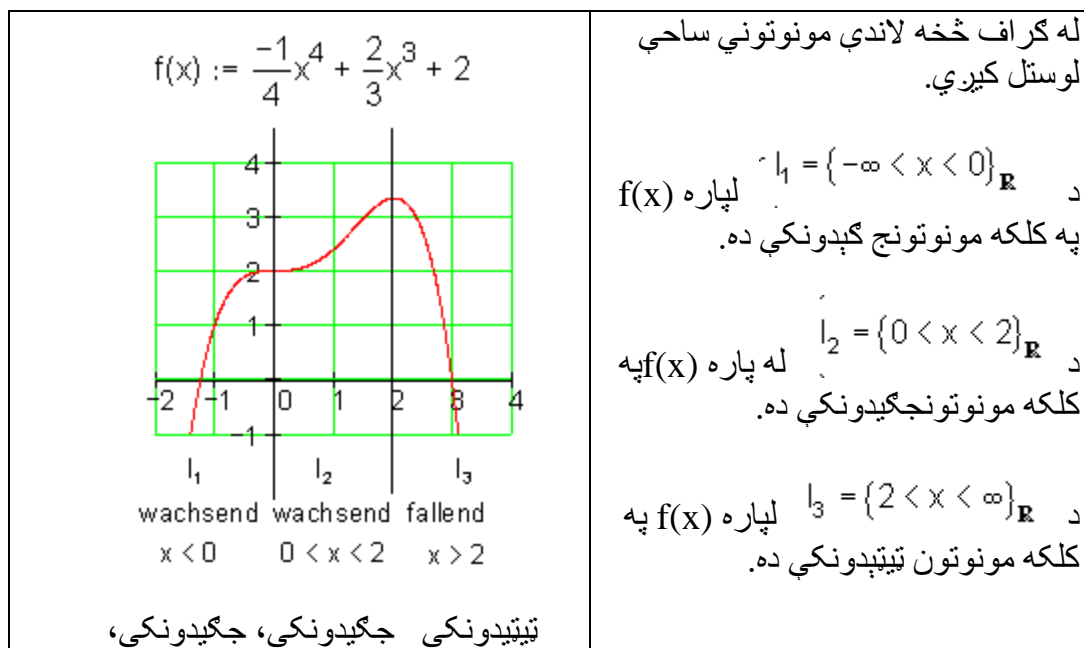
د دوه ضریبونو ضرب ټیک هلته زیاتیز یا مثبت دی، که دوره ضریبونه همغه یا برابره مخ نخشه ولري.

یو د دوه ضریبونو ضرب ټیک هلته کمیز یا منفي دی، که دواړه ضریبونه مختلفي مخنځېولري.

Bereich	$x = 1$		$x = 3$	
	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$	
$x - 1$	-	+	+	
$x - 3$	-	-	+	
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$ ist streng monoton	wachsend	fallend	wachsend	

f(x)      جگیدونکی      ټیټیډونکی      جگیدونکی      کره یو غبریز

بیلگه: دا لاندې گراف لرو



له گراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کيږي.

د  $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbf{R}}$  لپاره  $f(x)$  په کلکه مونوتونج کېدونکي ده.

د  $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbf{R}}$  له پاره  $f(x)$  په کلکه مونوتونج کېدونکي ده.

د  $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbf{R}}$  لپاره  $f(x)$  په کلکه مونوتون تیتیدونکي ده.

## ځای اړونده افراطي ټکي

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکي گورئ، نو هغه افراطي ټکي دي.

تر مخ راوړنه او د کلمي روښانه ونه:

د یوه تابع گزاف زسمونه تر اوسه ناکافي وه، ځکه چې جگ او تیت ټکي نه پیژندل کیده.



د مشتق شمیرني له لاري مور هڅيرو، چي دا ستونځي حل (اوبي کړو) کړو.

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په ځاي کې  $f'(x) = 0$  ولرو نو يو نسبي ټيټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په ځاي کې  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) > 0$  ولرو نو يو نسبي ټيټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو:  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) < 0$ ، نو يو نسبي ماکسيموم مو مخ ته پروت دی.

د افراطي ټکي (ټيټ ټکي يا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې  $f'(x) = 0$  وي، او د

$f''(x)$  مخ نښه  $(+ , -)$ ، په دې پریکړه کوي چې ایا يو ټيټ ټکی (اصغري ټکی) او که جگ ټکی (اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني اړیني يا ضرور دي:

۱- دا اړیکي یواځي د  $x_0$  لپاره ارزښت لري چې د تعريف سټ په دننه کې پروت وي او هلته

د  $y = f(x)$  تابع پوره څو ځلي مشتقور وي، د غاړو (ځنډو) او د هغو ځایونو له پاره چې هلته  $f(x)$  تابع کم يا هيڅ مشتقور نه وي، ځانگړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲- شرایط چې  $f'(x) = 0$  وي (مشتقور تابع) یواځی د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري يا اړین شرایط).

۳- شرایط  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) \neq 0$  د بحراني ټکي لپاره یواځی پوره کیدونکی دی او نه ضروري (

بیلگه :

د  $f(x) = x^2 + 2$  تابع گراف وکارئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د گراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل:

گراف: گراف دې د گرانو لوستونکو د کور کار وي؟

د بیلگې له گراف څخه روښانه ده، چې تابع د  $x=0$  په ځای کې خورا ټیټ ټکی (اصغري- لري).

د انحراف ټکي له پاره اړین شرطونه:

۱ - د تابع لومړي مشتق دی:  $f'(x) = 2x$  په دې مساوات کې د تابع مشتق د  $x_0$  له پاره صفر ځای لري، یعنی دلته یو بحراني ټکي پروت دی.

۲ - د تابع دویم مشتق:  $f''(x) = 2$  دا چې  $f''(x) > 0$  دی، نو یو نسبي ټیټ ټکي مخ ته لرو.

بیلگه : د  $y = x^4$  تابع د  $x = x_0 = 0$  لپاره نسبي ټیټ ټکي لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

گورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوی دی.

د پورته شنې څخه لاندې پېژند ته راځو:

**پېژند:** د  $x = x_0$  په چاپیریال کې د  $y = f(x)$  تعریف شوي تابع یو نسبي جگټکی په همدې ډل نسبي ټیټ ټکي لري، که ټولو  $x_0$  ته پوره نږدې  $x$  لپاره باور ولري:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) > f(x_0)$$

**جمله :** ( د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په  $x_0$  کې مشتقور تابع  $y = f(x)$  انحرافي لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

دا جمله مور ته وايي ( یادونه ۲دې مقایسه شي): چیرته چې  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره یواځي د  $x_0$  ځاي په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو  $f'(x) = 0$ ، خو حتمي نه ده چې  $y = f(x)$  دې یواکستريموم و لري.

**جمله :** ( د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په  $x = x_0$  کې دوه واره مشتقور تابع  $y = f(x)$  لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع  $y = f(x)$  هلته یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جگ ټکی مخ ته پروت دی، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښی لور انحنا یا کوروالی اوله کین لور انحنا یا کوروالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینتروال کې د مشتقور تابع  $f$  دویم مشتق  $f'' > 0$  وي، نو په دې اینتروال کې گراف کین کور شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق  $f'' < 0$  وي، نو د تابع گراف ښی کور یا ښی انحنا لري.

دوه ځیري ( د لاندې بېلگې څیره و باسی ؟-)

بیلگه:

ټول گونگتابع (راشنل تابع)  $f$  د  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$  سره په کومه ورشو (ساحه) کې کینکور دی (کینه انحنای لري (ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشو کې بنی کور دی (بنی انحنای لري (محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق)

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

د  $x > 2/3 \Rightarrow 6x - 4 > 0$  لپاره کین کوروال (کینه انحنای (ننوتی یا مقعر)

د  $x < 2/3 \Rightarrow 6x - 4 < 0$  لپاره بنی کوروالی (بنی انحنای (وتلی یا محدب))

بیلگه:

د مات راشنل تابع  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  گراف یو های پارابول دی. د های پارابول کومه ځانگه کینه کړه ده یا کینه انحنای لري (مقعر)، او کومه یوه یی بنی کوروالی - یا بنی انحنای لري (محدب)؟

$$\text{دویم مشتق: } f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}; f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$$

صورت تل مثبت دی.

د  $x < -2$  لپاره د مخرج او همداسی د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول ځانگه بنی کوروالی یا انحنای لري (وتلی یا محدب).

د لپاره  $x > -2$  مخرج او همداسی ټول کسر (مات) مثبت دی.

های بارابول کینکور دی یا کینه انحنای لری (ننوتی یامقعر).

بیلگه :

د دوارو توابعو  $f(x) = \sqrt{x}$  او  $g(x) = \sqrt{x^3}$  کوروالی (انحنای) دی یو د بل سره پرتله شئی.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad g'(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad g'' = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

دویم مشتقونه د  $x \in \mathbb{R}^+$  لپاره تعریف دي.

په دې ساحه کې  $f''(x) < 0$  دی. اړونده گراف بنی کوروالی یا انحنای لری، دا یو شئی لور ته واز پارابول بنایي.

په همدې ساحه کې  $f''(x) > 0$  دی. اړونده گراف کین کور دی یا کینه انحنای لری. اړونده گراف یو کین کوروالی یا کینه انحنای لری، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

## د انعطاف ټکی (اړونټکی)

یادونه: ولې اړونټکی؟

وبه گورو، چې په دې ټکی کې گراف خپله لور اړوي، نو .....

موږ له پورته څیرې اټکل کولی شو چې : که د  $x_0$  ځای کې دا لاندې ولرو

$$f''(x) = 0$$

$f'''(x) > 0$ ، نو یو بنی-کین-انعطاف ټکی (اړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په څټ):

که وي:  $f''(x) = 0$  او  $f'''(x) < 0$  نو یو کین - بنی - د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د انعطاف ټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی  $f''(x) = 0$  وي ، داچی دا بنی - کین - او که کین- بنی - انعطاف ټکی (اورونټکی) دی، د  $f''(x)$  مخ نښه یی ټاکي.

-شرایط  $f''(x) = 0$  د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یا ضروري دي.

د  $y = x^4$  لپاره  $f''(0) = 0$  دی، مگر اورونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

-شرایط  $f''(x_0) = 0$  او  $f'''(x_0) \neq 0$  د انعطاف ټکي لپاره پوره کیدونکي دي. گورو

چی  $y = f(x) = x^5$  تابع د  $x = x_0 = 0$  ځای کی یو انعطاف ټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4, \quad f'(0) = 0$$

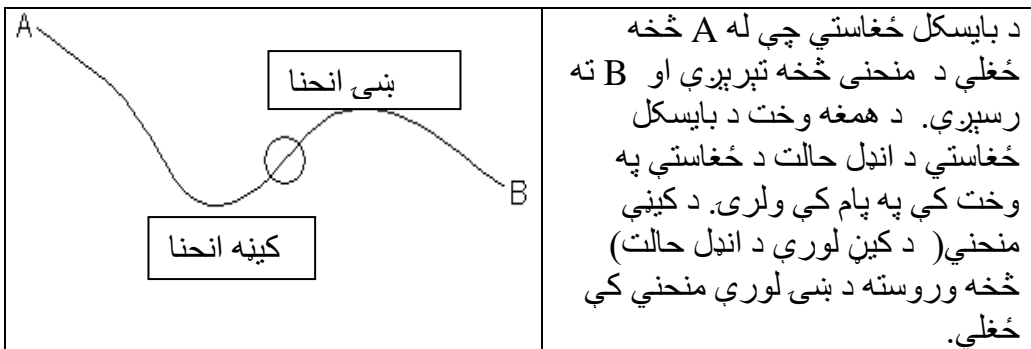
$$f''(x) = 20x^3, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2, \quad f'''(x) = 0$$

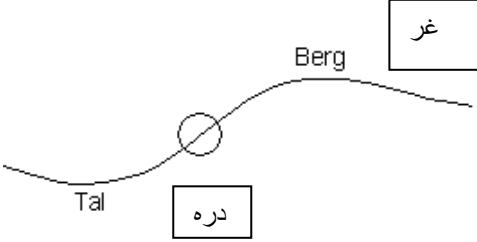
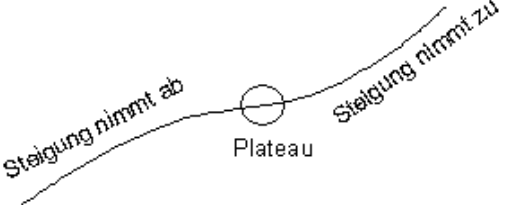
گورو چی دریم مشتق  $f'''(x)$  نه له صفر څخه کوچنی او نه لوي دی.

تر مخ راورني او د کلمي روښانه وني:

د دی کلمي د لا نوري روښانه کولو لپاره په لاندې توگه مخ ته ځو:



د کینې- او بنې منحنې (کږې) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولاړ وي (عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کینې لورې و بنې لورې ته. دا د کینې او بنې منحنې ترمنځ اوریدنه یاد **انعطاف ټکی** بلل کیږي.

	<p>تاسو له بایسکل سره په یوه غونډی ځغلی. وروسته له هغې، چې له تالی څخه تېرېږي، نو لار په جگېدو پیل کوي. په لومړي سر کې نرم او بیا په نیغه جگېږي، بیا په دې پسي جگوالی بېرته کمېږي، چې پاس د غونډی په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چیرته په غونډی پورته صفر ارزښت ته رسېږي. یو چیرته په لار جگېدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.</p>
 <p>له کینې و بنې لور ته: جگېدنه کمېږي، هواره، جگېدنه زیاتېږي</p>	<p>د بایکل ځغلوونکي بل حالت، چې له څنګ دیاگرام څخه یې رانیسو:</p> <p>په غره د بایسکل ځغاستمیل یا جگېدنه لومړی کمېږي، چې له سره بېرته جگه شي.</p> <p>ددې ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جگوالی سره (یوه نسبتاً هواره). دې نسبتاً هوار ځای کې د توتې کرښې جگېدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اورونټکی (د انعطاف ټکی) پروت دی.</p>

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جگوالی تابع دی، چې له گراف څخه یې جگوالی لوستل کیږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوی یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنار همغسې ده، لکه د پیل تابع  $f(x)$  لپاره مو ټاکلي. اوس د مشتق تابع  $f'(x)$  باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکی له دې چی یو لړ جملی د بحراني(جگ – ټیټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیرو، غواړو چی دا کلیمی تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

**پېژند ۲۰ . ۶ :** په یوه چاپیریال  $x = x_0$  کی مشتقور تابع  $y = f(x)$  یو کین- بنی- انعطافټکی په همدې ډول بنی- کین- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جگټکی(عظمي نقطه) په همدې توگه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

**جمله ۲۰ . ۱۱ :** ( د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په  $x_0$  کی مشتقور تابع  $y = f(x)$  اکستریموم لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

دا جمله مور ته وایي ( یادونه ۲ دې پرته شي): چیرته چی  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یواځي د  $x_0$  ځاي په پوښتنه کی راځي، چی د هغې لپاره  $f'(x) = 0$  وي ، خو حمتي نه ده چی  $y = f(x)$  دې یو بحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په  $y' = f'(x)$  څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

**جمله ۲۰ . ۱۲ :** ( د اورونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړین شرایط):

که په  $x = x_0$  کی دوه واره مشتق ور تابع  $y = f(x)$  هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي:

دلته هم باور لري ( یادونه ۴ دې پرته شي): چیرته چی  $f''(x) \neq 0$  وي ، نو هلته نه شي کیدی چي اورونټکي موجود وي. مگر چیرته چی  $f''(x) = 0$  وي ، اورونټکی شته کېدلی شي، خو اړین یا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.



جمله ۲۰، ۱۳:

( د اورونټکي یا انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه ) که په  $x = x_0$  کی دریوار مشتقور تابع  $y = f(x)$  لپاره وي:

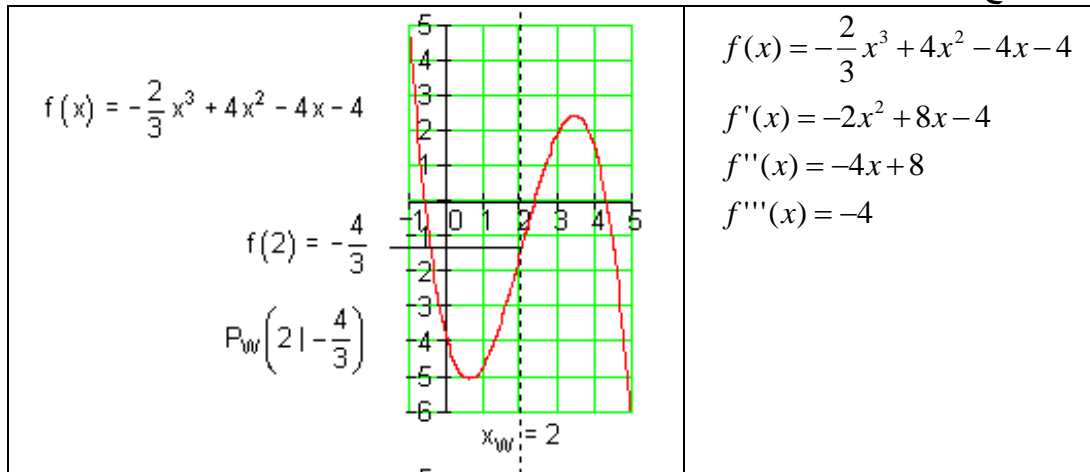
$$f''(x) = 0, \text{ او } f'''(x) \neq 0,$$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که  $f'''(x) < 0$  وي، نو یو کین-بني - انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د  $f'''(x) > 0$  لپاره یو بنی-کین-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننیزه یا تحلیلي بیلگه:

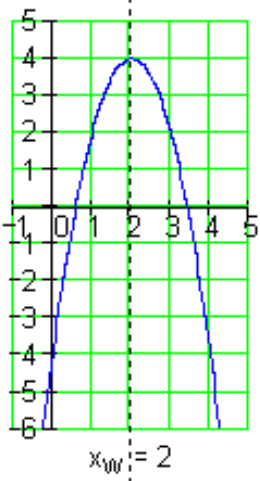
یادونه: مور د  $x_E$  سره افراطي ټکی په نښه کوو او د  $x_W$  سره د انعطاف - یا اویرون ټکی په نښه کوو.

1- تابع مساوات د مشتق سره

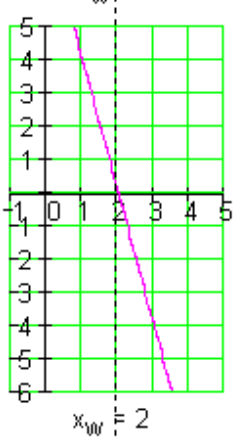


2- دویم مشتق صفر کری.

دفرنخیاال شمیرنه (مشتق یا رابیلدنه)

$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$ <p>Extremwert von <math>f'(x)</math> bei <math>x_W = 2</math></p>		$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0$ $\Rightarrow x_W = 2$
<p>د المانی پینتو: د <math>f'(x)</math> صفرخای په <math>x_W = 2</math> کی</p>		

3- د انعطاف ټکی له مخې بنوونه، چي ایا د انعطاف ټکی شته دی؟

$f''(x) = -4x + 8$ <p>Nullstelle von <math>f''(x)</math> bei <math>x_W = 2</math></p>		$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$ <p>-4 په <math>f(x)</math> د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکی ټاکنه</p> $f(x_W) = f(2) =$ $-\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_W\left(2, -\frac{4}{3}\right)}}$ $\underline{\underline{P_W(21 - 1.33)}}$
<p>د المانی پینتو: د <math>f''(x)</math> صفرخای په <math>x_W = 2</math> کی</p>		

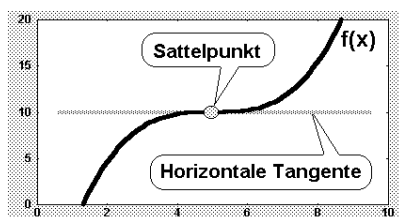
پام: په انعطاف ځای  $x_W$  کې د  $f(x)$  گراف کزیري.

په یوه په خوښه ټکی  $x_0$  کې د کزروني(انحنا) لپاره باور لري:

$f''(x) > 0$  په دې معنی دی، چې  $f(x)$  کین لور ته کزیري (انحنا لري) دی.

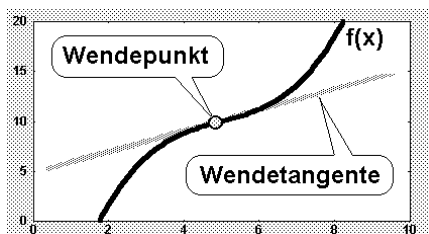
$f''(x) < 0$  په دې معنی، چې تابع  $f(x)$  گراف بنی لور ته کزیري (انحنا کوي)

## یو زینتکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

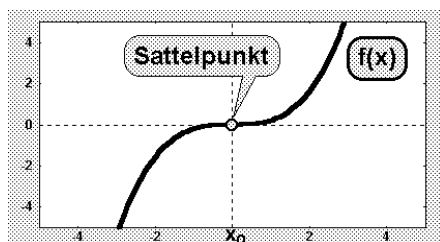


پیزند:

د زینتکي (کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي) لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:



د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي. دا یو مائل (نه افقي) تانجنت لري

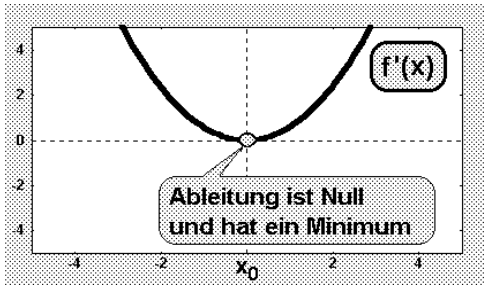


توضیح:

اوس فکر کوو، چې یو زینتکی څنگه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چې یو زینتکی له بني - و کینه انحنأ و شمېرو.

د دې لپاره د  $f(x)$  تابع جگوالی په پام کې نیسو، یعنی لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د  $f(x)$  جگوالي کميږي، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جگيږي.

یو زینتکی (د بني - کین - بدلون سره) په دې پېژندل کيږي، چې لومړی مشتق  $f'(x)$  یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټیټکی (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق  $f'(x)$  شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې  $f'(x)$  په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینتکي (بني-کين-بدلون)  $f'(x_0) = 0$

دوم شرط دی، چې مشتق  $f'(x)$  هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنای، چې بل جگ مشتق  $f''(x)$  باید په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.

له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کیدونکي قضیه ومیندل شوه:

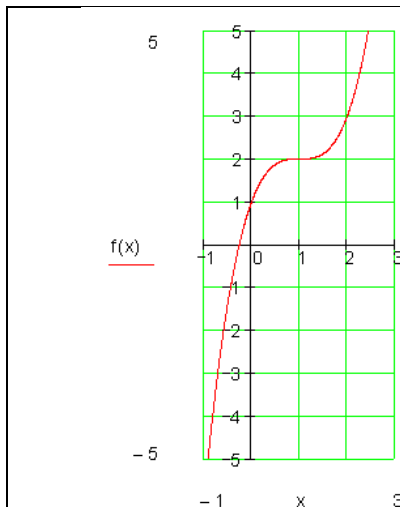
د زینتکي لپاره جمله (خوي ټاکنه) (د بني-کين- انعطاف سره)

الف: د  $x_0$  ځا کې لومړی مشتق  $f'(x)$  صفر دی:  $f'(x_0) = 0$

ب: د  $x_0$  په ځا کې لومړی مشتق  $f'(x_0)$  یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم

مشتق صفر دی، یعنې  $f''(x) = 0$  دوم مشتق مخنښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.

بل بدیل (د گرانو دوستانو وړاندیز)



زینتکي:

د انعطاف ټکي یو ځانگړی حالت زینتکي دی. دا د

انعطاف ټکي دی د صفر جگیدني سره. که د کين

لور ورتزدي شو فکر کيږي، چې، نسبي جگتکي

مو مخ ته پروت دی

که څوک د بني لور ورتزدي شي فکر کوي، چې

یو نسبي ټيټتکي مخ ته لرو.

اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري څیرو:

۶۳ دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رایلیدنه)

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ $f''(x) = 6x - 6$ $f'''(x) = 6$	مشتق:
--	-------

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

$x = 1 \leq 1$ سره زینتکی	$x = 1 \leq 1$ سره د انعطاف تکی	$f'(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$
---------------------------	------------------------------------	--

د انعطاف تکی لپاره شرایط پوره دي. دا چې د  $f'(1) = 0$  له امله د انعطاف تکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف تکی همغه زینتکی دی.

د انعطاف تکی پیدا کونه:

د تابع گراف باندې انعطاف تکی کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کېږي. د انعطاف تانجنت هم

همداسې پیدا کېږي لکه د تابع دگراف په یوه تکی کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کېږي.

<p>د انعطاف تانجنت د <math>f(x)</math> گراف د انعطاف په تکی <math>P_w(4, 2)</math> کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:</p> $t(x) = -3x + 14$	$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$ $f''(x) = \frac{3}{2}x - 6 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$ $f''(x_w) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 6 = 0$ <p>د <math>f'''(x_w) = \frac{3}{2} \neq 0</math> او <math>x_w = 4</math></p> $f(x_w) = f(4) = 2 \Rightarrow P_w(4   2)$ <p>مساوات لپاره باور لري.</p> <p>د <math>x_w</math> لپاره د تانجنت مساوات</p> $t(x) = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w)$
---	--

	$f'(x_w) = f'(4) = -3$ د سره په لاندې ډول دي $t(x) = -x(x+4) + 2 = \underline{\underline{-3x+14}}$
--	--

د انعطاف- یا ورون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کېږي. د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کېږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوبه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه  $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$  دلته تر څیړنې لاندې نه نیول کېږي.

### د کږې یا منحنی بحث (Kurven Diskussion):

تر مخ راوړنه او د کلمې روښانه ونه:

د دې لپاره چې د یوې تابع وکارلی او تشریح کړای شو، اړین دی چې د گراف په ځنې په راوتلو یا غوره تمو او د گراف په تلنه وپوهیږو.

داسې د گراف په غوره خوږیز یا کرکترېستیکي خوږونو باندې د پوهیدنې او څیړنې ته د کږو یا منحنیو خبرې اترې یا بحث وایو.

د دې لپاره چې د تابع کوم غوره خوي مو له یاده ونه ووځي یا راڅخه پاتې نه شي، نو د داسې څیړنو لپاره سړی باید سیومتریک مخ ته ولاړ شي او هم تل د څیړنو او شمیرنو د لړۍ پرلپسې یا لږې ترتیب په پام کې ونیسي.

په لاندې ډول تلنلار ډېره گټوره گڼل شوي

لومړۍ: تعریفورشو یا -ساحه:

سړی له هر څه د مخه د فنکشن یا تابع تعریفورشو ټاکي، ځکه چې فقط د دې ورشو په دننه کې موخه ور دی چې تابع خوږونو څیړنه مخ ته بوزو.

دویم: سیومتری:

سری کره کوي، چي ایا تابع محوري- اوټکی سیومتری دی.

محورسیمتری سره باور لري:  $f(-x)=f(x)$  په دواړو حالتونو کي فنکشن باید وڅیرل شي.

د ټکي سیومري سره باورل ري:  $f(-x)=-f(x)$  فقط باید د  $x \geq 0$  لپاره وڅیرل شي.

په ځنګري توګه د ټول راشنل یا -خوښیار توابعو لپاره باور لري:

یو ټول راشنل تابع ټیک هلته محور سیمتریک دی، که د هغه ترمونه زاتیډوني یا د جمعي اعضاوي فقط د جوړه یا جفت جګ عدد یا اکسپوننت سره ولري.

یو ټول راشنل تابع ټیک هلته ټکی سیمتریک دی، که د هغه ترمونه نا جوړه یا طاق د زیاتیډوني یا د جمعي غري ولري.

دریم: افراطیت:

د نسبي افراطیت ټاکنې، دا سری جګ - همداسي ټیټ ټکي بولي.

دا د پراته یا افقي تانجنت سره ټکي هم دي.

<p>ټیټ ټکی = نسبي مینیموم پوره کیدونکي شرطونه: <math>f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) &lt; 0</math></p>	<p>ټیټ ټکی = نسبي مینیموم پوره کیدونکي شرطونه: <math>f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) &gt; 0</math></p>
--	--

څلورم: اوړونټکی (نقطه انعطاف):

د اوړونټکي همداسي زین ټکي ټاکنه.

د اوړونټکي لپاره پوره کیدونکي شرطونه:  $f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$

زینتکی (همغه د اس زین څخه دا نوم رانیول شوی) اورنتکی دی د پراته تانجنت سره.

پنځم: محور غوڅتکی (د محور د تقاطع نقاط):

که د  $x$  -محور ارزښت صفر ( $x=0$ ) د  $f(x)$  په فنکشن ارزښت کې کینول شي، نو سړی د  $y$  -محور سره غوڅتکی (نقطه تقاطع) لاس ته راوړي.

د  $y$  -محور سره غوڅتکی  $P_y(0|y_s) \Rightarrow f(0)$  وټاکي.

د  $x$  -محور سره غوڅتکی (صفرځای)  $P_{xi}(x_i|0) \Rightarrow f(x) = 0$

شپږم: گراف:

دا تراوسه د ټولو راټول شوو معلوماتو سره اوس کیدی شي په زیاتو حالتونو کې گراف انځور کړای شو.

د دې لپاره لومړی یو ارزښت جدول چمتو کړي.

دا په گوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه دې وشمیرل شي.

دا کیدی شي چې د جشمیرونو سره شومیرل شي او د یا د ټولگنونو یا تام اعدادو  $x$  - ارزښتونو لپاره د هورنر شیمایه مرسته.

اوم: کبروالی ځاننونه (حالت) او یو غریزوالی.

په اوړونوټکي یا انعطافټکي  $x_w$  کې د  $f$  د گراف کبروالی تغیر خوري.

د په خوښه ټکي  $x_0$  کې د کبروالي لپاره باور ري:

$f''(x_0) > 0$  په دې معنا، چې د  $f(x)$  گراف کین کور (ننوتی یا مقعر؟؟) دی.

$f''(x_0) < 0$  په دې معنا، چې د  $f(x)$  گراف بڼي کور (وتلی یا محدب) دی:

یو غریزوالی:



۱. که د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x_0) \geq 0$  وي، نو  $f(x)$  یو غریز جگیدونکی دی په انټروال  $I$  کې

که د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x_0) \leq 0$  وي، نو  $f(x)$  یو غریز ټیټیدونکی دی په انټروال  $I$  کې.

۲. که د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x_0) > 0$  وي، نو  $f(x)$  کره یا په کلکه یو غریز جگیدونکی دی په انټروال  $I$  کې

که د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x_0) < 0$  وي، نو  $f(x)$  کره یا په کلکه یو غریز ټیټیدونکی دی په انټروال  $I$  کې.

لنډ: په اوږونټکي کې د یوه گراف د کږوالي حالت تغیر خوري

د یو غریزووالي حالت په افراطي ټکو کې تغیر خوري

اتم: د تعریفورشو ژی ټکي:

د تعریفورشو په ژی ټکو کې د فنکشن څیرنه.

که تعریفورشو محدوه یا رابنده نه وي، نو دواړه پوله ارزښتونه

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{او} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

دې وټاکل شي.

په ډول وینه یا افاده: د لوی  $x$  - ارزښت لپاره سری د فنکشن ارزښتونه تلنه په زیا تیز یا مثبت لور او هم په کمیزه یا منفي لور څیري او دا پوښتنه له ځانه کوي، چې فنکشن ارزښتونه په کومه لور څغلي.

د یوه مفصل کړو بحث خبري اتری یا بحث:

تعریفورشو:

تابعبرابرون یا تابع مسوات:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي تعريف ډېری یا -ست  $D_f = \mathbb{R}$ .

فنکشن د ټول حقيقي ارزښتونو لپاره تعريف دی. د ورسره بلده توگه ټول راشنل فنکشنونو دا تل باور لري، خو پرته له دې که څوک و غواړي تعريف ورشو رابنده یا محدود کړي.

سیومتری: دا چې ټول جگځونه یا اکسپوننتونه جوړه یا جفت دي، نو یو محورسیومتری مخ ده لرو،

باور لري:  $f(-x) = -f(x)$  د ټول  $x \in \mathbb{R}$  لپاره.

گټه په دې کې ده، چې فنکشن ارزښتونه باید فقط د زیاتیزو یا مثبت  $x$  - ارزښتونو لپاره وشمیرل شي.

افراطیبت:

د افراطي ټکو شمیرلو لپاره تلنلار:

سری لومړی د  $f(x)$  لومړي دوه مشتقونه ټاکي.

د لومړي و مشتق صفرایښوونه د پراته تانجنت ځای راکوي.

که سری دا ارزښتونه په دویم مشتق کې کیردي، نو سری د مخ ته پراته افراطیبت په هکله وینا ترلاسه کوي.

( نسبي مامسیموم یا نسبي مینیموم همداسي د افراطي ټکو نه والی).

د افراطي ځایونو  $x_i$  ارزښتونه که فنکشن مساوات کې کینبول شي افراطي ارزښتونه راکوي او له دې سره د افراطي ټکو کواوردیناتونه یا پراته ولاړ ارزښتونه څرگند دي.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \quad \text{تابع ابرون یا مساوات:}$$

$$f'(x) = x^3 - 4x \quad f''(x) = 3x^2 - 4 \quad f'''(x) = 6x \quad \text{مشتقونه:}$$

د افراطي ارزښتون لپاره پوره کیدونکي شرطونه.

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0$$

x له نوکانو وباسی

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0$$

د صفر ضرب جمله له دې لاس ته راځي  $x_1 = 0$  همداسې  $x^2 - 4 = 0$

$$x^2 - 4 = 0 \quad | +4$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ bzw. } x_3 = -2$$

د پراته تانجنت ځایونه:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 2$ ;  $x_3 = -2$

د نسبي ماکسیموم همداسې نسبي مینیموم ښوونه:

$$f''(x_1) = f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. für } x_1 = x_{E1} = 0 \text{ (Hochpunkt)}$$

$$f''(x_2) = f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_2 = x_{E2} = 2 \text{ (Tiefpunkt)}$$

$$f''(x_3) = f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_3 = x_{E3} = -2 \text{ (Tiefpunkt)}$$

افراطي ارزښتونه:

د  $x_{E1} = 0$  لپاره جگ ټکی

$$f(0) = -\frac{9}{4} = -2,25$$

$$\Rightarrow P_{\text{Max}} \left( 0 \mid -\frac{9}{4} \right) \text{ bzw. } P_{\text{Max}} (0 \mid -2,25)$$

د  $x_{E2} = 2$ : لپاره ټیټکی

$$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 - \frac{9}{4} = -\frac{25}{4} = -6,25$$

$$\Rightarrow P_{\text{Min1}} \left( 2 \mid -\frac{25}{4} \right) \text{ bzw. } P_{\text{Min1}} (2 \mid -6,25)$$

د  $x_{E2} = -2$ : لپاره ټیټکی

$$f(-2) = f(2) = -\frac{25}{4} = -6,25$$

د محور سیومتری له امله

$$\Rightarrow P_{\text{Min2}} \left( -2 \mid -\frac{25}{4} \right) \text{ bzw. } P_{\text{Min2}} (-2 \mid -6,25)$$

اورنټکی یا د انعطاف ټکی:

د انعطاف ټکو ټاکلو لپاره د شمیرني تلنلار:

د لومړیو دوه مشتقونو برسيره سری د  $f(x)$  دریم مشتق جوړوي یا نیسي.

د دویم مشتق صفر خایونه ممکنه اورونټکی دي.

د افراطي ټکو مخ ته پرېوتني یا لرنې ازماېنت لپاره د دویم مشتق شمیرل شوی

صفر خای په دریم مشتق کې ایښوول کيږي.

که لاس ته راوړنه د صفر سره برابره نه وي، نو اړونده  $x$  - ارزښتونه یو اورنټکی په

گوته کوي. ځکه چې دا اړونده فنکشن ارزښتونه د  $x$  - ارزښتونو د تابع مساوات  $f(x)$

ترم کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \quad \text{تابع مساوات:}$$

$$f'(x) = x^3 - 4x \quad f''(x) = 3x^2 - 4 \quad f'''(x) = 6x \quad \text{مشتقونه:}$$

د اورونټکو لپاره پوره کیدونکي شرطونه:

$$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0 \quad | +4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 4 \quad | :3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ bzw. } x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\boxed{x_{w1} = \sqrt{\frac{4}{3}}} \quad ; \quad \boxed{x_{w2} = -\sqrt{\frac{4}{3}}} \quad \text{ممکنه اورونټکی:}$$

په اورونټکو بنسونه:

$$f'''(x_{w1}) = f''' \left( \sqrt{\frac{4}{3}} \right) = 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \neq 0; \quad f'''(x_{w2}) = f''' \left( -\sqrt{\frac{4}{3}} \right) = 6 \cdot \left( -\sqrt{\frac{4}{3}} \right) \neq 0$$

$$x_{w1} = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \text{د لپاره اورونټکی}$$

$$f(x_{w1}) = f \left( \sqrt{\frac{4}{3}} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left( \sqrt{\frac{4}{3}} \right)^4 - 2 \cdot \left( \sqrt{\frac{4}{3}} \right)^2 - \frac{9}{4} = -\frac{161}{36}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{w1} \left( \sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\frac{161}{36} \right)} \text{ bzw. } P_{w1} (1,15 \mid -4,47)$$

د  $x_{w2} = -\sqrt{\frac{4}{3}}$  لپاره اوړونتیکی

$$f(x_{w2}) = f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{161}{36}$$

د محور سیومتری لهامله

$$\Rightarrow \boxed{P_{w2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\frac{161}{36}\right) \text{ bzw. } P_{w1}(-1,15 \mid -4,47)}$$

پنځم: محور غوڅتیکی یا نقاط تقاطع محور

الف- د  $y$ -محور سره غوڅتیکی  $f(0) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid -2,25)}$

ب- د  $x$ -محور سره غوڅتیکی (صفر ځایونه)

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = 0 \mid \cdot 4 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \mid \text{Substitution } x^2 = z \\ &\Leftrightarrow z^2 - 8z - 9 = 0 \end{aligned}$$

په  $z$  کې مربع مساوات

$$\begin{aligned} &\Rightarrow p = -8; q = -9; D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{8}{2}\right)^2 + 9 = 25 \\ &\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\left(-\frac{8}{2}\right) \pm \sqrt{25} = 4 \pm 5 \Rightarrow z_1 = 9; z_2 = -1 < 0 \end{aligned}$$

(حل نه شته)

$$z_1 = x^2 = 9 \Rightarrow |x| = \sqrt{9} \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -3 \quad \text{په څټ یا برعکس بدلون:}$$

په  $P_{x_1}(3|0)$ ;  $P_{x_2}(-3|0)$  کې صفرځایونه

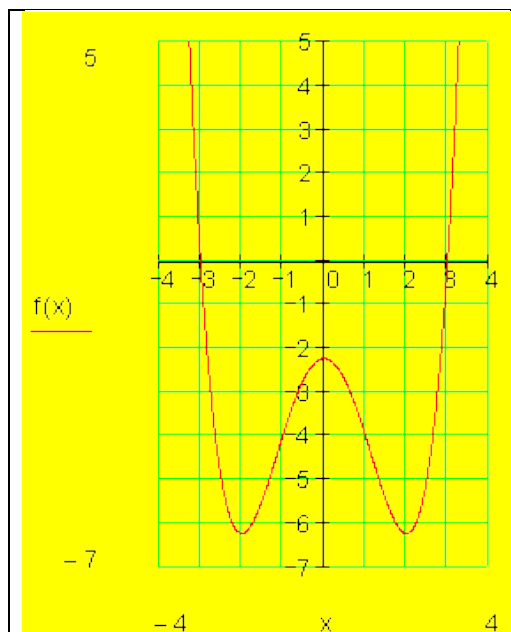
شپږم: ارزښت جدول:

ارزښت جدول د ورزیاتو ارزښتونو سره:

$$f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^2 - \frac{9}{4} = -4; f(-1) = f(1) = -4$$

$$f(3,25) = \frac{1}{4} \cdot (3,25)^4 - 2 \cdot (3,25)^2 - \frac{9}{4} \approx 4,52; f(-3,25) = f(3,25) \approx 4,52$$

		$P_{x_2}$	$P_{Min2}$	$P_{W2}$		$P_{Max} = P_y$		$P_{W1}$	$P_{Min1}$	F
x	-3,25	-3	-2	-1,15	-1	0	1	1,15	2	
f(x)	4,52	0	-6,25	-4,47	-4	-2,25	-4	-4,47	-6,25	



شپږم: ټولگه:

محور غوڅتکي

اکسترم ارزښتونه:

$$P_{Min1}(2|-6,25); P_{Min2}(-2|-6,25)$$

$$P_{Max}(0|-2,25)$$

اورونټکي

$$P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\frac{161}{36}\right); P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\frac{161}{36}\right)$$

مور غوڅتکي

$$P_y(0|-2,25); P_{x_1}(3|0); P_{x_2}(-3|0)$$

د کږوالي یو غږیزوالی

ننوتی

	<p>او <math>\left] -\infty; -\sqrt{\frac{4}{3}} \right[ \text{ und } \left] \sqrt{\frac{4}{3}}; \infty \right[</math></p> <p>وتلی: <math>\left] -\sqrt{\frac{4}{3}}; \sqrt{\frac{4}{3}} \right[</math></p> <p>کره یو غریز یتیدونکی</p> <p><math>\left] -\infty; -2 \right[ \text{ und } \left] 0; 2 \right[</math></p> <p>کره یو غریز جگیدونکی</p> <p><math>\left] -2; 0 \right[ \text{ und } \left] 2; \infty \right[</math></p> <p>ژی تکی</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty</math></p>
--	--

اووم: کړوالی حالت او یو غریزووالی:

کړوالی د  $x_0 = -2$  لپاره (کین له  $P_{w2}$ )

$$f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 > 0$$

د  $\left] -\infty; -\sqrt{\frac{4}{3}} \right[$  لپاره کینکړوالی (ننوتی)

د  $x_0 = 0$  لپاره کړوالی (د  $P_{w1}$  او  $P_{w2}$  ترمنځ)

د  $f''(0) = -4 < 0$  بنی کړوالی (وتلی) د  $\left] -\sqrt{\frac{4}{3}}; \sqrt{\frac{4}{3}} \right[$  لپاره.

د  $x_0 = 2$  لپاره کړوالی (د  $P_{w2}$  بنی لور ته)



$$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = x > 0$$

کین کوروالی د  $[\sqrt{\frac{4}{3}}; \infty[$  لپاره

کره یا په کلکه قوغریز تینیدونکی د  $]-\infty; -2]$  لپاره

کره یوغریز جگیدونکی د  $]0; -2]$  لپاره

کره یا په کلکه قوغریز تینیدونکی د  $]2; 0]$  لپاره

کره یوغریز جگیدونکی د  $]\infty; 2]$  لپاره

اتم: د تعریفو رشو ژی ټکی:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} - \frac{9}{4x^4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} - \frac{9}{4x^4} \right)}_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty}$$

یوه تابع  $y = x^3 + x^2 - 3$  لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع افرطې ټکي او د انعطاف ټکي په نڅبنه کړئ، رېښانه کړئ، چي انحنای چیرته له کیني لور وښی لوري ته او له ښی لوري و کیني لوري ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جگ ټکي، تیت ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا کړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پیژنو. مور دې بحث ته د منحنې بحث وایو. مور په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لار شو. په لاندې ډول تلنه گټوره بلل شوي.

دتعریف ساحه: د تابع څیرنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده. تناظر **Symetry**: باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده. د محوري تناظر لپاره باور لري:  $f(-x) = f(x)$  د مرکزي تناظر لپاره باور لري.  $f(-x) = -f(x)$ . په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط  $x \geq 0$  وڅېړل شي. یه ټولیزه توگه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو گورو چې که توان (د پولینوم درجه) یې جفت (جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان (د پولینوم درجه) طاق (ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي **Extrema**: د نسبي بحراني ټکو ټاکل (جگټکی، ټیټیټکی) د جگټکی یا نسبي جگ ټکي پوره کیدونکي شرطونه:  
 $f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) < 0$

### انعطافټکی یا اوړونټکی : Inflection Point

د انعطافټکو او همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کیدونکي شرطونه:  
 $f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$   
 زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.  
 د تابع تقاطع د  $x$  او  $y$  محورونوسره (د محورونو غوڅټکی):  
 د  $-x$  محور سره غوڅټکی:  $(x) = 0 \Rightarrow P_{x_i}(x_i | 0)$   
 د  $y$  محور سره غوڅټکی (صفرخای) ټاکي  $f(0) \Rightarrow P_y(0 | y_s)$   
 دگراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې گراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځور یږي. دا راته په گوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کېږي.

د کږوالی - یا انحنای حالت او یو غږیزوالی:

د انعطاف په ټکي  $X_w$  کې د  $f(x)$  گراف تغیر خوري.

په خوښه یوه ټکي  $x_0$  کې د انحنای لپاره باور لري:

$f''(x_0) > 0$  په دې معنا، چې د  $f(x)$  تابع گراف کینه انحنای لري (کونوکس)

$f''(x_0) < 0$  په دې معنا، چې د  $f(x)$  تابع گراف بنی انحنای لري (کونکاو)

یو غږیزوالی

1- که د ټولو  $x \in I$  لپاره وي  $f'(x) \geq 0$ ، نو  $f(x)$  په انتروال  $I$  کې مونوتون جگړي. که

د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x) \leq 0$  وي، نو  $f(x)$  په انتروال  $I$  کې مونوتون ټیټېدونکی دی.

2- که د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x) > 0$  وي، نو  $f(x)$  تابع په انتروال  $I$  کې کره غښتلي مونوتون

جگړدونکی ده.

که د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x) < 0$  وي، نو  $f(x)$  تابع په انتروال  $I$  کې غښتلي مونوتون

جگړدونکی ده.

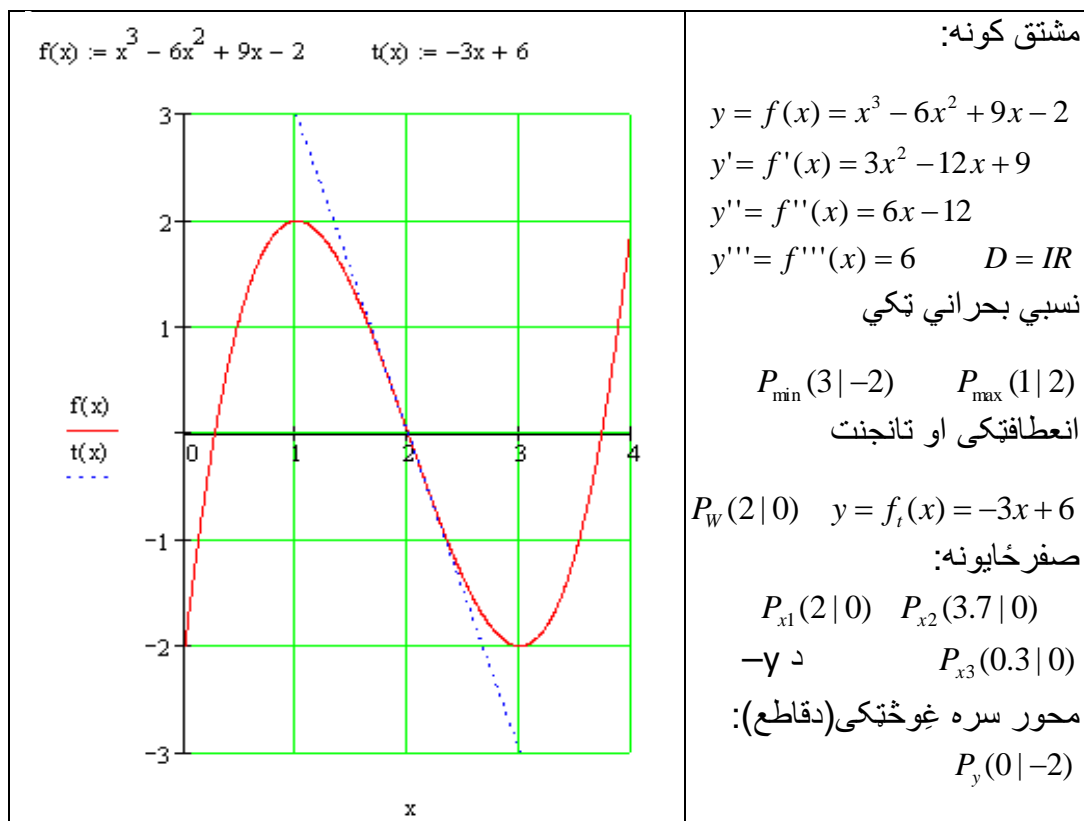
د پېژند ورشو ژی ټکي:

د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشو کې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیت

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  او  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ټاکو.

بیلگه :

د  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$  تابع رسم کړئ.



<p>د تابع حالت په <math>x \rightarrow -\infty</math> او <math>x \rightarrow \infty</math> کې</p> <p> <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left( 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = -\infty</math> </p> <p> <math>\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left( 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = \infty</math> </p> <p>سیومتري: نه لري</p>	<p>یو غریزوالی (مونوتوني یا جگ - تیتوالی) په</p> <p> <math>I_1 = \{x \mid -\infty &lt; x \leq 1\}_{\mathbb{R}}</math> </p> <p>کې یو غریز جگړي. په</p> <p> <math>I_3 = \{x \mid 3 \leq x &lt; \infty\}_{\mathbb{R}}</math> </p> <p>کې یو غریز جگړي.</p>
--	--

د کړوالي یا انحنای حالت:

بنی کږوالی یا انحنای (وتلی یا محدب) :  $I_4 = \{x | -\infty < x < 2\}_{\mathbb{R}}$

کین کږوالی یا انحنای (مقعریت یا ننوتوالی) :  $I_5 = \{x | 2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

بیلگه ۱ : لومړی: تعریفور شو:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \quad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: سیومتري:

ټکی سیومتريک؛  $f(-x) = -f(x)$  ځکه چې فقط ناجوره یا طاق جگعدد

دریم: افراطیت:

مشتق:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow f''(x) = -2x \Rightarrow f'''(x) = -2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ bzw. } x_2 = -2$$

$$f''(x_1) = f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''(-2) = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2 = -2$$

$$f(x_1) = f(2) = \frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{\text{Max}} \left( 2 \mid \frac{16}{3} \right)}$$

$$f(x_2) = f(-2) = -\frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{\text{Min}} \left( -2 \mid -\frac{16}{3} \right)}$$

څلورم: اورنتکی یا نقطه انعطاف:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Rightarrow x_{\text{W}} = 0$$

$$f'''(x_{\text{W}}) = f'''(0) = -2 \neq 0$$

$$f(x_{\text{W}}) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\text{W}}(0 \mid 0)}$$

پنځم: محور غوڅتکی یا نقاط تقاطع محور:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\text{y}}(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x \left( -\frac{1}{3}x^2 + 4 \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{1}{3}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{12} \text{ bzw. } x_3 = -\sqrt{12}$$

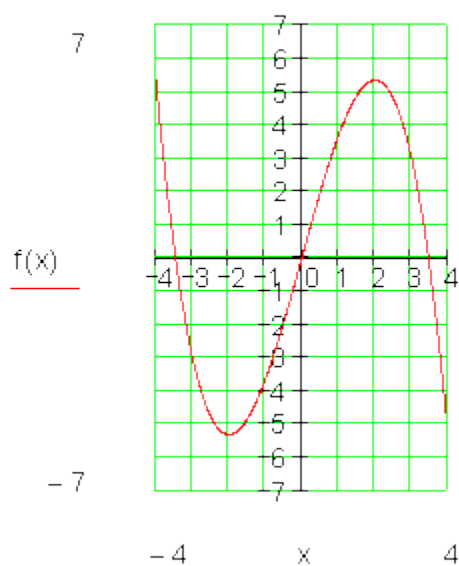
$$\boxed{P_{x1}(0|0)}; \boxed{P_{x2}(\sqrt{12}|0)}; \boxed{P_{x3}(-\sqrt{12}|0)}$$

ضفر خایونه:

شپیرم: ارزینتجدول او گراف:

$$f(-4) = 5,3; f(4) = -5,3; f(-3) = -3; f(3) = 3; f(-1) = -3,7; f(1) = 3,7$$

		$P_{x3}$		$P_{Min}$		$P_y$ $P_w$ $P_{x1}$		$P_{Max}$		$P_{x2}$	
$x$	-4	$-\sqrt{12}$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\sqrt{12}$	4
$f(x)$	5,3	0	-3	$-5,3$	-3,7	0	3,7	$5,3$	3	0	-5,3



اووم: کبروالي حالت او یو غریزوالي:

## دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رایلیدنه)

۱۸۱

د  $x_0 = -2$  لپاره (کین له  $P_w$ )  $f''(-2) > 0$  له دې لاس ته راځي کین کوروال (ننوتی یا کونوکس)  $]-\infty; 0[$

د  $x_0 = 2$  لپاره (بني له  $P_w$ )  $f''(2) < 2$  له دې لاس ته راځي بني کوروالی (کونکاو یا وتلی)  $]0; -\infty[$

یو غویزوالی:

د  $]-\infty; 0[$  لپاره کره یو غریز تیتیدونکی یا لویدونکی

د  $]0; -\infty[$  لپاره کره یو غریز جگیدونکی

د  $]2; \infty[$  لپاره کره یو غریز تیتیدونکی یا لویدونکی

اتم: د تعریفو شوی شرایط:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{3}x^3 + 4x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left( -\frac{1}{3} + \frac{4}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{3} + \frac{4}{x^2} \right)}_{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

بیلگه ۲:

لومړی:

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

دویم: سیمتری:

سیومتري نه شته.

دریم: افراطیت:

مشتق:

$$f(x) = f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} \Rightarrow f$$

$$f(x) = f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(x) =$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow x \left( \frac{3}{16}x - \frac{3}{4} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{3}{16}x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$f''(x_1) = f''(0) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2 = 4$$

$$f(x_1) = f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Max}}(0|2)}$$

$$f(x_2) = f(4) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Min}}(4|0)}$$

څلورم: اورنټکی یا نقطه انعطاف:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{\text{W}} = 2$$

$$f'''(x_{\text{W}}) = f'''(2) = \frac{3}{8} \neq 0$$

$$f(x_{\text{W}}) = f(2) = 1 \Rightarrow \boxed{P_{\text{W}}(2|1)}$$

پنجم: محور غوڅتکی:

$$f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{P_{\text{y}}(0|2)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 = 0$$

د  $P_{\text{min}}$  شمیرنه په دې معنا وگوری لوری صفرځای  $x_1=4$ . هورنر



$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{16} \quad -\frac{3}{8} \quad 0 \quad 2 \\
 x = 4 \quad \frac{4}{16} \quad -\frac{1}{2} \quad -2 \\
 \hline
 \frac{1}{16} \quad -\frac{1}{8} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \Rightarrow \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{2} = 0
 \end{array}$$

$$\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_2 = 4; x_3 = -2$$

صفرخایونه:  $P_{x1/2}(4|0)$ ;  $P_{x3}(-2|0)$

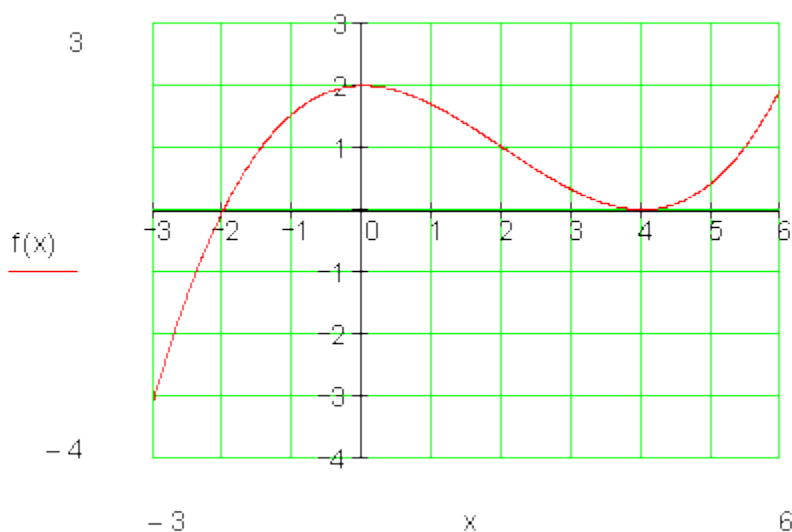
شپیرم: ارزینتجدول او گراف:

ارزینتجدوال:

$$f(-3) \approx -3,06; f(-1) \approx 1,56; f(1) \approx 1,67; f(3) \approx 0,31; f(5) \approx 0,44; f(6) = 2$$

		$P_{x3}$		$P_{Max}$		$P_{W}$		$P_{Min}$ $P_{x1/2}$		
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	-3,06	0	1,56	2	1,67	1	0,31	0	0,44	2

گراف:



اووم: گروالی (ننوتوالی یا مقعربیت) او یو غریزووالی:

اووم: گروالی حالت او یو غریزووالی:

د  $x_0 = -2$  لپاره (کین له  $P_w$ )  $f'(0) = -\frac{3}{4} < 0$  له دې لاس ته راځي بنی کوروال (ننوتی یا کونوکس)  $]-\infty; 2[$

د  $x_0 = 2$  لپاره (بنی له  $P_w$ )  $f'(4) = \frac{3}{4} > 0$  له دې لاس ته راځي کین

کوروالی (کونکاو یا وتلی)  $[2; \infty[$

یو غریزووالی:

د  $]-\infty; 0[$  لپاره کره یو غریز جگیدونکی

د  $]0; 4[$  لپاره کره یو غریز تیښیدونکی

د  $]4; \infty[$  لپاره کره یو غریز جگیدونکی

اتم: د تعریفو شو ژی شرایط؛

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left( \frac{1}{16} - \frac{3}{8x} + \frac{2}{x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{16} - \frac{3}{8x} + \frac{2}{x^3} \right)}_{\frac{1}{16}} = \frac{1}{16} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \frac{1}{16} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \end{cases}$$

بیلگه ۳:

لومړی: تعریفو شو:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x(x+3)^3 = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x \quad \square = \mathbb{R}$$

دویم: سیمتری: سیوتنری نه شته.

دریم: افراطیت: مشتق د صرب له لاری (قانون)

$$f(x) = -\frac{1}{2}x \underbrace{(x+3)^3}_v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}x; v = (x+3)^3; u' = -\frac{1}{2}; v' = 3(x+3)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)} = -\frac{1}{2}(x+3)^3 - \frac{3}{2}x(x+3)^2 = \boxed{-\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3)}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \underbrace{(x+3)^2}_u \underbrace{(4x+3)}_v \Rightarrow f''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}(x+3)^2; v = 4x+3; u' = -(x+3); v' = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x)} = -(x+3)(4x+3) - \frac{1}{2}(x+3)^2 \cdot 4 = \boxed{-3(x+3)(2x+3)}$$

$$f''(x) = \underbrace{-3(x+3)}_u \underbrace{(2x+3)}_v \Rightarrow f'''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -3(x+3); v = 2x+3; u' = -3; v' = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'''(x)} = -3(2x+3) - 3(x+3) \cdot 2 = \boxed{-(12x+27)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -3; x_3 = -\frac{3}{4}$$

$$f''(x_{1/2}) = f''(-3) = 0 \Rightarrow$$

د افراطیت په هکله وینا نه شته

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{4}\right) = -3\left(-\frac{3}{4}+3\right)\left(2\left(-\frac{3}{4}\right)+3\right) = -\frac{81}{8} = -10,125 < 0$$

لاس ته راځي: د  $x_3 = -\frac{3}{4}$  لپاره نسبي افراطیت

د  $x_{1/2} = -3$  د  $f'(x)$  ډبل صفرځای دی، دا په دې معنا چې د  $f(x)$  مخنځینې بدلون د

$x = -3$  په ځاکی نه شته. دا په دې معنا چې  $x_{1/2} = -3$  دافراطي ځای نه دي.

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{3}{4} + 3\right)^3 = \frac{2187}{512} \approx 4,27$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\text{Max}}\left(-\frac{3}{4} \mid \frac{2187}{512}\right)} \text{ bzw. } P_{\text{Max}}(-0,75 \mid 4,27)$$

څلورم: اوړونټکی یا نقاط انعطاف: د لاندې الماني پښتو: اوړونټکی.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x+3)(2x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$f'''(x_1) = f'''(-3) = -(12 \cdot (-3) + 27) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w1} = -3$$

$$f'''(x_2) = f'''(-\frac{3}{2}) = -(12 \cdot (-\frac{3}{2}) + 27) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w2} = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_{w1}) = f(-3) = -\frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot (-3+3)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{w1}(-3 \mid 0)}$$

$$f(x_{w2}) = f(-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{3}{2} + 3\right)^3 = \frac{81}{32} \approx 2,53$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{w2}\left(-\frac{3}{2} \mid \frac{81}{32}\right)} \text{ bzw. } P_{w2}(-1,5 \mid 2,53)$$

پنځم: محور غوڅتکی:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x(x+3)^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_{2/3/4} = -3$$

$$\boxed{P_{x1}(0 \mid 0)}; \boxed{P_{x2/3/4}(-3 \mid 0)}$$

صفر ځایونه:

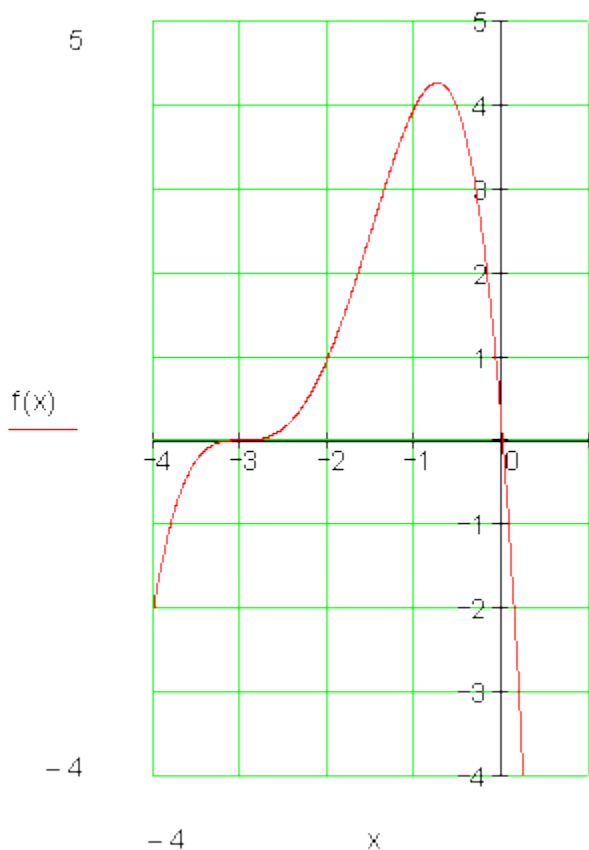
شپږم: ارزښتجدول او گراف:

ارزښتجدول:

$$f(-4) = -2; f(-2) = 1; f(-1) = 4; f(0,5) \approx -10,72$$

		$P_{w1}$ $P_{x2/3/4}$		$P_{w2}$		$P_{Max}$	$P_{x1}$	
x	-4	-3	-2	-1,5	-1	-0,75	0	0,5
f(x)	-2	0	1	2,53	4	4,27	0	-10,72

گراف:



اووم: د انحنأ حالت او یوغریزوالی:

اووم: کړوالی حالت او یوغریزوالی:

د  $x_0 = -2$  لپاره (کین له  $P_w$ )  $f''(-2) > 0$  له دې لاس ته راځي کین کوروال (ننوتی یا کونوکس)  $]-\infty; 0[$

د  $x_0=2$  لپاره (بني له  $P_w$ )  $f''(2) < 2$  له دې لاس ته راځي بني کوروالی (کونکاو یا وتلی)  $]0; -\infty[$  یو غویزوالی:

د  $]0; -\infty[$  لپاره کره یو غریز تیتیدونکی یا لویدونکی

د  $]0; -\infty[$  لپاره کره یو غریز جگیدونکی

د  $]2; \infty[$  لپاره کره یو غریز تیتیدونکی یا لویدونکی

کوروالی:

د  $x_0 = -4$  لپاره (کین له  $P_{w1}$ )  $f''(-4) = -5 < 0$

لاس ته راځي بني کوروالی (کونوکس)  $] -\infty; -3[$

د  $x_0 = -2$  لپاره (بني له  $P_{w1}$ )  $f''(-2) = 1 > 0$

لاس ته راځي کین کوروالی (کونوکس)  $] -3; -1,5[$

د  $x_0 = -1$  لپاره (بني له  $P_{w2}$ )  $f''(-1) = -2 < 0$

لاس ته راځي بني کوروالی (کونکاو)  $] -1,5; -\infty[$

یو غریزوالی:

$] -\infty; -3[$	د مخامخ انتروال لپاره کره یو غریز جگیدونکی
$] -3; -\frac{3}{4}[$	د مخامخ انتروال لپاره کره یو غریز جگیدونکی
$] -\frac{3}{4}; \infty[$	د مخامخ انتروال لپاره کره یو غریز تیتیدونکی

اتم: د تعریفو شو ژی تکی:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left( -\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3} \right)}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty}$$

بیلگه ۴:

لومړی: تعریفوړشو:

$$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \quad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: محور سیومتری:  $f(-x) = f(x)$  ځکه چې فقط جوړه (جغت) اکسیوننتونه

دریم: افراطیت:

مشتقونه یا رابیلیدنی:

$$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 9x \Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 9 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(-4x^2 + 9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-4x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm \frac{3}{2}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 9 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_2 = \frac{3}{2}$$

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_1) = f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5,06 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Min}}\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_{\text{Min}}(0 \mid -5,06)}$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Max1}}\left(\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{\text{Max1}}(1,5 \mid 0)}$$

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Max2}}\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{\text{Max2}}(-1,5 \mid 0)}$$

څلورم: اورنټکی یاد انعطاف ټکی:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$f'''(x_1) = f''\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -24 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \neq 0 \Rightarrow$$

په  $x_{w1} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,87$  کی اورونتیکی (انعطاف-)

لاس ته راځي: په  $x_{w2} = -\sqrt{\frac{3}{4}} \approx -0,87$  کی اورونتیکی (انعطاف-)

$$f'''(x_2) = f''' \left( -\sqrt{\frac{3}{4}} \right) = -24 \cdot \left( -\sqrt{\frac{3}{4}} \right) \neq 0$$

$$f(x_{w1}) = f \left( \sqrt{\frac{3}{4}} \right) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow P_{w1} \left( \sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4} \right) \text{ bzw. } P_{w1} (0,87 \mid -2,25)$$

$$f(x_{w2}) = f \left( -\sqrt{\frac{3}{4}} \right) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow P_{w2} \left( -\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4} \right) \text{ bzw. } P_{w1} (-0,87 \mid -2,25)$$

پنځم: محور غوڅتکی:

$$f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5,06 \Rightarrow P_y \left( 0 \mid -\frac{81}{16} \right) \text{ bzw. } P_y (0 \mid -5,06)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} = 0$$

تراوسه معلوم صفرځایونه  
پولینومویش:

$$x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = -\frac{3}{2} \quad (\text{افراطي ټکي وکوری})$$

$$\left( -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \right) : \underbrace{\left( x - \frac{3}{2} \right) \left( x + \frac{3}{2} \right)}_{x^2 - \frac{9}{4}}$$

$$\left( -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \right) : \left( x^2 - \frac{9}{4} \right) = -x^2 + \frac{9}{4}$$

$$\frac{-\left( -x^4 + \frac{9}{2}x^2 \right)}{x^2 - \frac{9}{4}} \quad -x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}}{x^2 - \frac{9}{4}} \Rightarrow x_{3/4} = \pm \frac{3}{2}$$

$$-\left( \frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16} \right)$$

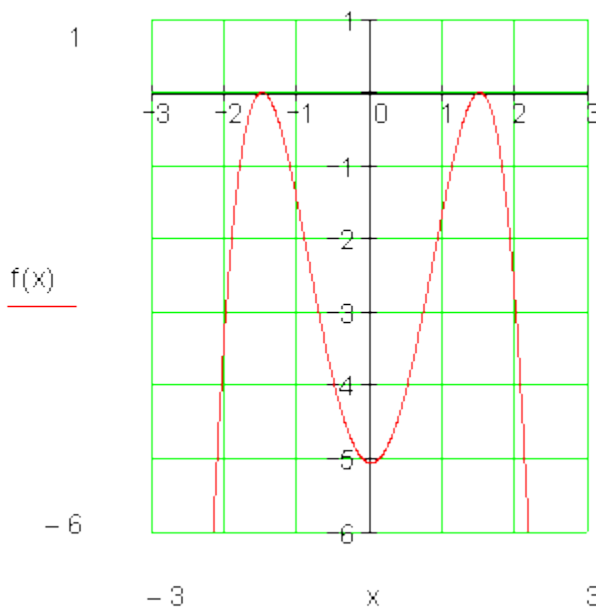


$$\left[ P_{x1/2} \left( \frac{3}{2} \mid 0 \right) \right]; \left[ P_{x3/4} \left( -\frac{3}{2} \mid 0 \right) \right]$$

صفرخایونه:  
شپږم: ارزښت جدول او گراف:  
ارزښتجدول:

$$f(-2) \approx -3,06 = f(2); f(-1) \approx -1,56 = f(1)$$

		$P_{Max2}$ $P_{x3/4}$		$P_{W2}$	$P_{Min}$ $P_y$	$P_{W1}$		$P_{Max1}$ $P_{x1/2}$	
x	-2	-1,5	-1	-0,87	0	0,87	1	1,5	2
f(x)	-3,06	0	-1,56	-2,25	-5,06	-2,25	-1,56	0	-3,06



اووم: کږوالی یا انحنأ:

اووم: کږوالي حالت او یو غږیزوالی:

د  $x=0$  لپاره (کږن له  $P_w$ )  $f''(-2) > 0$  له دې لاس ته راځي کږوال (کونوکس)  $0; -\infty$  ]

د  $x=2$  لپاره (بڼي له  $P_w$ )  $f''(2) < 2$  له دې لاس ته راځي بڼي کږوالی (کونکاو یا وتلی)  $0; -\infty$  ]

یو غږیزوالی:

د  $0; -\infty$  ] لپاره کږه یو غږیز تیښدونکی یا لویدونکی

د  $[-\infty; 0]$  لپاره کره یو غریز جگیدونکی  
 د  $[2; \infty]$  لپاره کره یو غریز ټیټیدونکی یا لویدونکی  
 کړوالی:

د  $x_0 = -1$  لپاره (د  $P_{W1}$  او  $P_{W2}$  ترمنځ)  $f'(-1) = -3 < 0$

$$\left] -\infty; -\sqrt{\frac{3}{4}} \right]$$

له دې لای ته راځي بني کړوالی (وتلی یا محدب؟)

د  $x_0 = 0$  لپاره (د  $P_{W1}$  او  $P_{W2}$  ترمنځ)  $f'(0) = 9 > 0$

$$\left] -\sqrt{\frac{3}{4}}; \sqrt{\frac{3}{4}} \right]$$

له دې لای ته راځي بني کړوالی کین کړوالی: (ننوتی؟)

د  $x_0 = 1$  لپاره (له  $P_{W1}$  څخه بني)  $f'(1) = -3 < 0$

$$\left] \sqrt{\frac{3}{4}}; \infty \right]$$

له دې لای ته راځي بني کړوالی (وتلی یا محدب؟)

$\begin{aligned} &] -\infty; -1,5 [ \\ &] -1,5; 0 [ \\ &] 0; 1,5 [ \\ &] 1,5; \infty [ \end{aligned}$	یو غریزوالی: د مخامخ لپاره کره یو غریز جگیدونکی د مخامخ لپاره کره یو غریز ټیټیدونکی د مخامخ لپاره کره یو غریز جگیدونکی د مخامخ لپاره کره یو غریز ټیټیدونکی
---	--

اتم: د تعریفو شو ژی ټکي:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left( -1 + \frac{9}{2x^2} - \frac{81}{16x^4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\left( -1 + \frac{9}{2x^2} - \frac{81}{16x^4} \right)}_{-1} = -1 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= -1 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty}$$

بیلگه:

۱ - تعریف - یا پیژندور شو:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \quad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

۲ - سیومتری: سیومتری نه شته

۳ - افراطیت-

مشتق

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 3x^2 \Rightarrow f''(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f'''(x) = -6x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x+3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = 3$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$$

په  $x_1 = 0$  کی په افراطی خای کومه وینه یا افاده نه شتهمگر دا چي  $x_{1/2} = 0$  د  $f'(x)$  دبل صفرخای دی د  $f''(x)$  لپاره په  $x_{1/2} = 0$  خایکی د مخنځنې بدلون نه شته له دی لاس ته راخی، چي په  $x_1 = 0$  کی افراطی خایونه نه شته

$$f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = 3$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{27}{4} = 6,75 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Max}} \left( 3 \mid \frac{27}{4} \right) \text{ bzw. } P_{\text{Max}} (3 \mid 6,75)}$$

۴ - اورونتیکی یا انعطافتکی: (لاندي المانی: په ... کی اورونتیکی)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x+6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

$$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = 0$$

$$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = 2$$

$$f(x_{W1}) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{W1} (0 \mid 0)}$$

$$f(x_{W2}) = f(2) = 4 \Rightarrow \boxed{P_{W2} (2 \mid 4)}$$

۵ - محور غوختکی:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y (0 \mid 0)}$$

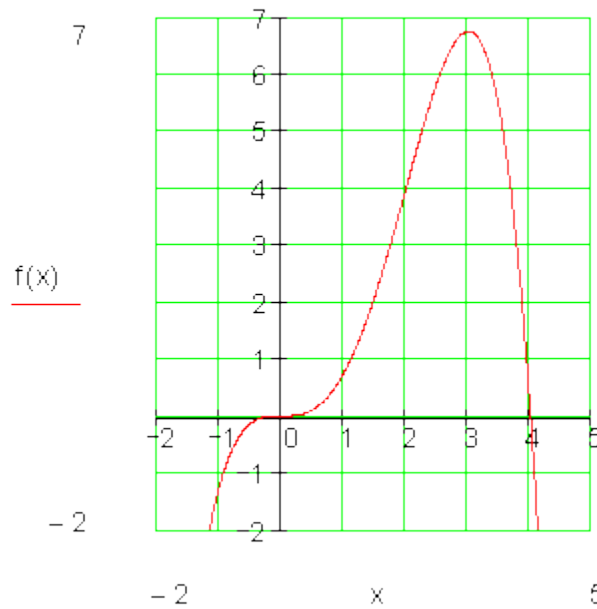
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 \left( -\frac{1}{4}x + 1 \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0; x_4 = 4$$

$$\boxed{P_{x_{1/2/3}} (0 \mid 0)}; \boxed{P_{x_4} (4 \mid 0)}: \text{ صفرخایونه}$$

ارزینتجدول او گراف: ارزینتجدول

$$f(-1) = -1,25; f(1) = 0,75; f(4,2) = -3,7$$

		$P_{W1}$		$P_{W2}$	$P_{Max}$	$P_{x4}$	
		$P_{x1/2/3}$					
		$P_y$					
x	-1	0	1	2	3	4	4,2
f(x)	-1,25	0	0,75	4	6,75	0	-3,7



کروالی حالت او یوغریزوالی:

کروالی:

د  $x_0 = -1$  لپاره (د  $P_{W1}$  کین لور ته)  $f'(-1) = -9 < 0$  له دې لاس ته راځي: بنیکروالی (وتلی)  $]-\infty; -0[$ د  $x_0 = 1$  لپاره (د  $P_{W1}$  او  $P_{W2}$  ترمنځ)  $f'(1) = 3 > 0$  لاس ته راځي: کین کروالی (ننوتی)  $]0; 2[$ د  $x_0 = 3$  لپاره (بنی له  $P_{W2}$ )  $f'(3) = -9 < 0$  لاس ته راځي: بنی کروالی (وتلی)یوغریزوالی:  $]2; \infty[$

$] -\infty; 0 [$	د مخامخ لپاره کره یو غریز جگیدونکی
$] 0; 3 [$	د مخامخ لپاره کره یو غریز جگیدونکی
$] 3; \infty [$	د مخامخ لپاره کره یو غریز ټیټیدونکی

اتم: د تعریفو شو ژی ټکي:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{x} \right)}_{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= -\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty}$$

## افراطي ارزبنتونه

تمرینونه د کور کار I:

د دریمي درجي ټول یا تام راشنل توابعو افراطي ټکي

د لاندې ټول راشنل (هونبیار) توابعو افراطي ارزبنتونه مطالعه کړی او په ممکنه حالت کې یې انحرافي ټکي پیدا کړی.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \quad \text{دویم -} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x \quad \text{اول -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{څلورم -} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad \text{دریم -}$$

$$f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{22}{5}x^2 + 14x - 10 \quad \text{شپږم -} \quad f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \quad \text{پنځم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4 \quad \text{اتم -} \quad f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x \quad \text{اوم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 3 \quad \text{لسم -} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \quad \text{نهم -}$$

حلونه

تمرینونه: مشتقشمیرنه I

نتیجی او مفصل حلونه

نتیجی

$$P_{\text{Min}}(2| -4) \quad P_{\text{Max}}(-2| 4) \quad \text{اول -}$$

$$P_{\text{Min}}(0| 0) \quad P_{\text{Max}}\left(\frac{8}{3} \approx 2,67 \mid \frac{128}{27} \approx 4,74\right) \quad \text{دویم -}$$

$$P_{\text{Min}}(4| 0) \quad P_{\text{Max}}\left(\frac{4}{3} \approx 1,33 \mid \frac{128}{27} \approx 4,74\right) \quad \text{دریم -}$$

$$P_{\text{Min}}(-1| 0) \quad P_{\text{Max}}\left(\frac{5}{3} \approx 1,67 \mid \frac{128}{27} \approx 4,74\right) \quad \text{څلورم -}$$

$$P_{\text{Min}}(4| -6) \quad P_{\text{Max}}(-2| 6) \quad \text{پنځم -}$$

$$P_{\text{Min}}(5| 0) \quad P_{\text{Max}}\left(\frac{7}{3} \approx 2,33 \mid \frac{512}{135} \approx 3,79\right) \quad \text{شپږم -}$$

اوم - انحرافي ټکي نه شته اتم -  $P_{\text{Min}}(4|-4)$   $P_{\text{Max}}(0|4)$  -  
 نهم - انحرافي ټکي شتون نه لري.

لسم -  $P_{\text{Min}}(-1+\sqrt{3} \approx 0,732 |-3,797)$   $P_{\text{Max}}(-1-\sqrt{3} | 3,131)$

پام: د انحرافي ټکو کي ریښه وه، نو د جبشمېري سره دې شمېرنه وشي، ځکه چې پرته له دې به شمېرنه ډېر وخت ونیسي.

مفصل حلونه

اول - مفصل حل

شمیرنه:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x$$

- د افقي یا پروت محور سره تانجنټونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - 3 = 0 \mid \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \mid +4$$

مربع مساوات

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \mid \sqrt{\quad} \Leftrightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

\_ آزمایښت چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2) = -3 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -2$$

- د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

$$f(x_1) = f(2) = \frac{1}{4}2^3 - 3 \cdot 2 = \frac{8}{4} - 6 = 2 - 6 = -4$$

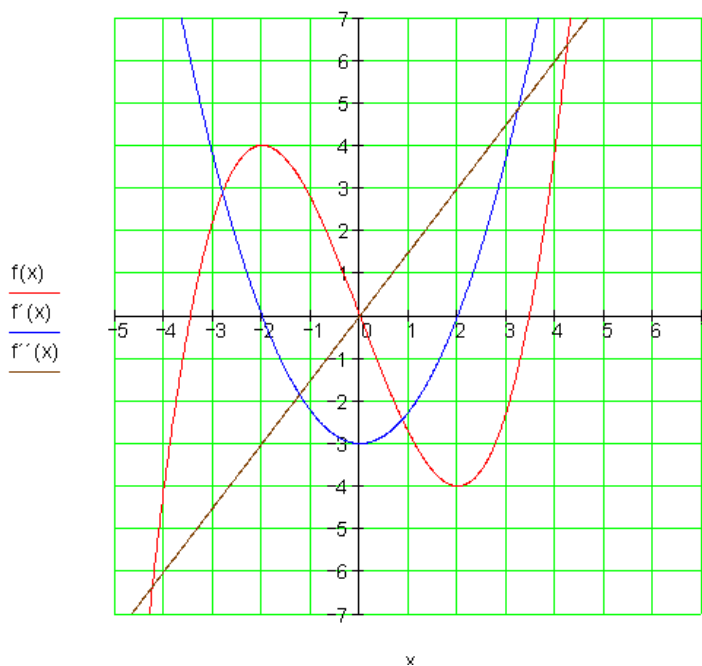
$$f(x_2) = f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -\frac{8}{4} + 6 = -2 + 6 = 4$$

- انحرافی تکی:

$$\underline{\underline{P_{\text{Min}}(2|-4) \quad P_{\text{Max}}(-2|4)}}$$

گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x$$



دویم - مفصل حل.



شمیرنه:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \quad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \quad f''(x) = -3x + 4$$

2 - د پروت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + 4x}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \Leftrightarrow x \left( -\frac{3}{2}x + 4 \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{3}{2}x + 4 = 0 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 4 = 0 \mid + 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 4 \mid \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{8}{3}$$

3 - ازماينت، چي ايا يو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = -3 \cdot 0 + 4 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{8}{3}\right) = -3 \cdot \frac{8}{3} + 4 = -8 + 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{8}{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

$$f(x_1) = f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 = 0$$

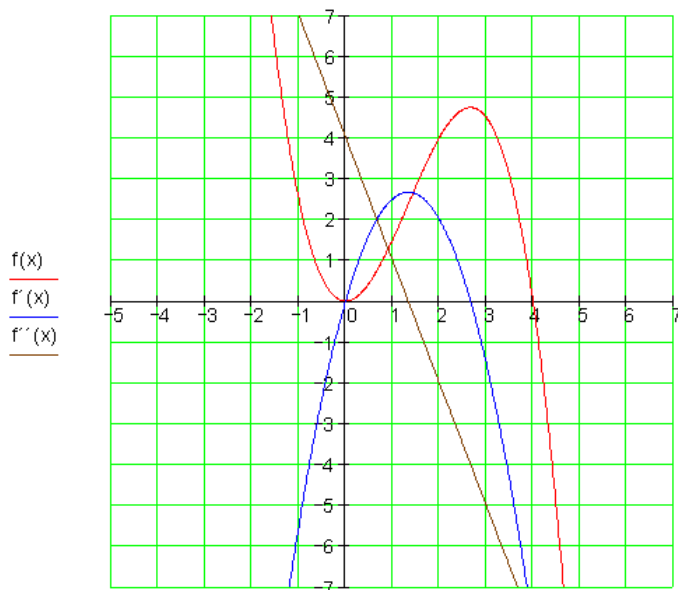
$$f(x_2) = f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{512}{27} + 2 \cdot \frac{64}{9} = -\frac{256}{27} + \frac{384}{27} = \frac{128}{27}$$

5 - انحرافي ټکي

$$\underline{\underline{P_{\text{Min}}(0|0)}} \quad \underline{\underline{P_{\text{Max}}\left(\frac{8}{3} \approx 2,67 \mid \frac{128}{27} \approx 4,74\right)}}$$

گرافونه:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \quad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \quad f''(x) = -3x + 4$$



دریم - مفصل حل: شمیرنه:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \quad f''(x) = 3x - 8$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{2}x^2 - 8x + 8}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \quad | \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 0$$

$$p = -\frac{16}{3} \quad q = \frac{16}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{64}{9} - \frac{16}{3} = \frac{64}{9} - \frac{48}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4 \\ x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

-- ۲۰۱

دفرخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلدنه)

3 - آزمینت، چي ایا یو انحرافي تکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(4) = 3 \cdot 4 - 8 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 4$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} - 8 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{4}{3}$$

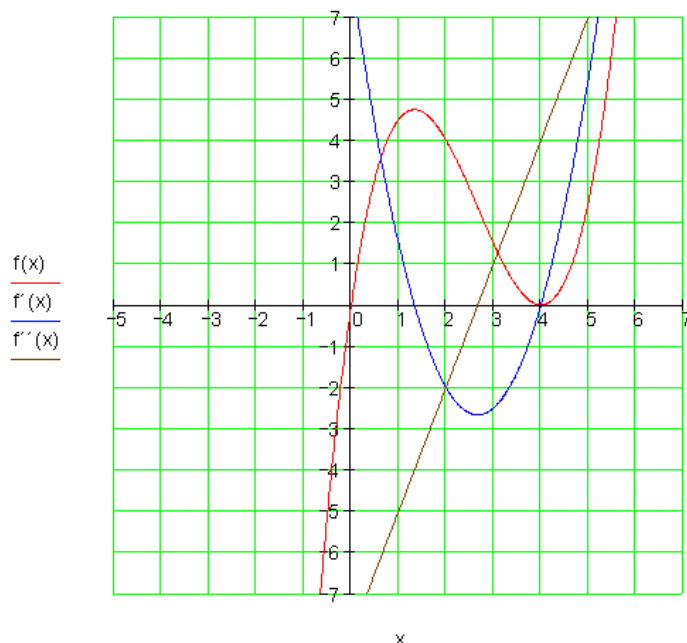
4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 64 - 64 + 32 = 32 - 64 + 32 = 0$$

$$\begin{aligned} f(x_2) = f\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{27} - 4 \cdot \frac{16}{9} + \frac{32}{3} \\ &= \frac{32}{27} - \frac{192}{27} + \frac{288}{27} = \frac{128}{27} \end{aligned}$$

5 - انحرافي تکی:  $\underline{\underline{P_{\text{Min}}(4|0) \quad P_{\text{Max}}\left(\frac{4}{3} \approx 1,33 \mid \frac{128}{27} \approx 4,74\right)}}$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \quad f''(x) = 3x - 8$$



گرافونه

مفصل حل -

شمیرنه: **څلورم:**

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \quad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} \quad f''(x) = -3x + 1$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \mid \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$$

$$p = -\frac{2}{3} \quad q = -\frac{5}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{5}{3} = \frac{1}{9} + \frac{15}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1 \end{array} \right.$$

3 - ازمايننت، چي ايا يو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''\left(\frac{5}{3}\right) = -3 \cdot \frac{5}{3} + 1 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = \frac{5}{3}$$

$$f''(x_2) = f''(-1) = -3 \cdot (-1) + 1 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = -1$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{125}{27} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{9} + \frac{25}{6} + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{125}{54} + \frac{75}{54} + \frac{225}{54} + \frac{81}{54} = \frac{256}{54} = \frac{128}{27} \end{aligned}$$

### ۲۰۳ دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

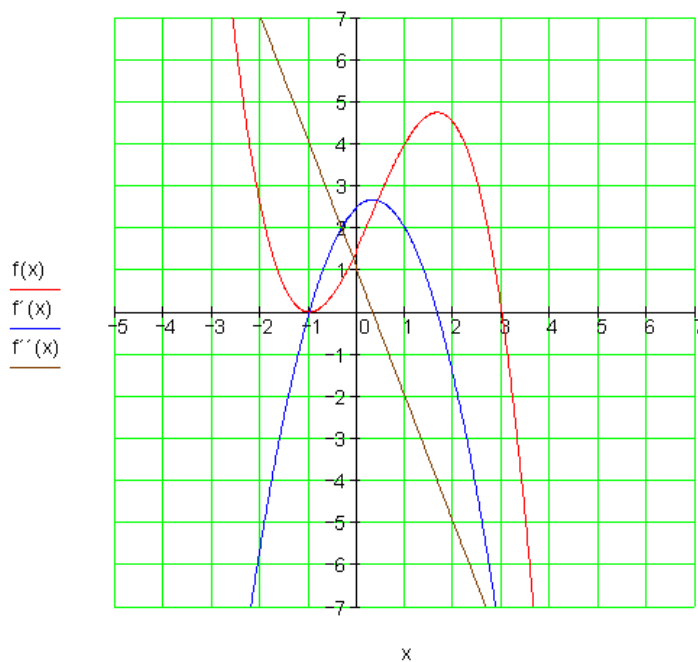
$$f(x_2) = f(-1) = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + \frac{5}{2} \cdot (-1) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

5 - انحرافی تکی

$$\underline{\underline{P_{\text{Min}}(-1|0)}} \quad \underline{\underline{P_{\text{Max}}\left(\frac{5}{3} \approx 1,67 \mid \frac{128}{27} \approx 4,74\right)}}$$

گرافونه

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \quad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} \quad f''(x) = -3x + 1$$



پنجم:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \quad f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

2 - د پروت یا افقی تانجنت خایونه:

## دفرخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \mid \cdot 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$p = -2 \quad q = -8 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 8 = 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 1 + 3 = 4 \\ x_2 = 1 - 3 = -2 \end{array} \right.$$

3 - از مایننت، چي ایا یو انحرافي تکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(4) = \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 4$$

$$f''(x_2) = f''(-2) = \frac{2}{3} \cdot (-2) - \frac{2}{3} = -\frac{6}{3} = -2 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -2$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(4) &= \frac{1}{9} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot 4^2 - \frac{8}{3} \cdot 4 + \frac{26}{9} = \frac{1}{9} \cdot 64 - \frac{1}{3} \cdot 16 - \frac{32}{3} + \frac{26}{9} \\ &= \frac{64}{9} - \frac{48}{9} - \frac{96}{9} + \frac{26}{9} = -\frac{54}{9} = -6 \end{aligned}$$

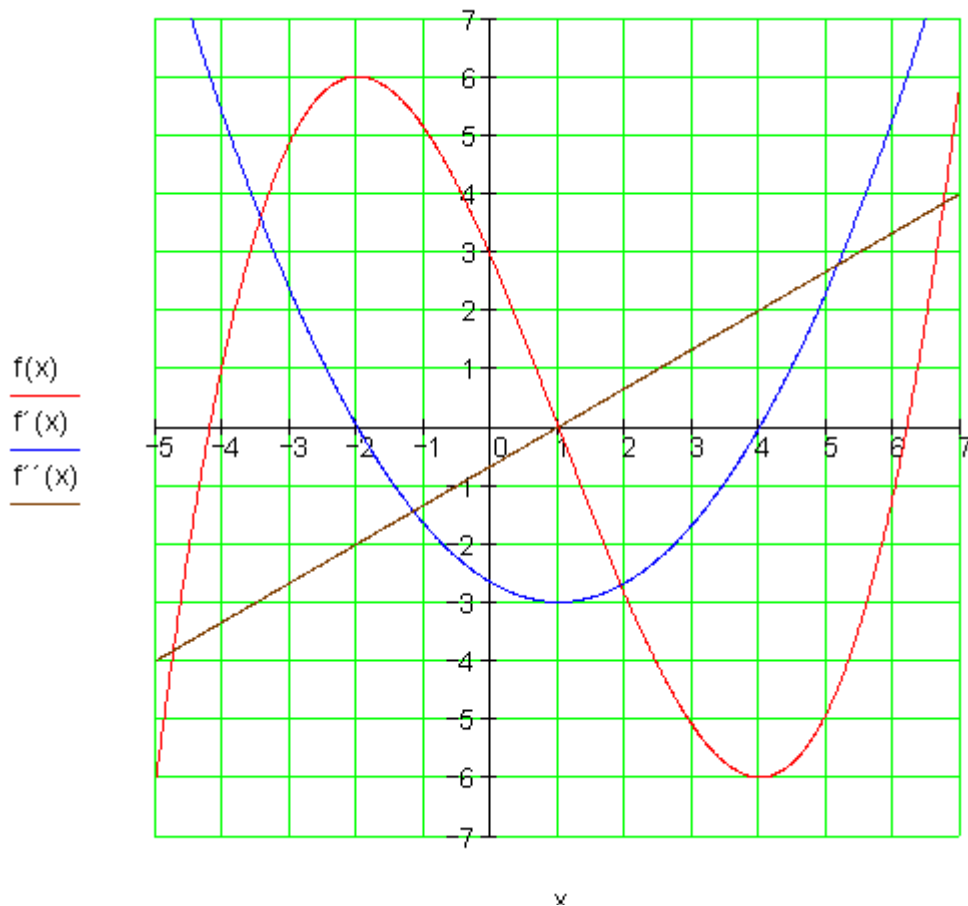
$$\begin{aligned} f(x_2) = f(-2) &= \frac{1}{9} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^2 - \frac{8}{3} \cdot (-2) + \frac{26}{9} = \frac{1}{9} \cdot (-8) - \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{16}{3} + \frac{26}{9} \\ &= -\frac{8}{9} - \frac{12}{9} + \frac{48}{9} + \frac{26}{9} = \frac{54}{9} = 6 \end{aligned}$$

5 - افراطي تکی

$$\underline{\underline{P_{\text{Min}}(4|-6)}} \quad \underline{\underline{P_{\text{Max}}(-2|6)}}$$

گرافونه

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \quad f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$



شپیرم:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{22}{5}x^2 + 14x - 10 \quad f'(x) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{44}{5}x + 14 \quad f''(x) = \frac{12}{5}x - \frac{44}{5}$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت خایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{6}{5}x^2 - \frac{44}{5}x + 14 = 0} \cdot \frac{5}{6} \Leftrightarrow x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{35}{3} = 0$$

quadratische Gleichung

$$p = -\frac{22}{3} \quad q = \frac{35}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{121}{9} - \frac{35}{3} = \frac{121}{9} - \frac{105}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{11}{3} + \frac{4}{3} = \frac{15}{3} = 5 \\ x_2 = \frac{11}{3} - \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \end{array} \right.$$

3 - از مایننت، چي ایا بو انحرافي تکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(5) = \frac{12}{5} \cdot 5 - \frac{44}{5} = \frac{16}{5} > 0 \Rightarrow$$

د  $x_1 = 5$  په خای کی نسبی مینیموم

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{3} - \frac{44}{5} = \frac{28}{5} - \frac{44}{5} = -\frac{16}{5} < 0 \Rightarrow$$

د  $x_2 = \frac{7}{3}$  په خای کی نسبی مینیموم

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(5) = \frac{2}{5} \cdot 5^3 - \frac{22}{5} \cdot 5^2 + 14 \cdot 5 - 10 = 50 - 110 + 70 - 10 = 0$$

$$\begin{aligned} f(x_2) = f\left(\frac{7}{3}\right) &= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^3 - \frac{22}{5} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 14 \cdot \frac{7}{3} - 10 = \frac{2}{5} \cdot \frac{343}{27} - \frac{22}{5} \cdot \frac{49}{9} + \frac{98}{3} - 10 \\ &= \frac{686}{135} - \frac{3234}{135} + \frac{4410}{135} - \frac{1350}{135} = \frac{512}{135} \end{aligned}$$

5 - انحرافي تکی

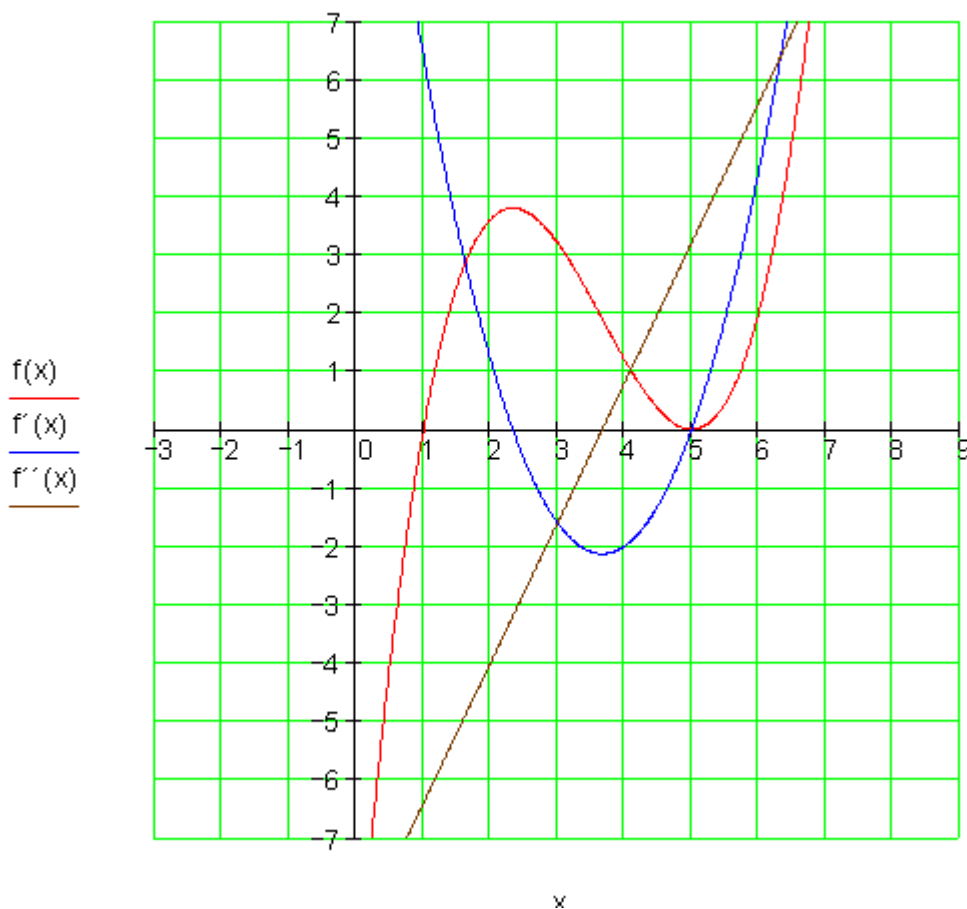


۲۰۷ دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا راییلیدنه)

$$\underline{P_{\text{Min}}(5|0)} \quad \underline{P_{\text{Max}}\left(\frac{7}{3} \approx 2,33 \mid \frac{512}{135} \approx 3,79\right)}$$

گرافونه:

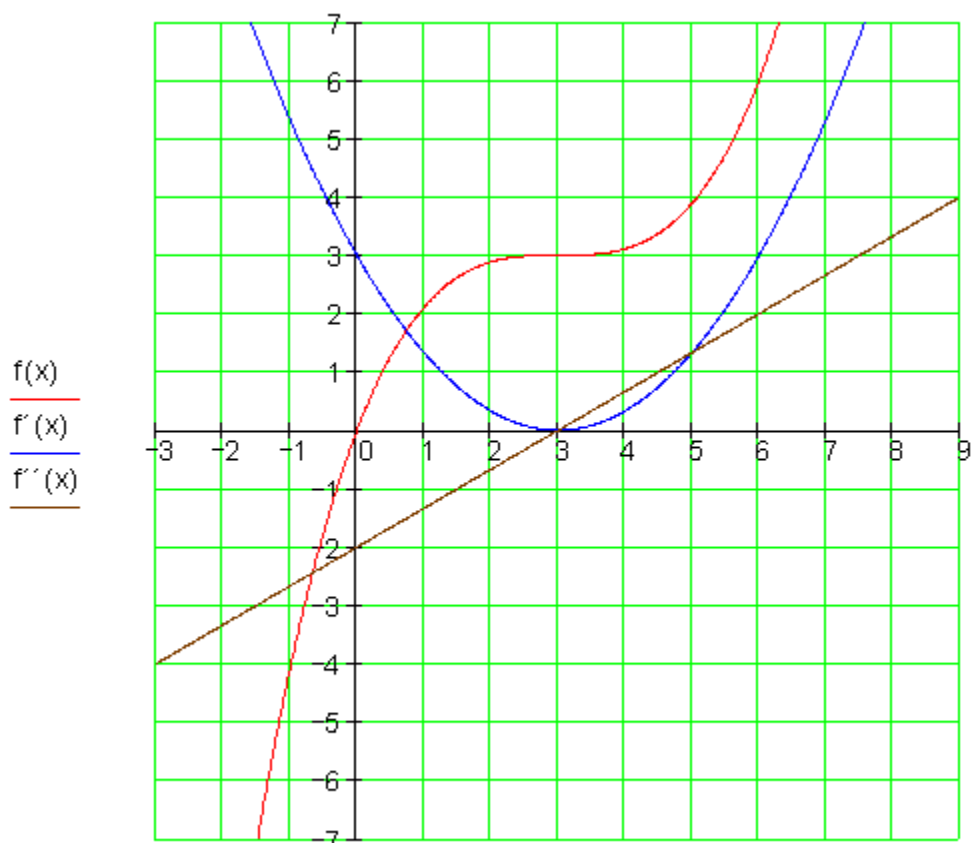
$$f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{22}{5}x^2 + 14x - 10 \quad f'(x) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{44}{5}x + 14 \quad f''(x) = \frac{12}{5}x - \frac{44}{5}$$



اووم: شمیرنه:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \quad f''(x) = \frac{2}{3}x - 2$$



2 - د پروت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0} \cdot 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

quadratische Gleichung

$$p = -6 \quad q = 9 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 \end{array} \right.$$

د لومړي مشتق ډبل صفر ځایونه په دې معنا دي، چې په دې ځایونو کې انحرافي ارزښتونه نه شته. ازمايښت به هم دا وښايي.

۲۰۹      ۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

---

3 - از مایننت، چي ایا یو انحرافي تکی مخ ته لرو:

$$f''(x_{1/2}) = f''(3) = \frac{2}{3} \cdot 3 - 2 = 0 \Rightarrow$$

له دي لاس ته راخي، چي افراطي تكي نه شته

گرافونه: گراف د تیر مخ په سر کي راورل شویاو فرمول یي دا لاندې دی.

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \quad f''(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

اتم: شمیرنه:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 3x}_{\dots} = 0 \Leftrightarrow x \left( \frac{3}{4}x - 3 \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

مربع مساوات

$$\frac{3}{4}x - 3 = 0 \mid +3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 3 \mid \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow x_2 = 4$$

3 - از مایننت، چي ایا یو انحرافي اړوښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = \frac{3}{2} \cdot 0 - 3 = -3 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = \frac{3}{2} \cdot 4 - 3 = 3 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 4$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

## ۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

$$f(x_1) = f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^3 - \frac{3}{2} \cdot 0^2 + 4 = 4$$

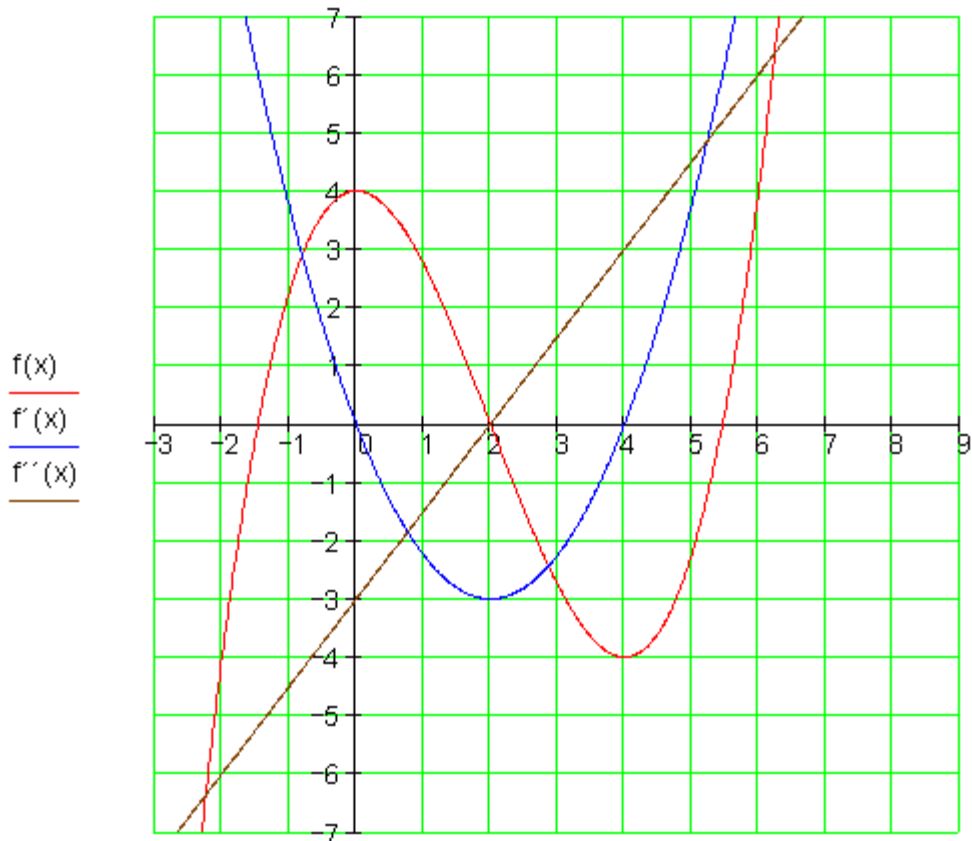
$$f(x_2) = f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 + 4 = 16 - 24 + 4 = -4$$

5 - انحرافی ټکی

$$\underline{P_{\text{Min}}(4|-4)} \quad \underline{P_{\text{Max}}(0|4)}$$

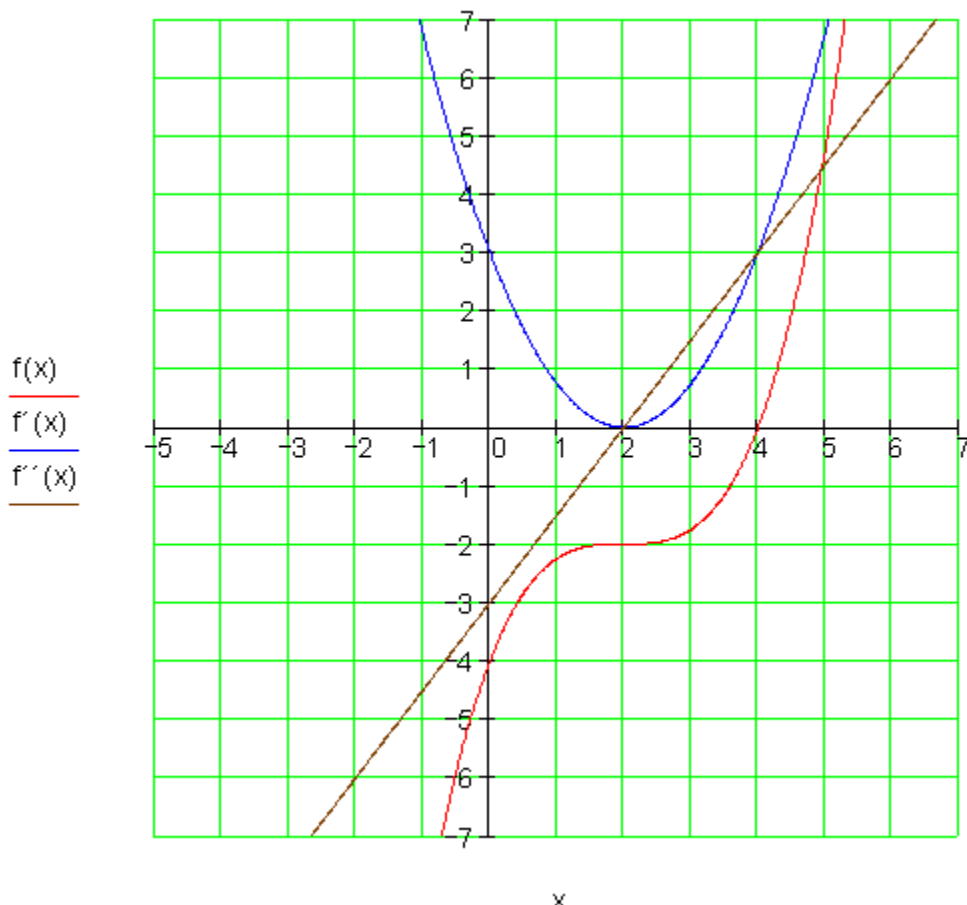
$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

گرافونه:



نهم: شمیرنه: 1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$



2 - د پورت یا افقی تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 3x + 3}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$p = -4 \quad q = 4 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{array} \right.$$

د لومړي مشتق ډبل صفر ځايونه په دې معنا دي، چې په دې ځايونو کې انحرافي ارزښتونه نه شته. ازمايښت به هم دا وښايي.

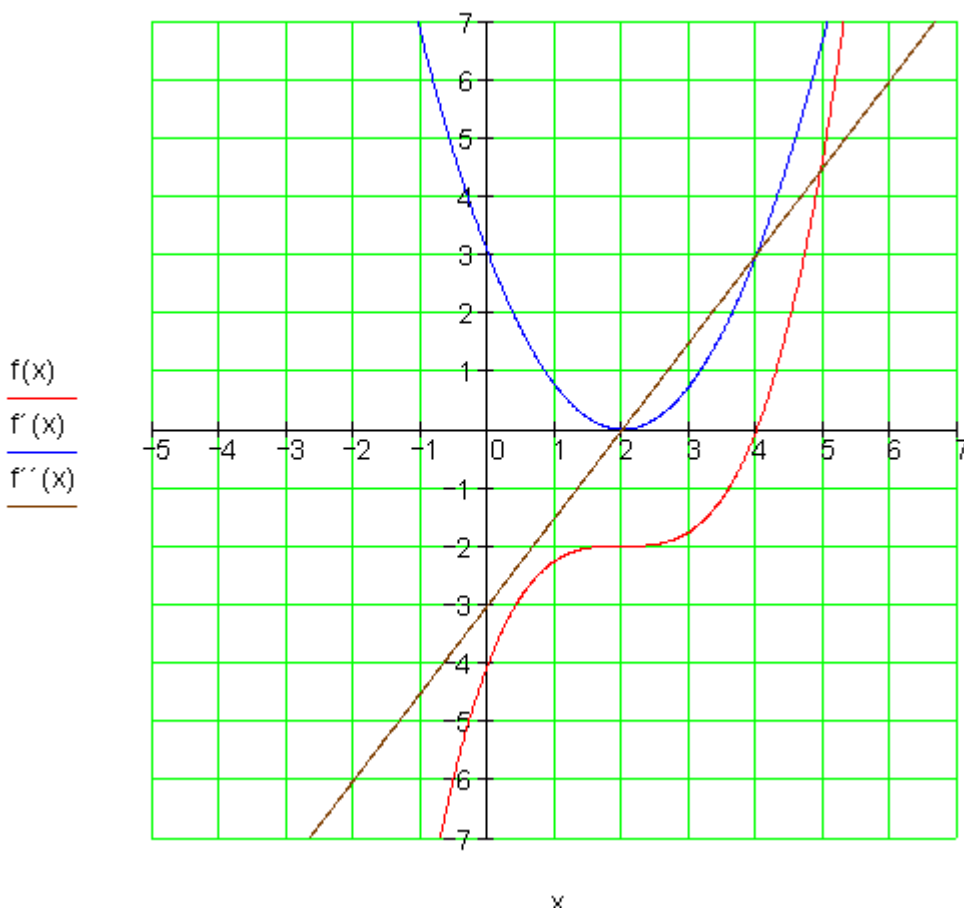
3 - ازمايښت، چې ايا انحرافي ارزښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_{1/2}) = f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 3 = 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي، چې انحرافي ارزښتونه په  $x_{1/2} = 2$  کې نه شته.

گرافونه: گراف په یر مخ کې او فمول يې بيا هم دل لاندې:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$



لسم: شمیرنه:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 3 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \quad f''(x) = 2x + 2$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 2x - 2}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0$$

$$p = 2 \quad q = -2 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 2 = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = -1 + \sqrt{3} \\ x_2 = -1 - \sqrt{3} \end{array} \right.$$

3 - ازماينت، چي ايا يو انحرافي تکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(-1 + \sqrt{3}) = 2 \cdot (-1 + \sqrt{3}) + 2 = -2 + 2\sqrt{3} + 2 = 2\sqrt{3} > 0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = -1 + \sqrt{3}$$

$$f''(x_2) = f''(-1 - \sqrt{3}) = 2 \cdot (-1 - \sqrt{3}) + 2 = -2 - 2\sqrt{3} + 2 = -2\sqrt{3} < 0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -1 - \sqrt{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(-1 + \sqrt{3}) = \frac{1}{3}(-1 + \sqrt{3})^3 + (-1 + \sqrt{3})^2 - 2(-1 + \sqrt{3}) - 3 \approx -3,797$$

$$f(x_2) = f(-1 - \sqrt{3}) = \frac{1}{3}(-1 - \sqrt{3})^3 + (-1 - \sqrt{3})^2 - 2(-1 - \sqrt{3}) - 3 \approx 3,131$$

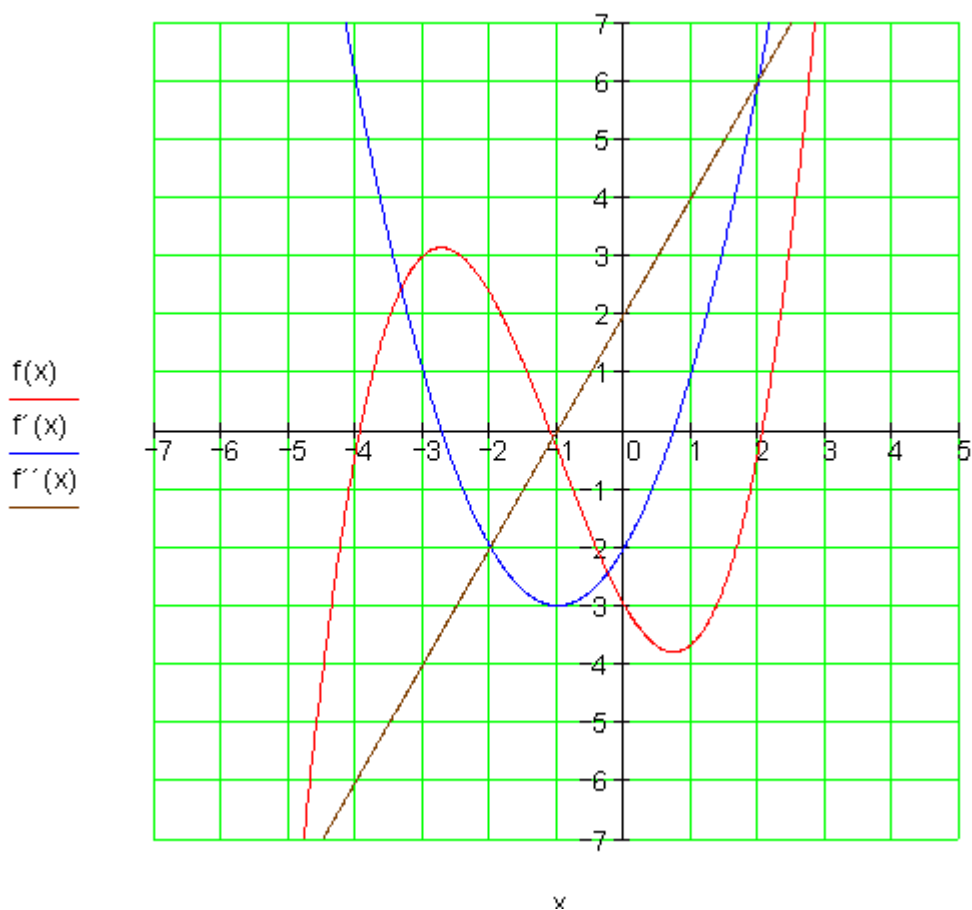
شمیرنه د جېشمیري سره سر ته رسیري

5 - انحرافی تکی

$$\underline{P_{\text{Min}}(-1 + \sqrt{3} \approx 0,732 \mid -3,797)} \quad \underline{P_{\text{Max}}(-1 - \sqrt{3} \mid 3,131)}$$

گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 3 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \quad f''(x) = 2x + 2$$



پوښتنې



## مشتقشمیرنه IX

لومړی:

د منحنی ټکي د پراته تانجنټ سره وشمېری. ایا دا د منحنی ټکي انحرافي ارزښتونه دي؟ ستا پریکړه په دلایلو روښانه کړه.

$$\text{الف - } f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \quad \text{ب - } f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$$

$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$	<p>دویم: د تابع <math>f(x)</math> د گراف انحرافي ټکي زشمېری. په یوه مناسب وضعیه قیمت سیستم کې یې گراف وباسی.</p>
$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + ax^2 + 4$ <p>د <math>x \in \mathbb{R}</math> سره</p>	<p>دریم: <math>a</math> داسې وټاکي، چې تابع <math>f(x)</math> په <math>x = 2</math> کې یو انحرافي ځای ولري. دا کوم ډول انحرافي ځای دی؟</p>
$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$	<p>څلورم: یو تابع <math>f(x)</math> ورکړشوی دی. <math>a</math> داسې وټاکي، چې د <math>f(x)</math> د گراف افراطي ټکي د <math>x</math>-محور باندې پروت وي. ایا دا افراطي ټکي جگ - یا ټیټ ټکي دی؟</p>

پنځم:

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$	<p>تابع <math>f(x)</math> دې انحرافي ارزښت ونه لري. د دې حالت لپاره دې ضریبونه کوم شرایط پوره کړي او <math>f(x)</math> څو صفر ځایونه لري؟ ستاسو ځواب په دلایلو روښانه کړی؟</p>
------------------------------	--

شپږم:

تابع  $f_a(x) = ax(x+3)^2$  ورکړشوي د  $x \in \mathbb{R}$  او  $a > 0$  سره.

د خورا جگ او خورا ټيټيکي ټرنکرېنه د وضعيه قيمت سيسم محور سره مثلث جوړوي. د مثلث سطحه د  $a$  په تابعيت سره پيدا کړی. د دې د مخه يو شکل وباسی.

اووم: لاندې په انحرافي ارزښتزنو مطالعه کړی:

الف-

x	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)	1,6666	1,8333	1,75	1,6666	1,8333
f'(x)	0,75	0	-0,25	0	0,75

ب-

x	-3	-2	-1	0	1
f(x)	-0,149	-0,135	0,3678	3	13,591
f'(x)	-0,049	0,1353	1,1036	5	19,027

اتم: اتم - د دلاندې توابعو انحراف او انعطاف ټکو ارزښتونه وشمېری.

سربېره پردې د پوښتنو 1, 4, 5, 6 او 7 د محور غوڅتکي (د تضاطع ټکي) وشمېری او گرافونه يې وکاری.

$$\text{الف - } f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \quad \text{ب - } f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$$

$$\text{پ - } f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2 \quad \text{ت - } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$$

$$\text{ټ - } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 \quad \text{ث - } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$$

$$f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x \quad \text{ج -}$$

حلونه

مشتقشمیرنه IX

مفصل حلونه:

اول - مفصل حلونه:

الف - مشتق:

$$\text{الف - } f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \quad \text{مشتق} \quad f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$$

پروت یا افقي تانجنت

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

مشتق  $f'(x)$  د  $x_{1/2}$  په ځای کې ساده صفرځایونه لري او مخنځینه بدلوي. پس  $f(x)$  دوه انحرافي ټکي لري.

$$\text{ب - } f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \quad \text{مشتق} \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

پروت یا افقي تانجنت:

مشتق  $f'(x)$  د  $x_{1/2}$  په ځای کې ساده صفرځایونه لري او مخنځینه بدلوي. پس  $f(x)$  دوه انحرافي ټکي لري

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} \quad \text{مشتق} \quad f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$$

پروت (افقي) تانجنت:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

مشتق  $f'(x)$  د  $x_{1/2}$  سره ساده صفرخایونه لري او مخنځبڼه بدلوي. پس  $f(x)$  دوه انحرافي ارزښتونه لري.

ب -

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \quad \text{مشتق:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

پروت (افقي) تانجنت

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

مشتق  $f'(x)$  د  $x_{1/2}$  سره ساده صفرخایونه لري او مخنځبڼه بدلوي. پس  $f(x)$  دوه افراطي ارزښتونه لري.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2 \quad \text{مشتق:} \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad \text{پ -}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 \Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = 3$$

پروت (افقي) تانجنت:  $x_{1/2} = 0; x_3 = 3$  په ځای کې یو ډبل صفرخای لري، دا په دې معنا چې د مشتق  $f'(x)$  د  $x_{1/2} = 0$  په ځای کې یو ډبل صفرخای لري، دا په دې معنا چې د مخنځبڼې بدلېدنه شتون نه لري. پس  $f(x)$  په دې ځای کې انحرافي ټکی نه لري.  $x_3 = 3$

د  $f'(x)$  ساده صفرخای دی، هلته د مخنځینې بدلېدنه منځ ته راځي. نو  $f(x)$  په دې ځای کې افراطي ټکی لري.

دویم - مفصل حلونه:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$$

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

د لوکال افراطي ټکو لپاره اړین شرتونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0 \mid \cdot \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow p = -8; q = 12; D = 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = 6}; \boxed{x_2 = 2}$$

$$f''(x_1) = f''(6) = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{rel Min} \quad f''(x_2) = f''(2) = -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{rel Max}$$

$$\text{rel Min: } f(x_1) = f(6) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\min}(6|0)}$$

$$\text{rel Max: } f(x_2) = f(2) = 4 \Rightarrow \boxed{P_{\max}(2|4)}$$

یادونه: په پورته کې  $\text{rel}$  د  $\text{relative}$  لنډونه ده او د نسبي په معنا دی.

د گراف د رسمولو لپاره نور ټکی هم اړین دي

$$\boxed{P_y(0|0)} \text{ د } y \text{ محور سره د تقاطع ټکی}$$

صفرخایونه:

$$: f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x = 0$$

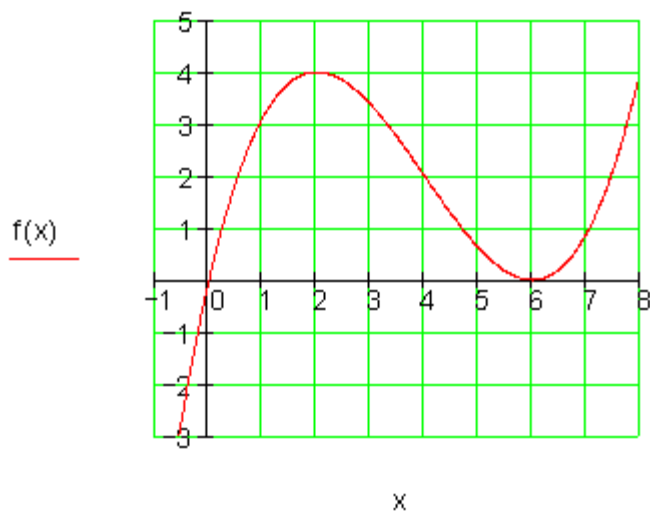
$$\Leftrightarrow x \left( \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow x_{2/3} = 0$$

دبل صفرخای

ارزینت جدول:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	-6,125	0	3,125	4	3,375	2	0,615	0	0,875



دریم:

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + ax^2 + 4; \quad f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2a$$

پیل : په  $x = 2$  کی افراطی تکی په دی معنا دی چی:

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \quad \text{سر همداسی} \quad f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 4x \quad \text{او له}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \text{انحرافی ټکی:}$$

همداسی  $x_2 = 2$

$f''(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	$\Rightarrow f''(x_1) = f''(0) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$	په $x_1 = 0$ کې نسبي
	$\Rightarrow f''(x_1) = f''(2) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$	مین په $x_2 = 2$ کې نسبي ماکس

څلورم:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$$

د انحراف ټکی دې د  $x$  محور باندې پروت وي

$$f(x_E) = 0 \quad \text{دا په دې معنا چې:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

د پراته یا افقي تانجنت ځایونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \left( \frac{1}{2}x - 3 \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \text{ und } x_3 = 6$$

د افراطي ځای شتون په هکله ازمايښت

لاس ته راځي، چې په  $x_{1/2} = 0$  کې افراطي ځای نه شته  $f''(x_{1/2}) = f''(0) = 0$

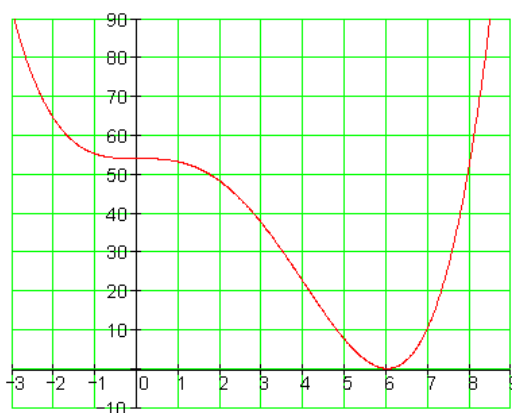
$$f''(x_3) = f''(6) = \frac{2}{3} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 = 18 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_3 = 6$$

د  $a$  متحولي ټاکنه

$$f(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \cdot 6^4 - 6^3 + a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 54}$$

د  $x_E = 6 \in \mathbb{R}$  په ځای کې يو نسبي مينيموم لري  $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 54$

دا د  $x$  محور باندې پراته دي:  $P_{\text{Min}}(6 | 0)$



څلورم:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$$



افراطي ټکي باید د  $x$  په محور پراته وي، دا په دې معنا چې:  $f(x_E) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

د پراته محور سره د تانچنت ځایونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \left( \frac{1}{2}x - 3 \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \text{ und } x_3 = 6$$

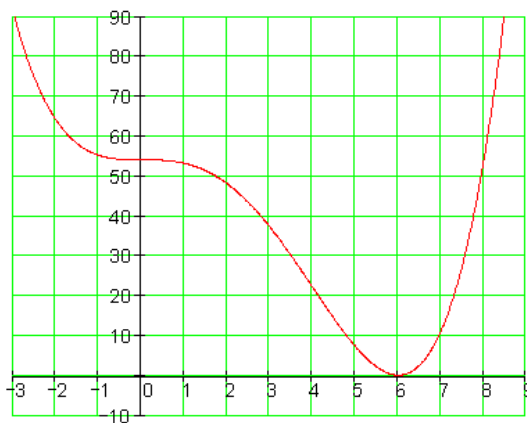
د یوه اکسریموم شتون آزماینه:  $f''(x_{1/2}) = f''(0) = 0$ :  
له دې لاس ته راځي، چې په  $x_{1/2} = 0$  کې افراطي ځایونه نه شته

$$f(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \cdot 6^4 - 6^3 + a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 54}$$

د متحولې  $a$  ټاکنه:

د  $x_E = 6$  ځای کې یو نسبي مینیموم لري.  $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 54$

دا په  $x$  محور پروت دی:  $P_{\text{Min}}(6 | 0)$



پنځم:

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

که د آنحرآف ټکي شتون ونه لري، باید  $f'(x) \neq 0$  باور ولري:

یا  $f'(x) = 0$  د ډبل صفرخای سره ( لومړي مشتق بي له مخنځبني تغیر څخه )

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}bx + \frac{1}{3}c = 0$$

quadratische Gleichung

$$p = \frac{2}{3}b; q = \frac{1}{3}c \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c$$

$D < 0$  : مربع مساوات حل نه لري، که  $\frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c < 0$  وي.

دا په دې معنا، چې  $f(x)$  په دې حالت کې پروت یا أفقي تانجنت نه لري. د  $f(x)$  تابع گراف له دریمي څلورمي یا ربعي څخه و لومړی څلورمي ته ځلي.

تابع په کلکه همغریز جگډونکي د

$D = 0$  : مربع مساوات ډبل صفرخای لري، که  $(1/9)b^2 - (1/3)c = 0$  وي.

دا په دې معنا  $f(x)$  چې یو پروت تانجنت لري. مگر دا چې د  $f'(x)$  لپاره په دې ځاي کې د مخنځبني تغیر نه شته ( ډبل صفرخای)، نو  $f(x)$  افراطي ځایونه نه لري.

دا چې د مخه پوهیږ چې  $f(x)$  افراطي ټکي نه لري، نو  $f(x)$  ټیک یو صفرخاي لري.

پنځم:

که د آنحرآف ټکي شتون ونه لري، باید  $|f'(x)| = 0$  باور ولري:

یا د ډبل صفرخای سره ( لومړي مشتق بي له مخنځبني تغیر څخه )

: مربع مساوات حل نه لري، که وي.

دآ په دې معنا، چې په دې حالت کې پروت یا آفقي تانجنت نه لري. د تابع گراف له دریمې څلورمې یا ربعي څخه و لومړۍ څلورمې ته ځغلي.

تابع په کلکه همغریز چگیدونکي ده

: مربع مساوات دبل صفرځای لري، گه وي.

دا په دې معنا چې یو پروت تانجنت لري. مگر دا چې د لپاره په دې ځای کې د مخنځېني تغیر نه شته (دبل صفرځای) انحرافي ځایونه نه لري.

دا چې د مخه پوهیږ چې انحرافي ټکی نه شته، ټیک یو صفرځای لري. شپږم:

$$f(x) = ax(x+3)^2 = ax^3 + 6ax^2 + 9ax$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 12ax + 9a \quad f''(x) = 6ax + 12a$$

افراطي ټکي:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 12ax + 9a = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ bzw. } x_2 = -3$$

$$f''(x_1) = f''(-1) = 6a \cdot (-1) + 12a = a(-6 + 12) > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_1 = -1$$

$$f''(x_2) = f''(-3) = 6a \cdot (-3) + 12a = (-18 + 12) < 0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } x_2 = -3$$

$$P_{\text{Max}} : f(-3) = a \cdot (-3)(-3+3)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Max}}(-3 | 0)}$$

$$P_{\text{Min}} : f(-1) = a \cdot (-1)(-1+3)^2 = -4a \Rightarrow \boxed{P_{\text{Min}}(-1 | -4a)}$$

کرښیز مساوات د  $P_{\text{Max}}(-3 | 0)$  او  $P_{\text{Min}}(-1 | -4a)$  سره.

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4a - 0}{-1 - (-3)} = \frac{-4a}{2} = -2a \Rightarrow g(x) = -2ax + a_0$$

د  $P_{\text{Max}}(-3 | 0)$  سره ټکي ازمايننت

$$g(-3) = 0 \Leftrightarrow -2a \cdot (-3) + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -6a \Rightarrow \boxed{g(x) = -2ax - 6a}$$

د محور سره غوڅتکي  $g(x)$  او  $P_x(-3|0)$  و  $P_y(0|-6a)$  دي.

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 6a}{2} = \boxed{9a}$$

د درېگودي يا مثلث سطحه:

(د مطلقه ارزښتونو سره کيدی شي وشميرل شي):

د  $a=1$  لپاره گرافيکي انځورونه.

کرښه د  $x$  محور د  $P_x(-3|0)$

په ټکي کې غوڅوي او د  $y$

محور د  $P_y(0|-6)$  په ټکي

کې.

د سطحې شميرنه د مطلقه

ارزښتونو سره کيږي، ځکه چې

سطحه تل مثبت ده.

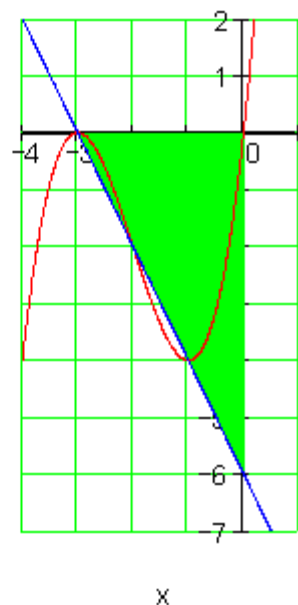
$$A = g \cdot h / 2$$

د  $g=3$  او  $h=6$  لرو

$$A = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ FE}$$

په پورته کې FE د سطحې يوون

يا واحد په معنا دی.



اووم: الف -

x	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)	1,6666	1,8333	1,75	1,6666	1,8333
f'(x)	0,75	0	-0,25	0	0,75

دوه انحرافي ټکي شتون لري:

په  $x = 1$  کې د مخنځبني بدلون لرو د  $f'(x)$  لپاره د  $\boxed{+} \rightarrow \boxed{-} \Rightarrow \text{rel. Max.}$  د دي لاس ته راځي نسبي ماکسیموم

په  $x = 2$  کې د  $f'(x)$  لپاره د مخنځبني بدلون مخ ته لرو له  $\boxed{-} \rightarrow \boxed{+} \Rightarrow \text{rel. Min.}$  ز له دي لاس ته راځي نسبي مینیموم

ب -

x	-3	-2	-1	0	1
f(x)	-0,149	-0,135	0,3678	3	13,591
f'(x)	-0,049	0,1353	1,1036	5	19,027

په انټروال  $[-3; -2]$  کې یو نسبي مینیموم پروت دی

$f'(x)$  یو د مخنځبني تغیر لري له منفي و مثبت ته یعنی  $\boxed{-} \rightarrow \boxed{+}$  اتم:

الف - انحرافي ټکي

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$$

تابع:

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$$

لومړی مشتق:

$$f''(x) = \frac{3}{4}x$$

دویم مشتق ::

$$f'''(x) = \frac{3}{4}$$

دریم مشتق:۔

د پراته تانجنت سره ځایونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

ازماینت چې ایا یو انحرافي ځای مخ ته لرو.

$$f''(x_1) = f''(\sqrt{2}) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} \approx 1,016 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = \sqrt{2}$$

$$f''(x_2) = f''(-\sqrt{2}) = -\frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} \approx -1,016 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -\sqrt{2}$$

د افراطي ارزښتون شمیرنه:

$$f(x_1) = f(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx -0,707; f(x_2) = f(-\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0,707$$

فراطي ټکي:

$$P_{\text{Min}} \left( \sqrt{2} \approx 1,414 \mid -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx -0,707 \right) \quad P_{\text{Max}} \left( -\sqrt{2} \approx -1,414 \mid \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0,707 \right)$$

د انعطاف ټکي یا اوړونټکي

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \quad f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} \quad f''(x) = \frac{3}{4}x \quad f'''(x) = \frac{3}{4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 0$$

د انعطافټکي لپاره اړین شرطونه:

د انعطاف ټکي ازماینت

$$f'''(x_w) = \frac{3}{4} \neq 0 \Rightarrow$$

یا له دې لاس ته راځ: په  $x = x_w = 0$  کې د انعطاف ځای

د انعطاف ټکي وضعیه قیمتونه ( کواوردیناتونه یا پروت ولاړ محورونه)

$$y_w = f(x_w) = f(0) = 0 \Rightarrow P_w(0|0)$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$$

د تابع محور غوڅټکي ( د محور تقاطع نقاط)

د  $y$  محور سره غوڅټکي:  $P_y(0|0)$   
صفر ځایونه:

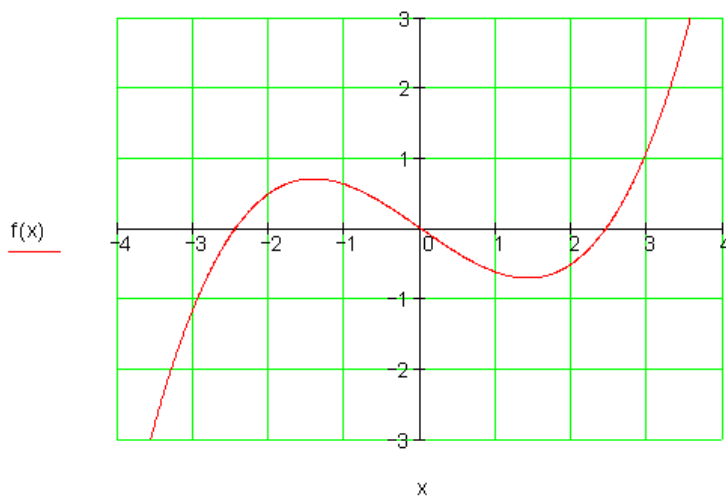
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left( \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \mid + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 = \frac{3}{4} \mid \cdot 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{6} \quad x_3 = \sqrt{6}$$



د  $x$  محور سره غوڅټکي:

۳ - دفرنځيال شميرنه (مشتق يا رابيليدنه)

۲۳۰

$$\underline{\underline{P_{x_1}(0|0)}} \quad \underline{\underline{P_{x_2}(-\sqrt{6} \approx -2,449|0)}} \quad \underline{\underline{P_{x_2}(\sqrt{6} \approx 2,449|0)}}$$

ب -  
انحراف ټکي

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$$

تابع :

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

لومړی مشتق:

$$f''(x) = x - 1$$

دویم مشتق:

د پروت افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

ازمایینت، چي ایا انحراف ارزښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(2) = 1 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 2$$

د انحرافي ټکو شمیرنه

$$f(x_1) = f(0) = 4 \quad f(x_2) = f(2) = \frac{10}{3}$$

انحرافي ټکي

$$\underline{\underline{P_{\text{Max}}(0|4)}} \quad \underline{\underline{P_{\text{Min}}\left(2 \mid \frac{10}{3} \approx 3,333\right)}}$$



د انعطاف - یا اورونتیکی

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \quad f''(x) = x - 1 \quad f'''(x) = 1$$

د اورونتیکی یا انعطافتیکی لپاره اړین شرایط:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x_w = 1$$

د انعطافتیکی از مایینت

$$f'''(x_w) = f'''(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

یا له دې لاس ته راځي: په  $x = x_w = 1$  د انعطاف ټکي

د انعطاف- یا اورون ټکي وضعیه قیمتونه (پراته لار ارزښتونه) یا کوادیناتونه

$$y_w = f(x_w) = f(1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 4 = \frac{22}{6} = 3.\bar{6} \Rightarrow P_w \left( 1 \mid \frac{22}{6} = 3.\bar{6} \right)$$

د  $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$  محور غوڅتیکی:

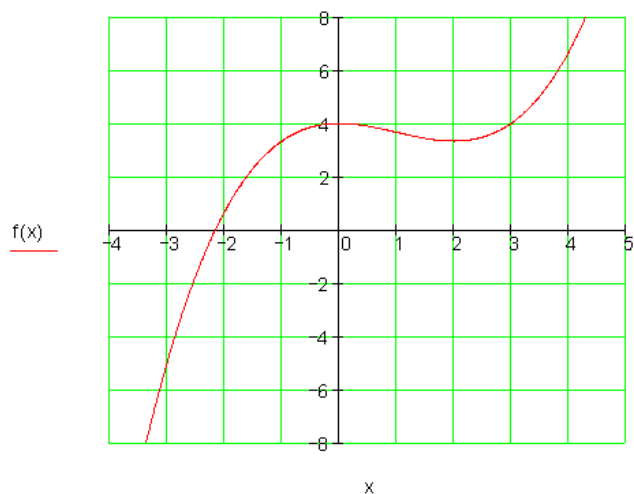
د  $y$  - محور سره غوڅتیکی:  $P_y(0 \mid 4)$

صفر ځایونه

نومریکی پیدا شوی  $x_1 \approx -2,175$

د  $x$  - محور سره غوڅتیکی.

$$\underline{\underline{P_{x_1}(x_1 \approx -2,175 \mid 0)}}$$



پ - افراطی تکی

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$$

تابع:

$$f'(x) = -x^3 + 3x^2$$

لومری مشتق:

$$f''(x) = -3x^2 + 6x$$

دویم مشتق:

د پروت محور سره خایونه.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = 3$$

ازماینت چي ایا یو افراطی ارزنت مو مخ ته پروت دی:

$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ $f''(x_2) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ $f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow$	<p>په <math>x_1=0</math> کی افراطی ارزنت نه شته</p> <p>په <math>x_2=0</math> کی نسبی مکسیموم</p> <p>په <math>x_3=3</math> د افراطی تکی شمیرنه</p>
--	---

$$f(x_1) = f(0) = -2 \quad f(x_2) = f(0) = -2 \quad f(x_3) = f(3) = \frac{19}{4}$$

افراطي ټکي :

$$\underline{\underline{P_{\text{Max}} \left( 3 \mid \frac{19}{4} = 4,75 \right)}}$$

اورونټکي يا د انعطاف ټکي

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$$

$$f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad f''(x) = -3x^2 + 6x \quad f'''(x) = -6x + 6$$

د انعطافتکو لپاره اړين شرايط

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0 \Rightarrow x_{w1} = 0$$

$$-3x + 6 = 0 \Rightarrow x_{w2} = 2$$

د انعطافتکو ازمايننت

$$f'''(x_{w1}) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow '$$

له دې لاس ته راځي چې په  $x = x_{w1} = 0$  کې د انعطاف ټکي

$$f'''(x_{w2}) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي چې په  $x = x_{w2} = 2$  کې انعطاف ټکي:

د انعطافتکو وضعيه قيمتونه

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(0) = -2$$

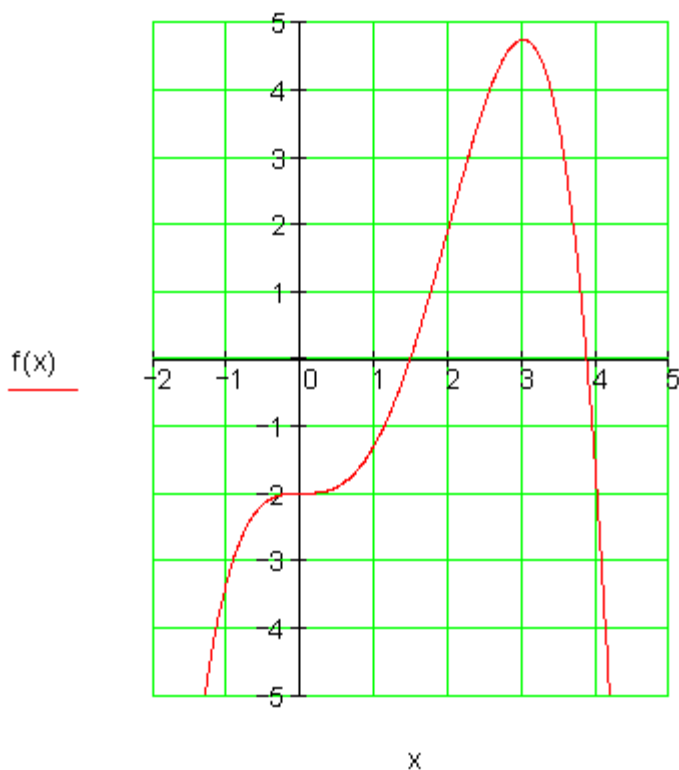
$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2^3 - 2 = -4 + 8 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0|-2)}} \quad \underline{\underline{P_{w2}(2|2)}}$$

د تابع محور غوختکی  $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$

د محور سره غوختکی:  $P_y(0|-2)$

صفرخایونه:  $x_1 \approx 1,467$      $x_2 \approx 3,861$



نومریکی پیداشوی

$$\underline{\underline{P_{x_1}(x_1 \approx 1,467 | 0)}}$$

$$\underline{\underline{P_{x_2}(x_2 \approx 3,861 | 0)}}$$

د  $x$  محور سره غوڅتکي:

ت - افراطي ټکي

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3} \quad \text{تابع:}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 8 \quad \text{لومړی مشتق:}$$

$$f''(x) = 2x - 2 \quad \text{دویم مشتق:}$$

د پروت یا افقي محور سره غوڅتکي

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 4$$

ازمایینت چې ایا یو امحرافي ټکی م مخ تخ پروت دی

$$f''(x_1) = f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = -2$$

$$f''(x_2) = f''(4) = 6 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 4$$

د افراطي ارزښتون شمېرنه

$$f(x_1) = f(-2) = 18 \quad f(x_2) = f(4) = -18$$

$$\underline{\underline{P_{\text{Max}}(-2 | 18) \quad P_{\text{Min}}(4 | -18)}} \quad \text{افراطي ټکي:}$$

ت - انعطافتکی

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 8 \quad f''(x) = 2x - 2 \quad f'''(x) = 2$$

د انعطافتکو لپاره اریین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_w = 1$$

د اورونټکو یا انعطاف ټکو په هکله ازماینت

$$f'''(x_w) = f'''(1) = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

په  $x = x_w = 1$  کې د انعطاف ځایونه

د اعطافتکي وضعیه قیمتونه:

$$y_w = f(x_w) = f(1) = \frac{1}{3} - 1 - 8 + \frac{26}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_w(1|0)}}$$

د  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$  محور غوڅتکي

د  $y$  - محور سره غوڅتکی:  $\underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{26}{3} = 8,\bar{6}\right)}}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3} = 0 \quad \text{صفر ځایونه:}$$

هورنر:

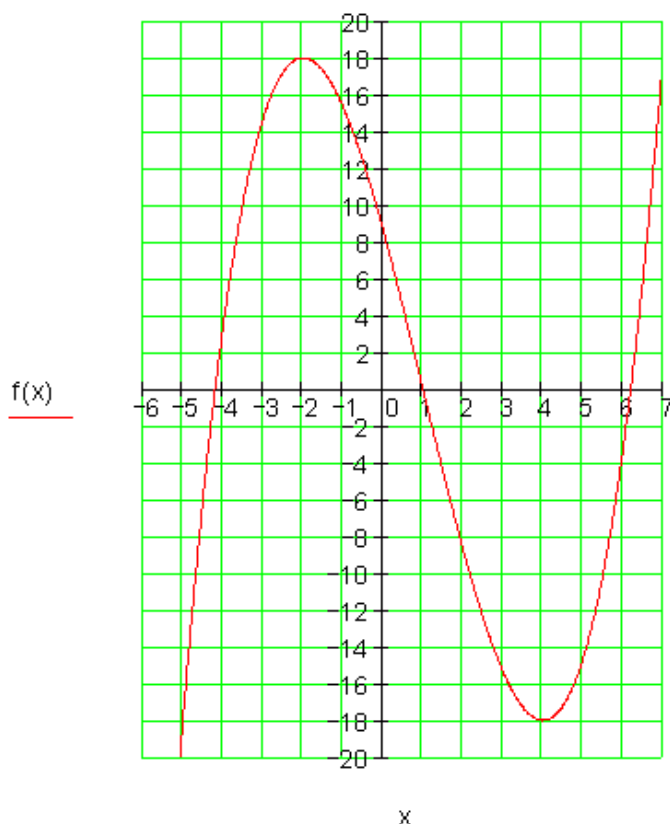
$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & -1 & -8 & \frac{26}{3} \\ x=1 \downarrow & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} & 0 \end{array} \quad f(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

پاتی یا باقی پولینوم:

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{26}{3} = 0 \quad | \cdot 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 26 = 0$$

$$p = -2 \quad q = -26 \quad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 26 = 27$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad x_2 = 1 + \sqrt{27} \approx 6,196$$
$$x_3 = 1 - \sqrt{27} \approx -4,196$$



د x - محور سره غوڅتکی

$$\underline{\underline{P_{x_1}(1|0)}}$$

$$\underline{\underline{P_{x_2}(1+\sqrt{27} \approx 6,196|0)}}$$

$$\underline{\underline{P_{x_3}(1-\sqrt{27} \approx -4,196|0)}}$$

افراطی تکی

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 \quad \text{تابع:}$$

$$f'(x) = x^3 - 2x \quad \text{لومری مشتق:}$$

$$f''(x) = 3x^2 - 2 \quad \text{دویم مشتق:}$$

خایونه د پراته محور سره:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$$

ازمایینت چي ایا یو انحرافی تکی مو مخ ته پروت دی.

$$f''(x_1) = f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(\sqrt{2}) = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = \sqrt{2}$$

$$f''(x_3) = f''(-\sqrt{2}) = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_3 = -\sqrt{2}$$

د افراطی ارزبنتونو شمېرنه:

$$f(x_1) = f(0) = 0 \quad f(x_2) = f(\sqrt{2}) = -1 \quad f(x_3) = f(-\sqrt{2}) = -1$$

انحرافی تکی:

$$\underline{\underline{P_{\text{Max}}(0|0) \quad P_{\text{Min1}}(\sqrt{2} \approx 1,414|-1) \quad P_{\text{Min2}}(-\sqrt{2} \approx -1,414|-1)}}$$

د انعطاف- یا اورونتیکی:



$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 \quad f'(x) = x^3 - 2x \quad f''(x) = 3x^2 - 2 \quad f'''(x) = 6x$$

د انعطاف ټکی لپاره اړین شرطونه:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 2 = 0 \quad | +2 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 = 2 \quad | :3 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \quad | \sqrt{\phantom{x}} \\ &\Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_{w1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad x_{w2} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

د انعطاف ټکو ازمايښت

$$f'''(x_{w1}) = f''' \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) = 6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x = x_{w1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816$$

$$f'''(x_{w2}) = f''' \left( -\sqrt{\frac{2}{3}} \right) = -6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x = x_{w2} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \approx -0,816$$

د انعطاف ټکو وضعیه قیمتونه:

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^4 - \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{1}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{5}{9} \approx -0,555$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f \left( -\sqrt{\frac{2}{3}} \right) = -\frac{5}{9} \approx -0,555 \text{ weil } f(-x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816 \mid -\frac{5}{9} \approx -0,555 \right)}} \quad \underline{\underline{P_{w2} \left( -\sqrt{\frac{2}{3}} \approx -0,816 \mid -\frac{5}{9} \approx -0,555 \right)}}$$

محور غوڅټکی یا د تقاطع ټکی  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$  د

$P_y(0|0)$  د  $y$  محور غوڅتکي:

صفرخایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - x^2 = 0$$

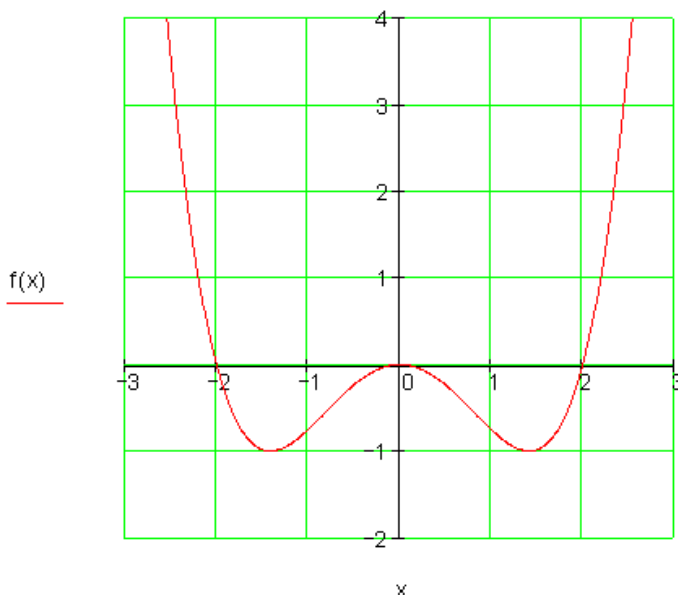
$$\Leftrightarrow x^2 \left( \frac{1}{4}x^2 - 1 \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 1 = 0 \mid +1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 2$$

د  $x$  - محور سره غوڅتکي:

$P_{x_{1/2}}(0|0)$

$P_{x_{3/4}}(\pm 2|0)$



ث -

افراطي ټکي:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3 \quad \text{تابع:}$$

$$f'(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1 \quad \text{لومری مشتق:}$$

$$f''(x) = 3x^2 - 9x + \frac{9}{2} \quad \text{دویم مشتق:}$$

خایونه د پراته یا افقی تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1 = 0$$

لومری صفرخاي له گومان سره  $x_1 = 2$  ونیسی پاتي یا باقي پولینوم:  $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$

$$x_2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}; x_3 = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}} \quad \text{نور حلونه تري لاس ته راځي:}$$

ازماینت چي ایا یو انحرافي ټکی لرو:

$$f''(x_1) = f''(2) = -1,5 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx 1,971 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}$$

$$f''(x_3) = f''\left(\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx 6,279 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_3 = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}$$

د انحرافي ټکو شمېرنه

$$f(x_1) = f(2) = 0 \quad f(x_2) = f\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx -0,136 \quad f(x_3) = f\left(\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx -3,098$$

انحرافی ټکی:

$$\underline{\underline{P_{\text{Max}}(2|0) \quad P_{\text{Min1}}\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}} \approx 2,686 \mid -0,136\right) \quad P_{\text{Min2}}\left(\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}} \approx -0,186 \mid -3,098\right)}}$$

د انعطافټکي یا اوړونټکي:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3 \quad f'(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

$$f''(x) = 3x^2 - 9x + \frac{9}{2} \quad f'''(x) = 6x - 9$$

د انعطافټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x + \frac{9}{2} = 0 \mid : 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 0$$

$$p = -3 \quad q = \frac{3}{2} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$x_{w1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad x_{w1} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 2,366$$

$$x_{w2} = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,634$$

د انعطافټکي - یا اوړونټکي ازمايښت (لاندې الما نی د اوړونټکي یا انع

$$f'''(x_{w1}) = f'''(2,366) = 6 \cdot 2,366 - 9 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x = x_{w1} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 2,366$$

$$f'''(x_{w2}) = f'''(0,634) = 6 \cdot 0,634 - 9 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x = x_{w2} = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,634$$

د انعطافټکي وضعیه قیمتونه:

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(2,366) = \frac{1}{4} \cdot 2,366^4 - \frac{3}{2} \cdot 2,366^3 + \frac{9}{4} \cdot 2,366^2 + 2,366 - 3 \approx -0,07$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f(0,634) = \frac{1}{4} \cdot 0,634^4 - \frac{3}{2} \cdot 0,634^3 + \frac{9}{4} \cdot 0,634^2 + 0,634 - 3 \approx -1,80$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1} \left( \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 2,366 \mid y_{w1} \approx -0,07 \right)}} \quad \underline{\underline{P_{w2} \left( \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,634 \mid y_{w2} \approx -1,80 \right)}}$$

د تابع محور غوڅتکي:  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$

د  $y$  - محور سره غوڅکی:  $P_y(0 \mid -3)$

صفر ځایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3 = 0$$

هورنر:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4} \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{9}{4} \quad 1 \quad -3 \\ x = -1 \quad \downarrow \quad \underline{-\frac{1}{4}} \quad \underline{\frac{7}{4}} \quad \underline{-4} \quad 3 \\ \frac{1}{4} \quad -\frac{7}{4} \quad 4 \quad -3 \quad 0 \quad f(-1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \end{array}$$

باقي يا پاتي پولینوم:

$$\frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 4x - 3 = 0$$

هورنر:

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 4 & -3 \\
 x=2 \downarrow & \frac{2}{4} & -\frac{5}{2} & \underline{3} \\
 \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & 0 \quad f(2)=0 \Rightarrow x_2=2
 \end{array}$$

لاندي الماني = باقي - يا پاتي پولينوم:

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$p = -5 \quad q = 6 \quad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l}
 x_{3/4} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \\
 x_3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \\
 x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2
 \end{array}$$

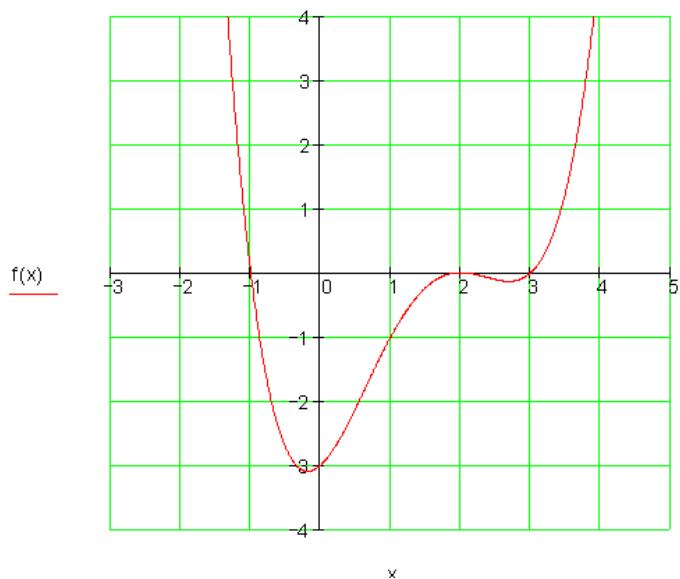
-ارزبنتونه د لويې پسي ترتب كړئ:  $x_1 = -1 \quad x_{2/3} = 2 \quad x_4 = 3$

د  $x$  -محور سره غوڅتكي:

$$\underline{\underline{P_{x_1}(-1|0)}}$$

$$\underline{\underline{P_{x_{2/3}}(2|0)}}$$

$$\underline{\underline{P_{x_4}(3|0)}}$$



ج -

افراطي ټکي

$$f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x \quad \text{تابع:}$$

$$f'(x) = \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3 \quad \text{لومړی مشتق:}$$

$$f''(x) = \frac{20}{27}x^3 - 4x \quad \text{دویم مشتق:}$$

خایونه د پراته یا افقي تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3 = 0 \quad \text{(بي دوه) مربع مساوات}$$

$$x_1 = 3; x_2 = -3; x_3 = \sqrt{\frac{9}{5}}; x_4 = -\sqrt{\frac{9}{5}}$$

ازماینت چي ایا یو افراطي ټکی مخ ته لرو

$$f''(x_1) = f''(3) = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 3$$

$$f''(x_2) = f''(-3) = -8 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -3$$

$$f''(x_3) = f''\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx -3,578 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_3 = \sqrt{\frac{9}{5}}$$

$$f''(x_4) = f''\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx 3,578 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_4 = -\sqrt{\frac{9}{5}}$$

د افراطي ارزښتون شمېرنه :

$$f(x_1) = f(3) = 0$$

$$f(x_2) = f(-3) = 0$$

$$f(x_3) = f\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx 2,576$$

$$f(x_4) = f\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx -2,576$$

افراطي ټکي:

$$P_{\text{Min1}}(3|0) \quad P_{\text{Max1}}(-3|0) \quad P_{\text{Max2}}\left(\sqrt{\frac{9}{5}} \approx 1,342 \mid 2,576\right)$$

$$P_{\text{Min2}}\left(-\sqrt{\frac{9}{5}} \approx -1,342 \mid -2,576\right)$$

اورونټکي یا د انعطاف ټکي:

$$f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x \quad f'(x) = \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3$$

$$f''(x) = \frac{20}{27}x^3 - 4x \quad f'''(x) = \frac{60}{27}x^2 - 4$$



د انعطاف تکی لپاره اریین شرایط:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^3 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \cdot \left( \frac{20}{27}x^2 - 4 \right) = 0 \Rightarrow x_{w1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2 - 4 = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2 = 4 \mid : \frac{20}{27} \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{27}{5} \mid \sqrt{\quad} \Rightarrow x_{w2/3} = \pm \sqrt{\frac{27}{5}} \approx \pm 2,324 \end{aligned}$$

په انعطاف تکی ازماښت:

په  $x = x_{w1} = 0$  کی اورنتکی.  $f'''(x_{w1}) = f'''(0) = -4 \neq 0$  لاس ته راځي،

$$f'''(x_{w2}) = f''' \left( \sqrt{\frac{27}{5}} \right) = \frac{60}{27} \cdot \frac{27}{5} - 4 = 8 \neq 0 \Rightarrow$$

لاس ته راځي، په  $x = x_{w2} = \sqrt{\frac{27}{5}}$  کی اورنتکی.

$$f'''(x_{w3}) = f''' \left( -\sqrt{\frac{27}{5}} \right) = \frac{60}{27} \cdot \frac{27}{5} - 4 = 8 \neq 0 \Rightarrow$$

لاس ته راځي، په  $x = x_{w2} = -\sqrt{\frac{27}{5}}$  کی اورنتکی.

د اورونتي کي کواورديناتونه يا پروتولارارزبنونه (قمتهاي وضعيه؟؟):

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(0) = 0$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f \left( \sqrt{\frac{27}{5}} \right) = \frac{1}{27} \left( \sqrt{\frac{27}{5}} \right)^5 - \frac{2}{3} \left( \sqrt{\frac{27}{5}} \right)^3 + 3 \left( \sqrt{\frac{27}{5}} \right) \approx 1,115$$

$$y_{w3} = f(x_{w3}) = f\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right) = \frac{1}{27}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^5 - \frac{2}{3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^3 + 3\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right) \approx -1,115$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0|0)}} \quad \underline{\underline{P_{w2}\left(\sqrt{\frac{27}{5}} \approx 2,324 | y_{w2} \approx 1,115\right)}}$$

$$\underline{\underline{P_{w3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}} \approx -2,324 | y_{w3} \approx -1,115\right)}}$$

د  $f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$  محور غوختکی یا د محور سره د تقاطع تکی.

د  $y$  محور سره غوختکی:  $P_y(0|0)$

صفر خایونه

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{بدلون: } x^2 = z \quad \frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{27}z^2 - \frac{2}{3}z + 3 = 0 \quad | \cdot 27$$

په  $z$  کې مربع (خلوری) مساوات

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18 \quad q = 81 \quad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{array}{l} z_1 = 9 \\ z_2 = 9 \end{array}$$

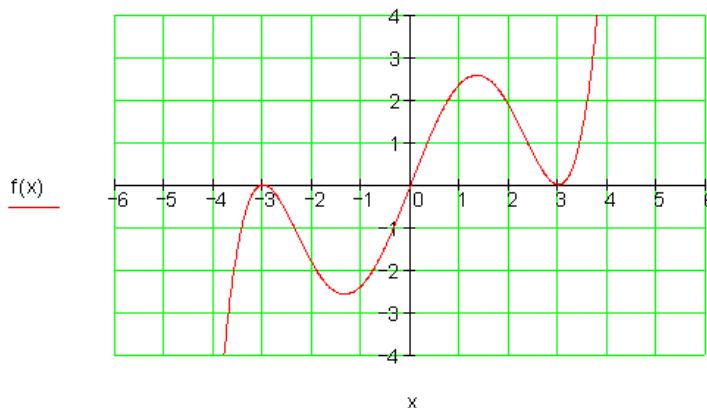
$$z_1 = 9 = x^2 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 3 \quad z_2 = 9 = x^2 \Rightarrow x_{4/5} = \pm 3$$

د x -محور سره غوڅتکی.

$$\underline{\underline{P_{x1}(0|0)}}$$

$$\underline{\underline{P_{x2/3}(-3|0)}}$$

$$\underline{\underline{P_{x4/5}(3|0)}}$$



یادونه: دا برخه دلته پای شوه.

### 3.IX: اورونټکی یا د انعطاف ټکی او زینټکی

تمرینونه مشتقشمیرنه II

لاندي ټول راشنل یا هوبنیار توابع د اورونټکي په هکله وڅیړی او په ورکړ شوي حالت کي اورون- یا د انعطافکي وټاکي.

لومړی:  $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$  دویم:  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

دریم:  $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1$  څلورم:  $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \quad \text{شپږم:} \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad \text{پنځم:}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad \text{اتم:} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad \text{اووم:}$$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad \text{لسم:} \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad \text{نهم:}$$

## تمرینونه

## مشتقشمیرنه II

## نتیجی او مفصل حلونه

نتیجی:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \Rightarrow P_w(2|1) \quad \text{اول -}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \Rightarrow P_w\left(\frac{8}{3} \mid \frac{64}{27}\right) \quad \text{دویم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 \Rightarrow P_w(2|1) \quad \text{دریم -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \Rightarrow P_w(2|5) \quad \text{څلورم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \Rightarrow P_w\left(-1 \mid \frac{5}{3}\right) \quad \text{پنځم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \Rightarrow P_{w1/2}(\pm 1 | -1) \text{ - شپږم -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \Rightarrow P_{w1/2}\left(\pm 1 \mid \frac{3}{2} = 1,5\right) \text{ - اوم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ - اتم -}$$

اورونټکی نه شته

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \Rightarrow P_{w1}(0 | 1) \quad P_{w2}(2 | 5) \text{ - نهم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \Rightarrow P_{w1/2}\left(\pm\sqrt{3} \approx 1,73 \mid -\frac{19}{4} = -4,75\right) \text{ - لسم -}$$

مفصل حلونه:

لومړی - مفصل حل:

شمیرنه:

اول- د تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

دویم - د انعطافتګي لپاره اړین شرطونه:

ممکنه انعطافخای یا اورونخای دی

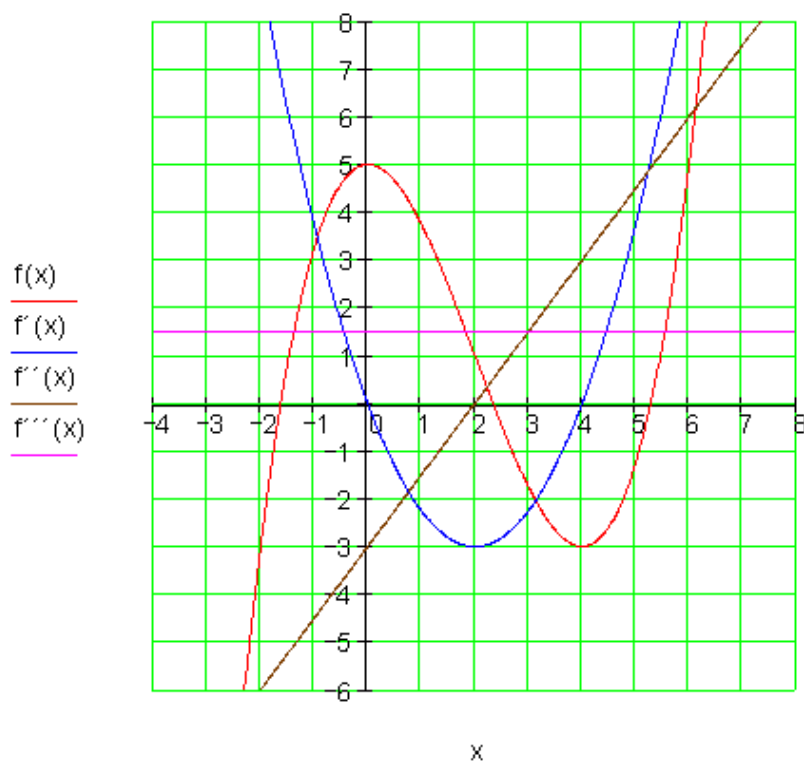
دریم - د دریم مشتق له لارې ښوونه، چې ایا یو انعطاف- یا اورونټکی لرو:

$$f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

یو ممکنه انعطاف‌ای یا اورون‌خایدی.

څلورم - د انعطاف‌تکي ټاکنه د انعطاف‌ای ایښوونې له لارې په  $f(x)$  کې

$$f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 5 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 5 = 2 - 6 + 5 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|1)}}$$



گرافونه :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

۲۵۳      ۳ - دفرخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

دویم - مفصل حل:

شمېرنه: لومړۍ- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$$

$$f''(x) = 3x - 8 \quad f'''(x) = 3$$

دویم - د انعطاف ټکی لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

مکنه اورنټکی یا د انعطاف ټکی

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چې ایا نو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x) = f'''\left(\frac{8}{3}\right) = 3 \neq 0 \Rightarrow x = x_{\text{W}} = \frac{8}{3}$$

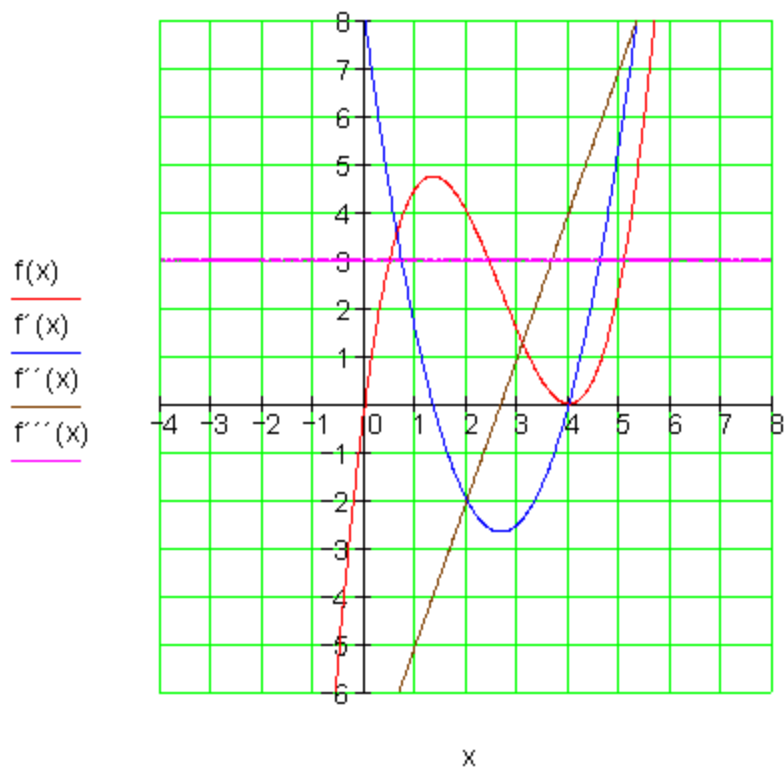
اورنټکی یا د انعطاف ټکی دی

څلورم - د انعطاف ټکی ټاکنه په  $f(x)$  کې د انعطاف ټکی اېښوونې له لارې

$$\begin{aligned} f(x_{\text{W}}) &= f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 8 \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{512}{27} - 4 \cdot \frac{64}{9} + 8 \cdot \frac{8}{3} \\ &= \frac{256}{27} - \frac{768}{27} + \frac{576}{27} = \frac{64}{27} \Rightarrow \underline{\underline{P_{\text{W}}\left(\frac{8}{3} \approx 2,67 \mid \frac{64}{27} \approx 2,37\right)}} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \quad \text{گرافونه:}$$

$$f''(x) = 3x - 8 \quad f'''(x) = 3$$



دریم - مفصل حل

شمېرنه:

لومړۍ - د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$



ممکنه اورونتکی یا د انعطاف تکی دی

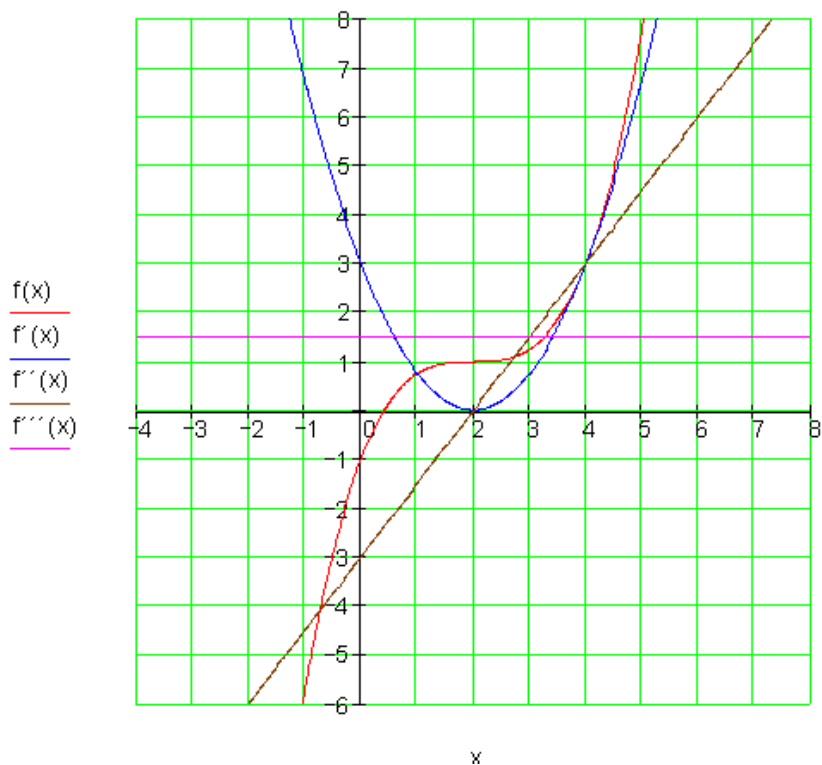
دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چي ایا نو انعطاف تکی مخ ته لرو.

$$f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

ممکنه اورونتکی دی

څلورم - د انعطاف تکی ټاکنه د انعطافخای ایښوونې له لارې په  $f(x)$  کې

$$f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 6 - 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|1)}}$$



گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

څلورم - مفصل حل:

شمیرنه: لومړۍ - د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \quad f'''(x) = -\frac{3}{2}$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

ممکنه اورونټکي (انعطافټکي) دي.

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x) = f'''(2) = -\frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

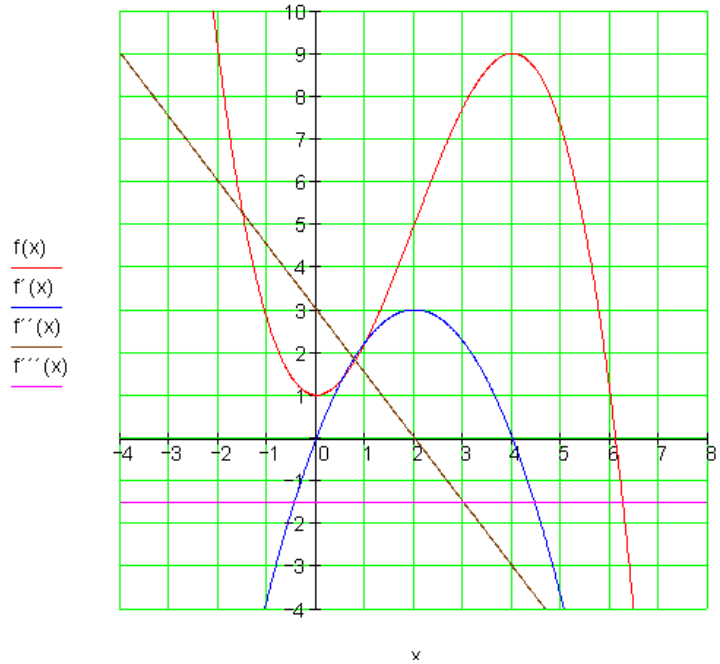
یو انعطافټکی یا اورونټکی دی.

څلورم - د انعطافټکي ټاکنه د انعطافخای ایښوونې له لارې په  $f(x)$  کې

$$f(x_W) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 4 + 1 = -2 + 6 + 1 \Rightarrow \underline{\underline{R_W(2|5)}}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \quad \text{گرافونه:}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \quad f'''(x) = -\frac{3}{2}$$



پنجم - مفصل حل:

شمېرنه: لومړۍ- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2$$

$$f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$$

دویم - د انعطاف ټکی لپاره اړین شرطونه:  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

ممکنه انعطاف- یا اورونټکی دی

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چې ایا نو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

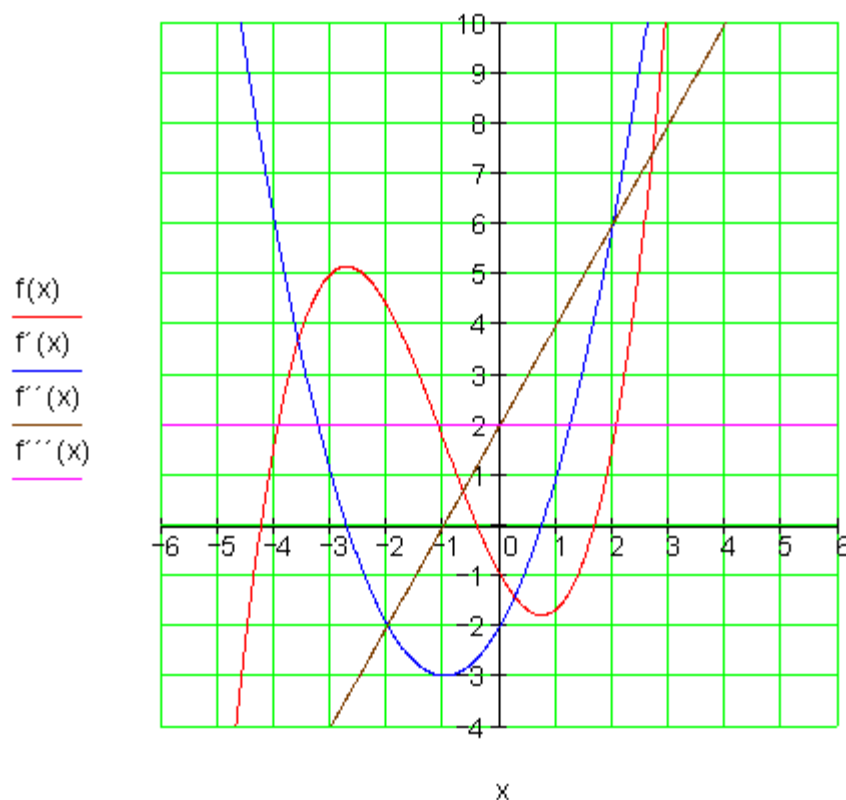
$$f'''(x) = f'''(-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow x = x_W = -1$$

یو انعطافټکی دی.

څلورم - د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای ایښوونې له لارې په  $f(x)$  کې

$$f(x_W) = f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = -\frac{1}{3} + 1 + 2 - 1 = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow P_W \left( -1 \mid \frac{5}{3} \approx 1,67 \right)$$



گرافونه

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \quad f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$$

شپږم - مفصل حل:

شمېرنه: لومړۍ د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \quad f'(x) = 2x^3 - 6x \quad f''(x) = 6x^2 - 6 \quad f'''(x) = 12x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$$

یو ممکنه انعطاف-یا اوږونټکی دی.

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

یو اوږون-یا انعطافټکی دی

$$f'''(x_1) = f'''(1) = 12 \cdot 1 = 12 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{w1} = 1$$

یو د انعطاف ټکی دی.

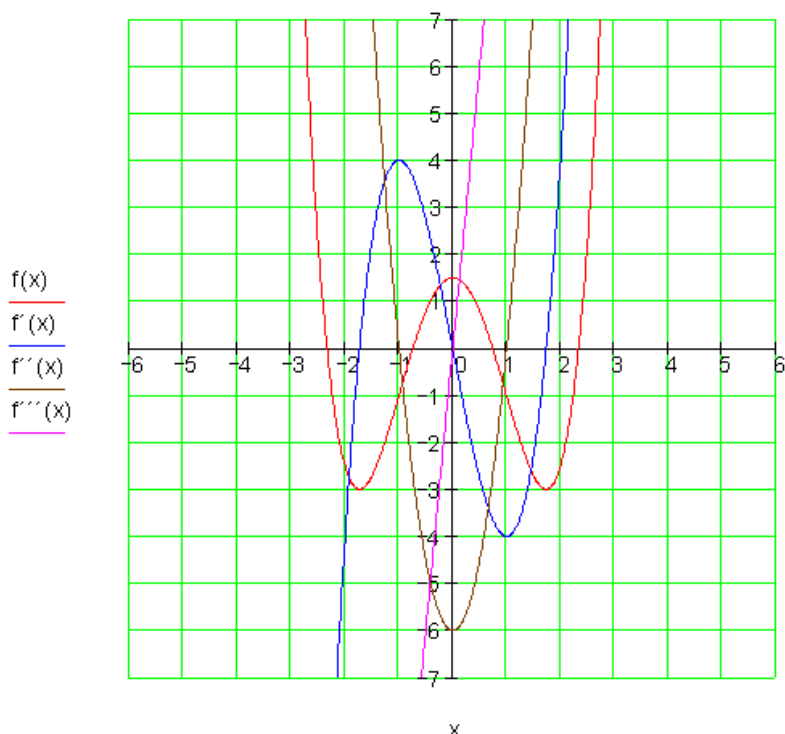
$$f'''(x_2) = f'''(-1) = 12 \cdot (-1) = -12 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{w2} = -1$$

څلورم - د انعطافټکي ټاکنه د انعطافخای ایښوونې له لارې په  $f(x)$  کې

$$f(x_{w1/2}) = f(\pm 1) = \frac{1}{2}(\pm 1)^4 - 3 \cdot (\pm 1)^2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - 3 + \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{w1/2}(\pm 1 | -1)}}$$

گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \quad f'(x) = 2x^3 - 6x \quad f''(x) = 6x^2 - 6 \quad f'''(x) = 12x$$



اوم - مفصل حل:

شمېرنه: لومړۍ د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6 \quad f'''(x) = -12x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$$

ممکنه اوړون - د انعطاف ځایونه دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چي ایا نو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(1) = -12 \cdot 1 = -12 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 1$$

یو اورونځای یا انعطاف ځای دی

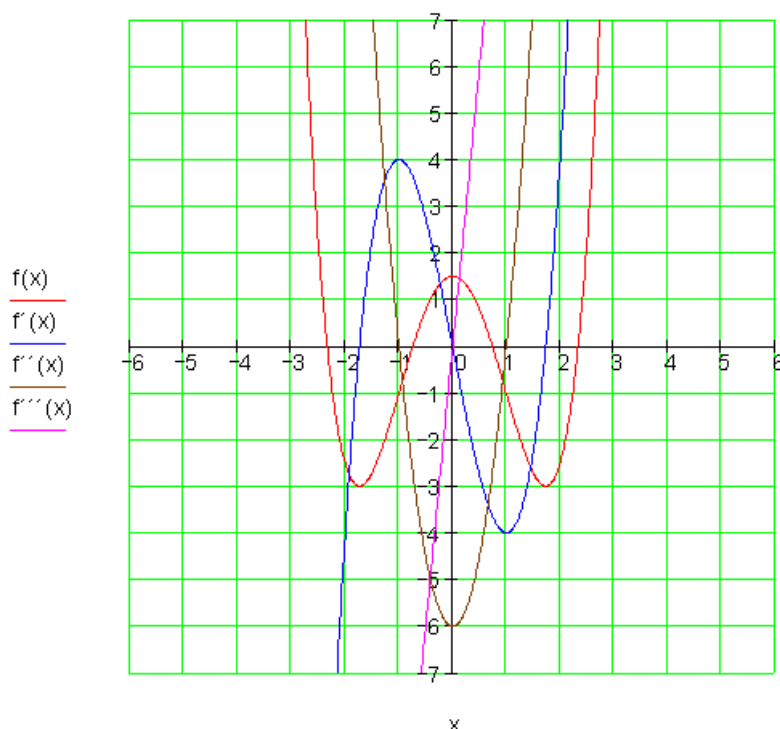
$$f'''(x_2) = f'''(-1) = -12 \cdot (-1) = 12 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -1$$

یو اورونځای یا انعطاف ځای دی

څلورم - د انعطاف ټاکنه د انعطاف ځای ایښوونې له لارې په  $f(x)$  کې

$$f(x_{W1/2}) = f(\pm 1) = -\frac{1}{2}(\pm 1)^4 + 3 \cdot (\pm 1)^2 - 1 = -\frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{W1/2} \left( \pm 1 \mid \frac{3}{2} = 1,5 \right)$$



گرافونه :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6$$

$$f'''(x) = -12x$$

اتم - مفصل حل:

شمېرنه:

لومړۍ - د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad f'(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$f''(x) = 3x^2 - 6x + 3 \quad f'''(x) = 6x - 6$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \text{ s}$$

ممکنه اورنټکي یاد انعطاف ټکي دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_{1/2}) = f'''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1 \text{ i}$$

دا د انعطاف ټکی نه دی.

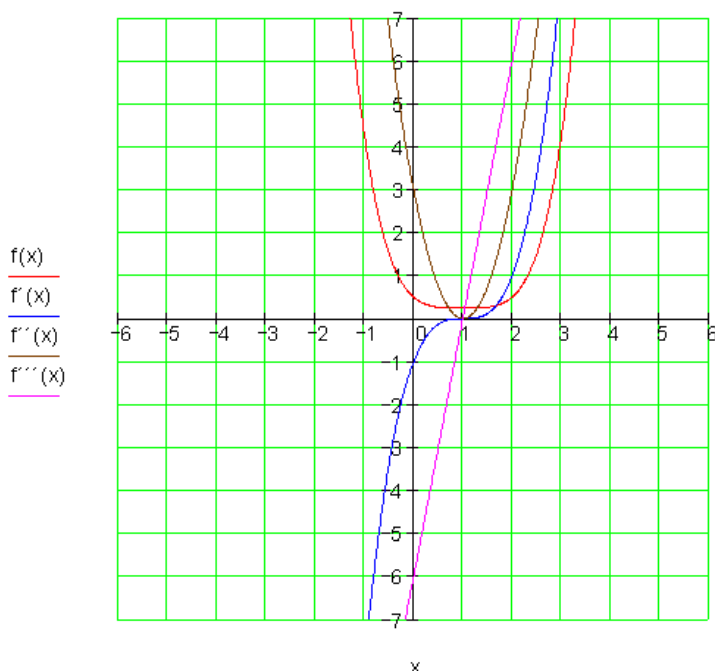
د  $f(x)$  گراف اورونټکي یا د انعطاف ټکی نه لري.

گرافونه :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad f'(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$f''(x) = 3x^2 - 6x + 3 \quad f'''(x) = 6x - 6$$





نهم - مفصل حل:

شمیرنه:

لومړۍ د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f''(x) = -3x^2 + 6x \quad f'''(x) = -6x + 6$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2$$

د پورته بنسټو: ممکنه اورنځای یا د انعطاف ځای دی

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چي ایا نو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 0$$

یو اورنخای یا د انعطاف خای دی

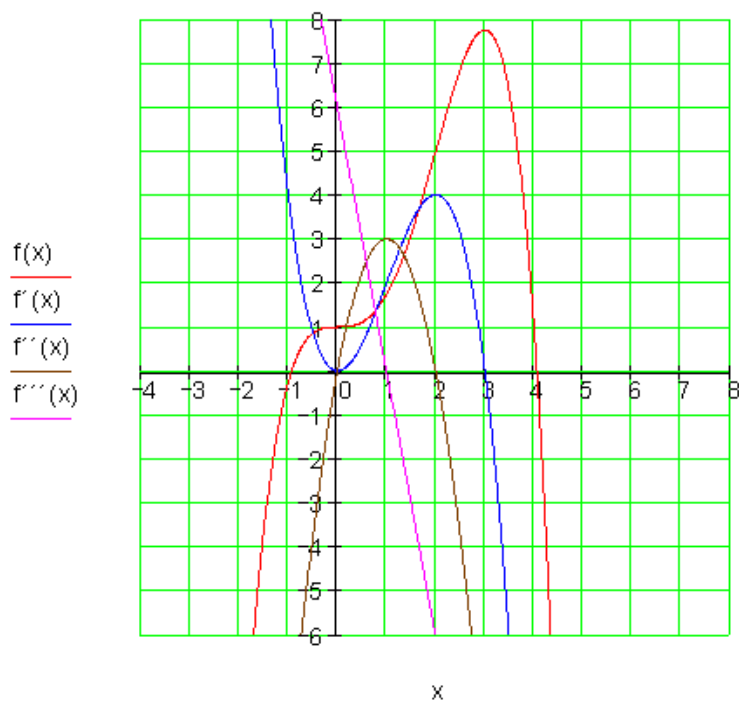
$$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \cdot 2 + 6 = -6 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = 2$$

یو د انعطاف خای دی

څلورم - د انعطاف ټکي ټاکنه د انعطاف خای ایښوونې له لارې په  $f(x)$  کې

$$f(x_{W1}) = f(0) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1}(0|1)}}$$

$$f(x_{W2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 8 + 1 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W2}(2|5)}}$$



گرافونه ( پورته ۰:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad f''(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'''(x) = -6x + 6$$

لسم - مفصل حل:

شمیرنه: لومړۍ د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x \quad f''(x) = x^2 - 3 \quad f'''(x) = 2x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3} ;$$

ممکنه انعطاف- یا اورونځایونه دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چي ایا نو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(\sqrt{3}) = 2 \cdot \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{w1} = \sqrt{3} ;$$

یو اعطافخای دی

$$f'''(x_2) = f'''(-\sqrt{3}) = -2 \cdot \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{w2} = -\sqrt{3}$$

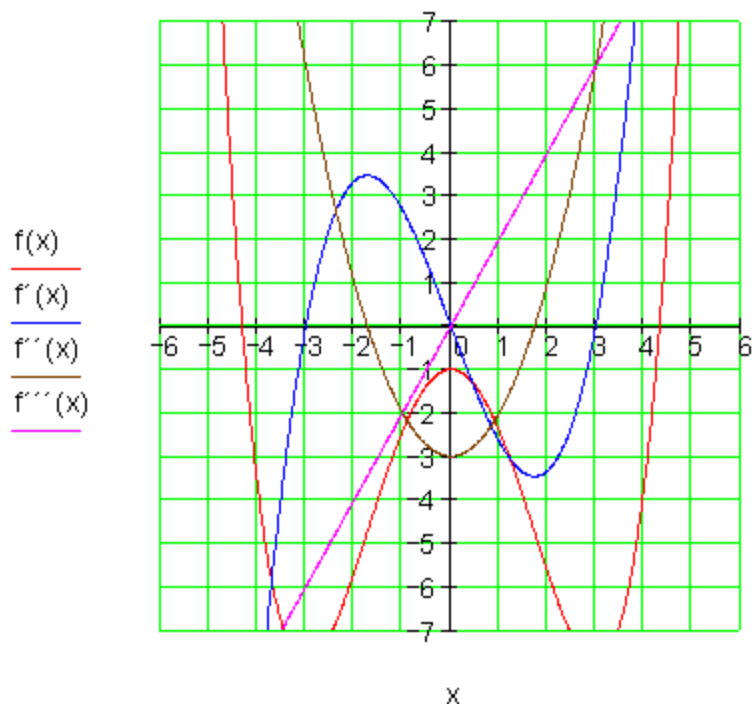
یو انعطافخای یا اورونځای دی

څلورم - د انعطافټکي ټاکنه د انعطافخای ایښوونې له لارې په  $f(x)$  کې

$$\begin{aligned} f(x_{w1/2}) &= f(\pm\sqrt{3}) = \frac{1}{12}(\pm\sqrt{3})^4 - \frac{3}{2}(\pm\sqrt{3})^2 - 1 = \frac{1}{12} \cdot 9 - \frac{3}{2} \cdot 3 - 1 \\ &= \frac{3}{4} - \frac{9}{2} - 1 = \frac{3}{4} - \frac{18}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{19}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P_{w1/2}(\pm\sqrt{3} \mid -\frac{19}{4} = -4,75)}} \end{aligned}$$

گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x \quad f''(x) = x^2 - 3 \quad f'''(x) = 2x$$



حلونه

نتیجی او مفصل حلونه

مشتق د تولگی کار چمتووالی لپاره |

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \quad \text{لومړی: الف -}$$

ب - نسبی مینیموم = ککر تکی یا د رآس تکی:

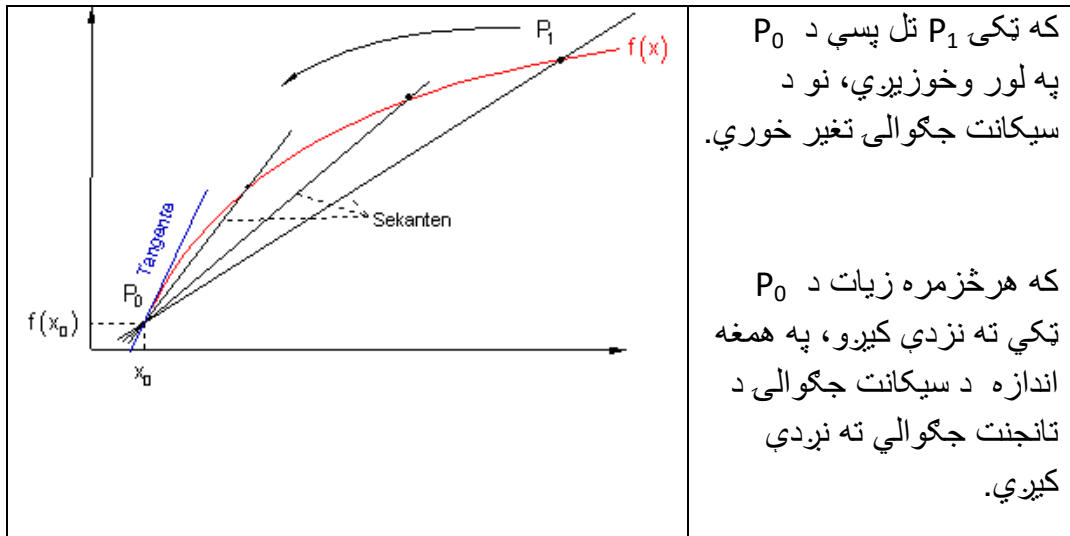
$$P_{\text{Min}}(-2|-4) = P_{\text{Sp}}(-2|-4)$$

$$P_{x_1}(-2+2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,83|0) \quad P_{x_2}(-2-2 \cdot \sqrt{2} \approx -4,83|0) \quad \text{پ -}$$

ت - گرافونه د مفضل حل سره دي.

دویم: د یوه تابع د گراف جگېدنه په یوه ټکي کې په همغه ټکي کې د تابع د تانجنت د جگوالي سره برابره ده.

دریم:



څلورم: د  $x_0$  په ځاي کې د تابع لومړی مشتق په ټکي  $P(x_0 | f(x_0))$  کې د تانجنت جگوالي دی او له دې سره په دې ټکي کې د  $f(x)$  د گراف جگوالي هم دی.

پنځم: د مشتق تابع  $f'(x)$  له دې امله د جگېدنې تابع بلل کيږي، ځکه چې دا په هر ټکي کې د  $f(x)$  د جگوالي نمايندگي موي.

شپږم:

$$\text{الف - } f'(x) = 3 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) = 0$$

## ۳ - دفرنخیاں شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

۲۶۸

$$\text{ب۔ } f'(x) = 15x^2 - 3 \quad f''(x) = 30x \quad f'''(x) = 30$$

$$\text{پ۔ } f'(x) = 24x^2 + 24x + 6 \quad f''(x) = 48x + 24 \quad f'''(x) = 48$$

$$\text{ت۔ } f'(x) = 9x^2 + 4x + 1 \quad f''(x) = 18x + 4 \quad f'''(x) = 18$$

$$\text{ث۔ } f'(x) = -4x^3 + 2 \quad f''(x) = -12x^2 \quad f'''(x) = -24x$$

$$\text{ج۔ } f'(x) = 4x^3 - 9 \quad f''(x) = 12x^2 \quad f'''(x) = 24x$$

$$\text{د۔ } f'(x) = -3cx^2 - a - b - c^3 - 1 \quad f''(x) = -6cx \quad f'''(x) = -6c$$

$$\text{ه۔ } f'(x) = 12x^2 - 4x + 5 \quad f''(x) = 24x - 4 \quad f'''(x) = 24$$

- ح

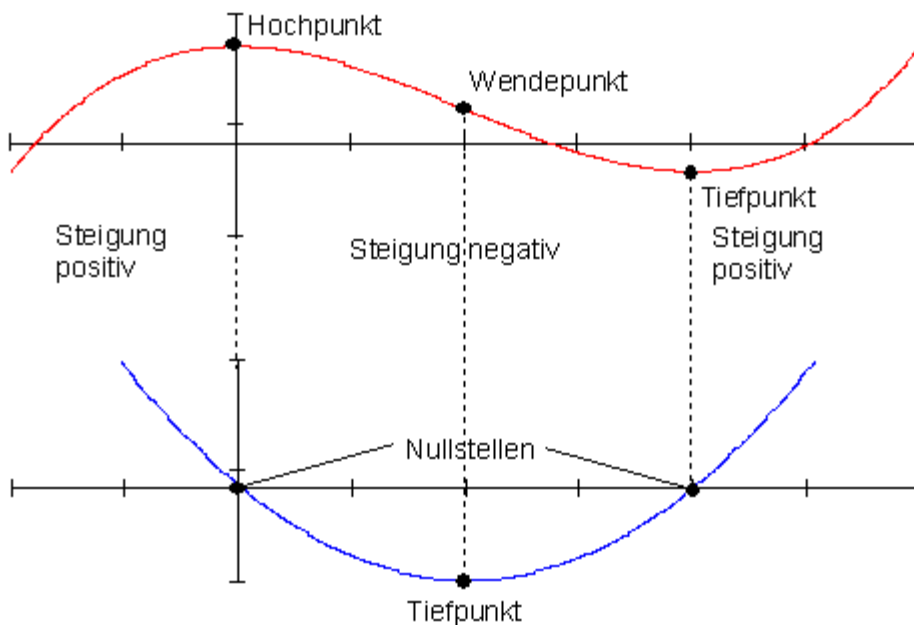
$$f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2 \quad f''(x) = 60x^2 - 24x + 6 \quad f'''(x) = 120x - 24$$

$$\text{و۔ } f'(x) = -4x^3 \quad f''(x) = -12x^2 \quad f'''(x) = -24x$$

$$\text{اووم: } t(x) = -5x + 6 \quad n(x) = \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}$$

اتم: پینتو: په گراف کی له کین و بنی لور او له پورته کبنته لور په ترتیب.

تیب تکی، اورونتیکی-یا انعطافتیکی، جگیدنه مثبت، جگیدنه منفي یا کمیزه، تیب تکی جگیدنه مثبت، صفرخای، تیب تکی.



پوښتنې

مشتق شمیرنه د ټولګي کار د چمتووالي لپاره |

لومړۍ - پارابول په درې ټکو کې:

الف -

د پارابول د تابع مساوات  $f(x)$  و ټاکی چې له لاندې ټکو تېرېږي:

$$P_1(-4|-2) \quad P_2(-2|-4) \quad P_3(2|4)$$

ب - د غوڅتکو یا د تقاطع ټکو وضعیه قیمتونه پیدا کړئ

پ - د  $f(x)$  محور غوڅتکي پیدا کړی

ت - د  $f(x)$  او  $f'(x)$  گرافونه په پروتولار سیستم یه د وضعیه قیمتونو سیستم کې وکارې.

دویم - په یوه ټکي کې د تابع د گراف د جگېدنې لاندې څه پوهیږو؟

دریم - یو د لیدلو لپاره رسم وکارې او د حملو سره یې تشریح کړی، چې په یوه گراف څنگه له سیکانټ جگوالي څخه د تانجنت جگوالي ته راځو؟

څلورم - د  $x_0$  په ځا کې د یوې تابع لومړی مشتق څه معنا لري؟

پنځم - ولې د مشتق تابع د جگوالي تبع هم بلل کېږي؟

شپږم - د لاندې توابعو درېواره مشتق ونیسی:

الف -  $f(x) = 3x + 4$  ب -  $f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3$

پ -  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$  ت -  $f(x) = (2x + 1)^3$

ټ -  $f(x) = x - x^4 + 3 + x$  ټ -  $f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4$

ج -  $f(x) = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$  چ -  $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$

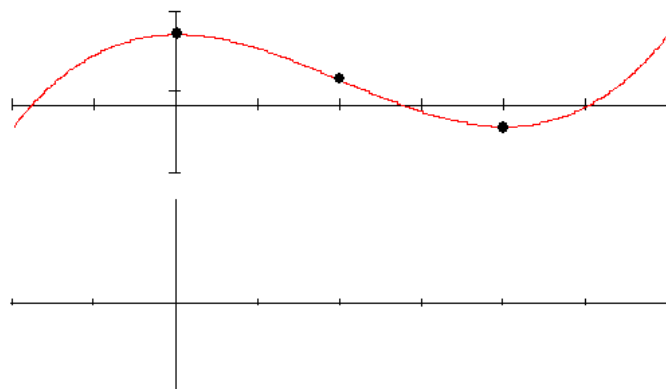
ح -  $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$  خ -  $f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$

اوم - یوه  $f(x) = -x^2 - x + 2$  تابع ورکړ شوی ده.

د  $P(2; f(2))$  ټکي لپاره دې د تنجنت او عمود مساوات و ټاکل شي.

اتم - د تابع د گراف لاندې د تابع د مشتق گراف وکارې او په دواړو گرافونو کې کرکترېستيکي یا خوي ټاکونکي ټکي په نڅېه کړی.





خوابونه:

لومری: الف -

$$P_1(-4 | -2) : f(-4) = 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = -2$$

$$P_2(-2 | -4) : f(-2) = 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_2(2 | 4) : f(2) = 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 4$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	
1	-4	16	-2
1	-2	4	-4    -1
1	2	4	4     -1
1	-4	16	-2
0	2	-12	-2   : 2
0	6	-12	6   : (-6)
1	-4	16	-2
0	1	-6	-1
0	-1	2	-1     +1
1	-4	16	-2
0	1	-6	-1
0	0	-4	-2

$$-4a_2 = -2 | : (-4)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$$

$$a_1 - 6a_2 = -1 \Leftrightarrow a_1 - 6 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 3 = -1 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 - 4a_1 + 16a_2 = -2 \Leftrightarrow a_0 - 4 \cdot 2 + 16 \cdot \frac{1}{2} = -2$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2}}$$

$$P_1(-4|-2): f(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 2 = 8 - 8 - 2 = -2$$

$$P_2(-2|-4): f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$$

$$P_3(2|4): f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$$

ب - د پارابول ککرتکی یو انحرافی تکی دی.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = x + 2 \Rightarrow f''(x) = 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ i}$$

ممکنه افراطی خای دی

$$f''(x) = f''(-2) = 1 > 0 \Rightarrow \text{rel.}$$

په  $x = -2$  کی نسبی مینیموم

$$f(-2) = \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$$

$$P_{\text{Min}}(-2|-4) = \underline{\underline{P_{\text{Sp}}(-2|-4)}}: \text{نسبی مینیموم} = \text{ککرتکی}$$

پ -

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \quad f(0) = -2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|-2)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0$$

۲۷۳

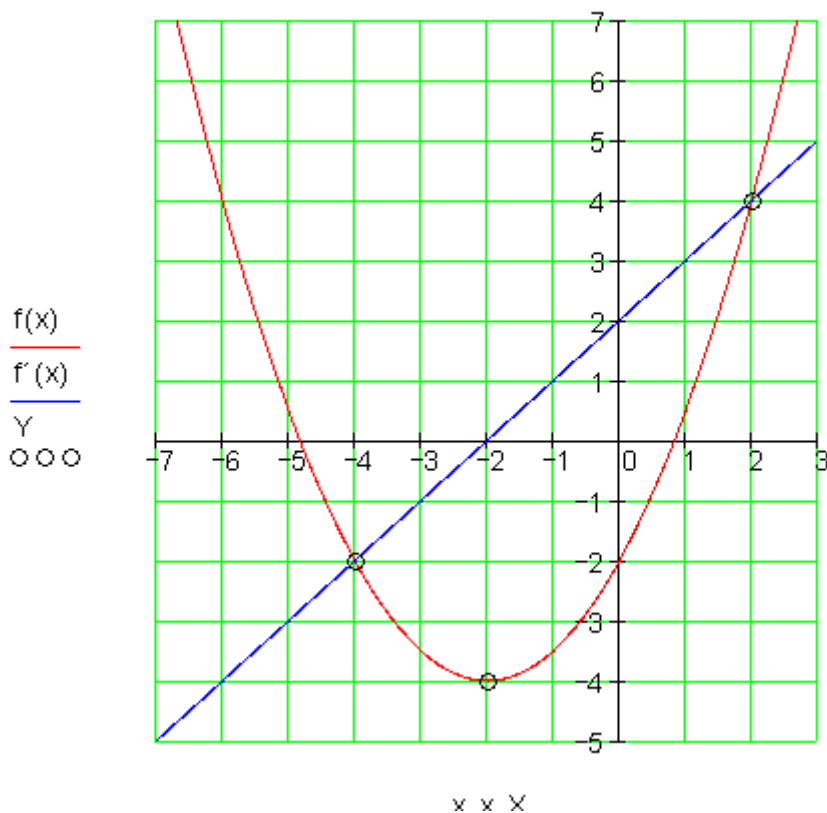
۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

د مربع مساوات نورمال بڼه

$$p = 4; q = -4 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + 4 = 8 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = -2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,83 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_{x_1}(-2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,83 | 0)}} \\ x_2 = -2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4,83 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_{x_2}(-2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4,83 | 0)}} \end{array} \right.$$

ت -



شپږم:

ت -

$$f(x) = (2 + x)^3 \quad \text{ت}$$

لومړی - حل د ضربولو له لارې

$$f(x) = (2x + 1)^3 = (2x + 1) \underbrace{(2x + 1)^2}_{1. \text{ bin. Formel}} = (2x + 1)(4x^2 + 4x + 1)$$

$$= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$f'(x) = 24x^2 + 24x + 6 \quad f''(x) = 48x + 24 \quad f'''(x) = 48$$

دویم د ځنزیري قانون سره حل

$$f'(x) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2 = 6(4x^2 + 4x + 1) = \underline{24x^2 + 24x + 6}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 6(2x + 1) \cdot 2 = 24(2x + 1) = \underline{48x + 24}$$

$$f'''(x) = \underline{48}$$

$$f(x) = (2x + 1)^3$$

لومړی حل د ضربونې قانون له لارې

$$f(x) = (2x + 1)^3 = (2x + 1) \underbrace{(2x + 1)^2}_{1. \text{ bin. Formel}} = (2x + 1)(4x^2 + 4x + 1)$$

$$= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$f'(x) = \underline{24x^2 + 24x + 6} \quad f''(x) = \underline{48x + 24} \quad f'''(x) = \underline{48}$$

دویم حل د ځنزیري قانون له لارې

$$f'(x) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2 = 6(4x^2 + 4x + 1) = \underline{24x^2 + 24x + 6}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 6(2x + 1) \cdot 2 = 24(2x + 1) = \underline{48x + 24}$$

$$f'''(x) = \underline{48}$$

$$f(x) = \underbrace{a+b+c^2}_{\text{Konstante}} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$$

$$f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = -3cx^2 - \underbrace{a+b+c^3-1}_{\text{Konstante}}$$

$$f''(x) = -6cx \quad f'''(x) = -6c$$

$$f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2) \quad \text{خ-}$$

لومری - د ضربولو له لاری د بینوم دریم قانون

$$f(x) = a^4 - x^4 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 \Rightarrow f''(x) = -12x^2 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

دویم: د ضرب قانون سره ضربول

$$= \underbrace{(a^2 + x^2)}_u \underbrace{(a^2 - x^2)}_v \Rightarrow u' = 2x \quad v' = -2x$$

$$) = u'v + uv' = 2x \cdot (a^2 - x^2) + (a^2 + x^2)(-2x) = 2a^2x - 2x^3 - 2a^2x - 2x^3 = -4x^3$$

$$) = -12x^2 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

اووم:

$$f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 1$$

د ټکي  $P(2; f(2))$  وضعیه قیمتونه (کووردیناتونه)

$$f(2) = -2^2 - 2 + 2 = -4 - 2 + 2 = -4 \Rightarrow P(2; -4)$$

جگېدنه په  $P(2 | -4)$  کې.

$$(د تانجنت جگېدنه) f'(2) = -2 \cdot 2 - 1 = -5 \Rightarrow mt = -5$$

د تانجنت مساوات:

$$t(x) = m_t x + b_t = -5x + b_t$$

تانجنت له ټکي  $P(2|-4)$  تیریري له دی لاس ته راځي او په څټ یا برعکس

$$\Rightarrow t(2) = -4 \Leftrightarrow -5 \cdot 2 + b_t = -4 \Leftrightarrow b_t = 6$$

لاس ته راځي  $t(x) = -5x + 6$  د تانجنت مساوات دی له  $P(2|-4)$  لارې.

عمود مساوات:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5} \Rightarrow n(x) = \frac{1}{5}x + b_n$$

نورمال له ټکي  $P(2|-4)$  تیریري. لرو:

$$P(2|-4) \Rightarrow n(2) = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 2 + b_n = -4 \Leftrightarrow b_n = -\frac{22}{5}$$

$$\Rightarrow n(x) = \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}$$

د نورمال مساوات دی له  $P(2|-4)$  څخه تیریري.

د فرمول له مخي الترناتیو یا بدیل حل

د  $f(x)$  په گراف په ټکي  $(x_0; f(x_0))$  کي تانجنت او عمود.

د تانجنت مساوات

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

جگپښه  $f'(x_0)$

د عمود مساوات

$$n(x) = -\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{Steigung}}(x - x_0) + f(x_0); f'(x_0) \neq 0$$

$$f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \quad x_0 = 2$$

$$f'(x_0) = f'(2) = -4 - 1 = -5$$

$$f(x_0) = f(2) = -4 - 2 + 2 = -4$$

$$t(x) = -5(x - 2) - 4 = -5x + 10 - 4 = \underline{\underline{-5x + 6}}$$

$$n(x) = \frac{1}{5}(x - 2) - 4 = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} - \frac{20}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}x - \frac{22}{5}}}$$

پوښنتي

## مشتق د ټولگي کار لپاره II

اول - تانجنت او عمود:

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7$$

الف - تابع دې ورکړ شوي وي.

د تانجنت او عمود لپاره دې د  $x_0 = 2$  لپاره وشمېرل شي.

ب - تانجنت او عمود د محور سره یو درېځوډی (مثلث) جوړوي.

د دې سطحه وشمېری

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; x \in \mathbb{R}$$

دویم - تابع ورکړ شوي

الف - په کومو ځایونو کې  $f(x)$  جگپښه 2 لري؟

ب - د جگپښه د په ځای کې ده.

بي له شمېرنې یو بل ځای د برابري جگپښې سره ورکړی.

ستاسې گومان مدلل کړی.

پ -  $f(x)$  په کومو ځایونو کې پروت یا افقي محور لري؟

مساوات یې ورکړی.

ت - په  $f(x)$  پاندي تانجنت په سرچینه کې وټاکي..

ټ - د تانجنت مساوات په  $f(x)$  باندي په ټکي  $P(u | f(u))$  کې معلوم کړی

ټ - کومه کرښه  $f(x)$  په  $P_x(3 | 0)$  کې عمود غوڅوي؟

دریم : د څلورمې درجې ټول ریښتونۍ یا تام راشنل تابع ورکړ شوي :

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}$$

الف - ایا د تابع گراف سیومتريک دی؟ که هو، نو سیومتري کوم ډول ده؟

خپله پرېکړه باوري کړه (یا په دي هکله دليل راوړه).

ب - نسبي انحراف ( خورا جگټکی، خورا ټيټ ټکی) وشمېری.

پ - انعطاف ټکي وشمېری او په اوږونټکو یا انعطاف ټکو کې تابع مساوات هم وشمېری.

ت - محور غوڅټکي وشمېری.

ټ - تراوسه ټولو معلومو ټکو سره ارزښتجدول وکارۍ.



ث – په یوه وضعیه قیمت سیستم کې گراف نسبتاً ټیک وکارې. او غوره یا د نخبه کیدو ځایونه په نخبه کړی.

( که اړین وي، له دې سره خپل ارزښت جدول په څو ټکو وغزوی.

په انټروال  $[-5; 5]$  کې د اندازې شمیروني یا وکچ یوونونوشمیروني (د کرښې یا خطکش په څیر اله) : کچ واحد یا یوون 1 cm دی)

ج – د گراف په یو غریزوالي وینا وکړی، دا په دې معنا چې د همغریز جگیدني همداسې همغریز ټیټېدني لپاره انټروالونه ورکړی.

ح – د گراف په انحنایوه وینا وکړی، دا په دې معنا چې د ښي همداسې د کیني انحنای لپاره انټروالونه ورکړی.

خ – د تعریفورشو ژی ټکي ورکړی.

څلورم – د تام راشنل تابع گراف له لاندې ټکو تېرېږي:

$$P_1(-1|7) \quad P_2(-2|6) \quad P_3(3|1) \quad P_4(-3|-2)$$

د تابع مساوات وشمېری، همداسې د انعطاف ټکی او محور غوڅتکي.

ارزښت جدول ورکړی او گراف دامکان تر حده په یوه مناسب پروت ولاړ سیستم کې ټیک وکارې.

که د رسمولو لپاره کوم ټکي کم وو، نو هغه وشمېری.

حلونه:

نتیجې او مفصل حلونه مشتق د تولکي کار ته چمتووالی ||

لومړی:

$$t(x) = -4x + 10 \quad n(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \quad \text{الف}$$

پ - دا مثلث یوه د 8,5 د سطحې واحدونو سطحه لري.

دویم:

الف -  $f(x)$  تابع د  $x_{1/2} = \pm 3$  په ځای کې جگوالی 2 لري.ب -  $f'(x)$  د  $x_{1/2} = \pm 1,5$  په ځای کې جگپدنه 0,25 لري.

$$\text{ت. } t(x) = -x$$

$$\text{ب. } t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3 \quad \text{ث. } g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

دریم:

لف - د  $f(x)$  گراف د  $y$  محور سره سیومتريک دی، ځکه چې اکسپوننت جوړه (جفت) دی

$$\text{ب. } P_{\min 1}(-\sqrt{12} \approx -3,46 | 0) \quad P_{\min 2}(\sqrt{12} \approx 3,46 | 0) \quad P_{\max}(0 | 4,5)$$

$$\text{پ. } P_{w1}(2 | 2) \Rightarrow t_1(x) = -2x + 6 \quad P_{w2}(-2 | 2) \Rightarrow t_2(x) = 2x + 6$$

$$\text{ت. } P_y(0 | 4,5) \quad P_{x_{1/2}}(-\sqrt{12} \approx -3,46 | 0) \quad P_{x_{3/4}}(\sqrt{12} \approx 3,46 | 0)$$

ب - گراف وگورئ. ث - ارزښت جدول وگورئ.

ج - په  $[-\infty; -\sqrt{12}]$  کې کره یو غریز نیټیدونکي

په  $[-\sqrt{12}; 0]$  کې کره مونوتو جگیدونکي

په  $]0; \sqrt{12}[$  کې کره مونوتون ټیټیدونکي

په  $[\sqrt{12}; \infty[$  کې کره مونوتون چگیدونکي.

چ-په  $]-\infty; -2[$  کې ککینه انحنایا کوروالی په  $]-2; 2[$  کې بنی کوروالی

په  $]2; \infty[$  کې کینکوروال یا انحنایا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

ح-

څلورم:

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$	تابع مساوات
$P_{\min}(2   -2) \quad P_{\max}\left(-\frac{4}{3} = -1, \bar{3} \mid \frac{196}{27} \approx 7,26\right)$	انحرافي ټکي
$P_w\left(\frac{1}{3} = 0, \bar{3} \mid \frac{71}{27} \approx 2,63\right)$	د انعطاف ټکي
$P_y(0   4) \quad P_{x1}(1   0) \quad P_{x2}(-\sqrt{8} \approx -2,83   0) \quad P_{x3}(\sqrt{8} \approx 2,83   0)$	محور غوڅټکي

مفصل حلونه:

لومړی:

الف-

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7 \quad x_0 = 2 \quad f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$$

$$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{16} \cdot 16 - \frac{3}{2} \cdot 4 + 7 = 1 - 6 + 7 = 2$$

$$f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{4} \cdot 8 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -4(x - 2) + 2 = -4x + 8 + 2 = \underline{\underline{-4x + 10}}$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) = \frac{1}{4}(x - 2) + 2 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + 2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}}}$$

$$b - \text{د ملت سطحه} = A = \frac{g \cdot h}{2}$$

تانجنت او عمود په  $S(x_0 | f(x_0)) = S(2 | 2)$  ټکي کې غوڅوي. له دې سره لږ:  $h =$   
 $2 \text{ LE}$  د اوږدوالي دوه واحد.  $g$  د  $t(x)$  او  $n(x)$  د صفرځایونو تر منځ واټندی.

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 10 = 0 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x_1 = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$n(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{12}{2} = -6$$

$$g = 6 + 2,5 = 8,5 \Rightarrow A = \frac{8,5 \cdot 2}{2} = \underline{\underline{8,5 \text{ FE}}}$$

یادونه: په پورته  $2 \text{ LE}$  د اوږدوالي واحد او  $FE$  د سطحې واحد دی.

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1 \quad \text{دویم: الف -}$$

په  $x_0$  کې جگوالی ارزښت  $2$  لري.

$$\Rightarrow f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0^2 = 9 \Rightarrow \underline{\underline{x_{01/2} = \pm 3}}$$

تابع  $f(x)$  له دې سره د  $x_{1/2} = \pm 3$  په ځای کې چکوالی ۲ لري.

ب -  $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$  یو پارابول او له دې امله محور سیمتریک دی.

د  $f'(1,25) = -0,25$  پسې لاس ته راځي:  $f'(-1,25x) = -0,25$

$f'(x)$  د  $x_{1/2} = \pm 1,5$  په ځای کې  $-0,25$  جگپښه لري.

پ -

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{3}) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}; f(-\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{P\left(\sqrt{3} \mid -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right); Q\left(-\sqrt{3} \mid \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}$$

تانجنټونه کرښې دي، چې د  $x$  محور سره غبرګې ځغلي:

$$\underline{\underline{t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}; t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}}}$$

ت -

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

د تانجنټ مساوات په سرچینه کې:  $x_0 = 0$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) = f'(0) = -1 \quad f(x_0) = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow t(x) = -1(x - 0) + 0 = \underline{\underline{-x}}$$

ت -

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

د تانجنت مساوات په  $P(u; f(u))$  تکی کی.

$$t(x) = f'(u)(x - u) + f(u)$$

$$f'(u) = \frac{1}{3}u^2 - 1 \quad f(u) = \frac{1}{9}u^3 - u$$

$$\begin{aligned} t(x) &= \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)(x - u) + \frac{1}{9}u^3 - u = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - u\left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right) + \frac{1}{9}u^3 - u \\ &= \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{1}{3}u^3 + u + \frac{1}{9}u^3 - u = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{3}{9}u^3 + \frac{1}{9}u^3 = \\ &= \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3 \end{aligned}$$

ت - کرښه، چې  $f(x)$  په  $P_x(3 | 0)$  کی غوڅوي، په دې تکی کی عمود ده.

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1 \quad P_x(3 | 0) \Rightarrow x_0 = 3$$

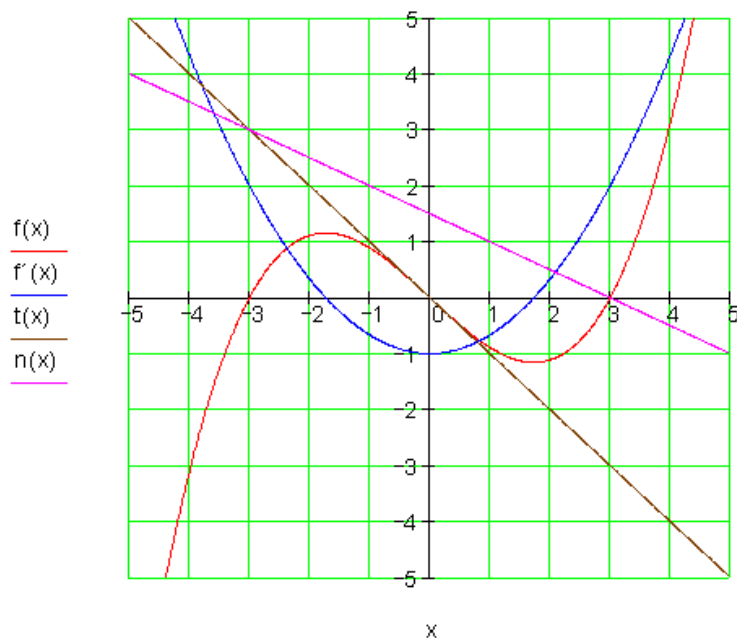
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) = f'(3) = \frac{1}{3} \cdot 9 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f(x_0) = f(3) = \frac{1}{9} \cdot 27 - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$n(x) = -\frac{1}{2}(x - 3) + 0 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}}$$

ت - گرافونه:



دریم: لف- د  $f(x)$  گراف د  $y$  محور سره سیومتري دی، ځکه چې فقط جوړه یا جفت اکسیوننت رامنځ ته کیري.

ب -

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow x \left( \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{12}$$

$x_1 = 0$  او  $x_{2,3} = \pm\sqrt{12}$  ځایونه دي، د پروت یا افقي محور سره.

$$f''(x_1) = f''(0) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_{2/3}) = f''(\pm\sqrt{12}) = \frac{3}{8} \cdot 12 - \frac{3}{2} = \frac{36}{8} - \frac{3}{2} = 2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_{2/3} = \pm\sqrt{12}$$

$$f(x_1) = f(0) = \frac{9}{2} \quad f(x_{2/3}) = \frac{1}{32} \cdot 144 - \frac{3}{4} \cdot 12 + \frac{9}{2} = 0$$

$$P_{\max}(0 | 4,5) \quad P_{\min 1}(-\sqrt{12} \approx -3,46 | 0) \quad P_{\min 2}(\sqrt{12} \approx 3,46 | 0)$$

- پ

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{4}x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

ممکنه اوړونټکي یا د انعطاف ټکي دي.

$$f'''(x_{1/2}) = f'''(\pm 2) = \frac{3}{4} \cdot (\pm 2) \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاسته راځي، چې د انعطاف ټکي په  $x_{1/2} = \pm 2$  کې.

$$f(x_{1/2}) = f(\pm 2) = \frac{1}{32} \cdot 16 - \frac{3}{4} \cdot 4 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} = 2$$

$$P_{w1}(-2 | 2) \quad P_{w2}(2 | 2)$$

د انعطاف ټکي دي

د انعطاف تانجنت

$$x_0 = -2 \Rightarrow f(x_0) = f(-2) = 2 \quad f'(x_0) = f'(-2) = -\frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 2$$

$$t_1(x) = 2(x+2) + 2 = \underline{\underline{2x+6}}$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow f(x_0) = f(2) = 2 \quad f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{8} \cdot 8 - \frac{3}{2} \cdot 2 = -2$$

$$t_2(x) = -2(x-2) + 2 = \underline{\underline{-2x+6}}$$



ت -

$$f(0) = \frac{9}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_y \left( 0 \mid \frac{9}{2} \right)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} = 0$$

(بی یا دوه مربع مساوات)

$$x^2 = z \Rightarrow \frac{1}{32}z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{9}{2} = 0 \mid \cdot 32 \Leftrightarrow z^2 - 24z + 144 = 0$$

$$p = -24 \quad q = 144 \quad \Rightarrow D = 144 - 144 = 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 12 \pm 0 = 12$$

$$z_1 = x^2 \Leftrightarrow 12 = x^2 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{12} \quad z_2 = x^2 \Leftrightarrow 12 = x^2 \Leftrightarrow x_{3/4} = \pm\sqrt{12}$$

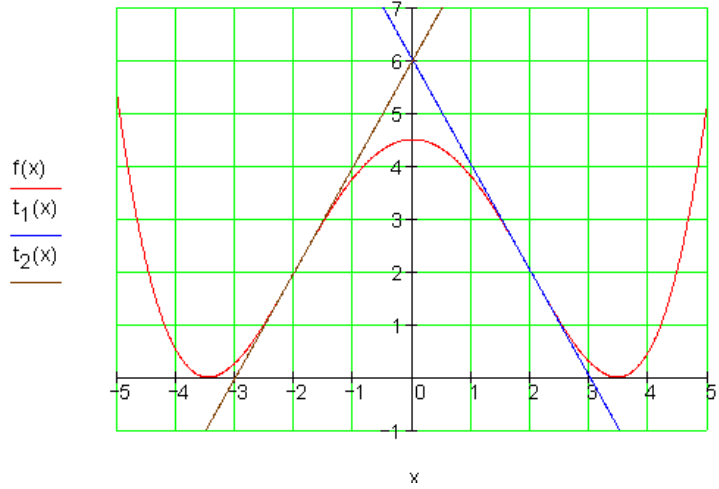
$$\underline{\underline{P_{x^{1/3}}(\sqrt{12} \approx 3,46 \mid 0)}} \quad \underline{\underline{P_{x^{1/3}}(-\sqrt{12} \approx -3,46 \mid 0)}}$$

ټ - تابع ارزښتونه د جشمیري سره شمیرل شوي.

د سیومتری دلایلو په بنسټ بسیا کوي، چې فقط د  $x$  مثبت ارزښت لپاره د تابع ارزښتونه وشمیرل شي.

$x$	-5	-4	$-\sqrt{12} \approx -3,46$	-3	-2	-1	0
$f(x)$	5,28	0,5	0	0,28	2	3,78	4,5
$x$	1	2	3	$\sqrt{12} \approx 3,46$	4	5	
$f(x)$	3,78	2	0,28	0	0,5	5,28	

ټ-ګرافونه:



ج - په  $[-\sqrt{12}; 0]$  کې کله یو غریز جگېدونکی په  $[-\infty; -\sqrt{12}]$  کې کره یو غریز ټیټېدونکی

په  $[\sqrt{12}; \infty]$  کې کله یو غریز جگېدونکی په  $[0; \sqrt{12}]$  کې کره یو غریز ټیټېدونکی د یو غریزوالي حالت له گراف څخه لوستل شوی.

تغیرات په افراطي ټکو کې رامنځ ته کېږي.

ح - په  $[-\infty; -2]$  کې کینه انحنایا کږوالی په  $[-2; 2]$  کې بڼی انحنایا

په  $[2; \infty]$  کې کینه انحنایا کږوالی

د انحنایا کږوالی حالت له گراف څخه ولوستل شو.

تغییر په اوږون ټکو یا د انعطاف ټکو کې صورت نیسي

خ-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left[ \frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x^4}}_{\rightarrow 0} \right] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left[ \frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x^4}}_{\rightarrow 0} \right] = \infty$$

څلورم: د تابع مساوات شمیرنه :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow f(-1) = 7 \Leftrightarrow -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7$$

$$P_2(-2|6) \Rightarrow f(-2) = 6 \Leftrightarrow -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_3(3|1) \Rightarrow f(3) = 1 \Leftrightarrow 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1$$

$$P_4(-3|2) \Rightarrow f(-3) = 2 \Leftrightarrow -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = 2$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	-1	1	-1	7	
1	-2	4	-8	6	II - I
1	3	9	27	1	III - I
1	-3	9	-27	2	IV - I
1	-1	1	-1	7	
0	-1	3	-7	-1	
0	4	8	28	-6	III + 4 · II
0	-2	8	-26	-9	IV - 2 · II
1	-1	1	-1	7	
0	-1	3	-7	-1	
0	0	20	0	-10	
0	0	2	-12	-7	

له اخرنئ دوه لیکو لرو:

$$20a_2 = -10 \mid 20 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2a_2 - 12a_3 = -7 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} - 12a_3 = -7 \mid +1$$

$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \mid (-12) \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{2}$$

$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1 \Leftrightarrow -a_1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 7 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1 \Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \mid +5$$

$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow a_1 = -4$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7 \Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \mid -3 \Leftrightarrow a_0 = 4$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

افراطي تکی:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f''(x) = 3x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - x - 4 = 0 \mid \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow p = -\frac{2}{3}; q = -\frac{8}{3}$$

$$D = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{8}{3} = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

$$f''(x_1) = f''(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 1 = -4 - 1 = -5 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -\frac{4}{3}$$

$$f(x_1) = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 4 = 4 - 2 - 8 + 4 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{\text{Min}}(2 \mid -2)}}$$

$$f(x_2) = f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{64}{27} - \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{9} + 4 \cdot \frac{4}{3} + 4 = -\frac{64}{54} - \frac{16}{18} + \frac{16}{3} + 4$$

$$= -\frac{64}{54} - \frac{48}{54} + \frac{288}{54} + \frac{216}{54} = \frac{392}{54} = \frac{196}{27} \Rightarrow P_{\text{Max}}\left(-\frac{4}{3} \approx 1,33 \mid \frac{196}{27} \approx 7,26\right)$$

اورونتیکی یا د انعطاف تکی

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f''(x) = 3x - 1 \Rightarrow f'''(x) = 3$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \mid +1 \Leftrightarrow 3x = 1 \mid :3 \Leftrightarrow x_w = \frac{1}{3}$$

ممکنه انعطافخایونه

$$f'''(x_w) = f'''\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \neq 0 \Rightarrow x_w = \frac{1}{3}$$

یو انعطاف - یا اورونتیکی دی.

$$f(x_w) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{27} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 = \frac{1}{54} - \frac{1}{18} - \frac{4}{3} + 4$$

$$= \frac{1}{54} - \frac{3}{54} - \frac{72}{54} + \frac{216}{54} = \frac{142}{54} = \frac{71}{27} \Rightarrow P_w\left(\frac{1}{3} \approx 0,33 \mid \frac{71}{27} \approx 2,63\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad f(0) = 4 \Rightarrow P_y(0 \mid 4)$$

محور غوختکی:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 = 0$$

لومری صفرخای د ازمایننت له لاری. د هورنر-شیما:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -4 & 4 \\ x=1 \downarrow & \frac{1}{2} & 0 & -4 \\ \hline & \frac{1}{2} & 0 & -4 \\ & & 0 & 0 \end{array} \quad f(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

پاتي يا باقي پولینومونه:

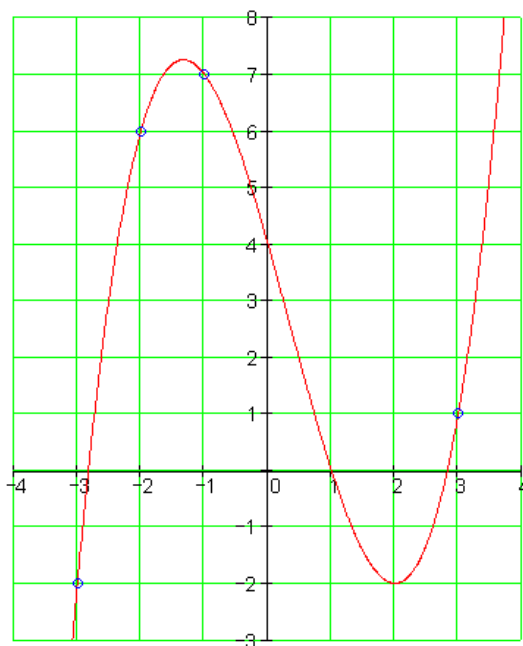
$$\frac{1}{2}x^2 - 4 = 0 \mid +4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 4 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{8}$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(1 \mid 0)}} \quad \underline{\underline{P_{x2/3}(\pm\sqrt{8} \approx 2,83 \mid 0)}}$$

ارزینتجدول:

x	-3	-2,83	-2	-1,33	-1	0	0,33	1	2	2,83	3
f(x)	-2	0	6	7,26	7	4	2,63	0	-2	0	1

گراف:



پوښتنې

### مشتقشمیرنه د ټولګي کار ته چمتووالی III

اول -

د دریمې درجې یو تام یا ټول ریښتونی یا راشنل عدد ورکړ شوی:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

الف - مشتقتابع  $f'(x)$  معلومه کړی یا وټاکي

ب - د  $f'(x)$  تابع بیا مشتق ونیسی، چې له هغې  $f''(x)$  تابع منځ ته راشي

پ - د ارزښتجدول لاندې ارزښتونه وشمېری.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	-7	-0,38		3,88	3	1,13		-2,63	-3	-1,38	3
f'(x)	17	9,75	4	-0,25		-4,25	-4	-2,25		5,75	12
f''(x)	-16	-13	-10	-7		-1	2		8	11	14

ت - د مخه ورکړ شوي وضعیه قیمتسیستم کې د  $f(x)$ ,  $f'(x)$  او  $f''(x)$  ګرافونه رسم کړی.

دویم - لاندې ریښتوني توابع ورکړ شوي دي:

$$\text{دوه الف - } f(x) = 2x^3 - 6x \quad \text{دوه ب - } f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$$

$$\text{دوه پ - } f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} \quad \text{دوه ت - } f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$$

الف - الف - د سیمټري حالت په هکله ویناوې وکړی

ب- پ - ټکي د پراته تانجنت سره وشمېری

پ- پ - د محومر غوڅټکي وټاکي

ت - یو څو تابع ارزښتونه وشمیری او گراف یې وباسی

دریم - یو تام ریښتونی تابع له لاندې څلور ټکو تیریری:

درې الف -  $P_1(-1|7); P_2(-2|6); P_3(3|1); P_4(-3|-2)$

درې ب  $P_1(1|6); P_2(3|-4); P_3\left(-\frac{1}{2}|\frac{45}{8}\right); P_4\left(-\frac{3}{2}|-\frac{77}{8}\right)$

الف - د تابع مساوات وشمیری ب - د سیمتری حالت باندې یوه وینا وکړی

پ - د پراته یا افقی تانجنت سره ټکي وشمیری

ت - محور غوڅټکي وټاکي یا معلوم کړی.

یو څو تابع ارزښتونه وشمیری او گراف یې رسم کړی.

څلورم - د فوټبال لوبه کې د ازاده توپ وهلو د  $f(x)$  تابع په نږدې توګه د توپ د الوتنې منحنی یا ګره ده.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2; x > 0$$

الف - توپ کوم ماکسیمال جګوالی غوره کوي او د شوټټکي څخه څومره لرې دی؟

ب - توپ د شوټټکي څخه څومره لرې بېرته په ځمکه لویږي؟

پ - نه متره لرې د لوبډلي مقاومت دیوال دی، هغه دوه متره جګ دی. ایا توپ له دې اوري؟

ت - توپ د گلکرنې څخه په متره جګوالی الوزی. ازاده شوټ له کوم واټن څخه وهل شوی دی؟

پنځم - د لاندې توابعو لپاره کمښتویش وشمیری



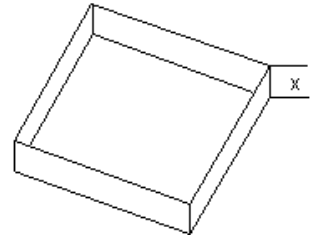
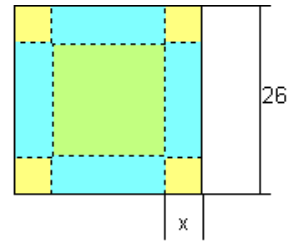
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

او د یوه رسم په کتنه یې ټولیزه معنا روښانه کړی.

$$\text{الف - } f(x) = x^3 \text{ - ب - } f(x) = \frac{1}{3}x^2$$

شپږم - د یوه مربع کارتون څخه یو کوچنی یا مکعب بې له پوښ جوړیږي، چې د اړخونو یا ضلعو اوږدوالی یې 26 دی او جگوالی یې  $x$  دی، جوړیږي.

الف - د تابع ترم یې وټاکي، چې حجم  $V$  د  $x$  په واکوالي یا تابعیت کې ښایي.



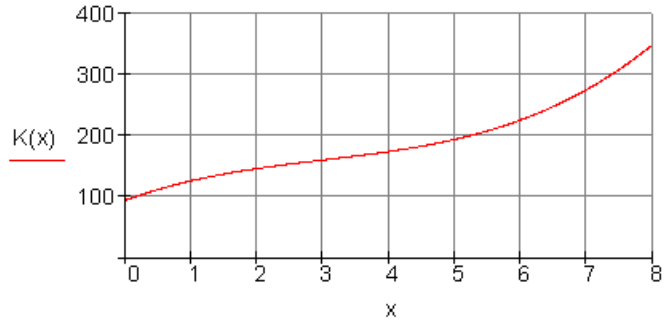
ب - کراف یې وکارئ او تقریبي ماکسیمال حجم یې معلوم کړئ

اوم - د یوه رغتون د د لگښتتابع  $K(x)$  د ناروغانو گڼون یا تعداد  $x$  او ټولو لگښتونو ترمنځ انځوروي.

$x = 1$  دې د 100 ناروغانو په معنا،  $y = 1$  د د روحي د زرو یورو / € 1000

په معنا وي. Tag

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



الف - لگبنتتابع په خپله کتابچه کې ولیکی

ب - د لگبنت تابع مشتق د مشتقلگبنت یا هم پوله لگبنت بولو. دا لگبنت زیاتېده بنایي، چې ناروغانو تعداد په واک کې ده. (د  $K(x)$  چگېدنه).  $K'(x)$  وټاکي او په کواوردیناتسیستم کې یې گراف رسم کړی.

پ - د ناروغانو کوم تعداد سره د لگبنت زیاتېدل خورا کم دي؟  
دا ارزښت وشمېری.

حلونه

مفصل حلونه

د ټولګي کار لپاره مشتقشمیرنه III

لومړی:

$$\text{الف - } f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

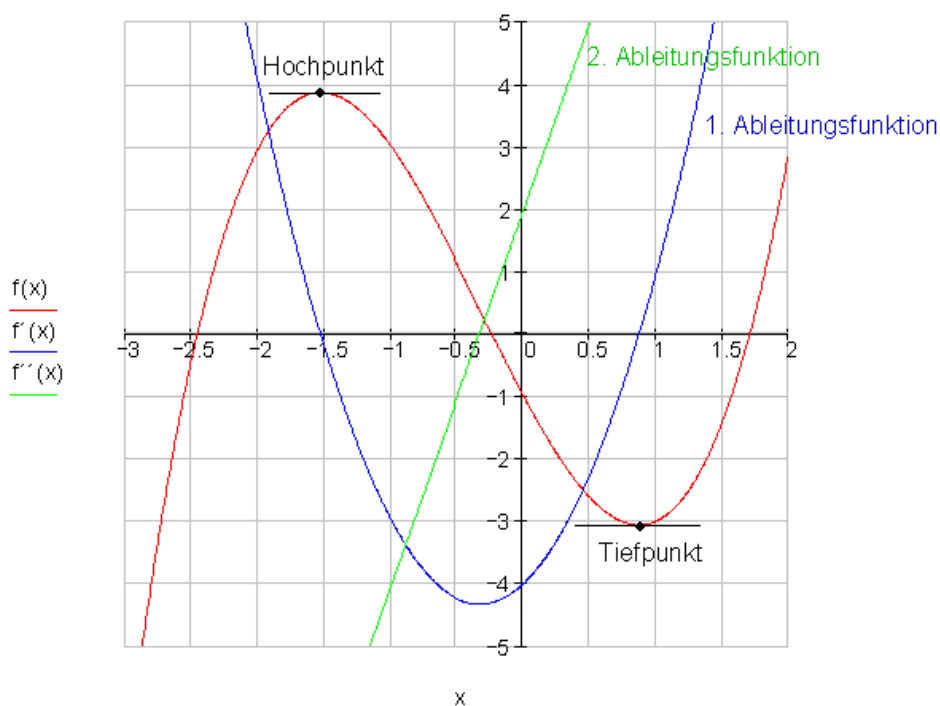
$$\text{ب - } f''(x) = 6x + 2$$

پ - ارزښتچډول

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	-7	-0,38	3	3,88	3	1,13	-1	-2,63	-3	-1,38	3
f'(x)	17	9,75	4	-0,25	-3	-4,25	-4	-2,25	1	5,75	12
f''(x)	-16	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14

ت گراف:

$$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \quad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4 \quad f''(x) := 6x + 2$$



د پورته پښتو له کین: جگنکی، دویم مشتق، لومړی مشتق، نیټکی

ت-

$f'(x) = 0$	جگتکی (نسبی ماکس) پروت تانجنت
$f''(x) < 0$	دویم مشتق له صفر کوچنی
$f'(x) = 0$	تیتیکتی (نسبی مین) پروت تانجنت
$f''(x) < 0$	دویم مشتق له صفر لوی.

دویم. یو: الف-

$$f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow$$

تکی سیمتری، ځکه چې فقط ناجوره (طاق) اکسپوننت لرو.

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{صدق کوي:}$$

$$f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6 \quad \text{ب -}$$

د پروت محور سره تکی.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \mid +6$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 = 6 \mid :6$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1$$

د  $x_1 = 1$  او  $x_2 = -1$  په ځایونو کې افقی تانجنتونه شتون لري.

د  $y$  وضعیه قیمت شمیرنه

$$f(x_1) = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -4 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(1 \mid -4)}}$$

$$f(x_2) = f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-1 \mid 4)}}$$

پ - د  $f(x) = 2x^3 - 6x$  محور غوڅتکي

$$P_y: f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|0)}}$$

صفر ځایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0$$

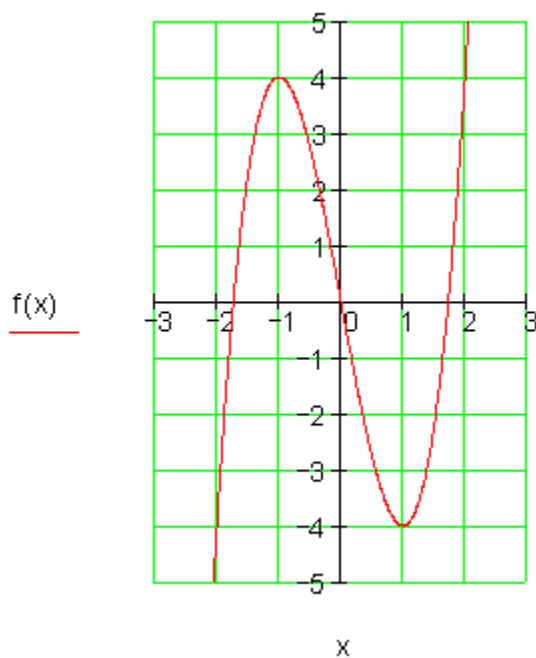
$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$2x^2 - 6 = 0 | +6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 6 | :2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(0|0); P_{x2}(\sqrt{3}|0); P_{x3}(-\sqrt{3}|0)}}$$



$$f(x) = 2x^3 - 6x$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = 4$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -f(2) = -4$$

د سیومتری ټکي له امله

x	-2	-1,73	-1	0	1	1,73	2
f(x)	-4	0	4	0	-4	0	4

دویم. دوه:

الف -

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow$$

سیومتری مخ ته نه لرو، ځکه چې نه فقط جوړه (جفت) یا فقط ناجوړه (طاق) اکسیوننتونه لرو.

ب -

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 12x$$

ټکي له پراته تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(6x + 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$6x + 12 = 0 \mid -12$$

$$\Leftrightarrow 6x = -12 \mid :6$$

$$\Leftrightarrow x_2 = -2$$

د  $x_1 = 0$  und  $x_2 = -2$  او په ځایونو کې پراته تانجنتونه شتون لري.

۳۰۱

۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

د  $y$  وضعیه قیمتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(0) = -4 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0|-4)}}$$

$$f(x_2) = f(-2) = 2(-2)^3 + 6(-2)^2 - 4 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-2|4)}}$$

پ -

د  $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$  محور غوختکی یا د تقاطع تکی.

$$P_y : f(0) = -4 \Rightarrow P_y(0|-4)$$

صفرخایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 - 4 = 0$$

یو صفرخاس د ازماښت له لارې پیداوو.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 4 = 4$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 4 = 0$$

د  $x_1 = -1$  سره صفرخای.

د هورنر شیمه له لارې پولینوم راکښته یا کمه ونه

$$\begin{array}{r} 2 \quad 6 \quad 0 \quad -4 \\ x = -1 \downarrow \quad \underline{-2} \quad \underline{-4} \quad 4 \\ 2 \quad 4 \quad -4 \quad 0 \end{array}$$

یا کم شوی پولینوم:

$$2x^2 + 4x - 4 = 0 | : 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$p = 2; q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{3}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -1 + \sqrt{3} \\ x_3 = -1 - \sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$\underline{P_{x_1}(-1|0); P_{x_2}(-1 + \sqrt{3}|0); P_{x_3}(-1 - \sqrt{3}|0)}$$

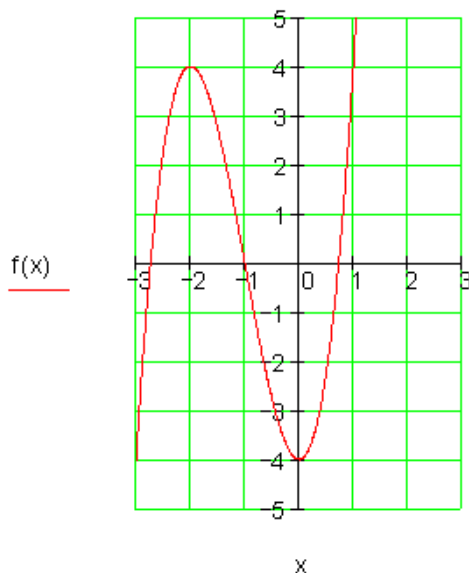
$$\text{bzw. } P_{x_1}(-1|0); P_{x_2}(0,73|0); P_{x_3}(-2,73|0)$$

- ت

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$$

$$x = -3 \Rightarrow f(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 4 = -4$$

x	-3	-2,73	-2	-1	0	0,73	1
f(x)	-4	0	4	0	-4	0	4





دویم. دري:

الف -

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} \Rightarrow$$

محورسیومتری، حکه چي حوره یا جفت اکسپوننت مخ ته لرو.

$$f(-x) = f(x) \text{ صدق کوي:}$$

ب -

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{10}x^3 - \frac{18}{5}x$$

د پراته یا افقي تانجنت سره غوڅتکي.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4}{10}x^3 - \frac{18}{5}x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \left( \frac{4}{10}x^2 - \frac{18}{5} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ &\frac{4}{10}x^2 - \frac{18}{5} = 0 \mid + \frac{18}{5} \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{10}x^2 = \frac{18}{5} \mid : \frac{4}{10} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 3 \end{aligned}$$

په  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 3$  und  $x_3 = -3$  ځایونو کې پراته تانجنتونه شتون لري

د  $y$  وضعیه قیمتونو کو اور دیناتونه شمیرل.

$$f(x_1) = f(0) = \frac{81}{10} \Rightarrow \underline{P_1 \left( 0 \mid \frac{81}{10} \right)} \text{ bzw. } P_1(0 \mid 8,1)$$

$$f(x_2) = f(3) = \frac{1}{10} \cdot 3^4 - \frac{9}{5} \cdot 3^2 + \frac{81}{10} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(3|0)}}$$

$$\underline{\underline{P_3(-3|0)}} \quad f(x_2) = f(-3) = f(3) = 0 \quad \text{د محور سيومتری له امله لاس ته راځي}$$

پ -

$$\text{د محور غوڅنګي يا د محور د تقاطع ټکي} \quad f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$$

$$P_y: f(0) = \frac{81}{10} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{81}{10}\right)}}$$

همداسې  $P_y(0|8,1)$

صفر ځايونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0 \quad \text{Substitution: } x^2 = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0 \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18; q = 81 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3 \\ z_2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 3 \end{array} \right.$$

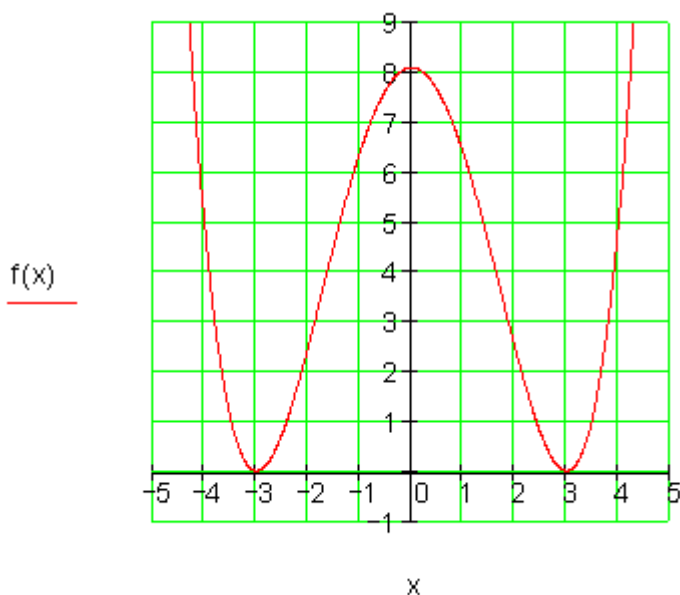
$$\text{دواړه ډبل صفر ځايونه دي} \quad \underline{\underline{P_{x1/3}(3|0)}; P_{x2/4}(-3|0)}}$$

دا په دې معنا، چې گراف په دې ځای کې د  $x$  محور لمسوي.

داسې لمس ټکي يا مماسونه تل هم ټکي دي د پراته تانجنت سره.

### ۳۰۵ – دفرنخچال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

ت – څیره چي وروسته وی بنه به وی، خو څه وکړو. مخ باید برابر شي.



$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{10} \cdot 1^4 - \frac{9}{5} \cdot 1^2 + \frac{81}{10} = 6,4$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = f(1) = 6,4 \quad \text{د محور سیمتری له امله}$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{10} \cdot 2^4 - \frac{9}{5} \cdot 2^2 + \frac{81}{10} = 2,5$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = f(2) = 2,5 \quad \text{د محور سیمتری له امله}$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{10} \cdot 4^4 - \frac{9}{5} \cdot 4^2 + \frac{81}{10} = 4,9$$

$$x = -4 \Rightarrow f(-4) = f(4) = 4,9 \quad \text{د محور سیمتری له امله}$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	4,9	0	2,5	6,4	8,1	6,4	2,5	0	4,9

دویم. خلور:

الف -

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 \Rightarrow$$

یعنی له دې لرو چې: سیومتری مو مخ ته نه ده پرته،

خکه چې نه فقط جفت (جوړه) او نه فقط طاق (ناجوړه) اکسپوننتونه مخ ته لرو.

ب -

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2$$

تکي د پراته تانجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left( \frac{4}{5}x - \frac{12}{5} \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\frac{4}{5}x - \frac{12}{5} = 0 \mid + \frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x = \frac{12}{5} \mid \cdot \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow x_3 = 3$$

د  $x_{1/2} = 0$  او  $x_3 = 3$  ځایونو کې پروت تانجنت شته.

د y کو او ردیناتو شمېرل.

۳۰۷

۳ - دفرخیال شمیرنه (مشتق یا رایبلیدنه)

$$f(x_1) = f(x_2) = f(0) = 0 \quad \Rightarrow \underline{P_{1/2}(0|0)}$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{1}{5} \cdot 3^4 - \frac{4}{5} \cdot 3^3 = -5,4 \Rightarrow \underline{P_3(3|-5,4)}$$

پ -

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$$

محور غوڅتکي د

$$P_y : f(0) = 0 \Rightarrow \underline{P_y(0|0)}$$

صفر خایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 \left( \frac{1}{5}x - \frac{4}{5} \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0$$

$$\frac{1}{5}x - \frac{4}{5} = 0 \mid + \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}x = \frac{4}{5} \mid \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow x_4 = 4$$

$$\underline{P_{x_{1/2/3}}(0|0) ; P_{x_4}(4|0)}$$

ت -

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{5} \cdot 1^4 - \frac{4}{5} \cdot 1^3 = -0,6$$

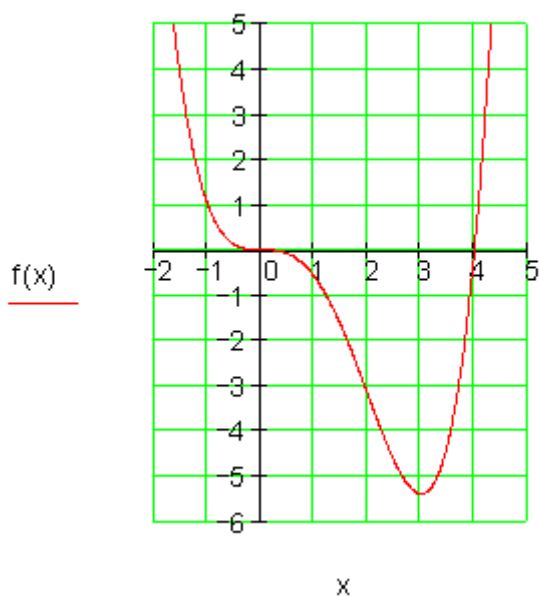
$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{5} \cdot (-1)^4 - \frac{4}{5} \cdot (-1)^3 = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{5} \cdot 2^4 - \frac{4}{5} \cdot 2^3 = -3,2$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{5} \cdot (-2)^4 - \frac{4}{5} \cdot (-2)^3 = 9,6$$

$$x = 5 \Rightarrow f(5) = \frac{1}{5} \cdot 5^4 - \frac{4}{5} \cdot 5^3 = 25$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	9,6	1	0	-0,6	-3,2	-5,4	0	25



یادونه : د  $x = 0$  په خای کې د  $f(x)$  گراف پروت تانجنت لري، مگر هلته نه چگتکی پروت دی او نه تیټ ټکی.

دا په دې معنا، چې د پراته تانجنت سره خایونه حتمي نه ده چې افراطي خایونه وي. مگر افراطي ټکی پروت تانجنت لري.

دریم. یو:

الف-

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow f(-1) = -1 \cdot a_3 + 1 \cdot a_2 - 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = 7$$

$$P_2(-2|6) \Rightarrow f(-2) = -8 \cdot a_3 + 4 \cdot a_2 - 2 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = 6$$

$$P_3(3|1) \Rightarrow f(3) = 27 \cdot a_3 + 9 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = 1$$

$$P_4(-3|-2) \Rightarrow f(-3) = -27 \cdot a_3 + 9 \cdot a_2 - 3 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = -2$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	-1	1	-1	7	
1	-2	4	-8	6	II - I
1	3	9	27	1	III - I
1	3	9	-27	-2	IV - I
1	-1	1	-1	7	
0	-1	3	-7	-1	I · (-1)
0	4	8	28	-6	I : 4
0	-2	8	-26	-9	I : (-2)
1	-1	1	-1	7	
0	1	-3	7	1	
0	1	2	7	-1,5	III - II
0	1	-4	13	4,5	IV - II
1	-1	1	-1	7	
0	1	-3	7	1	
0	0	5	0	-2,5	
0	0	-1	6	3,5	

$$5a_2 = -2,5 | : 5$$

$$\Leftrightarrow a_2 = -0,5 = -\frac{1}{2}$$

$$-a_2 + 6a_3 = 3,5$$

$$\Leftrightarrow 0,5 + 6a_3 = 3,5 | -0,5$$

$$\Leftrightarrow 6a_3 = 3 | : 6$$

$$\Leftrightarrow a_3 = 0,5 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 - 3a_2 + 7a_3 = 1$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 1,5 + 3,5 = 1$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 1 - 1,5 - 3,5 = -4$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - 0,5 - 0,5 = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 7 - 4 + 0,5 + 0,5 = 4$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

ب -

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$$

سیومتری مخ ته نه لرو

خکه چي نه فقط جوړه او نه فقط ناچوړه یعنی طاق آکسپوننت شتون لري

پ -

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4$$

نگي د پراته تانجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - x - 4 = 0 \mid : \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0$$

$$p = -\frac{2}{3}; q = -\frac{8}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{24}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

د  $x_1 = 2$  او  $x_2 = -4/3$  په خای کی پراته تانجنتونه شتون لري

د  $\gamma$  کوآوردیناتونه و شمیری

$$x_1) = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = -2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(2 | -2)}}$$

$$x_2) = f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^3 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 4 = \frac{196}{27} \Rightarrow$$



$$\underline{\underline{P_2 \left( -\frac{4}{3} \approx -1,33 \mid \frac{196}{27} \approx 7,26 \right)}}$$

ت-

د محور غوڅتکی یا نقطه تقاطع  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$

$$P_y : f(0) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 4)}}$$

صفرخای وه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = 1 \quad \begin{array}{cccc|l} 1/2 & -1/2 & -4 & 4 & \\ \downarrow & & & & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -4 & \\ 1/2 & 0 & -4 & 0 & \end{array} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ ist Nullstelle}$$

پاتي یا باقي پولینوم:

$$\frac{1}{2}x^2 - 4 = 0 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 4 \mid \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{8}$$

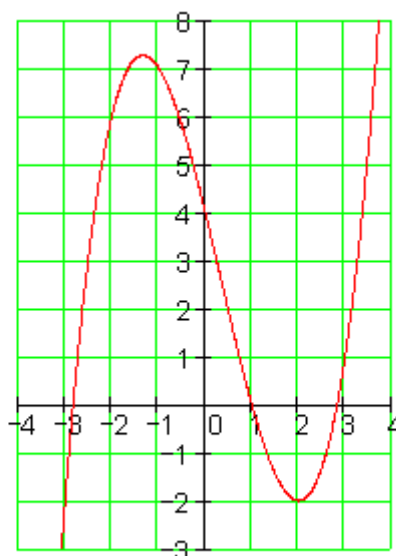
$$\underline{\underline{P_{x_1}(1 \mid 0) ; P_{x_2}(\sqrt{8} \approx 2,83 \mid 0) ; P_{x_3}(-\sqrt{8} \approx -2,83 \mid 0)}}$$

ت-

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

x	-3	-2,83	-2	-1,33	-1	0	1	2	2,83	3
f(x)	-2	0	6	7,26	7	4	0	-2	0	1

f(x)



x

دریم. دوه:

الف-

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \Rightarrow f(1) = 1 \cdot a_3 + 1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \Rightarrow f(3) = 27 \cdot a_3 + 9 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2} \mid \frac{45}{8}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} \cdot a_3 + \frac{1}{4} \cdot a_2 - \frac{1}{2} \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_3\left(-\frac{3}{2} \mid -\frac{77}{8}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} \cdot a_3 + \frac{9}{4} \cdot a_2 - \frac{3}{2} \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = -\frac{77}{8}$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	1	1	1	6	·8
1	3	9	27	-4	·8
1	-1/2	1/4	-1/8	45/8	·8
1	-3/2	9/4	-27/8	-77/8	·8
8	8	8	8	48	
8	24	72	216	-32	II - I
8	-4	2	-1	45	III - I
8	-12	18	-27	-77	IV - I
8	8	8	8	48	:8
0	16	64	208	-80	:4
0	-12	-6	-9	-3	:3
0	-20	10	-35	-125	:5
1	1	1	1	6	
0	4	16	52	-20	:4
0	-4	-2	-3	-1	III + II
0	-4	2	-7	-25	IV + II
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	-5	
0	0	14	49	-21	:7
0	0	18	45	-45	:9
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	-5	
0	0	2	7	-3	
0	0	2	5	-5	IV - III
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	-5	
0	0	2	7	-3	
0	0	0	-2	-2	

$$-2a_3 = -2 | : (-2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 7a_3 = -3$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 | -7$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 | : 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$$

$$a_1 + 4a_2 + 13a_3 = -5$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 20 + 13 = -5 | +7$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6 | +2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

ب -

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow f$$

سیومتری مخ ته نه لرو، حُکمه چي نه فقط جفت او نه فقط طاق اکسپوننتونه مخ ته لرو.

پ -

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$$

تکي د افقي تانجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 2 = 0 | : 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$p = -\frac{10}{3}; q = \frac{2}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{9} - \frac{6}{9} = \frac{19}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{19}{9}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 3,12 \\ x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 0,214 \end{array} \right.$$

په  $x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}$  او  $x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}$  ځایونو کې پراته تانجنتونه شته.

د  $y$  کواردیناتو شمیرنه

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(3,12) \approx -4,06 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(3,12 | -4,06)}}$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(0,214) \approx 8,21 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_2(0,214 | 8,21)}}$$

ت -

د محور غوڅتکي  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ 

$$P_y : f(0) = 8 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|8)}}$$

صفرخایونه

لانی المانی: لومری صفرخای

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{cccc} 1 & -5 & 2 & 8 \\ x=1 & \downarrow & \underline{1} & \underline{-4} & \underline{-2} \\ \hline & 1 & -4 & -2 & 6 \end{array} & \Rightarrow x_1 = -1 \text{ ist Nullstelle} \\ \begin{array}{cccc} 1 & -5 & 2 & 8 \\ x=-1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{6} & \underline{-8} \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array} & \end{array}$$

پاقي یا پاتي پولینومونه:  $x^2 - 6x + 8 = 0$ 

$$p = -6; q = 8 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

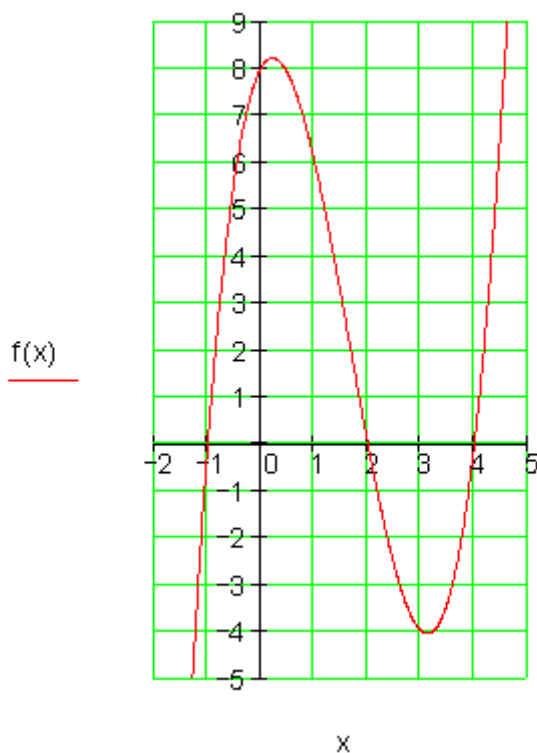
$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = 3 + 1 = 4 \\ x_3 = 3 - 1 = 2 \end{array} \right.$$

$$\underline{\underline{P_{x_1}(-1|0); P_{x_2}(4|0); P_{x_3}(2|0)}}$$

ت -

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,21	1	2	3	3,12	4
f(x)	-9,6	0	5,6	8	8,21	6	0	-4	-4,06	0



څلورم: الف -

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x$$

د توپ ماكسيمال جگوالی د الوتني لار جگتكي دی، له دې امله یو ټكي دی، د پراته تانجنت سره.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \left( -\frac{1}{96}x + \frac{1}{8} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ &\quad -\frac{1}{96}x + \frac{1}{8} = 0 \mid + \frac{1}{96}x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{96}x \mid \cdot 96$$

$$\Leftrightarrow 12 = x \Rightarrow x_2 = 12$$

$$f(12) = -\frac{1}{288} \cdot 12^3 + \frac{1}{16} \cdot 12^2 = 3 \Rightarrow P(12|3)$$

جگتکی دی.

توپ یو د درې متره ماکسیمال جگوالی ته رسیري. او له دې امله د شوټټکي یا وهلتکي څخه 12 متره لرې دی.

ب-

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

د صفرځایونه غواړو پیدا کړو.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left( -\frac{1}{288}x + \frac{1}{16} \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16} = 0 \mid + \frac{1}{288}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{288}x \mid \cdot 288$$

$$\Leftrightarrow \frac{288}{16} = x \Rightarrow x_3 = 18$$

توپ د وهلتکي څخه په 18 متره لرېوالي بیرته ځمکې ته رالویږي

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \quad \text{پ-}$$

د شوتېکي څخه په نهه متره لري د توپ جگوالی دی پیدا شي.

$$f(9) = -\frac{1}{288} \cdot 9^3 + \frac{1}{16} \cdot 9^2 \approx 2,53$$

توپ د مقاومت دیوال څخه چې دوه متره لري دی په 2,53 m جگوالی پورته لوزي.

ت -

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

غواړو ځای پیدا کړو چې هلته توپ الوتنه دوه متره جگوالی لري.

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 2$$

د آزمائنت له لاري حل:

$$f(15) \approx 2,344$$

$$f(15,5) \approx 2,086$$

$$f(15,6) \approx 2,028$$

$$\boxed{f(15,65) \approx 1,998}$$

ازاد شوتې یا ازاد وهل له ۱,۹۹۸

پنځم: الف -

$$f(x) = x^3 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$f(x_0) = x_0^3$$



$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{3x_0^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{3x_0 \cdot \Delta x}_{\rightarrow 0} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\rightarrow 0} = 3x_0^2 \end{aligned}$$

- ب

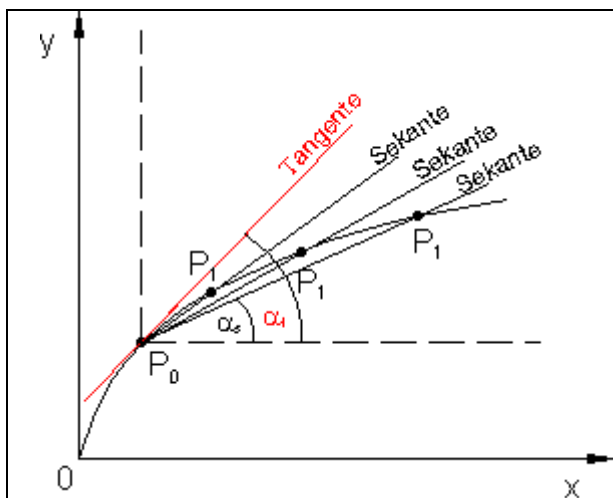
$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{3}(x_0 + \Delta x)^2 = \frac{1}{3}(x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)$$

$$f(x_0) = \frac{1}{3}x_0^2$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - \frac{1}{3}x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left( 2x_0 + \frac{\Delta x}{\rightarrow 0} \right) = \frac{2}{3}x_0$$



که  $P_0$  و  $P_1$  ته ورنزدي کينول شي، نو د نوي سيکانټ جگوالي به په دې ځاي کې د تابع جگوالی د  $P_0$  په ټکي کې وي، چې بايد پيدا شي. که دا کار په کلکه مخ ته يووړل شي او ټکی  $P_1$  تل زیات و  $P_0$  ټکي ته نږدې شي، نو د پولې ځاي په څېر

یوه کرښه لاس ته راځي، دا د تابعگراف فقط په ټکي  $P_0$  کې لمسوي. په ټکي  $P_0$  کې د تابعگراف تانجنټ د تانجنټ جگوالی په دې ټکي  $P_0$  کې ټیک د تابع جگوالی په  $P_0$  کې شپږم:

الف - حجم یا ډکی :  $V = l.b.h$

$$\left. \begin{array}{l} l = 26 - 2x \\ b = 26 - 2x \\ h = x \end{array} \right| \Rightarrow V(x) = (26 - 2x)(26 - 2x)x = 4x^3 - 104x^2 + 676x$$

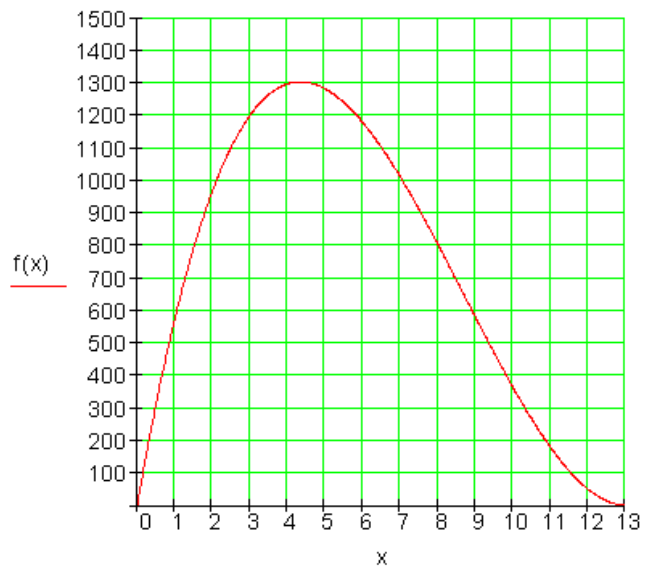
د کوتی حجم یا ډکی د یوه دریمي درجي ترم له لارې ټاکل کيږي:

$$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x$$

$$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x \quad \text{ب -}$$

ارزښت جدول:

x	0	2	4	6	8	10	12
f(x)	0	968	1296	1176	800	360	48



۳۲۱

## ۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

ماکسیمال حجم یا ډکی په جگټکي کې، له دې لاس ته راځي: پروت یا افقي تانجنت.

$$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 208x + 676$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 208x + 676 = 0$$

د دې مربع مساوات حل څخه لرو:  $x_1 = 13; x_2 = 13/3 \approx 4,33$

$$V\left(\frac{13}{3}\right) \approx 1302$$

د  $x = 13/3$  cm له ټاکلو د کوتی حجم یا ډکی  $v \approx 1302 \text{ m}^3$  ماکسیمال دی.

حجم یا ډکی دی:

اووم:

الف | ب



$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزبنتجدول

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40	61	88

پ –

د  $K'(x)$  گراف یو پارابول دی، هغه چې د لگښت زیاتوالی بنایي. د لگښت خورا کم زیاتوالی د پارابول له ککرټکي یا رآس ټکي سره لاس ته راځي.

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

د پارابول په ککرټکي کې پروت تانجنت.

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$K'(3) = 13$$

د  $x = 3$  ناروغانو گڼون یا تعداد ( 300 ناروغان) د لگښت زیاتوالی له نورو خورا کم دی.  $K'(3) = 13$  په دې معنا چې  $130 \text{ € / Tag}$  په روځ . یا په بل ډول ویل شوي:

که په دې ناروغانو ته یو بل راشي، دا په دې معنا چې  $x = 3,01$  . د یوه ورزیات

$$\text{ناروغ لپاره لگښت دی: } K(3,01) - K(3) = 160,13 - 160 = 0,13$$

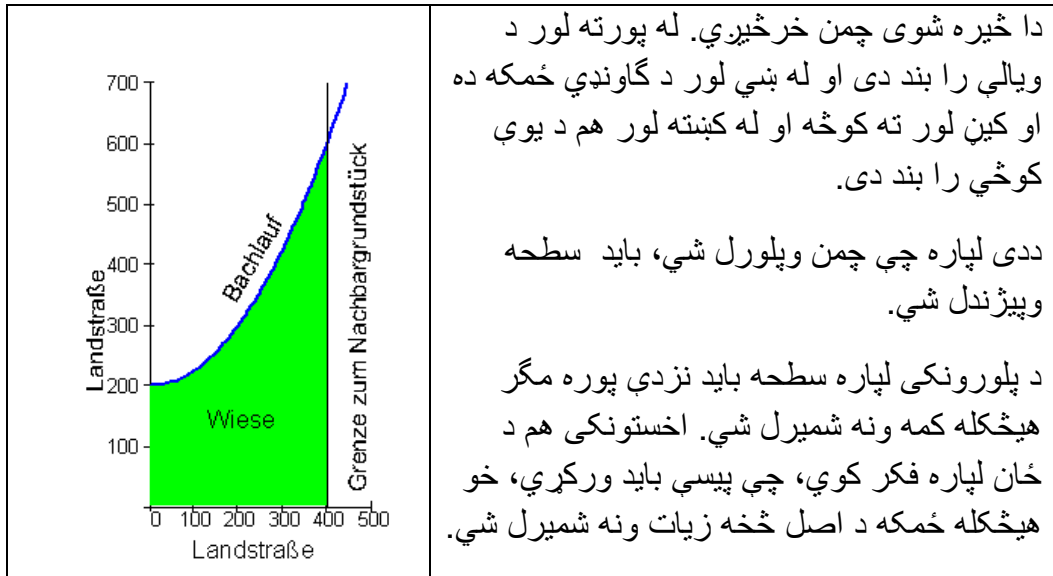
که دا ارزبنتونه له 1000 سره ضرب شي، نو دروځي لاس ته ترې  $130 \text{ € / Tag}$  یورو راځي.

## انتیگرال شمیرنه

### انتیگرال شمیرنه لپاره پیل راوړنه

مور د ځمکچپوهنې یا هندسې له لارې بلد یو چې د کرښو رابند تونو یا جسمونو سطحه او ډکې یا حجم څنگه وشمیرو. که یوه سطحه له گڼې (-کرښې) رابنده وي، نو څه باید وشي؟ دا مو انتیگرال شمیرنه ته رابولي.

#### پیلبلگه



دا څیره شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د گاونډي ځمکه ده او کین لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی.

ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي.

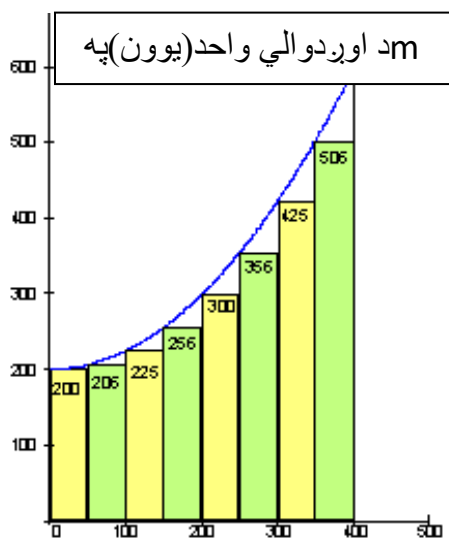
د پلورونکې لپاره سطحه باید نزدې پوره مگر هیڅکله کمه ونه شمیرل شي. اخستونکې هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمیرل شي.

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.  $f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200$  د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

خمکه په لاندې ډول په اوږدو توتو (پټیو) توتبه کیري



هره توتبه (مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جگوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو خای شمیرو.

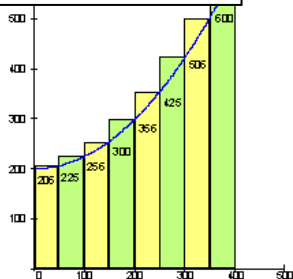
- $200 \cdot 50 = 10000$
- $206 \cdot 50 = 10300$
- $225 \cdot 50 = 11250$
- $256 \cdot 50 = 12800$
- $300 \cdot 50 = 15000$
- $256 \cdot 50 = 12800$
- $425 \cdot 50 = 21250$
- $506 \cdot 50 = 25300$
- 123700

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې  $123700 \text{ m}^2$  ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره توتبه (پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جگوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یو خای شمیرو.

د اوږدوالي واحد (یون) په m



- $206 \cdot 50 = 10300$
- $225 \cdot 50 = 11250$
- $256 \cdot 50 = 12800$
- $300 \cdot 50 = 15000$
- $356 \cdot 50 = 12800$
- $425 \cdot 50 = 21250$
- $506 \cdot 50 = 25300$
- $600 \cdot 50 = 30000$

143700

دا د پلورونکي له پاره د ټولې سطحې مساحت نږدې  $143700 \text{ m}^2$  دی. اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو، منځ، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

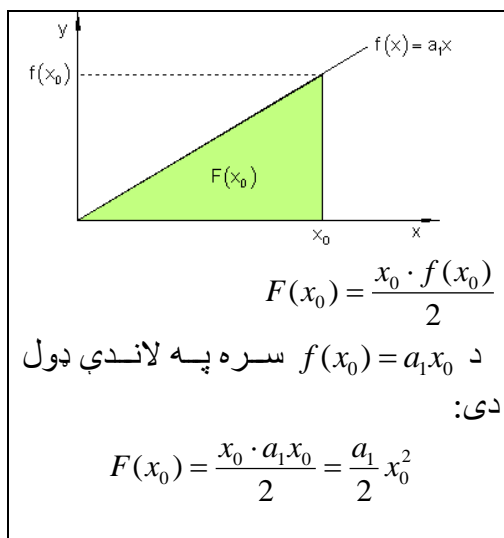
$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700 \text{ uni}^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انټیگرال برخه (په منځ) کې وشمیرو، چې ریښتونی ارزښت یې  $133333.3 \text{ m}^2$  دی.

د اخستونکي په بیلگه کې دا ډول شمیرنه،، لاندنی جمعي جوړول،، بلل کیږي. د پلورونکي په بیلگه کې دا ډول شمیرنه،، پورتنی جمعي جوړول،، بلل کیږي. دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی. باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې ریښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

## سطحه او لومړنی تابع:

سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:



د تابع  $f(x) = a_1x$  گراف په کارټیزي وضعیه سیستم (پروت ولاړسیستم) په سرچینه کې یوه کرښه انځوروي. یو تابع غواړو پیدا کړو، چې د گراف او x-محور ترمنځ، د  $x_0$  په واکوالي یا تابعیت کې سطحه په گوته کوي.

دا چې دا جوړه شوي سطحه یو مثلث دی، نو حل یې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

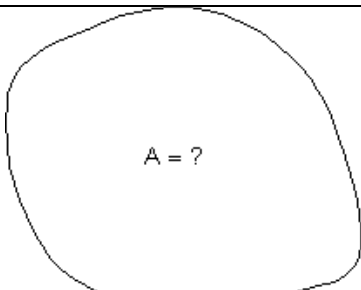
ساده پیدا کیږي:

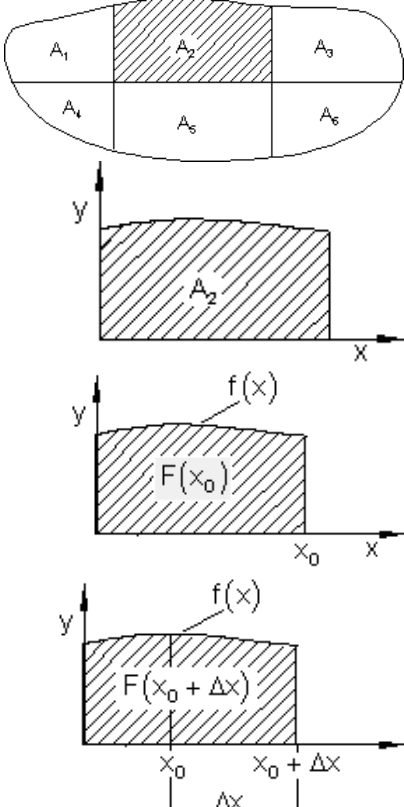
زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغیروو:

$$A \rightarrow F(x_0); g \rightarrow x_0; h \rightarrow f(x_0) = a_1x_0$$

تابع  $F(x_0)$  د گراف او د  $x$  - محور ترمنځ سطحه د  $x_0$  په واکوالي (تابعیت) کې تشریح کوي یا بنیایي. مور دا تابع د **سطحي تابع** بولو.

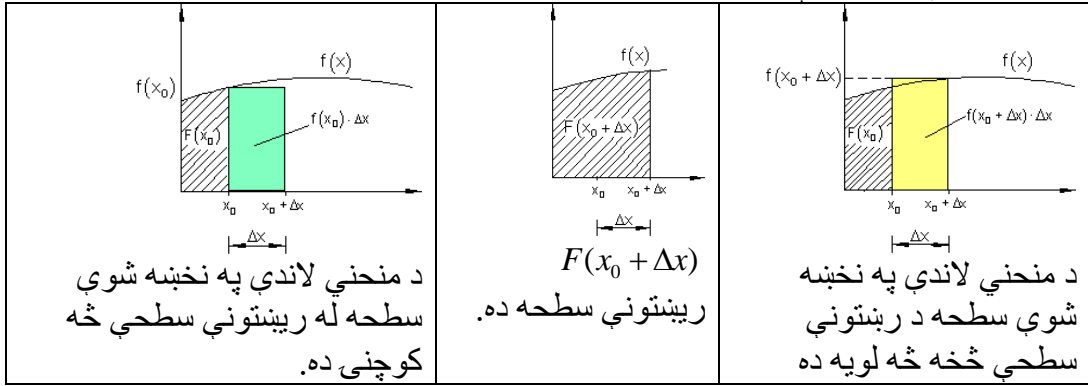
**د سطحي پرابلم:**

	<p>پخوانیو یونانیانو ته دا د منحنی څخه رابندی سطحي شمیرلو اصول معلوم وو. دا دمشق شمیرنه، چې مور ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پېړۍ پای کې) د طبیعي علومو پوهانو لایبنيخ او نیوتون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.</p>
---	--

	<p>هره له کروکرنسو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو (قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کره کرښه رامنځ ته کيږي. نورې ټولې رابندونې سیده کرښې دي. هره یوه د سطحي برخه (د بیلګې په توګه دلته <math>A_2</math>) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کرښې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي. که له کروکرنسو رابند گراف د <math>f(x)</math> متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ایا یو تابع شته چې د افقي (پروت) محور ارزښت <math>x_0</math> په سطحه <math>F(x_0)</math> تنظیم کړي، لکه په پیلېلګه کې؟ که داسې یو تابع <math>F</math> شتون ولري، او سطحه <math>F(x_0)</math> چې د <math>x_0</math> افقي محور ارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي (پروت) محور ارزښت <math>(x_0 + \Delta x)</math> په سطحه <math>F(x_0 + \Delta x)</math> باندې تنظیم کړای شي.</p>
--	--



په یوه څلورضلعي (مستطیل) کې د سطحې رابندول:  
یا د سطحې په کوتیو کې بندول:



که د سطحې پټې (یا کوچني مستطیلونه) هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي  
سطحې د مساحت څخه یې توپیر کميږي.

دا اړودوالی د ریاضیاتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x$	$F(x_0 + \Delta x)$	$F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$
----------------------------------	---------------------	---

دا موږ دې لاندې نابرابرونو یا نامساواتو ته راهڅوي

$$\begin{aligned}
 F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) \leq F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | \quad F(x_0) \\
 \Leftrightarrow f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | : \Delta x \\
 \Leftrightarrow f(x_0) &\leq \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \leq f(x_0 + \Delta x)
 \end{aligned}$$

لیمیت یې نیسو (پوله یې پیدا کوو):

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) &\leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \\
 f(x_0) &\leq F'(x_0) \leq f(x_0) \\
 f(x_0) &\leq F'(x_0) = f(x_0)
 \end{aligned}$$

نو لرو:  $F'(x_0) = f(x_0)$

دا په دې معنا، چې د سطحې  $F(x)$  مشتق د کرې کرښې د تابع ارزښت  $f(x_0)$  سره  
په  $x_0$  ځای کې برابر دی.

مور لیکو:

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \text{یا} \quad F'(x_0) = \frac{dF(x_0)}{dx} = f(x_0)$$

که مور بریالی شو، داسی یو تابع  $F(x)$  پیداکړو چې مشتق یې د رابندې کړې  $f(x)$  تابع وي، نو  $F(x)$  د سطحې تابع دی.

که مور یو تابع د لومړني تابع څخه رابیل کړو یعنې مشتق یې ونیسو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سری کړی شي فورمال ووايي:

د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیداکړو، دا معنا لري چې انتیگرال یې شمیرو. د یوه ساده توان تابع په بیلګه د احساس له مخې یوه لار پیدا کیدی شي، چې دا څنګه ایتیکرالوي.

توانتابع:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په یو کمیري او پوتنختابع د زاړه پوتنخ سره ضربیږي. انتیگرالونه (زیاتونه یا ورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په یو جګیري او پوتنختابع په نوي اکسپوننت وپشل کیږي.

دا همدا اوس ازمايو:

پوتنختابع:

$$f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2+1} x^{2+1} = \underline{\underline{x^3}}$$

تابع  $F(x)$  د  $f(x)$  بنسټتابع (لومړنی تابع یا ساده تابع) بلل کیږي، ځکه چې  $f(x)$  له  $F(x)$  څخه لاس ته اړخي یا را پیدا کیږي یا راځیږي.

ناتاکلی انتیگرال

و به گورو، چي نا ټاکلی انتيگرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که ديوې ورکړ شوي  $f(x)$  تابع  $F(x)$  لومړنی تابع، يعنې  $F(x)$  وپېژنو، نو ديوې ثابتې  $C$  د ور جمع کولوسره د  $f(x)$  د ټولو لومړنيو توابعو سټ  $G$  لاسته راوړو ( $C$  په خوښه يو حقيقي عدد دی).

مور د  $f(x)$  تابع د  $F(x)$  لومړنی تابع ټاکنه يا اينټگرالونه هم بولو او ددې له پاره ليکو:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x)dx \Leftrightarrow F(x) = \int dF(x) = \int f(x)dx$$

نو لرو:  $F(x) = \int f(x)dx$

دا تراوسه فورمال ليکنود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

مور لومړنی توابع پلټو

بيلگه:

لومړنی تابع  $F(x)$  دې پيدا شي، چي مشتق يې  $f(x) = 2x$  دی.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int 2x dx$$

مور ازمايو:

$$F(x) = x^2 \quad \text{ځکه چې} \quad F'(x) = 2x = f(x)$$

$F(x) = x^2 + 2$  ځکه چې  $F'(x) = 2x = f(x)$ . په ټوليزه توگه باور لري:

$$F(x) = x^2 + C \quad \text{ځکه چې په هر حالت کې لرو:} \quad F'(x) = 2x = f(x)$$

دواړه توابع په ثابت غړي کې يو له بل توپير لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره

هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله بايد دې خپلې لار ته تغير ورکړو.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{قاعده (لار): باور لري:}$$

د لومړنيو توابعو سټ (ډېرې)

د بنسټ توابعو لومړني توابع

بيلگه ښايي، چي د تابع  $f(x)$  لپاره نه يواځې يو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چي يواځې ثابت عدد کې يو له بل سره توپير لري، چي دا د  $f(x)$  د لومړنيو توابعو سټ بولو.

بيلگه

يو لومرنى تابع  $F(x)$  دې پيدا شي، چې د هغه مشتق  $f(x) = 3x^2 + 2$  وي.

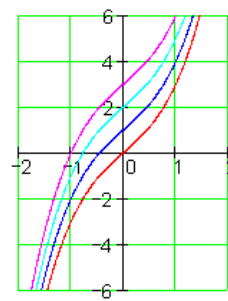
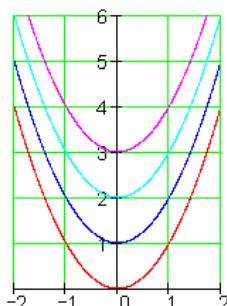
$$F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x) \text{ ، ځکه چې } F(x) = x^3 + 2x + C$$

د ټولو لومړنيو توابعو ډېرى دې د منحنيو ډلې په څير انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کي يو له بل توپير لري.

ددې لپاره دې د گرافونو لاندې دوه بيلگي وکتل شي.

$$F(x) = x^2 + C$$

$$F(x) = x^3 + 2x + C$$



تمرینونه

لومړنى تابع پيدا کړی

لاندې  $f(x)$  توابعو ته لومړنى تابع  $F(x)$  پيدا کړی

اول -  $f(x) = x^2$  - دويم -  $f(x) = 2x^2$  - دريم -  $f(x) = x$

څلورم -  $f(x) = -2x$  - پنځم -  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  - شپږم -  $f(x) = -\frac{1}{4}x$

اوم -  $f(x) = x^3$  - اتم -  $f(x) = 4x^3$  - نهم -  $f(x) = 2$

لسم -  $f(x) = x + 1$  - يو لسم -  $f(x) = x^2 + x - 3$  - دولسم -  $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}$

---

 حلونه

تمرینونه انتگرال ششمین |

مفصل حلونه

اول -  $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$  از مایینت

$$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2 = f(x)$$

دورې  $f(x) = 2x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}x^3 + C$  از مایینت

$$F'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 0 = 2x^2 = f(x)$$

درېم -  $f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$  از مایینت

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x^1 + 0 = x = f(x)$$

څلورم -  $f(x) = -2x \Rightarrow F(x) = -x^2 + C$  از مایینت

$$F'(x) = -2x^1 + 0 = -2x = f(x)$$

پنځم -  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6}x^3 + C$  از مایینت

$$F'(x) = \frac{1}{6} \cdot 3x^2 + 0 = \frac{1}{2}x^2 = f(x)$$

شپږم -  $f(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{8}x^2 + C$  از مایینت

$$F'(x) = -\frac{1}{8} \cdot 2x^1 + 0 = -\frac{1}{4}x = f(x)$$

---

ازماینت  $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$  - اوم

$$F'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3 = f(x)$$

ازماینت  $f(x) = 4x^3 \Rightarrow F(x) = x^4 + C$  - اتم

$$F'(x) = 4x^3 + 0 = 4x^3 = f(x)$$

ازماینت  $f(x) = 2 \Rightarrow F(x) = 2x + C$  - نهم  
 $F'(x) = 2 \cdot 1x^0 + 0 = 2 = f(x)$

ازماینت  $f(x) = x + 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$  - لسم

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x^1 + 1x^0 + 0 = x + 1 = f(x)$$

ازماینت  $f(x) = x^2 + x - 3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$  - یولسم

$$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x^1 - 3 \cdot 1x^0 + 0 = x^2 + x - 3 = f(x)$$

ازماینت  $f(x) = x^n; n \in \mathbb{N} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$  - دولسم

$$F'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n + 0 = x^n = f(x)$$

## د ناتیګرالی انتیګرال څخه و ټاکلی انتیګرال ته

### ترمنځ راوړنه یا وړاندراوړنه

مور ولیدل، چې څنګه یو تابع  $f(x)$  ته لومړنی تابع  $F(x)$  منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجع کونکې ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع  $f(x) = 3x^2 + 2$  او د دې د لومړنیو توابعو سټ  $f(x) = x^3 + 2x + C$

پیژند: د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع  $f(x)$  ته ،، ناتیګرالی انتیګرال ،، بلل

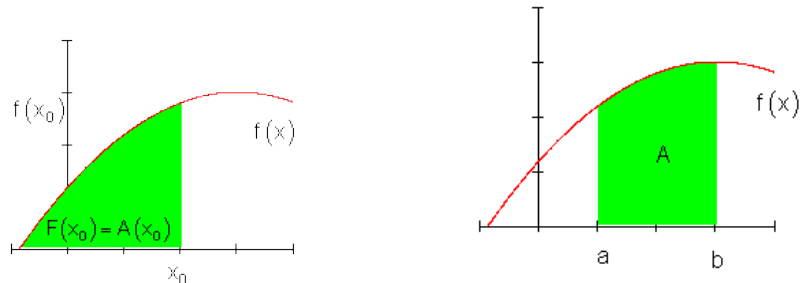
کیري او ددې له پاره لیکو:  $\int f(x)dx = F(x) + C$

د مشتق- او انتیګرال شمیرني ترمنځ اړیکې کیدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

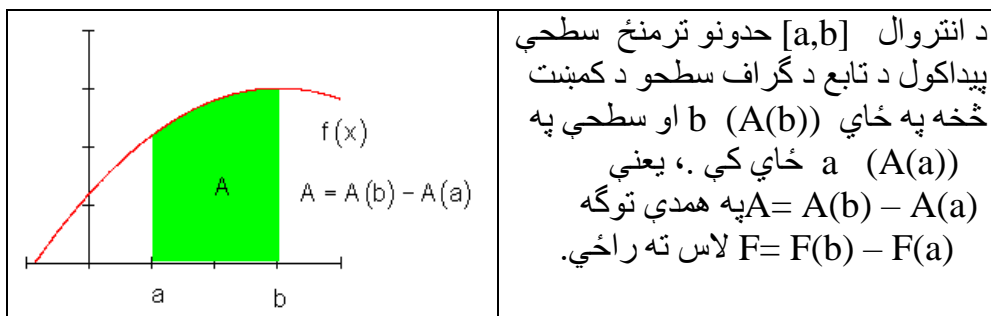
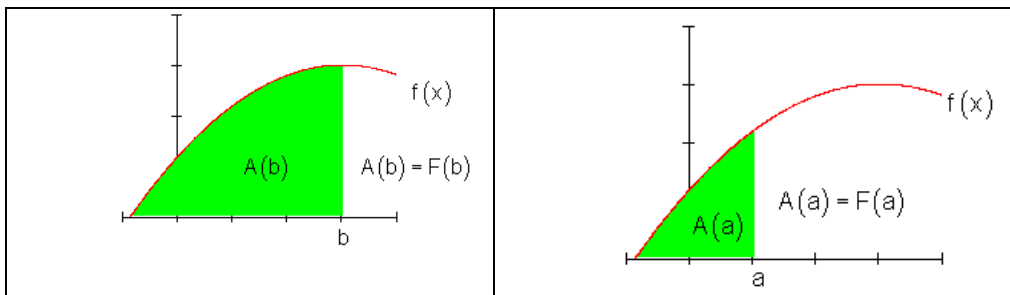
جمله (قضیه): د ناتیګرالی انتیګرال شمیرنه د مشتق شمیرني برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)] + C}{dx} = [F(x) + C]' = f(x)$$

د تابع د ګراف لاندې او د انټروال  $[a; b]$  تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم مور تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.



د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دی لاندې پوهنې (زده کړې) ته لارښوده وي: د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې  $f(x)$  تابع گراف لاندې ده تر  $x_0$  ځای پورې او یوې  $F'(x)$  تابع، چې د  $F(x)$  تابع مشتق د  $x_0$  ځای د  $f$  تابع د تابع ارزښت سره د  $x_0$  په ځای کې برابر وي، ترمنځ اړیکې شته دی، یعنې  $F'(x) = f(x)$



په انټروال  $[a, b]$  کې د تابع گراف لاندې سطحه د لومړنیو توابعو تفریق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x) dx$$

دا انتیگرال ټاکلی انتیگرال هم بلل کیږي.

جمله:

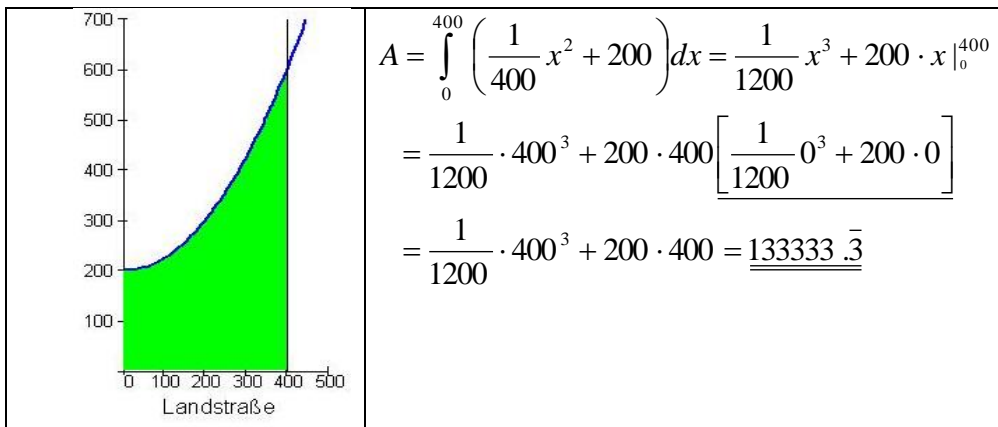
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پیل بیلگه کې راوړې د چمن سطحه وشمیرو.

ثابته له تفریق سره لرې کیږي. په عمل کې د دې مسألې د حل لپاره یوه بله لار گټوره راوستلې یا گټوره ښوولې:



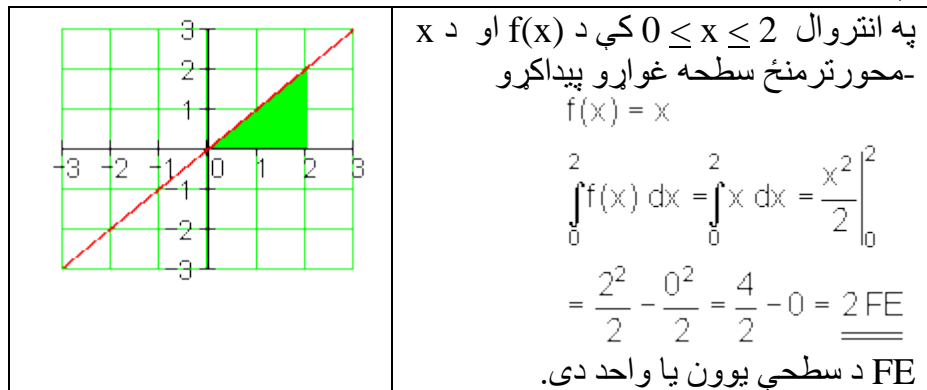
۳۳۵

انتیگر الشمیرنه ویاله

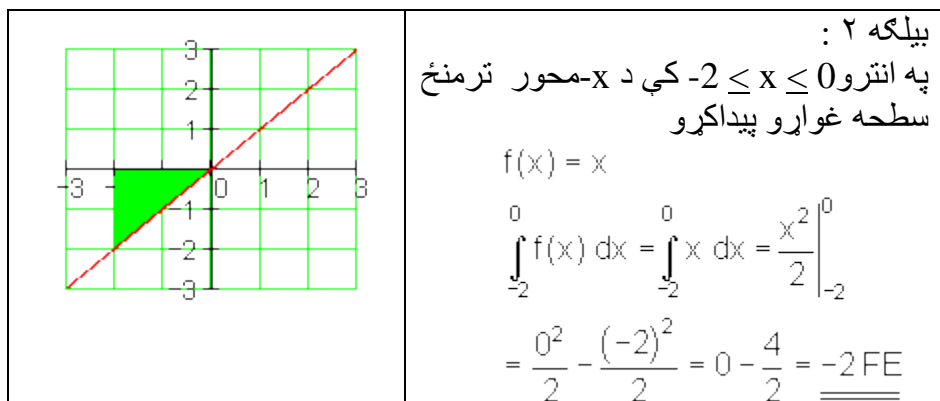


دریم: د ساده سطحو شمیرنه

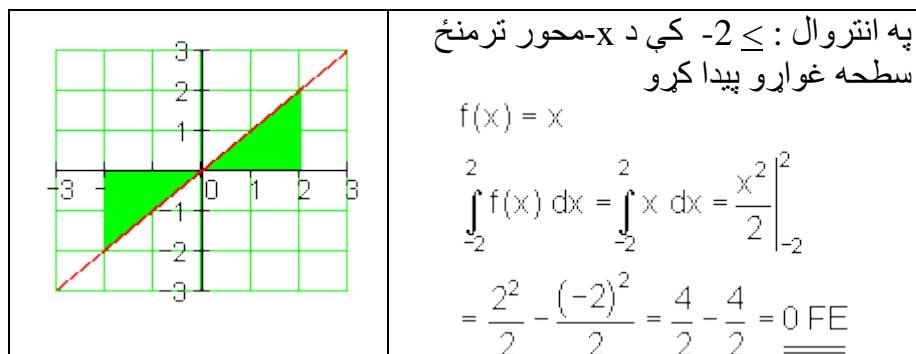
بیلگه ۱:



بیلگه ۲:



بیلگه ۳ :

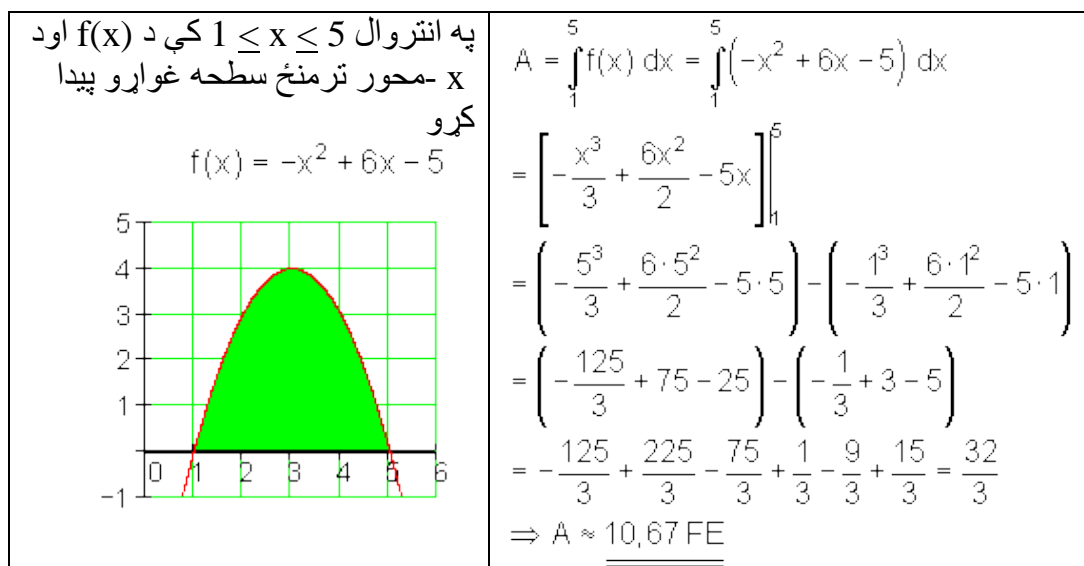


شمیرنه بنایي، چې د  $x$ -محور پورته لور ته سطحه زیاتیزه یا مثبت ده او د  $x$ -محور  
کښته لور ته سطحه کمیزه یا منفي گڼل کیږي.

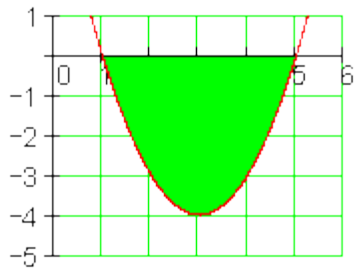
په بیلگه ۳ کې سطحې یو بل مخامخ سره له منځه وړي یا پورته کوي.  
که فزیکي سطحه څیړو، نو انتیگرال باید ووېشل شي او ارزښتونه وشمیرل شي.

$$\int_{-2}^2 x dx = \left| \int_{-2}^0 x dx \right| + \left| \int_0^2 x dx \right| = \left| \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 \right| + \left| \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \right| = \left| \frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} \right| + \left| \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right| = 2 + 2 = 4 \text{ FE}$$

بیلگه ۴ :



بیلگه ۵:

<p>په انتروال <math>1 \leq x \leq 5</math> کې د <math>f(x)</math> اود <math>x</math>-محور ترمنځ سطحه غواړو پیدا کړو</p> <p><math>f(x) = x^2 - 6x + 5</math></p> 	$A = \int_1^5 f(x) dx = \int_1^5 (x^2 - 6x + 5) dx$ $= \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x \right]_1^5$ $= \left( \frac{5^3}{3} - \frac{6 \cdot 5^2}{2} + 5 \cdot 5 \right) - \left( \frac{1^3}{3} - \frac{6 \cdot 1^2}{2} + 5 \cdot 1 \right)$ $= \left( \frac{125}{3} - 75 + 25 \right) - \left( \frac{1}{3} - 3 + 5 \right)$ $= \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} - \frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{32}{3}$ $\Rightarrow A \approx -10,67 \text{ FE}$
---	--

جمله: سطحه پروتځای او مخنځینه

او سطحه د  $x$ -محور پورته لور ته پرته ده

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx > 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

او سطحه د  $x$ -محور کښته لور ته پرته ده.

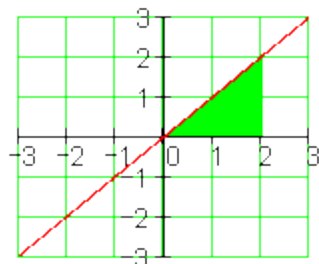
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

د انتیگریشن پولو بدلول:

څه پیښی، که د انتیگریشن پولې سره بدلې شي؟

بیلگه ۶:

په انټروال  $0 \leq x \leq 2$  کې د  $f(x)$  او  $x$  - محور ترمنځ سطحه غواړو پیدا کړو



$$f(x) = x$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = \underline{\underline{2 \text{ FE}}}$$

د  $\text{FE}$  د سطحې یوون یا واحد دی.

د انتیگرېشن پولې سره بدلون:

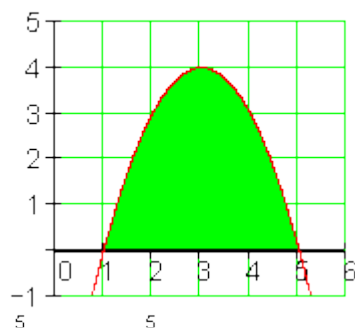
$$\int_{\frac{1}{2}}^0 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^0 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^0$$

$$= \frac{0^2}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} = 0 - \frac{1}{8} = \underline{\underline{-\frac{1}{8} \text{ FE}}}$$

د دې لپاره چې سطحه مثبت یا زیاتیزه شي باید له  $(-1)$  سره ضرب شي.

په انټروال  $1 \leq x \leq 5$  کې د  $f(x)$  او  $x$  - محور ترمنځ سطحه غواړو پیدا کړو

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$



$$A = \int_1^5 f(x) dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx$$

$$\approx \underline{\underline{10,67 \text{ FE}}}$$

$$A = \int_1^5 f(x) dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx$$

$$= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x \right]_1^5$$

$$= \left( -\frac{1^3}{3} + \frac{6 \cdot 1^2}{2} - 5 \cdot 1 \right) - \left( -\frac{5^3}{3} + \frac{6 \cdot 5^2}{2} - 5 \cdot 5 \right)$$

$$= \left( -\frac{1}{3} + 3 - 5 \right) - \left( -\frac{125}{3} + 75 - 25 \right)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} + \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} = -\frac{32}{3}$$

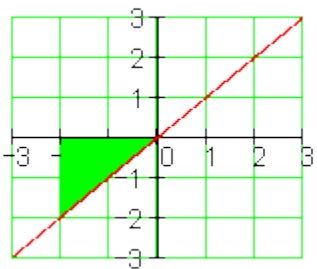
$$\Rightarrow A \approx \underline{\underline{-10,67 \text{ FE}}}$$

بیلگه ۷:

د انتیگرېشن پولې سره بدلون

جمله: د پولې بدلون سره د انتیگرېشن مخخښه بدلون.

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad \text{oder} \quad -\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$$

<p>بیلگه ۲ : په انترو <math>0 \leq x \leq -2</math> کې د <math>-x</math> محور ترمنځ سطحه غواړو پیداکړو <math>f(x) = -x</math></p> 	<p>بیلگه ۸ : په انترو <math>0 \leq x \leq -2</math> کې د <math>-x</math> محور ترمنځ سطحه غواړو پیداکړو</p> $\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 -x dx = - \int_{-2}^0 x dx$ <p>پولي بدلوو</p> $= \int_0^{-2} x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^{-2}$ $= \frac{(-2)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = \underline{\underline{2 \text{ FE}}}$
---	---

تمرینونه:

انتیگرال شمیرنه II:

لاندې ټاکلي انتیگرالونه وشمیرئ.

$$\int_3^4 dx \quad \text{خلور} \quad - \quad \int_{-2}^2 4 dx \quad \text{درې} \quad - \quad \int_0^3 (x^2 - 1) dx \quad \text{دوه} \quad - \quad \int_1^3 x dx \quad \text{یو} \quad -$$

$$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left( \frac{1}{2} x^2 - 4 \right) dx \quad \text{شپږ} \quad - \quad \int_0^4 (2x - 5) dx \quad \text{پنځه} \quad -$$

$$\int_{-1}^2 \left( x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3x - 4 \right) dx \quad \text{اته} \quad - \quad \int_{-3}^3 (x^3 + 2x) dx \quad \text{اوه} \quad -$$

$$\int_2^3 (3x - 6)^3 dx \quad \text{لس} \quad - \quad \int_{-4}^4 \left( 2x^2 - \frac{1}{8} x^4 \right) dx \quad \text{نهه} \quad -$$

.....  
 حلونه

انتیگرال شمیرنه II

نتیجی

$$\int_1^3 x \, dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 = 4$$

لومری-

$$\int_0^3 (x^2 - 1) \, dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 - x \right]_0^3 = 6$$

دویم:-

$$\int_{-2}^2 4 \, dx = [4x]_{-2}^2 = 16$$

دریم-

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 1$$

څلورم-

$$\int_0^4 (2x - 5) \, dx = [x^2 - 5x]_0^4 = -4$$

پنځم-

$$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left( \frac{1}{2} x^2 - 4 \right) dx = \left[ \frac{1}{6} x^3 - 4x \right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \approx -15,085$$

شپږم:

$$\int_{-3}^3 (x^3 + 2x) \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 + x^2 \right]_{-3}^3 = 0$$

اووم-

$$\int_{-1}^2 \left( x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3x - 4 \right) dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 4x \right]_{-1}^2 = -\frac{21}{4}$$

اتم-

۳۴۱

انتیگرالشمیرنه ویاله

$$\int_{-4}^4 \left( 2x^2 - \frac{1}{8}x^4 \right) dx = \left[ \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{40}x^5 \right]_{-4}^4 = \underline{\underline{\frac{512}{15}}}$$

نهم-

$$\int_2^3 (3x - 6)^3 dx = \left[ \frac{27}{4}x^4 - \frac{162}{3}x^3 + \frac{324}{2}x^2 - 216x \right]_2^3 = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$$

لسم-

مفصل حلونه:

$$\int_1^3 x dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = \underline{\underline{4}}$$

لومری-

دویم-

$$\int_0^3 (x^2 - 1) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - x \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3 - \left( \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0 \right) = 3^2 - 3 - (0) = 9 - 3 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_{-2}^2 4 dx = [4x]_{-2}^2 = 4 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) = 8 + 8 = \underline{\underline{16}}$$

دریم-

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = \underline{\underline{1}}$$

خلورم-

پنجم-

$$\int_0^4 (2x - 5) dx = \left[ x^2 - 5x \right]_0^4 = 4^2 - 5 \cdot 4 - (0^2 - 5 \cdot 0) = 16 - 20 - 0 = \underline{\underline{-4}}$$

شپیرم-

$$\begin{aligned}
 \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left( \frac{1}{2}x^2 - 4 \right) dx &= \left[ \frac{1}{6}x^3 - 4x \right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} = \frac{1}{6} \cdot (\sqrt{8})^3 - 4 \cdot \sqrt{8} - \left( \frac{1}{6} \cdot (-\sqrt{8})^3 - 4 \cdot (-\sqrt{8}) \right) \\
 &= \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \sqrt{8} - 4 \cdot \sqrt{8} - \left( -\frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \sqrt{8} + 4 \cdot \sqrt{8} \right) = \frac{8}{6} \cdot \sqrt{8} - \frac{24}{6} \cdot \sqrt{8} + \frac{8}{6} \cdot \sqrt{8} - \frac{24}{6} \cdot \sqrt{8} \\
 &= -\frac{32}{6} \cdot \sqrt{8} = \underline{\underline{-\frac{16}{3} \cdot \sqrt{8} \approx -15,085}}
 \end{aligned}$$

اووم -

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^3 (x^3 + 2x) dx &= \left[ \frac{1}{4}x^4 + x^2 \right]_{-3}^3 = \frac{1}{4} \cdot 3^4 + 3^2 - \left( \frac{1}{4} \cdot (-3)^4 + (-3)^2 \right) \\
 &= \frac{81}{4} + 9 - \left( \frac{81}{4} + 9 \right) = \underline{\underline{0}}
 \end{aligned}$$

اتم -

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 \left( x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 \right) dx &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x \right]_{-1}^2 \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{6} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - \left[ \frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{6} \cdot (-1)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \right] \\
 &= \frac{16}{4} - \frac{8}{6} + \frac{12}{2} - 8 - \left[ \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{6} \cdot (-1) + \frac{3}{2} \cdot 1 + 4 \right] \\
 &= 4 - \frac{4}{3} + 6 - 8 - \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{3}{2} + 4 \right] \\
 &= 2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{3}{2} - 4 = -\frac{24}{12} - \frac{16}{12} - \frac{3}{12} - \frac{2}{12} - \frac{18}{12} = -\frac{63}{12} = \underline{\underline{-\frac{21}{4}}}
 \end{aligned}$$

نهم: مفصل حل (اوبیونه):



$$\begin{aligned}
 \int_{-4}^4 \left( 2x^2 - \frac{1}{8}x^4 \right) dx &= \left[ \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{40}x^5 \right]_{-4}^4 = \\
 &= \frac{2}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{40} \cdot 4^5 - \left[ \frac{2}{3} \cdot (-4)^3 - \frac{1}{40} \cdot (-4)^5 \right] \\
 &= \frac{128}{3} - \frac{1024}{40} - \left[ \frac{2}{3} \cdot (-64) - \frac{1}{40} \cdot (-1024) \right] \\
 &= \frac{128}{3} - \frac{1024}{40} - \left[ -\frac{128}{3} + \frac{1024}{40} \right] = \frac{128}{3} - \frac{1024}{40} + \frac{128}{3} - \frac{1024}{40} \\
 &= \frac{256}{3} - \frac{2048}{40} = \frac{256}{3} - \frac{256}{5} = \frac{1280}{15} - \frac{768}{15} = \underline{\underline{\frac{512}{15}}}
 \end{aligned}$$

لسم:

$$\begin{aligned}
 \int_2^3 (3x - 6)^3 dx &= \int_2^3 (3x - 6)^2 \cdot (3x - 6) dx = \int_2^3 (9x^2 - 36x + 36) \cdot (3x - 6) dx \\
 &= \int_2^3 (27x^3 - 162x^2 + 324x - 216) dx \\
 &= \left[ \frac{27}{4}x^4 - \frac{162}{3}x^3 + \frac{324}{2}x^2 - 216x \right]_2^3 \\
 &= \frac{27}{4} \cdot 3^4 - \frac{162}{3} \cdot 3^3 + \frac{324}{2} \cdot 3^2 - 216 \cdot 3 - \left[ \frac{27}{4} \cdot 2^4 - \frac{162}{3} \cdot 2^3 + \frac{324}{2} \cdot 2^2 - 216 \cdot 2 \right] \\
 &= \frac{2187}{4} - 1458 + \frac{2916}{2} - 648 - 108 + \frac{1296}{3} - 648 + 432 \\
 &= \frac{2187}{4} - 1458 + 1458 - 648 - 108 + 432 - 648 + 432 \\
 &= \frac{2187}{4} - 540 = \frac{2187}{4} - \frac{2160}{4} = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}
 \end{aligned}$$

د توابعو ترمنځ سطحه

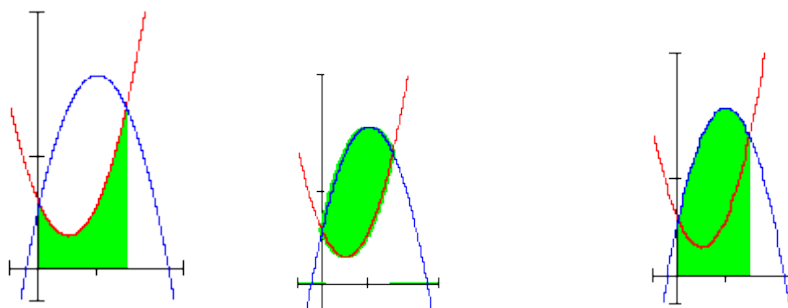
له دوه گرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمیرنه:

ننوتنه: د یوه ډنډ یا یوه بند څېره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټې چې له گرو پولو را بند وي.

فعالیت:

- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنگه وشمېرو؟

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کېږي، چې د دوه توابعو گرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدې شي د ټاکلو اینټگرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه گرافونه د  $x$ -محور پورته لور ته پراته وي، نو د لاندې شپا څخه مخ ته ځو:



$$A = A_1 - A_2$$

د اینټگرال جوړونه:

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 + 2 \cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

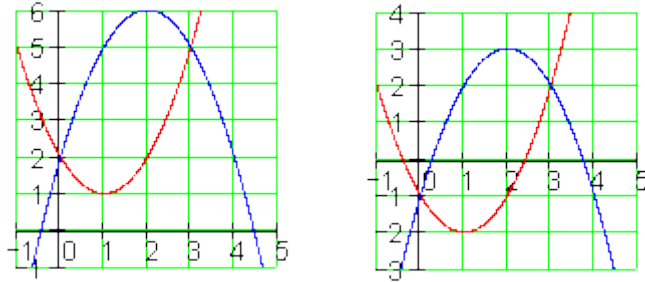
$$\int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx = \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x \right]_0^3 = -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 =$$

$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چي د دوه گرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي، نو له لوي ارزښت څخه کوچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x) dx - \int_0^3 f(x) dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چي پوهیږو، د یوې سطحې مخخښه ددې په واک کې ده، چي ایا سطحه د  $x$  - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. مورن څپرو، چي ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلگه کې پراته دي او که نه. مورن سطحه د  $y$  -محور په درې واحدونو (یوونونو) کښته لور ته بیا یو او سطحې نوې شمېرو.



که د لید له مخې قضاوت وکړو، نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د  $x$  - ارزښت غوڅتکي هم او له دې سره د انتیگرال حدونه به تغیره پاتیري.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

خای په خای کونه:

$$A = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$$

د  $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x$  سره کیري:

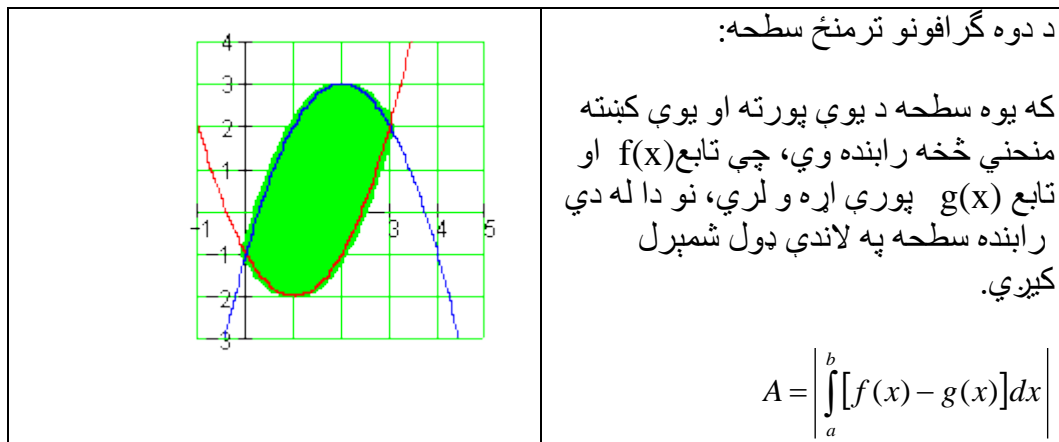
$$A = \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx = \left[ \frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه بنایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A = \left| \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx \right| = \left| \left[ \frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^3 \right| = \left| \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 \right| = |18 - 27| = |-9| = \underline{\underline{9}}$$

د دې متود ټولیزه ونه (عمومیت):



د انتیگرالونی حدونه  $a$  او  $b$  د  $x$  - محور د دواړو گرافونو د وضعیه قبیمتونو غوڅتکی دی.

تمرینونه:

د توابعو گرافونو تر منځ سطحه.

د لاندې فنکشنونو (توابعو) تر منځ سطحه وټاکي او دواړه گرافونه په یوه پروتولای سیستم کې وکارئ. شمیرل شوي سطحې کرښه کرښه کړئ.

$$f(x) = x^2 - x - 6; g(x) = 4x - 10 \quad \text{لومړۍ -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3; g(x) = 3x \quad \text{دویم -}$$

$$f(x) = 0,75(x^2 - 5x + 4); g(x) = 0,75x + 3 \quad \text{دریم -}$$

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}; g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4} \quad \text{څلورم -}$$

$$f(x) = (x - 2)^2 - 4; g(x) = x - 1 \quad \text{پنځم -}$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 1; g(x) = -x^2 + 2x + 1 \quad \text{شپږم -}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3; g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x \quad \text{اووم -}$$

$$f(x) = x^2 + 3x; g(x) = 0,5x^2 \quad \text{اتم -}$$

$$f(x) = 0,5x^2 - 2x - 1; g(x) = 2x^2 + 2x + 1 \quad \text{نهم -}$$

$$f(x) = -0,5x^2 + 2; g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1 \quad \text{لسم-}$$

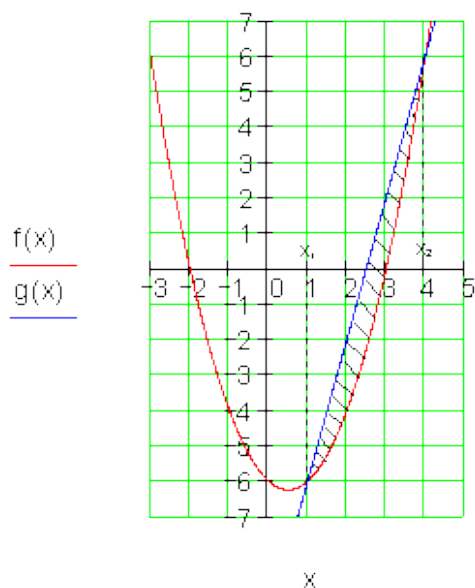
## مفصل جلونه یا اوبیونی

$$f(x) = x^2 - x - 6; g(x) = 4x - 10$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 4$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_1^4 [f(x) - g(x)] dx \right| = \left| \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_1^4 \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{5}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - \left[ \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{5}{2} \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \right] \right| = \underline{\underline{4,5}} \quad \text{لومری-} \end{aligned}$$

د دوار گرافونو ترمنځ سطحه 4,5 FE) به له دي وروسته او د مخه د سطحې واحد يا یوون وي(ده.



$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3; g(x) = 3x$$

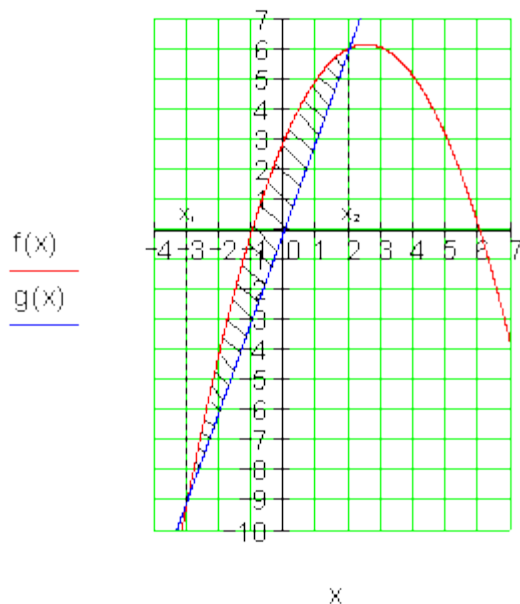
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ und } x_2 = 2$$

$$\int_{-3}^2 [f(x) - g(x)] dx = \left[ -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x \right]_{-3}^2$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot 2^3 - \frac{1}{4} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - \left[ -\frac{1}{6} \cdot (-3)^3 - \frac{1}{4} \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) \right] = \frac{125}{12} \approx \underline{\underline{10,417}}$$

د دواړو گرافونو ترمنځ سطحه 10,417 FE ده.

یادونه: سری کړی شي چې شمیرنه بی له مطلق ارزښت مخ ته بوزي، که سری له نتایجو یا لاس ته راوړنو، که منفي ارزښت ولري، مطلق ارزښت جوړ کړي.



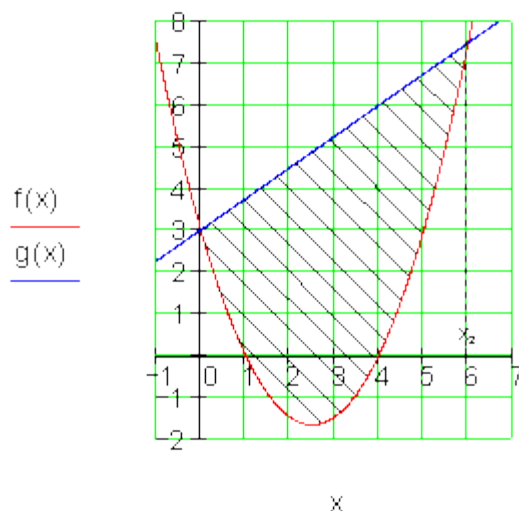
$$f(x) = 0,75(x^2 - 5x + 4) = 0,75x^2 - 3,75x + 3; g(x) = 0,75x + 3$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 0,75x^2 - 4,5x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 6$$

$$\int_0^6 [f(x) - g(x)] dx = \left[ \frac{0,75}{3} x^3 - \frac{4,5}{2} x^2 \right]_0^6 = \frac{0,75}{3} \cdot 6^3 - \frac{4,5}{2} \cdot 6^2 = -27$$

$$A = \left| \int_0^6 [f(x) - g(x)] dx \right| = |-27| = \underline{\underline{27}}$$

د دواړو گرافونو ترمنځ سطحه FE 27 ده.



څلورم -

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}; g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -5 \text{ und } x_2 = -\frac{3}{2}$$

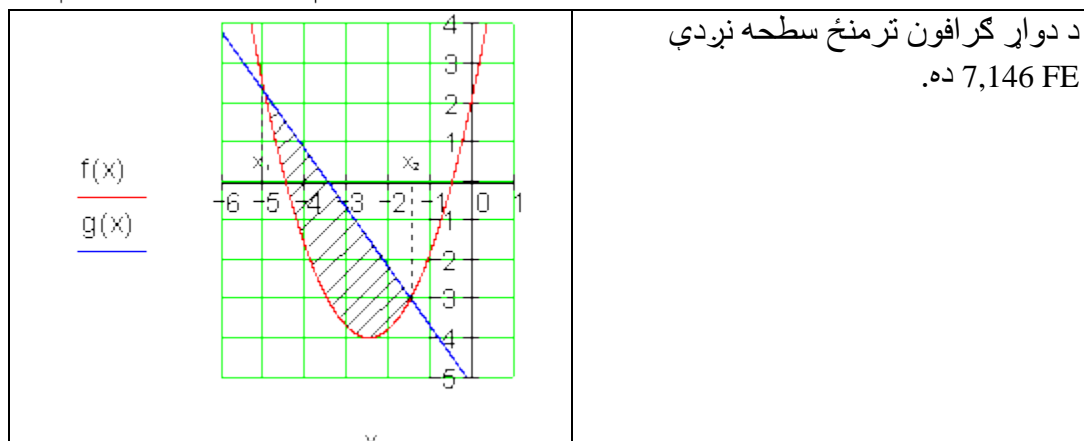
$$x_2 = -\frac{3}{2} \text{ او}$$



$$\int_{-5}^{-\frac{3}{2}} [f(x) - g(x)] dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{4}x^2 + \frac{15}{2}x \right]_{-5}^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{13}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \left[ \frac{1}{3} \cdot (-5)^3 + \frac{13}{4} \cdot (-5)^2 + \frac{15}{2} \cdot (-5) \right] = -\frac{343}{48}$$

$$A = \left| \int_{-5}^{-\frac{3}{2}} [f(x) - g(x)] dx \right| = \left| -\frac{343}{48} \right| \approx \underline{\underline{7,146}}$$



د دوار گرافون ترمنځ سطحه نږدې  
 ده 7,146 FE

پنځم -

$$f(x) = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x; \quad g(x) = x - 1$$

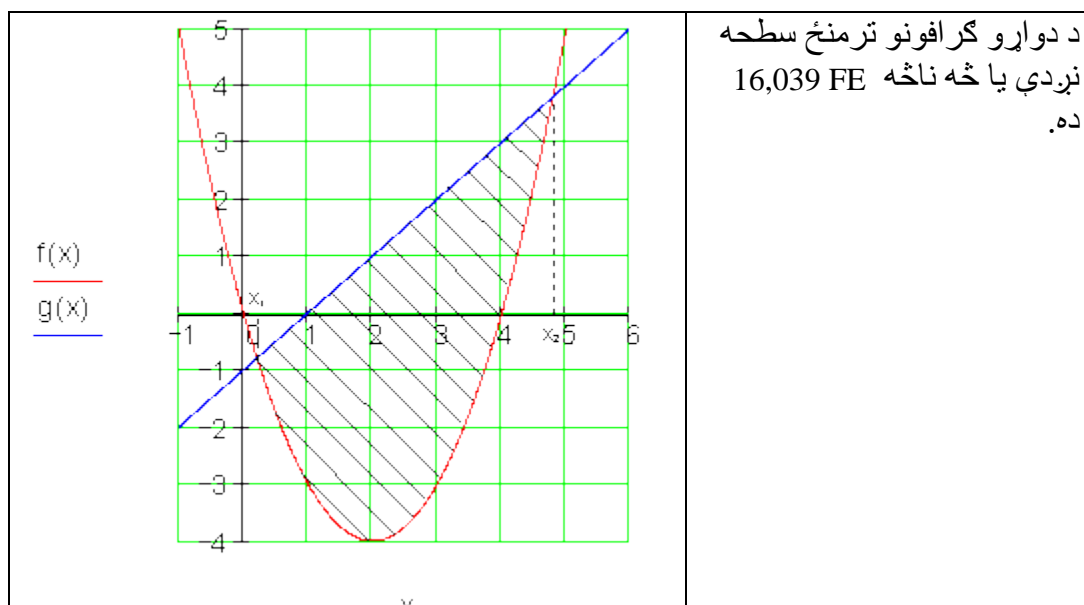
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}} \text{ und } x_2 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}}$$

$$\int_{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}}} [f(x) - g(x)] dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x \right]_{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}} \right)^3 - \frac{5}{2} \cdot \left( \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}} \right)^2 + \left( \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}} \right)$$

$$-\left[ \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}} \right)^3 - \frac{5}{2} \cdot \left( \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}} \right)^2 + \left( \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}} \right) \right] = -\frac{7}{2} \cdot \sqrt{21} \approx -16,039$$

$$A = \left| \int_{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}}} [f(x) - g(x)] dx \right| = \left| -\frac{7}{2} \cdot \sqrt{21} \right| \approx \underline{\underline{16,039}}$$



شپږم -

$$f(x) = x^2 - 4x + 1; g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

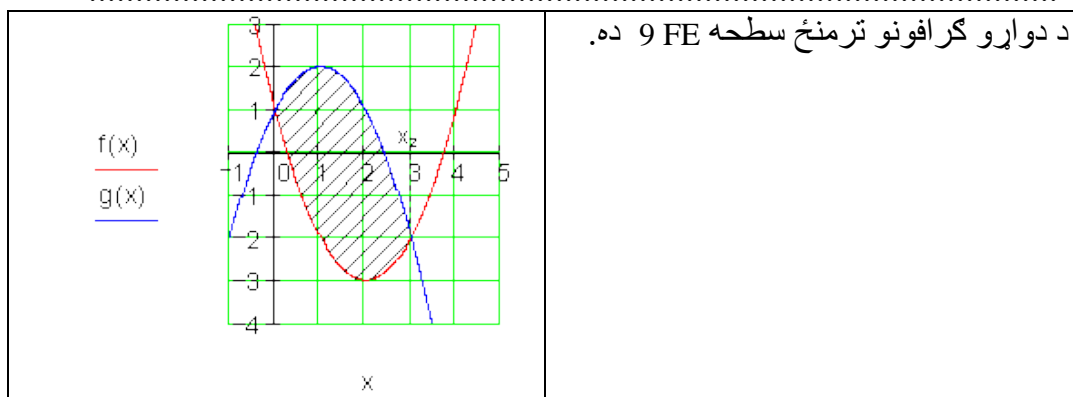
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 3$$

$$\int_0^3 [f(x) - g(x)] dx = \left[ \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 \right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 = -9$$

$$A = \left| \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx \right| = |-9| = \underline{\underline{9}}$$

۳۵۳

انتیگرال شمیرنه ویاله



اووم -

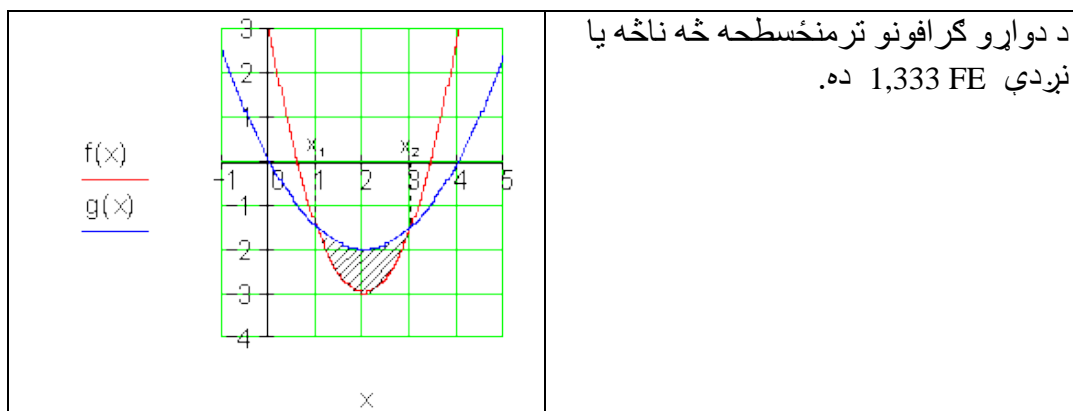
$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3; g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 3$$

$$\int_1^3 [f(x) - g(x)] dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - \left[ \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right] = -\frac{4}{3}$$

$$A = \left| \int_1^3 [f(x) - g(x)] dx \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3} \approx 1,333$$

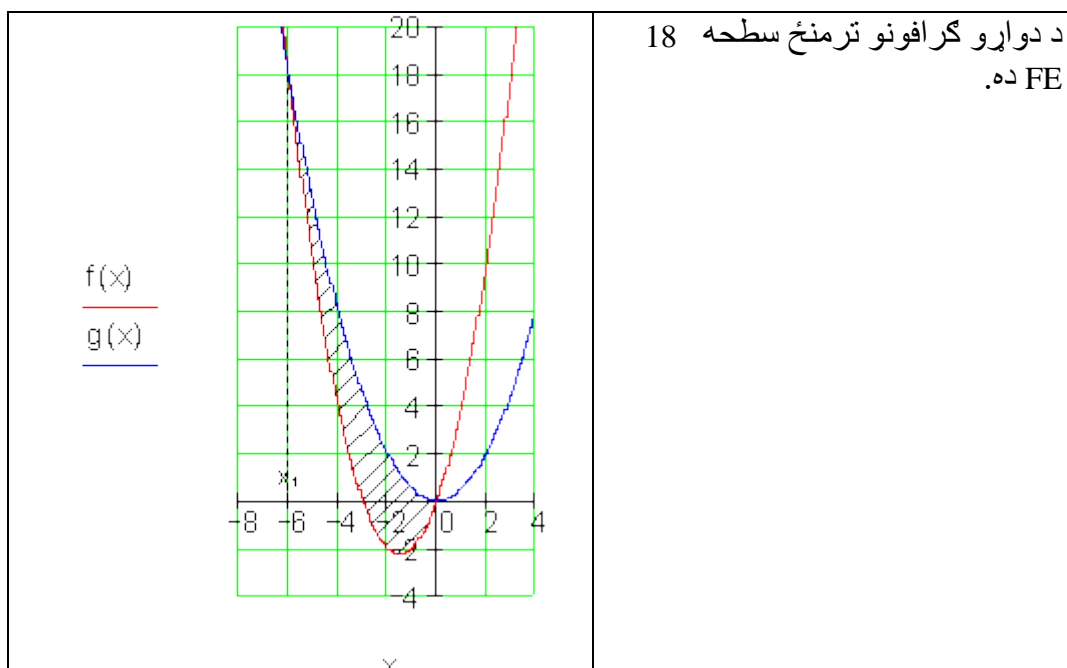


$$f(x) = x^2 + 3x; g(x) = 0,5x^2 \quad \text{اتم -}$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 0,5x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6 \text{ und } x_2 = 0$$

$$\int_{-6}^0 [f(x) - g(x)] dx = \left[ \frac{0,5}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 \right]_{-6}^0 = - \left[ \frac{0,5}{3} \cdot (-6)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-6)^2 \right] = -18$$

$$A = \left| \int_{-6}^0 [f(x) - g(x)] dx \right| = |-18| = \underline{\underline{18}}$$



نهم -

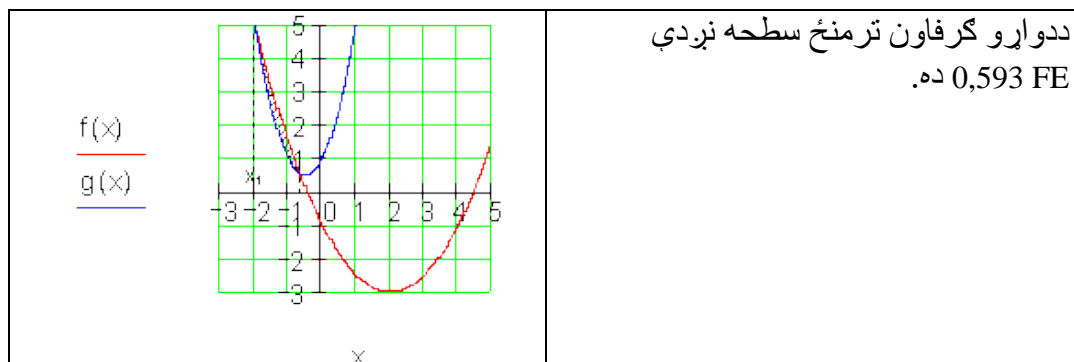
$$f(x) = 0,5x^2 - 2x - 1; g(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -1,5x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\int_{-2}^{-\frac{2}{3}} [f(x) - g(x)] dx = \left[ -\frac{1,5}{3}x^3 - 2x^2 - 2x \right]_{-2}^{-\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{1,5}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \left[ -\frac{1,5}{3} \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) \right]$$

$$= \frac{16}{27} \approx 0,593$$



لسم-

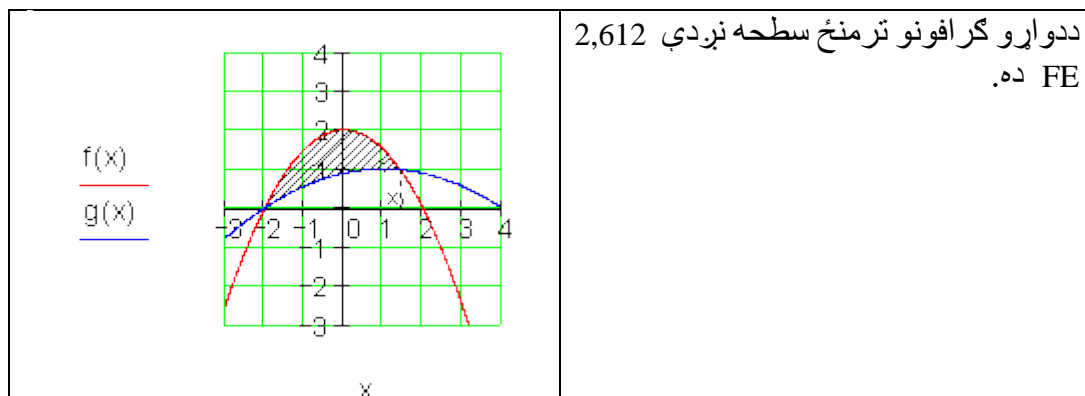
$$f(x) = -0,5x^2 + 2; g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1 = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{18}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{10}{9} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = \frac{10}{7}$$

$$\int_{-2}^{\frac{10}{7}} [f(x) - g(x)] dx = \left[ -\frac{7}{54}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{10}{9}x \right]_{-2}^{\frac{10}{7}}$$

$$= -\frac{7}{54} \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^3 - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^2 + \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{7} - \left[ -\frac{7}{54} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{9} \cdot (-2)^2 + \frac{10}{9} \cdot (-2) \right]$$

$$= \frac{128}{49} \approx 2,612$$



### انتیگرال د منځ- ارزښت په حیث یا توگه

$f(x)$  په  $[a ; b]$  په انټروال کې انتیگرال د منځ ارزښت په تگه (حیث)

د یوه ازاد غونډوسکي وهلو فکشن  $f(x)$  گراف په فوټبال لوبه کې په نږدې توگه د غونډوسکي (کرې) الوتنو کره یا منحنی ده.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$



د غونډوسکي (کرې) وهلو یا شوټ څخه وروسته 7 m او ترمنځ 16 m د غونډوسکي کره کوم د الوتنې منحنی جگوالی لري؟

لومړی د دې ورشو لپاره ارزښت جدول جوړو.

$x_i$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x_i)$	1,872	2,222	2,531	2,778	2,941	3	2,934	2,722	2,344	1,778

د شمیرل شوو فنکشن ارزښتونو  $f(x)$  منځ- ارزښت فرمول جوړیږي.

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

زموږ د بیلگې لپاره  $n = 10$  دی، نو باور لري:

$$\begin{aligned} \overline{f(x)} &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} f(x_i) \\ &= \frac{1}{10} \cdot (1,872 + 2,222 + 2,531 + 2,778 + 2,941 + 3 + 2,934 + 2,722 + 2,344 + 1,778) \\ &= \frac{25,122}{10} = 2,512 \end{aligned}$$

له دې سره غونډوسکه په انټروال  $[7; 16]$  کې منځني د  $2,512 \text{ m}$  الوتنجگوالی لري. که سړی دا تلنه په شډلو یا نړیو پلونو (قمونو) واخلي، نو د منځي ارزښت بله لاس ته راوړنه به ترې را ووځي یا لاس ته راشي.

د  $x$ - ارزښتونو  $7; 10; 13; 16$  سره د منځني ارزښت لپاره به  $2,34 \text{ m}$  لاس ته راغلي وای.

د  $x$ - ارزښتونو  $7; 7,5; 8; 8,5; \dots$  سره د منځني ارزښت لپاره به  $2,555 \text{ m}$  لاس ته راغلي وای.

په روښانه تگه لیدل کیږي، چې هرڅومره  $x$ - پلونه نري واخستل شي په همغه اندازه منځني ارزښت ټیک لاس ته راوړل کیږي.

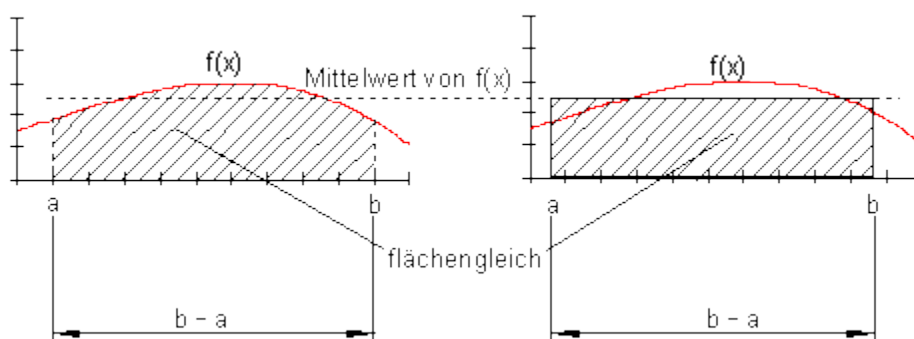
دا تلنار د ټاکلي انتیگرال له لارې غواړو غوره کړو:

للموری نیسو، چې فنکشن  $f(x)$  په انټروال  $[a; b]$  کې تعریف دی یا پیژند لري او زیاتیز یا مثبت. فنکشن د انټروال  $[a; b]$  په منځي کوم ارزښت غوره کوي؟

تاکلی انتیگرال  $\int_a^b f(x) dx$

په انتروال  $[a; b]$  کې د فنکشن د گراف لاندې سطحه انځوروي.

مور اوس د دې په مخ د ولاړگودیز یا مستطیل ډوله، له دې سطحې سره برابره کرښیزه سطحه، په لاندې ډول ږدو:



د ولاړگودیز یا مستطیل پرت ولاړډوله (-عمودي) اړخ د انتروال  $[a; b]$  د اوږدوالي سره یعنې  $b-a$  د سره برابر دی.

داروبښانه کیري، که چیرې د فنکشن  $f(x)$  منځ- ارزښت په انتروال  $[a; b]$  کې په پورته کرښونه کې د ولاړ گودیز د جگوالي په څیر تعریف شي.

$$\bar{f(x)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

د فنکشن  $f(x)$  منځ- ارزښت

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

د یوه دا تالری سره په پرتله کونه

دا زمور په بیلگه باندې په دې معنا دی:



$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ mit } a = 7 \text{ und } b = 16 \text{ folgt:}$$

$$\begin{aligned} \overline{f(x)} &= \frac{1}{16-7} \int_7^{16} \left( -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \right) dx = \frac{1}{9} \left[ -\frac{1}{4 \cdot 288}x^4 + \frac{1}{3 \cdot 16}x^3 \right]_7^{16} \\ &= \frac{1}{9} \left( \left[ -\frac{1}{1152} \cdot 16^4 + \frac{1}{48} \cdot 16^3 \right] - \left[ -\frac{1}{1152} \cdot 7^4 + \frac{1}{48} \cdot 7^3 \right] \right) = \underline{\underline{2,598}} \end{aligned}$$

بال به له دي سره په انټروال [7 ; 16] کې د 2,598 m منځنی جگوالی لرو دي.

ټاکلي انتیگرال له دي سره د جمعی یا زیاتون د کلمی تل پاتي ټولنیزوالی کیری. دا په دي معنا، چې سری هر څومره کوچني x - پلونه واخلي، همغومره سری د فنکشن منځ ارزښت ته نږدی راځي. د زاتونو یا د جمعی د اجزاوو کا اعضاوو گڼون یا تعداد زیاتیږي یا لویږي.

## انالیزی

### --اکسپوننشل توابع او $e$ - توابع

پیل

تراوسه راته معلومو توابعو کي توابع رامنځ ته کیده، چي اکسپوننټونه یا جگعددونه یی عددونه وو:

توانتوابع:  $f(x) = a \cdot x^q$  د  $q \in \mathbb{R}$  سره .

بیلگه:  $f(x) = 2x^3$

توابع د مثبت بنسټ سره، د هغه سره چي خپلواکه متحوله  $x$  د اکسپوننټ یا جگعدد سره رامنځ ته کیږي، اکسپوننشل تابع بلل کیږي.

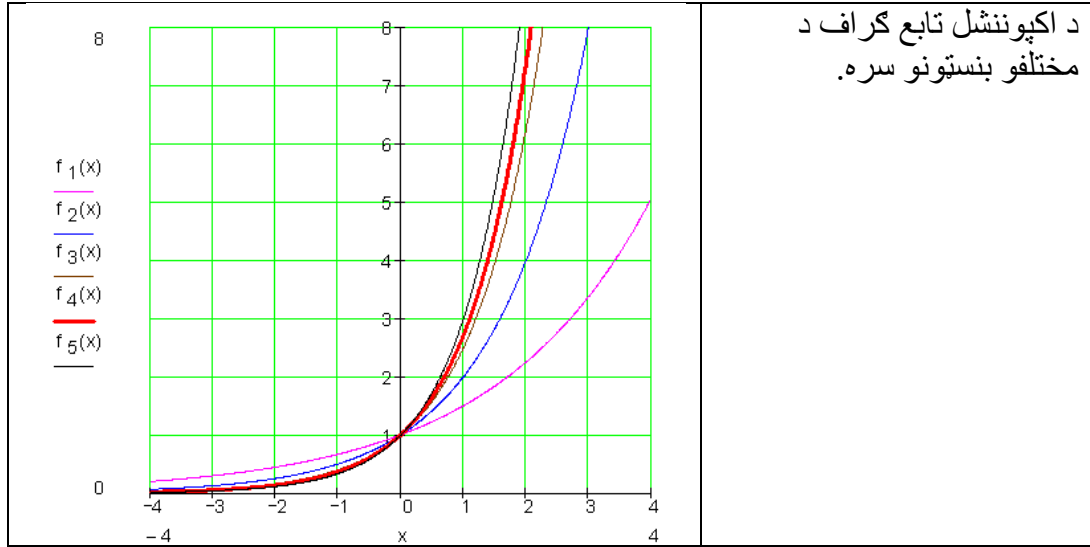
د اکسپوننشل تابع لپاره بیلگه:

$$f_1(x) = 1,5^x \quad f_2(x) = 2^x \quad f_3(x) = 2,5^x \quad f_4(x) = e^x \quad f_5(x) = 3^x$$

اعداد  $e$  ;  $2,5$  ;  $2$  ;  $1,5$  او  $3$  بنسټ جوړوي او  $x$  اکسپوننټ یا جگعدد (جگځن).

بنسټ  $e$  د اویلر عدد باندي مشهور دی او تقریبي ارزښت یی  $2,71828$  دی.

دا به وروسته هم به نورو راوړونو کي غوره رول ولوبوي.



د اکیوننشل تابع گراف د مختلفو بنسټونو سره.

دا سور رنگه انځور د اړونده اکسپوننشل تابع د  $e$  بنسټ پورې اړه لري، چې  $e$  تابع هم بلل کيږي.

پام ته راتلنه يا برېښيدنه:

- ټول په وضعيه قيمتسيسټم کې گرافونه د  $y$  - محور د  $Py (0 | 1)$  په ټکي کې غوڅوي (قطع کوي)

- د منفي  $x$  - ارزښت لپاره ټول گرافونه د  $x$  - محور ته نژدې کيږي. د منفي  $x$  - محور په داسې حالتونو کې اسيمپټوت بلل کيږي. داسې هم ويلاى شو، چې په داسې حالاتو کې د منفي  $x$  - ارزښت ځان اسيمپټوټيکي د  $x$  - محور ته ورنژدې کوي.

په رياضیکي يا شمېرپوهنيز ډول داسې ليکو:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

د مثبت - ارزښت لپاره د تابع ارزښت له ټول پولو اوږي يعنې د ناپای په لور ځي.

شميرپوهنيز ليکدود يې داسې دی:  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$

- په وضعيه قيمتسيستم كې انځور شويو گرافونو ټول تابع ارزښتونه مثبت دي، ځكه چې د اكسپوننشل توابعو لپاره مثبت اجازه لري.

دا په دې معنا چې په داسې حالت كې صفر ځايونه نه شته.

پېژند (هعريف)

د  $f(x) = a^x$  تابع د  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  او  $x \in \mathbb{R}$  سره اكسپوننشل تابع د  $a$  په بنسټ بلل كيري.

دا د  $e$  عدد له كومه منځ ته راځي؟

د ربحي شمېرنې څخه دې عدد  $e$  منځ ته راشي يا وده وكړي.

دلته په هر د فرمولونو ټولگه كې خوندي د ربحي فرمول استعماليري.

$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$	n:	د ربحي د برخي گڼون يا تعداد $K_0$
	$K_0$ :	پيلپانگه $K_n$
	$K_n$ :	كاله ورسته د ربحي برخه $p$
	p:	بنسټ يا بڼه په %

په كلنې گټه دې گټه ونه دوه برابره شي. پس د گټې بڼه له  $p = 100\%$  ټاكل كيري داسې چې  $p/100 = 1$  وي.

په يو كال د ډېرو د گټې برخو سره، پانگه د گټې-گټې سره ډېر ځله په گټه اچول كيري.. دلته د گټې بڼه يا ببخ د گټېبرخو باندي و وېشل شي.

د انگي په گټه اچول د كال روسته د  $p = 100\% \Rightarrow \frac{p}{100} = 1$  سره

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^1 = K_0 (1+1)^1 = \underline{\underline{K_0 \cdot 2}}$$

د پانگي گټونه د يو کال وروسته په نيمکلنه گټونه د  $t \frac{p}{2 \cdot 100} = \frac{1}{2}$  سره.

$$K_2 = K_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,25}}$$

د پانگي گټونه يا په گټي اچونه له يو کال وروسته په مياشتني گټونه د  $t \frac{p}{12 \cdot 100} = \frac{1}{12}$  سره

$$K_{12} = K_0 \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,61\dots}}$$

د پانگي په گټي اچونه له يو کال وروسته په روځني گټونه د  $\frac{p}{360 \cdot 100} = \frac{1}{360}$  سره

$$K_{360} = K_0 \left(1 + \frac{1}{360}\right)^{360} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,7145\dots}}$$

د پانگي گټونه يا په گټي اچونه له يو کال وروسته په ساعته گټونه د  $\frac{p}{8640 \cdot 100} = \frac{1}{8640}$  سره.

$$K_{8640} = K_0 \left(1 + \frac{1}{8640}\right)^{8640} = \underline{\underline{K_0 \cdot \underbrace{2,7181\dots}_{\approx e}}}}$$

د پانگي گټونه يا په گټي اچونه له يو کال وروسته په  $n$  گټونه د  $\frac{p}{n \cdot 100} = \frac{1}{n}$  سره.

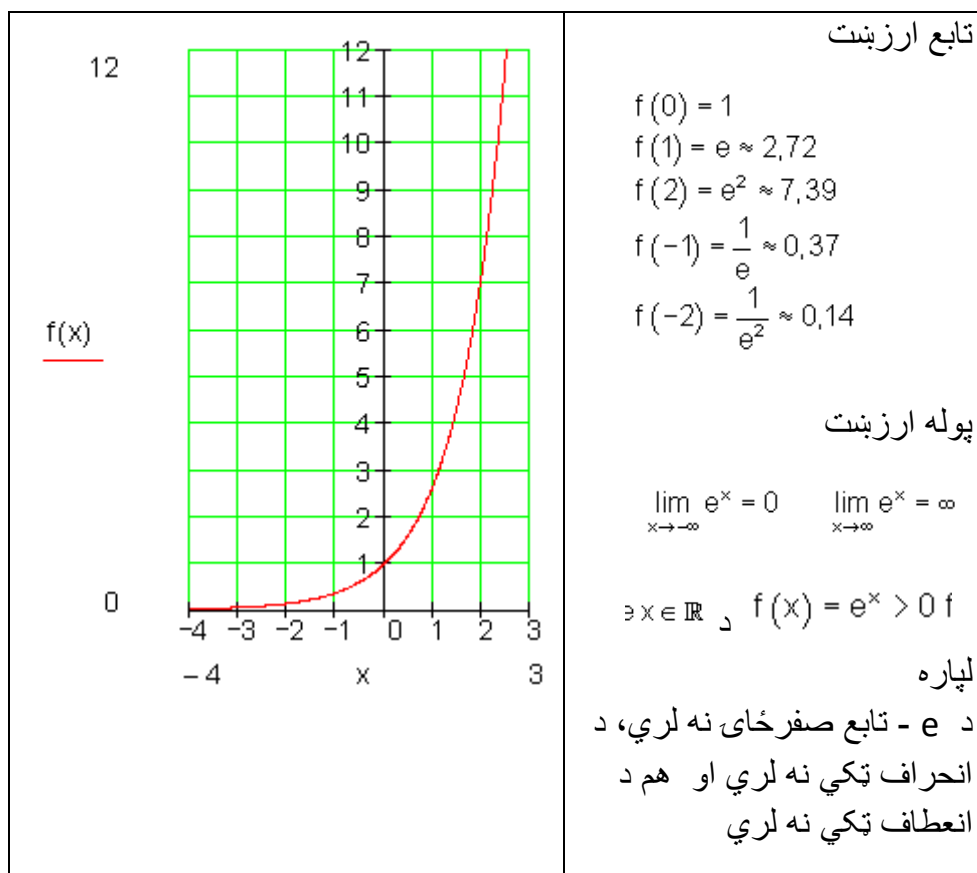
$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

که په هره لحظه میاشتکې په گټه واچول شي ( یعنی په ناپای ډېرو گټونو ناپای  $n \rightarrow$  ) نو د یو کال وروسته لاندې پانگه لاس ته راوړي:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} K_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot e$$

دا په دې معنا چې پانگه د  $e$  ضریب سره ډېرځله شوه،

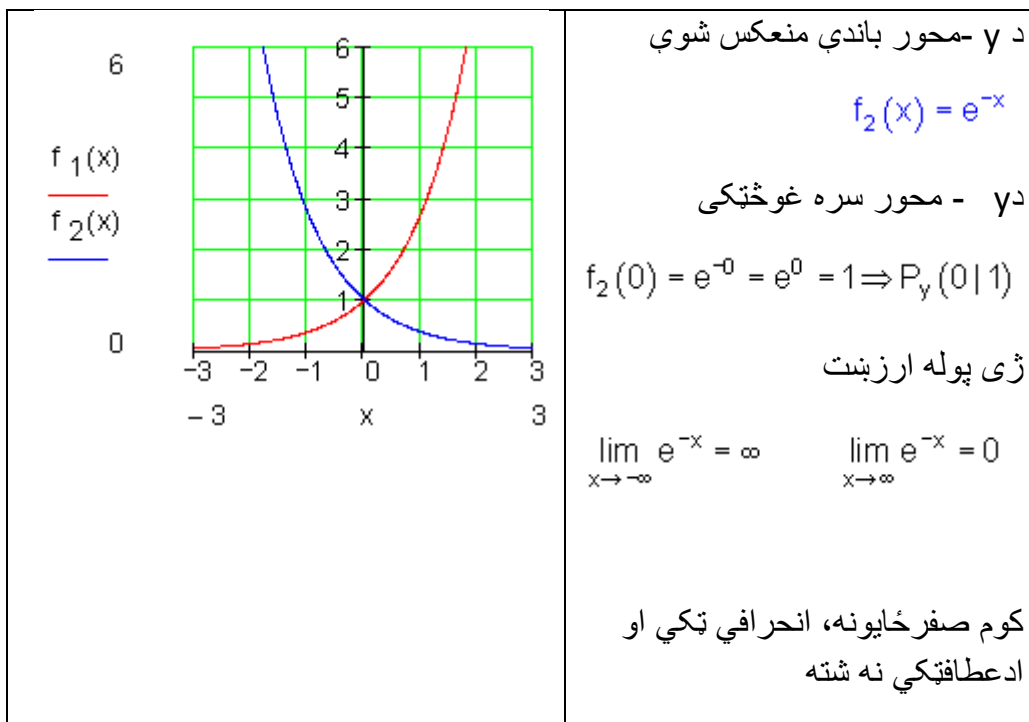
د  $e$ - تابع  $f(x) = e^x$  بنسټیز خویونه



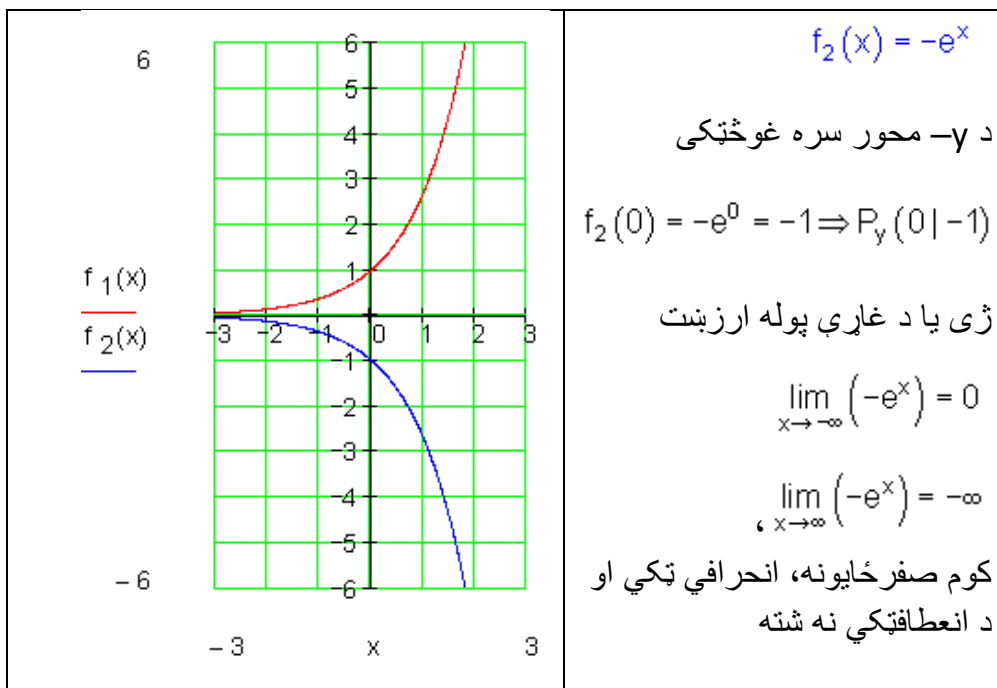
د  $e$  - تابع هندارونه يا معكوسونه، راكښنه او غزونه

په ورته توگه، لكه نورمال پارابولونه د مطلوبه عمليو سره نور پارابولونه منځ ته راځي، كيدى شي د  $e$  - توابعو د گراف د راكښنې، غزونې او هندارونې سره نور اكسپوننشل توابع وگتل يا لاس ته راوړل شي.

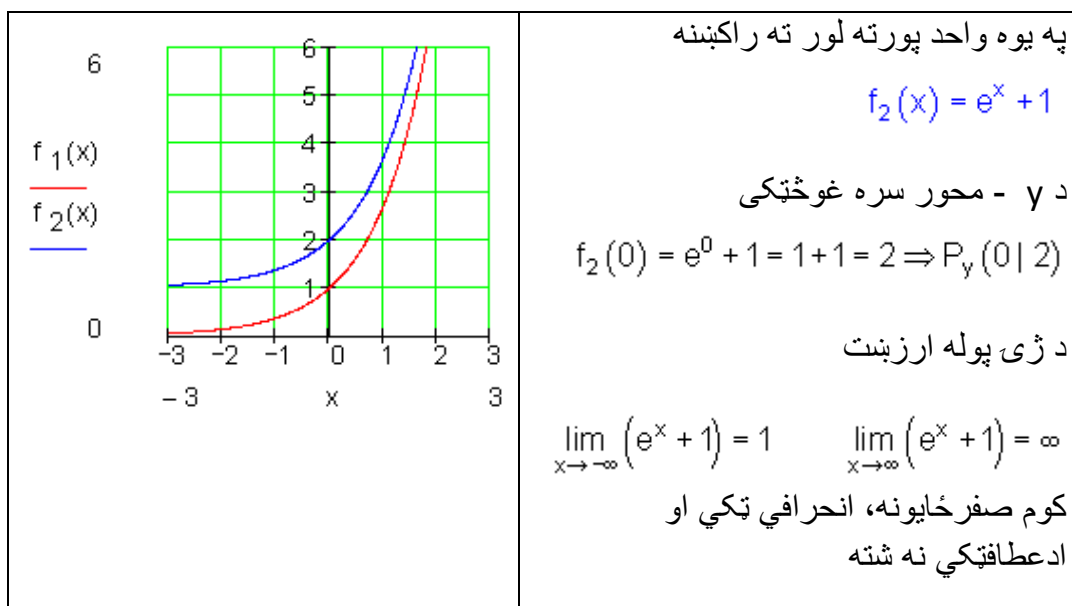
هندارونه يا معكوسونه:



د  $x$  په محور هندارونه

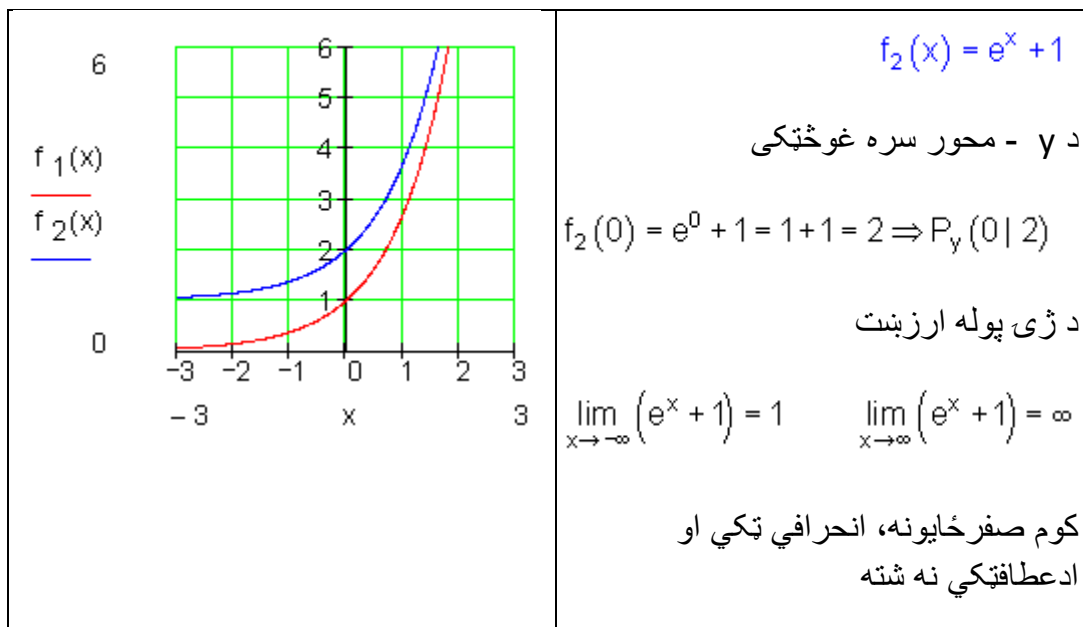


د  $y$  په لور راګڼنه

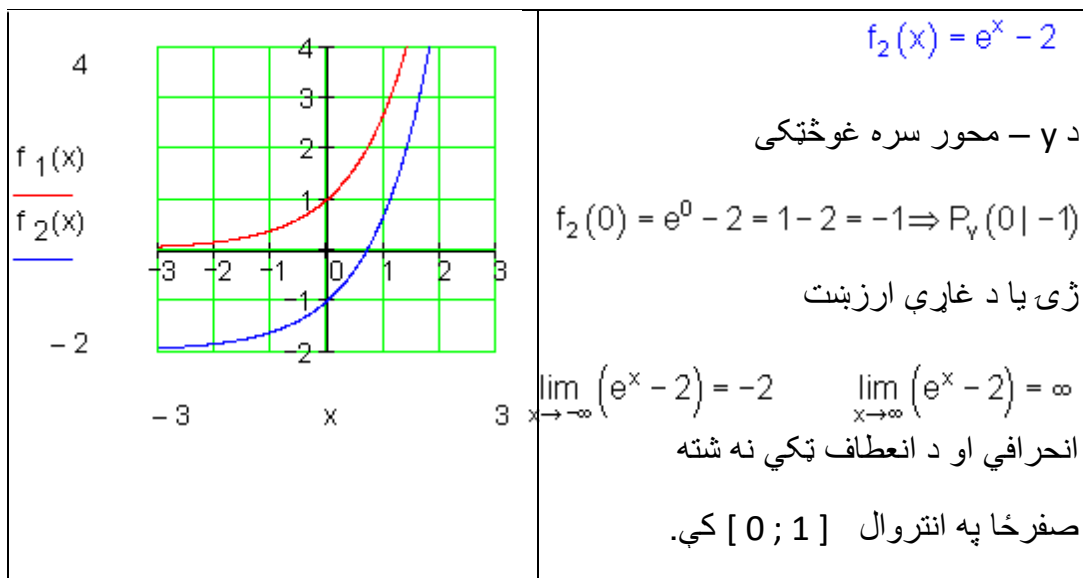




په يوه واحد پورته لور ته راکښنه



په دوه واحده کښته لور ته راکښنه



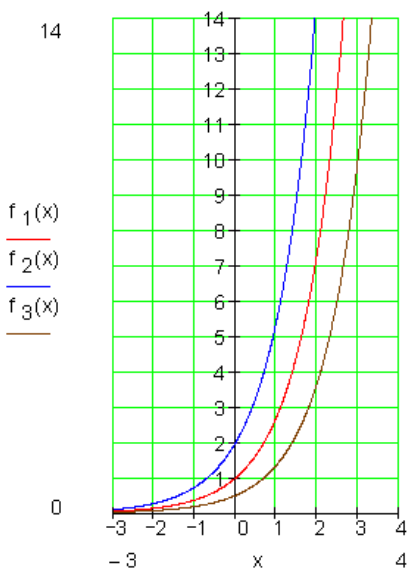
د  $x$  محور باندې راکښنه

<p> <math>f_1(x)</math>  <math>f_2(x)</math> </p>	<p>په يوه واحد کين لور ته راکښنه</p> $f_2(x) = e^{x-1}$ <p>د - محور سره غوڅتکي</p> <p><math>f_2(0) = e^{-1} \approx 0,37 \Rightarrow P_y(0   e^{-1} \approx 0,37)</math></p> <p>ژى يا غاړې پوله ارزښت</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1}) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{x-1}) = \infty$ <p>صفر ځايونه، انحرافي - او د انعطاف تيش نه شته</p>
---	---

په يوه واحد بني لور ته راکښنه

<p> <math>f_1(x)</math>  <math>f_2(x)</math> </p>	$f_2(x) = e^{x-1}$ <p>د y - محور سره غوڅتکي</p> <p><math>f_2(0) = e^{-1} \approx 0,37 \Rightarrow P_y(0   e^{-1} \approx 0,37)</math></p> <p>ژى پوله ارزښت</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1}) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{x-1}) = \infty$ <p>صفر ځايونه، د انحراف ټکي او انعطاف ټکي نه شته</p>
---	---

غزونه (کښکودنه) د y په لور



د ضريب  $k = 2$  سره غزونه

$$f_2(x) = 2 \cdot e^x$$

د  $y$  - محور سره غوڅونه

$$f_2(0) = 2 \cdot e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0 | 2)$$

ژى پوله ارزښت

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 \cdot e^x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2 \cdot e^x) = \infty$$

د ضريب  $k = \frac{1}{2}$  سره کينکودنه

$$f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x$$

د  $y$  - محور سره غوڅونكى

$$f_3(0) = \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_y\left(0 \mid \frac{1}{2}\right)$$

ژى پوله ارزښت

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = \infty$$

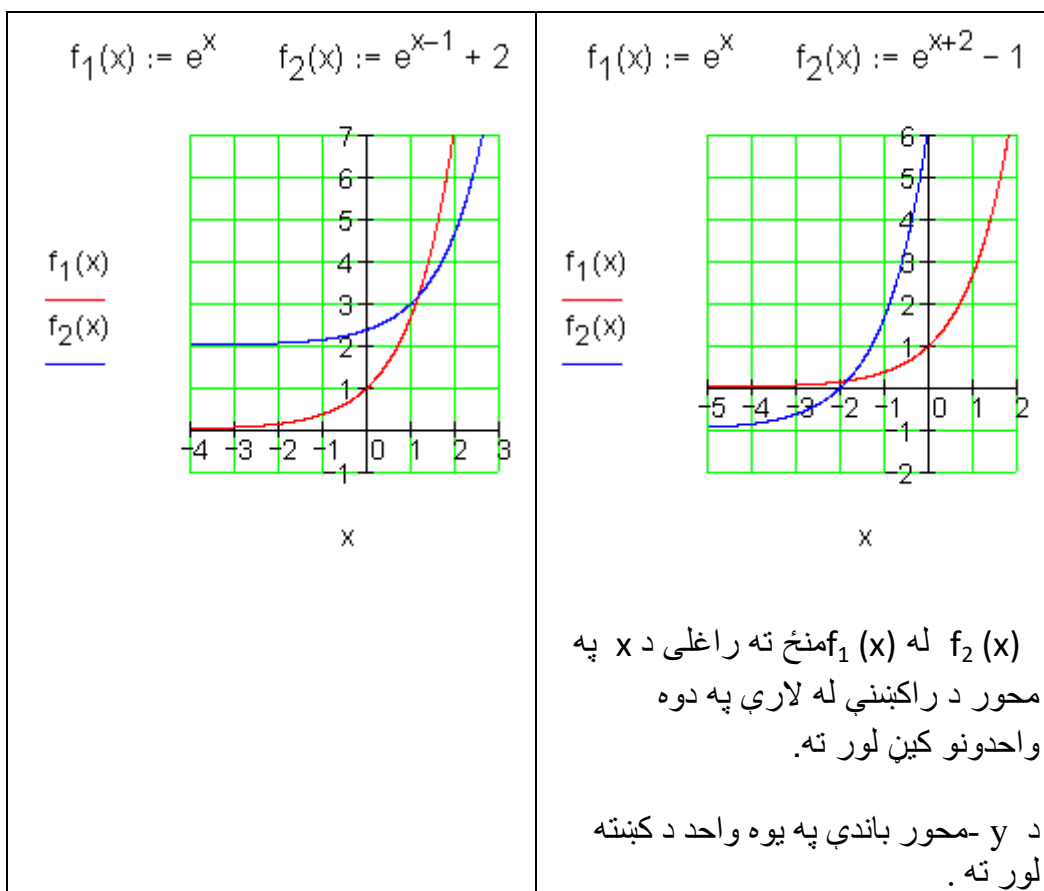
صفر ځايونه، انحرافاتكى او انعطافاتكى نه شته.

غزونه ( کينسکودنه) د  $x$  په لور

<p>14</p> <p><math>f_1(x)</math></p> <p><math>f_2(x)</math></p> <p><math>f_3(x)</math></p> <p>0</p> <p>-3 -2 -1 0 1 2 3 4</p> <p>x</p>	<p>د ضريب <math>k = \frac{1}{2}</math> سره غزونه</p> $f_2(x) = e^{2x}$ <p>د <math>y</math> - محور سره غوڅونه</p> $f_2(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0 1)$ <p>ژی پوله ارزښت</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x}) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2x}) = \infty$ <p>د ضريب 2 سره راکښنه</p> $f_3(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ <p>د <math>y</math> - محور سره غوڅونکی</p> $f_3(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0 1)$ <p>ژی پوله ارزښت</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^{\frac{1}{2}x} \right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{1}{2}x} \right) = \infty$ <p>صفرخايونه، انحراف ارزښتونه او انعطافکي نه شته.</p>
--	--

د  $e$  تابعو هندارونه، راکښنه او غزونه په خوښه يو له بل سره کمينير يا نښلول کېږي يعنې شمېرننزي عمليې په اجرا کېږي شي .

د  $x$  - او  $y$  - محورونو راکښنه:



تمرینونه:

د  $e$  - تابع گراف

د بنسټيزې تابع  $e^x$  راکښنه، هندارونه يا انعکاس ، او بڼه بدلون وښايست. هر تابع گراف او د بنسټيز تابع گراف په يوه مناسب وضعيه قيمتسيستمکي و کارې او د محور سره يې غوڅتکي (د تقاطع نقطه) .

د گراف په مرسته ولولې:

پوله ارزښت يا حد (ليميت) ، صفرخايونه که شته وي او د انعطاف تکي.

يادونه: فقط په آنټروال  $[-10; 10]$  کې تابع ارزښتونه په پام کې ونيسی.

Für د لپاره

اول -  $f(x) = e^x; g(x) = e^{-x}$  für  $[-4; 4]$  دويم -  $f(x) = -e^x$  für  $[-5; 3]$

دريم -  $f(x) = e^{\frac{1}{3}x}$  für  $[-4; 4]$  څلورم -  $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x}$  für  $[-4; 4]$

پنځم -  $f(x) = \frac{1}{2}e^{x+3}$  für  $[-5; 3]$  شپږم -  $f(x) = e^{x-2} - 3$  für  $[-4; 4]$

اوم -  $f(x) = e^{-(x+2)} - 1$  für  $[-5; 3]$

اتم -  $f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)} - 2$  für  $[-2; 6]$

نهم -  $f(x) = -10e^{-\frac{1}{2}(x+4)} + 3$  für  $[-4; 4]$

لسم -  $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{4}x}$  für  $[-10; 5]$

نتيجي:

د اکسپوننشل تابع تمرينونه |

مفصل حل

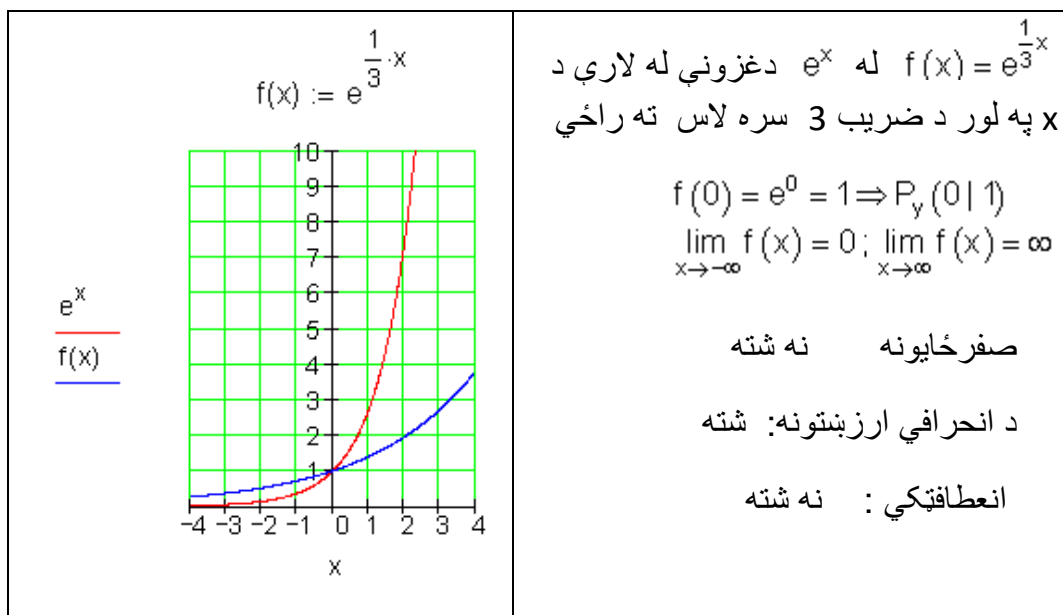
لومړۍ - مفصل حل

$f(x) := e^x$ $g(x) := e^{-x}$		$f(x) = e^x$ بنسټيزه تابع $f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0 1)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $f(x) = e^{-x}$ په $y$ په هنداره شوي $f(0) = e^{-0} = 1 \Rightarrow P_y(0 1)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
-----------------------------------	--	--

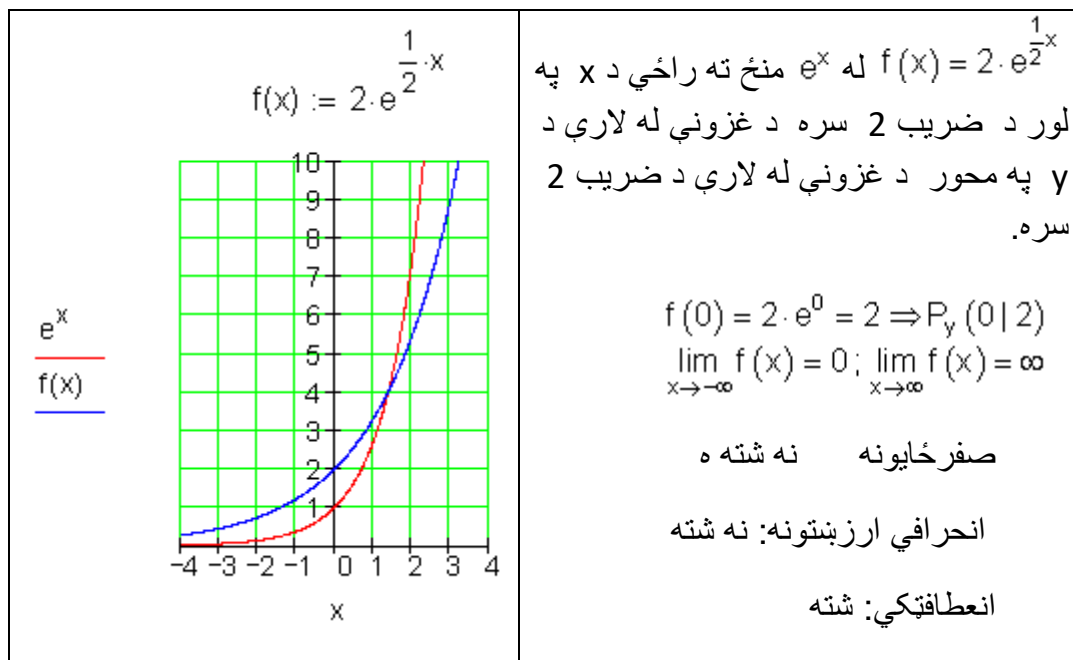
دويم - مفصل حل

$e^x$ $f(x)$		$f(x) = -e^x$ له د -محور سره غوڅتکي لاس ته راځي که په $x$ - محور هنداره شي. $f(0) = -e^0 = -1 \Rightarrow P_y(0 -1)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ صفر ځايونه: نه شته انحرافي ارزښتونه: نه شته انعطافتکي: نه شته
-----------------	--	--

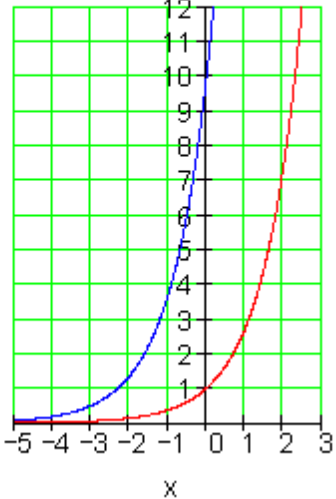
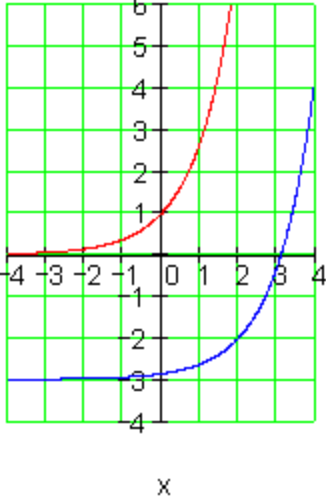
## دریم - مفصل حل

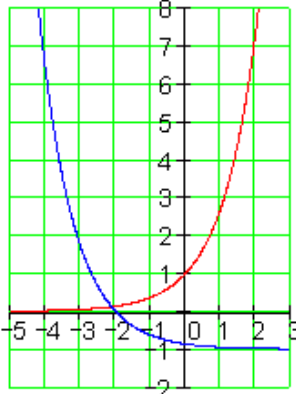
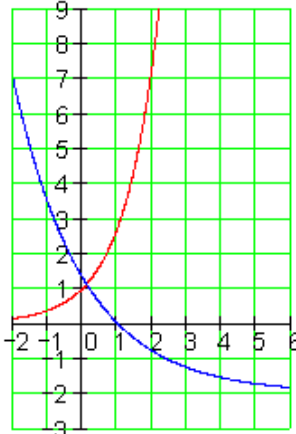


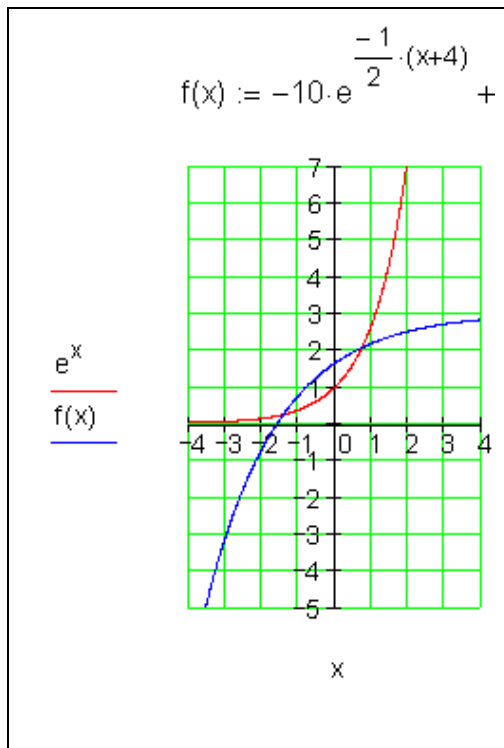
## څلورم - مفصل حل





<p style="text-align: center;"><math>f(x) := \frac{1}{2} \cdot e^{x+3}</math></p> 	<p>پنجم - <math>f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{x+3}</math> له <math>e^x</math> لاس ته راځي د <math>x</math> په منفي لور د راكښني له لاري په 3 كچواحدو، د كينكودلو له لاري د <math>y</math> په لور ر باندې د ضريب <math>1/2</math> سره</p> $f(0) = \frac{1}{2} \cdot e^3 \approx 10$ $\Rightarrow P_y \left( 0 \mid \frac{1}{2} \cdot e^3 \approx 10 \right)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ <p>صفر ځايونه: نه شته افراطي ارزښتونه: شته انعطاف ټكي: شته</p>
<p style="text-align: center;"><math>f(x) := e^{x-2} - 3</math></p> 	<p>شپږم - <math>f(x) = e^{x-2} - 3</math> له <math>e^x</math> منځ ته راځي د منفي <math>y</math> لور باندې په 3 سطحي واحدو، د <math>x</math> په مثبتو لور د راكښني له لاري په 2 سطحي واحدو.</p> $f(0) = e^{-2} - 3 \approx -2,86$ $\Rightarrow P_y \left( 0 \mid e^{-2} - 3 \approx -2,86 \right)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ <p>صفر ځايونه: په <math>x \sim 3,2</math> انحرافي ارزښتونه: نه شته انعطاف ټكي: نه شته</p>

<p style="text-align: center;"><math>f(x) := e^{-(x+2)} - 1</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>x</math></p>	<p>له <math>f(x) = e^{-(x+2)} - 1</math> منځ ته راځي د <math>e^x</math> په محور د هنداروني له لارې، د <math>y</math> په منفي لور په يو سطحې واخذ. د <math>x</math> په منفي لور په 2 سطحې واحده غزول.</p> <p><math>f(0) = e^{-2} - 1 \approx -0,86</math>  <math>\Rightarrow P_y(0   e^{-2} - 1 \approx -0,86)</math>  <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1</math></p> <p>صفر ځايونه: په <math>x \sim -1,8</math> كې انحرافي ارزښتونه: نه شته  انعطاف ټكي: نه شته</p>
<p style="text-align: center;"><math>f(x) := 2 \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot (x-1)} - 2</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>x</math></p>	<p>اتم - <math>f(x) = 2 \cdot e^{\frac{-1}{2}(x-1)} - 2</math></p> <p>له <math>e^x</math> منځ ته راځي د <math>y</math> په محور د هنداروني له لارې د <math>y</math> په منفي لور راکښل په 2 واحده. د <math>x</math> په مثبت لور په 1 سطحې واحد راکښل. د <math>y</math> په مثبت لور په 2 واحده غزوني. د <math>x</math> په لور د 2 واحده سره</p> <p><math>f(0) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 \approx 1,3</math>  <math>\Rightarrow P_y(0   2 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 \approx 1,3)</math>  <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2</math></p> <p>صفر ځايونه: په <math>x \sim 1,2</math> كې انحرافي ارزښتونه: شته  انعطاف ټكي: نه شته</p>



نهم -  $f(x) = -10e^{-\frac{1}{2}(x+4)} + 3$  له  $e^x$  منځ ته راځي د  $y$  په محور هنداروني له اري د  $x$  په محور هنداروني ، د  $y$  په مثبت لور په 3 سطحي واحده را کښنه د  $x$  په منفي لور په 4 سطحي واحده را کښنه د  $y$  په لور غزونه د 10 ضريب سره. د  $x$  په لور غزوني د 2 ضريب سره.

$$f(0) = -10e^{-2} + 3 \approx 1,65$$

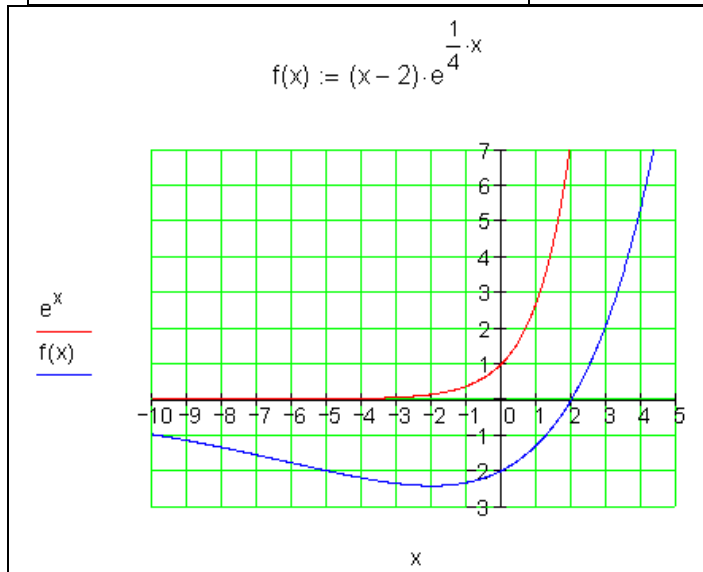
$$\Rightarrow P_y(0 | -10e^{-2} + 3 \approx 1,65)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$$

صفر ځايونه: په  $x \sim -1,6$  کې.

انحرافي ارزښتونه: نه شته

انعطافگي: نه شته



لسم - مفصل حل

کربنيز مساوات  $u(x) = x - 2$  د  $e$ -تابع  $v(x) = e^{\frac{1}{4}x}$  سره نينلول کيږي. له دې دا تابع لاس ته راځي:  $f(x) = u(x) \cdot v(x) = (x - 2)e^{\frac{1}{4}x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

په  $x = 2$  کې صفرځای په  $x \sim -2$  کې د انحراف ارزښت په  $x \sim -6$  کې د انعطاف ټکی.

## د اکسپوننشل توابعو کارونه يا استعمال

### د تابع مساواتو جوړونه

په طبيعت کې يې څيړنه:

د اکسپوننشل توابعو مشتق

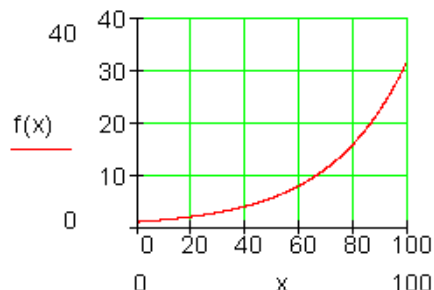
د تابع مساواتو جوړښت

کولي باکټريا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوتي ویش ( حجره وېش) له لارې زیاتږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو کې ځان تجزیه کوي. د غه عملیې لپاره یو ارزښت جدول : او گراف یې کارو. دلته د  $x$  اووښتوني ( متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.

د  $y$  متحوله د باکټريا گانو د تعداد لپاره ده.

$x = \text{Minuten}$	0	20	40	60	80	100
$y = \text{Bakterienzahl}$	1	2	4	8	16	32

پورته جدول کي :  $x =$  دقيقې  $y =$  د بکتریاو تعداد



اوس مو دنده داده تابعيزي (د تابعو-) اړیکي د  $f(x)$  د يوه مساوات په بڼه وټاکو.

هرې ۲۰ دقيقې د بکتریاو تعداد يا گڼون دوه برابره کيږي، دا په دې معنا چې دا د ۲۰ دقيقو وروسته نتيجه د دوه سره ضرب شي

$$\text{لاندي ردو يا ليکو: } f(x) = 2^x$$

دلته  $f(x)$  د بکتریاو تعداد دی او  $x$  د دقيقو تعداد.

د دې تابع مساوات سره د بکتریاو تعداد هره دقيقه دوه برابره کوي.

د بام اوفکر وروسته مور د تابع مساوات لاندي نتيجه ته رسيږو، چې دا شي حالت ټيک روښانه کوي يا تشریح کوي:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{20}x}$$

$$\text{Probe: } x = 0 \Rightarrow f(0) = 2^0 = 1; x = 20 \Rightarrow f(20) = 2^1 = 2; x = 40 \Rightarrow f(40) = 2^2 = 4$$

دېروالی، لکه چې دلته مو راوړ ، د اکسپوننشل ودې يا - زیاتوالي په نامه نوموړ. يوه تابع چې داسې يوه تلنه تشریح کوي، اکسپوننشل تابع بولو.

## تمرینیزی پوښتنی

د اکسپوننشل تابع د تابع مساوات د لاندې شرایطو سره باید څنگه وبرېښي:

الف - د باکتریو تعداد (گنون) هر یخلس دقیقې دوه برابره کیږي.

ب - هر دېرش دقیقې د باکتریو تعداد درې برابره کيږي.

پ - مور په مطالعه یا کتلو پیل کوو، چې  $n_0 = 1000\ 000\ 000$  د باکتریو تعداد شته یا موجود وي او تعداد یې هر پنځه څلوېښت دقیقې پنځه برابره کیږي.

ت - د کتلو پیل سره  $n_0 = 1000\ 000\ 000$  باکترېي شته دي او هرې 45 min دقیقې د باکتریو تعداد د  $e = 2,718$  په ضریب یا څلوني زیاتېږي.

هر لس دقیقې د  $n_0$  تعداد نیمېږي.

حل :

$$\text{الف } f(x) = 2^{\frac{1}{15}x} \text{ ب - } f(x) = 3^{\frac{1}{30}x}$$

$$\text{پ - } f(x) = 1000\ 000\ 000 \cdot 5^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^9 \cdot 5^{\frac{1}{45}x}$$

$$f(x) = 100\ 000 \cdot e^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^5 \cdot e^{\frac{1}{45}x} \text{ mit } e = 2,718$$

$$\text{ت - } f(x) = n_0 \cdot 2^{-\frac{1}{10}x} \text{ = منفي پېرېدنه}$$

پام : توابع چي د زياتيدو پروسې څېري، اکسپوننشل توابع بلل کيږي. ټوليز تابع مساوات يې دي:

$$f(x) = n_0 \cdot a^{k \cdot x}$$

$n_0 =$  تعداد د  $t$  په وخت  $= 0$  ،  $a \in \mathbb{R}^+$  ;  $k, x \in \mathbb{R}$  ،  $n_0 =$  Anzahl zur Zeit  $t = 0$

سره د وخت

اکسپوننشل ډېرېدنه يا اکسپوننشل کيدنه د ژوند په زياتو ورشو گانو کې کتل کيدای شي:

په بيالوژي کې ( د باکټريو ډېرېدنه او کميدنه)

په اوکولوگي کې ( د حيواناتو ډېرېدنه يا زېږنده)

په اقتصاد کې ( د ربح له لارې د پانگې زياتيدنه)

په فزيکي او تخنيکي مسائلو کې ( د راديو اکتيو موادو تجزيه)

په روغتيا کې ( د دوا اغيزه)

**د e - تابع ته ځانگړې بيلگې**

اکسپوننشل وده کونه

د باکټريا شتون د يوه e -تابع وروسته زياتيږي.

د  $n_0 = 2000$  باکټرياگانې شتون په ۴ ساعتونو کې په کوم ارزښت زياتيږي.

له څومره ساعته وروسته دا باکتریاوي  
 وخت په ساعت = t سره 10 000 ته جگيري؟  
 د تابع گراف څنگه بریښي؟

د باکتریاو تعداد له څلور ساعته وروسته:

$$f(x) = n_0 \cdot e^{k \cdot x} \Rightarrow f(4) = 2000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot 4} = \underline{\underline{2600}}$$

له څو ساعته وروسته دا باکتریا وي 10 000 دي؟

$$f(x) = 2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t} = 10\,000 \quad \text{ا بڼونه:}$$

د دې لپاره چې جگ عدد يا گن t وټاکلی شو، نو باید اکسپوننشل مساوات

$$2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t} = 10\,000 \quad \text{حل کړو.}$$

دا د لوگاریتم سره کیدی شي. د دې لپاره باید لاندې د لوگاریتم قوانین وکارول شي:

$$\ln e^x = x \quad \text{او} \quad \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

د اکسپوننشل مساوات حل:

$$\ln \left( 2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t} \right) = \ln 10\,000$$

$$\Leftrightarrow \ln 2\,000 + \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t = \ln 10\,000 \quad | -\ln 2\,000$$

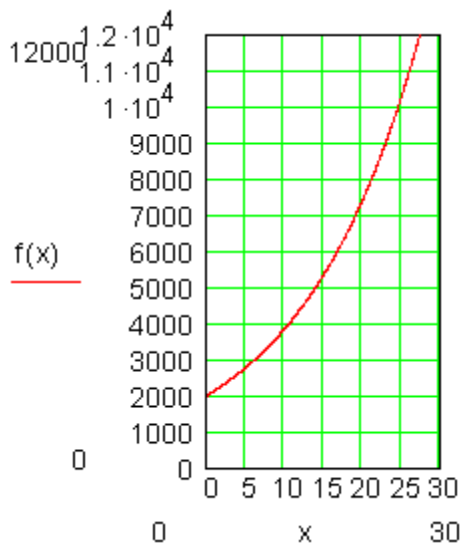
$$\Leftrightarrow \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t = (\ln 10\,000 - \ln 2\,000) \quad | \cdot \frac{262\,551}{17\,221}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 24,54$$



د نږدې 24,5 ساعته وروسته

10000 باکتریاوي دي



اکسپوننشل کمیدنه یا کمښت

رادیو اکتیو مواد په برابر وخت کې تل به همغه ضریب تجزیه کېږي.

د هغو نیم ارزښت وخت څخه لرو، چې له نیم وخت وروسته څومره فعالیت شتون لري. فعالیت  $A(x)$  په  $\text{dkg}$  گاپیکورل (تجزیه په ثانیه کې  $1 \text{ MBq} = \text{Megabecquerel}$  )  $10^6 \text{ Zerfälle pro Sekunde}$  کچ یا اندازه کېږي.

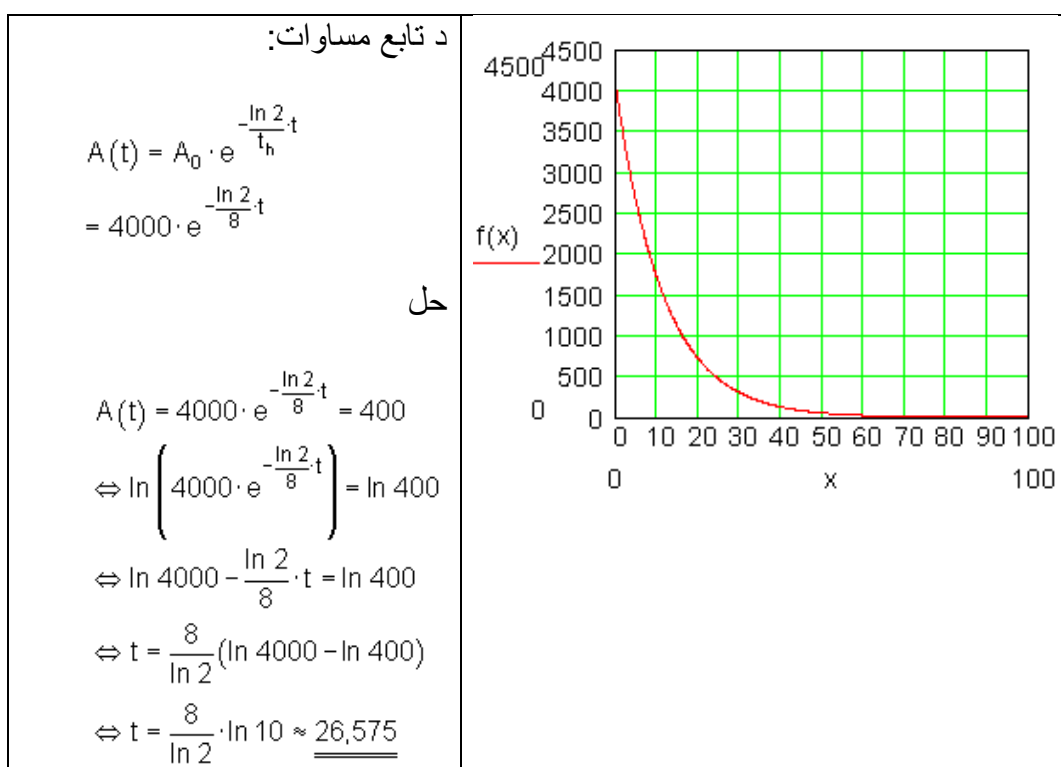
د طبي معاینو لپاره یو د  $\text{Jod } 131$  د 1 نیم ارزښت وخت  $(t_h)$  8 روحي کارول کېږي.

ناروغ ته  $A_0 = 4000 \text{ MBq}$  ورکول کېږي.

د څومره نيم ارزښتوخت يا همداسي روځو وروسته په بدن کې د پاتې فعاليت ماکسيمال تردې وخته 400 MBq دی؟

گراف رسم کړی ، تقريبي وخت ولولی او ټيک ارزښت يې وشمېری.

د راديو اکتیو تجزيې قانون:  $A(x) = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_h} \cdot t}$   
 دلتې په معنا دی: پيلفعاليت په MBq نيمارزښت وخت =  $t_h$  په روځو ،  $t$  وخت په روځو.



د 27 روځو وروسته، نژدې له 3 نيمارزښت وخت وروسته کمښت په بدن کې نژدې 400 MBq دی.

د عدد  $e$  ، طبيعي لوگاريتم او د  $e$  - تابع

$$e = 2,718\ 281\ 828\dots$$

$$e^{\ln b} = b$$

$$\ln e^x = x$$

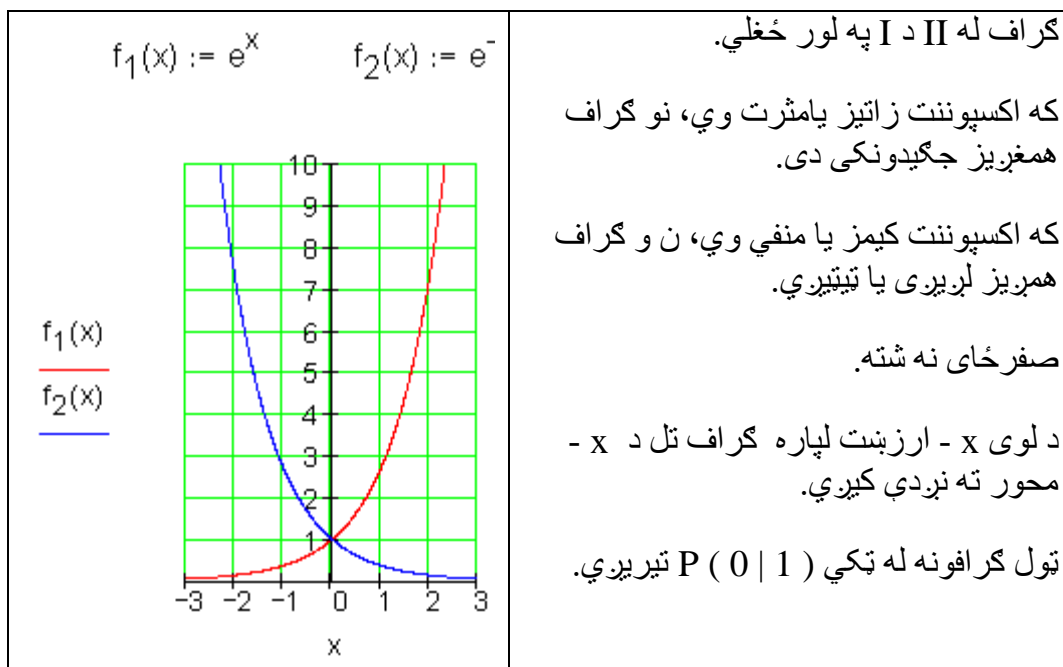
$$\ln 1 = 0$$

$$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$$

$$\text{z.B. } e^{\ln(x-1)} = x-1$$

$$\text{z.B. } \ln e^{-\frac{1}{k}x} = -\frac{1}{k}x$$

$$\ln e = 1$$



هر اکسپوننشل تابع يا بلواک د  $e$  -تابع له لاري کښل کيدی شي.

Mit  $f(x) = a^x$  und  $a = e^{\ln a}$  gilt:

$$f(x) = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x} = e^{x \ln a}$$

له دې بنسټه به په لاندې برخه کې داکسپوننشل تابع فقط د  $e$  -تابع تر څيړني لاندې ونيل شي.

دریم: محور غوڅټکي او اکسپوننشل مساوات

پیلېلکي

بیلگه ۱

د لاندې تابع غوڅټکي یا نقاط تقاطع باید وټاکل شي:

$$f(x) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)}$$

د  $y$ -محور سره غوڅټکي د لاندې ایښوونې له لارې پیدا کیدی شي:

$$y_s = f(0)$$

$$f(0) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(0+4)} = -\frac{3}{4} \cdot e^{-2} \approx -0,102 \Rightarrow P_y \left( 0 \mid -\frac{3}{4} \cdot e^{-2} \approx -0,102 \right)$$

د  $x$ -محور سره غوڅټکي د لاندې ایښوونې څخه لاس ته راځي:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)} = 0$$

له دې لاس ته راځي چې غوڅټکي نه شته، ځکه چې  $e^{-\frac{1}{2}(x+4)} \neq 0$  دی د ټول  $x \in \mathbb{R}$  لپاره.

د  $x$ -محور سره غوڅټکي د  $f(x)$  د صفرځایونو له لارې پیدا کیري. تابع  $f(x)$  صفرځای نه لري، ځکه چې دا د  $x$  په لور غزېدل او د  $x$  په لور راکښلي  $e$  -تابع دی. دا برسیره پرته له دې د  $y$ -محور او  $x$ -محور باندې هنداره یا منعکس شوی دی،

د اکسپوننشل تابع بڼه  $f(x) = a \cdot e^{u(x)}$  د  $a \in \mathbb{R}$  سره د  $y$ -محور سره فقط يو غوڅتکی لري مگر کوم صفرخای نه لري. ځکه  $e^{u(x)} \neq 0$  د ټول  $x \in \mathbb{R}$  لپاره.

بیلگه ۲ :

د لاندې تـhبع غوڅتکي غواړو پيدا کړو

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1}$$

د  $y$ -محور سره غوڅتکی:  $y_s = f(0)$

$$y_s = f(0) = \frac{1}{2} \cdot e^1 - 2 \cdot e^1 = -\frac{3}{2} \cdot e \approx -4,08 \Rightarrow \underline{\underline{P_y \left( 0 \mid -\frac{3}{2} \cdot e \approx -4,08 \right)}}$$

د دې لپاره چې د  $x$ -محور سره غوڅتکي وټاکلی شو، دا کار ستر دی. د دې لپاره د  $f(x)$  صفرخایونه باید وټاکل شي.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1}$$

د  $x$  محور سره غوڅتکی:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1}}_{\text{Exponentialgleichung}} = 0$$

اکسپوننشل مساوات

د دې لپاره چې د  $x$ -محور سره غوڅتکی، يعني د اکسپوننشل تابع صفرخای وټاکو، دا په ډيرو حالتونو کې غوښتونى دى، چې اکسپوننشل تابع حل کړو.

د دې معلومو عمليو د پاسه يا پرته، کوم چې د مساوات د حل لپاره کارول کيږي، د اکسپوننشل مساوات د حل لپاره اړين دى، چې د توان- او لوگارېتم قونين راته جوت وي.

$\frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1} = 0 \mid + 2 \cdot e^{x+1}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} = 2 \cdot e^{x+1} \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow e^{2x+1} = 4 \cdot e^{x+1} \mid : e^{x+1}$ $\Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}} = 4 \mid \text{توانقانون}$ <p>اکسپوننت ساده کونه</p> $\Leftrightarrow e^{2x+1-(x+1)} = 4 \mid$ <p>لوگاريتمونه <math>\ln(\ ) \Leftrightarrow e^x = 4 \mid</math></p> <p>د لوگاريتم قانون <math>\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(4) \mid</math></p> $\Leftrightarrow x \cdot \underbrace{\ln(e)}_1 = \ln(4)$ $\Leftrightarrow x = \ln(4) \approx 1,39 \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_x(\ln(4) \approx 1,39 \mid 0)}}$	
--	--

د توان – او لوگاريتم قوانين

د توان – او لوگاريتم غوره قوانين سره رايوځای کړي.

توانقوانين:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

د لوگاریتم تعریف:

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$	$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln(b)$	$10^x = b \Leftrightarrow x = \lg(b)$
---	--------------------------------------	---------------------------------------

د لوگاریتم قوانین د  $e$  په بنسټ

$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$a = e^{\ln(a)}$	$e^0 = 1$
$\ln(b^c) = c \cdot \ln(b)$	$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$	$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$

تمرینونه:

د توان او لوگاریتم قوانینو استعمال.

د لاندې توان او لوگاریتمي ترمونو د توان او لوگاریتمي قوانینو په استعمال سره بڼه بدله کړی.

اول -  $(e^x + e^{-x})^2$  دویم -  $(e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x$

دریم -  $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$  څلورم -  $e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3}$

پنځم -  $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$  شپږم -  $e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)}$

$$\text{اوم - } \ln(2e^2) + \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \text{اتم - } \ln(e^2) - 3\ln\left(\frac{e}{2}\right)$$

$$\text{نهم - } e^{\ln(k)+1} \text{ لسم - } \frac{2}{3} e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}$$

د اکسپوننشل مساوات لپاره د حل لاري

د اکسپوننشل مساوات له لاري حل

يو اکسپوننشل مساوات دی، د لاندې بڼه بدلون له مخي

چي د اکسپوننشل مقابسي سره حل کیدی شي.

يو حل د اکسپوننشل مقابسي له مخي فقط هلته ممکن دی، که وکړای شو، د مساوات دواړه خواو ته ترمونه په داسي بڼه وليکلای شو، چي د برابر بنسټ سره توانونه لاس ته راوړو. متأسفانه چي دا تل شوني نه دي لکه لاندې بيلگه به چي وښايي:

د اکسپوننشل مساوات لپاره د حل لاري

د اکسپوننشل پرتله کوني له لاري حل

$$e^{2x+4} - e^{x-1} = 0$$

اکسپوننشل مساوات دی، چي له لاندې بڼه بدلون

$$e^{2x+4} = e^{x-1}$$



له لاري د اکسپوننش پرتله کوني سره حل کیدی شي.

$$e^{2x+4} = e^{x-1} \Leftrightarrow 2x+4 = x-1 \Leftrightarrow 2x+4 = x-1 \Rightarrow \underline{x = -5}$$

ازماښت:

$$e^{-10+4} - e^{-5-1} = e^{-6} - e^{-6} = 0$$

د اکسپوننش له لاري حل فقط هلته شوني دي، چې که وکړای شو، چې په دوو لورو ترم داسې بڼه بدل کړو، چې د برابر بنسټ سره توانونه لاس ته راوړو. دا متأسفانه تل شوني نه دي، لکه چې لاندې بیلگه يې په گوته کوي:

د لوگارېتموس سره حل

$$\frac{1}{2e^x} - 3 = 0 \mid +3 \Leftrightarrow \frac{1}{2e^x} = 3 \mid \cdot 2e^x \Leftrightarrow 1 = 6 \cdot e^x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{6}$$

دلته اکپوننشله مقایسه شوني نه ده.

دا د لوگارېتم نیولو له لاري کیدی شي:

$$\ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow x \cdot \underbrace{\ln(e)}_1 = \underbrace{\ln(1)}_0 - \ln(6) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\ln(6)}}$$

دا په لوگارېتم نیولو سره پیل په زیاتو حالتونو کې بریاو ته بیایي. مگر یا اگر چې اکسپوننشلمساوات، په کومو کې چې جمعه یا تفریق منځ ته راشي، نه شي کیدی لوگارېت يې ونیول شي. دلته هڅه کیدی شي، دا د بدلون (د ځای نیونکي واریابلي ایښوونه) له لاري حل کړو.

د بدلون (په ځای د بلي متحولي ایښول) له لار حل

$$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \quad \text{بدلون: } e^x = u \text{ und } e^{2x} = u^2$$

$$\Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$$

مربع مساوات دی د  $u_1 = 1; u_2 = 4$  حل سره

په څټ بدلون او د لوگارېتم نیولو له لارې حل.

$$u_1 = e^{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = \ln(1) = 0$$

$$u_2 = e^{x_2} = 4 \Rightarrow x_2 = \ln(4)$$

اکسپوننشل مساوات ته مفصلي بېلگي

بېلگه ۱:

$2e^{3x} - 6e^x = 0 \mid + 6e^x$ $\Leftrightarrow 2e^{3x} = 6e^x \mid : 2$ <p>د لوگارېتم نیولو له لار حل</p> $\Leftrightarrow e^{3x} = 3e^x \mid \ln( )$ $\Leftrightarrow \ln(e^{3x}) = \ln(3 \cdot e^x)$ $\Leftrightarrow 3x \cdot \ln(e) = \ln(3) + \ln(e^x)$ $\Leftrightarrow 3x \cdot \ln(e) = \ln(3) + x \cdot \ln(e)$ $\Leftrightarrow 3x = \ln(3) + x \mid - x$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(3) \mid : 2$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(3)$	<p>ازمایینت</p> $2e^{3 \cdot \frac{1}{2} \ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2} \ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2e^{\frac{3}{2} \ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2} \ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2(e^{\ln(3)})^{\frac{3}{2}} - 6(e^{\ln(3)})^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} - 6 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 6 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0 (w)$
--	---

بېلگه ۲:

ازمايېنت	
$x \cdot e^x - 3x = 0$ $\Leftrightarrow x(e^x - 3) = 0$ $\Rightarrow \underline{x_1 = 0} \text{ und}$ $e^x - 3 = 0 \mid +3$ <p>د لوگاريم له لارې حل</p> $\Leftrightarrow e^x = 3 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow \underline{x_2 = \ln(3)}$	$x_1 = 0$ $0 \cdot e^0 - 3 \cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 \cdot 1 = 3 \cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 = 0 (w)$ $x_2 = \ln(3)$ $\ln(3) \cdot e^{\ln(3)} - 3 \cdot \ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow \ln(3) \cdot 3 - 3 \cdot \ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow 3 \cdot \ln(3) - 3 \cdot \ln(3) = 0 (w)$

بيلگه ۳:

$$: u = e^x \Rightarrow u^2 - \frac{17}{2}u + 4 = 0 \quad \text{بدلون} \quad e^{2x} - \frac{17}{2}e^x + 4 = 0 \quad \text{ع}$$

د مربع مساوات حل

په څټ بدلون

$$p = -\frac{17}{2}; q = 4;$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{289}{16} - \frac{64}{16} = \frac{225}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{15}{4}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$u_1 = \frac{17}{4} + \frac{15}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

$$u_2 = \frac{17}{4} - \frac{15}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$u_1 = 8 \Leftrightarrow e^x = 8 \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(8)$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_1 = \ln(8)}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(1) - \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_2 = -\ln(2)}$$

بيلگه ۴:

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{1+e^x} = -2 \frac{e^x - 4}{(1+e^x)^2} \quad | : 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{1+e^x} = -\frac{e^x - 4}{(1+e^x)^2} \\
 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot (1+e^x)}{(1+e^x)(1+e^x)} = -\frac{e^x - 4}{(1+e^x)^2} &\Leftrightarrow \frac{(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^x - 4}{(1+e^x)^2} \quad | \cdot (1+e^x)^2 \\
 \Leftrightarrow 1+e^x = -(e^x - 4) &\Leftrightarrow 1+e^x = -e^x + 4 \quad | +e^x - 1 \\
 \Leftrightarrow 2e^x = 3 \quad | \ln(\ ) &\Leftrightarrow \ln(2 \cdot e^x) = \ln(3) \\
 \Leftrightarrow \ln(2) + \ln(e^x) = \ln(3) &\Leftrightarrow \ln(2) + x \cdot \ln(e) = \ln(3) \\
 \Leftrightarrow \ln(2) + x = \ln(3) \quad | -\ln(2) &\Leftrightarrow x = \ln(3) - \ln(2) \\
 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)
 \end{aligned}$$

بيلگه ۵:

$$e^{2x+4} - 3e^{x+2} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2(x+2)} - 3e^{x+2} + 2 = 0$$

$$\text{Substitution: } u = e^{x+2} \Rightarrow u^2 - 3u + 2 = 0$$

په خت بدلون

د مربع مساوات حل

$$\begin{array}{l}
 u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{x+2} = 2 \quad | \ln(\ ) \\
 \Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(2) \\
 \Leftrightarrow x+2 = \ln(2) \quad | -2 \\
 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -2 + \ln(2)}} \\
 \\
 u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{x+2} = 1 \quad | \ln(\ ) \\
 \Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(1) \\
 \Leftrightarrow x+2 = 0 \quad | -2 \\
 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 p = -3; q = 2; \\
 D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{1}{2} \\
 u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \\
 u_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\
 u_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1
 \end{array} \right.$$

تمرینونه: اکسیوننشلمساوات.  
لاندي اکسیوننشلمساوات تاسوته له معلومي لاري وشمیری.

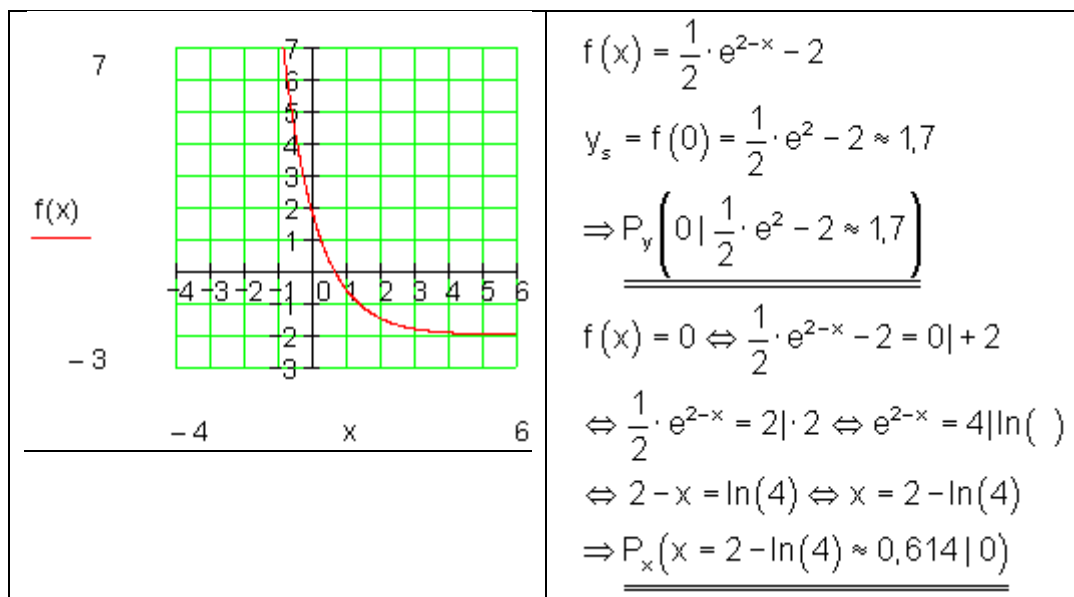
$$\frac{1}{2}e^x - e^{x+1} = 0 \quad \text{دريم} \quad \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1 \quad \text{دويم} \quad 6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0 \quad \text{اول}$$

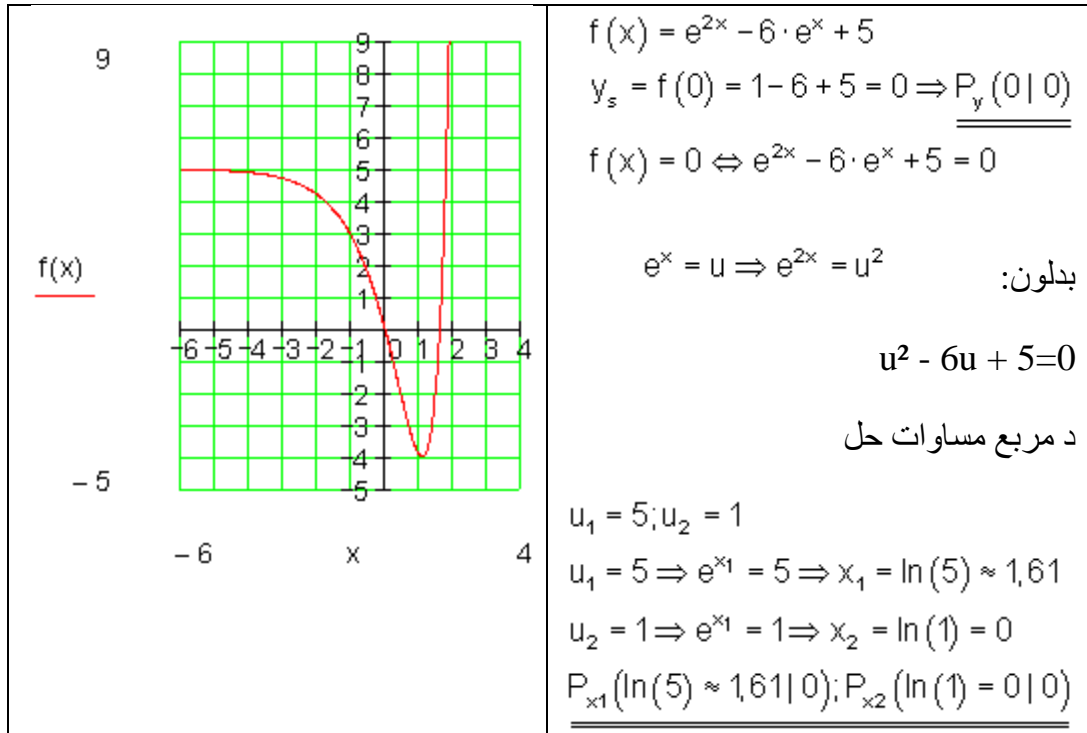
$$\text{څلورم} \quad (3+2x)e^{x-1} = 0 \quad \text{پنځم} \quad -2x^2e^{-x+2} = 0$$

$$\text{شپږم} \quad -\frac{1}{5}e^x - 1 + 10e^{-x} = 0 \quad \text{اوم} \quad 4 - 3e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{اتم} \quad -\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x}$$

$$\text{نهم} \quad \frac{2x}{e^x+1} = 0 \quad \text{لسم} \quad (2-e^x)^2 = (e^x-3)^2$$

د محورونو غوڅتکي وشمیری





حلونه

تمرینونه توان او د لوگاریتم قوانین

نتیجی

$$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2 \quad \text{اول -}$$

$$(e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x = e^{2x} + 5 \cdot e^x - 1 \quad \text{دویم -}$$

$$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{4x-1} \quad \text{دریم -}$$

$$e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3} = \frac{1}{e} \quad \text{څلورم -}$$

$$\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2 = 0 \quad \text{پنځم -}$$

$$e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)} = -2k \quad \text{شپږم -}$$

$$\ln(e^2) - 3\ln\left(\frac{e}{2}\right) = 3 \cdot \ln(2) - 1 \quad \text{اوم -}$$

$$\ln(2e^2) + \ln\left(\frac{e}{2}\right) = 3 \quad \text{اتم -}$$

$$e^{\ln(k)+1} = k \cdot e \quad \text{نهم -}$$

$$\frac{2}{3} e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)} = \frac{8}{9k} \quad \text{لسم -}$$

مفصل حلونه

اول -

$$\begin{aligned} (e^x + e^{-x})^2 &= e^x \cdot e^x + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot e^{-x} \\ &= e^{x+x} + 2 \cdot e^{x-x} + e^{-x-x} \end{aligned}$$

$$= e^{2x} + 2 \cdot e^0 + e^{-2x}$$

$$\text{د } e^0 = 1 \text{ سره کيږي}$$

$$= e^{2x} + 2 \cdot 1 + e^{-2x} = \underline{\underline{e^{2x} + e^{-2x} + 2}}$$

دويم -

$$\begin{aligned}(e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x &= e^x \cdot e^x - e^{-x} \cdot e^x + 5 \cdot e^x \\ &= e^{x+x} - e^{-x+x} + 5 \cdot e^x \\ &= e^{2x} - e^0 + 5 \cdot e^x = e^{2x} - 1 + 5 \cdot e^x = \underline{\underline{e^{2x} + 5 \cdot e^x - 1}}\end{aligned}$$

دريم -

$$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{3x+1} \cdot e^{-(-x+2)} = e^{3x+1-(-x+2)} = e^{3x+1+x-2} = \underline{\underline{e^{4x-1}}}$$

خلورم -

$$e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3} = e^{-x+(-x+2)+2x-3} = e^{-x-x+2+2x-3} = e^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

پنجم -

$$\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2 = e^{-2x} + 3 \cdot e^{-2x} - \left(\frac{4}{e^{2x}}\right) = 4 \cdot e^{-2x} - 4 \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{0}}$$

شپيرم -

$$e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)}$$

$$د \quad e^{\ln(x)} = x \text{ سره کيري}$$

$$e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)} = 2k - 2k \cdot 2 = 2k - 4k = \underline{\underline{-2k}}$$

اوم -

$$\ln(e^2) - 3 \ln\left(\frac{e}{2}\right) = 2 \cdot \ln(e) - 3[\ln(e) - \ln(2)]$$



د  $\ln(e) = 1$  سره کيږي

$$= 2 \cdot 1 - 3[1 - \ln(2)] = 2 - 3 + 3 \cdot \ln(2) = \underline{\underline{3 \cdot \ln(2) - 1}}$$

اتم -

$$\begin{aligned} \ln(2e^2) + \ln\left(\frac{e}{2}\right) &= \ln(2) + \ln(e^2) + \ln(e) - \ln(2) \\ &= \ln(2) + 2 \cdot \ln(e) + \ln(e) - \ln(2) = 3 \cdot \ln(e) = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

نهم -

$$e^{\ln(k)+1} = e^{\ln(k)} \cdot e^1 = \underline{\underline{k \cdot e}}$$

لسم -

$$\frac{2}{3} e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{e^{\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}k} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{3k}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3k} = \underline{\underline{\frac{8}{9k}}}$$

حلونه

تمرینونه د اکسپوننشل مساوات حلونه

نتیجی او مفصل حلونه

نتیجی

$$6 - \frac{3}{2} e^{2-2x} = 0 \Rightarrow x = 1 - \ln(2) \quad \text{اول -}$$

$$\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \ln(4 + 2e) \quad \text{دويم -}$$

$$\frac{1}{2}e^x - e^{x+1} = 0 \Rightarrow \quad \text{دريم -}$$

له دي لاس ته راځي چي حل نه شته

$$(3 + 2x)e^{x-1} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \quad \text{څلورم -}$$

$$-2x^2e^{-x+2} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{پنځم -}$$

$$-\frac{1}{5}e^x - 1 + 10e^{-x} = 0 \Rightarrow x_1 = \ln(5) \quad \text{شپږم -}$$

$$4 - 3e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow x_1 = 2 \ln(3) \text{ und } x_2 = 0 \quad \text{اوم -}$$

$$-\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x} \Rightarrow x_1 = -\ln(2) \quad \text{اتم -}$$

$$\frac{2x}{e^x + 1} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{نهم -}$$

$$(2 - e^x)^2 = (e^x - 3)^2 \Rightarrow x = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \quad \text{لسم -}$$

مفصل حلونه

اول -

٤٠١

اناليزي

$$\begin{aligned}
 6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0 & \Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{2-2x} = 6 \mid : \frac{3}{2} & \Leftrightarrow e^{2-2x} = 4 \mid \ln( ) \\
 \Leftrightarrow 2 - 2x = \ln(4) \mid -2 & \Leftrightarrow -2x = \ln(4) - 2 \mid : (-2) & \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{2}\ln(4) \\
 \Leftrightarrow x = 1 - \ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) & \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1 - \ln(2)}}
 \end{aligned}$$

دويم -

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{2}e = 1 \mid + \frac{1}{2}e & \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{4x} = 1 + \frac{1}{2}e \mid \cdot 4 & \Leftrightarrow e^{4x} = 4 + 2e \mid \ln( ) \\
 \Leftrightarrow 4x = \ln(4 + 2e) \mid : 4 & \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{4}\ln(4 + 2e)}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}e^x - e^{x+1} = 0 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow e^x - 2e^{x+1} = 0 \mid + 2e^{x+1} \quad \text{دريم -}$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2e^{x+1} \mid \ln( )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(2e^{x+1}) \Leftrightarrow x = \ln(2) + \ln(e^{x+1})$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2) + x + 1 \mid -x$$

$$\Leftrightarrow 0 = \ln(2) + 1 \mid -1 \Leftrightarrow \ln(2) = -1$$

تضاد  $\Leftrightarrow$  حل نه شته

$$\begin{aligned}
 (3 + 2x)e^{x-1} = 0 & \Leftrightarrow 3 + 2x = 0 \mid -3 \\
 \Leftrightarrow 2x = -3 \mid : 2 & \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

خلورم -

$e^{x-1}$  تابع  $e^x$  ده، چې په يو واحد  $x$  محور بني لور ته راکښل شوي ده.

تابع  $e^x$  صفرخای نه لري.

پنځم -

$$-2x^2 e^{-x+2} = 0$$

$$-2x^2 e^{-x+2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}$$

$e^{-x+2}$  i تابع  $e^{-x}$  ده چې په  $2EH$  (په ۲ يوونه يا واحده) د  $x$  محور کين لور ته راکښل شوي ده..

تابع  $e^{-x}$  صفرختی نه لري.

شپږم - لاندي الماني : بدلون

$$-\frac{1}{5}e^x - 1 + 10e^{-x} = 0 \text{ Substitution } u = e^x \Leftrightarrow -\frac{1}{5}u - 1 + \frac{10}{u} = 0 \mid \cdot u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}u - 1 + \frac{10}{u} = 0 \mid \cdot (-5) \Leftrightarrow u^2 + 5u - 50 = 0$$

$$p = 5; q = -50 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{4} + \frac{200}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = -\frac{5}{2} + \frac{15}{2} = 5 \\ u_2 = -\frac{5}{2} - \frac{15}{2} = -10 \end{array} \right.$$

$$u_1 = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x_1 = \ln(5)$$

$$u_2 = -10 \Leftrightarrow e^x = -10 \Rightarrow$$

حل نه دی

اوم - الماني: بدلون

$$4 - 3e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{Substitution } u = e^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow 4 - \frac{3}{u} = u \mid \cdot u$$

$$\Leftrightarrow 4u - 3 = u^2 \mid -u^2 \Leftrightarrow -u^2 + 4u - 3 = 0 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow u^2 - 4u + 3 = 0$$

$$p = -4; q = 3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = 2 + 1 = 3 \\ u_2 = 2 - 1 = 1 \end{array} \right.$$

$$u_1 = 3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln(3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 2\ln(3)}}$$

$$u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln(1) \Leftrightarrow x_2 = \underbrace{2\ln(1)}_0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$$

اتم - الماني: بدلون ،

$$-\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x} \quad \text{Substitution } u = e^{-x} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2 + 5 = u \mid -u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2 - u + 5 = 0 \mid : \left(-\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow u^2 + \frac{4}{3}u - \frac{20}{3} = 0$$

$$p = \frac{4}{3}; q = -\frac{20}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{4}{9} + \frac{60}{9} = \frac{64}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 2 \\ u_2 = -\frac{2}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3} \end{array} \right.$$

$$u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -x = \ln(2) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -\ln(2)}}$$

$$u_2 = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow e^{-x} = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow -x = \underbrace{\ln\left(-\frac{11}{3}\right)}_{\text{nicht definiert}} \Rightarrow$$

تعريف نه دی

له دې لاس ته راځي چې حل نه دی.

$$\frac{2x}{e^x+1} = 0 \mid \cdot (e^x+1) \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}} \quad \text{نهم -}$$

لسم -

$$\begin{aligned} (2-e^x)^2 &= (e^x-3)^2 \Leftrightarrow 4-4e^x+e^{2x} = e^{2x}-6e^x+9 \mid -e^{2x} \\ \Leftrightarrow 4-4e^x &= -6e^x+9 \mid +6e^x \Leftrightarrow 4+2e^x = 9 \mid -4 \Leftrightarrow 2e^x = 5 \mid :2 \\ \Leftrightarrow e^x &= \frac{5}{2} \mid \ln(\ ) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)}} \end{aligned}$$

## څلورم: د $e$ -تابع مشتق يا رابيليدنه

د ضرب- او زنځيري قانون سره

د  $e$ -تابع مشتق يا رابيليدنه

د  $e$ -تابع مشتق يا رابيليدنه د ساده لارو له لارې نه شي پيداكيدلای، د دې لپاره يوې ،،جگې شميرپوهنې يا رياضي،، ته اړتيا ده. دلته به يو ليډور متود انځور شي، له دې خطر سره هم، چې شميرپوهنيز متخصصين يا شميرپوهان به بغاوت وكړي.

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

په پام کې نيسو چې باور لري:  $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

مور د تل کوچني کيدونکي  $\Delta x$  - ارزښت لپاره د  $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$  خاننيونه څيرو

$\Delta x$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې خاننيوني يا حالت په بنسټ لاس ته راوړو چې باور لري:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$

دا ځمور د شميرني لپاره په دې معنا دی:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د  $x_0$  په ځای  $x$  وليکو، نو باور لري:  $f'(x) = e^x$  او  $f(x) = e^x$

اکسپوننشل تابع  $f(x) = e^x$  مشتق  $f'(x) = e^x$  لري

د  $e$  په بنسټ اکسپوننشل تابع يو تابع دی، په کوم کې چې تابع او مشتق سره برابر دي.

د  $f'(x) = e^x$  - تابع د مشتق سره ځان بيرته توليدوي يا جوړوي.

**د e -تابع د مشتق يا بيليدني لپاره بنسټوآنانين:**

د e -تابع هندارونه، غزونه او راکبننه مو دي ته بيايي، =ي اکسپوننت يا جگعدد(-گن) نه تنها فقط د x اووښتوني يا متحوله خوندي لري.

د نورو توابعو سره د نښلونو له لارې نوې توابع منح ته راځي، په کومو کې چې د e -تابع د فاکتور يا ضريب په څير خوندي ده. په داسې حالتونو کې د مشتق لپاره نور قوانين د غوښتلو دي.

د زياتيز يا مثبت x په لور په 3 يوونونو يا واحدونو د e -تابع راکبننه او د په لور په 2 ضريبونو غزونه د دوه ضريبونو يوه زخرونه ورکوي.

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}(x-2)} = e^{u(x)} \text{ mit } u(x) = \frac{1}{2}(x-2)$$

يو زخيري تابع انځوروي.

د دي مشتق داسې دي

زخيري لار يا قاعده:

$$f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

$$u(x) = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow u' = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(x-2)}$$

يو د e -تابع ترنه د يو کرښيز تابع سره تر څيرني لادي نيسو:

$$f(x) = (2x-1) \cdot e^x$$

نو دا د ضرب د قانون سره مشتق کوو يا راييلوو.

د ضرب قانون يا -لار:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$



$$u(x) = (2x - 1) \Rightarrow u'(x) = 2 \text{ und } v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x \\ \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x - 1) \cdot e^x = [2 + (2x - 1)] \cdot e^x = \underline{\underline{(2x + 1) \cdot e^x}}$$

دي قوانينو ته بيلگي

$$f(x) = e^{2-x} \Rightarrow f'(x) = (-1) \cdot e^{2-x} = \underline{\underline{-e^{2-x}}}$$

دويم -

$$f(x) = e^{\frac{1}{4}x+4} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{\frac{1}{16} \cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}}$$

دريم -

$$f(x) = (x - 2) \cdot e^{-x}$$

mit  $u = (x - 2) \Rightarrow u' = 1$  und  $v = e^{-x} \Rightarrow v' = -e^{-x}$  wird

$$f'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot e^{-x} + (x - 2) \cdot (-e^{-x}) = e^{-x} - (x - 2) \cdot e^{-x} \\ = [1 - (x - 2)] \cdot e^{-x} = \underline{\underline{(3 - x) \cdot e^{-x}}}$$

څلورم -

$$f(x) = ax \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

mit  $u = ax \Rightarrow u' = a$  und  $v = e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow v' = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$  wird

$$f'(x) = u'v + uv' = a \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + ax \cdot \left( -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \right) \\ = a \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} - ax^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \underline{\underline{a \cdot (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}}$$

دېر واره مشتق يا رابيليدنه:

د کړو يا منحنيو خبرو اترو يا بحث سره زيات وخت درې مشتقونه د توابعو د څيړنو لپاره غوښتونکي يا اړين دي.

$$f(x) = (2x + 4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \quad (\text{د يوه کرښيز او } e \text{—تابع ضرب})$$

$$\text{د سره کيړی} \quad v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{او} \quad u = (2x + 4) \Rightarrow u' = 2$$

$$f'(x) = u'v + uv' = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (2x + 4) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left[2 + (2x + 4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{-x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

$$\text{د سره کيړي} \quad v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{او} \quad u = -x \Rightarrow u' = -1$$

$$f''(x) = u'v + uv' = -1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (-x) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\text{د سره کيړي} \quad v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{او} \quad u = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = u'v + uv' = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left(1 - \frac{1}{4}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

د هر مشتق يا رابيليدني سره د  $e$ —تابع ضرب بي تغيره پاتيږي. که دا له نوکانو راوړو، نو نور مشتقونه يا رابيليدني ساده په لاس راوړي شو يا شميرلي شو.

د مشتقتابع صفر ځايونه کيدی شي زيات وخت ساده ولوستل شي.

## تمرینونه

د  $e$  تابع مشتق

د لاندې توابعو درې ځله مشتق وشمېری

اول -  $f(x) = 4 \cdot e^{2x}$  دویم -  $f(x) = e^{x+4}$  دریم -  $f(x) = 2 \cdot e^{2-4x}$  څلورم -  
 $f(x) = 4x - 2 \cdot e^{-2x}$  پنځه -  $f(x) = x \cdot e^{-2x}$  شپږم -  $f(x) = 2x \cdot e^{2-x}$  اوم -  
 $f(x) = (x+2) \cdot e^x$  اتم -  $f(x) = (1-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$  نهم -  $f(x) = (1+x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$  لسم -  
 $f(x) = t \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

## حلونه

د  $e$  تابع مشتق

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې

اول -  $f(x) = 4 \cdot e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 8 \cdot e^{2x}; f''(x) = 16 \cdot e^{2x}; f'''(x) = 32 \cdot e^{2x}$

دویم -  $f(x) = e^{x+4} \Rightarrow f'(x) = e^{x+4}; f''(x) = e^{x+4}; f'''(x) = e^{x+4}$

دریم -

$f(x) = 4x - 2 \cdot e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = 4 + 4 \cdot e^{-2x}; f''(x) = -8 \cdot e^{-2x}; f'''(x) = 16 \cdot e^{-2x}$

څلورم -

$f(x) = 2 \cdot e^{2-4x} \Rightarrow f'(x) = -8 \cdot e^{2-4x}; f''(x) = 32 \cdot e^{2-4x}; f'''(x) = -128 \cdot e^{2-4x}$

- پنجم

$$f(x) = x \cdot e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = (1 - 2x) \cdot e^{-2x}; f''(x) = (4x - 4) \cdot e^{-2x}; f'''(x) = (12 - 8x) \cdot e^{-2x}$$

- شپيرم

$$f(x) = 2x \cdot e^{2-x} \Rightarrow f'(x) = (2 - 2x) \cdot e^{2-x}; f''(x) = (2x - 4) \cdot e^{2-x}; f'''(x) = (6 - 2x) \cdot e^{2-x}$$

- اوم

$$f(x) = (x + 2) \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = (x + 3) \cdot e^x; f''(x) = (x + 4) \cdot e^x; f'''(x) = (x + 5) \cdot e^x$$

- اتم

$$f(x) = (1 - x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}; f''(x) = \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}; f'''(x) = \left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

- نهم

$$f(x) = (1 + x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}; f''(x) = \frac{1}{4} \cdot (x - 3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}; f'''(x) = \frac{1}{8} \cdot (5 - x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

- لسم

$$f(x) = t \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = t \cdot \left(1 - \frac{1}{4}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}; f''(x) = \frac{1}{16} \cdot t \cdot (x - 8) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}; f'''(x) = \frac{1}{64} \cdot t \cdot (12 - x) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

مفصل حلونه:

اول -

$$f(x) = 4 \cdot e^{2x}$$

$$f'(x) = 2 \cdot 4 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{8 \cdot e^{2x}}}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 8 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{16 \cdot e^{2x}}}$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 16 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{32 \cdot e^{2x}}}$$

دويم -

$$f(x) = e^{x+4}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$

$$f''(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$

$$f'''(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$

دريم -

$$f(x) = 2 \cdot e^{2-4x}$$

$$f'(x) = -4 \cdot 2 \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{-8 \cdot e^{2-4x}}}$$

$$f''(x) = -4 \cdot (-8) \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{32 \cdot e^{2-4x}}}$$

$$f'''(x) = -4 \cdot 32 \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{-128 \cdot e^{2-4x}}}$$

خلورم -

$$f(x) = 4x - 2 \cdot e^{-2x}$$

$$f'(x) = 4 - 2 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{4 + 4 \cdot e^{-2x}}}$$

$$f''(x) = -2 \cdot 4 \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{-8 \cdot e^{-2x}}}$$

$$f'''(x) = -2 \cdot (-8) \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{16 \cdot e^{-2x}}}$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x} \quad \text{پنجم -}$$

$$\text{د } u = x \Rightarrow u' = 1 \quad \text{او سره } v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot (-2 \cdot e^{-2x}) = 1 \cdot e^{-2x} - 2x \cdot e^{-2x} = (1 - 2x) \cdot e^{-2x}$$

$$1v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x} \quad \text{او } u = 1 - 2x \Rightarrow u' = -2 \quad \text{د } f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

سره

$$f''(x) = -2 \cdot e^{-2x} + (1 - 2x) \cdot (-2 \cdot e^{-2x}) = [-2 - 2 \cdot (1 - 2x)] \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{(4x - 4) \cdot e^{-2x}}}$$

$$v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x} \quad \text{او } u = 4x - 4 \Rightarrow u' = 4 \quad \text{د } f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

سره

$$f'''(x) = 4 \cdot e^{-2x} + (4x - 4) \cdot (-2 \cdot e^{-2x}) = [4 - 2 \cdot (4x - 4)] \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{(12 - 8x) \cdot e^{-2x}}}$$

شپږم -

$$\text{د } u = 2x \Rightarrow u' = 2 \quad \text{او سره } v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 2 \cdot e^{2-x} + 2x \cdot (-1 \cdot e^{2-x}) = (2 - 2x) \cdot e^{2-x}$$

$$\text{سره } v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x} \quad \text{او } u = 2 - 2x \Rightarrow u' = -2 \quad \text{د } f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f''(x) = -2 \cdot e^{2-x} + (2 - 2x) \cdot (-1 \cdot e^{2-x}) = [-2 - (2 - 2x)] \cdot e^{2-x} = (2x - 4) \cdot e^{2-x}$$

$$\text{د } u = 2x - 4 \Rightarrow u' = 2 \quad \text{او سره } v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$$

$$f'''(x) = 2 \cdot e^{2-x} + (2x - 4) \cdot (-1 \cdot e^{2-x}) = [2 - (2x - 4)] \cdot e^{2-x} = \underline{\underline{(6 - 2x) \cdot e^{2-x}}}$$

اوم -

$$\text{سرہ } v = e^x \Rightarrow v' = e^x \text{ او } u = x+2 \Rightarrow u' = 1, f(x) = (x+2) \cdot e^x$$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot e^x + (x+2) \cdot e^x = [1+(x+2)] \cdot e^x = \underline{\underline{(x+3) \cdot e^x}}$$

$$\text{سرہ } v = e^x \Rightarrow v' = e^x \text{ او } u = x+3 \Rightarrow u' = 1, f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f''(x) = 1 \cdot e^x + (x+3) \cdot e^x = [1+(x+3)] \cdot e^x = \underline{\underline{(x+4) \cdot e^x}}$$

$$\text{سرہ } v = e^x \Rightarrow v' = e^x \text{ او } u = x+4 \Rightarrow u' = 1, f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f'''(x) = 1 \cdot e^x + (x+4) \cdot e^x = [1+(x+4)] \cdot e^x = \underline{\underline{(x+5) \cdot e^x}}$$

اتم -

$$\text{سرہ } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \text{ او } u = 1-x \Rightarrow u' = -1, f(x) = (1-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = -1 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (1-x) \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} = \left[-1 + \frac{1}{2}(1-x)\right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$\text{سرہ } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \text{ او } u = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}, f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} = \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right)\right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$\text{سرہ } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \text{ او } u = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x \Rightarrow u' = -\frac{1}{4}, f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

سرہ

$$f'''(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\right) \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} = \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\right)\right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f(x) = (1+x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \quad \text{نهم -}$$

$$\text{سرہ } v = e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \quad \text{د } u = 1+x \Rightarrow u' = 1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} + (1+x) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right) = \left[1 - \frac{1}{2}(1+x)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} = \frac{1}{2} \cdot (1-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \end{aligned}$$

$$\text{او } u = \frac{1}{2} \cdot (1-x) \Rightarrow u' = -\frac{1}{2} \quad \text{د } f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\text{سرہ } v = e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} + \frac{1}{2} \cdot (1-x) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right) = \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1-x)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \\ &= \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} = \frac{1}{4} \cdot (x-3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \end{aligned}$$

$$\text{او } u = \frac{1}{4} \cdot (x-3) \Rightarrow u' = \frac{1}{4} \quad \text{د } f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\text{سرہ } v = e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$



$$\begin{aligned}
 f'''(x) &= \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} + \frac{1}{4} \cdot (x-3) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right) = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{8}(x-3)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \\
 &= \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} = \underline{\underline{\frac{1}{8} \cdot (5-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}}}
 \end{aligned}$$

لسم -

سرہ  $v = e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$  او  $u = t \cdot x \Rightarrow u' = t$  د  $f(x) = t \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = t \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + t \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right) = \left[t - \frac{1}{4} \cdot t \cdot x\right] \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \underline{\underline{t \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$$

او  $u = t \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot x\right) \Rightarrow u' = -\frac{1}{4} \cdot t$  د  $f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

سرہ  $v = e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -\frac{1}{4}t \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + t \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot x\right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right) = \left[-\frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \cdot t \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot x\right)\right] \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \\
 &= \left(-\frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{16} \cdot t \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \frac{1}{16} \cdot t \cdot (x-8) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}
 \end{aligned}$$

او  $u = \frac{1}{16} \cdot t \cdot (x-8) \Rightarrow u' = \frac{1}{16} \cdot t$  د  $f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

سرہ  $v = e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

$$\begin{aligned}
 f'''(x) &= \frac{1}{16} \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + \frac{1}{16} \cdot t \cdot (x-8) \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right) = \left[\frac{1}{16}t - \frac{1}{64} \cdot t \cdot (x-8)\right] \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \\
 &= \left(\frac{3}{16} \cdot t - \frac{1}{64} \cdot t \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \underline{\underline{\frac{1}{64} \cdot t \cdot (12-x) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}
 \end{aligned}$$

### پنجم: د e-تابع انټيگرېشن يا گډونه

پيل: په څټ کتنې را ټولونې سره د انټيگرال شميرنې څخه لاندې څرگند دي:

که د يو په خوښه انټيگرالور تابع  $f(x)$  انټيگرال ونيول شي، نو سړی يو بنسټ تابع لاس

$$F(x) = \int f(x) dx$$

ته راوړي:

تابع  $f(x)$  د انټيگرالونې تابع هم بلل کيږي.

$$F(x) = \int f(x) dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

باور لري:

دا په دې معنا، چې که بنسټ تابع مشتق شي يا يې مشتق ونيول شي، نو سړی بيرته د انټيگراليدنې تابع لاس ته راوړي. دا ر يکه مور ته ممکنوي چې د مشتقولو له لارې د انټيگرال نتيجه و ازمايو.

بيلگه:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

مشتق شوی:  $F'(x) = x^2 = f(x)$

که په e-تابع استعمال شي، له کوم چې مور پوهيږو، چې د مشتق سره پخپله بيرته توليديږي يا منځ ته راځي په دې معنا دی:

وي دي  $F(x) = \int f(x) dx = e^x + C$  د ټولو توابعو  $f(x)$  بنسټ ډېرئ يا سټ، نو  
 دي  $F'(x) = f(x) = [e^x + C]' = e^x$

$$(1) \quad \int e^x dx = e^x + C \quad \text{د -تابع انټيگرال:}$$

د  $e$  -تابع د مشتق سره دي په دې حالت کې، په کوم کې چې د  $e$  -تابع جگعدد يا اکسپوننت نه ځانله د اوښتوني يا متحولي  $x$  څخه جوړ وو، زخیرقانون استعمال شي. په انټيگرېشن کې د انټيگراليدونکي تابع دې داسې وټاکل شي، چې د (۱) انټيگرال کيدی شي

ټوليز انټيگرال د بدلون قاعدې سره

$$f(x) = e^{-x} \Rightarrow F(x) = \int e^{-x} dx$$

$$\text{Substitution : } u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

$$\Rightarrow \int e^{-x} dx = -\int e^u du = -e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int e^{-x} dx = \underline{\underline{-e^{-x}}}: \text{ په څټ بلون:}$$

$$F(x) = -e^{-x} + C \Rightarrow F'(x) = (-1) \cdot (-e^{-x}) = e^{-x} = f(x) \quad \text{ازمايننت:}$$

بيلگه:

$$f(x) = e^{2x-1} \Rightarrow F(x) = \int e^{2x-1} dx$$

$$\text{Substitution : } u(x) = 2x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\Rightarrow \int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C \Rightarrow F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x-1} = e^{2x-1} = f(x) \quad \text{از ماڀڻت:}$$

بيلگه:

$$f(x) = e^{2x-1} \Rightarrow F(x) = \int e^{2x-1} dx$$

$$\text{Substitution : } u(x) = 2x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\Rightarrow \int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int e^{2x-1} dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{2x-1} + C}}$$

$$F(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)} = e^{-\frac{1}{2}(1-x)} = f(x) \quad \text{از ماڀڻت:}$$

### د بدلون سره ټاکلی انتیگرال

د دې لپاره چې د گراف او  $x$  محور ترمنځ سطحه وشمیرو، زیات وخت باید یو ټاکلی انتیگرال حل شي. دلته مو هم د بدلون لار حل ته لارښودوي. د بدلون له لارې حل لپاره دوه متودونه یا واریانت شتون لري.

لومړی لار یا واریانت :

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1} \Rightarrow A = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{2}x-1} dx$$

بدلون:

$$u(x) = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2 \cdot du$$

د انتيگرال عمومي حل:

$$\int e^{\frac{1}{2}x-1} dx = 2 \cdot \int e^u du = 2 \cdot e^u + C \Rightarrow 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x-1} + C$$

د ټاکلي انتيگرال په حيث يې وشميرئ (بي له ټا بتي يا همغې C سره)

$$A = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{2}x-1} dx = 2 \cdot \left[ e^{\frac{1}{2}x-1} \right]_{-1}^1 = 2 \cdot \left[ e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} \right] \approx 2 \cdot 0,3834 = \underline{\underline{0,7668}}$$

دويمه لار يا واريانت:

$$\text{Variante 2: } f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1} \Rightarrow A = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{2}x-1} dx$$

$$u(x) = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2 \cdot du$$

بدلون:

پولي هم بدليږي:

$$ug = u(-1) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

لاندي يا کبنته پوله:

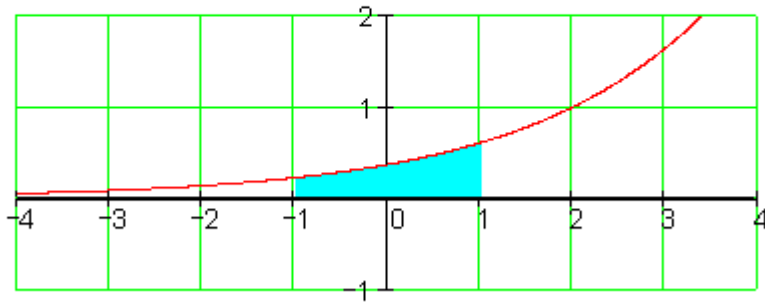
$$og = u(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

پورته پوله:

$$A = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{2}x-1} dx = 2 \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} e^u du = 2 \cdot \left[ e^u \right]_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left[ e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} \right] \approx 2 \cdot 0,3834 = \underline{\underline{0,7668}}$$

په دويمه واريابلي کې د انيگرال لاندې او پورته پولې هم بدلي يا سبستيتويرت شوي. له دې لارې په زياتو حالتونو کې شميرن زياتوالی راکميري.

$$f(x) := e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 0.7668$$



### تمرینونه

#### د ساده توابعو انټیگرالونه

د لاندې تابعو انټیگرال وشمیری. د اول تر څلورم تمرینونو پورې د ازمایښت له لارې کنټرول کړی.

$$\begin{aligned} & \int \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4} dx \quad \text{څلورم} - \int 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx \quad \text{دریم} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \quad \text{دویم} - \int -e^{-x} dx \quad \text{اول} \\ & \int_0^{\ln(2)} -\frac{1}{2} e^{-x} dx \quad \text{پنځم} - \int_1^2 e^{4-2x} dx \quad \text{اتم} - \int_{-1}^2 e^{\frac{1}{2}x} dx \quad \text{اوم} - \int_0^2 e^{1-x} dx \quad \text{شپږم} \\ & \int_0^4 -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}x} dx \quad \text{لسم} - \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx \end{aligned}$$

## حلونه

تمرینونه د توابعو انتیگرالونه |

نتیجی او مفصل حلونه

$$F(x) = \int -e^{-x} dx = e^{-x} + C \quad \text{Probe: } F(x) = e^{-x} + C \Rightarrow F'(x) = -e^{-x} \quad \text{اول -}$$

دویم -

$$F(x) = \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C \quad \text{Probe: } F(x) = \frac{1}{4} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

دریم -

$$\text{ازماینت: } F(x) = \int 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = -8 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C$$

$$: F(x) = -8 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C \Rightarrow F'(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$F(x) = \int \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4} dx = \frac{1}{4} \cdot e^{3x-4} + C \quad \text{څلورم -}$$

$$F(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{3x-4} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4} \quad \text{ازماینت:}$$

$$\int_0^2 e^{1-x} dx = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} \approx 2,350$$

پنجم -

شپږم -

$$\int_{-1}^2 e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot \left[ e^1 - e^{-\frac{1}{2}} \right] \approx 4,224$$

$$\int_1^2 e^{4-2x} dx = \frac{1}{2} \cdot [e^2 - e^0] = \frac{1}{2} \cdot [e^2 - 1] \approx 3,195$$

اوم -

$$\int_0^{\ln(2)} -\frac{1}{2} e^{-x} dx = -\frac{1}{2} \cdot [e^0 - e^{-\ln(2)}] = -\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{e^{\ln(2)}}\right] = -\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{4}$$

اتم -

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx = 2 \cdot [e^2 - e^0] = 2 \cdot [e^2 - 1] \approx 12,778$$

نهم -

$$\int_0^4 -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = -2 [e^0 - e^{-1}] \approx -1,264$$

لسم -

اول - مفصل حل:

$$F(x) = \int F'(x) dx = \int -e^{-x} dx = -\int e^{-x} dx$$

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

بدلون

$$-\int e^{-x} dx = -\int (-1) \cdot e^u du = \int e^u du = e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int -e^{-x} dx = \underline{e^{-x} + C}$$

$$F(x) = e^{-x} + C \Rightarrow F'(x) = -e^{-x}$$

ازمايننت:

دويم - مفصل حل

$$F(x) = \int F'(x) dx = \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$



$$: u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2} du \quad \text{بدلون:}$$

$$\int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} e^u du = \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{1}{4} e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \underline{\underline{\frac{1}{4} e^{2x} + C}}$$

$$\text{Probe: } F(x) = \frac{1}{4} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \quad \text{ازمايننت:}$$

دريم - مفصل حل

$$F(x) = \int F'(x) dx = \int 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = 2 \int e^{-\frac{1}{4}x} dx$$

$$: u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow dx = -4 \cdot du \quad \text{بدلون:}$$

$$\int 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = 2 \int (-4) \cdot e^u du = -8 \int e^u du = -8 \cdot e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = \underline{\underline{-8 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C}}$$

$$\text{Probe: } F(x) = -8 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C \Rightarrow F'(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \quad \text{ازمايننت:}$$

$$F(x) = \int F'(x) dx = \int \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4} dx = \frac{3}{4} \int e^{3x-4} dx$$

خلورم -

$$u(x) = 3x - 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{3} \cdot du \quad \text{بدلون:}$$

$$\int \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4} dx = \frac{3}{4} \int \frac{1}{3} \cdot e^u du = \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{1}{4} \cdot e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4} dx = \frac{1}{4} \cdot e^{3x-4} + C$$

$$: F(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{3x-4} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4}$$

از مایننت:

$$: u(x) = 1-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

پنجم - بدلون:  $\int_0^2 e^{1-x} dx$

$$: u(2) = 1-2 = -1 \quad u(0) = 1-0 = 1$$

لاندي پولي: پورته پولي:

$$\int_0^2 e^{1-x} dx = \int_1^{-1} (-1) \cdot e^u du = -\int_1^{-1} e^u du = \int_{-1}^1 e^u du = [e^u]_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} \approx \underline{\underline{2,350}}$$

شپږم - مفصل حل

$$u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx = 2 \cdot du$$

بدلون:  $\int_{-1}^2 e^{\frac{1}{2}x} dx$

$$: u(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad : u(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$$

لاندي پولي: پورته پولي:

$$\int_{-1}^2 e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^1 e^u du = 2 \cdot [e^u]_{-\frac{1}{2}}^1 = 2 \cdot \left[ e^1 - e^{-\frac{1}{2}} \right] \approx \underline{\underline{4,224}}$$

اوم - مفصل حل

$$: u(x) = 4 - 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{2} \cdot du \quad \int_1^2 e^{4-2x} dx$$

بدلون:

لاندي پولي:  $u(2) = 4 - 4 = 0$  پورته پولي:  $u(1) = 4 - 2 = 2$

$$\int_1^2 e^{4-2x} dx = -\frac{1}{2} \int_2^0 e^u du = \frac{1}{2} \int_0^2 e^u du = \frac{1}{2} \cdot [e^u]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot [e^2 - e^0] = \frac{1}{2} \cdot [e^2 - 1] \approx \underline{\underline{3,195}}$$

اتم - مفصل حل

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du \quad \int_0^{\ln(2)} -\frac{1}{2} e^{-x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\ln(2)} e^{-x} dx$$

بدلون:

لاندي پولي:  $u(0) = 0$  پورته پولي:  $u(\ln(2)) = -\ln(2)$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^{\ln(2)} e^{-x} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^{-\ln(2)} (-1) \cdot e^u du = \frac{1}{2} \int_0^{-\ln(2)} e^u du = -\frac{1}{2} \int_{-\ln(2)}^0 e^u du \\ &= -\frac{1}{2} \cdot [e^u]_{-\ln(2)}^0 = -\frac{1}{2} \cdot [e^0 - e^{-\ln(2)}] = -\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{e^{\ln(2)}}\right] = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{2}\right] = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

يادونه:  $e^{\ln(a)} = a \Rightarrow e^{\ln(2)} = 2$

نهم - مفصل حل

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx = 4 \int_1^2 e^{4-2x} dx$$

بدلون:

بدلون:

$$u(x) = 4 - 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{2} du$$

لاندي پولی:  $u(1) = 4 - 2 = 2$  پورته پولی:  $u(2) = 4 - 4 = 0$

$$\begin{aligned} 4 \int_1^2 e^{4-2x} dx &= 4 \int_2^0 \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^u du = -2 \int_2^0 e^u du = 2 \int_0^2 e^u du \\ &= 2 \cdot [e^u]_0^2 = 2 \cdot [e^2 - e^0] = 2 \cdot [e^2 - 1] \approx \underline{\underline{12,778}} \end{aligned}$$

لسم - مفصل حل

$$: u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow dx = -4 \cdot du \quad \int_0^4 -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^4 e^{-\frac{1}{4}x} dx$$

$$u(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1 \quad \text{پورته پولی: } u(0) = 0$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^4 e^{-\frac{1}{4}x} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^{-1} (-4) \cdot e^u du = 2 \int_0^{-1} e^u du = -2 \int_{-1}^0 e^u du \\ &= -2 \cdot [e^u]_{-1}^0 = -2 [e^0 - e^{-1}] \approx \underline{\underline{-1,264}} \end{aligned}$$

### شپږم: ناتاڪلی انتیگرال:

د طبیعي عدد وده د گټي کټي شمیرني په مرسته د یو کال وروسته د پانگي گټه  
د  $p = 100\% = 1$  سره.

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot p = K_0(1+p) = K_0 \cdot 2$$

د يو كال وروسته د نيم كال د پانگي په گټونې د  $p = 1/2$  سره

$$K_2 = K_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,25}}$$

د يو كال وروسته د مياشتې د پانگي په گټونې د  $p = 1/12$  سره

$$K_{12} = K_0 \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,61\dots}}$$

د يو كال وروسته په روځني په بانگي گټونې د  $p = 1/360$  سره

$$K_{360} = K_0 \left(1 + \frac{1}{360}\right)^{360} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,7145\dots}}$$

د يو كال وروسته په ساعتې د پانگي په گټونې د  $p = 1/8640$  سره

$$K_{8640} = K_0 \left(1 + \frac{1}{8640}\right)^{8640} = \underline{\underline{K_0 \cdot \underbrace{2,7181\dots}_{\approx e}}}}$$

د پانگي گټونه د يوه كال وروسته د  $n$  گټونې سره

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

که په هره لحظه کې پيسې په گټه واچول شي (يعني ناپايي ډېرې گټونې ناپاي  $n \rightarrow \infty$ )، نو نو له يو كال وروسته يوه پانگه لاس ته راوړي د:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} K_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot e$$

دا په دې معنا پانگه په  $e$  ضريب ډېرځلي شوه.

په ډېرو جېشمېريو کې يوه  $e$  -تابعتمه لري د  $\pi$  دکميو ته ورته.

د اوپلر د عدد ارزښت يو ناپای نه پرېوديکي يعنې نه بېرته راگرځېدونکي لسميز کسر(مات).

عدد  $e$  د اکسپوننشل تابع بنسټ جوړوي.

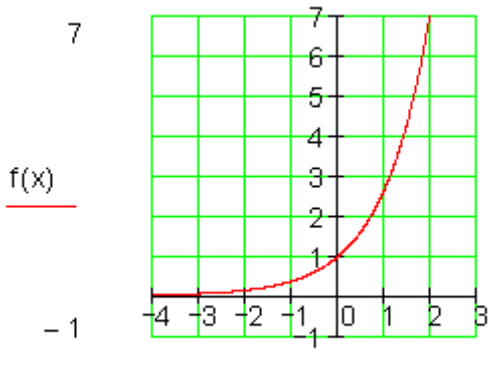
$$f(x) = a \cdot e^{b \cdot x} \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

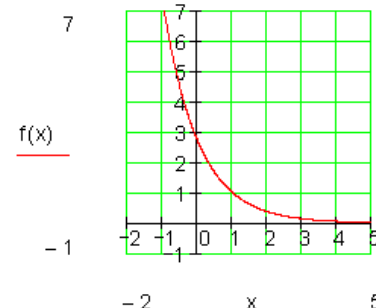
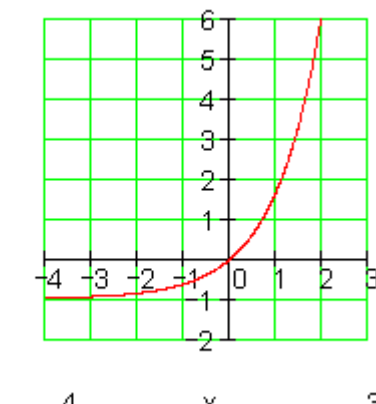
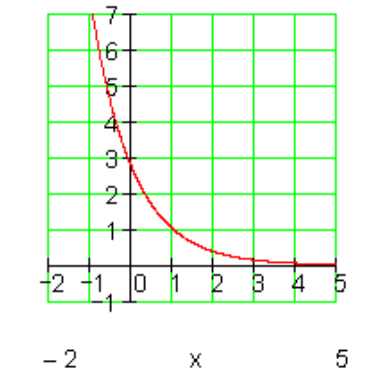
باور لري  $e$  د تابع دابنه لري:

د  $e$  ارزښت په 3 ځايونو راگرد شوی:  $e = 2,718$

د  $e$  ارزښت په 9 ځايونو راگرد شوی:  $e = 2,718\ 281\ 828$

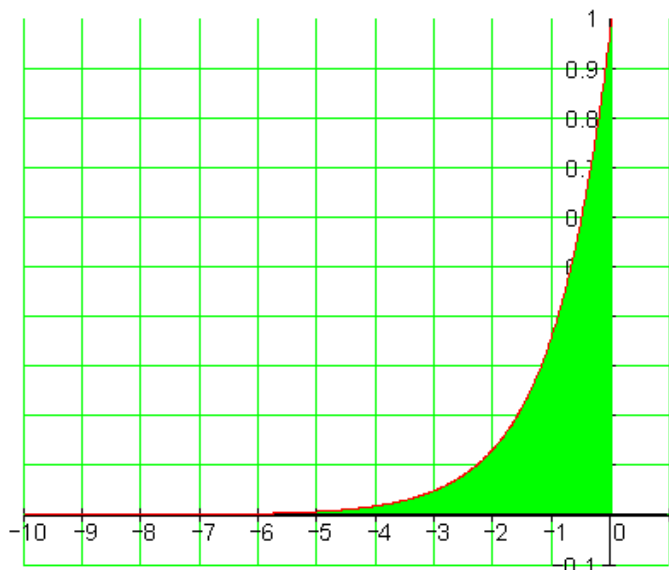
د  $e$  -تابع ته څيرنه

<p>د <math>e</math> -تابع نورماله  <math>f(x) = e^x</math>            د <math>y</math>-محور سره غوڅتکی  <math>f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0   1)</math>            ژى پوله ارزښت</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0</math>      <math>\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty</math></p>	
<p>د <math>y</math> -محور باندې هنداره شوی  <math>f(x) = e^{-x}</math>            د <math>y</math> -محور سره غوڅتکی</p>	

$f(0) = e^{-0} = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0 1)$ <p style="text-align: center;">ژئ پوله ارزښت</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$	
<p style="text-align: center;">په يوه واحد(بيون) کښته لور ته راکښلی</p> $f(x) = e^x - 1$ <p style="text-align: center;">د <math>y</math> -محور سره غوڅتکی</p> $f(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow P_y(0 0)$ <p style="text-align: center;">ژئ پوله ارزښت</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - 1) = \infty$	
<p style="text-align: center;">په يوه واحد(بيون) کښته لور ته راکښلی</p> $f(x) = e^{-(x-1)}$ <p style="text-align: center;">د <math>y</math> -محور سره غوڅتکی</p> $f(0) = e^{-(0-1)} = e^1 = e \Rightarrow P_y(0 e)$ $f(1) = e^{-(1-1)} = e^0 = 1 \Rightarrow P(1 1)$ <p style="text-align: center;">ژئ پوله ارزښت</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-(x-1)} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(x-1)} = 0$	

### ناټاکلی انتیگرال

بیلګه:



د  $f(x) = e^x$  د ګراف او د  $x$ -محور ترمنځ ټوله سطحه دې په  $(-\infty; 0]$  کې وشمیرل

$$A = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

شي، یعنی

تراوسه د ټاکلي انتیگرال کښته او پورته پولي اعداد وو.

یعني د انتیګریشنورشو محدوده یا رابنده وه.

اوس د انتیګریشن ورشو نوره رابنده نه ده.

دا ډول انتیگرال نا څرګند یا نا معلوم یا نا اصلي انتیگرال بلل کيږي د نابند انتیګریشن ورشو سره.



دا انتيگرال له ې درې بنو څخه په يوه بڼه راټلی شي.

$\int_a^{\infty} f(x) dx$	$\int_{-\infty}^b f(x) dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$
---------------------------	----------------------------	-----------------------------------

د داسې انتيگرالونو شميرلو لپاره سړی داسې مخ ته ځي:

لومړی سړی انتيگرال  $\int_a^b f(x) dx$  د پای انټروال  $[a, b]$  لپاره شميرې، پسي د اړونده ويناو يا افادو څخه د  $a \rightarrow -\infty$  يا  $a \rightarrow \infty$  همداسې  $b \rightarrow -\infty$  يا  $b \rightarrow \infty$  لپاره پوله ارزښتونه جوړوي.

فورمال دا داسې ليدل کيږي:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx$$

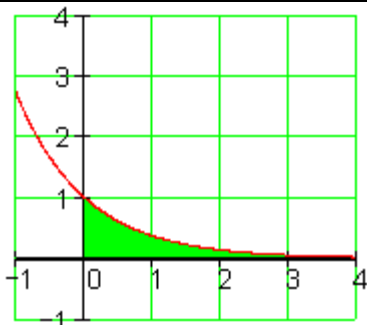
زموږ د سطحې شميرلو لپاره دا په داسې توگه معلوميږي.

$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^0 - e^a] = \lim_{a \rightarrow -\infty} \underbrace{e^0}_1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \underbrace{e^a}_0 = 1$$

بيلگه:



داد  $y$ -محور باندې هنداره شوی د  $e$ -تابع د  
 $f(x) = e^{-x}$  سره باید په انټروال  $[0; \infty)$  کې برابره  
 سطحه ولري.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx$$

بدلون:

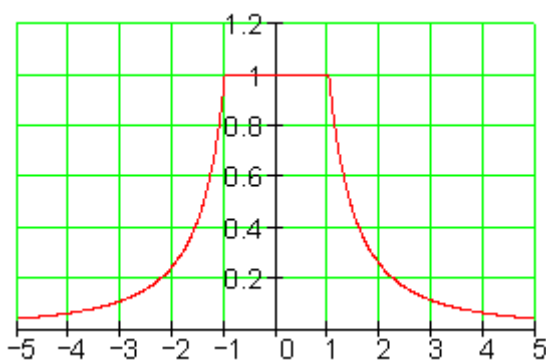
$$: u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0 ; u(b) = -b$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-b} e^u \frac{du}{-1} = - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-b} e^u du = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^0 e^u du$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [e^u]_{-b}^0 = \lim_{b \rightarrow \infty} [e^0 - e^{-b}]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} e^0 - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} = 1 - 0 = 1$$



د یوه ترکیبي یا گډوله تابع لپاره  
 بیلگه:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } x < -1 \\ 1 & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

د انټیګرال (په برخو) ټوټه کونه

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx + \int_{-1}^1 dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

تر مخ راورنه:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

د سيومتري دلايلو له امله باور لري:

داسي چي دا نتيگرا ل فقط يو خل بايد وشميرل شي

$$\int_{-1}^1 dx = [x]_{-1}^1 = [1] - [-1] = 1 + 1 = \underline{2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{b} \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{1} \right] = 0 - (-1) = \underline{1}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx}_1 + \underbrace{\int_{-1}^1 dx}_2 + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx}_1 = 1 + 2 + 1 = \underline{4}$$

پوښتنې

د  $e$ - تابع سره انتيگرا لونه

د سطحې مساحت شمېرنه

اول – لاندې انتيگرا لونه وشمېری او اړونده سطحه يې کرښې ژکرښي کړی.

$$\int_{-3}^0 e^x dx \quad \text{پ} \quad \int_{-1}^0 e^x dx \quad \text{ب} \quad \int_0^1 e^x dx \quad \text{الف}$$

دويم – لاندې انتيگرا لونه وشمېری او اړونده سطحه يې کرښې ژکرښي کړی.

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx \quad - \text{پ} \quad \int_0^3 (e^x - 1) dx \quad - \text{ب} \quad \int_0^1 (e^x - 1) dx \quad - \text{الف}$$

دریم - لاندې انتیگرالونه وشمېری او اړونده سطحه یې کرښې ژکړنې کړی.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx \quad - \text{پ} \quad \int_{-1}^2 e^{-x} dx \quad - \text{ب} \quad \int_0^1 e^{-x} dx \quad - \text{الف}$$

څلورم - لاندې انتیگرالونه وشمېری او اړونده سطحه یې کرښې ژکړنې کړی.

$$\int_3^{\infty} e^{-(x-3)} dx \quad - \text{پ} \quad \int_1^3 e^{-(x-2)} dx \quad - \text{ب} \quad \int_0^3 e^{-(x-3)} dx \quad - \text{الف}$$

پنځم - لاندې انتیگرالونه وشمېری.

$$\int_0^5 (e^x + e^{-x}) dx \quad - \text{پ} \quad \int_0^4 3 \cdot e^{x+2} dx \quad - \text{ب} \quad \int_0^3 (e^x - x + 1) dx \quad - \text{الف}$$

شپږم - د  $k$  د کوم ارزښت لپاره دا انتیگرال ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$\int_0^k e^x dx = 2 \cdot e \quad - \text{پ} \quad \int_0^4 (e^x - k \cdot x) dx = 4 \quad - \text{ب} \quad \int_0^2 k \cdot e^x dx = \frac{1}{2} e \quad - \text{الف}$$

اوم - لاندې انتیگرالونه وشمېری.

$$\int_0^4 \left( \frac{1}{4} e^x - 2e^{\frac{1}{2}x} \right) dx \quad - \text{پ} \quad \int_0^{\ln(k)} (e^{2x} - k \cdot e^x) dx \quad - \text{ب} \quad \int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 2e^x) dx \quad - \text{الف}$$

اتم - لاندې انتیگرالونه وشمېری او اړونده سطحه یې کرښې - کرښې کړی.

الف -

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 2$$

$$g(x) = f(2) \cdot e^{-(x-2)} \quad \text{für } 2 \leq x < \infty$$

$$A = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{\infty} g(x) dx$$

ب -

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 3$$

$$g(x) = f(3) \cdot e^{-(x-3)} \quad \text{für } 3 \leq x < \infty$$

$$A = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^{\infty} g(x) dx$$

نهم - لاندې انټيگرالونه وشمېری او اړونده سطحه یې کرښې - کرښې کړی.

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 4$$

$$g(x) = f(4) \cdot e^{-(x-4)} \quad \text{für } 4 \leq x < \infty$$

$$A = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^{\infty} g(x) dx$$

الف -

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für } 0 \leq x \leq k$$

$$g(x) = f(k) \cdot e^{-(x-k)} \quad \text{für } k \leq x < \infty$$

$$A = \int_0^k f(x) dx + \int_k^{\infty} g(x) dx$$

ب -

حلونه

د e تابع انټيگرالونه |

د سطحې شمېرنه

نيجي او مفصل حلونه

نتيجه

اول -

$$\int_{-3}^0 e^x dx \approx 0,905 \quad - \text{پ} \quad \int_{-1}^0 e^x dx \approx 0,632 \quad - \text{ب} \quad \int_0^1 e^x dx \approx 1,718 \quad - \text{الف}$$

دويم -

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1 \quad - \text{پ} \quad \int_0^3 (e^x - 1) dx \approx 16,086 \quad - \text{ب} \quad \int_0^1 (e^x - 1) dx \approx 0,718 \quad - \text{الف}$$

درېم -

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \quad - \text{پ} \quad \int_{-1}^2 e^{-x} dx \approx 2,583 \quad - \text{ب} \quad \int_0^1 e^{-x} dx \approx 0,632 \quad - \text{الف}$$

څلورم -

$$\int_0^{\infty} e^{-(x-3)} dx = 1 \quad - \text{پ} \quad \int_1^3 e^{-(x-2)} dx \approx 2,350 \quad - \text{ب} \quad \int_0^3 e^{-(x-3)} dx \approx 19,086 \quad - \text{الف}$$

پنځم -

$$\int_0^4 3 \cdot e^{x+2} dx \approx 1188,119 \quad - \text{ب} \quad \int_0^3 (e^x - x + 1) dx \approx 17,586 \quad - \text{الف}$$

$$\int_0^5 (e^x + e^{-x}) dx \approx 148,406 \quad - \text{پ}$$

شپيرم -

$$\int_0^k e^x dx = 2e \quad \int_0^4 (e^x - k \cdot x) dx = 4 \quad \int_0^2 k \cdot e^x dx = \frac{1}{2} \cdot e$$

الف -  $\Leftrightarrow k \approx 0,213$  ب -  $\Leftrightarrow k \approx 6,2$  پ -  $\Leftrightarrow k \approx 1,862$

اوم -

$$\int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 2e^x) dx = \int_0^{\ln(2)} e^{2x} dx - 2 \cdot \int_0^{\ln(2)} e^x dx = -\frac{1}{2}$$

الف -

$$\int_0^{\ln(k)} (e^{2x} - ke^x) dx = \int_0^{\ln(k)} e^{2x} dx - k \cdot \int_0^{\ln(k)} e^x dx = -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}$$

ب -

پ -

$$\int_0^4 \left( \frac{1}{4} e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) dx = \frac{1}{4} \cdot \int_0^4 e^x dx - 2 \cdot \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{4} e^4 - 4e^2 + \frac{15}{4} \approx -12,175$$

$$\int_0^2 (e^x - 1) dx + \int_2^{\infty} f(2) \cdot e^{-(x-2)} dx = 2e^2 - 4 \approx 10,778$$

اتم - الف -

$$\int_0^3 (e^x - 1) dx + \int_3^{\infty} f(3) \cdot e^{-(x-3)} dx = 2e^3 - 5 \approx 35,171$$

ب -

$$\int_0^4 (e^x - 1) dx + \int_4^{\infty} f(4) \cdot e^{-(x-4)} dx = 2e^4 - 6 \approx 103,196$$

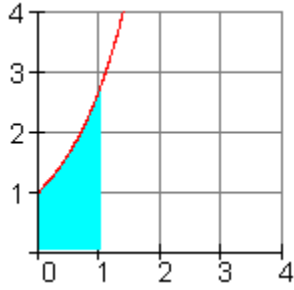
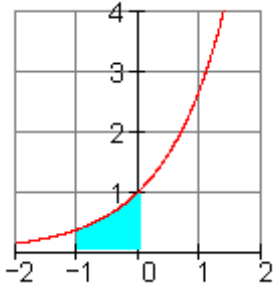
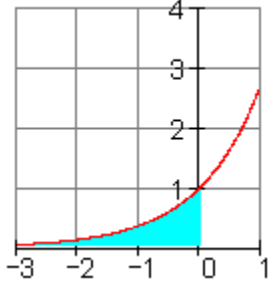
نهم - الف -

$$\int_0^k (e^x - 1) dx + \int_k^{\infty} f(k) \cdot e^{-(x-k)} dx = 2e^k - k - 2$$

ب -

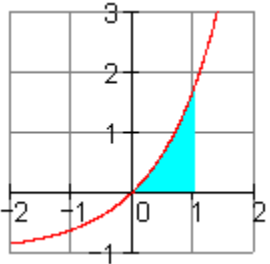
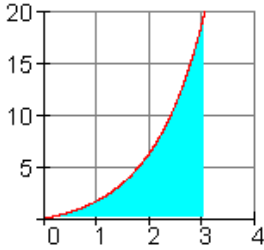
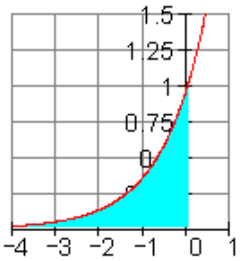
مفصل حلونه:

لومری -

$\int_0^1 e^x dx$ $= e^x \Big _0^1$ $= e^1 - e^0$ $= e - 1 \approx 1,718$	<p>الف -</p> 
$\int_{-1}^0 e^x dx$ $= e^x \Big _{-1}^0$ $= e^0 - e^{-1}$ $= 1 - e^{-1} \approx 0,632$	<p>ب -</p> 
$\int_{-3}^0 e^x dx$ $= e^x \Big _{-3}^0$ $= e^0 - e^{-3}$ $= 1 - e^{-3} \approx 0,950$	<p>ب -</p> 



دويم:

$\int_0^1 (e^x - 1) dx$ $= e^x - x \Big _0^1$ $= e^1 - 1 - (e^0 - 0)$ $= e - 1 - 1 \approx 0,718$	<p>الف-</p> 
$\int_0^3 (e^x - 1) dx$ $= e^x - x \Big _0^3$ $= e^3 - 3 - (e^0 - 0)$ $= e^3 - 3 - 1 \approx 16,086$	<p>ب-</p> 
$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx$ <p>لومړی بي له پوله ارزښت جوړولو شمېرته</p> $\int_a^0 e^x dx = e^x \Big _a^0 = e^0 - e^a = 1 - e^a$ <p>د پوله ارزښت جوړول</p> $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a)$ $= 1 - \underbrace{\lim_{a \rightarrow -\infty} e^a}_0 = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$	<p>ج-</p> 

دریم:

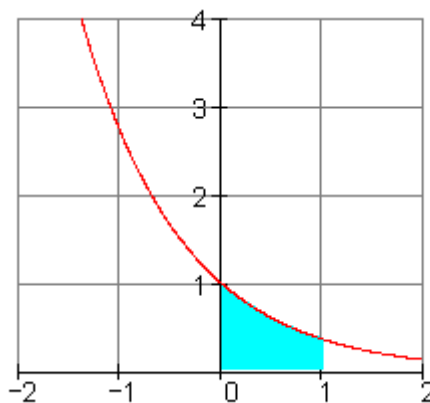
الف-

د بدلون له لاري حل  $\int_0^1 e^{-x} dx$  |

بدلون  $u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندي يا کښته پوله:  $u(0) = 0$  پورته پوله:  $u(1) = -1$

$$\Rightarrow -\int_0^{-1} e^u du = \int_{-1}^0 e^u du = e^u \Big|_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - e^{-1} \approx 0,632$$



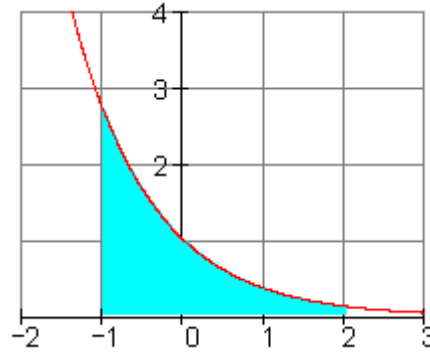
ب -

د بدلون له لاري حل  $\int_{-1}^2 e^{-x} dx$

$$u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du \quad \text{بدلون:}$$

$$u(2) = -2 \text{ پوله: } u(-1) = -(-1) = 1 \text{ لاندې پوله:}$$

$$\Rightarrow -\int_1^{-2} e^u du = \int_{-2}^1 e^u du = e^u \Big|_{-2}^1 = e^1 - e^{-2} = e - e^{-2} \approx 2,583$$



پ -

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-x} dx$$

حل لومړی بی له پوښچورولو.

$$\int_0^a e^{-x} dx$$

د بدلون له لارې حل

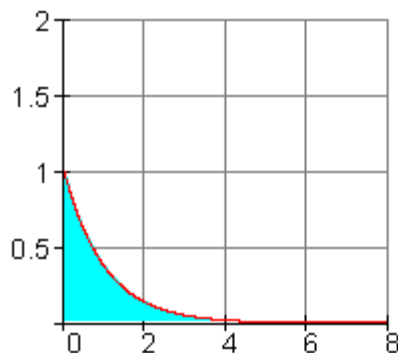
$$u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du \quad \text{بدلون}$$

لاندي يا كېنته پوله:  $u(0) = -0 = 0$  پورته پوله:  $u(a) = -a$

$$\Rightarrow -\int_0^{-a} e^u du = \int_{-a}^0 e^u du = e^u \Big|_{-a}^0 = e^0 - e^{-a} = 1 - e^{-a}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-x} dx = 1 - \lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

پوله تاكنه:



څلورم: الف-

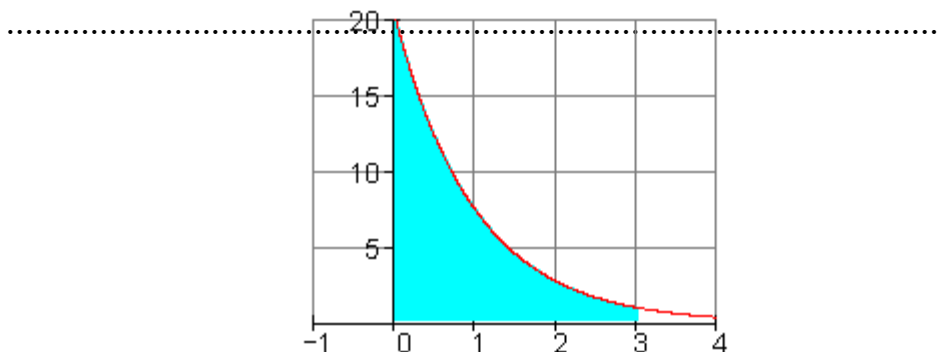
$$\int_0^3 e^{-(x-3)} dx \quad | \quad \text{د بدلون له لاري حل}$$

$$: u(x) = -(x-3) = -x+3 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

بدلون

لاندي پوله:  $u(0) = -(0-3) = 3$  پورته پوله:  $u(3) = -(3-3) = 0$

$$\Rightarrow -\int_3^0 e^u du = \int_0^3 e^u du = e^u \Big|_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1 \approx 19,086$$

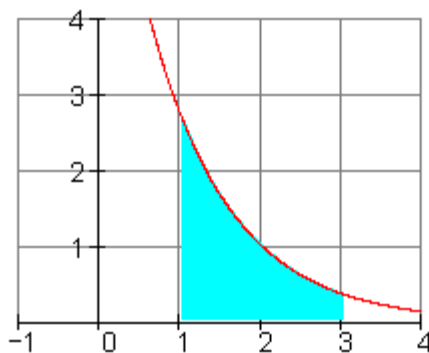


ب -  $\int_1^3 e^{-(x-2)} dx$  د بدلون له لارې حل

بدلون  $u(x) = -(x-2) = -x+2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندي پوله :  $u(1) = -(1-2) = 1$  پورته پوله :  $u(3) = -(3-2) = -1$

$$\Rightarrow -\int_1^{-1} e^u du = \int_{-1}^1 e^u du = e^u \Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - e^{-1} \approx 2,350$$



ب -

$$\int_3^{\infty} e^{-(x-3)} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_3^a e^{-(x-3)} dx$$

حل ، لومری بی له پولي جورولو

$$\int_3^a e^{-(x-3)} dx$$

د بدلون له لاري حل

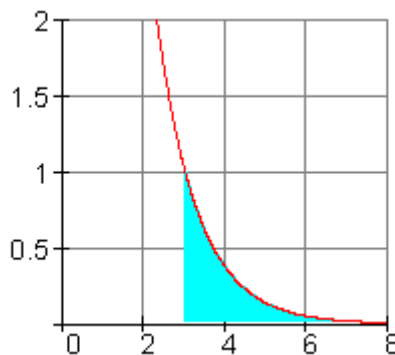
$$u(x) = -(x-3) = -x+3 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

بدلون:

$$u(a) = -a+3 \quad \text{لاندي پوله:} \quad u(3) = -(3-3) = 0 \quad \text{پورته پوله:}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(x-3)} dx = 1 - \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{e^{-a+3}}_0 = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-(x-3)} dx = 1$$

پوله جورونه:



پنجم: الف -

$$\begin{aligned} \int_0^3 (e^x - x + 1) dx &= e^x - \frac{1}{2}x^2 + x \Big|_0^3 \\ &= e^3 - \frac{1}{2} \cdot 9 + 3 - \left( e^0 - \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \right) \\ &= e^3 - \frac{9}{2} + 3 - 1 = e^3 - \frac{5}{2} \approx 17,586 \end{aligned}$$

ب -

$$\int_0^4 3 \cdot e^{x+2} dx = 3 \cdot \int_0^4 e^{x+2} dx$$

د بدلون له لارې حل

$$u(x) = x + 2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = du$$

بدلون:

لاندي پوله:  $u(0) = 0 + 2 = 2$  پورته پوله:  $u(4) = 4 + 2 = 6$

$$\Rightarrow 3 \cdot \int_2^6 e^u du = 3 \cdot \int_2^6 e^u du = 3 \cdot e^u \Big|_2^6 = 3 \cdot (e^6 - e^2) \approx 1188,119$$

حل ، لومړی بي له پولي جوړولو

پ -

$$\int_0^5 (e^x + e^{-x}) dx = \underbrace{\int_0^5 e^x dx}_I + \underbrace{\int_0^5 e^{-x} dx}_{II} = I + II$$

$$I: \int_0^5 e^x dx = e^x \Big|_0^5 = e^5 - e^0 = e^5 - 1$$

$$II: \int_0^5 e^{-x} dx =$$

د بدلون له لارې حل

$$: u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

بدلون

لاندي پوله:  $u(0) = 0$  پورته پوله:  $u(5) = -5$

$$\Rightarrow -\int_0^{-5} e^u du = \int_{-5}^0 e^u du = e^u \Big|_{-5}^0 = e^0 - e^{-5} = 1 - e^{-5}$$

$$\int_0^5 (e^x + e^{-x}) dx = I + II = e^5 - 1 + 1 - e^{-5} = e^5 - e^{-5} \approx 148,406$$

شپيزم:  
الف:

$$\int_0^2 k \cdot e^x dx = \frac{1}{2} \cdot e$$

$$\int_0^2 k \cdot e^x dx = k \cdot \int_0^2 e^x dx = k \cdot e^x \Big|_0^2 = k \cdot (e^2 - e^0) = k \cdot (e^2 - 1)$$

$$k \cdot (e^2 - 1) = \frac{1}{2} \cdot e \quad | : (e^2 - 1) \quad \text{برابر کيردى:}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\frac{1}{2} \cdot e}{(e^2 - 1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{e^2 - 1} \approx 0,213$$

ب -

$$\int_0^4 (e^x - k \cdot x) dx = 4$$

$$\int_0^4 (e^x - k \cdot x) dx = e^x - \frac{1}{2} k x^2 \Big|_0^4 = e^4 - \frac{1}{2} k \cdot 16 - (e^0 - 0) = e^4 - 8k - 1$$

$$e^4 - 8k - 1 = 4 \quad | -e^4 + 1 \quad \text{برابر کيردى:}$$

$$\Leftrightarrow -8k = -e^4 + 5 \quad | : (-8)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-e^4 + 5}{-8} = \frac{1}{8} e^4 - \frac{5}{8} \approx 6,2$$

پ - لاند الماني: برابر کيردى

$$\int_0^k e^x dx = 2e$$

$$\int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - e^0 = e^k - 1$$

$$\text{gleichsetzen: } e^k - 1 = 2e \quad | +1$$

$$\Leftrightarrow e^k = 2e + 1 \quad | \ln ( \quad )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^k) = \ln(2e + 1)$$

$$\Leftrightarrow k \cdot \underbrace{\ln(e)}_1 = \ln(2e + 1)$$

$$\Leftrightarrow k = \ln(2e + 1) \approx 1,862$$

اووم: حل : الف-



$$\int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 2e^x) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^{2x} dx}_I - 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^x dx}_{II} = I - 2 \cdot II$$

$$I: \int_0^{\ln(2)} e^{2x} dx =$$

د بدلون له لاري حل

$$: u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2} du \quad \text{بدلون:}$$

لاندي پوله :  $u(0) = 2 \cdot 0 = 0$  پورته پوله:  $u(\ln(2)) = 2 \cdot \ln(2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{2 \ln(2)} e^u du &= \frac{1}{2} e^u \Big|_0^{2 \ln(2)} = \frac{1}{2} (e^{2 \ln(2)} - e^0) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e^{\ln(2)}}{2} \right)^2 - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} (2^2 - 1) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$II: \int_0^{\ln(2)} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln(2)} = \frac{e^{\ln(2)}}{2} - e^0 = 2 - 1 = 1$$

$$\int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 2e^x) dx = I - 2 \cdot II = \frac{3}{2} - 2 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

-ب-

$$\int_0^{\ln(k)} (e^{2x} - ke^x) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{2x} dx}_I - k \cdot \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^x dx}_{II} = I - k \cdot II$$

$$I: \int_0^{\ln(k)} e^{2x} dx =$$

د بدلون له لاري حل = د

$$u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

بدلون:

لاندي پوله :  $u(0) = 2 \cdot 0 = 0$  پورته پوله :  $u(\ln(k)) = 2 \cdot \ln(k)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{2 \ln(k)} e^u du = \frac{1}{2} e^u \Big|_0^{2 \ln(k)} = \frac{1}{2} (e^{2 \ln(k)} - e^0) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e^{\ln(k)}}{k} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} (k^2 - 1)$$

$$\text{II} : \int_0^{\ln(k)} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln(k)} = \frac{e^{\ln(k)}}{k} - e^0 = k - 1$$

$$\int_0^{\ln(k)} (e^{2x} - ke^x) dx = \text{I} - k \cdot \text{II} = \frac{1}{2} (k^2 - 1) - k \cdot (k - 1) = -\frac{1}{2} k^2 + k - \frac{1}{2}$$

-ب-

$$\int_0^4 \left( \frac{1}{4} e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^4 e^x dx - 2 \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{4} \cdot \text{I} - 2 \cdot \text{II}$$

$$\text{I} : \int_0^4 e^x dx = e^x \Big|_0^4 = e^4 - e^0 = e^4 - 1$$

$$\text{II} : \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx =$$

د بدلون له لاري حل

$$u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx = 2du$$

بدلون:

$$u(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \quad \text{پورته پوله} : u(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \quad \text{لاندي پوله} :$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \int_0^2 e^u du = 2 \cdot e^u \Big|_0^2 = 2(e^2 - e^0) = 2e^2 - 2$$

$$\int_0^4 \left( \frac{1}{4} e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) dx = \frac{1}{4} \cdot I - 2 \cdot II = \frac{1}{4} \cdot (e^4 - 1) - 2 \cdot (2e^2 - 2)$$

$$= \frac{1}{4} e^4 - \frac{1}{4} - 4e^2 + 4 = \frac{1}{4} e^4 - 4e^2 + \frac{15}{4} \approx -12,157$$

اتم: الف-

$$f(x) = e^x - 1 \quad g(x) = f(2) \cdot e^{-(x-2)} \text{ mit } f(2) = e^2 - 1$$

$$A = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{\infty} g(x) dx = \underbrace{\int_0^2 (e^x - 1) dx}_I + (e^2 - 1) \underbrace{\int_2^{\infty} e^{-(x-2)} dx}_{II} = I + (e^2 - 1) \cdot II$$

$$I: \int_0^2 (e^x - 1) dx = e^x - x \Big|_0^2 = e^2 - 2 - (e^0 - 0) = e^2 - 3$$

$$II: \int_2^{\infty} e^{-(x-2)} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_2^a e^{-(x-2)} dx$$

حل ، لومری بی له پولي جورولو

$$\int_2^a e^{-(x-2)} dx$$

د بدلون له لاري حل

$$u(x) = -(x-2) = -x+2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

بدلون:

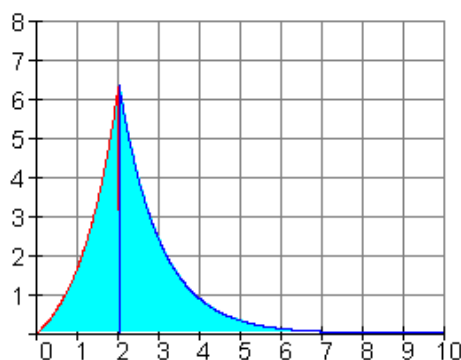
$$u(a) = -a+2 \quad \text{پورته پوله:} \quad u(2) = -(2-2) = 0 \quad \text{لاندي پوله:}$$

$$\Rightarrow - \int_0^{-a+2} e^u du = \int_{-a+2}^0 e^u du = e^u \Big|_{-a+2}^0 = e^0 - e^{-a+2} = 1 - e^{-a+2}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(x-2)} dx = 1 - \underbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a+2}}_0 = 1 \Rightarrow \int_2^{\infty} e^{-(x-2)} dx = 1$$

$$A = 1 + (e^2 - 1) \cdot 1 = e^2 - 3 + (e^2 - 1) \cdot 1 = e^2 - 3 + e^2 - 1 = 2e^2 - 4 \approx 10,778$$



ب-  $f(3) = e^3 - 1$  سره  $f(x) = e^x - 1$  د  $g(x) = f(3) \cdot e^{-(x-3)}$

$$A = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^{\infty} g(x) dx = \int_0^3 (e^x - 1) dx + (e^3 - 1) \int_3^{\infty} e^{-(x-3)} dx = I + (e^3 - 1) \cdot II$$

$$I: \int_0^3 (e^x - 1) dx = e^x - x \Big|_0^3 = e^3 - 3 - (e^0 - 0) = e^3 - 4$$

$$II: \int_3^{\infty} e^{-(x-3)} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_3^a e^{-(x-3)} dx \quad I$$

حل ، لومړی بي له پولي جوړولو

$$\int_3^a e^{-(x-3)} dx$$

د بدلون له لاري حل

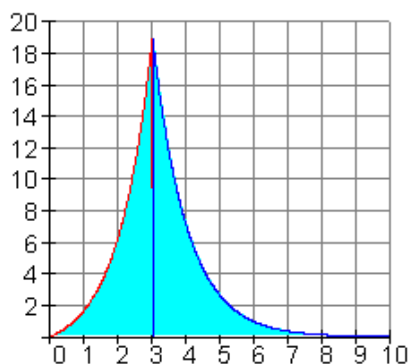
لاندي پوله :  $u(3) = -(3-3) = 0$  پورته پوله :  $u(a) = -a+3$

$$\Rightarrow - \int_0^{-a+3} e^u du = \int_{-a+3}^0 e^u du = e^u \Big|_{-a+3}^0 = e^0 - e^{-a+3} = 1 - e^{-a+3}$$

پوله جورونه

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(x-3)} dx = 1 - \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{e^{-a+3}}_0 = 1 \Rightarrow \int_3^{\infty} e^{-(x-3)} dx = 1$$

$$A = I + (e^3 - 1) \cdot II = e^3 - 4 + (e^3 - 1) \cdot 1 = e^3 - 4 + e^3 - 1 = 2e^3 - 5 \approx 35,171$$



نهم:

الف-

$$f(x) = e^x - 1 \quad g(x) = f(4) \cdot e^{-(x-4)} \text{ mit } f(4) = e^4 - 1$$

$$A = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^{\infty} g(x) dx = \int_0^4 (e^x - 1) dx + (e^4 - 1) \int_4^{\infty} e^{-(x-4)} dx = I + (e^4 - 1) \cdot II$$

$$I: \int_0^4 (e^x - 1) dx = e^x - x \Big|_0^4 = e^4 - 4 - (e^0 - 0) = e^4 - 5$$

$$II: \int_4^{\infty} e^{-(x-4)} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_4^a e^{-(x-4)} dx \quad L$$

حل ، لومری بی له پولي جورولو

$$\int_4^a e^{-(x-4)} dx \quad L$$

د بدلون له لاري حل

$$u(x) = -(x-4) = -x+4 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

بدلون:

$$u(a) = -a+4 \quad \text{پورته پوله:} \quad u(4) = -(4-4) = 0 \quad \text{لاندي پوله:}$$

$$\Rightarrow - \int_0^{-a+4} e^u du = \int_{-a+4}^0 e^u du = e^u \Big|_{-a+4}^0 = e^0 - e^{-a+4} = 1 - e^{-a+4}$$

پوله ارزښت جورونه

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(x-4)} dx = 1 - \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{e^{-a+4}}_0 = 1 \Rightarrow \int_4^{\infty} e^{-(x-4)} dx = 1$$

$$A = I + (e^4 - 1) \cdot II = e^4 - 5 + (e^4 - 1) \cdot 1 = e^4 - 5 + e^4 - 1 = 2e^4 - 6 \approx 103,196$$

ب-

$$f(x) = e^x - 1 \quad g(x) = f(k) \cdot e^{-(x-k)} \quad \text{mit } f(k) = e^k - 1$$

$$A = \int_0^k f(x) dx + \int_k^{\infty} g(x) dx = \underbrace{\int_0^k (e^x - 1) dx}_I + (e^k - 1) \underbrace{\int_k^{\infty} e^{-(x-k)} dx}_{II} = I + (e^k - 1) \cdot II$$

$$I : \int_0^k (e^x - 1) dx = e^x - x \Big|_0^k = e^k - k - (e^0 - 0) = e^k - k - 1$$

$$II : \int_k^{\infty} e^{-(x-k)} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_k^a e^{-(x-k)} dx \quad L$$

حل ، لومړی بي له پولي جوړولو

$$\int_k^a e^{-(x-k)} dx$$

د بدلون له لارې حل

$$u(x) = -(x-k) = -x+k \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

بدلون:

$$u(a) = -a+k \quad \text{پورته پوله:} \quad u(k) = -(k-k) = 0 \quad \text{لاندې پوله:}$$

$$\Rightarrow - \int_0^{-a+k} e^u du = \int_{-a+k}^0 e^u du = e^u \Big|_{-a+k}^0 = e^0 - e^{-a+k} = 1 - e^{-a+k}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(x-k)} dx = 1 - \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{e^{-a+k}}_0 = 1 \Rightarrow \int_k^\infty e^{-(x-k)} dx = 1$$

$$A = 1 + (e^k - 1) \cdot 11 = e^k - k - 1 + (e^k - 1) \cdot 1 = e^k - k - 1 + e^k - 1 = 2e^k - k - 2$$

پوښتنې

مشتق — او انټيگرالشميرنه |

کډې وډې پوښتنې

لومړی - د لاندې پوښتنې - او لوگاريتم ترمونو بڼه بدله کړی د توان - او لوگاريتم قوانینو د استعمال له لارې .

$$\text{الف - } (e^x + e^{-x})^2 \quad \text{ب - } (e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x$$

دويم - د اکسپوننشل مساوات تاسو ته معلومي لاري حل کړی.

$$\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1 \quad \text{ب} \quad 6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0 \quad \text{الف}$$

دریم - د لاندې توابعو مشتق وشمېری.

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x} \quad \text{ب} \quad f(x) = e^{-4x} - e^{4x} \quad \text{الف}$$

څلورم - د لاندې توابعو انټیگرال وشمېری او د مشتق سره یې نتیجې کنټرول کړی.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \quad \text{ب} \quad f(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) \quad \text{الف}$$

پنځم - تاسو ته د معلوم قانون له مخې د لاندې توابعو مشتق وشمېری.

$$f(x) = (1 - e^{ax})^2 \quad \text{ب} \quad f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} \quad \text{الف}$$

شپږم - لاندې انټیگرالونه وشمېری.

$$\int_1^2 e^{4-2x} dx \quad \text{ب} \quad \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx \quad \text{الف}$$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{اوم} - \text{تابع ورکړ شوی.}$$

الف - د  $[-4; 5]$  لپاره ارزښت جدول وکارئ او گراف یې ګرښیز کړی. د  $y$  - محور، له تیټیکي او  $x$  - محور څخه تېرېدوکی  $y$  - محور سره غبرګې کرښې ترمنځ سطحه په نڅبنه کړی.

ب - نسبي مینیموم  $T(x_e | f(x_e))$  وشمېری.



پ - د الف لاندې په نخښه شوي سطحه وشمېری.

اتم - د 3 مې درجې تام راشنل تابع د  $x$  -محور په  $P(-4 | 0)$  کې غوڅوي او په  $T(2 | 0)$  کې یو ټیټکی لري. په  $P$  تانجنت د  $y$  -محور په  $P_y(0 | 48)$  کې غوڅوي. د  $f(x)$  تابع مساوات او د  $t(x)$  تانجنت مساوات وشمېری او گراف یې کړبڼي-کړبڼي کړی.

غوښتنه:

ټول هوښیا-یا راشنل توابع یابلواک، ټیټ ټکی، محور غوڅتکي، مشتق، تانجنت مساوات، گاوس-الگوریتم.

نهم - د  $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8$  تابع مساوات ورکړ شوي دي. انحرافي ارزښتونه وشمېری او د گراف او  $x$ -محور منځ سطحه وشمېری، چپرته چې صفر ځایونه د انټیگرال پولي جوړوي. گراف یې وکارئ او شمېرلي سطحه یې په نخښه کړی.

غښتنې:

افراطي ارزښتونه، صفر ځایونه، بیمریغ مساوات، ټاکلی انټیگرال.

### حلونه ( او بیوني )

#### مشتق - او انټیگرال شمیرنه |

نتیجې او مفصل حلونه.

نتیجې:

اول - نتیجې

$$\text{الف - } (e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$$

$$\text{ب - } (e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x = e^{2x} + 5 \cdot e^x - 1$$

دويم - نتيجيخ

$$\text{الف - } 6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0 \Rightarrow x = 1 - \ln(2)$$

$$\text{ب - } \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}\ln(4 + 2e)$$

دريم - نتيجي

$$\text{الف - } f(x) = e^{-4x} - e^{4x} \Rightarrow f'(x) = -4(e^{-4x} + e^{4x})$$

$$\text{ب - } f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}(-10x-3)e^{-5x^2-3x}$$

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) \Rightarrow \int f(x) dx = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3 - 3e^x\right] + C$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \Rightarrow \int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3 \cdot \ln|x| + C$$

$$\text{پنجم - الف - } f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} \Rightarrow f'(x) = 2(x+a - e^{2x-3})$$

$$\text{ب - } f(x) = (1 - e^{ax})^2 \Rightarrow f'(x) = -2a \cdot e^{ax}(1 - e^{ax})$$

شيرم - نتيجي:

$$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^2 - 2 \approx 12,778$$

الف -

$$\int_1^2 e^{4-2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3,195 \quad \text{ب -}$$

اوم - نتيجي:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{د}$$

ليپاره ارزښت جدول.

الف -

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17

$$T(\ln(2) | \sqrt{2}) \quad \text{ب - ټيټکي:}$$

پ - په نخښه شوي سطحه 1FE (FE د سطحې واحد) ده

اتم - نتيجي:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{16}{3}; t(x) = 12x + 48$$

نهم - نتيجي:

$$P_{\text{Max}}(0 | -8); P_{\text{Min}_1} \left[ -\sqrt{\frac{6}{5}} | -\frac{49}{5} \right]; P_{\text{Min}_2} \left[ \sqrt{\frac{6}{5}} | -\frac{49}{5} \right]$$

سطحه:  $A = |-32| = 32 \text{ FE}$  (FE د سحي يوونونه يا واحدونه)

مفصل ځوابونه:

لومری:

$$\underbrace{(e^x + e^{-x})^2}_{1. \text{ bin. Formel}} = e^{2x} + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}$$

$$= \underline{\underline{e^{2x} + e^{-2x} + 2}} \quad \text{الف-}$$

$$(e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x = e^{2x} - \underbrace{e^{-x} \cdot e^x}_1 + 5 \cdot e^x$$

$$= e^{2x} - 1 + 5 \cdot e^x$$

$$= \underline{\underline{e^{2x} + 5 \cdot e^x - 1}} \quad \text{ب -}$$

دويم:

الف -

$$6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0 \quad | -6$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}e^{2-2x} = -6 \quad | \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{2-2x} = 4 \quad | \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2-2x}) = \ln(4)$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2x = \ln(4)$$

$$\text{د} \quad \ln(4) = \ln(2^2) = 2 \cdot \ln(2) \quad \text{له امله باور لري:}$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2x = 2 \cdot \ln(2) \quad | -2$$

$$\Leftrightarrow -2x = 2 \cdot \ln(2) - 2 \quad | : (-2)$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln(2) + 1 = \underline{\underline{1 - \ln(2) \approx 0,307}}$$

ب -

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} &= 1 \mid + \frac{e}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{4x} &= 1 + \frac{e}{2} \mid \cdot 4 \\ \Leftrightarrow e^{4x} &= 4 + 2e \mid \ln( ) \\ \Leftrightarrow \ln(e^{4x}) &= \ln(4 + 2e) \\ \Leftrightarrow 4x &= \ln(4 + 2e) \mid : 4 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\ln(4 + 2e)}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{4}\ln(4 + 2e) \approx 0,561 \end{aligned}$$

دریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x} \\ \Rightarrow f'(x) &= (-10x-3) \cdot \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x} \\ &= \underline{\underline{-\frac{3}{2}(10x+3)e^{-5x^2-3x}}} \quad \text{ب -} \end{aligned} \quad \begin{aligned} f(x) &= e^{-4x} - e^{4x} \\ \Rightarrow f'(x) &= -4 \cdot e^{-4x} - 4 \cdot e^{4x} \\ &= \underline{\underline{-4(e^{-4x} + e^{4x})}} \quad \text{الف -} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) \\ \Rightarrow F(x) &= \int \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) dx \\ &= \frac{1}{16} \int (x^2 - 3e^x) dx \\ &= \frac{1}{16} \left[ \frac{1}{3}x^3 - 3e^x \right] + C \end{aligned}$$

$$F'(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x)$$

خلورم: الف -

ب -

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \left( x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3 \cdot \ln|x| + C$$

$$j: \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \text{يادونه:}$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3 \cdot \frac{1}{x}$$

پنجم:

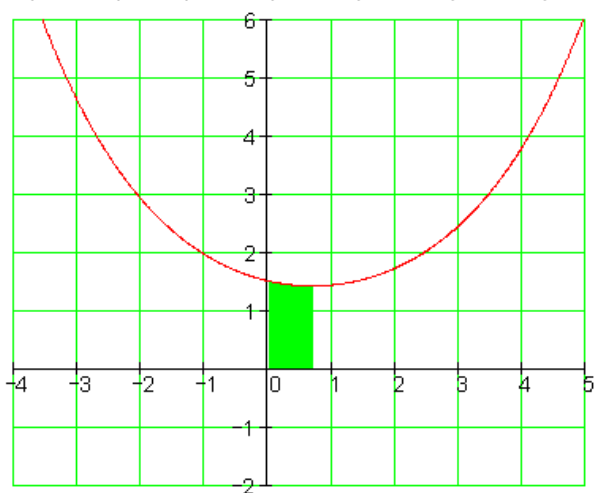
<p>ب - <math>f(x) = (1 - e^{ax})^2</math> د زنجيري قانون سره</p> $\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \underbrace{(1 - e^{ax})}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{a \cdot (-e^{ax})}_{\text{innere Abl.}}$ <p>دنى مشتق دباندى مشتق</p> $= \underline{\underline{-2a \cdot e^{ax} (1 - e^{ax})}}$	<p>الف -</p> $f(x) = (x + a)^2 - e^{2x-3}$ $\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot (x + a) \cdot 1 - 2 \cdot e^{2x-3}$ $= 2x + 2a - 2 \cdot e^{2x-3}$ $= \underline{\underline{2(x + a - e^{2x-3})}}$
---	--

شپږم:

ب - بدلون	الف -
$\int_1^2 e^{4-2x} dx \text{ Substitution: } u(x) = 4 - 2x$ $u'(x) = \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2} du$ $\text{ug: } u(1) = 2; \text{og: } u(2) = 0$ $-\frac{1}{2} \cdot \int_2^0 e^u du = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 e^u du$ $= \frac{1}{2} \cdot e^u \Big _0^2 = \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \cdot e^0$ $= \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3,95$	$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx \text{ Substitution: } u(x) = \frac{1}{2}x$ $u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$ $\text{ug: } u(0) = 0; \text{og: } u(4) = 2$ $2 \cdot \int_0^2 e^u du = 2 \cdot e^u \Big _0^2 = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^0$ $= \underline{\underline{2 \cdot e^2 - 2 \approx 12,778}}$

اووم: الف - د  $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$  لپاره ارزښت جدول

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17



ب - د نسبي مينيموم يا خورا کوچني ارزښت شميرنه:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} = 0 \quad | +\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \quad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 2e^{-\frac{1}{2}x} \quad | \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \quad | \ln( )$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2)$$

افراطي خاى. افراطي ارزښت:

$$f(x_e) = f(\ln(2)) = e^{-\frac{1}{2}\ln(2)} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\ln(2)}$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{T(\ln(2) | \sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

ثبیت ټکی:

پ - د سطحی شمیرنه:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln(2)} f(x) dx = \int_0^{\ln(2)} \left( e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(2)} \left( e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx}_I + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\ln(2)} \left( e^{\frac{1}{2}x} \right) dx}_{II}$$

$$I: \int_0^{\ln(2)} \left( e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx \quad u(x) = -\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dx = -2du$$



$$u(0) = 0 \quad u(\ln(2)) = -\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow -2 \int_0^{-\frac{1}{2}\ln(2)} e^u \, du = 2 \int_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^0 e^u \, du = 2 \left[ e^u \right]_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^0 = 2 \left[ e^0 - e^{-\frac{1}{2}\ln(2)} \right]$$

$$\text{II: } \frac{1}{2} \int_0^{\ln(2)} \left( e^{\frac{1}{2}x} \right) dx \quad u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

$$u(0) = 0 \quad u(\ln(2)) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{1}{2}\ln(2)} (e^u) \, du = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(2)} (e^u) \, du = \left[ e^u \right]_0^{\frac{1}{2}\ln(2)} = e^{\frac{1}{2}\ln(2)} - e^0$$

$$\text{I+II: } 2e^0 - 2e^{-\frac{1}{2}\ln(2)} + e^{\frac{1}{2}\ln(2)} - e^0 = 1 - 2 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 1$$

په نخښه شوي سطحه ارزښت 1FE (د سطحې يوون يا واحد) لري

اتم:

د پرابلم تحليل:

د دريمي درجي ام راشنل (ريښتيني) تابع لپاره:  $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

I. په  $T(2|0)$  کې ټيټ ټکی په دې معنا دی:

$$1. x_1 = 2 \quad f(x_1) = f(2) = 0 \quad \text{يعني } f(x) \text{ د } f(x) \text{ صفرخای دی،}$$

$$2. x_T = 2 \quad f'(x_T) = f'(2) = 0 \quad \text{يعني } f(x) \text{ د افراطي خای دی،}$$

II.  $P(-4|0)$  د  $f(x)$  صفرخای دی، يعني  $f(-4) = 0$ .

III. په  $P(-4|0)$  کې ټانجنټ د  $y$ -محور په  $a_{0T} = 48$  کې غوڅوي، يعني  $t(0) = 48$

او  $t(0) = 48$ .

د ضريبونو مساواتو ليكل:

$$\begin{aligned} 11. \quad \Rightarrow f(2) = 0 &\Leftrightarrow a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0 \end{aligned}$$

مساوات ۱ .

$$\begin{aligned} 12. \quad \Rightarrow f'(2) = 0 \text{ mit } f'(x) &= 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 = 0 \\ f'(2) = 0 &\Leftrightarrow 3a_3 \cdot 2^2 + 2a_2 \cdot 2 + a_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0 \end{aligned}$$

مساوات ۲ .

$$\begin{aligned} 11 \quad \Rightarrow f(-4) = 0 &\Leftrightarrow a_3 \cdot (-4)^3 + a_2 \cdot (-4)^2 + a_1 \cdot (-4) + a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 0 \quad \text{Gleichung III} \end{aligned}$$

مساوات ۳ .

III. د تانجنت مساوات:  $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

د  $x_0 = -4$  سره  $f(x_0) = f(-4) = 0$  باور لري، ځکه چې  $x_0 = -4$  د  $f(x)$  صفر ځايونه دي.

$$\begin{aligned} f'(x_0) = f'(-4) &= 3a_3 \cdot (-4)^2 + 2a_2 \cdot (-4) + a_1 \\ &= 48a_3 - 8a_2 + a_1 \end{aligned}$$

$$\text{also } t(x) = f'(x) \cdot (x - x_0) = (48a_3 - 8a_2 + a_1)(x + 4)$$

$$t(0) = 48 \Leftrightarrow (48a_3 - 8a_2 + a_1) \cdot 4 = 48$$

$$\Leftrightarrow 192a_3 - 32a_2 + 4a_1 = 48 \quad \text{Gleichung IV}$$

پورته: مساوات IV .

له دې سره اوس ټول د ضريبونو مساوات معلوم دي:

$$I \quad 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$

$$II \quad 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0$$

$$III \quad -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 0$$

$$IV \quad 192a_3 - 32a_2 + 4a_1 = 48$$

د مساواتسيستم ځواب د گاس-الگوريتم له لارې:

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
1	-4	16	-64	0	III - I
0	4	-32	192	48	: 4
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	-6	12	-72	0	III + 6 · II
0	1	-8	48	12	IV - II
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	0	36	0	0	
0	0	-12	36	12	

$$3a_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0$$

$$-12a_2 + 36a_3 = 12$$

$$\Leftrightarrow 36a_3 = 12 \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{3}$$

$$a_1 + 4a_2 + 12a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 12 \cdot \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow a_1 = -4$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0$$

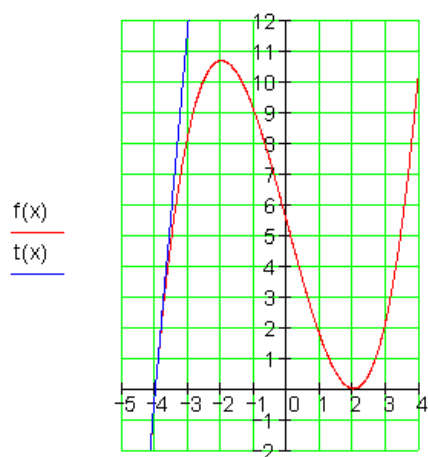
$$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 \cdot \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow a_0 = \frac{16}{3}$$

Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{16}{3}$$

د پورته الماني پښتو: تابع مساوات.  
د تانجنت مساوات:

$$t(x) = (48a_3 - 8a_2 + a_1)(x+4) = \left(\frac{48}{3} - 4\right)(x+4) = \underline{\underline{12x + 48}}$$



نهم:  
اول: افراطي ارزښتونه

.....  
 $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8$   
 و  $y$  محور ته سيمتريک ده.

$$\Rightarrow f(-x) = f(x)$$

په کي نسبي ماکسيموم

$$f'(x) = 5x^3 - 6x; f''(x) = 15x^2 - 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^3 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(5x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 15 \cdot 0^2 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow \text{rel Max bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = 15 \cdot \left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 6 = 15 \cdot \frac{6}{5} - 6 = 12 > 0 \Rightarrow \text{rel Min bei } x_2 = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f''(x_3) = f''\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = 15 \cdot \left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 6 = 15 \cdot \frac{6}{5} - 6 = 12 > 0 \Rightarrow \text{rel Min bei } x_3 = -\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f(x_1) = f(0) = -8 \Rightarrow \underline{\underline{P_{\text{Max}}(0 | -8)}}$$

$$f(x_2) = f(x_3) = f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = \frac{5}{4}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^4 - 3\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 8 = -\frac{49}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{\text{Min}_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right); P_{\text{Min}_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right)}}$$

دوه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8 = 0$$

د سطحی شميرنه صفر ځايونه:

بدلون:  $x^2 = z$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}z^2 - 3z - 8 = 0 \Leftrightarrow z^2 - \frac{12}{5}z - \frac{32}{5} = 0 \Rightarrow z_1 = 4 \mid$$

$$\text{همداسي } z_2 = -\frac{8}{5} \text{ (حل نه شته)}$$

$$x_2 = 2 \text{ د انتيگريشن پولي دي. } z_1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$$

د سطحي انتيگرال:

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 \left( \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8 \right) dx = \left[ \frac{x^5}{4} - x^3 - 8x \right]_{-2}^2$$

$$= \left[ \frac{2^5}{4} - 2^3 - 8 \cdot 2 \right] - \left[ \frac{(-2)^5}{4} - (-2)^3 - 8 \cdot (-2) \right] = -32$$

سطحه:  $A = |-32| = 32 \text{ FE}$  (د سطحي واحد يا يوون)

$$P_{\text{Max}} (0 | -8)$$

$$P_{\text{Min}_1} \left( -\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5} \right)$$

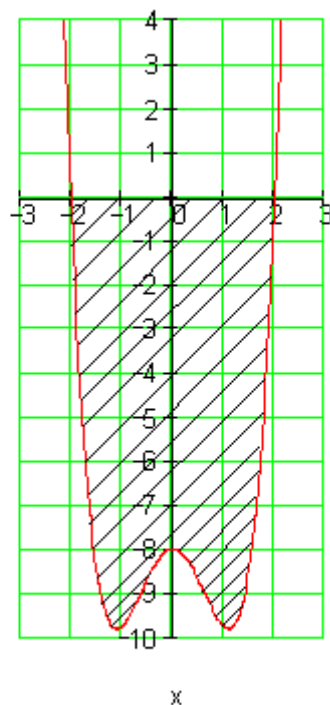
$$\text{bzw. } P_{\text{Min}_1} (-1,09 \mid -9,8)$$

$$P_{\text{Min}_1} \left( \sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5} \right)$$

$$\text{bzw. } P_{\text{Min}_1} (1,09 \mid -9,8)$$

x	-2,2	-2	-1,5	-1
f(x)	6,76	0	-8,42	-9,75
x	-0,5	0	0,5	1
f(x)	-8,67	-8	-8,67	-9,75
x	1,5	2	2,2	
f(x)	-8,42	0	6,76	

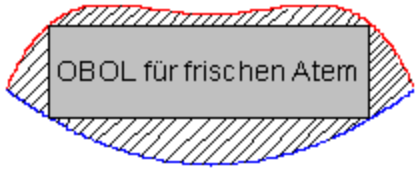
f(x)



## مشق - او انټيگرالشمېرنې ته د استعمال پوښتنې!

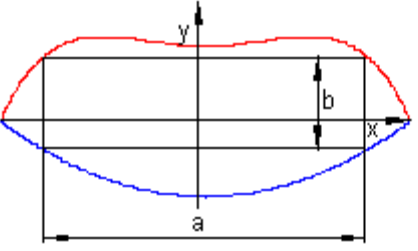
د اعلاناتو تختې او گډوله پوښتنې.

لومړۍ:

<p>دا تر څنگ د اعلاناتو تخته (خوله د يوه په کې خوندي ولاړگويډيز يا مستطيل سره، چې خوزنده اعلانات په کې انځور شوي دي) بايد داسې جوړه شي، چې په کې خوندي مستطيل ممکنه خورا لويه سطحه ولري. د خولي د غاړې کبرې يا منحنې د په څنگ کې توابعو د تابع مساواتو له لارې انځوريزي:</p>	 $f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2; g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$
--	---

الف- د خولي پورته برخه کوم تابع ښايي او کوم دا کښته برخه؟ خپل ځواب مددل کړۍ.

ب -

<p>د دې مودول جوړونکي د ځغلند ليک لپاره د مستطيل يا ولاړگويډيز ټيکي کچې ته اړتيا لري. د مستطيل اړخ <math>a</math> او <math>b</math> اړخ داسې وټاکي، چې سطحه ماکسيمال شي. سطحه څومره لويه ده؟ د اوږدوالي يوون يا واحد متر دی.</p>	
--	--

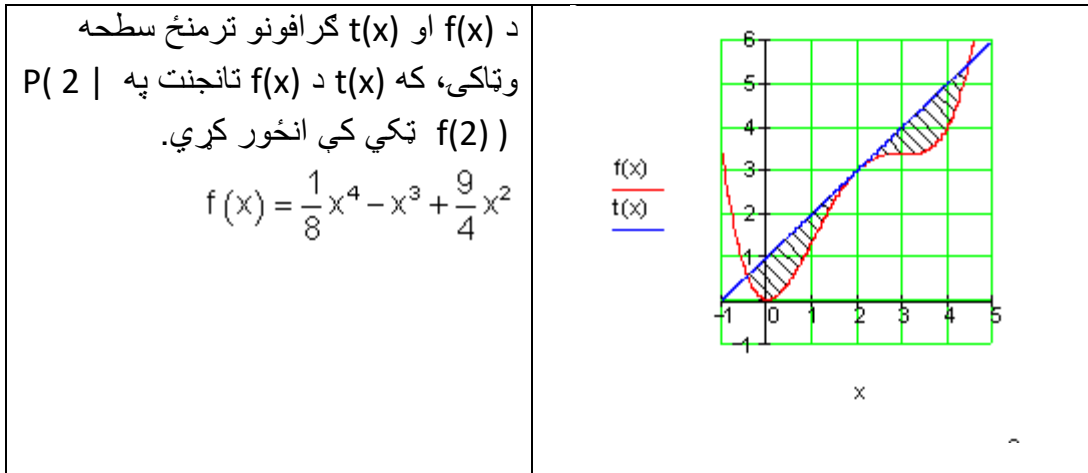
ب-

دا ټوله خوله دې په يوه دکور په يوه ديوال کې ورگډه يعنې وکښل شي، د دې لپاره د جوړولو انجنر اړينې سطحې ته اړتيا لري.

ت- دا کرښه شوي سطحه دي د خورا ارزښتناک برطېنا رانه رنگ سره جوړه شي. د يوه مربع متر په پوښ ورکونه يا رنگونه € 120 قيمت لري. ټوله پوښونه به څومره قيمت ولري؟

غوښتنه: مشتق، افراطي ارزښتونه، د گرافونو ترمنځ سطحه.

دويم:



غوښتنه: تانجنت، صفرځايونه، هورنر، ټاکلي انټيگرال

دريم:

تابع ورکړ شوی:  $f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} \quad x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

الف- د  $f(x)$  صفرځايونه وټاکي او خپلي نتيجې په کومنتار روښانه کړي.

ب - د پراته تانجنت سره ټکي پيدا کړي او د دې ټکو پروتځای په هکله يوه وينا وکړي.

غږښتنه: مشتق، -تابع، د ضرب قانون، زنځيري قانون. صفر ضرب. تانجنتونه، پراته.

ځوابونه

## مشتق او انٽيگرالشميرني ته د استعمال پوښتنې |

نتيجه

الف-  $g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$  د خوله لاندې برخه ښايي.

د خوله پورته برخه ښايي.  $f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2t$

ب - د ولاړگوديز يا مستطيل خورا لويه سطحه  $23,095 \text{ m}^2$  ده.

پ - د خولي لپاره د کور په ديواله په ټوليزه توگه  $36,267 \text{ m}^2$  سطحې ته اړتيا شته.

ت - کرښيزه سطحه د ټولي سطحې او د ولاړگوديز يا مستطيل کمښت يا تفریق دی. دا نږدې  $13,172 \text{ m}^2$  دی. د پوښوني قيمت  $1580,65 \text{ €}$  دی. دويم: غږښتونکي سطحه  $2,939 \text{ FE}$  (د سطحې واحد يا يوون) ده.

درېم:

الف-  $x_{1/2} = 0$  يواځن صفرځای دی، ځکه چې ډبل منځ ته راځي، د  $f(x)$  گراف د  $x$  - محور په همدې ځای کې لمسوي.

ب- ټکي د پراته تانجنټ سره په  $x_1 = 0$  او  $x_2 = 1$  کې پراته دي. ټول ټکي  $P_{1a}$  د کواورديناټ يا پروټ ولاړسيستم په سرچينه کې په  $P_{1a}(0 | 0)$  کې پراته دي. ټول  $P_{2a}$  ټکي د محور  $y$  ته غبرگي باندې په واټن کې پراته دي او کواورديناټ  $P_{2a}(1 | ae)$  لري.

## مفصل ځوابونه:

الف- د خولي لاندې برخه د مربع تابع له لارې روښانه يا تشيح کيږي. پورته برخه د ۴ درجي يوه ټول هوبښيار يا راشنل تابع له لارې.

د خولي لاندې برخه ښايي  $g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$



$$f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2t$$

د خولي پورته بڅه بنايي.

ب-دا چې د  $f(x)$  او  $g(x)$  گرافونه د  $y$  محور سره سيمتريک ځغلي، نو دا خوندي ولاړگوديز يا مستطيل هم د  $y$  محور ته سيمتريک دی.

د  $y$  محور  $a$  په دوه برابر وېشو وېشي. د دې لپاره چې اړخ يا خوا  $b$  د  $a$  په واکوالي کې وټاکو، نو ولاړگوديز يا مستطيل د ولاړو گونو يا قيموزاويو پورته او کښته کواوردیناتونو ته اړتيا لرو.

$$\left(\frac{a}{2} \mid g\left(\frac{a}{2}\right)\right) \quad \left(\frac{a}{2} \mid f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$$

پورته ولاړ يا قايم گود يا کونج: کښته ولاړگود:

د  $y$  محور مطلق کمښت اړخ  $b$  راکوي. د دې لپاره د ولاړگوديز يا مستطيل همغه اړونده د  $y$  کواوردیناتونه شميرو.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{2}\right) &= -\frac{1}{486} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^4 + \frac{1}{54} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{486} \cdot \frac{a^4}{16} + \frac{1}{54} \cdot \frac{a^2}{4} + 2 \\ &= -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{18} \cdot \frac{a^2}{4} - 2 \\ &= \frac{1}{72}a^2 - 2 < 0 \end{aligned}$$

د  $b$  د اوږدوالي لپاره نو باور لري:

$$b(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) + \left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right|$$

دا چې  $g\left(\frac{a}{2}\right) < 0$  است، نو  $\left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right| = -g\left(\frac{a}{2}\right)$  باور

لري او له دې سره دا لاندې

$$b(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) - g\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 - \left(\frac{1}{72}a^2 - 2\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 - \frac{3}{216}a^2 + 2 \\
 &= -\frac{1}{7776}a^4 - \frac{2}{216}a^2 + 4 = -\frac{1}{7776}a^4 - \frac{1}{108}a^2 + 4
 \end{aligned}$$

دا چي د  $b$  اړخ د  $a$  په واک کې دی، نو سړی دا هم وايي چي  $b$  د  $a$  فنکشن دی يعني  $b(a)$ .

د ولاړگوديز  $A$  مساحت د هغه د اړخونو ضرب دی.

$$\begin{aligned}
 A(a) &= a \cdot b(a) = a \cdot \left( -\frac{1}{7776}a^4 - \frac{1}{108}a^2 + 4 \right) \\
 &= -\frac{1}{7776}a^5 - \frac{1}{108}a^3 + 4a
 \end{aligned}$$

د  $A(a)$  د افراطي ارزښت ټاکل د  $a$  ارزښت راکوي، چي د هغه لپاره د ولاړگوديز سطحه خورا بيا ماکسيمال لوييږي.

( په لاندې کې د الماني پښو: بدلون، حل نه شته،

$$A'(a) = -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4; A''(a) = -\frac{20}{7776}a^3 - \frac{6}{108}a$$

$$A'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4 = 0 \mid \cdot \left( -\frac{7776}{5} \right)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{3 \cdot 7776}{108 \cdot 5}a^2 - \frac{4 \cdot 7776}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{216}{5}a^2 - \frac{31104}{5} = 0 \text{ Substitution: } a^2 = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{216}{5}z - \frac{31104}{5} = 0 \Rightarrow p = \frac{216}{5}; q = -\frac{31104}{5}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow D &= \left( \frac{p}{2} \right)^2 - q = \left( \frac{108}{5} \right)^2 + \frac{31104}{5} = \frac{11664}{25} + \frac{155520}{25} = \frac{167184}{25} \\
 &= \frac{1296}{25} \cdot 129 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1296}{25} \cdot 129} = \frac{36}{5} \sqrt{129}
 \end{aligned}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5} \sqrt{129} = a^2 \\ z_2 = -\frac{108}{5} - \frac{36}{5} \sqrt{129} < 0 \Rightarrow \end{array} \right.$$

حل نه شته

$$a^2 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5} \sqrt{129} \Rightarrow |a| = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5} \sqrt{129}}$$

$$a_1 = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5} \sqrt{129}}; a_2 = -\sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5} \sqrt{129}}$$

$$a_1 = \frac{6}{5} \sqrt{-15 + 5\sqrt{129}} \approx 7,757$$

د یو خو بڼه بدلونونو سره.

دا چې د  $z_2$  ریښه یا جذر نه شي نیول کېدی او د  $a$  لپاره ارزښت باید زیاتیز یا مثبت وي، باید د  $a$  د  $A(a)$  یو افراطي ځای وي. دا د  $A(a)$  د دویم مشتق سره آزمایشی شو.

$$A''(a_1) < 0$$

$$A''(a_1) = -\frac{20}{7776} a_1^3 - \frac{6}{108} a_1$$

$$a_1 > 0$$

او

له امله.

$$a_1 = \frac{6}{5} \sqrt{-15 + 5\sqrt{129}}$$

د ارزښت لپاره

د ولارګودیز یا مستطیل سطحه ماکسیمال یا خورا لویه ده

دا چې گراف، چې د خولي پورته برخه جوړوي، د  $x = 0$  په ځای کې يو مينيموم يا خورا کوچنی ارزښت په گوته کوي ( $P_{\text{Min}}(0 | 2)$ )، بايد وازمايل شي، چې د ولاړگوديز يا مستطيل پورته اړخ له دې څخه کښته پروت دی.

$$\text{Also ob } f\left(\frac{a_1}{2}\right) < 2 \text{ ist.}$$

$$f\left(\frac{a_1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 1,813 < 2$$

شميرنه د جېشميري سره صورت نيسي. نتيجه تصديقيوي، چې د مستطيل پورته اړخ د  $f(x)$  د خورا کوچني ارزښت کښته لور ته پروت دی

اوس کيدی شي د مستطيل مساحت د جېشميري سره و شميرل شي. د الماني پښتو: ولاړگوديز يا مستطيل.

$$A_{\text{Rechteck}} = A(a_1) = -\frac{1}{7776}a_1^5 - \frac{1}{108}a_1^3 + 4a_1$$

$$A_{\text{Rechteck}} = A(a_1) = A\left(\frac{6}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 23,095$$

د ولاړگوديز خورا لوی ارزښت يا ماکسيماله لويه نږدې  $23,095 \text{ m}^2$  مساحت لري.

پ- د خولي ټول مساحت د  $f(x)$  او  $g(x)$  توابعو گرافونو ترمنځ پروت دی. دا د انتگرال په مرسته ميندل کيدی شي. د دې لپاره بايد لومړی د انټيگرېشن ټولې وټاکل شي.

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2 - \left(\frac{1}{18}x^2 - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 - \frac{3}{54}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4 = 0 \quad | \cdot (-486)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 18x^2 - 1944 = 0 \quad \text{Substitution: } z = x^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 18z - 1944 = 0 \Rightarrow p = 18; q = -1944$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 + 1944 = 2025 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{2025} = 45$$

$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$	$  z_1 = -9 + 45 = 36 = x^2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 6$ $  z_2 = -9 - 45 = -54 < 0 \Rightarrow$	د انتيگريشن پولي د x لپاره حل نه شته
---------------------------------------	---	---

د سره د گرافونو ترمنځ سطحې لپاره باور لري:  
 $f(x) - g(x) = -\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4$

لاندي الماني: خوله

$$\begin{aligned}
 A_{\text{Mund}} = A &= \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx = \int_{-6}^6 \left( -\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4 \right) dx \\
 &= -\frac{1}{5 \cdot 486}x^5 - \frac{1}{3 \cdot 27}x^3 + 4x \Big|_{-6}^6 \\
 &= -\frac{7776}{2430} - \frac{216}{81} + 24 - \left( \frac{7776}{2430} + \frac{216}{81} - 24 \right) \\
 &= -\frac{15552}{2430} - \frac{432}{81} + 48 = \frac{544}{15} \approx 36,267
 \end{aligned}$$

دپه ديوال د خولي لپاره تولټال  $36,267 \text{ m}^2$  سطحې ته اړتيا شته.

ت- کربنيزه سطحه د تولي سطحې او د ولاړگويډيز د سطحې د کمون يا تفريق سره برابره ده.

په لاندي کي د الماني پښتو له کين څخه بني لورته: کربنيز، خوله، مستطيل يا ولاړ کويډيز

$$A_{\text{schraffiert}} = A_{\text{Mund}} - A_{\text{Rechteck}} = \frac{544}{15} - A \left( \frac{6}{5} \sqrt{5\sqrt{129} - 15} \right) \approx 13,172$$

د  $1\text{m}^2$  پوښونې قيمت  $120\text{€}$  دی.

$$\text{ټول قيمت} = 120 \text{ €} \cdot A_{\text{schraffiert}} = 1580,65 \text{ €}$$

يادونه:

د دې لپاره چې د گردونې ناتيکاوې مخه ونيول شي، بايد د جېشميري شميرنې سره منځارزېښتونه ذخيره شي.

$$\text{ټول قيمت} = 120 \text{ €} \cdot 13,172 = 1580,64 \text{ €}$$

د گردونې ناتيکاوې ته يادونه.

تر شونډتيا پورې چې د گردونې ناتيکاوې مخه ونيولې شو، بايد د جېشميري شميرنې سره منځارزېښتونه ذخيره شي. مگر په ډېرو حالتونو کې د لسميز يا اعشاريې (کوما) وروسته درې ځايونه بسيا کوي. په لاندي کې دې د لسميز وروسته د ۳ ځايونو تيکاوې سره سرته ورسول شي. د الماني: ولاړگوديز، خوله، کرښيزه سطحه، خوله، مستطيل

$$a_1 \approx 7,757$$

$$A_{\text{Rechteck}} \approx -\frac{1}{7776} \cdot (7,757)^5 - \frac{1}{108} \cdot (7,757)^3 + 4 \cdot 7,757 \approx 23,095$$

$$A_{\text{Mund}} \approx 36,267$$

$$A_{\text{schraffiert}} = A_{\text{Mund}} - A_{\text{Rechteck}} \approx 36,267 - 23,095 \approx 13,172$$

$$\text{ټول ارزښت} \approx 120 \text{ €} \cdot 13,172 \approx 1580,64 \text{ €}$$

دويم: حل

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2$$

تانجنت په  $f(x)$  باندې په  $P(2|f(2))$  کې  
 $f(2)=3$  له دې لاس ته راځي، چې  $t(x)$  د  $f(x)$  گراف په ټکي  $P(2|f(2))$  کې لمسوي  
 تانجنت مساوات:  $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  د  $x_0 = 2$  سره

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = 1$$

او د  $t f(x_0) = f(2) = 3$  سره باور لري:  $t(x) = 1 \cdot (x - 2) + 3$  يعنې  $t(x) = x + 1$

د تانجنت غوڅټکي همدا سي لمستکي د  $f(x)$  د گراف سره

$$t(x) - f(x) = x + 1 - \left( \frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2 \right) = -\frac{1}{8}x^4 + x^3 - \frac{9}{4}x^2 + x + 1$$

$$t(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}x^4 + x^3 - \frac{9}{4}x^2 + x + 1 = 0$$

برېښي چې تانجنت د  $f(x)$  گراف په ټکي  $P(2|3)$  کې لمسوي، کيدی شي  $x_{1/2} = 2$   
 حلونه وي.

هورنر:

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{8} \quad 1 \quad -\frac{9}{4} \quad 1 \quad 1 \\ x = 2 \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{6}{4} \quad -\frac{6}{4} \quad -\frac{4}{4} \\ \hline -\frac{1}{8} \quad \frac{3}{4} \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{2}{4} \quad 0 \\ x = 2 \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{2}{4} \\ \hline -\frac{1}{8} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x_{3/4} = 2 \pm \sqrt{6}$$

دا چې تانجنت د  $f(x)$  گراف په ټکي  $P(2|3)$  کې لمسوي (ډبل صفر ځای)، کيدی شي  
 غوښتونې سطحه د لاندې انټيگرال سره وشميرل شي.

$$A = \int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}} [t(x) - f(x)] dx = \int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}} \left[ -\frac{1}{8}x^4 + x^3 - \frac{9}{4}x^2 + x + 1 \right] dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}} \approx 2,939$$

غوښتونې سطحه 2,939 FE (د سطحې واحد يا يوون) ده.

درېم:

الف-

$$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x}$$

د صفر ځايونو لپاره ايښونه:  $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} = 0$

تر څيرني لاندې نيول كيږي، چې د کوم  $x$  ارزښت لپاره ضرب ضريبونه (د  $x$  ځلووني) صفر كيږي.

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  يو ټاکلی ضريب دی، چې هيڅ صفر کيدای نه شي.

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0 \text{ i يو ډبل صفر ځای دی.}$$

$$e^{3-2x} : e^{3-2x} = e^{-(2x-3)} \text{ د څيرنه}$$

له  $e^{-(2x-3)}$  له  $e^{-2x}$  څخه د  $x$  محور بنی لور ته په ۳ واحده يا يوون د راکښني له لارې منځ ته راځي ه.

دا چې  $e^{-2x}$  صفر ځای نه لري، نو  $e^{-(2x-3)}$  هم صفر ځای نه لري.

له دې سره  $x_{1/2} = 0$  يو اځنی صفر ځای دی، ځکه چې ډبل منځ ته راځي، د  $f(x)$  گراف د  $x$  محور په دې ځای کې لمسوي. (پروت تانجنت) ب-

$$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} \text{ په پاته تانجنت باندې څيرنه}$$

د پراته تانجنت لپاره شرطونه:  $f'_a(x) =$

د ضرب قانون له لارې مشتق:  $f'_a = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$u = a \cdot x^2 ; v = e^{3-2x} \Rightarrow u' = 2a \cdot x ; v' = -2e^{3-2x}$$

$$\Rightarrow f'_a(x) = 2ax \cdot e^{3-2x} + ax^2 \cdot (-2e^{3-2x})$$

$$= 2ax \cdot e^{3-2x} - 2ax^2 \cdot e^{3-2x} = 2a \cdot e^{3-2x} (x - x^2)$$



$$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow 2a \cdot e^{3-2x} (x - x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1$$

$e^{3-2x}$  صفر کیدی نه شي (برخه الف وگوری)

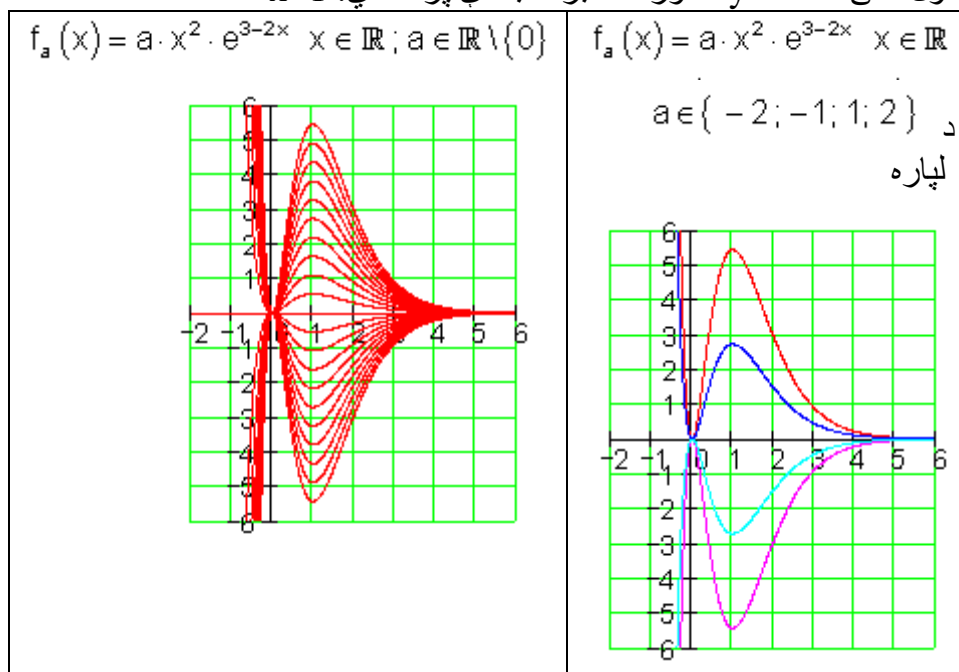
د پراته محور سره غوڅتکي

$$f_a(x_1) = f_a(0) = a \cdot 0^2 \cdot e^3 = 0 \Rightarrow \underline{P_{1a}(0|0)}$$

$$f_a(x_2) = f_a(1) = a \cdot 1^2 \cdot e^{3-2} = a \cdot e \Rightarrow \underline{P_{2a}(1|a \cdot e)}$$

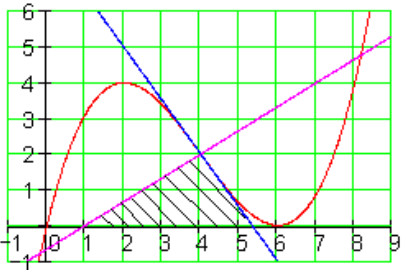
ټول ټکي  $P_{1a}$  د کوواردینات په سرچینه پراته دي، له پارامتر  $a$  څخه خپلواک دي.

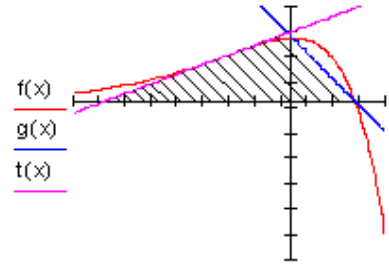
ټول ټکي  $P_{2a}$  د  $y$  محور ته غیرگه باندي پراته دي:  $x=1$



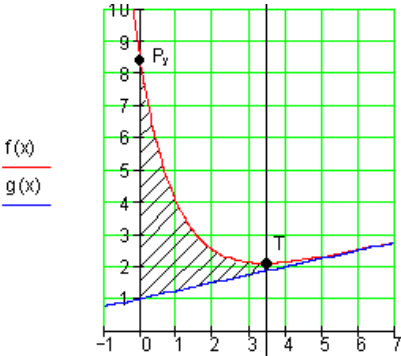
پوښتنې: مشتق او انټیگرال شمیرنه II  
 گډوله پوښتنې

لومړی:

<p>د درېگودي مساحا، چې د تانجنت <math>t(x)</math> او نورمالي يا عمود <math>n(x)</math> له لاري د <math>x</math> محور سره جوړيږي، وشميرئ:</p> <p><math>t(x)</math> په ټکي <math>P(4 2)</math> کې په <math>f(x)</math> تانجنت دی</p> $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$	 <p>غوښتنئ: مشتق، تانجنت، نورمال يا عمود، صفر ځايونه، د درې گودي سطحه.</p>
--	--

<p>د په نخبه شوي درېگودي يا مثلث سطحه وشميرئ، که</p> $f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x}$ <p>وي. <math>f(x)</math> د <math>g(x)</math> محور-غوڅټکي له لاري کرښه ده. <math>f(x)</math> د <math>t(x)</math> اورنتانجنت يا د انعطاف تانجنت دی</p>	<p>دويم:</p> 
--	--

غوښتنه: محور غوڅټکي، اوړون - يا د انعطاف ټکي، اورنتانجنت يا د انعطاف تانجنت، د کرښو غوڅټکي.

<p>الف- د <math>f(x)</math> غوڅټکي د <math>y</math> محور سره وشميرئ.</p> <p>ب- د کرښي <math>g(x)</math> مساوات وټاکئ. دا کرښه څه غوره والی يا معنا لري؟</p> <p>پ- ټيټټکي <math>T(x_e   f(x_e))</math> وشميرئ.</p> <p>ت- دا په نخبه شوي سطحه وشميرئ.</p> <p>ټ- سطحه په کوم ارزښت تغير خوري، که ښی پوله د ناپاي په لور لاړه شي.</p>	<p>درېم: تابع ورکړ شوي ده:</p> $f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$ 
---	--

غوښتنه:  $e$  - تابع ، محور غوڅټکي، مشتق، سطحه، انټيگریشن، ناپای انټيگرال.

خوابونه

مشتق او انټيگرال ته گډوله پوښتنې II

نتیجې او مفصل خوابونه

نتیجې

لومړی:

د درېگودي مساحت نږدې  $4,333... FE$  د سطحې یوون یا واحد دی.

دویم: د درېگودي سطحه نږدې  $8,606 FE$  د سطحې واحد دی.

دریم:

الف-  $P_y(0 | e^2 + 1)$  bzw.  $P_y(0 | 8,389)$  همداسې

ب- کرښه د گراف اسیمپټوټي جوړوي.

د اسیمپټوټي د تابع مساوات دی:  $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$

تیتیکي:  $T\left(2 + \ln(4) \mid \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4)\right) \approx (3,386 \mid 2,097)$

ت-په نخښه شوي سطحه ده:

$$A = e^2 - e^{-\ln(4)} = e^2 - \frac{1}{4} \approx 7,139$$

$$A = e^2 \approx 7,389$$

په دې ارزښت سطحه تغیر خوري، که ښی پوله د ناپای په لور لاره شي.

### مفصل ځوابونه:

لومړی:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \quad \text{د } P(4|2) \Rightarrow x_0 = 4 \text{ له لارې تانجنت}$$

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f(x_0) = f(4) = 2; f'(x_0) = f'(4) = -\frac{3}{2}$$

$$t(x) = -\frac{3}{2}(x - 4) + 2 = \underline{\underline{-\frac{3}{2}x + 8}}$$

$$n(x) = \frac{2}{3}(x - 4) + 2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}}$$

د تانجنت غوڅتکی د  $x$  محور سره:

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow x_t = \frac{16}{3}$$

د نورمالي غوڅتکی د  $x$  محور سره.

$$n(x) = 0 \Leftrightarrow x_n = 1$$

$$g = x_t - x_n = \frac{16}{3} - 1 = \frac{13}{3} \quad \text{د} \quad A = \frac{g \cdot h}{2}$$

د درېگودي سطحه:

$$h = 2 \Rightarrow A = \frac{\frac{13}{3} \cdot 2}{2} = \frac{13}{3} \text{ FE}$$

او (دسطحي يوون يا واحد) سره.

$$f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{دويم:}$$

اول: د محور غوڅتکو شميرنه.

د  $y$  محور سره غوڅتکی:

$$f(0) = (2-0)e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = 2e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$$

د  $x$  محور سره غوڅتکی

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow (2-x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

ضريب  $e^{\frac{1}{2}x}$  نه صفر کيږي، نو  $\underline{P_{x_1}(2|0)}$ .

دوه: کرښه د د محور غوڅتکو،  $P_y(0|2)$  او  $P_{x_1}(2|0)$  له لارې.

$$g(x) = a_1x + a_0 \quad a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{2 - 0} = -1 \Rightarrow g(x) = -x + a_0$$

$$\therefore P_y(0|2) \quad g(0) = 2 \Leftrightarrow -0 + a_0 = 2 \Rightarrow a_0 = 2$$

ازماښت:

$$\Rightarrow \underline{\underline{g(x) = -x + 2}}$$

دري: اورون – يا انعطافتيكى

$$f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x} = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = (2-x); u' = -1; v = e^{\frac{1}{2}x}; v' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = -1 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (2-x) \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \left[ -1 + \frac{1}{2}(2-x) \right] e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}x; u' = -\frac{1}{2}; v = e^{\frac{1}{2}x}; v' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x} = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x\right); u' = -\frac{1}{4}; v = e^{\frac{1}{2}x}; v' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_w = -2}}$$

$$f'''(x_w) = f'''(-2) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}(-2)\right)e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{1}{4e} \neq 0$$

$$\Rightarrow x_w = -2$$

دا اړونتيکي يا انعطافتيکي دی.

$$y_w = f(x_w) = f(-2) = (2 - (-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow \underline{W\left(-2 \mid \frac{4}{e}\right)}$$

څلور: د اړونتيکي يا انعطاف تيکي تانجنت

$$f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x} \quad f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad W\left(-2 \mid \frac{4}{e}\right)$$

$$f'(x_w) = f'(-2) = -\frac{1}{2}(-2) \cdot e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{1}{e}$$

$$f(x_w) = f(-2) = (2 - (-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{1}{e}(x+2) + \frac{4}{e} = \underline{\underline{\frac{1}{e}x + \frac{6}{e}}}$$

$$t(x) = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w) \quad \text{د } x_w = -2 \text{ سره لرو}$$

پنځه: د  $x$  محور او  $g(x) = -x + 2$  سره د اړونتيانجنت يا انعطافتانجنت غوڅتيکي

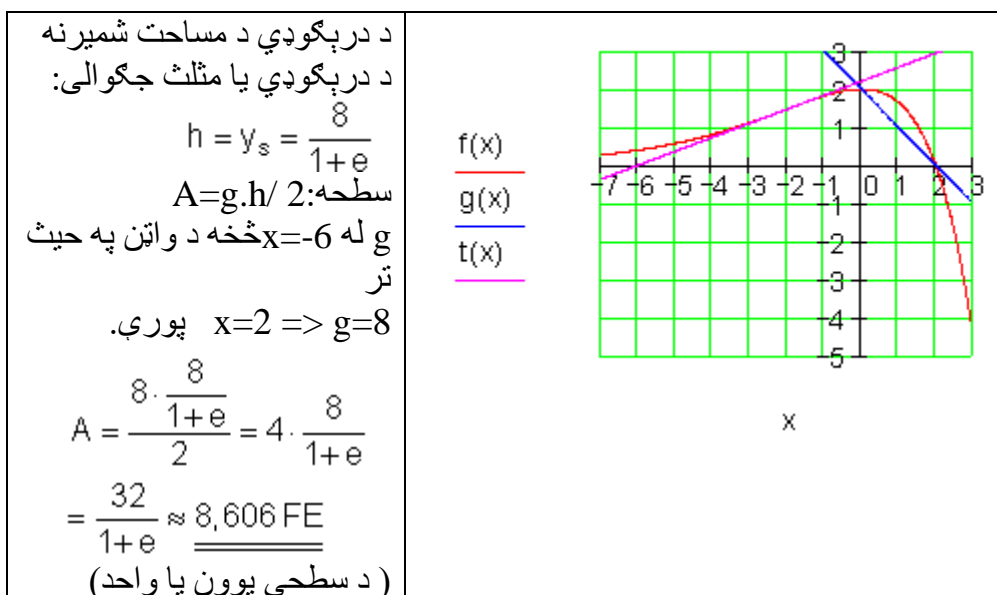
$$t(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = 0 \Leftrightarrow x = -6$$

د انعطافتيکي يا اړونتيکي صفر ځايونه.

$$t(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = -x + 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_s = \frac{2e-6}{1+e}}}$$

$$\text{د درېگودي يامنلث جگوالی دی.} \quad y_s = g(x_s) = -\frac{2e-6}{1+e} + 2 = \frac{6-2e}{1+e} + 2 = \underline{\underline{\frac{8}{1+e}}}$$

شپږ:



دریم:

$$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \quad \text{الف.}$$

د  $y$  محور سره د غوڅي لپاره شرطونه:

$$y_s = f(0) \Leftrightarrow y_s = e^{2-0} + \frac{1}{4} \cdot 0 + 1 = e^2 + 1 \approx 8,389$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 | e^2 + 1)}} \text{ bzw. } \underline{\underline{P_y(0 | 8,389)}}$$

پورته: bzw = همداسې.

$$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \quad \text{ب.}$$

$f(x)$  د  $g(x)$  اسيمپټوت يا گاونډ (مجانب) دی داپه دې معنا، چې د  $f(x)$  گراف د لوی  $x$  ارزښتونو لپاره د  $g(x)$  په لور ځغلي.

د لوی  $x$  ارزښت لپاره د صفر په لور ځغلي، داسې چې  $f(x)$  د لوی  $x$   $e^{2-x} = e^{-(x-2)}$

ارزښت لپاره فقط نور د برختم  $\frac{1}{4}x + 1$  له لارې ټاکل کيږي.



نو له دې د گاونډ يا مجانب د تابع مساوات د  $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$  دى. پ-  
 نو له دې د گاونډ يا مجانب د تابع مساوات د  $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$  دى.

$$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \Rightarrow f'(x) = -e^{2-x} + \frac{1}{4} \Rightarrow f''(x) = e^{2-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{2-x} + \frac{1}{4} = 0 \quad | + e^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = e^{2-x} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln(e^{2-x})$$

$$\Leftrightarrow \ln(1) - \ln(4) = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow -\ln(4) = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \ln(4) \Rightarrow$$

افراطي ارزښت په  $x_e = 2 + \ln(4) \approx 3,386$  کې

$$f''(x_e) = f''(2 + \ln(4)) = e^{2-(2+\ln(4))} = e^{2-2-\ln(4)}$$

$$= e^{-\ln(4)} = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_e = 2 + \ln(4) \approx 3,386$$

$$f(x_e) = f(2 + \ln(4)) = e^{2-(2+\ln(4))} + \frac{1}{4}(2 + \ln(4)) + 1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(4) + 1 = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4) \approx 2,097$$

ټیټکی:

$$\underline{\underline{T\left(2 + \ln(4) \mid \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4)\right) \approx (3,386 \mid 2,097)}}$$

ت- په نخښه شوي سطحه د  $f(x)$  او  $g(x)$  گرافونو ترمنځ په انټروال  $[0; x_e]$  کې پرته ده.

$$g(x) = \frac{1}{4}x + 1 \quad \text{سرہ} \quad \text{او} \quad f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \quad \text{د} \quad A = \int_0^{x_e} [f(x) - g(x)] dx$$

$$A = \int_0^{x_e} e^{2-x} dx \quad \text{او له دې سره} \quad f(x) - g(x) = e^{2-x}$$

کيري بدلون:

$$u = 2 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du \quad x_e = 2 + \ln(4)$$

$$: u(x_e) = 2 - (2 + \ln(4)) = -\ln(4) \quad \text{لاندي پوله } u(0) = 2 \text{ پورته پوله:}$$

$$A = - \int_2^{-\ln(4)} e^u du = \int_{-\ln(4)}^2 e^u du = [e^u]_{-\ln(4)}^2 = e^2 - e^{-\ln(4)} = e^2 - \frac{1}{4} \approx 7,139$$

ب- په نخبه شوي سطحه د  $f(x)$  او  $g(x)$  گرافونو ترمنځ په انټروال  $[0; \infty)$  کې پرته ده

$$g(x) = \frac{1}{4}x + 1 \quad \text{سرہ} \quad \text{او} \quad f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \quad \text{د} \quad A = \int_0^{\infty} [f(x) - g(x)] dx$$

$$f(x) - g(x) = e^{2-x}$$

کيري او له دې سره

$$A = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{2-x} dx$$

$$A = \int_0^{\infty} e^{2-x} dx$$

يو نا معلوم؟؟؟ انټيگرال دی له دې لاس ته راځي

$$u=2 \Rightarrow du/dx = -1 \Rightarrow dx = -du$$

$$\text{لاندي پوله } u(0) = 2 \text{ پورته پوله: } u(b) = 2 - b$$

$$A = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( - \int_2^{2-b} e^u du \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{2-b}^2 e^u du = \lim_{b \rightarrow \infty} [e^u]_{2-b}^2 =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [e^2 - e^{2-b}] = e^2 \approx 7,389$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} e^{2-b} = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(b-2)} = 0$$

خُکِه چي

### پوښتنې

### مشتق او انتيگرال شميرنه III

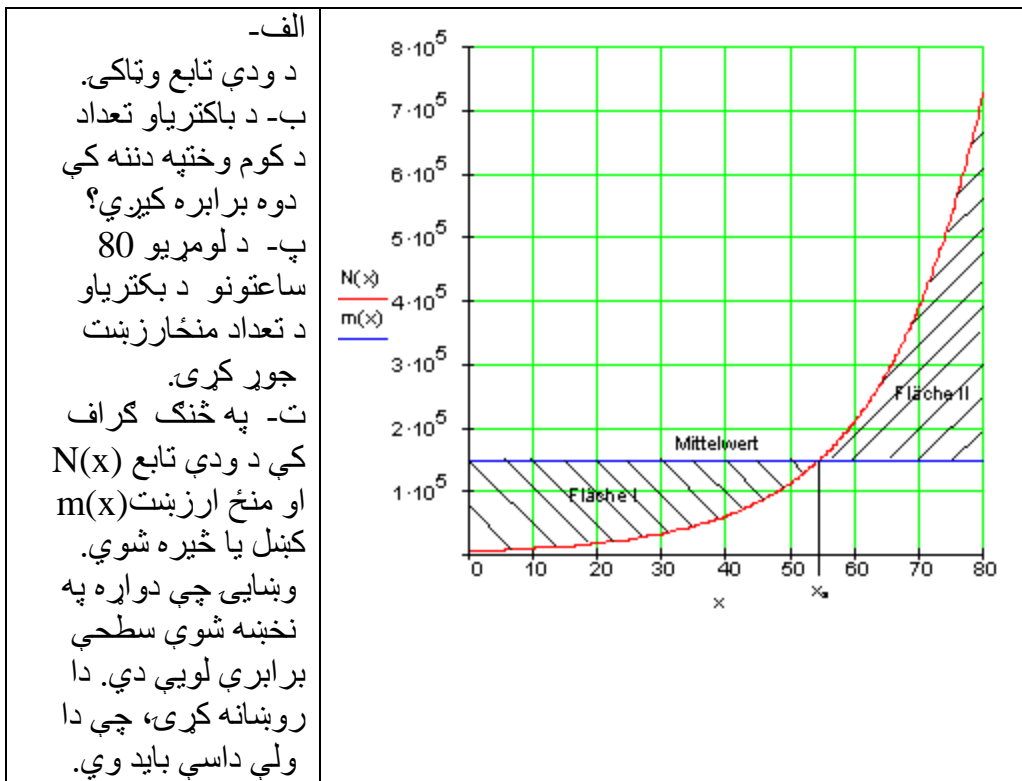
گډوله پوښتنې

لورمۍ:

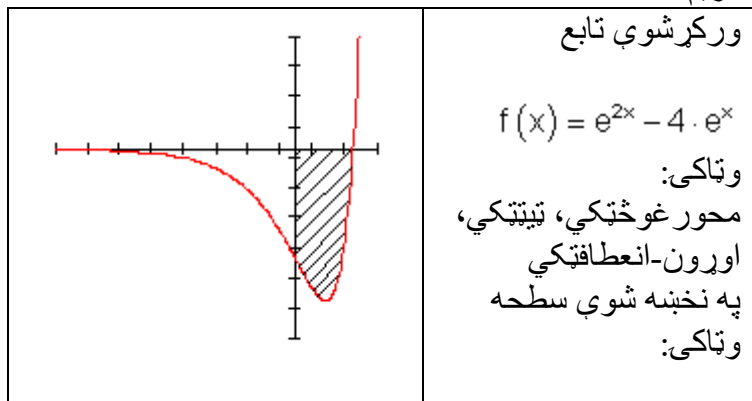
په يوه پارابول ډوله ديوال دې يوه ولاړگوديزه کرکی کيښول شي، تر ځمکې رسيري. د ديوال کچه،  $B = 4\text{ m}$  (سور)  $H = 4\text{ m}$  (جگوالی) ده.

<p>الف- کرکی باید کومه کچه (سور او جگوالی) ولري، له کومې سره چې د کرکی سطحه خورا لويه يا ماکسيمال شي؟ د کرکی سطحه څومره ده؟</p> <p>ب- دا د ديوال پاتي سطحه دې رنگ شي. دا سطحه څومره لويه ده.</p>	
--	--

غوښتنې: د کرکی ټکي مساوات، افراطي ارزښت شميرنه، ټاکلی انتيگرال، ريښه قانونونه. دويم: د يوي باکتریا کلتور (وده) اکسپوننشل جگيري. د 48 ساعته په دننه کې د بکتریاو گڼون يا تعداد له 5000 و 100000 ته زيات کړ. ( 100000 همداسي x ، وخت په ساعت )



غوښتنې: تابع، توانقوانين، لوگارېتم قوانين، اکسپوننشل مساوات، منحأر زبنت، ټاکلی انټيگرال.  
درېم:



پوښتنې: اکسپوننشل مساوات، افراطي ارزښتونه، د بدلون له لاري انټيگرال.

خوابونه

مشتق او انتيگرا ل شميرنه III

گډوله پوښتنې

نتيجي او مفصل خوابونه

نتيجي:

لومړۍ:

الف-

د کرکی سو:  $b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2,309 \text{ m}$

د کرکی جگوالی:  $h = f\left(\frac{b}{2}\right)$  mit  $\frac{b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$  und  $f(x) = -x^2 + 4$

$$h = -\left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9} \cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3} \approx 2,6 \text{ m}$$

د کرکی سطحه:  $A = h \cdot b = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6,158 \text{ m}^2$

ب- پاتي سطحه: د پارابول منخ کی سطحه تری کم د کرکی سطحه.

$$\frac{32}{3} - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 4,508 \text{ m}^2$$

پاتي – يا باقي سطحه:

دويم:

الف- د ودي تابع دی:

$$N(t) = 5000 \cdot e^{\frac{1}{48} \ln(20)t}$$

ب- د باکتریا تعداد هر ټول 11,106 ساعتونه دوه برابره کیري

پ- په منخنی توگه په لومړيو 80 ساعتونو کی 146570 باکتریاوي شتون لري

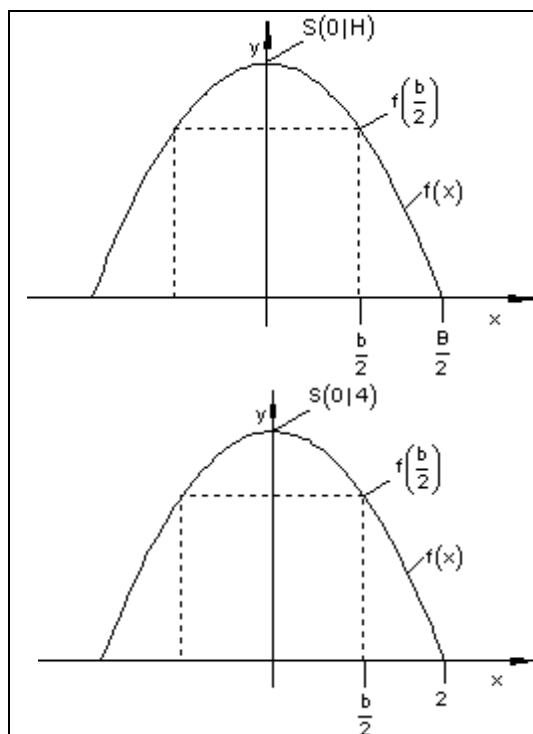
ت-تابع  $m(x) = m$  دودې تابع  $N(x)$  منخ ارزښت جوړوي. د سطحی برخه (سطحه I)

، چې د  $m(x) = m$  لاندې يا کښته لور ته پرته ده باید ټیک همدومره لویه وي لکه د

.....  
 سطحي برخه (سطحه II)، چي د  $m(x) = m$  پورته لور ته پرته ده. دا د منځ ارزښت څخه لاس ته راځي. دا چي اوس  $N(x)$  د سطحي I په ورشو يا ساحه کې کښته لورته پروت دی، هلته د انټيگرال ارزښت کميز يا منفي دی. داچي  $N(x)$  د سطحي II په ورشو يا ساحه کې پورته لور پروت دی، هلته د انټيگرال ارزښت زياتيز يا مثبت دی. نو د دې پسي يا تعقيب بايد په ټوله سطحه د انټيگرال منځ ارزښت صفر وي.  
 دريم:

$: P_y(0 -3)$ $: P_x(\ln(4) 0) \text{ bzw. } P_x(1,39 0)$ $P_{\text{Min}}(\ln(2) -4) \text{ bzw. } P_{\text{Min}}(0,69 -4)$ $P_w(0 -3)$ $A = \left  -\frac{9}{2} \right  = \frac{9}{2} \text{ FE} = 4,5 \text{ FE}$	د $y$ محور سره غوڅتکی: د $x$ محور سره غوڅتکی: تنټیکي: اورن-يا د انعطاف ټکی:  په نخښه شوي سطحه: bzw = همدا سي
---	--

مفصل حلونه



لومړی:  
 د پرابلم يا مسئلې رياضي کونه  
 عمومي:

د  $B = 4 \text{ m}$ ,  $H = 4 \text{ m}$  لپاره ځانگړی

الف -

ردو:  $f(x) = a_2x^2 + 4$  د  $S(0|4)$  له امله ککړې ټکي

$$P(2|0) \Rightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow a_2 \cdot 2^2 + 4 = 0 \quad | -4$$

$$\Leftrightarrow 4a_2 = -4 \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow a_2 = -1$$

د پارابول مساوات:  $f(x) = -x^2 + 4$

$$h = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{b^2}{4} + 4$$

سره

د مستطیل یا ولاړگودیز سطحه  $A = b \cdot h$  د

$$\Rightarrow A(b) = b \cdot \left(-\frac{b^2}{4} + 4\right) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b$$

د  $A(b)$  خورا جگ ارزښت غواړو پیدا کړو (افراطي ارزښت)

$$A(b) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b \Rightarrow A'(b) = -\frac{3}{4}b^2 + 4 \Rightarrow A''(b) = -\frac{3}{2}b$$

د افراطي ارزښت لپاره اړین شرطونه:

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 + 4 = 0 \quad | : -4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 = -4 \quad | : \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow |b| = \frac{16}{3} \Rightarrow b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}} \text{ bzw. } b_2 = -\sqrt{\frac{16}{3}}$$

b1 ارزښتو يا رانيسو، ځکه چې کميزه يا منفي سطحه نه لرو يا نه شته.

په افراطيت ازماښت:

$$A''(b_1) = A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

$$b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2,309 \text{ m} \quad \text{د کرکی سور:}$$

$$\text{د کرکی جگوالی: } h = f\left(\frac{b}{2}\right) \quad \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$$

او  $f(x) = -x^2 + 4$  سره کيري

$$h = -\left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9} \cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3} \approx 2,6 \text{ m}$$

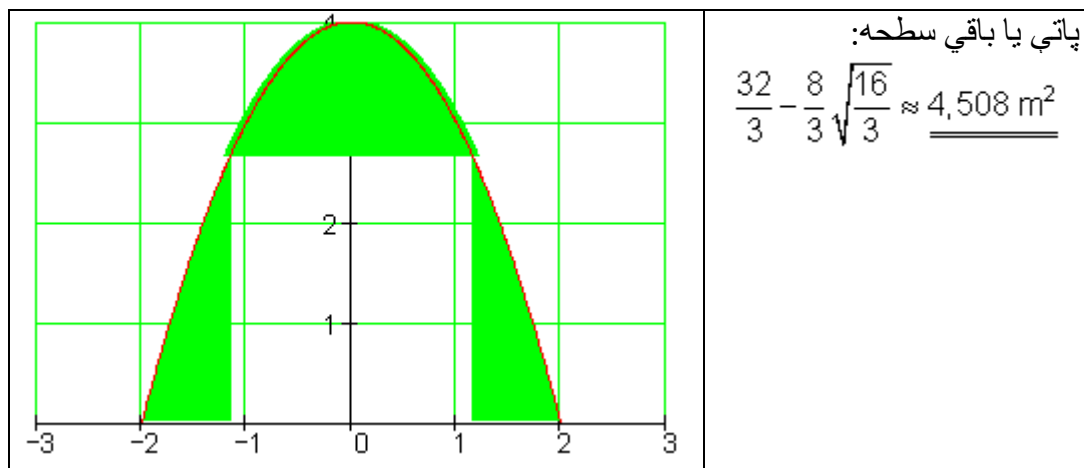
$$A = h \cdot b = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6,158 \text{ m}^2 \quad \text{د کرکی سطحه:}$$

ب – پاتي سطحه: د پارابول لاندې يا گڼته سطحه تري کم يا منفي د کرکی سطحه.

د پارابول لاندې سطحه:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-2}^2 \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - \left[ -\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-3) \right] \\ &= -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,6 \text{ m}^2 \end{aligned}$$





دويم -

الف - د ودې تابع لپاره اېنسونه:  $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$  د  $N_0 = 5000$  سره.

د ۴۸ ساعته وروسته باور لري:  $N_{48} = N_0 \cdot e^{48k}$  د  $N_{48} = 100000$  سره.

د ودې فامتور يا ضيب يا څلورنۍ دې وټاکل شي.

$$N_{48} = N_0 \cdot e^{48k} \quad | : N_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{N_{48}}{N_0} = e^{48k} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right) = \ln(e^{48k}) = 48k \quad | : 48$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{48} \cdot \ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right) = k \quad | \cdot t$$

$$k = \frac{1}{48} \cdot \ln\left(\frac{100000}{5000}\right) = \frac{1}{48} \cdot \ln(20)$$

د عددونو سره کيږي.

$$: k = \frac{1}{48} \cdot \ln(20) \approx 0,0624$$

د ودي صريب:

$$: N(t) = 5000 \cdot e^{\frac{1}{48} \ln(20)t}$$

له دي سره د ودي تابع ده:

ب - د باکتریانو تعدا يا گنون ډبل يا دوه برابره کيږي

$$2 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{\frac{1}{48} \ln(20)t} \quad | : N_0 \quad \text{ايښوونه:}$$

$$\Leftrightarrow 2 = e^{\frac{1}{48} \ln(20)t} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) = \ln \left( e^{\frac{1}{48} \ln(20)t} \right) = \frac{1}{48} \ln(20) \cdot t \quad | : \frac{1}{48} \ln(20)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\frac{1}{48} \ln(20)} = t \Leftrightarrow t = \frac{48 \cdot \ln(2)}{\ln(20)} \approx 11,106$$

هر 11,106 ساعته د باکتریاو تعداد دوه برابره کيږي.

پ - د ۸۰ ساعته وروسته منځ ارزښت

$$m = \frac{1}{80} \int_0^{80} N(t) dt = \frac{1}{80} \int_0^{80} N_0 \cdot e^{k \cdot t} dt = \frac{N_0}{80} \int_0^{80} e^{k \cdot t} dt$$

$$: u(t) = k \cdot t \Rightarrow \frac{du}{dt} = k \Rightarrow dt = \frac{1}{k} du \quad \text{بدلون:}$$

لاندي پوله :  $u(0) = k \cdot 0 = 0$  پورته پوله:  $u(80) = 80k$

$$m = \frac{N_0}{80} \left( \frac{1}{k} \int_0^{80k} e^u du \right) = \frac{N_0}{80k} [e^u]_0^{80k} = \frac{N_0}{80k} (e^{80k} - 1)$$

د  $N_0 = 5000$  او  $k = \frac{1}{48} \ln(20)$  سره کيږي

$$\begin{aligned} m &= \frac{5000}{\frac{80}{48} \ln(20)} \left( e^{\frac{80}{48} \ln(20)} - 1 \right) = \frac{5000}{\frac{5}{3} \ln(20)} \left( e^{\frac{5}{3} \ln(20)} - 1 \right) \\ &= \frac{15000}{5 \cdot \ln(20)} \left( 20^{\frac{5}{3}} - 1 \right) = \frac{3000}{\ln(20)} \left( 20^{\frac{5}{3}} - 1 \right) \approx \underline{\underline{146569,767}} \end{aligned}$$

په منځني توگه په لومړنيو 80 ساعتو کې، 146570 اکتياو ي شتون لري.

ت -  $m(x) = m$  ،  $N(x) = N_0 \cdot e^{k \cdot x}$  ثابت يا همغه دی (د پوښتنې پ برخه وگورئ)

مور انټيگرال جوړوو، کوم چې د دواړو پولو ترمنځ سطحه انځوروي.

$$\int_0^{80} (N(x) - m) dx = \int_0^{80} (N_0 \cdot e^{k \cdot x} - m) dx = N_0 \int_0^{80} e^{k \cdot x} dx - m \int_0^{80} dx$$

انټيگرال:  $\int_n^{80} e^{k \cdot x} dx$  د بدلون له لارې حل  $u(x) = k \cdot x$

$$\frac{du}{dx} = k \Rightarrow dx = \frac{1}{k} du$$

لاندي پوله :  $u(0) = k \cdot 0 = 0$  پورته پوله:  $u(80) = 80k$

$$\int_0^{80} e^{k \cdot x} dx = \frac{1}{k} \int_0^{80k} e^u du = \frac{1}{k} [e^u]_0^{80k} = \frac{1}{k} (e^{80k} - 1)$$

انتیگرال II :

$$\int_0^{80} dx = [x]_0^{80} = 80$$

$$N_0 \int_0^{80} e^{k \cdot x} dx - m \int_0^{80} dx = \frac{N_0}{k} (e^{80k} - 1) - 80m$$

ارزبتونه کیردی یا وضعه کری

$$N_0 = 5000; k = \frac{1}{48} \ln(20); m = \frac{3000}{\ln(20)} \left( 20^{\frac{5}{3}} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{k} (e^{80k} - 1) - 80m &= \frac{5000}{\frac{1}{48} \ln(20)} \left( e^{80 \cdot \frac{1}{48} \ln(20)} - 1 \right) - \frac{80 \cdot 3000}{\ln(20)} \left( 20^{\frac{5}{3}} - 1 \right) \\ &= \frac{240000}{\ln(20)} \left( 20^{\frac{5}{3}} - 1 \right) - \frac{240000}{\ln(20)} \left( 20^{\frac{5}{3}} - 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

تابع  $m(x) = m$  د ودې تابع  $N(x)$  منځ ارزښت جوړوي. د سطحې (برخه I) د  $m(x)$  کښته لور ته باید ټیک همدومره لویه وي، لکه د سطحې برخه (برخه II) ، چې د  $m(x)$  پورته لور ته پرته ده. دا له منځ ارزښت څخه راځي یا لرو. دا چې د  $N(x)$  د سطحې I په ورشو کې د  $m(x)$  کښته لور ته پروت دی ، هلته د انتیگرال ارزښت کمیز یا منفي دی. دا چې  $N(x)$  د سطحې II په ورشو کې د  $m(x)$  پورته لور ته پروت دی، نو هلته د انتیگرال ارزښت زیاتیز یا مثبت دی. د دې په تعقیب یا په دې پسې د انتیگرال په ټوله سطحه کې چې منځ ارزښت یې جوړ شو، نو منځ ارزښت باید په صفر برابر وي. پورته شمیرنه په گوته کوي، چې دا حالت دی.

دریم -

لومړی: محور غوڅتکي:

$$f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^x$$

د  $y$  محور سره غوڅتکي

$$y_s = f(0) = e^0 - 4 \cdot e^0 = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \underline{P_y(0 | -3)}$$

د  $x$  محور سره غوڅتکي

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 \cdot e^x = 0 \quad (\text{اکسپوننشل مساوات})$$

د حل ایښوونه د لوگارېتم له لارې:

$$e^{2x} - 4 \cdot e^x = 0 \quad | +4 \cdot e^x$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = 4 \cdot e^x \quad | \ln( )$$

$\ln( )$  په دې معنا چې د دواړو اړخونو لوگارېتم ونیسی

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \ln(4 \cdot e^x)$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \ln(e) = \ln(4) + x \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln(4) + x \quad | -x$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(4) \approx 1,39 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{P_x(1,39 | 0)}} \quad \underline{\underline{P_x(\ln(4) | 0)}}$$

صفر ځایونه: همداسي

دويم:

$$f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^x; f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x; f''(x) = 4e^{2x} - 4e^x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 4e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x} = 4 \cdot e^x \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = 2 \cdot e^x \quad | \ln(\quad)$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \ln(2 \cdot e^x)$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \ln(e) = \ln(2) + x \cdot \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln(2) + x \Rightarrow x_e = \ln(2)$$

$$f''(x_e) = f''(\ln(2)) = 4 \cdot e^{2\ln(2)} - 4 \cdot e^{\ln(2)} = 4 \cdot (e^{\ln(2)})^2 - 4 \cdot e^{\ln(2)}$$

$$\text{له } e^{\ln(2)} = 2 \text{ سره کيږي}$$

$$f''(\ln(2)) = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_e = \ln(2)$$

$$y_e = f(\ln(2)) = e^{2\ln(2)} - 4 \cdot e^{\ln(2)} = (e^{\ln(2)})^2 - 4 \cdot e^{\ln(2)} = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{\text{Min}}(\ln(2) | -4) \text{ bzw } P_{\text{Min}}(0,69 | -4)}}$$

دريم: اورنتکي يا د انعطاف ټکي  $f''(x) > 0$  او  $f'''(x) \neq 0$

$$f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^x; f'(x) = 2 \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^x; f''(x) = 4 \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^x;$$

$$; f'''(x) = 8 \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot e^{2x} = 4 \cdot e^x \quad | : 4$$



## پوښتنې

مشتق- او انټيگرالشميرنې ته د استعمال پوښتنې II

**Infusion** او گډې وډپوښتنې

لومړۍ:

د عمليات وروسته ناروغ ته اينفوزيون Infusion ( اينفوزيون Infusion لاتين کلمه ده، چې له *infundere* اخست شوی او دلته د ،،څاڅکي څاڅکي،، په مانا ده، چې بدن ته ننوځي) اخلي يا اينفوزيون ورکوي. څيره دوزي *Dosierung* ښايي چې ناروغ ته يوه 24 ساعته وخت په انټروال کې ورکول کيږي. دوزي په دې معنا دی: په وخت کې  $\text{mg/h}$ . پيل کيږي د  $1 \text{ mg/h}$  دوزي سره.

الف- د دوزي ورکونو تلنه وښايي.

ب- د دوزي تلنه د يوه لاندې اکسپوننشل تابع سره موډل کيږي.

$$f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$$

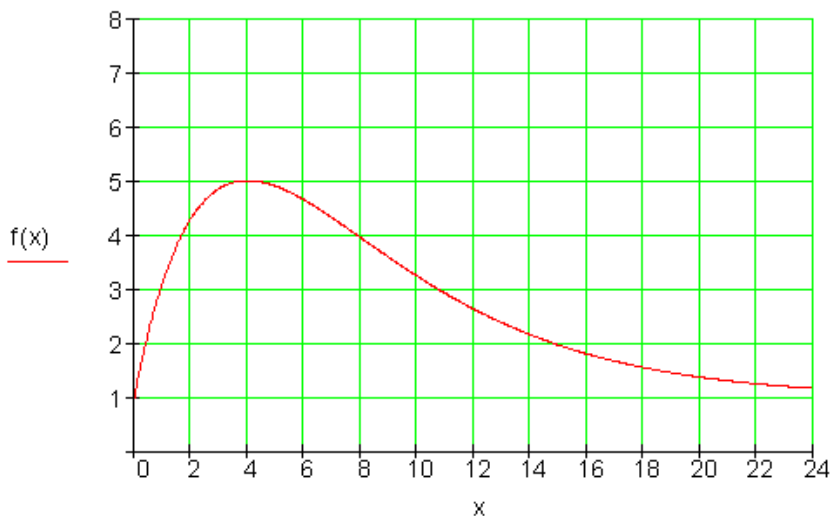
د او لپاره مناسب ارزښتونه وسميري، که له ساعته وروسته يو خورا لږه دوزي ورکونه د دا نوره بس شي.

تابع مساوات څنگه دي؟

پ- په کوم وخت کې د دوزي کميدنه به زور سره صورت نيسي؟

ت- د ورکړ شوي دوا ډبرې يا سټ وشميري، که اينفوزيون 24 صورت ونیي.





غوښتنه:  $e$  - تابع ، مشتق ، افراطي ارزښتونه، اورنټکي يا د انعطاف ټکي، ټاکلی انتیگرال.

دویم: لاندې تابع ورمر شوی دی:

$$f(x) = -2x^2 + x + 3$$

<p>الف-د بنسټ تابع <math>F(x)</math> گراف د ټکي ( <math>0   -2</math> ) له لاري ځغلي.</p> <p>د <math>F(x)</math> تابع مساوات وټاکي.</p> <p>ب- دا په څنگ کي د گراف په نڅښه شوي سطحه وشمیري.</p> <p>د شمیرني ټیکوالي: د لسميز يا عشریه څخه درځايه وروسته.</p>	
---	--

غوښتنه: ټول راشنل يا هوښيار. بنسټ تابع،  $c$  وټاکي، صفرځايونه، ټاکلی انتیگرال.

## حلونه (اوبیوني)

مشتق- او انټیگرال شمېرنې ته استعمال پوښتنې II

نتیجې او مفصل حلونه

اول - نتیجې:

الف - د تلو تشریح:

دوزې ورکونه له  $1 \text{ mg/h}$  څخه پیل کیږي. بیا یو غریزه جگړي، چې ۴ ساعته وروسته د  $5 \text{ mg/h}$  یو خورا حگ ارزښت ته ورسېږي. له دې وروسته ټیټیږي، لورمی په زور یا قوي، بیا لږ په زور، یو غریز کمېږي.

ب - د دوزې ورکونې تابع مساوات دي:

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

پ - د دوزې ورکونې کموالی د  $x = 8$  ساعته وروسته په زور یا قوي دی. دا ا وړنځای یا انعطافځای دی.

ت -

$$M = \int_0^{24} \left( 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \right) dx = 24 - 112e^{-6} + 16e \approx 66,738$$

په 24 ساعته کې د ورکړ شوو دارو ډېری یا ست نږدې  $67 \text{ mg}$  دی.

دویم - نتیجه.

الف- د بنسټ تابع  $F(x)$  تابع مساوات داسې دي:

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$$

ب - د په نخښه شوي سطحې منځپانگه يا مساحت نږدې دی:

$$A \approx 4,955 + 2,522 \approx 7,477 \text{ FE}$$

FE د سطحې واحد يا يوون

اول- مفصل حل : دلته ب نه شته؟؟؟

الف - د تلني تشریح يا روښانونه:

دوزې ورکونه له  $1 \text{ mg/h}$  څخه پیل کيږي. بیا یو غږیزه جگيږي، چې ۴ ساعته وروسته د  $5 \text{ mg/h}$  یو خورا حک ارزښت ته ورسيږي. له دې وروسته ټیټيږي، لورمی په زور یا قوي، بیا لږ په زور، یو غږیز کميږي.

ب - د دوزې ورکوني تابع مساوات دي:

$$A \approx 4,955 + 2,522 \approx 7,477 \text{ FE}$$

FE د سطحې واحد يا يوون

پ -

$$f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$$

ایښوونه:

$$n_0 = 1 \text{ mg/h} \Rightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$$

پیلدوز پورکونه:

د  $x=4$  ساعته وروسته خورا لویه یا ماکسیمال دوزې ورکونه په دې معنا:

$$f'(x) = 0 \text{ په } x=4 \text{ کې پروت یا افقي تانجنت لري، یعنی}$$

$$f'(x) = u'v + uv' \text{ او } u = a \cdot x \text{ او } v = e^{k \cdot x} \text{ همداسې } u' = a \text{ او } v' = k \cdot e^{k \cdot x} \text{ سره:}$$

$$f'(x) = a \cdot e^{k \cdot x} + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x} = a \cdot e^{k \cdot x} (1 + k \cdot x)$$

$$f'(4) = 0 \Leftrightarrow a \cdot e^{4k} (1 + 4 \cdot k) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4 \cdot k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

له  $x=4$  ساعته وروسته:  $f(4)=5$

$$f(4) = 5 \Leftrightarrow 1 + 4a \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 4} = 5$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4a \cdot e^{-1} = 5 \Leftrightarrow a = e$$

$$\underline{\underline{f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$$

د دوزي ورکوني تابع مساوات:

ټ – د دوزي ورکوني تغير ارزښت (د وخت په واکوالي کې) د لومړي مشتق سره ټاکل کيږي. د دې ماکسيموم په اوږونکي يا انعطافکي کې پروت دی.

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

لومړی مشتق

$$f'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot x \text{ und } v = e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$|v' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} \quad \text{همداسي } u' = e \text{ او}$$

$$f'(x) = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{e}{4}x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \left(1 - \frac{1}{4}x\right)$$

دويم مشتق

$$f''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 1 - \frac{1}{4}x$$

$$| v' = -\frac{1}{4} \quad \text{او} \quad u' = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} | \quad \text{همداسي}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 8 |$$

د اوبنتون ځای (د انعطاف ځای) لپاره شرایط

دریم مشتق

$$f'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 2 - \frac{1}{4}x$$

$$v' = -\frac{1}{4} \quad \text{او} \quad u' = \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \quad \text{همداسي}$$

$$f'''(x) = u'v + uv' = \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x) + \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (3 - \frac{1}{4}x)$$

$$f'''(x_w) = f'''(8) = \frac{1}{16} e \cdot e^{-2} \cdot (3 - \frac{1}{4} \cdot 8) = \frac{1}{16} e^{-1} \neq 0$$

له دې لاس ته راځي، چې  $\Rightarrow x_w = 8$  د  $f(x)$  اوبنتونځای (د انعطاف ځای)د گولی ورکولو Dosierung وخت له  $x = 8$  ساعتو وروسته خورا قوي دی.

ت - د ورکړشوو گوليو يا دارو ډبريو يا ستونو سطحه د گراف او د  $x$  محور ترترمنځ ده، ځکه چې  $mg/h.h=mg$  .

د دې سره د يوې پيچکارۍ وخت ۲۴ ساعتونه بنسټ دی.

Menge = ډبري

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow \text{Menge} = M = \int_0^{24} f(x) dx = \int_0^{24} \left( 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \right) dx$$

د په  $I$  کې او په  $II$  کې يعنې  
 په حيث  

$$I = \int_0^{24} 1 dx \quad \text{او} \quad II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx$$
  
 د انټيگرال د وپشنې

داسې چې باور لري:  $K = I + e \cdot II$

$$I = \int_0^{24} 1 dx = [x]_0^{24} = 24$$

د توته انټيگرال له لارې حل د  $II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx$   
 سره.  

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

$$u(x) = x; v'(x) = e^{-\frac{1}{4}x}; u'(x) = 1; v(x) = \int e^{-\frac{1}{4}x} dx$$

ترمنځ شميرنه

د بدلون له لارې حل:  $\int e^{-\frac{1}{4}x} dx$

$$: u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Rightarrow dx = -4 du$$

$$\int e^{-\frac{1}{4}x} dx = -4 \int e^u du = -4e^u = -4e^{-\frac{1}{4}x} = v$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx &= x \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x}) - \int 1 \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x}) dx = -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + 4 \int e^{-\frac{1}{4}x} dx \\ &= -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - 16e^{-\frac{1}{4}x} = -4e^{-\frac{1}{4}x} (x+4) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = \left[ -4e^{-\frac{1}{4}x} (x+4) \right]_0^{24} = -4e^{-6} (24+4) - [-4 \cdot 4] =$$

$$= -112e^{-6} + 16$$

$$\Rightarrow M = I + e \cdot I = 24 + e(-112e^{-6} + 16) = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66,738$$

په 24 ساعته کې به نژدې د 67 mg د دواډېری یا سټ ورکړ شي.

دویم - مفصل حل

الف -

$$f(x) = -2x^2 + x + 3$$

$$I(x) = \int f(x) dx = \int (-2x^2 + x + 3) dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

$$P(-2 | 0) \Rightarrow I(-2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + C = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3} + 2 - 6 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$$

$$F(x) = I(x) + C \Rightarrow F(x) = \underline{\underline{-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}}}$$

ب - د انتیگریشن پولي لپاره د  $F(x)$  صفرځایونه وټاکي.

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$$

معلوم دي.

$$x_1 = -2 \quad \begin{array}{cccc} -2/3 & 1/2 & 3 & -4/3 \\ \downarrow & 4/3 & -22/6 & 4/3 \\ -2/3 & 11/6 & -2/3 & 0 \end{array}$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{2}{3} = 0 \mid \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{4}x + 1 = 0$$

$$p = -\frac{11}{4}; q = 1 \Rightarrow D = \frac{57}{64}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 2,319 \\ x_3 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 0,431 \end{array} \right.$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right|$$

$$\text{mit } x_1 = -2; x_2 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}}; x_3 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}}$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= -\frac{1}{6}x_2^4 + \frac{1}{6}x_2^3 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 \approx -4,995$$

په



$$\begin{aligned}
 A_2 &= -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big|_{x_2}^{x_3} \\
 &= -\frac{1}{6}x_3^4 + \frac{1}{6}x_3^3 + \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_2^4 - \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2 \approx 2,522 \\
 A &\approx 4,955 + 2,522 \approx \underline{\underline{7,477}}
 \end{aligned}$$

## پوښتني

مشتق او انتيگراډ شميرني ته پارامتریک پوښتني |

پوښتني د  $e$  تابع سره

لومړی: تابع  $f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$  ورکړشوی د  $k > 0$  او  $x \in \mathbb{R}$  لپاره

الف-محور غوڅتکي، که شتون ولري، وشميرئ .

ب- افراطي ټکي، که شتون ولري، وشميرئ.

پ- اورنټکي، که شتون ولري، وشميرئ.

ت - تعريف ورشو د پولو يا حدونو لپاره تابع ارزښتونه وټاکئ

ټ- د محور غوڅتکو او  $x$ -محور ترمنځ سطحه  $A_k$  وټاکئ.

ث- د  $x \in \{-3; -2,5; \dots; 1; 1,5\}$  لپاره ارزښتجدول جوړ کړئ او د

ج-د  $f_k(x)$  د تيت ټکو ځايکړه(ځای منحنی)  $f_{ok}(x)$  وشميرئ او دا په پروت ولاړسيستم کې وکارئ.

د  $k = 5$  لپاره سطحه  $A_k$  وشميرئ.

دويم: د  $k > 0$  او  $x \in \mathbb{R}$  لپاره تابع  $f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$  ورکړ شوی.

الف- په محور غوڅتکو  $f_k$  وڅيرئ او دا وشميرئ.

ب- د  $f_k(x)$  لومړي درې مشتقونه جوړ کړئ يا وشميرئ.

پ- په افراطي ټکو باندې وڅيرئ او دا وشميرئ.

ت-  $f_k$  په اوږونټکو يا انعطافتکو باندې وڅيرئ او دا وشميرئ.

ټ- د تعريفورشو د پولې لپاره تابع ارزښت وټاکئ.

ث- د افراطي ټکو لپاره ځايکږه يا -منحني  $f_{ok}(x)$  وټاکئ.

ج- د محورونو غوڅتکو او  $x$  -محور ترمنځ سطحه  $A_k$  وټاکئ

ح- لاندې ارزښت جدول وکاروئ او په يوه پروتولار-يا کواوردينات سيستم کې د  $f_1$  او  $f_2(x)$ ;  $f_3(x)$ ;  $f_4(x)$  لپاره گراف وکارئ. د غوره ټکو (محوڅتکي، افراطي- او اوږونټکو) ارزښتونه د جېشميري سره وشميرئ.

$x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	-0,16	-0,27	-0,43	-0,7	-1,12	-1,75	-2,62	-3,59	-3,94	-1,13	12,7
$f_2(x)$	-0,16	-0,26	-0,42	-0,67	-1,03	-1,5	-1,94	-1,74	1,08	12,5	49,8
$f_3(x)$	-0,16	-0,26	-0,41	-0,63	-0,94	-1,25	-1,26	0,11	6,1	26,2	86,9
$f_4(x)$	-0,16	-0,25	-0,4	-0,6	-0,85	-1	-0,58	1,95	11,1	39,8	124

خ-  $k = 1$  لپاره سطحه  $A_k$  وشميرئ او دا په يوه پروتولار سيستم کې په نڅښه کړئ.

حلونه

مشق او انٽيگراڻ ته پارامٽريڪ پوڻنٽي |

نتيجي او مفصل حلونه

اول - نتيجي

الف -

$$P_{k_y}(0 | 1-k) \quad P_{k_x}(\ln(k) | 0)$$

ب -

$$P_{k_{\min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right) \mid -\frac{1}{4}k^2\right) \quad \text{ٽيٽيڪي:}$$

$$P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right) \mid -\frac{3}{16}k^2\right) \quad \text{پ - اوڙونٽيڪي:}$$

ت -

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \infty$$

ٻ - مفصل حل وگوري

$$A_k = \left| -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2} \right| \quad \text{ٺ - سطحه:}$$

ج - ڊٽولونٽيڪو لپاره ڊ ڊخايمنڇني ڊ تابع مساوات:  $f_{ok}(x) = -\theta^{2x}$

چ - ڊ  $k = 5$  لپاره سطحه 8 FE ( ۸ يوونه يا واحد) ده.

دويم - نتيجي

الف -

د ټولو  $k \in \mathbb{R}$  لپاره د  $y$ -محور سره يو غوڅټکی شتون لري  $P_{k_y} \left( 0 \mid \frac{k}{4} - 2 \right)$

د ټولو  $k > 0$  لپاره د  $x$ -محور سره يو غوڅټکی شتون لري  $P_{k_x} \left( 2 \cdot \ln \left( \frac{8}{k} \right) \mid 0 \right)$

ب -

$$f_k'(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

پ - د ټول  $k > 0$  لپاره يو نسبي خورا ټيټيکی شتون لري

$$P_{k_{\min}} \left( 2 \cdot \ln \left( \frac{4}{k} \right) \mid -\frac{4}{k} \right)$$

ت - د ټول  $k > 0$  لپاره يو اوړونټيکی يا د انعطافټيکی شتون لري

$$P_{k_w} \left( 2 \cdot \ln \left( \frac{2}{k} \right) \mid -\frac{3}{k} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \infty \quad \text{ب -}$$

ث -

د ټيټيکي ځايکړه يا منحنې ده.  $f_{ok}(x) = -e^{\frac{1}{2}x}$  د  $f_k(x)$

$$A_k = \left| -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \right| \text{ : سطحه ج}$$

چ - مفصل حل وگوری.

$$A_1 = 12,25 \text{ FE سطحه ح}$$

اول - مفصل حلونه:

الف - د  $y$  - محور سره غوڅتکي

$$f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$$

$$y_s = f_k(0) = e^{2 \cdot 0} - k \cdot e^0 = 1 - k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k,y}(0 | 1 - k)}}$$

د  $x$  - محور سره غوڅتکي ( صفر ځایونه )

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - k \cdot e^x = 0 \mid e^x \text{ له نوکانو باسل}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(e^x - k)}_{=0} \cdot \underbrace{e^x}_{\neq 0} = 0 \mid \text{ د صفر ضرب جمله وکاروئ}$$

$$e^x - k = 0 \mid +k \Leftrightarrow e^x = k \mid \ln(\ ) \Leftrightarrow x = \ln(k)$$

$$\underline{\underline{P_{k,x}(\ln(k) | 0)}}$$

ب - د انحراف ټکي:

$$f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$$

$$f_k'(x) = 2 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (2 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$

$$f_k''(x) = 4 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (4 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot e^x - k) \cdot e^x = 0 \mid$$

د صفر ضرب جمله و کاروئ

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$$

يو ممکنه افراطي خای دی

د دویم مشتق له لارې يې شمیرنه:  $f_k''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = f_k''\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = 4 \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = 4 \cdot \left(e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}\right)^2 - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}$$

د  $e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{k}{2}$  سره کیري:

$$f_k''(x) = 4 \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{2} = 4 \cdot \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} = k^2 - \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{2} > 0$$

په  $x = x_E = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$  کې يو نسبي خورا ټیټکی (مینیموم) شتون لري.

افراطي ارزښت:

$$\begin{aligned} y_{kE} = f_k(x_E) &= f_k\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = e^{2 \cdot \ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{2} = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} = \\ &= \frac{1}{4}k^2 - \frac{2}{4}k^2 = -\frac{1}{4}k^2 \end{aligned}$$

له دې لاس ته راځي خورا ټیټکی (مینیموم):  $\underline{\underline{P_{kMn}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right) \mid -\frac{1}{4}k^2\right)}}$

پ - د انعطاف ټکي يا اوږونټکي

$$f_k''(x) = 4 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (4 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$

$$f_k'''(x) = 8 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (8 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$

د او پرونتيکي يا د انعطاف ټکي لپاره اړين او پوره کيدونکي شرطونه:

$$f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow (4 \cdot e^x - k) \cdot e^x = 0$$

د صفر ضرب جمله وکاروئ

$$4 \cdot e^x - k = 0 + k \Leftrightarrow 4 \cdot e^x = k \mid : 4 \Leftrightarrow e^x = \frac{k}{4} \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$$

يو ممکنه او پرونتيکي دی

د دريم مشتق له لارې يې ازماښت:  $f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k'''(x) = f_k'''(\ln(\frac{k}{4})) = 8 \cdot e^{2 \ln(\frac{k}{4})} - k \cdot e^{\ln(\frac{k}{4})} = 8 \cdot \left(\frac{k}{4}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{4} =$$

$$= \frac{8}{16} k^2 - \frac{1}{4} k^2 = \frac{1}{4} k^2 \neq 0$$

په  $x = x_w = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$  کې يو او پرونتيکي يا انعطاف ټکي پورت دی.

$$y_{k_w} = f_k(x_w) = f_k\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\right) = e^{2 \ln(\frac{k}{4})} - k \cdot e^{\ln(\frac{k}{4})}$$

$$= \left(\frac{k}{4}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{4} = \frac{k^2}{16} - \frac{k^2}{4} = \frac{1}{16} k^2 - \frac{4}{16} k^2 = -\frac{3}{16} k^2$$

له دي لاس ته راځي، چې اوږونتيکي دي:

$$\underline{\underline{P_{k_w} \left( \ln \left( \frac{k}{4} \right) \right) - \frac{3}{16} k^2}}$$

ت - د تعريفور شو د پولو لپاره د تابع ارزښتونه:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_k(x): \text{ټا کل کيږي:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - k \cdot e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 - k \cdot 0 = 0$$

د  $x \rightarrow -\infty$  لپاره د  $x$  محور د  $f_k(x)$  اسيمپټوت دي.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2x} - k \cdot e^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [(e^x - k) \cdot e^x] = \infty$$

د  $x \rightarrow \infty$  لپاره د  $f_k(x)$  تابع ارزښتونه اه ټولو پولو اوږي يا وده کوي.

ټ - د سطحه د د محور غوڅتکو ترمنځ:

صفر ځايونه:

$$x_1 = \ln(k) \Rightarrow$$

$$A_k = \left| \int_0^{\ln(k)} f_k(x) dx \right| \quad \text{د سطحې انټيگرال دي:}$$

$$\int_0^{\ln(k)} f_k(x) dx = \int_0^{\ln(k)} (e^{2x} - k \cdot e^x) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{2x} dx}_I - k \cdot \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^x dx}_{II} = I - k \cdot II$$



$$I: \int_0^{\ln(k)} e^{2x} dx \text{ Substitution: } u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\text{ug: } u(0) = 2 \cdot 0 = 0 \quad \text{og: } u(\ln(k)) = 2 \cdot \ln(k)$$

$$\int_0^{\ln(k)} e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2 \cdot \ln(k)} e^u du = \left[ \frac{1}{2} e^u \right]_0^{2 \cdot \ln(k)} = \frac{1}{2} e^{2 \cdot \ln(k)} - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2}$$

$$II: \int_0^{\ln(k)} e^x dx = \left[ e^x \right]_0^{\ln(k)} = e^{\ln(k)} - e^0 = k - 1$$

$$\int_0^{\ln(k)} f_k(x) dx = I - k \cdot II = \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} - k \cdot (k - 1) = \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} - k^2 + k = -\frac{1}{2} k^2 + k - \frac{1}{2}$$

$$A_k = \left| -\frac{1}{2} k^2 + k - \frac{1}{2} \right|$$

له دي سره سطحه كيږي:

ث – ارزښت جدول او د منحنيو گرافونه (د منحنيو ډله) .

سربيره پردي دي محور غوڅتکي، ټيټتکي او د انعطاف ټکي و ارزښت جدول وروشمېرل شي.

$$P_{k_y}(0 | 1-k); P_{k_x}(\ln(k) | 0); P_{k_{\min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right) | -\frac{1}{4}k^2\right); P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right) | -\frac{3}{16}k^2\right)$$

K=2

$$P_{2_y}(0 | -1); P_{2_x}(\ln(2) \approx 0,69 | 0); P_{2_{\min}}\left(\ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0 | -1\right); P_{2_w}\left(\ln\left(\frac{2}{4}\right) \approx -0,69 | -0,75\right)$$

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
f <sub>2</sub> (x)	-0,1	-0,16	-0,25	-0,37	-0,6	-0,85	-1	-0,58	1,95	11,1	21,6

K=3

$$P_{3_y}(0|-2); P_{3_x}(\ln(3) \approx 1,1|0); P_{3_{\min}}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0,41|-2,25\right); P_{3_w}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0,29|-1,69\right)$$

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_3(x)$	-0,15	-0,24	-0,39	-0,62	-0,97	-1,45	-2	-2,23	-0,77	6,64	15,85

$k = 4$ :

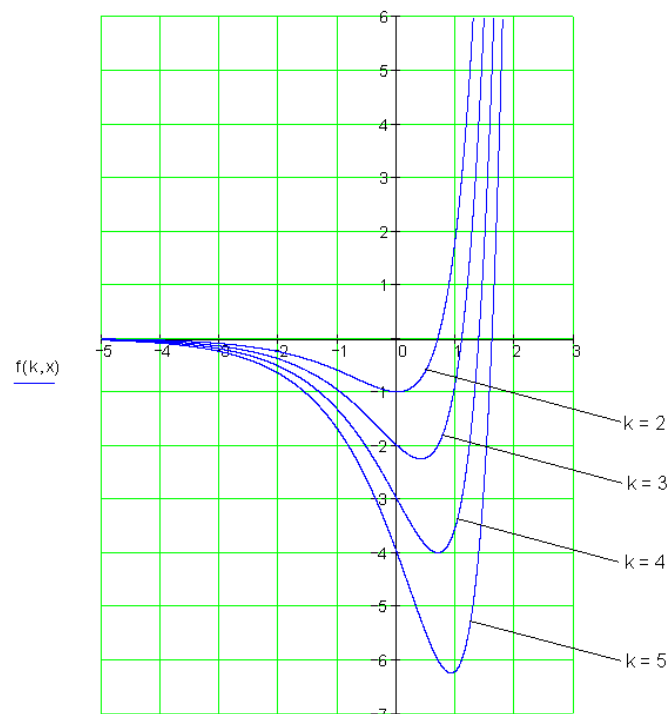
$$P_{4_y}(0|-3); P_{4_x}(\ln(4) \approx 1,39|0); P_{4_{\min}}\left(\ln\left(\frac{4}{2}\right) = 0,69|-4\right); P_{4_w}\left(\ln\left(\frac{4}{4}\right) = 0|-3\right)$$

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_4(x)$	-0,2	-0,32	-0,52	-0,84	-1,34	-2,06	-3	-3,88	-3,48	2,16	10,1

$k = 5$ :

$$P_{5_y}(0|-4); P_{5_x}(\ln(5) \approx 1,61|0); P_{5_{\min}}\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right) = 0,92|-6,25\right); P_{5_w}\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0,22|-4,69\right)$$

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_5(x)$	-0,25	-0,4	-0,66	-1,07	-1,7	-2,67	-4	-5,53	-6,2	-2,32	4,34



ج - د محليمنحني لپاره ټيټيکو شميرنه:

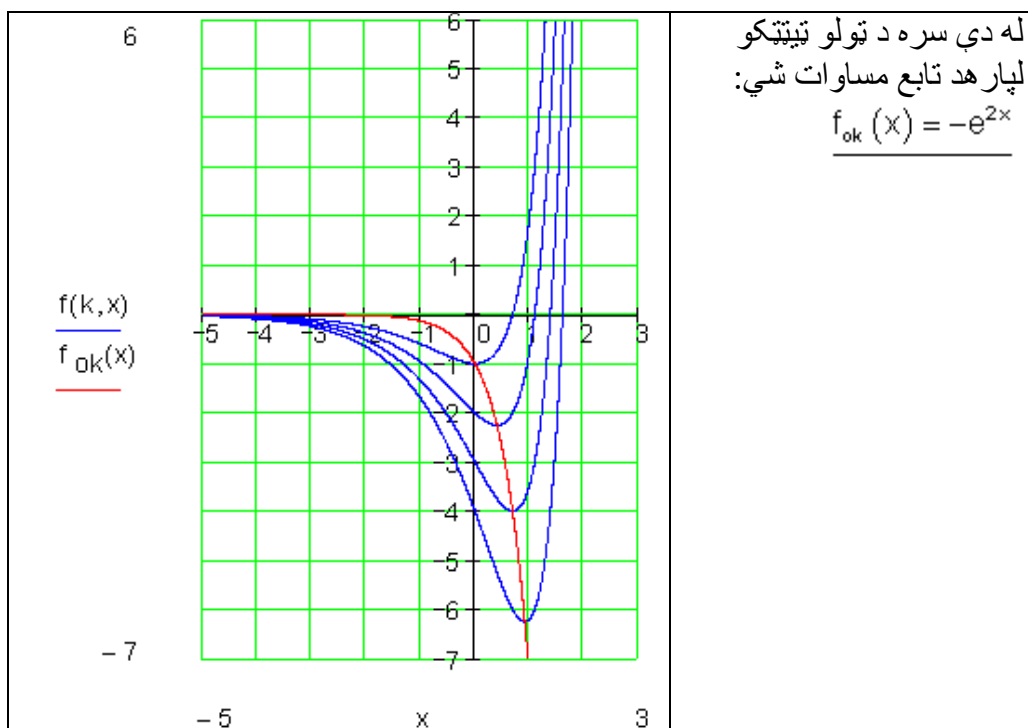
$$P_{k\text{Min}} \left( \underbrace{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}_x \mid \underbrace{-\frac{1}{4}k^2}_y \right) \Rightarrow x = \ln\left(\frac{k}{2}\right) \quad (1) \quad y = -\frac{1}{4}k^2 \quad (2)$$

(۱) له  $k$  پسي حل کړئ:

$$x = \ln\left(\frac{k}{2}\right) \mid e \Leftrightarrow e^x = e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} \Leftrightarrow e^x = \frac{k}{2} \Leftrightarrow k = 2 \cdot e^x$$

نتيجه په (۲) کي کيږدئ:

$$y = -\frac{1}{4}k^2 = -\frac{1}{4} \cdot (2 \cdot e^x)^2 = -\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot e^{2x} = -e^{2x}$$



چ - د  $k = 5$  لپاره:

$$A_k = \left| -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2} \right| \text{ له } e \text{ څخه لاس ته راوړنه}$$

$$A_5 = \left| -\frac{1}{2} \cdot 5^2 + 5 - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{25}{2} + 5 - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{25}{2} + \frac{10}{2} - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{16}{2} \right| = |-8| = 8$$

د  $k = 5$  لپاره سطحه 8 یونه یا واحده ده.

دویم - مفصل حلونه      الف - د  $y$  - محور سره غوڅتکي:

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = \frac{1}{4}k \cdot e^0 - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = \frac{k}{4} - 2 \Rightarrow P_{k,y} \left( 0 \mid \frac{k}{4} - 2 \right)$$

د ټولو  $k \in \mathbb{R}$  لپاره د  $y$  - محور سره غوڅتکي شتون لري.

د  $x$  - محور سره غوڅتکي (صفرځایونه):

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \mid + 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{8}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{8}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x}\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \ln\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^x) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2}x \mid - \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_x}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right)}}$$

د ټولو  $k > 0$  لپاره  $x$  - محور سره غوڅتکي شتون لري ( صفرخايونه).

پ - مشتقونه

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k \cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

ث - انحراف ټکي

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k'(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د افراطي ټکو لپاره پوره کيدونکي شرطونه:  $f_k'(x) = 0 \wedge f_k''(x) \neq 0$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x} = 0 \mid + e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x = e^{\frac{1}{2}x} \mid \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{4}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \ln( )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{4}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x}\right) = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{1}{2}|x| - \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) \cdot 2 \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)$$

ممکنه افراطي خايونه

$$f_k''(x) = f_k''\left(2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)\right) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2} - \frac{1}{2} \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{4}{k}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{k} = \frac{1}{4}k \cdot \frac{16}{k^2} - \frac{2}{k} = \frac{4}{k} - \frac{2}{k} = \frac{2}{k} > 0.$$

د ټولو  $k > 0$  لپاره .

له دې لاس ته راځي، چې نسبي اکسترېموم (ټيټکي) په  $x = x_{kMin} = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)$  کې

$$y_{kMin} = f_k(x_{kMin}) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2} - 2 \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{4}{k}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{k} = \frac{1}{4}k \cdot \frac{16}{k^2} - \frac{8}{k} = \frac{4}{k} - \frac{8}{k} = -\frac{4}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{P_{kMin}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid -\frac{4}{k}\right)}$$

د ټولو  $k > 0$  لپاره يو نسبي اکسترېموم (ټيټکي) شتون لري.

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

ت -

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د انعطاف تکی یا اورونتیکی:  $f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \mid + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x}\right) = \ln\left(\frac{2}{k}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) + \frac{1}{2}x \mid - \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)$$

ممکنه اورونتیکی یا انعطافتیکی

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \mid + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x}\right) = \ln\left(\frac{2}{k}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) \cdot 2 \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \text{ möç}$$

ممکنه اورونتيکي يا د انعطاف تيکي

د لاندي پيښتو: ... لپاره.

$$\begin{aligned} f_k'''(x) &= f_k''' \left( 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \right) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)} - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2} - \frac{1}{4} \cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)} \\ &= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{k}\right) = \frac{1}{4}k \cdot \frac{4}{k^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} \neq 0 \end{aligned}$$

د  $k > 0$  لپاره.

$$\Rightarrow x = x_{kw} = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)$$

يو اورونتيکي يا د انعطاف تيکي دی.

$$\begin{aligned} y_{kw} &= f_k(x_{kw}) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)} - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2} - 2 \cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)} \\ &= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{k}\right) = \frac{1}{4}k \cdot \frac{4}{k^2} - 2 \cdot \frac{2}{k} = \frac{1}{k} - \frac{4}{k} = \frac{1}{k}(1-4) = -\frac{3}{k} \\ &\Rightarrow \underline{\underline{P_{kw} \left( 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \mid -\frac{3}{k} \right)}} \end{aligned}$$

د  $k > 0$  لپاره يو اورونکي شتون لري

ب – د تعريف ورشو د پولو لپاره د تابع ارزښتونه:



$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 2 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

د  $x \rightarrow -\infty$  لپاره ټول تابع ارزښتونه د 0 په لور ځلي. له دې سره د  $x$ -محور اسمپټوت پټ گاونډ (مجانِب) دی.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} e^x - 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k \cdot \infty - 2 \cdot \infty$$

حلوړ نه دی.

مگر دا چې  $e^x$  د  $x \rightarrow \infty$  لپاره نسبت  $e^{\frac{1}{2}x}$  ته گړندی له ټولو پولو اوږي، کیدی د کمون یا تفریق د پام کې لرنې له امله له دې څخه مخ ته لار شو، چې

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \infty$$

باور لري

ث - د نیټټکو ځایزه یا محلي منحنی

$$P_{k\min} \left( \underbrace{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)}_x \mid \underbrace{-\frac{4}{k}}_y \right) \Rightarrow x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \quad (1) \quad y = -\frac{4}{k} \quad (2)$$

(1) د  $k$  په لور یا پسې حل کړئ او (2) کې ځای په ځای کړئ د ځای کړې (منحنی) تابع مساوات ورکوي.

$$x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid : 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid e^{(\ )} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = \frac{4}{k}$$

په څټ ارزښت يې جوړ کړئ

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{k}{4} \cdot 4 \Leftrightarrow k = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

په (2) کې ځای په ځای کړئ

$$\begin{aligned} y &= -\frac{4}{k} = -\frac{4}{4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}} = -\frac{4}{4} \cdot \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}x}} \\ &= -\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}x}} = -e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \underline{\underline{f_{ok}(x) = -e^{\frac{1}{2}x}}} \end{aligned}$$

$f_{ok}(x)$  د  $f_k(x)$  د ټيټکي ځای کړه (-منحنی) ده

ج - د سطحې د مساحت شمېرنه

$$A_k = \left| \int_0^{x_k} f_k(x) dx \right| \quad f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\int f_k(x) dx = \frac{1}{4}k \cdot \int e^x dx - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx$$

$$\text{د } \int e^x dx = e^x + C \text{ او } \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C \text{ سره باور لري:}$$

$$\int f_k(x) dx = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$\text{د پوله ايبنوونې وروسته لرو: } u_g = 0; \quad o_g = x_k = 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right)^2$$

کيري:

$$\begin{aligned} \int_0^k f_k(x) dx &= \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{8}{k}\right)^2} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right)} - \left( \frac{1}{4}k \cdot e^0 - 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} \right) \\ &= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{8}{k}\right)^2 - 4 \cdot \frac{8}{k} - \frac{1}{4}k + 4 = \frac{1}{4}k \cdot \frac{64}{k^2} - \frac{32}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \\ &= \frac{16}{k} - \frac{32}{k} - \frac{1}{4}k + 4 = \frac{1}{k}(16 - 32) - \frac{1}{4}k + 4 = -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \Rightarrow A_k = \underline{\underline{\left| -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \right|}} \end{aligned}$$

چ - رابرتلی یا په گته شوی تکی تکی

$k = 1$

$$P_{k_y} \left( 0 \mid \frac{1}{4}k - 2 \right) \Rightarrow P_{1_y} \left( 0 \mid \frac{1}{4} \cdot 1 - 2 \right) \Rightarrow P_{1_y} (0 \mid -1,75)$$

$$P_{k_x} \left( 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{1_x} \left( 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{1}\right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{1_x} (4,16 \mid 0)$$

$$x_{k_{\min}} = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{1_{\min}} = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{1}\right) \approx 2,77 \Rightarrow f_1(x_{1_{\min}}) = -4 \Rightarrow P_{1_{\min}} (2,77 \mid -4)$$

$$x_{k_w} = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{1_w} = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{1}\right) \approx 1,39 \Rightarrow f_1(x_{1_w}) = -3 \Rightarrow P_{1_w} (1,39 \mid -3)$$

$k = 2$

$$P_{k_y} \left( 0 \mid \frac{1}{4}k - 2 \right) \Rightarrow P_{2_y} \left( 0 \mid \frac{1}{4} \cdot 2 - 2 \right) \Rightarrow P_{2_y} (0 \mid -1,5)$$

$$P_{k_x} \left( 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{2_x} \left( 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{2}\right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{2_x} (2,77 \mid 0)$$

$$x_{k_{\min}} = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{2_{\min}} = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{2}\right) \approx 1,39 \Rightarrow f_2(x_{2_{\min}}) = -2 \Rightarrow P_{2_{\min}} (1,39 \mid -2)$$

$$x_{k_w} = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{2_w} = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0 \Rightarrow f_2(x_{2_w}) = -1,5 \Rightarrow P_{2_w} (0 \mid -1,5)$$

$$k = 3$$

$$P_{k_y} \left( 0 \mid \frac{1}{4}k - 2 \right) \Rightarrow P_{3_y} \left( 0 \mid \frac{1}{4} \cdot 3 - 2 \right) \Rightarrow P_{3_y} (0 \mid -1,25)$$

$$P_{k_x} \left( 2 \cdot \ln \left( \frac{8}{k} \right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{3_x} \left( 2 \cdot \ln \left( \frac{8}{3} \right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{3_x} (1,96 \mid 0)$$

$$x_{k_{\text{Min}}} = 2 \cdot \ln \left( \frac{4}{k} \right) \Rightarrow x_{3_{\text{Min}}} = 2 \cdot \ln \left( \frac{4}{3} \right) \approx 0,58 \Rightarrow f_3(x_{3_{\text{Min}}}) \approx$$

$$\approx -1,33 \Rightarrow P_{3_{\text{Min}}} (0,58 \mid -1,33)$$

$$x_{k_w} = 2 \cdot \ln \left( \frac{2}{k} \right) \Rightarrow x_{3_w} = 2 \cdot \ln \left( \frac{2}{3} \right) \approx -0,81 \Rightarrow f_3(x_{3_w}) = -1 \Rightarrow P_{3_w} (-0,81 \mid -1)$$

$$k = 4$$

$$P_{k_y} \left( 0 \mid \frac{1}{4}k - 2 \right) \Rightarrow P_{4_y} \left( 0 \mid \frac{1}{4} \cdot 4 - 2 \right) \Rightarrow P_{4_y} (0 \mid -1)$$

$$P_{k_x} \left( 2 \cdot \ln \left( \frac{8}{k} \right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{4_x} \left( 2 \cdot \ln \left( \frac{8}{4} \right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{4_x} (1,39 \mid 0)$$

$$x_{k_{\text{Min}}} = 2 \cdot \ln \left( \frac{4}{k} \right) \Rightarrow x_{4_{\text{Min}}} = 2 \cdot \ln \left( \frac{4}{4} \right) = 0 \Rightarrow f_4(x_{4_{\text{Min}}}) = -1 \Rightarrow P_{4_{\text{Min}}} (0 \mid -1)$$

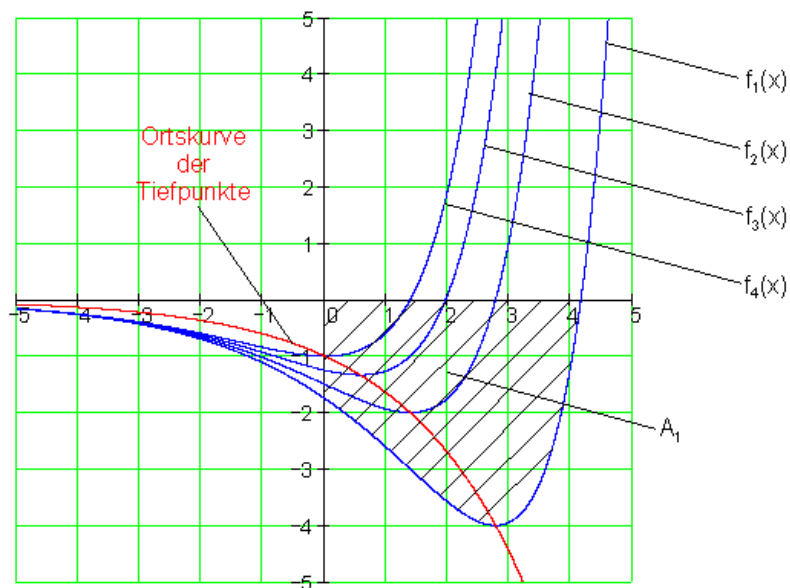
$$x_{k_w} = 2 \cdot \ln \left( \frac{2}{k} \right) \Rightarrow x_{4_w} = 2 \cdot \ln \left( \frac{2}{4} \right) \approx -1,39 \Rightarrow f_4(x_{4_w}) = -0,75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{4_w} (-1,39 \mid -0,75)$$

د تابع گراف

$$f(k, x) := \frac{1}{4} \cdot k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} \quad f_{0k}(x) := -e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

د تیتکتی لپاره خای کړ



ح - معلومه سطحه :

$$A_k = \left| -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \right| \text{ für } k = 1 \text{ gilt:}$$

$$A_1 = \left| -\frac{16}{1} - \frac{1}{4} \cdot 1 + 4 \right| = \left| -16 + 4 - \frac{1}{4} \right| = \left| -12 - \frac{1}{4} \right| = \left| -12,25 \right| = \underline{\underline{12,25 \text{ FE}}}$$

پوښتنې

مشتق - او انتیگرال شمیرنو ته پوښتنې

د e-تابع سره پوښتنې.

لومړۍ: د  $k > 0$  او  $x \in \mathbb{R}$  لپاره تابع  $f_k(x) = (k-x)e^{\frac{1}{2}x}$  ورکړي

الف- محور غوڅټکي، که شتون ولري، وشميرئ.

ب- افراپی ټکي، ه شتون ولري، وشميرئ.

پ- اورونټکي يا د انعطاف ټکي، که شتون ولري، وشميرئ.

ت- د تعريفور شو پوله ارزښت لپاره تابع ارزښتونه وټاکئ.

ټ- د محور غوڅټکو او  $x$  - محور ترمنځ سطحه  $A_k$  وټاکئ.

ټ- په يو پروتولار يا کواورد بڼاتسيستم کې د  $x \in \{-5; -4; \dots; 4; 5\}$  او

$k \in \{1; 2; 3; 4\}$  لپاره ارزښت جدول وکارئ.

ج- د لاندي ځايگرو يا -منحنیو مساواتابع وشميرئ:

د  $f_k(x)$  د جگټکي ځايگروه يا -منحنی  $f_{okh}(x)$  او

د  $f_k(x)$  د جگټکي اورونټکي يا د انعطافټکي  $f_{okw}(x)$  او دا په يوه پروتولارسيستم (قيمتوضعيه؟؟) کې وکارئ.

چ- د  $k = 4$  لپاره سطحه  $A_4$  وشميرئ او دا په پروتولارسيستم (يا قيمت وضعيه) کې وکارئ.

دويم: د  $k \in \mathbb{R}$  او  $x \in \mathbb{R}$  لپاره دې تابع  $f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$  ورکړ شوي وي.

الف- محور غوڅټکي، که شتون ولري، وشميرئ. د کوم  $k$  ارزښت لپاره صفرځای شتون لري؟

ب- د  $f_k(x)$  لومړي درې مشتقونه وشميرئ.

پ-  $f_k(x)$  د افراطي ځايونو په هکله وڅيړئ او د افراطيت او د  $k$  په واکولي يا تابعيت باندې يې يوه وينا ( دا چې وينا څه شی دی ، د سم اند يا منطق برخ کې يې کتلې شئ) وکړئ.

ت -  $f_k(x)$  په اوږونځايونو بندي  $k$  په واکوالي کې وڅيړئ.

ټ- د په واکوالي کې دې د  $A_k$  سطحه د صفرځايونو او د  $x$  -محور ترمنځ وشميرل شي.

$$\int x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = (2x^2 - 8x + 16) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C \quad \text{مرستموقف:}$$

ث- په يوه پروتولارسيستم يا د وضعيهقيمت سيستم کې د  $k \in (-4; -2; 0; 2; 4)$  لپاره گراف وکارئ.

د لاندي ارزښت جدول څخه داتا وکارئ.

$x$	-10	-8	-6	-4	-2	0	2
$f_{-4}(x)$	0,7	1,25	1,99	2,71	2,94	4	21,75
$f_{-2}(x)$	0,69	1,21	1,89	2,44	2,21	2	16,31
$f_0(x)$	0,67	1,17	1,79	2,17	1,47	0	10,97
$f_2(x)$	0,66	1,14	1,69	1,89	0,74	-2	5,44
$f_4(x)$	0,65	1,1	1,59	1,62	0	-4	0

برسيره پردې، که غوښتوني ووو، صفرځايونه، افراطي ځايونه او اوږونتيکي يا د انعطاف تيکي.

ج- د سطحه وشميرئ او سطحه په پروته- ولارسيستم يا وضعيه قيمت سيستم کې په نڅښه کړئ.

حلونه

مشتق او انتيگرالشميرني ته پارامتریکي پوښتنې ||

نتيجي او مفصل حلونه

اول - نتيجي

$$P_{k_y}(0|k) \quad P_{k_x}(k|0) \text{ - الف}$$

ب -

$$P_{k_{\max}} \left( k-2 \mid 2 \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right) \text{ : جگتکی}$$

ث -

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = -\infty$$

ب -

$$A_k = \left| 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - 2k - 4 \right| \text{ : سطحه}$$

$f_{okh}(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $f_{okw}(x) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$	<p>د خايكړي يا خايمنحي د جگتكو لپاره تابع مساوات:</p> <p>د خايكړي يا خايمنحي د د ټولو انعطافتكو لپاره تابع مساوات:</p>
--	--

$$k = 4 \ 17,556 \text{ FE}$$

دويم - نتيجي :

الف -

$$P_{k_y}(0|-k) \quad P_{k_{x1/2}}(\pm\sqrt{k}|0)$$

ب -



$$f_k'(x) = \left( \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = \left( \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = \left( \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}k + 3 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

پ -  $k > -4$  لپاره  $x_1 = -2 + \sqrt{4+k}$  په ځای کې یو نسبي خورا ټیټ ټکی پروت دی.

د -  $k > -4$  لپاره  $x_2 = -2 - \sqrt{4+k}$  په ځای کې یو نسبي خورا جگ ټکی پروت دی.

ت -  $x_1 = -4 + \sqrt{8+k}$  یو اورنټکی یا انعطاف ټکی، که  $k > -8$  وي.

یو اورنټکی یا انعطاف ټکی، که  $k > -8$  وي.  $x_2 = -4 - \sqrt{8+k}$

ټ -

ث - مفصل حل وگوری

ج - سطحه  $A_4 = 11,772$  FE

اول - مفصل حلونه

الف د  $y$  -محور سره غوڅتکی:

$$f_k(x) = (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = (k-0) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = k \cdot 1 = k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0|k)}}$$

د  $x$  -محور سره غوڅتکی (صفر ځایونه):

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{k-x}{0} \right) \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{0} = 0$$

د پيټاگوراس (فيثاغرت) جمله وکاروئ

$$k-x=0 \mid +x \Leftrightarrow k=x \Leftrightarrow x=k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k|x}(k|0)}}$$

ب - د انحراف ټکي

$$f_k(x) = (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv' \quad r$$

د  $u = k-x \Rightarrow u' = -1$  او  $v = e^{\frac{1}{2}x}$  سره

$$\Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = -1 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (k-x) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left( -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv'$$

د  $u = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1 \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}$  او  $v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$  سره

$$f_k''(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left( -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left( -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv'$$

$$\text{سرہ } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{او } u = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 \Rightarrow u' = -\frac{1}{4} \quad \text{د}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 \Rightarrow u' = -\frac{1}{4} \text{ und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv'$$

$$\text{سرہ } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{او } u = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 \Rightarrow u' = -\frac{1}{4} \quad \text{د}$$

$$f_k'''(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(-\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}k - \frac{3}{4}\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0$$

د پیتاگوراس جملہ وکاروی

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1 = 0 \Leftrightarrow x = k - 2$$

$$\Leftrightarrow x = k - 2 \quad \text{i}$$

یو ممکنہ افراطی خای دی.

د دویم مشتق (رابیلیدنی) سرہ بی ازماپنت:  $f_k''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = f_k''(k-2) = \left[-\frac{1}{4}(k-2) + \frac{1}{4}k - 1\right] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} < 0$$

په  $x = x_E = k - 2$  کی یو نسبی خرا تیتیکی (خورا جگ تکی) شتون لري

$$y_{kE} = f_k(x_E) = f_k(k-2) = [k - (k-2)] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}k-1}$$

افراطي ارزبنتونه:

$$P_{k_{\text{Max}}} \left( k-2 \mid 2 \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)$$

له دي لاس ته رځي، چي ټيكي:

پ - د انعطاف ټكي

$$f_k''(x) = \left( -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k'''(x) = \left( -\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}k - \frac{3}{4} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د اوړونټكي يا انعطافټكي لپاره اړين- يا ضروري شرايط:

$$f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left( -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0$$

د پيټاگوراس جمله وکاروي يا استعمال کړي

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 = 0 \Leftrightarrow x = k - 4$$

په  $x = x_w = k - 4$  کي يو اوړونټکی يا د انعطافټکی شته.

$$y_{kw} = f_k(x_w) = f_k(k-4) = [k - (k-4)] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2}$$

له دي لاس ته را ځي، چي اوړونټکی دی:

$$P_{kw} \left( k-4 \mid 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} \right)$$

ت - د تعريف ورشو پولي لپاره د تابع ارزښتونه.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_k(x) \quad \text{ټاکو:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0$$

د  $x \rightarrow \infty$  لپاره د  $x$ -محور د  $f_k(x)$  ګاونډ (مجاورت يا اسيمپټوت) دی.

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right| \quad \text{ب - صفرځای: } x_1 = k \text{ له دې لاس ته راځي د سطحي انتيګرال}$$

$$\int_0^k f_k(x) dx = \int_0^k (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx$$

د ټوټه - يا پارشل انتيګرال له لارې حل لومړی ټوليز يا عمومي

$$\int \underbrace{(k-x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{v(x)} dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$u(x) = k-x \Rightarrow u'(x) = -1$$

$$v'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v(x) = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = \int (-1) \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = -2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx = -4 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\int f_k(x) dx = (k-x) \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \left( -4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) + C = 2k \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$\int_0^k f_k(x) dx = \left[ 2k \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^k$$

$$= 2k \cdot e^{\frac{1}{2}k} - 2k \cdot e^{\frac{1}{2}k} + 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left( 2k \cdot e^{\frac{1}{2}0} - 2 \cdot 0 \cdot e^{\frac{1}{2}0} + 4 \cdot e^{\frac{1}{2}0} \right) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - 2k - 4$$

$$A_k = \left| 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - 2k - 4 \right|$$

له دي سره سطحه كيږي يا ده:

ث – ارزبناجدول او د کږو يا منحني کودي (گزافونه).

محور غوڅتکي، نيتتکي او اوږونتکي يا دا نعطاف تکي دي برسیره ارزبنت جدول ته وروشميرل شي.

$$P_{k_y}(0|k); P_{k_x}(k|0); P_{k_{\text{Max}}}\left(k-2 \mid 2 \cdot e^{\frac{1}{2}k-1}\right); P_{k_w}\left(k-4 \mid 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2}\right)$$

$k = 1:$

$$P_{1_y}(0|1); P_{1_x}(1|0); P_{1_{\text{Min}}}\left(-1 \mid 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 1,21\right); P_{1_w}\left(-3 \mid 4 \cdot e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,89\right)$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,49	0,68	0,89	1,1	1,21	1	0	-2,72	-8,96	-22,17	-48,73

$k = 2:$

$$P_{2_y}(0|2); P_{2_x}(2|0); P_{2_{\text{Min}}}(0 \mid 2 \cdot e^0 = 2); P_{2_w}(-2 \mid 4 \cdot e^{-1} \approx 1,47)$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0,57	0,81	1,12	1,47	1,82	2	1,65	0	-4,48	-14,78	-36,55

$k = 3:$

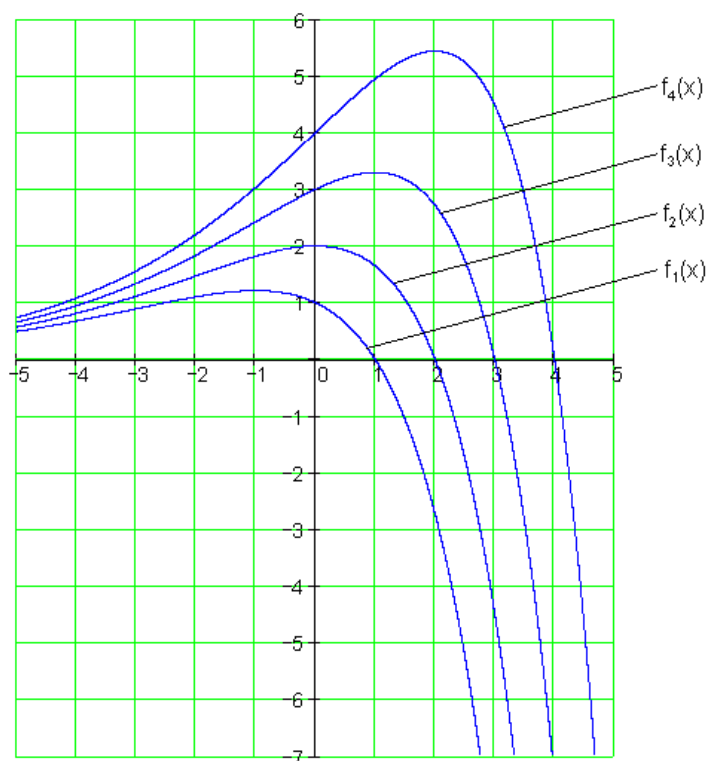
$$P_{3_y}(0|3); P_{3_x}(3|0); P_{3_{\text{Min}}}\left(1 \mid 2 \cdot e^{\frac{1}{2}} \approx 3,3\right); P_{3_w}\left(-1 \mid 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 2,43\right)$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_3(x)$	0,66	0,95	1,34	1,84	2,43	3	3,3	2,72	0	-7,39	-24,36

$K=4:$

$$P_{4_y}(0|4); P_{4_x}(4|0); P_{4_{Mn}}(2|2 \cdot e^1 \approx 5,44); P_{4_w}(0|4 \cdot e^0 = 4)$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_4(x)$	0,74	1,08	1,56	2,21	3,03	4	4,95	5,44	4,48	0	-12,18



ج - د خای یا محلي منحنی شمیرنه :

$$P_{k_{Max}} \left( \frac{k-2}{x} \mid \frac{2 \cdot e^{\frac{1}{2}k-1}}{y} \right) \Rightarrow x = k-2 \quad (1) \quad y = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \quad (2)$$

(۱) په  $k$  پسي حل کړئ:  $x = k-2 \Leftrightarrow k = x+2$

نتخجه په (۲) کې کيردئ:

$$y = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot (x+2) - 1} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x + 1 - 1} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

له دې سره دټولو جگټکو لپاره د ځای کړې يا ځای-منحنې تابع مساوات کيرئ:

$$\underline{\underline{f_{okh}(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}}}$$

$$P_{kw} \left( \underbrace{k-4}_x \mid \underbrace{4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k - 2}}_y \right) \Rightarrow x = k - 4 \quad (1) \quad y = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k - 2} \quad (2)$$

(۱) په k پسي حل کړئ:

$$x = k - 4 \Leftrightarrow k = x + 4$$

نتيجه په (۲) کې کيردئ

$$y = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot (x+4) - 2} = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x + 2 - 2} = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

له دې سره د ټولو اورنټکو يا انعطافټکو لپاره د تابع مساوات دي:

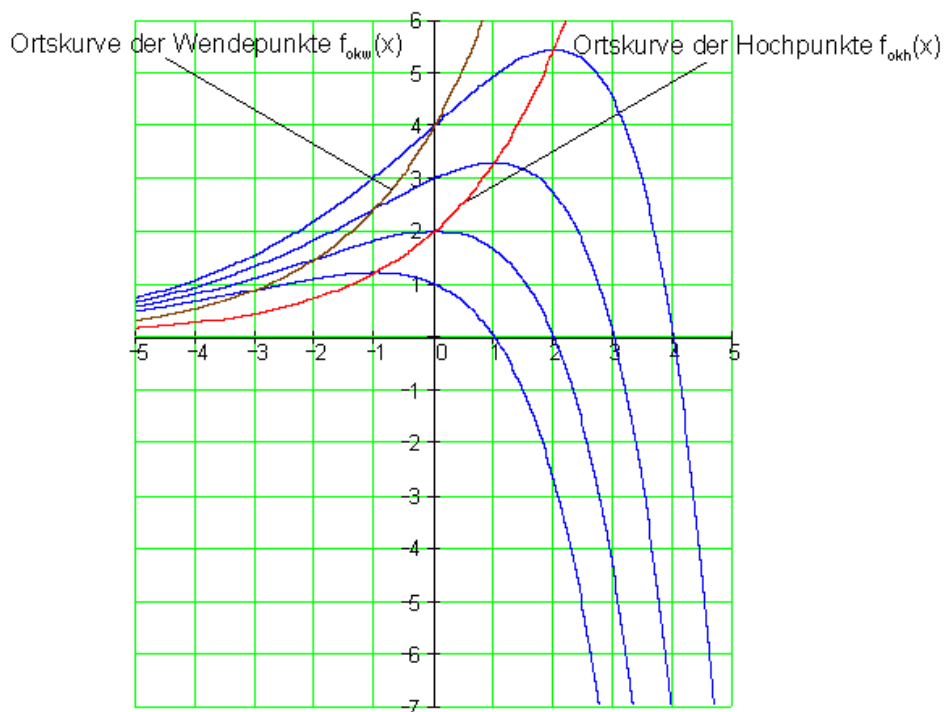
$$\underline{\underline{f_{okw}(x) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}}}$$

لاندي له کين و ښي لور ته:

د جگټکي... ځايمنحني د اورونټکي يا انعطافټکي منحنې



د الماني پښتو: له کين څخه بني لور ته: د اوروڼتکي يا انعطافتکي ځای کره  
د جگتکي ځای کره.



ح - د  $k = 4$  لپاره سطحه:

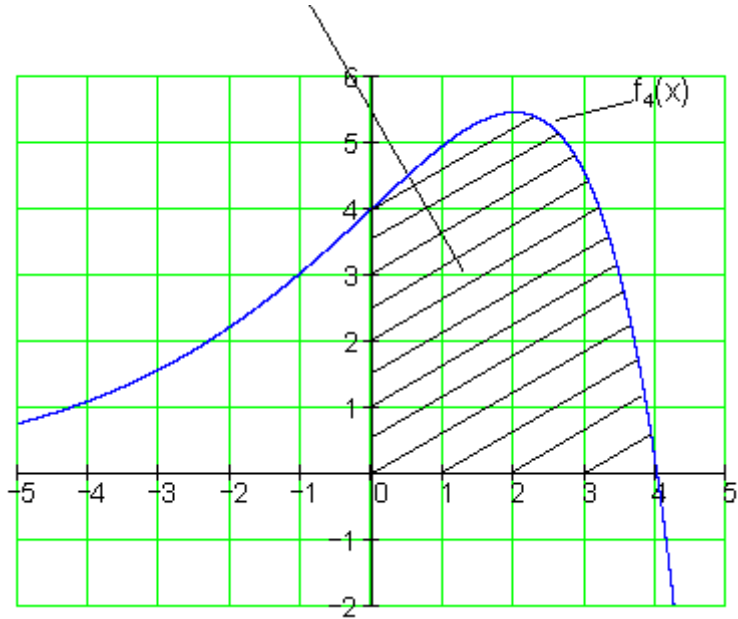
$$A_k = \left| 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - 2k - 4 \right|$$

نيجه له ب څخه

$$A_4 = \left| 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 4} - 2 \cdot 4 - 4 \right| = \left| 4 \cdot e^2 - 8 - 4 \right| = \left| 4 \cdot e^2 - 12 \right| \approx 17,556$$

د  $k = 4$  لپاره سطحه 17,556 FE (يونه يا وحدونه) ده.

د  $A_4$  محور غوڅتکو او  $x$  -محور ترمنځ سطحه.



دويم - مفصل حل

الف -

د  $y$  -محور سره غوڅتکی:

$$f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = (0^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = -k \cdot 1 = -k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k,y}(0| -k)}}$$

د  $x$  -محور سره غوڅتکی (صفر ځایونه):

د پیتاگوراس جمله وکاروئ

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x^2 - k)}_{=0} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

$$x^2 - k = 0 \Leftrightarrow x^2 = k \Leftrightarrow |x| = \sqrt{k} \Leftrightarrow x_{k, x^{1/2}} = \pm\sqrt{k} \text{ für } k \geq 0 \Rightarrow \underline{P_{k, x^{1/2}}(\pm\sqrt{k} | 0)}$$

صفر خايونه فقط د  $k \geq 0$  لپاره شتون لري.

ب - مشتقونه

$$f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv'$$

$$\text{سره } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{او } u = x^2 - k \Rightarrow u' = 2x \quad \text{د}$$

$$f_k'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (x^2 - k) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left( \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv'$$

$$\text{سره } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{او } u = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k \Rightarrow u' = x + 2 \quad \text{د}$$

$$f_k''(x) = (x + 2) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left( \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left( \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv'$$

$$\text{سره } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{او } u = \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 \Rightarrow u' = \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{د}$$

$$f_k'''(x) = \left(\frac{1}{2}x+2\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}k+3\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

پ - د افراط ټکي:

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}k\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{>0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}k=0 \cdot 2 \Leftrightarrow x^2+4x-k=0$$

$$p=4; \quad q=-k \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4+k \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{4+k}$$

د  $k \geq 0$  لپاره شتون لري

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$	$x_1 = -2 + \sqrt{4+k}$ $x_2 = -2 - \sqrt{4+k}$	د $k \geq 0$ لپاره
---------------------------------------	--	--------------------

د  $k \geq -4$  لپاره  $x_1$  او  $x_2$  ځايونه دي د پراته-ولار تانجنت سره

د  $k < 0$  لپاره پروت-ولار تانجنت نه شته

د افراطيت ډول:  $f_k''(x_{1/2}) \neq 0$

$$f_k''(x_{1/2}) = \left(\frac{1}{4}x_{1/2}^2 + 2 \cdot x_{1/2} - \frac{1}{4}k + 2\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x_{1/2}}}_{>0}$$

که  $0 < (\dots)$  وي، نو لاس ته راځي، چې په  $x_{1/2}$  کې مينيموم يا خورائيت ټکی لرو.

که  $0 < (\dots)$  وي، نو لاس ته راځي، چې په  $x_{1/2}$  کې ماکسيموم يا خورا جگ ټکی لرو

منځميرنه:

$$: x_1^2 = (-2 + \sqrt{4+k})^2 = 8 - 4 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$x_2^2 = (-2 - \sqrt{4+k})^2 = 8 + 4 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{4}x_1^2 + 2 \cdot x_1 - \frac{1}{4}k + 2 \right) &= \left[ \frac{1}{4} \cdot (8 - 4 \cdot \sqrt{4+k} + k) + 2 \cdot (-2 + \sqrt{4+k}) - \frac{1}{4}k + 2 \right] = \\ &= \sqrt{4+k} > 0 \end{aligned}$$

د  $x_1 = -2 + \sqrt{4+k}$  په ځای کې یو نسبي مینیموم پروت دی، که  $k > -4$  وي.

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{4}x_2^2 + 2 \cdot x_2 - \frac{1}{4}k + 2 \right) &= \left[ \frac{1}{4} \cdot (8 + 4 \cdot \sqrt{4+k} + k) + 2 \cdot (-2 - \sqrt{4+k}) - \frac{1}{4}k + 2 \right] = \\ &= -\sqrt{4+k} < 0 \end{aligned}$$

د  $x_2 = -2 - \sqrt{4+k}$  په ځای کې یو نسبي خورا ټیټکی پروت دی، که  $k > 0$  وي.

د  $k = -4$  لپاره  $\sqrt{4+k} = 0$  دی، یعنې  $f_k''(x_{1/2}) = 0$  په دې حالت کې د  $x_{1/2}$  په ځای کې په حقیقت کې یو پروت-ولار تانجنت شتون لري مگر نه افراطي ارزښت.

ت – د انعطاف ټکی یا اوړونټکی

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left( \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 \right)}_{=0} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 = 0 \mid \cdot 4 \Leftrightarrow x^2 + 8x - k + 8 = 0$$

$$p = 8; \quad q = -k + 8 \Rightarrow D = \left( \frac{p}{2} \right)^2 - q = 16 - (-k + 8) = 16 + k - 8 = 8 + k$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = -4 + \sqrt{8+k} \\ x_1 = -4 - \sqrt{8+k} \end{array} \right. \text{ für } k \geq -8$$

د  $k \geq 0$  لپاره  $x_1$  او  $x_2$  ممکنه اوږونتکي يا د انعطاف ټکي دي.

د  $k < 0$  لپاره اوږونتکي نه شته

د اوږونځايونو ازماښت:  $f_k'''(x_{1/2}) \neq 0$

$$f_k'''(x_{1/2}) = \left( \frac{1}{8}x_{1/2}^2 + \frac{3}{2}x_{1/2} - \frac{1}{8}k + 3 \right) \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}x_{1/2}}}{x_{1/2}}$$

که  $(\dots) \neq 0$  وي نو لاس ته راځي، چې اوږونتکي په  $x_{1/2}$  کې.

منځميرنه:

$$x_1^2 = (-4 + \sqrt{8+k})^2 = 24 - 8 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$x_2^2 = (-4 - \sqrt{8+k})^2 = 24 + 8 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{8}k + 3 &= \left[ \frac{1}{8}(24 - 8 \cdot \sqrt{4+k} + k) + \frac{3}{2}(-4 + \sqrt{8+k}) - \frac{1}{8}k + 3 \right] = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{8+k} \neq 0 \end{aligned}$$

د  $x_1 = -4 + \sqrt{8+k}$  لپاره يو اوږونځای يا د انعطاف ځای دی.

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}x_2^2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{8}k + 3 &= \left[ \frac{1}{8}(24 + 8 \cdot \sqrt{4+k} + k) + \frac{3}{2}(-4 - \sqrt{8+k}) - \frac{1}{8}k + 3 \right] = \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{8+k} \neq 0 \end{aligned}$$

د  $x_2 = -4 - \sqrt{8+k}$  لپاره يو اوږونتکي يا د انعطاف ټکي دی.

ب- د سطحې د مساحت ټوليزه شميرنه

صفرخايونه فقط د  $k \geq 0$  لپاره شتون لري  $P_{k \times 1/2} (\pm \sqrt{k} | 0)$

دا انټيگرال غواړو وشميرو:

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x) dx = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx}_{I} - k \cdot \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} e^{\frac{1}{2}x} dx}_{II} = I - k \cdot II$$

ټوليز حل I مخ له مخه ورکول کيږي

$$\int x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = (2x^2 - 8x + 16) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

حل II:

$$\int e^{\frac{1}{2}x} dx \quad \text{Substitution: } u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2 \cdot du$$

$$\Rightarrow \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot \int e^u du = 2 \cdot e^u = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

سره راټولول يا يوځای کول:

$$\int f_k(x) dx = I - k \cdot II = (2x^2 - 8x + 16) \cdot e^{\frac{1}{2}x} - k \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C =$$

$$= (2x^2 - 8x + 16 - 2k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

د پولو ځای په ځای کونه يا ايښونه:

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x) dx &= \left[ (2x^2 - 8x + 16 - 2k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \\ &= (2k - 8\sqrt{k} + 16 - 2k) \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{k}} - (2k + 8\sqrt{k} + 16 - 2k) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{k}} \\ &= (-8\sqrt{k} + 16) \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{k}} - (8\sqrt{k} + 16) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{k}} \end{aligned}$$

د فزيکي سطحې پاره باور لري:

$$A_k = \left| \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x) dx \right| = \left| (-8\sqrt{k} + 16) \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{k}} - (8\sqrt{k} + 16) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{k}} \right|$$

الف-

$$K=-4$$

$$k < 0 \text{ چي } \text{صفرخای نه شته، } P_{k_y}(0 | -k) \Rightarrow P_{-4_y}(0 | 4)$$

افراطي خای نه شته، خکه د  $k=-4$  لپاره شرط  $k > -4$  پوره نه دی

$$x_{k_w1} = -4 + \sqrt{8+k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{-4_w1} = -4 + \sqrt{8-4} = -4 + \sqrt{4} = -2 \Rightarrow f_{-4}(x_{-2_w1}) \approx 2,94$$

$$x_{-4_w2} = -4 - \sqrt{8-4} = -4 - \sqrt{4} = -6 \Rightarrow f_{-4}(x_{-4_w2}) \approx 1,99$$

$$K=-2$$

$$k < 0 \text{ چي } \text{صفرخای نه شته، } P_{k_y}(0 | -k) \Rightarrow P_{-2_y}(0 | 2)$$



$$x_{kMin} = -2 + \sqrt{4+k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{-2Min} = -2 + \sqrt{4-2} = -2 + \sqrt{2} \approx -0,59 \Rightarrow f_{-2}(x_{-2Min}) \approx 1,75$$

$$x_{-2Max} = -2 - \sqrt{4-2} = -2 - \sqrt{2} \approx -3,41 \Rightarrow f_{-2}(x_{-2Max}) \approx 2,48$$

$$x_{kw1} =$$

$$= -4 + \sqrt{8+k} \Rightarrow x_{-2w1} = -4 + \sqrt{8-2} = -4 + \sqrt{6} \approx -1,55 \Rightarrow f_{-2}(x_{-2w1}) \approx 2,03$$

$$x_{-4w2} = -4 - \sqrt{8-2} = -4 - \sqrt{6} \approx -6,45 \Rightarrow f_{-2}(x_{-2w2}) \approx 1,73$$

$$k = 0$$

$$P_{ky}(0|-k) \Rightarrow P_{0y}(0|0)$$

$$\text{دبل صفر خايونه } P_{kx1/2}(\pm\sqrt{k}|0) \Rightarrow P_{0x1/2}(0|0)$$

$$x_{kMin} = -2 + \sqrt{4+k} \Rightarrow x_{0Min} = -2 + \sqrt{4+0} = -2 + \sqrt{4} = 0 \Rightarrow f_0(x_{0Min}) = 0$$

$$x_{0Max} = -2 - \sqrt{4+0} = -2 - \sqrt{4} = -4 \Rightarrow f_0(x_{0Max}) \approx 2,17$$

$$x_{kw1} = -4 + \sqrt{8+k} \Rightarrow x_{0w1} = -4 + \sqrt{8+0} = -4 + \sqrt{8} \approx -1,17 \Rightarrow f_0(x_{0w1}) \approx 0,76$$

$$x_{0w2} = -4 - \sqrt{8+0} = -4 - \sqrt{8} \approx -6,83 \Rightarrow f_0(x_{0w2}) \approx 1,53$$

$$k = 2$$

$$P_{ky}(0|-k) \Rightarrow P_{2y}(0|-2)$$

$$P_{kx1/2}(\pm\sqrt{k}|0) \Rightarrow P_{2x1/2}(\pm\sqrt{2} \approx \pm 1,41|0)$$

$$x_{kMin} = -2 + \sqrt{4+k} \Rightarrow x_{2Min} = -2 + \sqrt{4+2} = -2 + \sqrt{6} \approx 0,45 \Rightarrow f_2(x_{2Min}) \approx -2,25$$

$$x_{2Max} = -2 - \sqrt{4+2} = -2 - \sqrt{6} \approx -4,45 \Rightarrow f_2(x_{2Max}) \approx 1,92$$

$$x_{k_{w1}} = -4 + \sqrt{8+k} \Rightarrow x_{2_{w1}} = -4 + \sqrt{8+2} = -4 + \sqrt{10} \approx -0,84 \Rightarrow f_2(x_{2_{w1}}) \approx -0,85$$

$$x_{2_{w2}} = -4 - \sqrt{8+2} = -4 - \sqrt{10} \approx -7,16 \Rightarrow f_2(x_{2_{w2}}) \approx 1,37$$

$$k = 4$$

$$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{4_y}(0|-4)$$

$$P_{k_{x1/2}}(\pm\sqrt{k}|0) \Rightarrow P_{4_{x1/2}}(\pm\sqrt{4} = \pm 2|0)$$

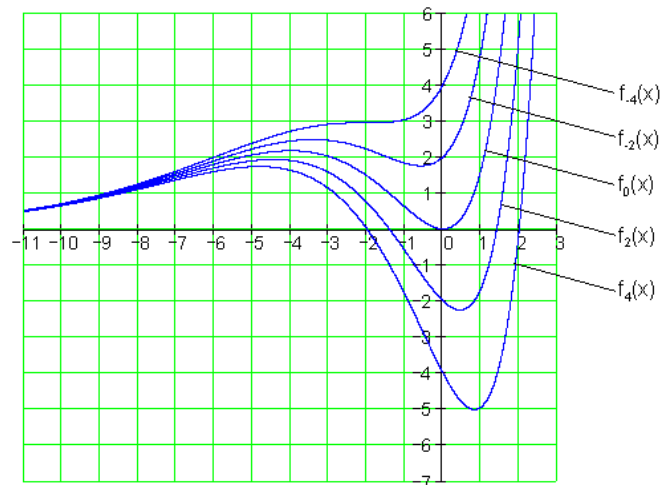
$$x_{k_{\min}} = -2 + \sqrt{4+k} \Rightarrow x_{4_{\min}} = -2 + \sqrt{4+4} = -2 + \sqrt{8} \approx 0,83 \Rightarrow f_4(x_{4_{\min}}) \approx -5,01$$

$$x_{4_{\max}} = -2 - \sqrt{4+4} = -2 - \sqrt{8} \approx -4,83 \Rightarrow f_4(x_{4_{\max}}) \approx 1,73$$

$$x_{k_{w1}} = -4 + \sqrt{8+k} \Rightarrow x_{4_{w1}} = -4 + \sqrt{8+4} = -4 + \sqrt{12} \approx -0,54 \Rightarrow f_4(x_{4_{w1}}) \approx -2,84$$

$$x_{4_{w2}} = -4 - \sqrt{8+4} = -4 - \sqrt{12} \approx -7,46 \Rightarrow f_4(x_{4_{w2}}) \approx 1,24$$

د فزیکي سطحې لپاره  $x \in \mathbb{R}$  او  $k \in \mathbb{R}$  د  $f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

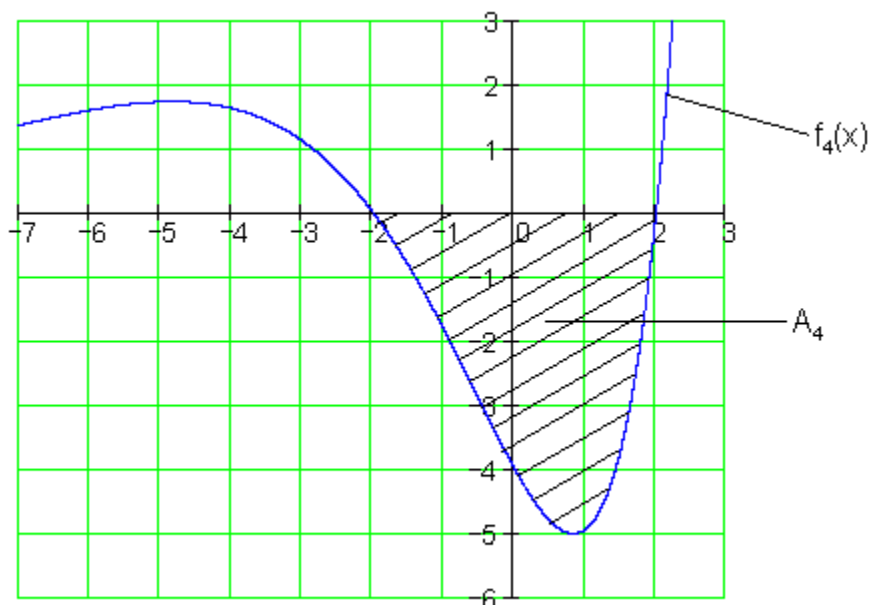


د فزیکي سطحې لپاره باور لري:

$$A_k = \left| \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x) dx \right| = \left| (-8\sqrt{k} + 16) \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{k}} - (8\sqrt{k} + 16) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{k}} \right|$$

په ځانګړې توګه د  $k=4$  لپاره باور لري:

$$\begin{aligned} A_4 &= \left| \int_{-\sqrt{4}}^{\sqrt{4}} f_4(x) dx \right| = \left| (-8\sqrt{4} + 16) \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{4}} - (8\sqrt{4} + 16) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{4}} \right| \\ &= \left| (-8 \cdot 2 + 16) \cdot e - (8 \cdot 2 + 16) \cdot e^{-1} \right| = \left| -32 \cdot e^{-1} \right| \approx \left| -11,772 \right| = \underline{\underline{11,772FE}} \end{aligned}$$



ساده مشتق- او انټيګرال شميرنه (د يوه ساده تابع رابيلونه او ورګډونه)

تابع	مشتق	بنسٽيزه تابع
$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$F(x) = k \cdot x + C$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x + C \quad (x > 0)$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$F(x) = \ln x  + C \quad (x \neq 0)$

د مشتق - او انٽيگرالشميرنو سره مخامخ كول

د ثابتي قانون

$f(x) = k \cdot u(x)$ mit $k = \text{konstant}$ $\int f(x) dx = \int k \cdot u(x) dx = k \cdot \int u(x) dx$ = ثابتہ يا همغه	$f(x) = k \cdot u(x)$ mit $k = \text{konstant}$ $\Rightarrow f'(x) = k \cdot u'(x)$ = ثابتہ يا همغه
--	---

بيلگه:	$f(x) = 3x^2 \Rightarrow k = 3 \quad u(x) = x^2$ $\int f(x) dx = 3 \cdot \int u(x) dx = 3 \cdot \int x^2 dx$ $= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = \underline{\underline{x^3 + C}}$	بيلگه:	$f(x) = 3x^4 \quad k = 3 \quad u(x) = x^4$ $\Rightarrow u'(x) = 4x^3$ $f'(x) = k \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$
	$f(x) = u(x) \pm v(x)$ $\int f(x) dx = \int u(x) dx \pm \int v(x) dx$		<b>د جمعي قانون Summenregel</b> $f(x) = u(x) \pm v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
بيلگه:	$f(x) = x^2 + x + 1$ $\int f(x) dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int 1 dx$ $= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$	بيلگه:	$f(x) = 5x^2 + 3x$ $u(x) = 5x^2 \quad v(x) = 3x$ $\Rightarrow u'(x) = 10x \quad v'(x) = 3$ $f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}}$

### د مشتقشميرني لپاره نور قوانين

د ضرب قانون:  $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow$  in Kurzform:  $f' = u' \cdot v + u \cdot v'$

بيلگه: دالمانې پښتو: د... او... سره

$$f(x) = x \cdot e^x \text{ mit } u(x) = x \text{ und } v(x) = e^x$$

$$f' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u'(x) = 1; v'(x) = e^x$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$$

د وېش قانون: دالمانې پښتو: په لنډه بڼه:

$$f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

لاس ته اورنه په لنډه بڼه

بيلگه:  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  د  $u(x) = e^x$  او  $v(x) = x$  سره

$$f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$u'(x) = e^x; v'(x) = 1; v^2 = x^2$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

ځنځيزي قانون: د الماني پښتو: کين: د باندني مشتق بنی: دننني مشتق

$$f(x) = f[z(x)] \Rightarrow f'(x) = \underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

دننني مشتق      دباندي مشتق

بيلگه:  $f(x) = e^{2x}$

د  $z = 2x$  سره  $f(z) = e^z$  لاس ته راځي

$$f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

$$f'(z) = e^z; z'(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = e^z \cdot 2 = \underline{\underline{2 \cdot e^{2x}}}$$

تمرینونه: د مشتق تمرینونه د ضربقانون، وېش قانون، او زنځيري قانونو سره

د لاندي توابعو مشتق تاسو ته د معلومو قوانينو له مخي وشمېری.

$$f(x) = (1 - e^{ax})^2 \quad \text{دويم} \quad f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} \quad \text{اول}$$

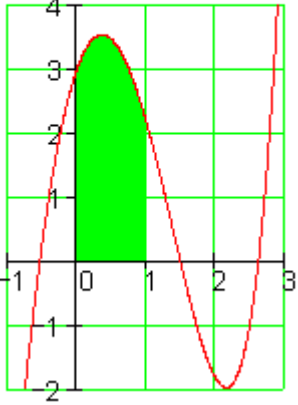
$$f(x) = (x+1)e^x \quad \text{څلورم} \quad f(x) = (e^{2x} + e^{-x})^2 \quad \text{دريم}$$

$$f(x) = a(x-3)e^{4x-3} \quad \text{اوم} \quad f(x) = (3-2x)e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{پنځم}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}(x^2-4) \quad \text{لسم} \quad f(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{نهم} \quad f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \quad \text{اتم} \quad f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$$

د انټيگرال شميرنې لپاره نورې لارې يا قوانين

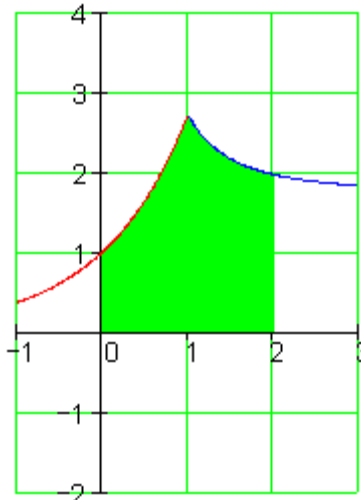
د انټيگرالونو پوله بدلونه:

$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{oder} \quad - \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$	<p>د انټيگرېشن پولو بدلون له لارې د انټيگرال مخنځېبه تغير خوري</p>
<p><math>f(x) := 3e^x - 6x^2</math></p> 	<p>دا په نخښه شوي سطحه دي وشميرل ش</p> $\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (3e^x - 6x^2) dx \\ &= 3 \int_0^1 e^x dx - 6 \int_0^1 x^2 dx = \\ &= 3 \int_0^1 e^x dx + 6 \int_1^0 x^2 dx \\ &= [3e^x]_0^1 + [2x^3]_1^0 \\ &= 3e^1 - 3e^0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \\ &= 3e^1 - 5 \approx \underline{\underline{3,155}} \end{aligned}$

## صفرانتيگرال

<p>که په ټاکلي انتيگرال کي کښته اوپورته پولي سره برابري يامساوي وي، نود ټاکلي انتيگرال ارزښت صفر دی.</p>	$\int_a^a f(x) dx = 0$
--	------------------------

د انتگرال جمع

<p>د ټول انتيگرال ارزښت په برخه ساحو انتيگرالونو د جمع کوني يا يو پر بل زياتوني له لاري منځ ته راځي.</p>	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
	$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} + (e-1) & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ <p>په نخښه شوي سطحه دي وشميل</p> $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 \left( \frac{1}{x^2} + e - 1 \right) dx$ $= [e^x]_0^1 + \left[ -\frac{1}{x} + e \cdot x - x \right]_1^2$ $= e^1 - e^0 + \left[ -\frac{1}{2} + 2e - 2 \right] - [-1 + e - 1]$ $\approx \underline{\underline{3,937}}$

تمرینونه: مشتق – او انتيگرال شمېرنه د  $e$  تابع سره.

د لاندې توابعو مشتق وشمېری.

اول -  $f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$  دویم -  $f(x) = \frac{3}{2} e^{-5x^2 - 3x}$



$$f(x) = -e^{t-x} - 2t \cdot e^{-tx} \quad \text{خلورم} \quad f(x) = -4e^x (e^{-x} + 3) \quad \text{دریم}$$

$$f(x) = t(e^{-x} - 3x^2) \quad \text{شپيرم} \quad f(x) = t \cdot e^{2-3x} - 6e^{x^2+3} \quad \text{پنځم}$$

د لاندې توابعو انټيگرال ونيسی او د مشتق له لاي يې ټيکوالی و ازمایی

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \quad \text{اتم} \quad f(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) \quad \text{اوم}$$

$$f(x) = t^2x(x^2 - 8x) \quad \text{لسم} \quad f(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e \quad \text{نهم}$$

خوابونه:

د مشتق تمرینونه د ضربقانون، وېش قانون، او زنځيري قانونو سره |

نتیجې او مفصل خوابونه. نتیجې:

$$f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} \Rightarrow f'(x) = 2(x+a - e^{2x-3}) \quad \text{لومړی}$$

$$f(x) = (1 - e^{ax})^2 \Rightarrow f'(x) = -2a \cdot e^{ax} (1 - e^{ax}) \quad \text{دویم}$$

$$f(x) = (e^{2x} + e^{-x})^2 \Rightarrow f'(x) = 2(e^{2x} + e^{-x}) \cdot (2e^{2x} - e^{-x}) \quad \text{دریم}$$

$$f(x) = (x+1)e^x \Rightarrow f'(x) = (x+2)e^x \quad \text{خلورم:-}$$

$$f(x) = (3-2x)e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{پنځم}$$

$$f(x) = a(x-3)e^{4x-3} \Rightarrow f'(x) = a \cdot e^{4x-3}(4x-11) \quad \text{شپيرم:}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+2x-1}{e^x} \quad \text{اووم:}$$

$$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \quad \text{اتم:}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{نهم:}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}(x^2-4) = x - \frac{4}{x} = x - 4x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} \quad \text{لسم:}$$

## مفصل حوابونه

لومری:

د لاندي الماني پينتو: زنجيري لار يا قانو

$$f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

$$\text{Kettenregel: } u(x) = (x+a)^2 \Rightarrow u'(x) = 1 \cdot 2(x+a)$$

$$v(x) = e^{2x-3} \Rightarrow v'(x) = 2 \cdot e^{2x-3}$$

$$f'(x) = 2(x+a) - 2 \cdot e^{2x-3} = \underline{\underline{2(x+a - e^{2x-3})}}$$

دويم:

$$f(x) = (1 - e^{ax})^2 = f[z(x)] \Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

$$z(x) = (1 - e^{ax}) \Rightarrow z'(x) = -a \cdot e^{ax} \quad \text{دننی مشتق:}$$

$$z(x) = (1 - e^{ax}) \Rightarrow z'(x) = -a \cdot e^{ax} \quad \text{دندنی مشتق:}$$

$$f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z = 2(1 - e^{ax}) \quad \text{دبانندی مشتق:}$$

$$f'(x) = 2(1 - e^{ax}) \cdot (-a \cdot e^{ax}) = \underline{\underline{-2a \cdot e^{ax} (1 - e^{ax})}}$$

$$f(x) = (e^{2x} + e^{-x})^2 = f[z(x)] \Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x) \quad \text{دریم:}$$

$$z(x) = (e^{2x} + e^{-x}) \Rightarrow z'(x) = 2e^{2x} - e^{-x} \quad \text{دندنی مشتق:}$$

$$f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z = 2(e^{2x} + e^{-x}) \quad \text{دبانندی مشتق:}$$

$$f'(x) = \underline{\underline{2(e^{2x} + e^{-x}) \cdot (2e^{2x} - e^{-x})}}$$

څلورم:

$$f(x) = (x+1)e^x = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = (x+1); u' = 1; v = e^x; v' = e^x$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)e^x = [1+(x+1)]e^x = \underline{\underline{(x+2)e^x}}$$

پنځم:

$$f(x) = (3-2x)e^{-\frac{1}{2}x} = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = (3-2x); u' = -2; v = e^{-\frac{1}{2}x}; v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (3-2x) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}(3-2x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} =$$

$$= \underline{\underline{\left(x - \frac{7}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

شپيرم:

$$f(x) = a(x-3)e^{4x-3} = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = a(x-3); u' = a; v = e^{4x-3}; v' = 4e^{4x-3}$$

$$f'(x) = a \cdot e^{4x-3} + a(x-3) \cdot 4e^{4x-3} = \underline{\underline{a \cdot e^{4x-3} (4x-11)}}$$

اووم:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{e^x} = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = x^2 + 1; u' = 2x; v = e^x; v' = e^x; v^2 = e^x \cdot e^x$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - (x^2 + 1)e^x}{e^x \cdot e^x} = \underline{\underline{\frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x}}}$$

اتم:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = e^x - 1; u' = e^x; v = e^x + 1; v' = e^x; v^2 = (e^x + 1)^2$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x[(e^x + 1) - (e^x - 1)]}{(e^x + 1)^2} = \underline{\underline{\frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}}}$$

نهم:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = x; u' = 1; v = x-1; v' = 1; v^2 = (x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{(x-1)^2}}}$$

لسم:

$$f(x) = \frac{1}{x}(x^2 - 4) = x - \frac{4}{x} = x - 4x^{-1}$$

$$f'(x) = 1 - (-1 \cdot 4x^{-2}) = 1 + \frac{4}{x^2}$$

خوابونه

د کور د  $e$  - تابعو مشتق او انتيگرالونه I

نتيجي او مفصل خوابونه . نتيجي:

$$f(x) = e^{-4x} - e^{4x} \Rightarrow f'(x) = -4e^{-4x} - 4e^{4x} = -4(e^{-4x} + e^{4x})$$

لومړی:

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}(-10x-3)e^{-5x^2-3x}$$

دويم:

دريم:

$$f(x) = -4e^x(e^{-x} + 3) = -4e^x \cdot e^{-x} - 12e^x = -4 - 12e^x \Rightarrow f'(x) = -12e^x$$

$$f(x) = -e^{t-x} - 2t \cdot e^{-tx} \Rightarrow f'(x) = e^{t-x} + 2t^2 \cdot e^{-tx}$$

څلورم:

$$f(x) = t \cdot e^{2-3x} - 6e^{x^2+3} \Rightarrow f'(x) = -3t \cdot e^{2-3x} - 12x \cdot e^{x^2+3}$$

پنځم:

شپږم:

$$f(x) = t(e^{-x} - 3x^2) = t \cdot e^{-x} - 3t \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = -t \cdot e^{-x} - 6t \cdot x = -t(e^{-x} + 6x)$$

اووم:

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{16} \int (x^2 - 3e^x) dx = \frac{1}{16} \left[ \frac{1}{3}x^3 - 3e^x \right] + C$$

$$F'(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) = f(x)$$

اتم:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \Rightarrow F(x) = \int \left( x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3 \cdot \ln|x| + C$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3 \cdot \frac{1}{x} = f(x)$$

نهم:

$$f(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e \Rightarrow F(x) = \int \left( t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}t \cdot x^2 - \frac{3}{2}e^x + t^2 \cdot x + 2e \cdot x + C$$

$$F'(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = f(x)$$

لسم:

$$f(x) = t^2x(x^2 - 8x) = t^2(x^3 - 8x^2) \Rightarrow F(x) = t^2 \int (x^3 - 8x^2) dx =$$

$$t^2 \left( \frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 \right) + C$$

$$F'(x) = t^2(x^3 - 8x^2) = t^2x(x^2 - 8x) = f(x)$$

مفصل خُوابونه:

لومری:

$$f(x) = e^{-4x} - e^{4x} \Rightarrow f'(x) = -4e^{-4x} - 4e^{4x} = -4(e^{-4x} + e^{4x})$$

مشتق د ضرب قانون له مخي مخ ته بيول كيږي

دويم:

$$\begin{aligned}
 f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x} &\Rightarrow f'(x) = (-10x-3) \cdot \frac{3}{2} \cdot e^{-5x^2-3x} \\
 &= \frac{3}{2}(-10x-3)e^{-5x^2-3x} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}(10x+3)e^{-5x^2-3x}}}
 \end{aligned}$$

دریم:

$$\begin{aligned}
 f(x) = -4e^x(e^{-x} + 3) &= -4 \cdot e^x \cdot e^{-x} - 4 \cdot 3 \cdot e^x \\
 &= -4 \cdot e^{x-x} - 12 \cdot e^x = -4 \cdot e^0 - 12 \cdot e^x \\
 &= -4 - 12 \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{-12e^x}}
 \end{aligned}$$

څلورم:

$$\begin{aligned}
 f(x) = -e^{t-x} - 2t \cdot e^{-tx} &\Rightarrow f'(x) = (-1)(-e^{t-x}) - (-t \cdot 2t \cdot e^{-tx}) \\
 &= \underline{\underline{e^{t-x} + 2t^2 \cdot e^{-tx}}}
 \end{aligned}$$

پنځم:

$$\begin{aligned}
 f(x) = t \cdot e^{2-3x} - 6e^{x^2+3} &\Rightarrow f'(x) = -3t \cdot e^{2-3x} - 2x \cdot 6e^{x^2+3} \\
 &= \underline{\underline{-3t \cdot e^{2-3x} - 12x \cdot e^{x^2+3}}}
 \end{aligned}$$

شپږم:

$$\begin{aligned}
 f(x) = t(e^{-x} - 3x^2) &= t \cdot e^{-x} - 3t \cdot x^2 \\
 \Rightarrow f'(x) = -t \cdot e^{-x} - 2 \cdot 3t \cdot x &= -t \cdot e^{-x} - 6t \cdot x = \underline{\underline{-t(e^{-x} + 6x)}}
 \end{aligned}$$

اووم:

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) dx = \frac{1}{16} \int (x^2 - 3e^x) dx = \frac{1}{16} \left[ \frac{1}{3}x^3 - 3e^x \right] + C$$

$$F'(x) = \frac{1}{16} \left( 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 - 3e^x \right) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) = f(x)$$

اتم:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x) &= \int \left( x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 3 \cdot \ln |x| + C \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3 \cdot \ln |x| + C \end{aligned}$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3 \cdot \frac{1}{x} = f(x)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \text{ und } f(x) = \ln |x| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \text{ يادونه:}$$

نهم:

$$f(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \left( t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e \right) dx = \frac{1}{2}t \cdot x^2 - \frac{3}{2}e^x + t^2 \cdot x + 2e \cdot x + C$$

$$F'(x) = \frac{2}{2}t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = f(x)$$

لسم:



$$f(x) = t^2 x(x^2 - 8x) = t^2 (x^3 - 8x^2)$$

$$\Rightarrow F(x) = t^2 \int (x^3 - 8x^2) dx = t^2 \left( \frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 \right) + C$$

$$F'(x) = t^2 \left( \frac{4}{4}x^3 - 3 \cdot \frac{8}{3}x^2 \right) = t^2 (x^3 - 8x^2) = t^2 x(x^2 - 8x) = f(x)$$

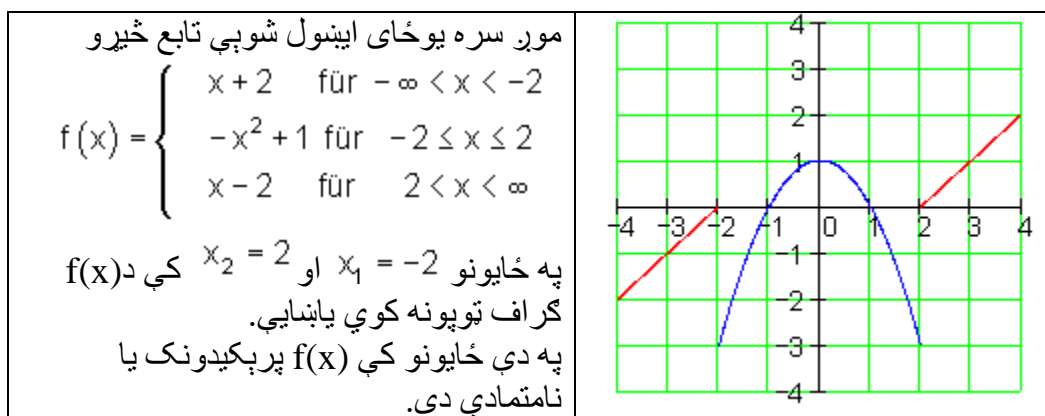
### اتم: ناپرېکيدنوالی يا متماديت، مشتق وروالی او انتيگرالوروالی

د ناپرېکيدنوالی يا متمادين کلمه دي ليدور روښانه يا تشریح شي.

يو تابع  $f(x)$  هلته په يوه انتروال  $[a; b]$  کي متمادي يا ناپرېکيدونکی دی، که چيرې څوک وکړای شي، چې د تابع گراف د انتروال له يوه سر څخه تر بله سره پورې داسې وکښلای شي، چې د پينسل څوکه له ځايه پورته کيدو ته اړ نه شي.

يا که چيرې تابع  $f(x)$  د گراف ټکي د يوه انتروال  $[a; b]$  په دننه کي بي له کنډلو يا نښلولو يو بل سره نښتي وي، بي له دي چې کوم توپونه تري رامنځ ته شي، نو بيا تابع  $f(x)$  په انتروال  $[a; b]$  کي ناپرېکيدونکی يا متمادي دی.

بيلگه:



د متمدادي يا ناپرېکيدونکو توابعو لپاره بيلگي:

هر ټولراشنل تابع په خپل تعريفورشو ناپرېکيدونکی دی.

هر مات-يا کسري تابع په خپل تعريفورشو ناپرېکيدونکی دی. (يعني فقط هلته پرېکيدونکی دی، چيرته چې ماتلاندي يا مخرج صفرخپونه لري، ځکه چې هلته تابع تعريف نه ده).

د طبيعي پوهنو ټولگيزي يا کلاسيکي څيړنو لپاره باورلري: طبيعت ټوپونه نه وهي.

د وخت سره د نباتاتو او نورو ژونديو وده.

له دې امله ټولي طبيعي پيښي ناپرېکيدونکي يا متمدادي ځغلي په يوه بخار ډېگ کې د تودوخې جگوالی.

پرېکيدونکي يا نامتمدادي (ټوپډوله) تغيرات هم شته لکه د پوست قيمت جگيدل يا د شيانو په نرخ کې ارزاني.

**د ناپرېکيدونکي يا متمداديت شميرپوهنيز تعريف ياپيژند:**

د  $f(x)$  تعريفډبرې يا سټ دي  $D_f$  وي او ارزښتډبرې يې  $W_f$ .  
تابع  $f(x)$  د  $x = x_0$  په ځای کې د  $x_0 \in D_f$  سره ټيک هلته ناپرېکيدونکي يا متمدادي ده، که

← تابع ارزښت  $f(x_0)$  شتون لري، دا په دې معنا چې  $f(x_0) \in W_f$ ,

← د  $x = x_0$  لپاره د  $f(x)$  پوله ارزښت شتون لري

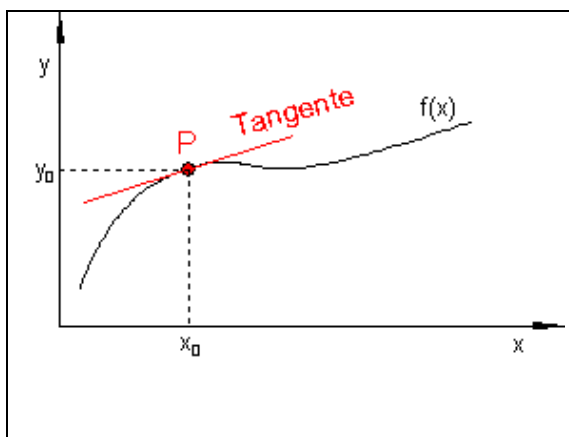
او د يوه ټاکلي عدد  $g$  سره برابر دی او که

←  $f(x_0) = g$  باور ولري.

که له دې شرايطو فقط يو هم پوره نه وي، نو بيا تابع  $f(x)$  د  $x = x_0$  په ځای کې پرېکيدونکي يا نامتمدادي دی.

### مشتقوڙو والي (رابيليدوڙو والي)

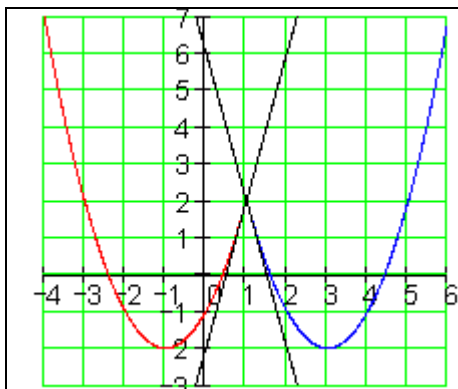
مور لومري د يوه فنكشن مشتقوڙو والي فقط ليدنيز راوړو



بيلگه: د لومري مشتق د  $x_0$  په ځاي كې د فنكشن جگوالي راكوي، چې د فنكشن گراف په ټكي  $P_0(x_0 | y_0)$  كې لمسوي او له دې سره په همدې وخت كې په ټكي  $P_0(x_0 | y_0)$  كې د فنكشن گراف جگوالي دي. سري د فنكشن جگيدنه هم وايي. له دې لاس ته راوړنو سره تابع د  $x_0$  په ځاي كې ټيك هلته مشتقوږده، كه يو يواځني جگوال شتون ولري

د  $x_0$  په ځاي كې د يوه فنكشن مشتقوڙو والي شرطونه: فنكشن بايد د  $x_0$  په ځاي كې ناپرېكيدونكي وي.

دا شرط اړين دي مگر نه پوره كيدونكي، لكه چې لاندې بيلگه بنايي.



بيلگه: دا ترڅنگ څيرونه (فنكشن) د د فنكشن  $f(x)$  گراف د

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{د } x < 1 \text{ لپاره} \\ x^2 - 6x + 7 & \text{د } x \geq 1 \text{ لپاره} \end{cases}$$

سره بنايي.

په ټكي  $(1, 2)$  كې يواځني تانجنټ شتون نه لري

$$t_1(x) = 4x - 2$$

$$t_2(x) = -4x + 6$$

.....  
 بيلگه: فنکشن  $f(x)$  په  $x = 1$  کې متمادي يا ناپرېکيدونکی دی، هلته توپ نه شته.

مگر مور په ټکي  $P(1 | 2)$  کې دوه مختلف تانجنونه لرو. دا په دې معنا چې د  $x = 1$  لپاره هم دوه مختلف تانجنونو جگوالی لرو، يعني دوه مشتقونه يا رابيليدني.

دا په دې معنا مشتق فنکشن په  $x = 1$  ځای کې يواځنی نه دی.

دا په ځان پسې لري، چې فنکشن  $f(x)$  په  $x = 1$  ځای کې مشتقور نه دی.

ليدينيز يا د ليدلو له مخي دا په دې معنای چې:

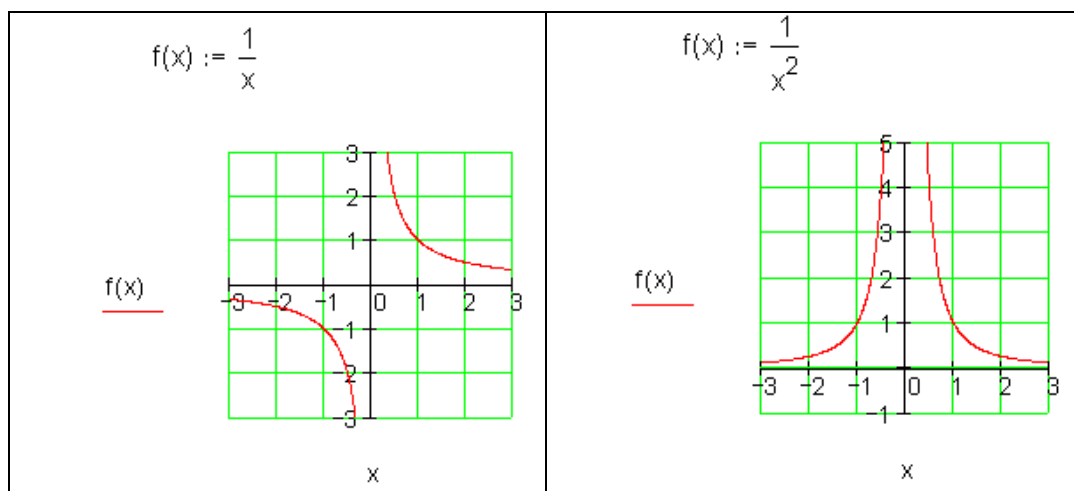
يو فنکشن  $f(x)$  د  $x_0$  په ځای کې مشتقور يا رابيليدور دی، که په دې ځای کې يې مشتق يا رابيليدنه يواځنی وي، يعني ټيک يو تانجن شتون ولري.

سړی دا هم ویلی شي، هغه ځای کې چې گراف څوکه ولري يا را مات شوی يعني گود ولري (را مات وي)، فنکشن وشتقور نه دی.

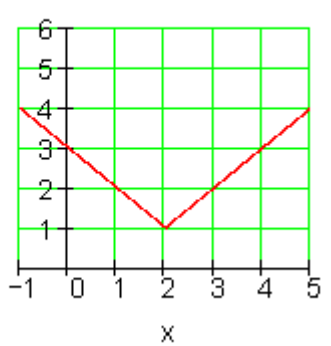
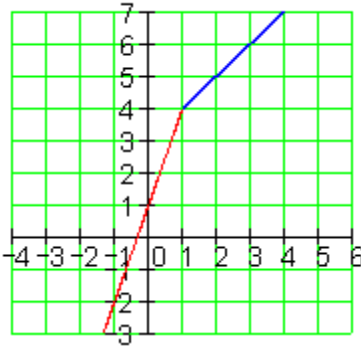
په څټ (برعکس) دا د ناپرېکيدني يا متماديت لپاره په دې معنای:

که فنکشن د  $x_0$  په ځای کې مشتقور وي، نو دا هلته ناپرېکيدونکی يا متمادي هم دی.

نورې



دواړه فنکشنونه، که غوتری توابع، د په ځای کې مشتقور نه دي، ځکه چې دا هلته تعريف نه دي يا پيژند نه لري.

<p style="text-align: center;"><math>u(x) :=  x - 2  + 1</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>x</math></p> <p style="text-align: center;"><math>u(x)</math></p> <p>د <math>x_0</math> په ځای کې په حقیقت کې یا په ریښتیني ناپرېکيدونکي یا متمادي دی، مگر مشتق نه شته (څوکه)</p>	 <p>د <math>x_0</math> په ځای کې فنکشن په حقیقت کې ناپرېکيدونکی دی، مگر مشتقور نه دی (گود لري یا مات دی)</p>
--	--

د مشتقوروالي شمير پوهنيز پيژند يا تعريف:

<p style="text-align: center;">کينه ناپرېکيدونکي پوله</p> <p style="text-align: center;">د کمښتوېش فنکشن</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ für } x < x_0$	<p style="text-align: center;">بني ناپرېکيدونکي پوله</p> <p style="text-align: center;">د کمښتوېش فنکشن</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ für } x > x_0$
--	---

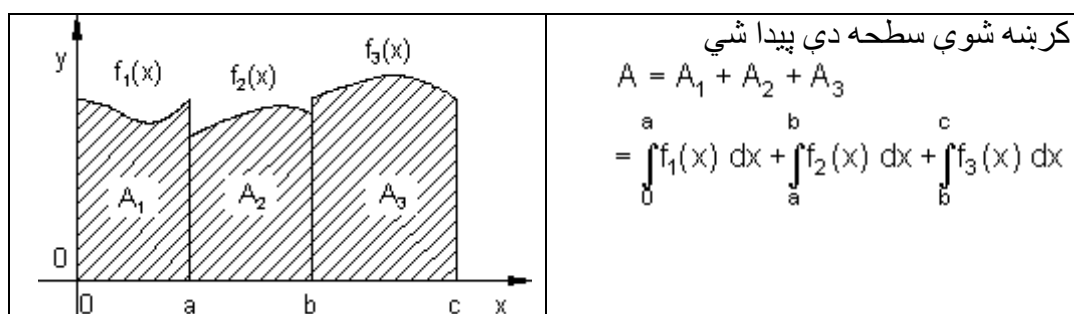
که د کين اړخ او د بني اړخ کمښتوېش فنکشنونه سره برابر وي، نو  $f(x)$  د  $x_0$  په ځای کې مشتقور دی.

بيا نو يو مشتق  $f'(x_0)$  شتون لري، د تانجنت جگوالی د گراف په ټکي  $(x_0; f(x_0))$  کې.

### انتیگر الوری:

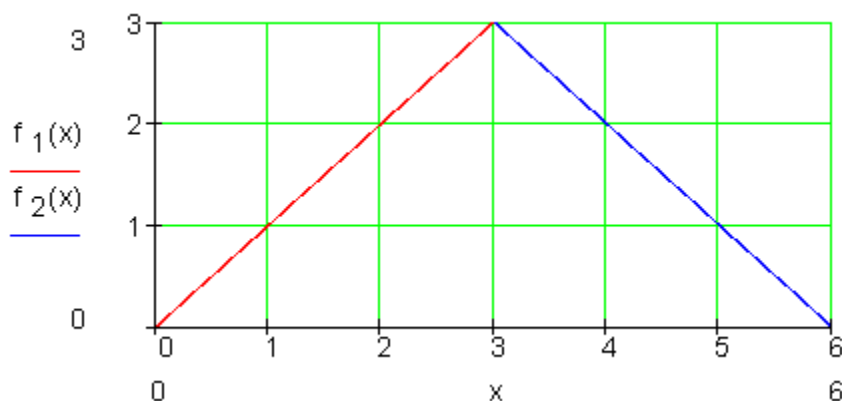
تابع انتیگر الوری دی، که دا لبر تر لزه توتیه درله یا توتیه په توتیه متمادي یا ناپربکیدونکی وی.

یلغه:



د درې گودی یا مثلث سطحه غواړو پیدا کړو.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = x \text{ für } (0 \leq x < 3) \\ f_2(x) = -x + 6 \text{ für } (3 \leq x \leq 6) \end{array} \right\}$$



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^6 f(x) dx = \int_0^3 f_1(x) dx + \int_3^6 f_2(x) dx \\
 &= \int_0^3 x dx + \int_3^6 (-x + 6) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 + \left[ -\frac{x^2}{2} + 6x \right] \Big|_3^6 \\
 &= \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} + \left[ \left( -\frac{6^2}{2} + 6 \cdot 6 \right) - \left( -\frac{3^2}{2} + 6 \cdot 3 \right) \right] = \underline{\underline{9FE}}
 \end{aligned}$$

(پورته FE د سطحې يوون يا واحد)

سره له دې ي تابع د  $P(3 | 3)$  په ځای کې مشتقور يا رابيليدور نه دی، کيدی شي سطحه له دوه برخه - انتيگرالونو پيدا شي.

توابع، چې بي د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندي بلگه:

بيلگه:

عوارو د  $f(x) = e^x$  مشتق پيدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پيدا کولي شو، يعنې لرو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

گورو، چې  $F'(x) = e^x = f(x)$  دی.

که ولرو:  $f(x) = e^{2x}$  او د پورته په څير لار شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

که  $F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$  دی، که  $F(x) = e^{2x} + C$  وي

له دې امله د بدلون قانون ته اړيو:

د ناپاکلو انتيگرالونو حل د بدلون له لارې

تراوسه مو فقط د هغو انتيگرالونو پوښتنې ځواب کړي، چې د اده توابعو مشتق باندي بيرته اړول کيده. دا سي له دې لارې لاسته رغلي بنسټ انتيگرالونو د نورو ټول حلونو

بنسټ کيښود. د بنسټ انټيگرالونو کارونه يا استعمال تل شونې نه دي، لکه لاندې بيلگه چې ښايي.  
 بيلگه: د  $f(x) = e^{2x}$  تابع انټيگرال ونيسي

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

$$\text{بدلون: } u(x) = 2x = u$$

$$\text{جوړ کړئ: } u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x) dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\text{د بدلون برعکس: } \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$\text{نو لرو: } F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$\text{ازمايننت: } F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x)$$

بيلگه: وښايي چې باور لري.

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx$$

$$\text{بدلون } u(x) = x+1 = u \text{ جوړ کړئ}$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$$

$$\int f(x) dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$\text{بیرته- يا په څټ بدلون: } \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

$$\text{نو: } \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$



بيلگه :

و بنايي چي باور لري:

$$f(x) = (3x + 6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (3x + 6)^3 dx$$

بدلون:  $u(x) = 3x + 6 = u$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int f(x) dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^3 du = \frac{u^4}{12} + C$$

ببرته بدلون:  $\frac{u^4}{12} (3x + 6)^4 + C$

$$\int f(x) dx = \int (3x + 6)^3 dx = \underline{\underline{\frac{1}{12} (3x + 6)^4 + C}}$$

بيلگه :

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

بدلون:  $u(x) = x^2 = u$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

جوړوو:

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln(u) du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln(u) - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C$$

$$: \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C$$

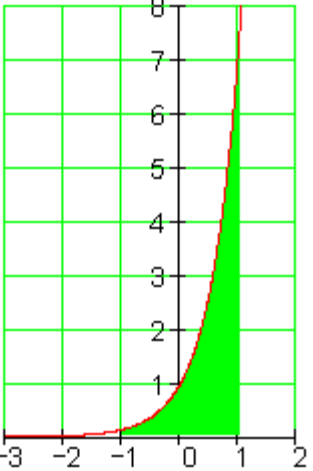
ببرته بدلون:

$$\int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

نو لرو:

د ټاکلو انټیګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انټیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کېږي.

<p><math>f(x) := e^{2 \cdot x}</math></p> 	<p>بیلګه : وینایاست:</p> $f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^1 e^{2x} dx$ <p>د انټیګرال حل د بدلون له لارې:</p> <p>۱ - بدلون <math>u(x) = 2x</math></p> <p>۲ - د <math>dx</math> په ځای کېږدی</p> $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$ <p>۳ - د پولو بدلون</p> <p>- لاندې پوله <math>u(-1) = -2</math></p> <p>- پورته پوله <math>u(1) = 2</math></p> <p>۴ - په انټیګرال کې څا په ځای کړی</p> $\frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = \frac{1}{2} [e^2 - e^{-2}] = \underline{\underline{3.627}}$
--	--

بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انټیګرال حل د بدلون له لارې

۱ - بدلون  $u(x) = x^2$

۲ - د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ - د پولې بدلون

- لاندې پوله  $u(1) = 1$

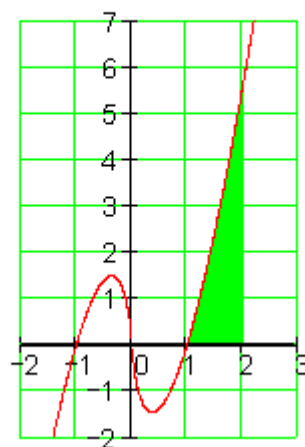
- پورته پوله  $u(2) = 4$

۴ - په انټیگرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

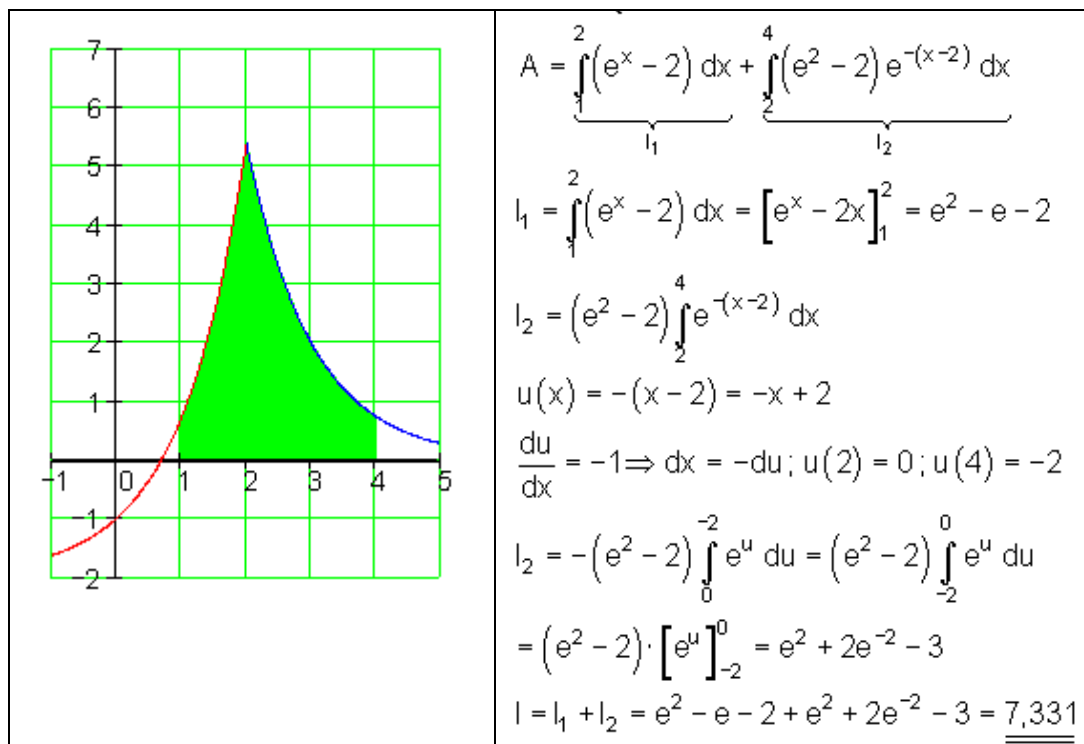
$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx 2.545$$

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



بیلگه :

$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 \\ (e^2 - 2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x < 2$ له پاره
	د $x \geq 2$ له پاره



## توتيه انتيگرالونه Partialy Integration

توتيه انتيگرالونه، چي ضرب انتيگرالونه هم بلل کيري، په انتيگرال شميرنه کي د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميرلو لپاره امکان دی. دا کيدي شي د مشتق شميرني د برعکس کوني په څير وگنل شي.

د توتيه انتيگرالوني له پاره لاندې قانون کارول کيري، چي د متمادي (نه پرېکيدونکي) توابعو  $f$  او  $g$  له پاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

دا قانون ټيک هلته گټور دی، که  $f$  مشتق نيولو سره يو ساده تابع منح ته راځي.

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنيونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انټيگرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

يا همدغسې، لکه په زياتو رياضي کتابونو کې چې پيدا کيږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

د دې مخ ته حدونو يا ترمونو لپاره گټور دی، چې لومړۍ ځان په ناټاکلي انټيگرال محدود کړو، چې دا نا اړينو حدونو څخه چې ليد مو رابندوي، ازاد يو.

بيلگه:

د بيلگې په توگه لاندې انټيگرال شميرو.

$$\int x \cdot \ln(x) dx$$

يو ساده انټيگراليدونکي تابع  $g'(x)$  او همداسې يو ساده مستقيدونکي تابع  $f(x)$  لټوو. نيسو چې  $f(x) = \ln(x)$  او  $g'(x) = x$ ، ځکه چې د  $\ln(x)$  انټيگرالونه نوې  $\ln(x)$  راکوي. اوس د  $f(x)$  مشتق نيسو(مشتق کوو) او انټيگرالوو، نو لرو:

$$g(x) = \frac{x^2}{2} \text{ او } f'(x) = \frac{1}{x}$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکینه:

اوس دی  $u$  او  $v$  په خوښه توابع وي.  $U$  او  $V$  دې د  $u$  او  $V$  لومړني توابع وي، او همداسې دې  $u'$  او  $v'$  او  $u$  د مشتقونه وي.  $u$  تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري،  $v$  تابع ده چې د انتیگرالونې له پاره لومړیتوب لري. نو باورلري:

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx &= u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \\ &= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \end{aligned}$$

### توته انتیگرالونې لار (طریقې)

د توتې انتیگرالونې گټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلگه:

کله کله کیدی شي گټور وي، چې د مساوات بنی لور ته توتې انتیگرال د څو واره انتیگرالونې وروسته بیرته راوگرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کین لور انتیگرال سره یوځای کولی شو.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$$

که کېږدو  $f(x) = \cos(x)$  او  $g'(x) = \sin(x)$ ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx.$$

که دواړو لورو ته وتون انټیگرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2 \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\cos^2(x)$$

که واره لورې په 2 ووبشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$+ C \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos^2(x)$$

بیلگه ۲ :

د ځنو انټیگرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د  $g'(x)$  له پاره یو ترم وټاکو چې په انټیگرالونو کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلگې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کیدی شي دا بل ترم، له منځه یووړل شي،.

$$\int e^x \cdot (2 - x^2) dx$$

که هر ځل  $g'(x) = e^x$  کېږدو او د  $f(x)$  له پاره، د انټیگرال لاندې ترم، نو ترې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot (2 - x^2) dx &= [e^x \cdot (2 - x^2)] - \int e^x \cdot (-2x) dx \\ &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x dx \\ &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x] \\ &= [e^x \cdot (2 - x^2 + 2x - 2)] \\ &= [e^x \cdot (2x - x^2)] + C \end{aligned}$$

بیلگه ۳ :

که له انټیگرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع یې له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسېږي (نه پایول کېږي) (نه ختمیږي) کیدی شي کله کله د ورزیاتونې له لارې (ناڅرګند شته) ضریب "1" توبه انټیگرال شي.

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = \int g'(x) \cdot \ln(x) dx$$

که  $f(x) = \ln(x)$  او  $g'(x) = 1$  کيږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln(x) dx &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

جمله :

مور د دې لاندې انټيگرال نيسو:  
ردو  $u = x$  ، نو لرو :  $du = dx$   
ردو  $dv = \cos(x) dx$  ، نو  $v = \sin(x)$  لرو  
په لاندې توگه مخ ته خو:

$$\begin{aligned}\int x \cos(x) dx &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx \\ &= x \sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انټيگرالونې يوه په خوښه ثابتې ده

د ټوټه انټيگرالونې د استعمال سره د انټيگرالونو لکه

$$\int x^2 e^x dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x) dx$$

کيده شي په همدې لار حل شي:

يوه په زړه پورې بيلگه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) dx$$



.....  
 که په پوره کره والي ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړين نه دی، چې دا دې حل ولري.  
 دا بېلگه د دوه واره ټوټه انتيگرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی :  $u = \cos(x)$  داسې چې  $du = -\sin(x) dx$

$dv = e^x dx$  داسې چې  $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيگرال حل شي، نو د ټوټه انتيگرالونې قاعده بيا استعمالوو ،  
 د دې لاندې سره :

$u = \sin(x); du = \cos(x) dx$

$v = e^x; dv = e^x dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

که دا سره يوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتيگرال لرو (بې له مخ نڅښې)،  
 نو د بڼې لور انتيگرال که کين لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتيگرالونې يوه په خوښه ثابتې ده

د کور کار:

انتيگرال د بدلون له لارې د لاندې انتيگرالونو ځوابونه، همداسې شميرنه

$$\int_0^2 \frac{4}{4-x} dx \quad \text{دويم:} \quad \int \frac{3}{4x+1} dx \quad \text{لومړی:}$$

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3} dx \quad \text{څلورم:} \quad \int \frac{2}{(1-x)^2} dx \quad \text{دريم:}$$

$$\int_{-2}^2 e^{1-x} dx \quad \text{شپږم:} \quad \int_{-2}^2 \frac{10}{(x-4)^5} dx \quad \text{پنځم:}$$

$$\int_1^2 e^{4-2x} dx \quad \text{اتم:} \quad \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx \quad \text{اووم:}$$

$$\int_0^2 \left( x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx \quad \text{لسم:} \quad \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx \quad \text{نهم:}$$

ځوابونه

انتيگرال د ساده بدلون له لارې

نتيجه: لومړی:

$$\int \frac{3}{4x+1} dx = \frac{3}{4} \cdot \ln(4x+1) + C$$

$$\int_0^2 \frac{4}{4-x} dx = 4 \cdot \ln(4) - 4 \cdot \ln(2) = 4 \cdot \ln(2) \approx 2,773$$

دويم:

$$\int \frac{2}{(1-x)^2} dx = \frac{2}{1-x} + C$$

دزيم:

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3} dx = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(2x-1)^2} + C$$

خلورم:

$$\int_{-2}^2 \frac{10}{(x-4)^5} dx = -\frac{5}{2} \left[ \frac{1}{16} - \frac{1}{1296} \right] = -\frac{25}{162} \approx -0,154$$

پنجم:

$$\int_{-2}^2 e^{1-x} dx = e^3 - e^{-1} \approx 19,718$$

شپيرم:

$$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^0 = 2 \cdot e^2 - 2 \approx 12,778$$

اووم:

$$\int_1^2 e^{4-2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3,195$$

اتم:

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^0 = 2 \cdot e^2 - 2 \approx 12,788$$

نههم:

لسم:

$$\int_0^2 \left( x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx = -2 \cdot e^0 - (-2 \cdot e^{-1}) = -2 + 2 \cdot e^{-1} \approx -1,264$$

## خوابونه

انتیگرال د ساده بدلون له لارې

مفصل خوابونه

لومړی:

$$\int \frac{3}{4x+1} dx \quad \text{Substitution: } u = 4x + 1 \quad \frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4} du$$

$$\text{سره } u = 4x + 1 \quad \frac{3}{4} \int \frac{1}{u} du = \frac{3}{4} \cdot \ln(u) + C$$

$$\int \frac{3}{4x+1} dx = \underline{\underline{\frac{3}{4} \cdot \ln(4x+1) + C}}$$

دویم:

$$\int_0^2 \frac{4}{4-x} dx \quad \text{Substitution: } u = 4 - x$$

$$u(2) = 4 - 2 = 2 \quad \text{پورته پوله} \quad u(0) = 4 \quad \text{لاندي پوله} \quad \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

$$-4 \int_4^2 \frac{1}{u} du = 4 \int_2^4 \frac{1}{u} du = \left[ 4 \cdot \ln(u) \right]_2^4 = 4 \cdot \ln(4) - 4 \cdot \ln(2)$$

$$= 4[\ln(4) - \ln(2)] = 4 \cdot \ln\left(\frac{4}{2}\right) = 4 \cdot \ln(2) \approx \underline{\underline{2,773}}$$

دزیم:

$$\int \frac{2}{(1-x)^2} dx \quad \text{Substitution: } u = 1-x \quad \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

$$\text{د } u=1-x \text{ سره} \quad -2 \int \frac{1}{u^2} du = -2 \int u^{-2} du = -2 \cdot \frac{1}{-1} \cdot u^{-1} = \frac{2}{u}$$

$$\int \frac{2}{(1-x)^2} dx = \underline{\underline{\frac{2}{1-x} + C}}$$

څلورم:

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3} dx \quad \text{Substitution: } u = 2x-1 \quad \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\text{د } U=2x-1 \text{ سره} \quad \frac{6}{2} \int \frac{1}{u^3} du = 3 \int u^{-3} du = 3 \cdot \frac{1}{-2} \cdot u^{-2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{u^2}$$

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3} dx = \underline{\underline{-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(2x-1)^2} + C}}$$

پنځم:

$$\int_{-2}^2 \frac{10}{(x-4)^5} dx \quad \text{Substitution: } u = x-4 \quad \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$$

$$u(2) = 2-4 = -2 \quad \text{پورته پوله} \quad u(-2) = -2-4 = -6 \quad \text{لاندي پوله}$$

$$\begin{aligned} 10 \int_{-6}^{-2} \frac{1}{u^5} du &= 10 \int_{-6}^{-2} u^{-5} du = \left[ 10 \cdot \frac{1}{-4} \cdot u^{-4} \right]_{-6}^{-2} = -\frac{5}{2} \cdot \left[ \frac{1}{u^4} \right]_{-6}^{-2} \\ &= -\frac{5}{2} \left[ \frac{1}{16} - \frac{1}{1296} \right] = \underline{\underline{-\frac{25}{162} \approx -0,154}} \end{aligned}$$

شپڻم:

$$\int_{-2}^2 e^{1-x} dx \quad \text{Substitution: } u = 1-x \quad \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

لاندي پوله  $u(-2) = 1 - (-2) = 3$  پورته پوله  $u(2) = 1 - 2 = -1$

$$-\int_3^{-1} e^u du = \int_{-1}^3 e^u du = [e^u]_{-1}^3 = \underline{\underline{e^3 - e^{-1} \approx 19,718}}$$

اووم:

$$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx \quad \text{Substitution: } u = \frac{1}{2}x \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

لاندي پوله  $u(0) = 0$  پورته پوله  $u(4) = 2$

$$2 \int_0^2 e^u du = 2 [e^u]_0^2 = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^0 = \underline{\underline{2 \cdot e^2 - 2 \approx 12,778}}$$

اتم:

$$\int_1^2 e^{4-2x} dx \quad \text{Substitution: } u = 4-2x \quad \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2} du$$

لاندي پوله  $u(1) = 4 - 2 = 2$  پورته پوله  $u(2) = 4 - 4 = 0$

$$-\frac{1}{2} \int_2^0 e^u du = \frac{1}{2} \int_0^2 e^u du = \left[ \frac{1}{2} e^u \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \cdot e^0 = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3,195}}$$

نهم:

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx = 4 \int_1^2 e^{4-2x} dx \quad \text{Substitution: } u = 4 - 2x \quad \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2} du$$

$$u(2) = 4 - 4 = 0 \quad \text{پورته پوله} \quad u(1) = 4 - 2 = 2 \quad \text{لاندي پوله}$$

$$-4 \cdot \frac{1}{2} \int_2^0 e^u du = 2 \int_0^2 e^u du = \left[ 2e^u \right]_0^2 = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^0 = 2 \cdot e^2 - 2 \approx \underline{\underline{12,788}}$$

لسم:

$$\int_0^2 \left( x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx = \int_0^2 (x - 1) dx - \int_0^2 e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

$$1. \text{ Integral: } \int_0^2 (x - 1) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 - x \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 - (0) = 0$$

$$2. \text{ Integral: } -\int_0^2 e^{-\frac{1}{2}x} dx \quad \text{Substitution: } u = -\frac{1}{2}x \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dx = -2du$$

$$u(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1 \quad \text{پورته پوله} \quad u(0) = 0 \quad \text{لاندي پوله}$$

$$\begin{aligned} &= (-1)(-2) \int_0^{-1} e^u du = 2 \int_0^{-1} e^u du = -2 \int_{-1}^0 e^u du = \left[ -2e^u \right]_{-1}^0 \\ &= -2 \cdot e^0 - (-2 \cdot e^{-1}) = \underline{\underline{-2 + 2 \cdot e^{-1} \approx -1,264}} \end{aligned}$$

د توتہ انتیگرالونء لپاره خو نوربط بیلگی

که چیرته د دوه توابعو انتیگرال غواړو وشمیرو، نو په زیاتو حالتونو کې دا تراوسه روښانه یا معلومه د انتیگرال لار مو بریا ته نه بیایي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

$$\text{Substitution: } u(x) = x^2 = u$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

جوړوو:

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln(u) du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln(u) - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C$$

$$\frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C$$

د بدلون په بیرته په څنډ:

$$\int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C}}$$

نو:

دا انتیگرال د بدلون قانون سره حل کیدی شي، دا چې د بدلون له لارې ضریب له منځه ځي. په عادي ډول دا حالت نه دی.

$$f(x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x)) dx = ?$$

دا انتیگرال د بدلون له لارې نه شي حل کیدی. موږ د صرب قانون لپاره د مشتقشمیرني څخه یوه ایښوونې یا په ځای کونې ته وده ورکوو.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

د ثابتې په پام کې نه نیولو له امله د دفرنخیال او انتیگرال بنسټ حملې له لارې باور لري:



$$\int f'(x) dx = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د  $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$  سره په دې پسي بايد هم باور ولري

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x)$$

د  $\int u(x) \cdot v'(x) dx$  پسي د بڼه بدلون له امله راكوي:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

د  $\int u'(x) \cdot v(x) dx$  پسي د بڼه بدلون له امله راكوي:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

د دې بڼه بدلون په ريښتوني يا حقيقت كې دا د دوه ضريبونو انټيگرال حل نه شو، مگر د  $u$  او  $v'$  او په همدې توگه د  $u'$  او  $v$  هوبڼياريه ټاكنه كيدى شي دا ويينه يا افاده داسې بڼه بدل شي، چې انټيگرال يې كيدى شي حل شي

بيلگه ۱

$$\int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^x}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C = \underline{\underline{(x-1)e^x + C}}$$

بيلگه ۲

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{k \cdot x}}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

د بدلون له لاي حل  $v' = e^{k \cdot x} \Rightarrow v = \int e^{k \cdot x} dx$

$$v = \int e^{k \cdot x} dx$$

$$u = k \cdot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = k \Rightarrow dx = \frac{1}{k} du$$

بدلون

په څټ يا بيرته بدلون:  $v = \int e^{k \cdot x} dx = \frac{1}{k} e^{k \cdot x}$

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{k \cdot x} dx &= u \cdot v - \int u' \cdot v dx = x \cdot \frac{1}{k} e^{k \cdot x} - \int 1 \cdot \frac{1}{k} e^{k \cdot x} dx = \frac{x}{k} e^{k \cdot x} - \frac{1}{k} \int \underbrace{e^{k \cdot x}}_{\frac{1}{k} e^{k \cdot x}} dx \\ &= \frac{x}{k} e^{k \cdot x} - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} e^{k \cdot x} = \frac{x}{k} e^{k \cdot x} - \frac{1}{k^2} e^{k \cdot x} = \underline{\underline{\left( \frac{x}{k} - \frac{1}{k^2} \right) e^{k \cdot x} + C}} \end{aligned}$$

بيلگه ۳ :

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \ln(x) \Rightarrow v = x \cdot \ln(x) - x$$

$$\int x \cdot \ln(x) dx = x \cdot (x \cdot \ln(x) - x) - \int 1 \cdot (x \cdot \ln(x) - x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int x \cdot \ln(x) dx = x^2 \cdot \ln(x) - x^2 - \int x \cdot \ln(x) dx + \int x dx \quad | \quad + \int x \cdot \ln(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \int x \cdot \ln(x) dx = x^2 \cdot \ln(x) - x^2 + \frac{1}{2}x^2 \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow \int x \cdot \ln(x) dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C}} \quad (x > 0)$$

بیلگه ۴

$$\int \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v'} dx = u \cdot v - \int u'v dx \quad u = x^2 \Rightarrow u' = 2x \quad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \int e^{2x} dx$$

منح شمیرنه

$$\int e^{2x} dx \quad \text{Substitution: } u = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\boxed{\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}} \quad \text{په خت بدلون} \Rightarrow \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u$$

$$\int x^2 \cdot e^{2x} dx = \underbrace{x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x}}_{u \cdot v} - \int \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} e^{2x}}_v dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} - \int x \cdot e^{2x} dx$$

$$\int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v'} dx = u \cdot v - \int u'v dx \quad u = x \Rightarrow u' = 1 \quad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

(پورته وگوری)

$$\int x \cdot e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \underbrace{\int e^{2x} dx}_{\frac{1}{2} e^{2x}} = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$\int x^2 \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \underbrace{\int x \cdot e^{2x} dx}_{\frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}} = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \left( \frac{1}{2}x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} \right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}x \cdot e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)e^{2x} + C}}$$

دا بيلگه بنايي، چي په انتيگرال کي زيات وخت ډېرې تڼلارې يو په بل پسې کارول کيږي. دا چې د ټوټه انتيگرال منځنۍ پايله (لاس ته راورن) زيات وخت څرگند يا معلوم دي، سړی دې دا د يوه انتگریشن جدول په بڼه په ياد کې وساتي.

د انتيگرېشن نورې تڼلارې او تخنيکونه هم شته، چې په دې ځای کې دې ترڅيرني لاندې دې نه نيول کيږي. د بيلگې په توگه دې ماتنسبي انتيگرېشن د ټوټه مات يا کسر ټوټه ونې په گوته شي.

يوڅو ناټاکلي انتيگرالونه:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \text{لومړی:}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad x \neq 0 \quad \text{دویم:}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \text{دریم:}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad a > 0; a \neq 1 \quad \text{څلورم:}$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad n \neq -1 \quad \text{پنځه}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad \text{شپڙم:}$$

$$\int x(ax+b)^n dx = \frac{a(n+1)x-b}{a^2(n+1)(n+2)}(ax+b)^{n+1} + C \quad n \neq -1, -2 \quad \text{اووم:}$$

$$\int \frac{1}{x(ax+b)} dx = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C \quad \text{اتم:}$$

$$\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax+b| + C \quad \text{نهم:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx = 0 \quad \text{لسم:}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad \text{يولسم:}$$

$$\int x \cdot e^{ax} dx = \frac{1}{a^2} (ax-1) e^{ax} + C \quad \text{دولسم:}$$

$$\int_{-1}^1 a^x dx = \frac{a^2-1}{a \cdot \ln(a)} \quad a > 0 \quad \text{ديارلسم:}$$

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + C \quad x > 0 \quad \text{خوارلسم:}$$

$$\int [\ln(x)]^2 dx = x \cdot [\ln(x)]^2 - 2x \cdot \ln(x) + 2x + C \quad x > 0 \quad \text{پنخلسم:}$$

$$\int x^n \ln(x) dx = x^{n+1} \left( \frac{\ln(x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) + C \quad x > 0; n \neq -1$$

شپارسم:

$$\int \frac{[\ln(x)]^n}{x} dx = \frac{[\ln(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad x > 0; n \neq -1$$

اولسم:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} = \ln|\ln(x)| + C \quad x > 1$$

اتلسم:

$$\int \frac{1}{x \cdot [\ln(x)]^n} = -\frac{1}{(n-1) [\ln(x)]^{n-1}} + C \quad x > 1; n \neq 1$$

نولسم:

يوڅو ټاکلي انټيگرالونه:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = \pi \quad \text{دويم:} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{څلورم:} \quad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx = \pi \quad \text{درېم:}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{شپږم:} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \quad \text{پنځم:}$$

$$\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}} dx = \frac{3}{8}a^2\pi \quad \text{اتم:} \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1 \quad \text{اووم:}$$

$$\int_0^{2b} \sqrt{2bx-x^2} dx = -\frac{b^2\pi}{2} \quad \text{لسم:} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx = 0 \quad \text{نهم:}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n! \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{دولسم:} \quad \int_{-1}^1 a^x dx = \frac{a^2 - 1}{a \cdot \ln(a)} \quad a > 0 \quad \text{يوولسم:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{خوارلسم:} \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad \text{ديارلسم:}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+1} dx = -\frac{\pi^2}{12} \quad \text{شپارلسم:} \quad \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{پنخلسم:}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{8} \cdot \ln(2) \quad \text{اتلسم:} \quad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1} dx = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{اولولسم:}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{نولسم:}$$

---

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Interpolation und Aproximation durch Polynime in  
Universalen Algebren . Diss . Uni. Wien

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد  
لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ  
او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه ( هندسه ) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې  
شمیرنه ، د احتمالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي – پښتو ډکشنري.



[2003 Bonn \(Germany\):](#)

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

[2003 Bonn \(Germany\):](#)

اتم: دفرنخيال برابر وړون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی )

*Differential equation Translation; An Introduction*

[Bonn \(Germany\): 2003](#)

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

[2003 Bonn \(Germany\):](#)

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

[1997 Bonn \(Germany\):](#)

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا

آبادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

بن- المان، کابل - افغانستان ۲۰۱۲ ز ک

ژباړې:

لاندي د برينککن ليکنې چې له پرينمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- 
- ۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک
  - ۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک
  - ۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک
  - ۴ - د احتمالي شمیرنه
  - ۵ - احصایه یا ستاتیستیک

لاندي کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

- ۶ - انالیزی ۱
  - ۷ - انالیزی ۲
  - ۸ - کرنبیز الجبر
  - ۹ - د شمیرپوهني بنسټونه
  - ۱۰ - د فرمولونو ټولگه
  - ۱۱ - فنکشنل انالیز
  - ۱۲ - وکتور شمیرنه
- نورې ژباړې
- ۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرنبیز الجبر
  - ۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

---

زما لیکنی

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنی ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنی برخي برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده‌کونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا ست تیوري

۱۹ - د شمیرپوهنی سم اند ( منطق ریاضي )

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنی گډې وډې لیکنی

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ - د شمیرپوهنی انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنی پښتو انگرېزي ډکشنري

- 
- ۲۵ - د شمیرپوهني پښتو ډکشنري د شمیرپوهنيزو ويونو په پښتو روښانه ونه
- ۲۶ - د زره له کومې (دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)
- ۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.
- نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي
- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه ، چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپريري:

د گروپونو تيوري

- د بنوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اومم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره بڼه ليکنه ده، چې د شمیرپوهني په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات گټور برېښي)

## د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميري شينواری د ارواښادې پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمریز کې د شينواریو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترگې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه وو) څخه وروسته د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولگي پیل او د دویم ټولگي څخه گام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتمبر د کابل طب پوهنځي. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهني ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانگه کې د پوهني وزارت درسي نساب کې دنده.

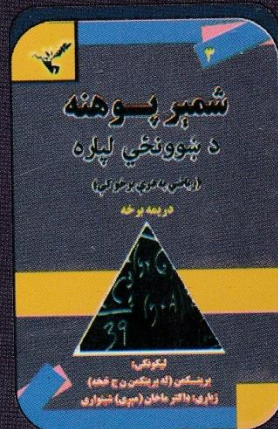
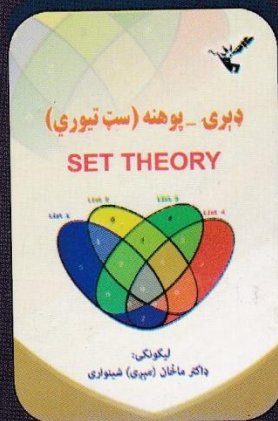
ماخان ميري په ۱۹۷۲ کې له لري د ميرمن ښاپيري سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيري سره په ۱۹۶۳ ز کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش وينا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز کې دوه بچيان وبخښل، چې څانگه او اباسين نوميري. څانگه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سایکولوژي لوستلي.

ماخان شينواري بي کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹۹۷ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شوني پولي تازه ساتي.



ډاکټر ماخان (مېرې) شینواری



د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه - جرمني

VEREN ZUR FORDERUNG DER  
AFGHANISCHEN KULTUR E.V

د خپرونو لړ (۱۲۹)

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**